



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.006/00

**Quantização de sistemas singulares via formalismo de
Hamilton-Jacobi**

Randall Guedes Teixeira

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Agosto 2000

Agradecimentos

À minha família. Em especial aos meus irmãos, Fabrício e Thiago, à tia Mara e ao tio Jaime; pelo apoio que sempre me deram.

Aos meus amigos Luciene, Orlando e Sandro, que nunca faltaram nos momentos em que mais precisei deles.

Ao professor Bruto Max Pimentel, pelos longos anos de amizade e companheirismo.

Aos funcionários do IFT, pelo auxílio que sempre me prestaram. Em especial ao saudoso Sr. Antônio Perez Rubbi.

À CAPES, pelo apoio financeiro ao longo de vários anos.

Para minha mãe. Por tudo.

“O Binômio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.

O que há é pouca gente para dar por isso.”

Álvaro de Campos (Heterônimo de Fernando Pessoa)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo detalhado do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares, fazendo sua generalização para sistemas com variáveis dinâmicas pertencentes à álgebra de Berezin. Analisamos, em especial, as condições de integrabilidade e sua relação com as condições de consistência no formalismo Hamiltoniano de Dirac. Por fim, estudamos o processo de quantização relacionado a esse formalismo, usualmente interpretado como uma quantização a “gauge livre”, e os cuidados que devemos ter com esta interpretação.

Palavras Chave: Quantização, Sistemas Singulares, formalismo de Hamilton-Jacobi, formalismo Hamiltoniano.

Área de conhecimento: 1.05.03.01-3

Abstract

In this work we present a detailed study of the Hamilton-Jacobi formalism for singular systems, making its generalization for systems containing dynamical variables which belongs to the Berezin algebra. We analyse, with particular care, the integrability conditions and its relation with the consistency conditions in Dirac's Hamiltonian formalism. Finally, we study the quantization process related to this formalism, usually interpreted as a “gauge free” quantization, and comment the necessity of caution with this interpretation.

Keywords: Quantization, Singular Systems, Hamilton-Jacobi formalism, Hamiltonian formalism.

Índice

Introdução	1
1 Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares	6
1.1 Definições básicas	7
1.2 Formalismo de Hamilton-Jacobi não singular	9
1.3 O caso singular	12
1.3.1 Equações de movimento	13
1.4 Condições de integrabilidade	15
1.4.1 Equivalência entre as condições de consistência de Dirac e as condições de integrabilidade	20
1.5 Sistemas só com vínculos de primeira classe	23
1.5.1 A integral completa e as simetrias das soluções	26
1.6 Sistemas com vínculos de segunda classe	28
2 Quantização e liberdade de gauge	36
2.1 O campo Eletromagnético livre	41
2.1.1 Quantização	45
2.2 O campo de Dirac em interação com o campo Eletromagnético	51
2.2.1 Quantização (Eletrodinâmica Quântica)	59
Comentários finais	64

Apêndice A	67
Apêndice B	73
Bibliografia	85

Introdução

O estudo de sistemas singulares é, sem dúvida, um tema de grande relevância na Teoria de Campos, como pode ser verificado na vasta literatura especializada disponível sobre o assunto. O motivo dessa importância é facilmente explicável pela relação intrínseca, estabelecida por Bergmann e Anderson [1], entre a invariância de uma teoria por transformações de gauge locais e sua singularidade: toda teoria invariante de gauge (i.e. teoria de gauge) é necessariamente singular, apesar da relação oposta não ser sempre verdadeira. Dada a importância das teorias de gauge na Física Moderna, essa relação, por si só, já justifica o interesse no estudo de sistemas singulares.

Apesar dos trabalhos pioneiros de Bergmann e seus colaboradores sobre sistemas singulares no contexto de teorias relativísticas e Relatividade Geral [2, 3, 4], o grande impulso no estudo de sistemas singulares veio com os trabalhos de Dirac no desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano para tais sistemas [5, 6, 7]. Este formalismo estabeleceu a conhecida divisão entre vínculos de primeira e segunda classes, assim como o importante fato de os vínculos de primeira classe poderem ser geradores de transformações canônicas que não mudam o estado físico do sistema.

Tais transformações canônicas podem ser identificadas com as transformações de gauge “usuais” em teorias como o Eletromagnetismo e levam a uma extensão “natural” do conceito de transformação de gauge, de forma a englobar todas as transformações geradas por vínculos de primeira classe. Será nesse sentido que a expressão “transformação de gauge” será usada ao longo deste trabalho. As questões a respeito de todos

os vínculos de primeira classe serem geradores de transformações de gauge (Conjectura de Dirac) e da forma completa do gerador dessas transformações é ainda fonte de discussão na literatura [8, 9, 10] e não serão abordadas aqui. Devemos apenas mencionar que parece haver um consenso de que esta Conjectura é válida sempre que não houver a presença de vínculos “não efetivos”, que são aqueles cujo gradiente não se anula na superfície vinculada. Essa condição engloba a grande maioria dos sistemas físicos, mas a importância do formalismo Hamiltoniano de Dirac não depende da validade desta Conjectura.

O aspecto mais importante desse formalismo é permitir uma quantização consistente dos sistemas singulares através da definição dos parênteses de Dirac, de forma a transformar os vínculos de segunda classe em igualdades fortes. Isso é importante pois, ao usar-se o Princípio de Correspondência com os parênteses de Poisson, os vínculos tornar-se-ão operadores que devem anular os estados físicos. Mas o comutador entre os operadores correspondentes a dois vínculos de segunda classe não será igual a uma combinação de outros vínculos e portanto não irá anular os estados físicos, gerando então uma ambigüidade no processo de quantização. Já ao usar-se os parênteses de Dirac a quantização passa a ser feita aplicando-se o Princípio de Correspondência a estes e não mais aos parênteses de Poisson. Com isso os vínculos de segunda classe passarão a ser identidades operatorias, e não mais condições sobre os estados físicos, eliminando assim as ambigüidades do processo.

O formalismo de Dirac revelou-se extremamente bem sucedido, tendo sido aplicado a teorias físicas importantes como QED, Relatividade Geral, Yang-Mills, Teoria de Cordas, entre outros; além de ter levado à construção do formalismo de integrais de trajetória para sistemas singulares, assim como ao desenvolvimento da simetria BRST (ver [11, 12, 13, 14] e referências lá citadas).

Apesar desse sucesso, abordagens alternativas ao formalismo de Dirac para o estudo de sistemas singulares são ocasionalmente propostas. Tais alternativas ao estudo

de sistemas singulares são interessantes pois podem trazer novos pontos de vista e destacar diferentes características de tais sistemas, de forma análoga ao que acontece com os diferentes formalismos da Mecânica Clássica. Um bom exemplo é o formalismo de Faddeev-Jackiw para sistemas singulares [15, 16]; muito prático para realizar a quantização de sistemas de primeira ordem, para os quais foi inicialmente desenvolvido, mas que pode também ser empregado em casos mais gerais. Derivado desse formalismo surgiu o formalismo simplético [17, 18] que mostrou-se útil no estudo de simetrias ocultas em sistemas físicos [19]. Excetuando-se os casos onde há vínculos não efetivos presentes, há resultados indicando que ambos os formalismos são equivalentes ao de Dirac [20, 21, 22], mas cada um deles tem defeitos e qualidades próprios. O formalismo de Faddeev-Jackiw, por exemplo, tem a desvantagem de não permitir a análise das simetrias de gauge do sistema físico, um defeito que é corrigido no formalismo simplético, e ambos podem tornar-se muito trabalhosos em sistemas que não são de primeira ordem.

O objetivo do trabalho aqui apresentado é exatamente destacar alguns aspectos do estudo de sistemas singulares que podem ser melhor analisados sob o ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi. Tal formalismo serviu como motivação para Dirac em alguns passos do desenvolvimento de seu formalismo [6], pois este pretendia agrupar as soluções das equações de movimento em famílias, cada uma destas correspondendo a uma função principal de Hamilton que satisfizesse a equação de Hamilton-Jacobi. Posteriormente ele foi aplicado majoritariamente ao estudo de sistemas singulares tendo em vista o estudo da Relatividade Geral. Inicialmente podemos mencionar o trabalho de Bergmann [23] que tratava da relação entre o formalismo de Hamilton-Jacobi e a formulação de Schrödinger em sistemas com vínculos de primeira classe, objetivando precisamente o estudo da quantização da versão canônica de Dirac para a Relatividade Geral [24], a qual possui esta característica. Esta abordagem teve continuidade com os trabalhos de Komar [25, 26, 27, 28] visando uma quantização via Hamilton-Jacobi

da Relatividade Geral. Mais recentemente esse formalismo foi aplicado por Newman e Rovelli [29] no estudo das “linhas de força generalizadas” como graus de liberdade invariantes de gauge na teoria de Yang-Mills e na Relatividade Geral dentro do formalismo de Ashtekar. Estes mesmos autores e seus colaboradores utilizaram a mesma abordagem no estudo da dinâmica das linhas de força de Faraday do campo eletromagnético livre [30].

Com esta motivação iremos, no Capítulo 1, analisar os aspectos clássicos do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares, mas apresentando sua generalização para o caso de variáveis dinâmicas pertencentes à álgebra de Berezin. Após expormos algumas definições básicas, necessárias para o desenvolvimento do trabalho, apresentaremos, de forma breve, a obtenção da equação de Hamilton-Jacobi não singular via método dos Lagrangeanos equivalentes de Carathéodory. Veremos, em seguida, quais as modificações que a singularidade do sistema impõe, gerando um conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi e, a partir desse conjunto, de que modo podemos obter as equações de movimento para as variáveis canônicas como equações diferenciais totais para as superfícies características.

A seguir analisaremos as condições de integrabilidade das equações obtidas e mostraremos, em detalhes, a equivalência entre as condições de integrabilidade no formalismo de Hamilton-Jacobi e as condições de consistência do formalismo de Dirac. Desta forma, mostraremos que eventuais vínculos secundários podem ser gerados dentro do próprio formalismo de Hamilton-Jacobi de forma consistente. A partir daí, estudaremos as propriedades de sistemas contendo apenas vínculos de primeira classe, assim como as modificações necessárias para lidar com as dificuldade geradas pela presença de vínculos de segunda classe.

No Capítulo 2 iremos analisar alguns aspectos da quantização via formalismo de Hamilton-Jacobi, em que os vínculos de primeira classe são considerados, em sua versão operatorial, como condições a serem satisfeitas pelos estados físicos e não como iden-

tidades entre os operadores. Esse processo de quantização irá gerar diversos estados quânticos, correspondendo a diferentes escolhas de gauge que representarão um mesmo estado físico e, portanto, é usualmente interpretado como uma quantização a “gauge livre”.

Mostraremos que essa interpretação requer cuidados pois, após a quantização, não é possível ir de um estado quântico a outro estado fisicamente equivalente através de transformações geradas pelos correspondentes quânticos dos geradores de transformações de gauge. Além disso, em algumas situações, este procedimento de quantização representa uma fixação implícita de gauge. Estas questões serão demonstradas através de dois exemplos: o campo Eletromagnético livre e o campo de Dirac em interação com o campo Eletromagnético, para os quais apresentaremos, além das questões relativas à quantização, o tratamento clássico completo.

Por fim, nos nossos comentários finais, faremos um resumo dos resultados apresentados e discutiremos algumas perspectivas de trabalho. Apresentamos também dois apêndices que têm por objetivo tornar este texto o mais autocontido possível e tratam das noções básicas da álgebra de Berezin e dos fundamentos do formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas singulares.

1. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares

Inicialmente iremos abordar a obtenção das equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi (EDPHJ) para sistemas singulares através de um processo variacional e a construção das equações de movimento como equações diferenciais totais. A abordagem a ser apresentada é baseada principalmente nos trabalhos [31, 32]. Uma abordagem alternativa, que não utiliza um princípio variacional e parte diretamente dos vínculos do formalismo de Dirac, é desenvolvida na referência [33] e esclarece alguns aspectos do formalismo, em especial o tratamento a ser dado quando o sistema apresenta vínculos de segunda classe na classificação de Dirac.

Ao longo do desenvolvimento procuraremos destacar as características mais importantes relacionadas a este formalismo e que serão de maior interesse no processo de quantização, assim como traçar os paralelos com o formalismo Hamiltoniano de Dirac. Em especial pretendemos detalhar a relação entre as condições de consistência de Dirac e as condições de integrabilidade no formalismo de Hamilton-Jacobi, que é apenas indicada na literatura.

O tratamento aqui apresentado também irá seguir a generalização feita para sistemas contendo variáveis pertencentes à álgebra de Berezin e apresentada na referência [34]. O interesse nessa generalização se justifica pelo fato de que a álgebra de Berezin fornece uma forma elegante e compacta para tratar simultaneamente variáveis bosônicas

e fermiônicas. As noções básicas desta álgebra são apresentadas no Apêndice **A** deste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [13] (Apêndice **D**) e [35, 36]. Nunca é demais lembrar que não há um padrão na literatura em relação às definições de derivadas de variáveis não comutantes e que as definições usadas aqui são opostas às definições usualmente utilizadas para a álgebra de Grassmann na literatura (referência [12], Apêndice **C**) e portanto a comparação dos resultados requer uma cuidadosa atenção.

1.1 Definições básicas

Tomaremos como ponto de partida um Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ que deve ser uma função par de um conjunto de N variáveis q^i , as quais são elementos da álgebra de Berezin. As equações de movimento de Euler-Lagrange podem ser obtidas por meio do princípio de Hamilton a partir da ação $S = \int L dt$ como

$$\frac{\delta_r S}{\delta q^i} = \frac{\partial_r L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (1.1)$$

onde devemos chamar a atenção para o uso de derivadas à direita.

A passagem para o formalismo Hamiltoniano é feita através da introdução dos momentos, definidos por meio de derivadas à direita como

$$p_i \equiv \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (1.2)$$

e introduzindo o Hamiltoniano como (somando nos índices repetidos)

$$H = p_i \dot{q}^i - L, \quad (1.3)$$

onde o ordenamento dos momentos à esquerda das velocidades deve ser respeitado, já que eles foram definidos como derivadas à esquerda. Este ordenamento será, evidentemente, irrelevante quando lidarmos com elementos pares da álgebra de Berezin. Deste

modo, as equações de movimento de Hamilton serão dadas por

$$\dot{q}^i = \frac{\partial_l H}{\partial p_i} = (-1)^{P(i)} \frac{\partial_r H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial_r H}{\partial q^i} = -(-1)^{P(i)} \frac{\partial_l H}{\partial q^i}, \quad (1.4)$$

onde $P(i)$ é a paridade do índice i .

Podemos então definir os *parênteses de Poisson na álgebra de Berezin*¹, dados por

$$\{F, G\}_B \equiv \frac{\partial_r F}{\partial q^i} \frac{\partial_l G}{\partial p_i} - (-1)^{P(F)P(G)} \frac{\partial_r G}{\partial q^i} \frac{\partial_l F}{\partial p_i}, \quad (1.5)$$

de forma a obter as conhecidas expressões para as equações de movimento

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}_B; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_B. \quad (1.6)$$

Por uma questão de simplicidade, iremos nos referir a esses parênteses como *parênteses de Berezin*. Eles têm propriedades semelhantes aos parênteses de Poisson usuais

$$\{F, G\}_B = -(-1)^{P(F)P(G)} \{G, F\}_B, \quad (1.7)$$

$$\{F, GK\}_B = \{F, G\}_B K + (-1)^{P(F)P(G)} G \{F, K\}_B, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} (-1)^{P(F)P(K)} \{F, \{G, K\}_B\}_B &+ (-1)^{P(G)P(F)} \{G, \{K, F\}_B\}_B \\ &+ (-1)^{P(K)P(G)} \{K, \{F, G\}_B\}_B = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

sendo que a última expressão é a identidade de Jacobi para tais parênteses.

De forma similar ao caso usual, a transição para o espaço de fase só poderá ser feita de maneira coerente se as variáveis de momento, dadas pela equação (1.2), forem

¹Assim como não há uma definição padrão para as derivadas à direita e à esquerda de derivadas não comutantes, não há também uma definição padrão para os “parênteses de Poisson generalizados”. A definição aqui apresentada é a da referência [13] e não é igual àquelas apresentadas, por exemplo, nas referências [12] e [14].

independentes entre si de forma a podermos expressar todas as velocidades $\dot{q}_i$ como funções das variáveis canônicas (q^i, p_i) . Isto implica que a *supermatriz Hessiana*

$$H_{ij} \equiv \frac{\partial_r p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial_r^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \quad (1.10)$$

deve ser necessariamente não singular. Caso contrário, se esta supermatriz tiver posto $P = N - R$, haverá R relações entre as variáveis de momento e as coordenadas q^i , que serão vínculos primários, e que suporemos terem paridades definidas, enquanto R velocidades $\dot{q}^i$ permanecerão arbitrárias. O desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano de Dirac é então automático: devemos adicionar os vínculos primários (multiplicados por parâmetros arbitrários de paridade adequada) ao Hamiltoniano, analisar as condições de consistência, classificar os vínculos em vínculos de primeira e segunda classes e definir os parênteses de Dirac usando a supermatriz cujos elementos são os parênteses de Berezin entre os vínculos de segunda classe [13].

1.2 Formalismo de Hamilton-Jacobi não singular

A equação de Hamilton-Jacobi pode ser obtida por diversas abordagens. Podemos mencionar, como exemplos, o ponto de vista das transformações canônicas [37, 38] e o ponto de vista de princípios variacionais [39, 40]. Aqui nós usaremos uma abordagem variacional utilizando o método dos Lagrangeanos equivalentes de Carathéodory [41]. O procedimento é similar ao utilizado no caso de termos apenas variáveis pares: dado um Lagrangeano L podemos obter um outro Lagrangeano L' completamente equivalente ao primeiro e dado por

$$L' = L(q^i, \dot{q}^i) - \frac{dS(q^i, t)}{dt},$$

onde $S(q^i, t)$ é uma função par, de forma a manter o Lagrangeano equivalente L' também par.

Estes Lagrangeanos são equivalentes pois suas respectivas integrais de ação têm

extremos simultâneos, de forma que podemos escolher a função $S(q^i, t)$ de maneira a termos um extremo para a ação de L' e, conseqüentemente, um extremo para a ação do Lagrangeano L .

Para isso é suficiente encontrar um conjunto de funções $\beta^i(q^j, t)$ e $S(q^i, t)$ para as quais

$$L'(q^i, \dot{q}^i = \beta^i(q^j, t), t) = 0 \quad (1.11)$$

e que em toda vizinhança de $\dot{q}^i = \beta^i(q^j, t)$ tenhamos

$$L'(q^i, \dot{q}^i) > 0. \quad (1.12)$$

Com essas condições satisfeitas o Lagrangeano equivalente L' (e conseqüentemente L) terá um mínimo de sua ação em $\dot{q}^i = \beta^i(q^j, t)$, de tal forma que as soluções das equações diferenciais dadas por

$$\dot{q}^i = \beta^i(q^j, t),$$

irão corresponder a uma trajetória que extremiza a integral de ação.

Da definição de L' obtemos

$$L' = L(q^j, \dot{q}^j) - \frac{\partial S(q^j, t)}{\partial t} - \frac{\partial_r S(q^j, t)}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt},$$

onde devemos novamente estar atentos ao uso da derivada à direita, e da condição (1.11) obteremos

$$\begin{aligned} \left[L(q^j, \dot{q}^j) - \frac{\partial S(q^j, t)}{\partial t} - \frac{\partial_r S(q^j, t)}{\partial q^i} \dot{q}^i \right] \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i} &= \left[L(q^j, \dot{q}^j) - \frac{\partial_r S(q^j, t)}{\partial q^i} \dot{q}^i \right] \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Além disso, como L' tem um mínimo em $\dot{q}^i = \beta^i$, devemos ter também que

$$\frac{\partial_r L'}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial_r}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{dS}{dt} \right) \right] \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial_r S(q^j, t)}{\partial q^i} \right] \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial_r S(q^j, t)}{\partial q^i} \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i} = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{\dot{q}^i = \beta^i}. \quad (1.14)$$

Usando agora a definição para os momentos conjugados, dadas pela equação (1.2), obtemos

$$p_i = \frac{\partial_r S(q^j, t)}{\partial q^i}. \quad (1.15)$$

Podemos ver deste resultado e da equação (1.13) que, para obter um extremo da integral de ação, devemos obter uma função $S(q^j, t)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_0 \left(q^i, \frac{\partial_r S(q, t)}{\partial q^i} \right) \quad (1.16)$$

onde H_0 é o Hamiltoniano canônico

$$H_0 = p_i \dot{q}^i - L(q^j, \dot{q}^j) \quad (1.17)$$

e os momentos p_i são dados pela equação (1.15). Deste modo a equação (1.16) é a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (EDPHJ).

É interessante observar que podemos facilmente relacionar esta abordagem variacional à abordagem motivada pela procura pela transformação canônica necessária para transformar todas as variáveis canônicas em constantes de movimento (ver capítulos 8 e 10 das referências [37] e [38], respectivamente). Ao satisfazer as condições para extremizar L' , dadas pelas equações (1.11) e (1.12), estamos exatamente satisfazendo as condições necessárias para que S seja a função geradora dessa transformação uma vez que o novo Hamiltoniano K após a transformação será dado por

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t},$$

e, como consequência da equação (1.16), este será nulo.

1.3 O caso singular

Consideremos agora o caso de um sistema com um Lagrangeano singular, com a supermatriz Hessiana tendo posto $P = N - R$. Neste caso podemos, sem perda de generalidade, definir a ordem das variáveis q^i de tal forma que a supermatriz $P \times P$ no canto inferior direito da supermatriz Hessiana seja não singular, i.e.

$$\det |H_{ab}| \neq 0; \quad H_{ab} = \frac{\partial_r^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a}; \quad a, b = R + 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Isto nos permite resolver as velocidades $\dot{q}^a$ como funções das coordenadas q^i s e dos momentos p_a , i.e., $\dot{q}^a = f^a(q^i, p_b)$. Restarão então R variáveis de momento p_α que dependerão das outras variáveis canônicas, podendo sempre serem escritas como [12, 13]

$$p_\alpha = -H_\alpha(q^i; p_a); \quad \alpha = 1, \dots, R; \quad (1.19)$$

e que correspondem aos vínculos primários de Dirac $\Phi_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha(q^i; p_a) \approx 0$.

O Hamiltoniano H_0 , dado pela equação (1.17), torna-se agora

$$H_0 = p_a f^a + p_\alpha|_{p_\beta = -H_\beta} \cdot \dot{q}^\alpha - L(q^i, \dot{q}_\alpha, \dot{q}_a = f^a), \quad (1.20)$$

onde $\alpha, \beta = 1, \dots, R$; $a = R + 1, \dots, N$, mas não possui nenhuma dependência explícita nas velocidades $\dot{q}_\alpha$ pois

$$\frac{\partial_r H_0}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_a \frac{\partial_r f^a}{\partial \dot{q}^\alpha} + p_\alpha - \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial_r f^a}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0.$$

Adotaremos então a seguinte notação: o parâmetro temporal t será designado por $t^0 \equiv q^0$; as coordenadas q^α por t^α ; os momentos p_α serão chamados de P_α enquanto o *momento* $p_0 \equiv P_0$ será **definido** como

$$P_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Para obter um extremo da ação devemos nos preocupar não apenas com a equação (1.16) mas também com as equações contidas em (1.19) de forma que teremos de encontrar uma função $S(t_\alpha; q^a, t)$ que satisfaça o seguinte **conjunto** de EDPHJ

$$H'_0 \equiv P_0 + H_0 \left(t, t^\beta; q^a; p_a = \frac{\partial_r S}{\partial q^a} \right) = 0, \quad (1.22)$$

$$H'_\alpha \equiv P_\alpha + H_\alpha \left(t, t^\beta; q^a; p_a = \frac{\partial_r S}{\partial q^a} \right) = 0. \quad (1.23)$$

onde $\alpha, \beta = 1, \dots, R$. Se deixarmos os índices α e β correrem de 0 a R podemos escrever ambas as equações como

$$H'_\alpha \equiv P_\alpha + H_\alpha \left(t^\beta; q^a; p_a = \frac{\partial_r S}{\partial q^a} \right) = 0. \quad (1.24)$$

1.3.1 Equações de movimento

Podemos agora obter as equações de movimento para as variáveis canônicas. Da definição de H'_0 e da equação (1.20) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r H'_0}{\partial p_b} &= -\frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial_r f^a}{\partial p_b} - (-1)^{P_{(b)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H_\alpha}{\partial p_b} \dot{q}^\alpha + p_a \frac{\partial_r f^a}{\partial p_b} + (-1)^{P_{(b)}} \dot{q}^b, \\ \frac{\partial_r H'_0}{\partial p_b} &= (-1)^{P_{(b)}} \dot{q}^b - (-1)^{P_{(b)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H_\alpha}{\partial p_b} \dot{q}^\alpha, \end{aligned}$$

onde voltamos a usar $\alpha = 1, \dots, R$.

Multiplicando esta equação por $dt = dt^0$ e $(-1)^{P_{(b)}}$, obtemos

$$dq^b = (-1)^{P_{(b)}} \frac{\partial_r H'_0}{\partial p_b} dt^0 + (-1)^{P_{(b)} + P_{(b)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_b} dq^\alpha.$$

Deixando novamente o índice α correr de 0 a R , usando $t^\alpha \equiv q^\alpha$ e considerando $P_{(0)} = P_{(t^0)} = 0$, teremos

$$dq^b = (-1)^{P_{(b)} + P_{(b)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_b} dt^\alpha. \quad (1.25)$$

Mas se notarmos que as expressões

$$dq^\beta = (-1)^{P_{(\beta)} + P_{(\beta)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_\beta} dt^\alpha = (-1)^{P_{(\beta)} + P_{(\beta)} P_{(\alpha)}} \delta_\alpha^\beta dt^\alpha \equiv dt^\beta$$

são identicamente satisfeitas para $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, R$, poderemos reescrever a equação (1.25) como

$$dq^i = (-1)^{P(i)+P(i)P(\alpha)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_i} dt^\alpha; \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (1.26)$$

Se considerarmos agora que temos uma solução $S(q^j, t)$ do conjunto de EDPHJ dado pela equação (1.24) e derivarmos com respeito a q^i , obteremos

$$\frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} + \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial P_\beta} \frac{\partial_r^2 S}{\partial q^i \partial t^\beta} + \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_a} \frac{\partial_r^2 S}{\partial q^i \partial q^a} = 0, \quad (1.27)$$

para $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, R$. Já da definição dos momentos teremos que

$$dp_i = \frac{\partial_r^2 S}{\partial t^\beta \partial q^i} dt^\beta + \frac{\partial_r^2 S}{\partial q^a \partial q^i} dq^a; \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (1.28)$$

Contraindo então a equação (1.27) com dt^α à direita, multiplicando por $(-1)^{P(i)P(\alpha)}$ e somando o resultado à equação (1.28) obteremos

$$\begin{aligned} & dp_i + (-1)^{P(i)P(\alpha)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} dt^\alpha = \\ & = \left[\frac{\partial_r^2 S}{\partial q^a \partial q^i} \left(dq^a - (-1)^{P(i)P(\alpha)} (-1)^{(P(\alpha)+P(a))(P(i)+P(a))} (-1)^{P(i)P(a)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_a} dt^\alpha \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial_r^2 S}{\partial t^\beta \partial q^i} \left(dt^\beta - (-1)^{P(i)P(\alpha)} (-1)^{(P(\alpha)+P(\beta))(P(i)+P(\beta))} (-1)^{P(i)P(\beta)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial P_\beta} dt^\alpha \right) \right], \\ & dp_i + (-1)^{P(i)P(\alpha)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} dt^\alpha = \left[\frac{\partial_r^2 S}{\partial q^a \partial q^i} \left(dq^a - (-1)^{P(\alpha)P(a)+P(a)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_a} dt^\alpha \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial_r^2 S}{\partial t^\beta \partial q^i} \left(dt^\beta - (-1)^{P(\alpha)P(\beta)+P(\beta)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial P_\beta} dt^\alpha \right) \right], \end{aligned} \quad (1.29)$$

onde fizemos uso do fato de que

$$\frac{\partial_r^2 S}{\partial q^j \partial q^i} = (-1)^{P(i)P(j)} \frac{\partial_r^2 S}{\partial q^i \partial q^j},$$

e das seguintes paridades

$$P\left(\frac{\partial_r^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\right) = P(i) + P(j),$$

$$P \left(\frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_j} \right) = P_{(\alpha)} + P_{(j)}.$$

Usando então a equação (1.26) na equação (1.29) acima, teremos

$$dp_i = - (-1)^{P_{(i)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} dt^\alpha; \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (1.30)$$

Esta equação, junto com a equação (1.26) são as equações de movimento do sistema como equações diferenciais totais. Podemos ver que, no caso não singular, teremos apenas $H'_0 \neq 0$ e nenhum outro H'_α ; de tal forma que essas equações de movimento irão reduzir-se naturalmente às expressões usuais dadas pela equação (1.4).

Se considerarmos agora a função $Z \equiv S(t^\alpha; q^a)$ e usarmos a definição dos momentos e a equação (1.26) teremos que

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{\partial_r S}{\partial t^\beta} dt^\beta + \frac{\partial_r S}{\partial q^a} dq^a, \\ dZ &= P_\beta (-1)^{P_{(\beta)} + P_{(\beta)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_\beta} dt^\alpha + p_a \left((-1)^{P_{(a)} + P_{(a)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_a} dt^\alpha \right), \\ dZ &= (-1)^{P_{(i)} + P_{(i)} P_{(\alpha)}} p_i \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_i} dt^\alpha; \quad i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.31)$$

ou então

$$dZ = \left(-H_\beta + (-1)^{P_{(a)} + P_{(a)} P_{(\beta)}} p_a \frac{\partial_r H'_\beta}{\partial p_a} \right) dt^\beta. \quad (1.32)$$

A equação (1.31) ou a equação (1.32) junto com as equações (1.26) e (1.30) são as equações diferenciais totais para as curvas características do sistema de EDPHJ dado pela equação (1.24) e, caso elas sejam integráveis, sua solução simultânea determina $S(t^\alpha; q^a)$ de maneira unívoca a partir das condições iniciais.

1.4 Condições de integrabilidade

A análise das condições de integrabilidade das equações diferenciais totais (1.26), (1.30) e (1.31) (ou (1.32)) pode ser feita pelas técnicas conhecidas da teoria de equações

diferenciais [42, 43], já tendo sido realizada para sistemas contendo apenas variáveis usuais [32, 44, 45]. Iremos aqui apresentar essa análise para um sistema com variáveis de Berezin, como o que estamos considerando.

Começemos considerando o fato de que para todo conjunto de equações diferenciais totais

$$dq^i = \Lambda^i_{\alpha} \left(t^{\beta}, q^j \right) dt^{\alpha}, \quad (1.33)$$

($i, j = 0, 1, \dots, N$ e $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, R < N$) existe um conjunto associado de equações diferenciais parciais

$$X_{\alpha} f = \frac{\partial_r f}{\partial q^i} \Lambda^i_{\alpha} = 0, \quad (1.34)$$

onde X_{α} são operadores lineares.

Dada qualquer solução f duas vezes diferenciável do conjunto (1.34), esta deve também satisfazer a equação

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] f = 0, \quad (1.35)$$

onde

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] f = \left(X_{\alpha} X_{\beta} - (-1)^{P_{(\alpha)} P_{(\beta)}} X_{\beta} X_{\alpha} \right) f, \quad (1.36)$$

é o **comutador generalizado** entre os operadores X_{α} . Essa exigência implica que devemos ter

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] f = C_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma} f, \quad (1.37)$$

com coeficientes arbitrários $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

Qualquer comutador generalizado que resulte numa expressão que não possa ser escrita como a equação (1.37) deve ser considerado como um novo operador X e acrescido ao conjunto original (1.34), tendo todos seus comutadores generalizados com os outros X 's calculados. O processo deve ser repetido até que todos os operadores X satisfaçam a equação (1.37).

Se todos os operadores X_{α} satisfazem a relação de comutação generalizada dada pela equação (1.37) o sistema de equações diferenciais parciais (1.34) é dito *completo* e

o sistema correspondente de equações diferenciais totais (1.33) é integrável se, e apenas se, o sistema (1.34) for completo.

Consideremos agora o sistema de equações diferenciais obtido na seção anterior. Em primeiro lugar devemos observar que, se as equações diferenciais totais (1.26) e (1.30) forem integráveis, as soluções da equação (1.31) ou da equação (1.32) podem ser obtidas por quadratura e portanto só precisamos analisar as condições de integrabilidade das primeiras já que as últimas serão integráveis como consequência.

Os operadores X_α correspondentes ao sistema de equações diferenciais totais formado pelas equações (1.26) e (1.30) são dados por,

$$\begin{aligned} X_\alpha f(t^\beta, q^a, p^a) &= \frac{\partial_r f}{\partial q^i} (-1)^{P(i)+P(i)P(\alpha)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_i} - \frac{\partial_r f}{\partial p_i} (-1)^{P(i)P(\alpha)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i}, \\ X_\alpha f(t^\beta, q^a, p^a) &= \frac{\partial_r f}{\partial q^i} \frac{\partial_l H'_\alpha}{\partial p_i} \\ &\quad - (-1)^{P(i)+P(i)P(f)} (-1)^{P(i)P(\alpha)} (-1)^{(P(\alpha)+P(i))(P(f)+P(i))} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial_l f}{\partial p_i}, \\ X_\alpha f(t^\beta, q^a, p^a) &= \frac{\partial_r f}{\partial q^i} \frac{\partial_l H'_\alpha}{\partial p_i} - (-1)^{P(\alpha)P(f)} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial_l f}{\partial p_i}, \\ X_\alpha f(t^\beta, q^a, p^a) &= \{f, H'_\alpha\}_B; \end{aligned} \tag{1.38}$$

onde $i = 0, 1, \dots, N$; $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, R$; $a = R+1, \dots, N$ e nós usamos as equações (1.33) e (1.34) juntamente com o resultado

$$\frac{\partial_l A}{\partial q^i} = (-1)^{P(i)} (-1)^{P(i)P(A)} \frac{\partial_r A}{\partial q^i}. \tag{1.39}$$

É importante observar que os parênteses de Berezin usados na equação (1.38) estão definidos em um espaço de fase de dimensão $2N+2$ já que estamos incluindo $q^0 = t$ como mais uma “coordenada”.

Com esses resultados as condições de integrabilidade serão

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] f &= (X_\alpha X_\beta - (-1)^{P(\alpha)P(\beta)} X_\beta X_\alpha) f \\ &= X_\alpha \{f, H'_\beta\}_B - (-1)^{P(\alpha)P(\beta)} X_\beta \{f, H'_\alpha\}_B = 0, \end{aligned}$$

$$[X_\alpha, X_\beta] f = \left\{ \left\{ f, H'_\beta \right\}_B, H'_\alpha \right\}_B - (-1)^{P(\alpha)P(\beta)} \left\{ \left\{ f, H'_\alpha \right\}_B, H'_\beta \right\}_B = 0, \quad (1.40)$$

que irão reduzir-se a

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] f &= -(-1)^{(P(f)+P(\beta))P(\alpha)} \left\{ H'_\alpha, \left\{ f, H'_\beta \right\}_B \right\}_B \\ &\quad - (-1)^{P(\alpha)P(\beta)} (-1)^{(P(f)+P(\alpha))P(\beta)+P(f)P(\alpha)} \left\{ H'_\beta, \left\{ H'_\alpha, f \right\}_B \right\}_B = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] f &= -(-1)^{P(f)P(\alpha)} (-1)^{P(\beta)P(\alpha)} \left\{ H'_\alpha, \left\{ f, H'_\beta \right\}_B \right\}_B \\ &\quad - (-1)^{P(\alpha)P(\beta)} (-1)^{P(f)P(\beta)+P(\alpha)P(\beta)+P(f)P(\alpha)} \left\{ H'_\beta, \left\{ H'_\alpha, f \right\}_B \right\}_B = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] f &= -(-1)^{P(f)P(\alpha)} \left[(-1)^{P(\beta)P(\alpha)} \left\{ H'_\alpha, \left\{ f, H'_\beta \right\}_B \right\}_B \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{P(f)P(\beta)} \left\{ H'_\beta, \left\{ H'_\alpha, f \right\}_B \right\}_B \right] = 0, \end{aligned}$$

$$[X_\alpha, X_\beta] f = -(-1)^{P(f)P(\alpha)} \left[-(-1)^{P(f)P(\alpha)} \left\{ f, \left\{ H'_\beta, H'_\alpha \right\}_B \right\}_B \right],$$

$$[X_\alpha, X_\beta] f = \left\{ f, \left\{ H'_\beta, H'_\alpha \right\}_B \right\}_B = 0, \quad (1.41)$$

quando usamos a identidade de Jacobi para os parênteses de Berezin, expressa pela equação (1.9), e o fato de que

$$P(\{A, B\}_B) = P(A) + P(B). \quad (1.42)$$

Deste modo as condições de integrabilidade serão

$$\left\{ H'_\beta, H'_\alpha \right\}_B = 0; \quad \forall \alpha, \beta. \quad (1.43)$$

Na verdade seria suficiente que os parênteses acima fossem funções apenas dos t^β , sem dependência nos q^a e p^a . Mas nesse caso o resultado da integração da equação (1.31) (ou da equação (1.32)) seria dependente da trajetória, o que faria com que tal integral fosse sem sentido (ver referência [43], página 67). Portanto, a função $S(t^a; q^a)$

não existiria pois não poderia ser obtida univocamente a partir das condições iniciais, o que justifica as condições exigidas na equação (1.43).

Por outro lado, o diferencial total de qualquer função $F(t^\beta, q^a, p^a)$ pode ser escrito como

$$dF = \frac{\partial_r F}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial_r F}{\partial p^a} dp^a + \frac{\partial_r F}{\partial t^\alpha} dt^\alpha, \quad (1.44)$$

$$dF = \frac{\partial_r F}{\partial q^a} (-1)^{P_{(a)} + P_{(a)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_a} dt^\alpha - \frac{\partial_r F}{\partial p^a} (-1)^{P_{(a)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q_a} dt^\alpha + \frac{\partial_r F}{\partial t^\alpha} dt^\alpha,$$

$$dF = \left(\frac{\partial_r F}{\partial q^a} \frac{\partial_l H'_\alpha}{\partial p_a} - (-1)^{P_{(a)}} (-1)^{P_{(a)} P_{(F)}} \frac{\partial_l F}{\partial p^a} (-1)^{P_{(a)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q_a} + \frac{\partial_r F}{\partial t^\alpha} \right) dt^\alpha,$$

$$dF = \left(\frac{\partial_r F}{\partial q^a} \frac{\partial_l H'_\alpha}{\partial p_a} - (-1)^{P_{(\alpha)} P_{(F)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q_a} \frac{\partial_l F}{\partial p^a} + \frac{\partial_r F}{\partial t^\alpha} \right) dt^\alpha,$$

$$dF = \{F, H'_\alpha\}_B dt^\alpha; \quad (1.45)$$

onde os parênteses de Berezin acima estão definidos no espaço de fase de dimensão $2N + 2$ usado na equação (1.38). Usando este resultado temos que

$$dH'_\beta = \{H'_\beta, H'_\alpha\}_B dt^\alpha \quad (1.46)$$

e, conseqüentemente, as condições de integrabilidade dadas pela equação (1.43) reduzem-se a

$$dH'_\alpha = 0, \quad \forall \alpha, \quad (1.47)$$

uma condição que é não apenas necessária mas também suficiente pois, como os t^α são independentes entre si, dH'_α só será nulo se cada um dos parênteses de Berezin na equação (1.46) for nulo.

Se as condições acima não forem identicamente satisfeitas teremos um entre dois possíveis casos. Primeiro, podemos ter uma nova expressão do tipo $H' = 0$, a qual deve também satisfazer a condição $dH' = 0$ e ser usada em todas as equações. Do contrário teremos condições entre os diferenciais dt^α que também deverão ser usadas nas outras equações do formalismo. Neste ponto estamos prontos a analisar a equivalência entre as condições de integrabilidade e as condições de consistência no formalismo de Dirac.

1.4.1 Equivalência entre as condições de consistência de Dirac e as condições de integrabilidade

A existência de uma condição equivalente às condições de consistência do formalismo Hamiltoniano de Dirac é esperado em qualquer formalismo que pretenda lidar com sistemas singulares. No caso que estamos estudando a forma adquirida, nas equações (1.46) e (1.47), pelas condições de integrabilidade das equações (1.26) e (1.30) já nos indica com clareza que estas condições são as que correspondem, no formalismo de Hamilton-Jacobi, às condições de consistência de Dirac, como mencionado na referência [46]. Resta-nos explicitar essa correspondência detalhando as alternativas encontradas quando as condições de integrabilidade não são satisfeitas no formalismo de Hamilton-Jacobi de forma a esclarecer as relações entre ambos os formalismos.

Inicialmente identificamos os vínculos Hamiltonianos primários presentes na equação (1.23)

$$H'_\alpha \equiv P_\alpha + H_\alpha(q^i; p_a) \approx 0, \quad (1.48)$$

onde $\alpha = 1, \dots, R$; $i = 1, \dots, N$. O Hamiltoniano canônico é dado pela expressão de H_0 na equação (1.20), de modo que o Hamiltoniano primário H_P é

$$H_P \equiv H_0 + H'_\alpha v^\alpha, \quad (1.49)$$

onde os v^α são coeficientes arbitrários relacionados às velocidades indeterminadas $\dot{q}^\alpha$ [12]. O ordenamento dos v^α com relação aos H'_α é uma questão de convenção, já que sua alteração irá apenas produzir uma mudança de sinal, mas o procedimento mais natural, uma vez que v^α pode ser identificado com $\dot{q}^\alpha$, é manter o ordenamento acima pois este é coerente com o ordenamento adotado na construção do Hamiltoniana equação (1.3). Esta questão é irrelevante para sistemas contendo apenas variáveis pares.

Deste modo, as condições de consistência de Dirac, que exigem que os vínculos

sejam preservados na evolução temporal, resultam em

$$\dot{H}'_\mu \approx \{H'_\mu, H_P\}_B = \{H'_\mu, H_0\}_B + \{H'_\mu, H'_\alpha\}_B \dot{q}^\alpha = 0, \quad (1.50)$$

onde $\alpha, \mu = 1, \dots, R$ e os parênteses de Berezin usados aqui são aqueles definidos pela equação (1.5) no espaço de fase usual de dimensão $2N$, sendo que também fizemos a identificação explícita $\dot{q}^\alpha \equiv v^\alpha$.

Se essas condições de consistência são satisfeitas isso significa que todos os $\dot{q}^\alpha$ permanecem arbitrários e nenhum vínculo secundário é gerado. Ou seja, temos apenas vínculos primários de primeira classe, i.e.

$$\{H'_\mu, H'_\alpha\}_B \approx 0; \quad \{H'_\mu, H_0\}_B \approx 0. \quad (1.51)$$

Entretanto, dada a forma dos vínculos primários na equação (1.48) os parênteses de Berezin entre eles serão funções independentes dos P_α ($\alpha = 1, \dots, R$) e portanto não podem ser combinações dos próprios vínculos primários. Isso significa que se estes são de primeira classe seus parênteses de Berezin serão **identicamente nulos**², e não apenas fracamente nulos, e portanto a equação (1.51) torna-se

$$\{H'_\mu, H'_\alpha\}_B = \{H'_\mu, H_0\}_B = 0. \quad (1.52)$$

Mais ainda, como as condições de consistência que estamos analisando assumem implicitamente que o Hamiltoniano canônico e os vínculos não possuem dependência explícita no tempo³, os parênteses de Berezin acima tornam-se iguais, respectivamente, aos parênteses $\{H'_\mu, H'_\alpha\}_B$ e $\{H'_\mu, H'_0\}_B$ definidos no espaço de fase de dimensão $2N + 2$ usados na equação (1.43). Portanto a equação (1.52) acima implicará na equação (1.43).

²Os vínculos estão em involução, ou seja, são abelianos.

³No caso em que há essa dependência explícita as condições de consistência Hamiltonianas devem ser modificadas, levando em conta a derivada parcial dos vínculos em relação ao tempo ao calcular a evolução temporal desses (ver referência [13], página 229). A análise aqui realizada pode então ser repetida, levando a conclusões semelhantes.

Além disso, multiplicando a equação (1.50) por dt e usando os resultados acima obtemos que $dH'_\mu = 0$. Já a conservação temporal do Hamiltoniano canônico H_0 , como consequência do fato de as condições de consistência serem satisfeitas, nos dará $dH_0 = 0$ o que implica em $dH'_0 = 0$ já que P_0 é independente das demais variáveis canônicas.

Fica demonstrado que quando as condições de consistência de Dirac são satisfeitas as condições de integrabilidade, em ambas as formas apresentadas nas equações (1.43) e (1.47), são também satisfeitas. A relação inversa pode ser facilmente verificada: se as condições de integrabilidade (1.43) ou (1.47) forem satisfeitas as condições de consistência (1.50) também serão satisfeitas. Deste modo vemos que ambas as condições são equivalentes.

Consideremos agora que essas condições **não** sejam satisfeitas inicialmente. Quando tivermos vínculos de primeira classe no formalismo Hamiltoniano iremos obter vínculos secundários das condições (1.50). Esse caso resultará numa relação do tipo $dH'_\mu = H' dt$, onde $H' \approx 0$ é o vínculo Hamiltoniano secundário, o que significa que teremos um novo H' no formalismo de Hamilton-Jacobi, o qual deve satisfazer $dH' = 0$. Já se tivermos um vínculo Hamiltoniano de segunda classe as condições de consistência irão impor condições sobre as velocidades $\dot{q}^\alpha$, o que corresponde a impor condições sobre os diferenciais dt^α no formalismo de Hamilton-Jacobi.

A análise aqui apresentada das condições de integrabilidade e de sua equivalência com as condições de consistência mostra que podemos, partindo exclusivamente do ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi, obter todos os vínculos de uma teoria por meio de um processo recursivo. Vemos portanto que **não** é necessário partir de um conjunto completo de vínculos obtido por meio do formalismo Hamiltoniano de Dirac, como usualmente é feito, e que o formalismo de Hamilton-Jacobi fornece uma alternativa completa e autoconsistente para o tratamento de sistemas singulares.

Falta-nos agora analisar o tratamento de sistemas em que as condições de integrabilidade não são inicialmente satisfeitas, podendo agora apresentar vínculos secundários

e/ou vínculos de segunda classe. Começaremos pelo caso mais simples, em que apenas vínculos de primeira classe estão presentes, e posteriormente analisaremos como a existência de vínculos de segunda classe deve ser tratada.

1.5 Sistemas só com vínculos de primeira classe

Se as condições de integrabilidade não forem inicialmente satisfeitas, mas apenas gerarem novas condições do tipo $H' = 0$ que correspondam a vínculos Hamiltonianos de primeira classe, teremos agora novas equações diferenciais parciais a serem acrescentadas ao sistema (1.24). Consideremos então o sistema composto por $P + 1$ ($P \geq R$) equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi

$$H'_0 \equiv P_0 + H_0 \left(q^0 = t, q^i; p_a = \frac{\partial_r S}{\partial q^a} \right) = 0, \quad (1.53)$$

$$\Phi'_\alpha \left(q^i; p_i = \frac{\partial_r S}{\partial q^i} \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, P; \quad (1.54)$$

onde os Φ'_α correspondem ao conjunto total dos vínculos; tanto os primários, dados pela equação (1.23), quanto os secundários, dados pelas condições de integrabilidade. O sistema de equações diferenciais totais para as curvas características deste conjunto de EDPHJ é dado por [42]

$$dq^i = \left\{ q^i, \Phi'_\alpha \right\}_B d\omega^\alpha; \quad dp_i = \left\{ p_i, \Phi'_\alpha \right\}_B d\omega^\alpha, \quad (1.55)$$

onde $\alpha = 0, 1, \dots, P$, $\omega^0 = t$, $\Phi'_0 = H'_0$ e os ω^α são parâmetros arbitrários definidos por essas mesmas equações. Explicitamente temos

$$dq^i = (-1)^{P_{(i)}} \frac{\partial_r H'_0}{\partial p_i} dt + (-1)^{P_{(i)} + P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_i} d\omega^\alpha, \quad (1.56)$$

$$dp_i = -\frac{\partial_r H'_0}{\partial q^i} dt - (-1)^{P_{(i)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial q^i} d\omega^\alpha, \quad (1.57)$$

onde $i = 0, 1, \dots, N$; $\alpha = 1, \dots, P$. Mas como os vínculos presentes nas equações acima não estão, no caso geral, em involução este sistema não é, em princípio, integrável. Isso implica no fato de não podermos encontrar uma solução S das EDPHJ (1.53) e (1.54).

Mas podemos agora usar o fato de que os vínculos dados pela equação (1.54) devem ser independentes entre si e portanto devemos ter

$$\text{posto} \left(\frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial q_i}, \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_i} \right) = P; \quad \alpha = 1, \dots, P; \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.58)$$

Contudo, através de uma transformação canônica que troque algumas coordenadas por alguns momentos, essa condição se reduz a

$$\text{posto} \left(\frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_i} \right) = P, \quad (1.59)$$

o que garante que podemos resolver os vínculos na equação (1.54), ao menos localmente, em termos de P momentos p_α ($\alpha = 1, \dots, P$) tal que

$$p_\alpha = \phi_\alpha(q_i, p_a) \Rightarrow H'_\alpha = p_\alpha - \phi_\alpha(q_i, p_a) = 0, \quad (1.60)$$

onde $a = P + 1, \dots, N$. Este novo conjunto de vínculos H'_α é equivalente ao conjunto original Φ'_α , já que ambos definem a mesma superfície de vínculo, e é involutivo, como podemos ver a partir do mesmo argumento usado na seção anterior.

Podemos agora estudar o sistema de EDPHJ equivalente ao dado pelas equações (1.53) e (1.54), que obtemos ao trocar o conjunto Φ'_α pelo conjunto equivalente H'_α , i.e.

$$H'_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha \left(t, q^i; p_a = \frac{\partial_r S}{\partial q^a} \right) = 0; \quad \alpha = 0, 1, \dots, P. \quad (1.61)$$

As equações para as características são agora

$$dq^i = \{q^i, H'_\alpha\}_B d\omega^\alpha; \quad dp_i = \{p_i, H'_\alpha\}_B d\omega^\alpha, \quad (1.62)$$

ou

$$dq^i = (-1)^{P_{(i)} + P_{(i)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_i} dt^\alpha; \quad dp_i = -(-1)^{P_{(i)} P_{(\alpha)}} \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} dt^\alpha \quad (1.63)$$

($i = 0, 1, \dots, N$) onde, devido à forma dos H'_α , temos a identidade $dq^\alpha = d\omega^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, \dots, P$) e recuperamos o resultado, obtido inicialmente na seção 1.3.1, de que as coordenadas relacionadas aos momentos vinculados são parâmetros arbitrários que descrevem o desenvolvimento do sistema, junto com o parâmetro temporal t . Já que o novo conjunto de vínculos é involutivo o sistema é agora, ao menos localmente, integrável. Portanto, num sistema que possua apenas vínculos de primeira classe, existe uma função $S(q^i, t)$ que satisfaça o sistema de EDPHJ dado pelas equações (1.53) e (1.54) ou seu equivalente na equação (1.61).

Devemos ressaltar que podemos relacionar as variáveis t^α e ω^α ($\alpha = 1, \dots, P$) através dos vínculos Φ'_α . Derivando estes em relação aos q^i e p^a ($i = 1, \dots, N$ e $a = P, \dots, N$) obtemos

$$\frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial q^i} + \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial_r H_\beta}{\partial q^i} = 0; \quad \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_a} + \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial_r H_\beta}{\partial p_a} = 0, \quad (1.64)$$

onde $\beta = 1, \dots, P$ e usamos a equação (1.61). Por hipótese a matriz

$$V_{\alpha\beta} = \frac{\partial_r \Phi'_\alpha}{\partial p_\beta} \quad (1.65)$$

é inversível e portanto podemos escrever a equação (1.64) acima como

$$\frac{\partial_r H_\alpha}{\partial q^i} = -V_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial q^i}; \quad \frac{\partial_r H_\alpha}{\partial p_a} = -V_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial p_a}$$

ou então

$$\frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial q^i} \approx V_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial q^i}; \quad \frac{\partial_r H'_\alpha}{\partial p_a} \approx V_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial p_a}, \quad (1.66)$$

onde fazemos o uso das igualdades fracas (ver Apêndice B). Substituindo na equação (1.63), para $\alpha = 1, \dots, P$, teremos

$$\begin{aligned} dq^i &\approx (-1)^{P(i)} \frac{\partial_r H'_0}{\partial p_i} dt + (-1)^{P(i)+P(i)P(\alpha)} V_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial p_i} dt^\alpha, \\ dq^i &\approx (-1)^{P(i)} \frac{\partial_r H'_0}{\partial p_i} dt + (-1)^{P(i)+P(i)P(\beta)} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial p_i} d\omega^\beta, \end{aligned} \quad (1.67)$$

e

$$\begin{aligned} dp_i &\approx -\frac{\partial_r H'_0}{\partial q^i} dt - (-1)^{P_{(i)}P_{(\alpha)}} V_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial q^i} dt^\alpha, \\ dp_i &\approx -\frac{\partial_r H'_0}{\partial q^i} dt - (-1)^{P_{(i)}P_{(\beta)}} \frac{\partial_r \Phi'_\beta}{\partial q^i} d\omega^\beta, \end{aligned} \quad (1.68)$$

onde fizemos

$$d\omega^\beta = (-1)^{P_{(\beta)}P_{(\alpha)}+P_{(\beta)}} V_{\alpha\beta}^{-1} dt^\alpha. \quad (1.69)$$

As equações (1.67) e (1.68) se reduzem, fracamente, à equação (1.55), mostrando que a relação que procuramos é dada pela equação (1.69).

Um aspecto importante digno de nota, e que não se apercebe na literatura, é que o formalismo de Hamilton-Jacobi implica **naturalmente** no uso do Halmitoniano estendido do formalismo de Dirac (ver Apêndice **B**), como podemos ver nas equações (1.55) ou (1.62), sem ser necessária qualquer hipótese quanto à validade da conjectura de Dirac.

1.5.1 A integral completa e as simetrias das soluções

Da teoria das equações diferenciais parciais de primeira ordem sabemos que para um sistema involutivo do tipo dado pela equação (1.61) existe uma função⁴ $S(q^i, \alpha_a, t)$, contendo $N - P$ constantes α_a , que é a **integral completa** e equivale a uma integral incompleta da equação de Hamilton-Jacobi usual.

Essa equivalência pode ser mostrada considerando-se a integral completa $S(q^i, \alpha_i, t)$ da equação de Hamilton-Jacobi não singular

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^i; p_i = \frac{\partial_r S}{\partial q^i}\right) = 0. \quad (1.70)$$

Nesse caso temos que as equações

$$p_i = \frac{\partial_r S}{\partial q^i}; \quad \beta_i = \frac{\partial_r S}{\partial \alpha^i}, \quad (1.71)$$

⁴Isto pode ser visto através do método de integração de Jacobi [42, 43].

definem uma transformação canônica das variáveis (q^i, p_i) para as variáveis (β_i, α^i) que são constantes de movimento e podem ser determinadas pelas condições iniciais do sistema. Se fizermos $\alpha^\gamma = 0$ ($\gamma = 1, \dots, P$) na integral completa $S(q^i, \alpha_i, t)$ a dependência em α^γ é perdida e, como consequência, β_γ passa a ser indeterminado. Isso significa que $S(q^i, \alpha_a, t)$ ($a = P + 1, \dots, N$) não determina mais uma única solução das equações de movimento mas sim todas as soluções que possuam as mesmas constantes de movimento α^a , β_a e $\alpha^\gamma = 0$, mas com diferentes valores da constante β_γ conjugada a α^γ .

Se fizermos a identificação dos vínculos de primeira classe H'_γ dados na equação⁵ (1.60) com as constantes de movimento α^γ de forma que a equação (1.61) para $\alpha = 1, \dots, P$ se torne $\alpha^\gamma = 0$, teremos que as suas variáveis conjugadas β_γ **seriam puro gauge**. As constantes de movimento (β_a, α^a) são, por sua vez, invariantes de gauge já que têm parênteses de Berezin nulos com os α^γ .

Já que as variações em β_γ são geradas por sua variável conjugada $\alpha^\gamma = H'_\gamma$ podemos ver nas equações (1.62) ou (1.63), que a dinâmica do sistema contém todas as possíveis trajetórias correspondendo a diferentes gauges, novamente de acordo com a idéia por detrás do uso do Hamiltoniano estendido na teoria de Dirac. Vemos então que o formalismo de Hamilton-Jacobi fornece uma descrição invariante de gauge para o movimento, já que a solução $S(q^i, \alpha_a, t)$ completa do sistema de EDPHJ dado pela equação (1.61) descreve todas as trajetórias que diferem nos valores das variáveis de gauge β_γ mas que possuem os mesmos valores para as constantes de movimento invariantes de gauge β_a e α^a .

Consideremos agora as transformações canônicas infinitesimais produzidas por um gerador par G nas variáveis do espaço de fase

$$\delta q^i = \{q^i, G\}_B = \frac{\partial_i G}{\partial p_i}; \quad \delta p_i = \{p_i, G\}_B = -\frac{\partial_i G}{\partial q^i}. \quad (1.72)$$

⁵Na verdade bastaria que tivéssemos qualquer conjunto involutivo (ou **abelianizado**) de vínculos.

Voltando ao espaço de configuração, teremos que a mudança de forma $\delta' p_i$ dos momentos, ou seja, a variação dos momentos no ponto caracterizado pelas coordenadas originais q^i , será dada por

$$\begin{aligned}\delta' p_i &= \delta p_i - \frac{\partial_r p_i}{\partial q^j} \delta q^j = - \left[\frac{\partial_r G}{\partial q^i} + \frac{\partial_r^2 S}{\partial q^j \partial q^i} \frac{\partial_l G}{\partial p_j} \right], \\ \delta' p_i &= - \left[\frac{\partial_r G}{\partial q^i} + (-1)^{P_{(j)} P_{(i)}} \frac{\partial_r^2 S}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial_l G}{\partial p_j} \right] = - \left[\frac{\partial_r G}{\partial q^i} + (-1)^{P_{(j)} P_{(i)}} \frac{\partial_r p_j}{\partial q^i} \frac{\partial_l G}{\partial p_j} \right], \\ \delta' p_i &= - \left[\frac{\partial_r G}{\partial q^i} + (-1)^{P_{(j)}} \frac{\partial_l G}{\partial p_j} \frac{\partial_r p_j}{\partial q^i} \right] = - \left[\frac{\partial_r G}{\partial q^i} + \frac{\partial_r G}{\partial p_j} \frac{\partial_r p_j}{\partial q^i} \right],\end{aligned}\quad (1.73)$$

de forma que a variação $\delta' p_i$ é o negativo da derivada de G na direção de q^i no espaço de configuração. Das equações (1.15) para os momentos p_i no formalismo de Hamilton-Jacobi temos que a transformação de S compatível com a equação (1.73) acima será dada por

$$\delta' S = -G \quad (1.74)$$

Se o gerador G for um vínculo gerador de uma transformação do grupo de invariância da teoria o resultado acima nos diz que a solução das equações de Hamilton-Jacobi será invariante sob a ação desse grupo.

1.6 Sistemas com vínculos de segunda classe

No caso em que os vínculos de segunda classe estão presentes na teoria o sistema de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi não é integrável, assim como as equações diferenciais totais para as suas características. Portanto, não existe uma função S tal que $p_i = \partial_r S(q^j, t) / \partial q^i$ e que satisfaça as equações diferenciais parciais resultantes da aplicação desta igualdade aos vínculos.

A questão que se coloca é se podemos eliminar os vínculos de segunda classe da teoria de forma a tornar o sistema restante integrável. Uma solução é considerar o

conjunto total de vínculos

$$\Phi_\alpha(q^i; p_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, P; \quad (1.75)$$

$$\Theta_a(q^i; p_i) = 0, \quad a = 1, \dots, S; \quad (1.76)$$

onde os vínculos Φ_α são de primeira classe e os Θ_a de segunda classe. No caso de variáveis usuais (possuindo apenas variáveis de paridade par) sabemos que o número de vínculos de segunda classe deve ser par e, nesse caso, teremos que $S = 2M$. É possível então encontrar uma representação dos vínculos tal que tenhamos um conjunto de $P + M$ vínculos que sejam de primeira classe entre si, com os restantes S' vínculos sendo de segunda classe [12, 47].

Quando variáveis ímpares estão presentes o número de vínculos de segunda classe não é necessariamente par, e tal divisão não pode ser bem estabelecida. Um exemplo disso é o sistema dado pelo Lagrangeano

$$L = -\frac{i}{2} \dot{\theta}^j \theta_j, \quad (1.77)$$

onde $j = 1, 2, 3$ e os θ 's são variáveis ímpares. Esse sistema possui os vínculos primários

$$\varphi_j = p_j + \frac{i}{2} \theta_j = 0, \quad (1.78)$$

e um Hamiltoniano canônico identicamente nulo. Os vínculos acima são de segunda classe pois

$$\{\varphi_k, \varphi^j\}_B = \left\{ p_k + \frac{i}{2} \theta_k, p^j + \frac{i}{2} \theta^j \right\}_B = i \delta_k^j, \quad (1.79)$$

e portanto teremos um número ímpar de vínculos de segunda classe. Isso implicará na existência de um espaço de fase de dimensão ímpar, o que nunca ocorre quando estamos tratando de sistemas contendo apenas variáveis pares⁶.

⁶Casos semelhantes podem ocorrer em teoria de campos, mesmo com variáveis pares. Um exemplo é o campo escalar nas coordenadas do cone de luz, onde há apenas um vínculo que têm parênteses de Poisson não nulo consigo mesmo e, por isso, é de segunda classe [48].

Contudo, assumiremos que possamos separar um conjunto de M vínculos de segunda classe $\Omega_a(q^i; p_i) = 0$ que sejam de primeira classe entre si e com os vínculos de primeira classe Φ_α ; enquanto os M vínculos de segunda classe restantes são designados por Ψ_a .

Deste modo temos um conjunto de vínculos

$$\Phi_\alpha(q^i; p_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, P; \quad (1.80)$$

$$\Omega_a(q^i; p_i) = 0, \quad a = 1, \dots, M; \quad (1.81)$$

que são de primeira classe entre si e portanto formam um sistema integrável de equações diferenciais parciais junto com a equação (1.53). Ao invés desse conjunto usaremos o conjunto equivalente $F_\alpha(q^i; p_i)$ de vínculos em involução, onde ordenamos os vínculos de tal forma que os P primeiros valores do índice α correspondem aos vínculos de primeira classe e o valores $P+1$ a $P+M$ correspondem aos vínculos de segunda classe. O “Hamiltoniano” H'_0 será designado por F_0 de forma que o parâmetro ω^0 é o tempo. Como o sistema é composto de vínculos de primeira classe estes podem ser substituídos por um sistema equivalente de vínculos em involução. Deste modo obtemos um sistema integrável cujas equações características são dadas por

$$dq^i = \{q^i, F_\alpha\}_B d\omega^\alpha; \quad dp_i = \{p_i, F_\alpha\}_B d\omega^\alpha, \quad (1.82)$$

onde $\alpha = 0, 1, \dots, P+M$.

Por uma questão de praticidade no desenvolvimento subsequente adotaremos uma notação simplética. Escrevendo explicitamente as equações acima em termos de derivadas à esquerda, temos

$$dq^i = \frac{\partial_l F_\alpha}{\partial p_i} d\omega^\alpha, \quad (1.83)$$

$$dp_i = -(-1)^{P(i)} \frac{\partial_l F_\alpha}{\partial q^i} d\omega^\alpha, \quad (1.84)$$

onde $i = 0, 1, \dots, N$; $\alpha = 0, 1, \dots, P+M$. Essas expressões podem ser escritas de forma compacta como

$$d\eta^I = E^{IJ} \frac{\partial_l F_\alpha}{\partial \eta^J} d\omega^\alpha, \quad (1.85)$$

onde usamos a notação

$$\eta^{1i} = q^i, \quad \eta^{2i} = p_i \Rightarrow \eta^I = (q^i, p_i), \quad I = (\zeta = 1, 2; \quad i = 0, 1, \dots, N), \quad (1.86)$$

$$E^{IJ} = \delta^i_j \left(\delta^{\zeta_1} \delta^2_{\sigma} - (-1)^{P(i)} \delta^1_{\sigma} \delta^{\zeta_2} \right), \quad I = (\zeta; \quad i), \quad J = (\sigma; \quad j), \quad (1.87)$$

ou seja, I é um índice duplo tal que $\eta^I = \eta^{\zeta i}$, $\eta^{1i} = q^i$ e $\eta^{2i} = p^i$. Os parênteses de Berezin, definidos na equação (1.5) podem então ser escritos como

$$\{F, G\}_B = \frac{\partial_r F}{\partial \eta^I} E^{IJ} \frac{\partial_l F}{\partial \eta^J}. \quad (1.88)$$

Com esta notação podemos escrever a variação total de uma função G como

$$dG = \frac{\partial_r G}{\partial \eta^I} d\eta^I = \frac{\partial_r G}{\partial \eta^I} E^{IJ} \frac{\partial_l F_{\alpha}}{\partial \eta^J} d\omega^{\alpha} = \{G, F_{\alpha}\}_B d\omega^{\alpha}, \quad (1.89)$$

onde fizemos uso da equação (1.85). Com estas definições, as equações das características, dadas na equação (1.82), podem ser escritas como

$$d\eta^I = \left\{ \eta^I, F_{\alpha} \right\}_B d\omega^{\alpha}. \quad (1.90)$$

Agora vamos exigir que as soluções desse sistema satisfaçam **condições extras** especificadas pelos M vínculos de segunda classe restantes Ψ_a

$$\Psi_a(\eta^I) = 0, \quad (1.91)$$

que irão implicar em condições sobre os parâmetros ω^{α} , já que devemos ter

$$\frac{\partial_r \Psi_a}{\partial \eta^I} \frac{\partial_r \eta^I}{\partial \omega^{\alpha}} d\omega^{\alpha} = B_{a\alpha} d\omega^{\alpha} = 0, \quad (1.92)$$

onde

$$B_{a\alpha} = \frac{\partial_r \Psi_a}{\partial \eta^I} \frac{\partial_r \eta^I}{\partial \omega^{\alpha}} = \frac{\partial_r \Psi_a}{\partial \eta^I} \left\{ \eta^I, F_{\alpha} \right\}_B = \{ \Psi_a, F_{\alpha} \}_B, \quad (1.93)$$

($a = 1, \dots, M$) e usamos a equação (1.90) acima. A equação (1.92) impõe M relações sobre os $P + M + 1$ parâmetros ω^{α} de tal modo que o número destes é reduzido para $P + 1$. Uma solução para a equação (1.92) pode ser escrita como

$$d\omega^{\alpha} = \overline{B}^{\alpha}_{\rho'} d\theta^{\rho'}, \quad (1.94)$$

$$B_{a\alpha} \bar{B}^{\alpha}_{\rho'} = 0, \quad (1.95)$$

onde, como antes, $\alpha = 0, 1, \dots, P + M$ e os $\theta^{\rho'}$ ($\rho' = 0, 1, \dots, P$) são $P + 1$ novos parâmetros independentes. Devemos notar que a matriz $B_{a\alpha}$, definida acima, é uma matriz retangular de posto M . Isso deve-se ao fato de os elementos $\{\Psi_a, F_{\alpha''}\}_B$, com $\alpha'' = P + 1, \dots, P + M$, serem os parênteses de Berezin entre vínculos de segunda classe e portanto formarem uma submatriz $M \times M$ da matriz $2M \times 2M$ entre todos os vínculos de segunda classe $\Delta = \{\Theta_a, \Theta_b\}_B$, matriz essa que tem posto $2M$. Explicitamente temos

$$\Delta = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.96)$$

onde $A_{ab} = \{\Psi_a, \Psi_b\}_B$, $B_{a\alpha''} = \{\Psi_a, F_{\alpha''}\}_B$ e $C_{\alpha''a} = \{F_{\alpha''}, \Psi_a\}_B$ com $a, b = 1, \dots, M$; $\alpha'' = P + 1, \dots, P + M$.

É importante notar que no caso de termos apenas variáveis pares temos $C = -B^T$, mas com a presença de variáveis ímpares isso não será mais verdade uma vez que $\{\Psi_a, F_{\alpha''}\} = -(-1)^{P(\alpha)P(\alpha'')} \{F_{\alpha''}, \Psi_a\}$. Como $\det \Delta = \det B \times \det C$ teremos que tanto B quanto C devem ter posto M para que Δ seja inversível. Conseqüentemente a matriz retangular $B_{a\alpha}$ ($a = 1, \dots, M$; $\alpha = 0, 1, \dots, P + M$), definida na equação (1.93), deve ter posto M já que tem B como submatriz. Também podemos ver que a inversa de Δ tem a forma

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

Voltando para a equação (1.95) podemos reescrevê-la como

$$B_{a\alpha'} \bar{B}^{\alpha'}_{\rho'} + B_{a\alpha''} \bar{B}^{\alpha''}_{\rho'} = 0, \quad (1.98)$$

onde $a = 1, \dots, M$; $\alpha', \rho' = 0, 1, \dots, P$ e $\alpha'' = P + 1, \dots, P + M$. Como, pela argumentação acima, sabemos que a matriz $B_{a\alpha''}$ é inversível poderemos escrever os elementos $\bar{B}^{\alpha''}_{\rho'}$

em função dos $\overline{B}^{\alpha'}_{\rho'}$ que permanecerão indeterminados, i.e.

$$\overline{B}^{\beta''}_{\rho'} = - \left(B^{-1} \right)^{\beta'' a} B_{a\alpha'} \overline{B}^{\alpha'}_{\rho'}, \quad (1.99)$$

onde $\beta'' = P + 1, \dots, P + M$. Esta solução pode ser reescrita como

$$\overline{B}^{\beta}_{\rho'} = \left(\delta^{\beta}_{\alpha'} - \delta^{\beta}_{\sigma''} \left(B^{-1} \right)^{\sigma'' a} B_{a\alpha'} \right) \overline{B}^{\alpha'}_{\rho'}, \quad (1.100)$$

($\beta = 0, 1, \dots, P + M$) já que para $\beta = \alpha'$ teremos uma identidade trivial. Já que os elementos $\overline{B}^{\alpha'}_{\rho'}$ permanecem arbitrários podemos explicitar isso substituindo-os por uma matriz arbitrária $K^{\alpha'}_{\rho'}$ de modo que a solução geral acima torna-se

$$\overline{B}^{\beta}_{\rho'} = \left(\delta^{\beta}_{\alpha'} - \delta^{\beta}_{\sigma''} \left(B^{-1} \right)^{\sigma'' a} B_{a\alpha'} \right) K^{\alpha'}_{\rho'}. \quad (1.101)$$

Escolhendo, por uma questão de simplicidade, $K^{\alpha'}_{\rho'} = \delta^{\alpha'}_{\rho'}$ obtemos finalmente

$$\overline{B}^{\beta}_{\rho'} = \delta^{\beta}_{\rho'} - \delta^{\beta}_{\sigma''} \left(B^{-1} \right)^{\sigma'' a} \{ \Psi_a, F_{\rho'} \}_B, \quad (1.102)$$

onde usamos $B_{a\rho'} = \{ \Psi_a, F_{\rho'} \}_B$. Uma escolha diferente da matriz arbitrária $K^{\alpha'}_{\rho'}$ na equação (1.101) iria significar meramente uma redefinição dos parâmetros arbitrários $\theta^{\rho'}$, ou seja, teríamos agora novos parâmetros $\overline{\theta}^{\alpha'}$ tais que $d\overline{\theta}^{\alpha'} = K^{\alpha'}_{\rho'} d\theta^{\rho'}$.

Substituindo o resultado da equação (1.102) acima na equação (1.94) obtemos

$$d\omega^{\beta} = \left(\delta^{\beta}_{\rho'} - \delta^{\beta}_{\sigma''} \left(B^{-1} \right)^{\sigma'' a} \{ \Psi_a, F_{\rho'} \}_B \right) d\theta^{\rho'}, \quad (1.103)$$

e a equação (1.90) passa a ser

$$d\eta^I = \left(\{ \eta^I, F_{\rho'} \}_B - \{ \eta^I, F_{\sigma''} \}_B \left(B^{-1} \right)^{\sigma'' a} \{ \Psi_a, F_{\rho'} \}_B \right) d\theta^{\rho'}. \quad (1.104)$$

Podemos ver na expressão acima que os termos contendo os vínculos de segunda classe $F_{\sigma''}$ ($\sigma'' = P + 1, \dots, P + M$) aparecem apenas no segundo termo entre parênteses contraídos com os elementos da matriz B^{-1} enquanto a contração dos índices dos parâmetros arbitrários $\theta^{\rho'}$ acontece apenas com os vínculos de primeira classe $F_{\rho'}$. Usando o fato

de escolhermos os vínculos F_α em involução, tal que $\{F_{\rho'}, F_{\sigma''}\} = 0$, podemos escrever o lado direito da equação (1.104) acima como

$$\begin{aligned} d\eta^I = & \left(\left\{ \eta^I, F_{\rho'} \right\}_B - \left\{ \eta^I, F_{\sigma''} \right\}_B (B^{-1})^{\sigma'' a} \left\{ \Psi_a, F_{\rho'} \right\}_B \right. \\ & - \left\{ \eta^I, \Psi_a \right\}_B (C^{-1})^{a \sigma''} \left\{ F_{\sigma''}, F_{\rho'} \right\}_B \\ & \left. + \left\{ \eta^I, F_{\sigma''} \right\}_B (B^{-1} A C^{-1})^{\sigma'' \alpha''} \left\{ F_{\alpha''}, F_{\rho'} \right\}_B \right) d\theta^{\rho'}, \end{aligned} \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} d\eta^I = & \left(\left\{ \eta^I, F_{\rho'} \right\}_B - \left\{ \eta^I, F_{\sigma''} \right\}_B (B^{-1})^{\sigma'' a} \left\{ \Psi_a, F_{\rho'} \right\}_B \right. \\ & - \left\{ \eta^I, \Psi_a \right\}_B (C^{-1})^{a \sigma''} \left\{ F_{\sigma''}, F_{\rho'} \right\}_B \\ & \left. + \left\{ \eta^I, F_{\sigma''} \right\}_B (B^{-1})^{\sigma'' a} \left\{ \Psi_a, \Psi_b \right\}_B (C^{-1})^{b \alpha''} \left\{ F_{\alpha''}, F_{\rho'} \right\}_B \right) d\theta^{\rho'}, \end{aligned} \quad (1.106)$$

onde usamos a definição $A_{ab} = \{\Psi_a, \Psi_b\}_B$. Mas, comparando-se com a expressão (1.97) para Δ^{-1} , temos que a equação acima pode ser reescrita como

$$d\eta^I = \left(\left\{ \eta^I, F_{\rho'} \right\}_B - \left\{ \eta^I, \Psi'_b \right\}_B (\Delta^{-1})^{ba} \left\{ \Psi'_a, F_{\rho'} \right\}_B \right) d\theta^{\rho'}, \quad (1.107)$$

onde o conjunto $\Psi'_a = (\Psi_a, F_{\alpha''})$ contém todos os vínculos de segunda classe. Esta expressão pode ser então identificada com a definição dos parênteses de Dirac (ver Apêndice B), de modo que a expressão acima pode ser reescrita como

$$d\eta^I = \left\{ \eta^I, F_{\rho'} \right\}_D d\theta^{\rho'}. \quad (1.108)$$

Uma vez que os F_α estão em involução é simples ver, a partir da equação (1.106), que $\{F_{\alpha'}, F_{\rho'}\}_D = 0$ e portanto o sistema acima é integrável.

Vemos então que o uso dos parênteses de Dirac pode ser naturalmente inserido no formalismo, levando a um resultado consistente em que os vínculos secundários são eliminados. Fica claro então que, como havíamos mencionado anteriormente, a presença de vínculos de segunda classe contribui para reduzir o número de parâmetros livres que descrevem as equações características do sistema. Além disso, a introdução dessa

restrição leva naturalmente ao uso dos parênteses de Dirac para o cálculo das características, que assim passam a ser descritas apenas em termos dos vínculos de primeira classe, num procedimento equivalente à determinação dos coeficientes arbitrários dos vínculos de primeira classe que ocorre no formalismo de Dirac.

Evidentemente a demonstração aqui feita depende de uma escolha adequada dos vínculos, mas a equação (1.108) é fracamente igual às equações Hamiltonianas de Dirac obtidas com o uso dos parênteses de Dirac (ver Apêndice B). De todo modo, fica comprovado que ao substituírmos os parênteses de Berezin pelos parênteses de Dirac teremos um sistema contendo apenas vínculos de primeira classe e que portanto pode ser integrado. Isso não contradiz nossa demonstração anterior de que não existe uma solução para as equações de Hamilton-Jacobi na presença de vínculos de segunda classe pois, agora, estes vínculos não representam equações diferenciais parciais a serem resolvidas mas condições a serem impostas às soluções do sistema de equações diferenciais parciais formado pelos vínculos de segunda classe do sistema.

Outra forma de entender isso é lembrando que o uso dos parênteses de Dirac reduz a dimensão do espaço de fase de um valor igual ao número de vínculos de segunda classe. Conseqüentemente o espaço de configuração também é reduzido e é nesse espaço reduzido que existe uma solução para as equações de Hamilton-Jacobi e não no espaço total original.

2. Quantização e liberdade de gauge

A abordagem mais direta para a quantização canônica de sistemas singulares dentro do formalismo Hamiltoniano consiste em realizar a fixação de gauge. Neste caso a fixação é feita impondo-se novos vínculos que façam com que todo conjunto dos vínculos da teoria seja de segunda classe. A partir daí, podemos definir os parênteses de Dirac para este conjunto de vínculos e aplicar o *Princípio de Correspondência* a esses parênteses, e não aos parênteses de Berezin, i.e.

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i}, \quad (2.1)$$

onde $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - (-1)^{P_AP_B} \hat{B}\hat{A}$ é o comutador generalizado, o qual será um comutador quando um dos operadores for correspondente a uma variável par e um anticomutador quando ambos os operadores corresponderem a variáveis ímpares. Ou seja, as relações de comutação (ou anticomutação) quânticas entre os operadores serão obtidas através do Princípio de Correspondência a partir dos respectivos parênteses de Dirac e não dos parênteses de Berezin.

Classicamente os parênteses de Dirac permitem tratar os vínculos de segunda classe como igualdades fortes e o correspondente quântico deste fato é que poderemos tratar os vínculos de segunda classe como identidades entre os operadores quânticos. Este método de quantização elimina, em nível clássico, todos os graus de liberdade arbitrários da teoria, desaparecendo assim a arbitrariedade presente nas equações de movimento Hamiltonianas.

Contudo, vimos no capítulo anterior que um sistema singular possui diferentes trajetórias que diferem apenas nos valores das variáveis de gauge e que podem ser obtidas de uma mesma solução das equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi. Isso nos permite agrupar todas as trajetórias geradas por uma mesma solução das equações de Hamilton-Jacobi em famílias que devem representar um mesmo estado físico, uma vez que estas diferem entre si por uma transformação de gauge. Além disso, a existência de vínculos de segunda classe constitui um problema sério do ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi.

Deste modo, visando preservar ao máximo esta característica do formalismo de Hamilton-Jacobi, o processo de quantização associado a este formalismo evita a fixação de gauge utilizando os vínculos de primeira classe como condições sobre os estados físicos, reduzindo este processo de quantização exatamente à chamada *quantização de Dirac* [7].

De forma um pouco mais precisa, este método consiste em, na presença apenas de vínculos de primeira classe, realizar a quantização canônica usual transformando as variáveis canônicas em operadores e aplicando o Princípio de Correspondência aos parênteses de Berezin. Os vínculos são então inseridos na teoria quântica exigindo-se que os operadores quânticos a eles correspondentes anulem os estados físicos, ou seja, os estados físicos serão aqueles para os quais for válida a condição

$$\hat{\Phi}_\alpha(\hat{q}^i; \hat{p}_i) |\psi\rangle = 0. \quad (2.2)$$

Nos casos em que haja vínculos de segunda classe será necessário definir os parênteses de Dirac em relação a estes vínculos e aplicar o Princípio de Correspondência a esses parênteses de acordo com a expressão (2.1). Os vínculos de primeira classe devem então ser impostos como condições sobre os estados físicos, de acordo com a expressão (2.2), enquanto que os vínculos de segunda classe serão considerados identidades entre os operadores.

Devemos ressaltar que a motivação de Dirac para introduzir os parênteses que levam seu nome foi a necessidade de evitar as contradições que seriam geradas pela aplicação das condições sobre os estados físicos, mostradas na equação (2.2), com os vínculos de segunda classe [7]. Para esclarecermos este ponto consideremos inicialmente dois vínculos de primeira classe. Seus parênteses de Berezin serão uma combinação linear dos vínculos de primeira classe

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}_B = C_{\alpha\beta}{}^\gamma \Phi_\gamma \approx 0, \quad (2.3)$$

de forma que quanticamente teremos

$$[\hat{\Phi}_\alpha, \hat{\Phi}_\beta] = \hat{\Phi}_\alpha \hat{\Phi}_\beta - (-1)^{P_\alpha P_\beta} \hat{\Phi}_\beta \hat{\Phi}_\alpha = \hat{C}_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{\Phi}_\gamma, \quad (2.4)$$

a menos de questões de ordenamento. Portanto, se exigirmos que as condições (2.2) sobre os estados físicos sejam satisfeitas, a condição

$$[\hat{\Phi}_\alpha, \hat{\Phi}_\beta] |\psi\rangle = 0, \quad (2.5)$$

será automaticamente satisfeita para todos os estados físicos como consequência da equação (2.4).

Consideremos agora dois vínculos Θ_a de segunda classe tal que

$$\{\Theta_a, \Theta_b\}_B = D_{ab} \neq 0, \quad (2.6)$$

de forma que quanticamente teremos

$$[\hat{\Theta}_a, \hat{\Theta}_b] = \hat{D}_{ab}. \quad (2.7)$$

Agora podemos ver que se exigirmos que os estados físicos sejam anulados por estes vínculos, ou seja $\hat{\Theta}_a |\psi\rangle = 0$, teremos uma contradição. Isso deve-se ao fato de que ao aplicarmos a equação (2.7) a um estado físico teremos que

$$\hat{\Theta}_a \hat{\Theta}_b |\psi\rangle - (-1)^{P_a P_b} \hat{\Theta}_b \hat{\Theta}_a |\psi\rangle = \hat{D}_{ab} |\psi\rangle, \quad (2.8)$$

onde o lado esquerdo se anula como consequência da exigência $\hat{\Theta}_a |\psi\rangle$, porém o mesmo não ocorre com o lado direito da igualdade.

Uma vez definidos os parênteses de Dirac, os vínculos de segunda classe passarão a ser igualdades fortes no nível clássico, não havendo motivo para considerá-los como condições sobre os estados físicos no nível quântico, mas sim como identidades entre operadores, eliminando o tipo de contradição ilustrada acima.

Voltando à quantização de Dirac, podemos ver que, como consequência das condições (2.2) sobre os estados físicos, estes permanecerão inalterados sob as transformações unitárias $\exp(i\varepsilon^\alpha \hat{\Phi}_\alpha)$ que são geradas pelos operadores quânticos correspondentes aos vínculos de primeira classe, onde os ε^α são parâmetros arbitrários. Ou seja, para os estados físicos teremos que

$$\exp(i\varepsilon^\alpha \hat{\Phi}_\alpha) |\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (2.9)$$

Este resultado é usualmente interpretado como a demonstração da invariância dos estados físicos sob as transformações de gauge geradas pelos vínculos de primeira classe. Como um todo, o método de quantização de Dirac é considerado como sendo “sem fixação de gauge”, uma vez que em nenhum momento condições de gauge são impostas e, portanto, a invariância de gauge estaria sendo “transferida” para a teoria quântica (ver [14], capítulo 13, seção 13.3).

Contudo, pretendemos mostrar que esta interpretação relativa à quantização “a gauge livre” requer certos cuidados e pode não ser sempre correta, uma vez que a imposição das condições (2.2) sobre os estados físicos pode levar a uma **escolha implícita de gauge**. Passemos agora explicitar o porquê desta afirmação.

Como discutimos no capítulo anterior (e comentado no Apêndice B), do ponto de vista clássico os vínculos de primeira classe são os geradores de transformações canônicas que mudam as variáveis de gauge mas mantêm inalteradas as variáveis físicas do sistema. Uma solução das equações de Hamilton-Jacobi, na forma de sua integral completa, contém todas as trajetórias que possuem os mesmos valores para as constantes

de movimento físicas, mas que diferem nas constantes de movimento relacionadas às variáveis de gauge. Deste modo, os vínculos de primeira classe geram transformações canônicas, as quais levam de uma trajetória a outra dentro **de uma mesma família de trajetórias** que correspondem a uma mesma solução das equações de Hamilton-Jacobi do sistema e, portanto, a um mesmo estado físico.

Em primeiro lugar devemos notar que um estado físico que satisfaça a condição dada pela equação (2.2) pode ser considerado invariante sob as “transformações de gauge” do tipo $\exp(i\varepsilon^\alpha \hat{\Phi}_\alpha)$ já que não é modificado por estas. Mas não temos mais invariância de gauge no sentido usual do termo, porque não é possível passar para diferentes configurações de variáveis que correspondam a um mesmo estado físico. Isso deve-se ao fato de que a condição (2.2) faz com que a transformação unitária gerada pelos vínculos atue como uma identidade sobre os estados físicos, como mostrado na equação (2.9), fazendo com que estes estados não possam ser transformados em outros estados quânticos correspondentes a diferentes escolhas de trajetórias dentro de uma mesma família gerada por uma determinada solução clássica da equação de Hamilton-Jacobi.

O exemplo mais claro que demonstra a “liberdade de gauge” quântica é o caso de um vínculo do tipo $p_i = 0$. No processo de quantização devemos então impor que um estado físico satisfaça $\hat{p}_i |\psi\rangle = 0$, condição que expressa na base das coordenadas torna-se $-i\partial\psi(q)/\partial q^i = 0$. Este resultado faz com que a função de onda dos estados físicos não possa ter dependência na variável q^i que é puro gauge e, portanto, completamente arbitrária. Estados que difiram apenas nos valores da variável de gauge são fisicamente indistinguíveis e portanto equivalentes. Mas **não existem** transformações geradas pelos operadores canônicos que levem de um estado a outro fisicamente equivalente. Isso deve-se ao fato de que estados físicos são aqueles para os quais os geradores dessas transformações se anulam devido à condição (2.2).

Mais ainda, quando não é possível dar aos vínculos de primeira classe uma forma

do tipo $p_i = 0$ as condições para os estados físicos podem levar a resultados que representam uma **fixação implícita do gauge**.

Estes fatos ficarão claros ao considerarmos os dois exemplos que trataremos a seguir: o campo Eletromagnético livre e o campo de Dirac em interação com o campo Eletromagnético. Estes exemplos foram escolhidos pois são muito bem conhecidos e têm as propriedades necessárias para destacar as características do formalismo que acabamos de mencionar. No caso do campo Eletromagnético livre faremos também a comparação entre os resultados obtidos por meio da quantização de Dirac com aqueles obtidos com uma fixação parcial do gauge, de forma a destacar alguns dos aspectos que acabamos de comentar. Além disso, no desenvolvimento clássico dos exemplos, faremos uma comparação entre os formalismos Hamiltoniano e de Hamilton-Jacobi.

2.1 O campo Eletromagnético livre

Consideremos como primeiro exemplo o campo Eletromagnético livre cujo lagrangeano é dado por

$$L = \int \mathcal{L} d^3x = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3x, \quad (2.10)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; é o tensor de intensidade do campo e a métrica de Minkowski é $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. As variáveis dinâmicas são os campos A^μ , que são variáveis pares, de forma que os momentos conjugados p_μ serão dados por

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -F_{0\mu}, \quad (2.11)$$

onde, devido ao fato de as variáveis presentes serem pares, não nos preocuparemos com derivadas à direita ou à esquerda. Este resultado implica na existência de um vínculo

$$\mathcal{H}'_1 = p_0 \approx 0. \quad (2.12)$$

Para as componentes espaciais p_i teremos

$$p_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0, \quad (2.13)$$

de modo que as velocidades $\dot{A}_i$ podem ser escritas em termos das variáveis canônicas como

$$\dot{A}_i = \partial_0 A_i = -p_i + \partial_i A_0. \quad (2.14)$$

Neste caso em particular o vínculo $\mathcal{H}'_1$ é o único existente, mas devemos lembrar que o mesmo pode ser visto a partir do fato de a matriz Hessiana, dada por

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{A}^\alpha(\vec{x}) \delta \dot{A}^\beta(\vec{y})} = (-\eta_{\alpha\beta} + \delta^0_\alpha \delta^0_\beta) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.15)$$

ter posto 3, que implicará na existência de apenas um vínculo.

O Hamiltoniano canônico será dado por

$$H_C = \int \mathcal{H}_C d^3x = \int (p_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}) d^3x, \quad (2.16)$$

que, com o uso da definição dos momentos, do vínculo (2.12) e da expressão (2.14) para as velocidades, torna-se

$$H_C = \int \left(p_i \dot{A}^i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right) d^3x = \int \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} p^i p_i + p^i \partial_i A_0 \right) d^3x$$

$$H_C = \int \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} p^i p_i + A_0 \partial^i p_i \right) d^3x, \quad (2.17)$$

onde fizemos uma integração por partes no termo $p^i \partial_i A_0$. Os parênteses de Berezin fundamentais, que neste caso são idênticos aos parênteses de Poisson, serão

$$\{A_\mu(\vec{x}), p^\nu(\vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.18)$$

Do ponto de vista do formalismo Hamiltoniano (ver Apêndice **B**) teremos o Hamiltoniano primário

$$H_P = \int (\mathcal{H}_C + \lambda_1(x) \mathcal{H}'_1) d^3x, \quad (2.19)$$

onde λ_1 é um parâmetro arbitrário. A condição de consistência para o vínculo primário $\mathcal{H}'_1$ será

$$\{\mathcal{H}'_1, H_P\} = \partial_i p^i \approx 0, \quad (2.20)$$

o que implicará na existência de um vínculo $\mathcal{H}'_2 = \partial_i p^i$. A condição de consistência para este vínculo é automaticamente satisfeita de forma que não há novos vínculos e ambos são de primeira classe. Seguindo a conjectura de Dirac temos agora o Hamiltoniano estendido

$$H_E = \int (\mathcal{H}_C + \lambda_1(x) \mathcal{H}'_1 + \lambda_2(x) \mathcal{H}'_2) d^3x, \quad (2.21)$$

onde λ_2 é um novo parâmetro arbitrário.

Com este Hamiltoniano as equações de movimento serão

$$\dot{A}^0 \approx \{A^0, H_E\} = \int \{A^0, \lambda_1 \mathcal{H}'_1\} d^3x = \lambda_1, \quad (2.22)$$

$$\dot{A}^i \approx \{A^i, H_E\} = \int \left\{ A^i, -\frac{1}{2} p^j p_j + A_0 \partial^j p_j \right\} d^3x = -p^i + \partial^i A_0 - \partial^i \lambda_2, \quad (2.23)$$

$$\dot{p}^i \approx \{p^i, H_E\} = \int \left\{ p^i, \frac{1}{4} F_{kj} F^{kj} \right\} d^3x = \partial_j F^{ji}, \quad (2.24)$$

onde fica claro que o parâmetro arbitrário λ_1 é a velocidade relacionada à componente A^0 do potencial vetor e que esta é um parâmetro totalmente arbitrário na teoria pois sua derivada temporal é arbitrária.

Do ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi teremos os dois “Hamiltonianos”

$$H'_0 = \int (P_0 + \mathcal{H}_C) d^3x, \quad (2.25)$$

$$H'_1 = \int \mathcal{H}'_1 d^3x = \int p_0 d^3x, \quad (2.26)$$

que são associados, respectivamente, aos parâmetros $t = t^0$ (lembramos que P_0 é o “momento” conjugado a t) e A_0 , e fornecem as equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi. Devemos ressaltar que desde o princípio a componente A^0 do potencial vetor é considerada um parâmetro arbitrário que descreve a evolução do sistema gerada pelo “Hamiltoniano” H'_1 . Das equações (1.46) e (1.47) vemos que as condições de integrabilidade exigem que

$$dH'_1 = \{H'_1, H'_0\} dt + \{H'_1, H'_1\} dA^0 = \{H'_1, H'_0\} dt = 0, \quad (2.27)$$

onde

$$dH'_1 = -\frac{\delta H'_0}{\delta A_0} dt = \left(\int \partial_j p^j d^3x \right) dt = 0, \quad (2.28)$$

o que implica na nova equação

$$H'_2 = \int \mathcal{H}'_2 d^3x = \int \partial_j p^j d^3x, \quad (2.29)$$

que correspondente ao vínculo secundário e deve ser acrescentada ao sistema composto pelas equações (2.25) e (2.26). A condição $dH'_2 = 0$ é agora automaticamente satisfeita, assim como a condição $dH'_0 = 0$, de forma que o sistema formado pelas equações (2.25), (2.26) e (2.29) é integrável; este resultado também poderia ser obtido pela aplicação da condição (1.43). As equações características relacionadas a esse sistema são

$$dA^i = \frac{\delta H'_0}{\delta p_i} dt + \frac{\delta H'_1}{\delta p_i} dA^0 + \frac{\delta H'_2}{\delta p_i} d\omega, \quad (2.30)$$

$$dp^i = -\frac{\delta H'_0}{\delta A_i} dt - \frac{\delta H'_1}{\delta A_i} dA^0 - \frac{\delta H'_2}{\delta A_i} d\omega, \quad (2.31)$$

onde não é possível associar uma coordenada específica ao parâmetro ω , já que o vínculo $\mathcal{H}'_2$ não tem uma forma do tipo $H'_\alpha = p_\alpha - \phi_\alpha(q_i, p_a)$. Das expressões para os “Hamiltonianos” teremos

$$dA^i = \left(-p^i + \partial^i A^0 \right) dt + \int \partial^i \delta^3 \left(\vec{x} - \vec{y} \right) d\omega = \left(-p^i + \partial^i A^0 \right) dt - \partial^i d\omega, \quad (2.32)$$

$$dp^i = \partial_j F^{ji} dt. \quad (2.33)$$

Estas equações são equivalentes às equações (2.22)-(2.24) do formalismo Hamiltoniano ao identificarmos $\dot{\omega}$ com λ_2 e lembrarmos que, como consequência da equação (2.22), A^0 é um parâmetro arbitrário também no formalismo Hamiltoniano. Com estes resultados podemos passar ao procedimento de quantização.

2.1.1 Quantização

Por uma questão de simplicidade os sinais $\hat{}$ que indicam os operadores serão omitidos, mas devemos ter em mente que já estamos no caso quântico. Seguindo o procedimento usual para a construção do espaço de Fock, faremos a expansão de Fourier dos operadores

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \varepsilon_r^\mu(k) \left[a_r(k) e^{-ikx} + a_r^\dagger(k) e^{ikx} \right], \quad (2.34)$$

onde $\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2}$ e o índice r vai de 0 a 3. Os vetores de polarização são escolhidos de tal forma que $\varepsilon_0^\mu(k) = (1, 0, 0, 0)$ é o vetor unitário na direção temporal e os três vetores restantes são tais que $\varepsilon_i^\mu(k) = (0, \vec{\varepsilon}_i)$; $i = 1, 2, 3$; e satisfazem

$$\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{k} = \vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{k} = 0; \quad \vec{\varepsilon}_3 = \frac{\vec{k}}{\omega_k}; \quad \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{\varepsilon}_s = \delta_{rs}; \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_r^i \varepsilon_{is} = -\delta_{rs} = g_{rs} \Rightarrow g^{ij} = g_{rs} \varepsilon_r^i \varepsilon_s^j. \quad (2.36)$$

Com essa escolha, temos

$$A^0(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \left[a_0(k) e^{-ikx} + a_0^\dagger(k) e^{ikx} \right], \quad (2.37)$$

$$A^i(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \varepsilon_r^i(k) \left[a_r(k) e^{-ikx} + a_r^\dagger(k) e^{ikx} \right], \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.38)$$

O correspondente quântico da equação (2.13) nos permite escrever

$$\begin{aligned} p^i &= -\left(\partial^0 A^i - \partial^i A^0\right) = -i \int \frac{d^3 k \cdot \omega_k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} \varepsilon_r^i(k) \left[-a_r(k) e^{-ikx} + a_r^\dagger(k) e^{ikx}\right] \\ &\quad + \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} \left[-ik^i a_0(k) e^{-ikx} + ik^i a_0^\dagger(k) e^{ikx}\right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

mas usando $\varepsilon_3^i(k) = k^i/\omega_k$ e reagrupando os termos obtemos

$$\begin{aligned} p^i &= -i \int \frac{d^3 k \cdot \sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} \left[\left[a_0(k) \varepsilon_3^i(k) - a_r(k) \varepsilon_r^i(k) \right] e^{-ikx} \right. \\ &\quad \left. + \left[a_r^\dagger(k) \varepsilon_r^i(k) - a_0^\dagger(k) \varepsilon_3^i(k) \right] e^{ikx} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para o operador p^0 não temos uma expressão semelhante e portanto escrevemos

$$p^0(x) = i \int \frac{d^3 k \sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} \left[b_0(k) e^{-ikx} - b_0^\dagger(k) e^{ikx} \right]. \quad (2.41)$$

O Princípio de Correspondência implica nas relações de comutação

$$\left[A^\mu(\vec{x}), p^\nu(\vec{y}) \right] = i g^{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.42)$$

nas quais a substituição das expressões (2.37), (2.38) (2.40) e (2.41) nos fornece, por meio de cálculos diretos, as relações de comutação

$$\left[a_0(k), b_0^\dagger(k') \right] = \left[b_0(k), a_0^\dagger(k') \right] = -\delta^3(k - k'), \quad (2.43)$$

$$\left[a_r(k), a_s^\dagger(k') \right] = -g_{rs} \delta^3(k - k') = \delta_{rs} \delta^3(k - k'), \quad (2.44)$$

sendo que as relações restantes são nulas.

Estas são relações de comutação entre operadores de criação e aniquilação com duas diferenças em relação ao caso usual. Primeiro, a equação (2.43) implica que o operador de aniquilação conjugado a $b_0^\dagger$ é a_0 e não $b_0(k)$, que é conjugado a $a_0^\dagger$. Segundo, as relações de comutação entre estes mesmos operadores têm o sinal invertido, o que nos levará a estados de norma negativa. De todo modo, as relações dadas pelas equações

(2.43) e (2.44) nos permitem construir um espaço de Fock, com um estado de vácuo $|0\rangle$ anulado por todos os operadores de aniquilação.

Podemos agora analisar quais as condições que os vínculos, na forma de operadores quânticos, irão impor sobre os estados físicos. Para isso devemos lembrar que devemos descartar o setor de frequência negativa dos operadores, que contém operadores de criação, já que nem mesmo o vácuo seria anulado por esse setor e portanto não teríamos nenhum estado físico. Esta é uma característica do espaço de Fock e não do formalismo de sistemas singulares em si.

Consideremos então a condição derivada do vínculo clássico $p^0 = 0$, i.e.

$$p^{(+)\,0} |\psi\rangle = i \int \frac{d^3 k \sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} b_0(k) e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.45)$$

que implica em

$$b_0(k) |\psi\rangle = 0. \quad (2.46)$$

Deste modo um estado físico não pode conter nenhum modo criado pelo operador $a_0^\dagger(k)$ conjugado a $b_0(k)$. Para termos a relação dos estados físicos com os modos criados pelo operador $b_0^\dagger(k)$ (e aniquilados por $a_0(k)$) escrevamos este estado como

$$|\psi\rangle = |\psi'\rangle + |\psi''\rangle, \quad (2.47)$$

onde $|\psi'\rangle$ é um estado físico obtido a partir do vácuo usando os operadores de criação que não $a_0^\dagger(k)$ e $b_0^\dagger(k)$, e $|\psi''\rangle$ é um estado físico com pelo menos um modo criado por $b_0^\dagger(k)$, não podendo ter modos criados por $a_0^\dagger(k)$ pois do contrário não seria um estado físico. Temos então

$$|\psi''\rangle = b_0^\dagger(k) |\phi\rangle. \quad (2.48)$$

Mas o produto escalar deste estado com qualquer outro estado físico $|\psi\rangle$ é nulo já que

$$\langle\psi|\psi''\rangle = \langle\psi|b_0^\dagger(k)|\phi\rangle = 0, \quad (2.49)$$

pois $\langle \psi | b_0^\dagger(k) = 0$ como consequência da condição (2.46) para os estados físicos. Deste modo $|\psi''\rangle$ é o que se denomina **estado espúrio desacoplado** pois é ortogonal a qualquer estado físico, incluindo ele próprio. Isso implica que um dado estado físico é indistinguível de qualquer outro estado que difira dele apenas por um estado do tipo $|\psi''\rangle$. Deste modo, todos os estados do tipo dado pela equação (2.47) podem ser considerados como um mesmo estado físico.

Passemos agora às condições derivadas do segundo vínculo clássico $\partial_i p^i$, i.e.

$$\partial_i p^{(+i)} |\psi\rangle = \int \frac{d^3 k \cdot (\omega_k)^{3/2}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} [a_0(k) - a_3(k)] e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.50)$$

que implica em

$$[a_0(k) - a_3(k)] |\psi\rangle = 0. \quad (2.51)$$

Este resultado relaciona o número de fótons longitudinais presentes num estado físico com o número de modos $b_0^\dagger$ (que é conjugado a a_0) no mesmo estado e, com isso, este modo longitudinal se relaciona com os estados espúrios criados por $b_0^\dagger$. Mas, devido à forma da relação de comutação entre a_0 e seu operador de criação $b_0^\dagger$, os modos relacionados a estes operadores têm norma negativa, trazendo os problemas usuais para o valor esperado da energia. Vemos então que a condição (2.51) faz com que, para estados físicos, as contribuições da componente longitudinal compensem as contribuições dos estados de norma negativa, num resultado semelhante ao obtido no tratamento covariante usual aplicado ao campo eletromagnético usando o Lagrangeano de Fermi.

Este é o resultado obtido mantendo-se toda a liberdade de gauge. A existência dos estados desacoplados vem da forma do vínculo $p_0 = 0$ e é análoga ao resultado, mencionado no início do capítulo, da independência da função de onda em relação à coordenada q^0 , que permanece então totalmente arbitrária, i.e. “desacoplada”.

Vejamos agora quais são os resultados quando fazemos duas diferentes fixações

parciais de gauge. Consideremos primeiro o Lagrangeano de Fermi

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu), \quad (2.52)$$

que pode ser obtido do Lagrangeano usual (2.10) com a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implícita. Deste modo os momentos conjugados são

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -\dot{A}_\mu, \quad (2.53)$$

não havendo portanto vínculos. Apesar disso devemos lembrar que a condição de Lorentz não constitui um gauge já que ela torna apenas um dos vínculos do Lagrangeano (2.10) de segunda classe, mais especificamente o vínculo $\partial_i p^i = 0$. O vínculo $p^0 = 0$ não foi fixado, mas já não aparece explicitamente pois o novo Lagrangeano tem a estrutura de vínculos alterada pela “inclusão” da condição de Lorentz. Deste modo o resultado acima nos permite escrever, a partir da decomposição (2.34) do campo A^μ , a seguinte expressão para os momentos

$$p^\mu = -\partial^0 A^\mu = -i \int \frac{d^3 k \cdot \omega_k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} \varepsilon_r^\mu(k) \left[-a_r(k) e^{-ikx} + a_r^\dagger(k) e^{ikx} \right]. \quad (2.54)$$

Não existem mais os operadores b_0 e $b_0^\dagger$, que fomos forçados a adotar pois o vínculo $p^0 = 0$ nos impedia de relacionar os operadores em p^0 com os operadores em A^μ .

As relações de comutação derivadas do Princípio de Correspondência são agora

$$\left[a_0(k), a_s^\dagger(k') \right] = -\delta^3(k - k'), \quad (2.55)$$

$$\left[a_r(k), a_s^\dagger(k') \right] = -g_{rs} \delta^3(k - k') = \delta_{rs} \delta^3(k - k'), \quad (2.56)$$

sendo todas as outras relações nulas. Com estes resultados **não existem mais estados espúrios**, uma consequência de não termos mais um vínculo do tipo $p^0 = 0$. Os estados de norma negativa persistem mas ao aplicarmos aos estados físicos o setor de frequências

negativas da condição de Lorentz, dada por

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu(x) = & -i \int \frac{d^3 k \sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} \left([a_0(k) - a_3(k)] e^{-ikx} \right. \\ & \left. - [a_0^\dagger(k) - a_3^\dagger(k)] e^{ikx} \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

obtemos o conhecido resultado

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = -i \int \frac{d^3 k \cdot \sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} [a_0(k) - a_3(k)] e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.58)$$

$$[a_0(k) - a_3(k)] |\psi\rangle = 0. \quad (2.59)$$

Deste modo, nos estados físicos, a contribuição dos fótons escalares é compensada pelos fótons longitudinais.

Como no caso anterior, temos vários estados quânticos correspondentes a um mesmo estado físico. Contudo, **não** existe uma transformação, gerada pelos operadores canônicos, que nos leve de um estado quântico a outro fisicamente equivalente. Poderia se questionar a condição de consistência relativa à preservação temporal de $\partial_\mu A^\mu = 0$, um detalhe normalmente omitido nos livros textos, porém um cálculo direto revela que essa condição é simplesmente a Lei de Gauss $\partial_i E^i = 0$. A substituição dos potenciais vetores A^μ na definição $E^i = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0$ leva a

$$\partial_i E^i = - \int \frac{(\omega_k)^2 d^3 k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} \left[(a_3(k) - a_0(k)) e^{-ikx} + (a_3^\dagger(k) - a_0^\dagger(k)) e^{ikx} \right] \quad (2.60)$$

que, aplicada sobre os estados físicos, resulta na mesma condição (2.59) mostrada acima.

Por fim consideremos uma segunda forma de fixação parcial de gauge. Observando o fato de que, classicamente, o grau de liberdade composto por A^0 e p_0 não possui nenhuma dinâmica podemos simplesmente eliminá-lo já no formalismo clássico. Isso equivale a impor o vínculo $A^0 = 0$, que torna o vínculo $p_0 = 0$ de segunda classe. Com isso podemos definir os parênteses de Dirac em relação a estes vínculos, os quais serão simplesmente os parênteses de Poisson usuais nos graus de liberdade restantes A^i e

p_i . O vínculo $\partial_i p^i = 0$ permanece e deve ser considerado como uma condição sobre os estados físicos.

Temos agora apenas as componentes A^i dadas pela equação (2.38) e os momentos

$$p^i = -i \int \frac{d^3 k \cdot \sqrt{\omega_k}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} \left[-a_r(k) \varepsilon_r^i(k) e^{-ikx} + a_r^\dagger(k) \varepsilon_r^i(k) e^{ikx} \right], \quad (2.61)$$

de forma que as relações de comutação tornam-se simplesmente

$$\left[a_r(k), a_s^\dagger(k') \right] = \delta_{rs} \delta^3(k - k'). \quad (2.62)$$

Aplicando agora a condição sobre os estados físicos teremos

$$\partial_i p^{(+i)} |\psi\rangle = - \int \frac{d^3 k \cdot (\omega_k)^{3/2}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} a_3(k) e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.63)$$

$$a_3(k) |\psi\rangle = 0, \quad (2.64)$$

ou seja, não teremos fótons longitudinais. Este é exatamente o resultado obtido no **gauge de radiação**, embora não tenhamos selecionado a condição $\partial_i A^i = 0$ necessária, junto com a condição $A^0 = 0$, para fixar este gauge. É neste sentido que, conforme comentamos anteriormente, o método de quantização de Dirac pode nos levar a uma escolha implícita de gauge.

2.2 O campo de Dirac em interação com o campo Eletromagnético

Consideraremos agora o campo de Dirac interagindo com o campo Eletromagnético, descrito pela Lagrangeana

$$L = \int \mathcal{L} d^3x = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi \right) d^3x, \quad (2.65)$$

onde as componentes A_μ são variáveis pares enquanto ψ e $\bar{\psi}$ são ímpares. Os momentos p_μ , p_ψ e $p_{\bar{\psi}}$ conjugados, respectivamente, às variáveis A_μ , ψ , e $\bar{\psi}$, são

$$p_\mu = \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -F_{0\mu}, \quad (2.66)$$

$$p_\psi = \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i \bar{\psi} \gamma^0; \quad p_{\bar{\psi}} = \frac{\partial_r \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (2.67)$$

Considerando, como usual, que ψ é um vetor coluna e $\bar{\psi}$ um vetor linha teremos que p_ψ deve ser um vetor linha enquanto $p_{\bar{\psi}}$ será um vetor coluna.

Das expressões dos momentos teremos os seguintes vínculos primários

$$\phi_1 = p_0 \approx 0, \quad (2.68)$$

$$\phi_2 = p_\psi - i \bar{\psi} \gamma^0, \quad \phi_3 = p_{\bar{\psi}} \approx 0. \quad (2.69)$$

Deste modo o Hamiltoniano canônico é dado por

$$H_C = \int \mathcal{H}_C d^3x = \int \left(p_\mu \dot{A}^\mu + (p_\psi)_\alpha (\dot{\psi})_\alpha + (p_{\bar{\psi}})_\alpha (\dot{\bar{\psi}})_\alpha - \mathcal{L} \right) d^3x, \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} H_C = \int \mathcal{H}_C d^3x = \int \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} p_i p^i - A_0 \left(\partial_i p^i - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) \right. \\ \left. - i \bar{\psi} \gamma^j (\partial_j + ie A_j) \psi + m \bar{\psi} \psi \right] d^3x, \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde devemos chamar a atenção para o ordenamento das velocidades à direita dos momentos na equação (2.71), sendo que os índices α referem-se aos índices spinoriais.

Os parênteses de Berezin fundamentais são dados por

$$\{A_\mu(x), p^\nu(y)\}_B = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (2.72)$$

$$\{\psi(x), p_\psi(y)\}_B = \delta^3(x-y), \quad (2.73)$$

$$\{\bar{\psi}(x), p_{\bar{\psi}}(y)\}_B = \delta^3(x-y). \quad (2.74)$$

Do ponto de vista do formalismo de Dirac teremos o Hamiltoniano primário dado por

$$H_P = \int (\mathcal{H}_C + \phi_1 \lambda_1 + (\phi_2)_\alpha (\lambda_2)_\alpha + (\phi_3)_\alpha (\lambda_3)_\alpha) d^3x, \quad (2.75)$$

onde λ_1 é um parâmetro par enquanto λ_2 e λ_3 são ímpares, sendo λ_2 um vetor coluna e λ_3 um vetor linha.

As condições de consistência serão dadas por

$$\{\phi_1, H_P\}_B = \partial_i p^i - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \approx 0, \quad (2.76)$$

$$\{\phi_2, H_P\}_B = -i (\partial_j - ieA_j) \bar{\psi} \gamma^j - e \bar{\psi} \gamma^0 A_0 - m \bar{\psi} - i\lambda_3 \gamma^0 \approx 0, \quad (2.77)$$

$$\{\phi_3, H_P\}_B = -i (\partial_j + ieA_j) \gamma^j \psi + e \gamma^0 A_0 \psi + m \psi - i\gamma^0 \lambda_2 \approx 0. \quad (2.78)$$

As duas últimas equações acima envolvem os coeficientes λ_2 e λ_3 , determinando-os, e, portanto, não geram novos vínculos. Já a primeira delas irá gerar o vínculo secundário

$$\chi = \partial_i p^i - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \approx 0, \quad (2.79)$$

cuja condição de consistência será identicamente satisfeita com o uso das expressões para λ_2 e λ_3 obtidas das equações (2.77) e (2.78) acima. Calculando os parênteses de Berezin entre os vínculos temos como resultados não nulos

$$\{(\phi_2)_\alpha, (\phi_3)_\beta\}_B = -i \left\{ \left(\bar{\psi} \gamma^0 \right)_\alpha, \left(p_{\bar{\psi}} \right)_\beta \right\}_B = -i \left(\gamma^0 \right)_{\beta\alpha}, \quad (2.80)$$

$$\{(\phi_2)_\alpha, \chi\}_B = -e \left\{ (p_\psi)_\alpha, \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right\}_B = e \left(\bar{\psi} \gamma^0 \right)_\alpha, \quad (2.81)$$

$$\{(\phi_3)_\alpha, \chi\}_B = -e \left\{ \left(p_{\bar{\psi}} \right)_\alpha, \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right\}_B = -e \left(\gamma^0 \psi \right)_\alpha, \quad (2.82)$$

onde escrevemos explicitamente os índices spinoriais. O vínculo ϕ_1 é claramente de primeira classe, enquanto os outros são de segunda classe. Mas da supermatriz Δ formada pelos parênteses de Berezin dos vínculos χ , ϕ_2 , e ϕ_3 podemos ver que há outro

vínculo de primeira classe. Renumerando os vínculos como $\Phi_1 = \chi$, $\Phi_2 = \phi_2$, e $\Phi_3 = \phi_3$, temos a supermatriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\Phi_1, \Phi_1\}_B & \{\Phi_1, (\Phi_2)_\alpha\}_B & \{\Phi_1, (\Phi_3)_\beta\}_B \\ \{(\Phi_2)_\delta, \Phi_1\}_B & \{(\Phi_2)_\delta, (\Phi_2)_\alpha\}_B & \{(\Phi_2)_\delta, (\Phi_3)_\beta\}_B \\ \{(\Phi_3)_\mu, \Phi_1\}_B & \{(\Phi_3)_\mu, (\Phi_2)_\alpha\}_B & \{(\Phi_3)_\mu, (\Phi_3)_\beta\}_B \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -e(\bar{\psi}\gamma^0)_\alpha & e(\gamma^0\psi)_\beta \\ e(\bar{\psi}\gamma^0)_\delta & 0 & -i(\gamma^0)_{\beta\delta} \\ -e(\gamma^0\psi)_\mu & -i(\gamma^0)_{\mu\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

onde os índices spinoriais estão escritos explicitamente. Essa supermatriz tem um autovetor com autovalor nulo dado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ ie(\psi)_\alpha \\ -ie(\bar{\psi})_\beta \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

de forma que um vínculo de primeira classe dado por

$$\varphi = \chi + ie(\Phi_2)_\alpha(\psi)_\alpha - ie(\Phi_3)_\beta(\bar{\psi})_\beta, \quad (2.86)$$

$$\varphi = \partial_i p^i + ie(p_\psi\psi + \bar{\psi}p_{\bar{\psi}}), \quad (2.87)$$

que será usado no lugar do vínculo secundário χ . Deste modo ficamos com os vínculos de primeira classe ϕ_1 e φ , e os de segunda classe ϕ_2 e ϕ_3 . A supermatriz Δ reduz-se agora aos parênteses de Berezin entre os vínculos de segunda classe ϕ_2 e ϕ_3 , resultando em

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{(\Phi_2)_\delta, (\Phi_2)_\alpha\}_B & \{(\Phi_2)_\delta, (\Phi_3)_\beta\}_B \\ \{(\Phi_3)_\mu, (\Phi_2)_\alpha\}_B & \{(\Phi_3)_\mu, (\Phi_3)_\beta\}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)_{\beta\delta} \\ -i(\gamma^0)_{\mu\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

cujas inversas são dadas por

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i(\gamma^0)_{\alpha\lambda} \\ i(\gamma^0)_{\delta\gamma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Com estes resultados podemos escrever os parênteses de Dirac entre duas variáveis F e G quaisquer como

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}_D &= \{F(x), G(y)\}_B \\ &\quad - i \int d^3z \left(\{F(x), (\Phi_2)_\alpha(z)\}_B (\gamma^0)_{\alpha\beta} \{(\Phi_3)_\beta(z), G(y)\}_B \right. \\ &\quad \left. + \{F(x), (\Phi_3)_\alpha(z)\}_B (\gamma^0)_{\beta\alpha} \{(\Phi_2)_\beta(z), G(y)\}_B \right), \end{aligned} \quad (2.90)$$

de forma que os parênteses de Dirac fundamentais não nulos são

$$\{A_\mu(x), p^\nu(y)\}_D = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (2.91)$$

$$\{(\psi)_\lambda(x), (\bar{\psi})_\alpha(y)\}_D = -i (\gamma^0)_{\lambda\alpha} \delta^3(x-y), \quad (2.92)$$

$$\{(\psi)_\lambda(x), (p_\psi)_\alpha(y)\}_D = \delta_{\lambda\alpha} \delta^3(x-y). \quad (2.93)$$

Podemos agora escrever as equações de movimento em termos dos parênteses de Dirac definidos acima com o Hamiltoniano estendido do sistema dado por

$$H_E = \int \mathcal{H}_E d^3x = \int (\mathcal{H}_C + \phi_1 \lambda_1 + \varphi \alpha) d^3x, \quad (2.94)$$

e transformar os vínculos de segunda classe em identidades fortes. Devemos lembrar que ao fazermos $\phi_2 = \phi_3 \equiv 0$ o vínculo φ torna-se idêntico ao vínculo secundário original χ . Além disso os momentos p_ψ e $p_{\bar{\psi}}$ desaparecem da teoria, sendo que os parênteses de Berezin (2.93) serão uma mera consequência da identidade forte $p_\psi = i \bar{\psi} \gamma^0$.

Deste modo as equações de movimento são

$$\dot{A}^i \approx \{A^i, H_E\}_D = -p^i + \partial^i A_0 - \partial^i \alpha, \quad (2.95)$$

$$\dot{A}^0 \approx \{A^0, H_E\}_D = \lambda_1, \quad (2.96)$$

$$\dot{p}^i \approx \{p^i, H_E\}_D = \partial_j F^{ji} - e \bar{\psi} \gamma^i \psi, \quad (2.97)$$

$$\dot{\psi} \approx \{\psi, H_E\}_D = -ie A_0 \psi - \gamma^0 \gamma^j (\partial_j + ie A_j) \psi - im \gamma^0 \psi, \quad (2.98)$$

$$\dot{\bar{\psi}} \approx \left\{ \bar{\psi}, H_E \right\}_D = ieA_0 \bar{\psi} - (\partial_j - ieA_j) \bar{\psi} \gamma^j \gamma^0 + im \bar{\psi} \gamma^0. \quad (2.99)$$

Multiplicando a equação (2.98) pela esquerda por $i\gamma^0$ obteremos a forma conhecida da equação de Dirac com interação

$$i\gamma^0 \dot{\psi} = eA_0 \gamma^0 \psi - i\gamma^j (\partial_j + ieA_j) \psi + m\psi, \quad (2.100)$$

$$i(\partial_\mu + ieA_\mu) \gamma^\mu \psi - m\psi = 0. \quad (2.101)$$

Analogamente, a equação conjugada pode ser obtida multiplicando-se a equação (2.99) pela direita por $i\gamma^0$ tal que

$$i \dot{\bar{\psi}} \gamma^0 = -e \bar{\psi} \gamma^0 A_0 - i(\partial_j + ieA_j) \bar{\psi} \gamma^j - m \bar{\psi}, \quad (2.102)$$

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - ieA_\mu \right) + m \bar{\psi} = 0. \quad (2.103)$$

Estas são as equações de movimento clássicas com toda a liberdade de gauge. Podemos ver a partir da equação (2.96) que, analogamente ao caso do campo Eletromagnético livre, a componente A^0 é totalmente arbitrária. Além disso, a equação (2.95) deixa explícita a dependência de gauge das componentes A^i por meio da presença do parâmetro arbitrário α .

Passemos agora ao ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi. Da definição dos momentos temos os “Hamiltonianos”

$$H'_0 = \int (P_0 + \mathcal{H}_C) d^3x, \quad (2.104)$$

$$H'_1 = \int \mathcal{H}'_1 d^3x = \int p_0 d^3x, \quad (2.105)$$

$$H'_2 = \int \mathcal{H}'_2 d^3x = \int (p_\psi - i \bar{\psi} \gamma^0) d^3x, \quad (2.106)$$

$$H'_3 = \int \mathcal{H}'_3 d^3x = \int p_{\bar{\psi}} d^3x, \quad (2.107)$$

que estão associados, respectivamente, a $t = t^0$, A_0 , ψ e $\bar{\psi}$; os quais serão parâmetros livres. Os dois primeiros H' são pares e os dois últimos ímpares. Usando a equação (1.26) e as expressões (2.104)-(2.107) obtemos

$$dA^i = \frac{\delta H'_0}{\delta p_i} dt = \left(-p^i + \partial^i A_0 \right) dt, \quad (2.108)$$

enquanto a equação (1.30) fornece

$$dp^i = -\frac{\delta H'_0}{\delta A_i} dt = \left(\partial_j F^{ji} - e \bar{\psi} \gamma^i \psi \right) dt, \quad (2.109)$$

$$dp^0 = -\frac{\delta H'_0}{\delta A_0} dt = \left(\partial_j p^j - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) dt, \quad (2.110)$$

$$dp_\psi = -\frac{\delta_r H'_0}{\delta \psi} dt = \left(-i \partial_j \bar{\psi} \gamma^j - e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu - m \bar{\psi} \right) dt, \quad (2.111)$$

$$dp_{\bar{\psi}} = -\frac{\delta_r H'_0}{\delta \bar{\psi}} dt + -\frac{\delta_r H'_2}{\delta \bar{\psi}} d\psi = \left(-i \gamma^j \partial_j \psi + e A_\mu \gamma^\mu \psi + m \psi \right) dt - i \gamma^0 d\psi. \quad (2.112)$$

Como vimos no capítulo anterior, as condições de integrabilidade irão exigir que $dH' = 0$, o que para H'_1 implicará em

$$dH'_1 = d \int p_0 d^3x = 0 \Rightarrow dp_0 = \partial_j p^j - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi = 0, \quad (2.113)$$

onde usamos a equação (2.110). Esta expressão é equivalente ao vínculo secundário (2.79) e deve satisfazer à condição

$$dH'_4 = 0; \quad H'_4 = \int \mathcal{H}'_4 d^3x = \int \left(\partial_j p^j - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) d^3x, \quad (2.114)$$

que é identicamente satisfeita com o uso dos demais resultados já obtidos.

Para H'_2 temos a condição

$$dH'_2 = d \int \left(p_\psi - i \bar{\psi} \gamma^0 \right) d^3x = 0 \Rightarrow dp_\psi = i \left(d \bar{\psi} \right) \gamma^0, \quad (2.115)$$

que não pode ser escrita como uma expressão do tipo $H' = 0$ devido à presença de dois diferenciais (dp_ψ e $d \bar{\psi}$). Temos então condições impostas aos diferenciais dos

parâmetros arbitrários. Como mencionamos na seção 1.4 isto está relacionado ao fato de H'_2 corresponder a um vínculo de segunda classe. Se usarmos a equação (2.111) obtemos uma relação entre diferenciais $d\bar{\psi}$ e dt

$$i(d\bar{\psi})\gamma^0 = (-i\partial_j\bar{\psi}\gamma^j - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu - m\bar{\psi})dt. \quad (2.116)$$

Continuando o desenvolvimento da expressão acima, obtemos a expressão usual da equação de Dirac do campo $\bar{\psi}$

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu - ieA_\mu) + m\bar{\psi} = 0. \quad (2.117)$$

Para H'_3 temos

$$dH'_3 = d\int p_{\bar{\psi}}d^3x = 0 \Rightarrow dp_{\bar{\psi}} = 0, \quad (2.118)$$

que, de forma similar ao caso acima, fornecerá, junto com a equação (2.112) a seguinte relação entre os diferenciais $d\psi$ e dt

$$(-i\gamma^j\partial_j\psi + eA_\mu\gamma^\mu\psi + m\psi)dt - i\gamma^0d\psi = 0, \quad (2.119)$$

que nos levará à equação de Dirac para o campo ψ

$$i(\partial_\mu + ieA_\mu)\gamma^\mu\psi - m\psi = 0. \quad (2.120)$$

Por fim, com os resultados acima, a condição $dH'_0 = 0$ é identicamente satisfeita.

Para tratar consistentemente os vínculos de segunda classe devemos usar os parênteses de Dirac, que definimos há pouco. Deste modo teremos apenas os “Hamiltonianos” H'_0 , H'_1 e H'_4 , equações (2.104) e (2.105), a serem considerados como equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi. Os outros “Hamiltonianos”, H'_2 e H'_3 , desaparecem ao introduzirmos os parênteses de Dirac assim como os momentos p_ψ e $p_{\bar{\psi}}$ que são substituídos pelas expressões fornecidas por $\mathcal{H}'_2$ e $\mathcal{H}'_3$. Os campos ψ e $\bar{\psi}$ deixam de ser parâmetros arbitrários para se tornarem variáveis dinâmicas canonicamente conjugadas em virtude da expressão dos parênteses de Dirac (2.92).

Deste modo, as equações características para o sistema dado por H'_0 , H'_1 e H'_4 serão

$$dA^i = \{A^i, H'_0\}_D dt + \{A^i, H'_1\}_D dA^0 + \{A^i, H'_4\}_D d\omega, \quad (2.121)$$

$$dp^i = \{p^i, H'_0\}_D dt + \{p^i, H'_1\}_D dA^0 + \{p^i, H'_4\}_D d\omega, \quad (2.122)$$

$$d\psi = \{\psi, H'_0\}_D dt + \{\psi, H'_1\}_D dA^0 + \{\psi, H'_4\}_D d\omega, \quad (2.123)$$

$$d\bar{\psi} = \{\bar{\psi}, H'_0\}_D dt + \{\bar{\psi}, H'_1\}_D dA^0 + \{\bar{\psi}, H'_4\}_D d\omega, \quad (2.124)$$

onde, de acordo com o procedimento do Capítulo 1, os parênteses de Dirac estão definidos no espaço de fase que inclui $t^0 = t$ e P_0 como variáveis canônicas. Como no caso do campo Eletromagnético livre, o parâmetro ω não é identificado com nenhuma coordenada porque $\mathcal{H}'_4$ não tem a forma adequada. O cálculo dos parênteses de Dirac nas equações acima leva às expressões (2.95)-(2.99), obtidas no formalismo de Dirac, ao fazermos a identificação de $\dot{\omega}$ com α e lembrarmos que A^0 é um parâmetro arbitrário também no formalismo Hamiltoniano devido à equação (2.96).

2.2.1 Quantização (Eletrodinâmica Quântica)

Discutiremos agora alguns aspectos relativos à quantização “a gauge livre” deste exemplo. Novamente, por simplicidade, iremos omitir os sinais $\hat{}$ que indicam operadores quânticos.

Como a estrutura do vínculo envolvendo p_0 não mudou, teremos que usar as mesmas expansões em coeficientes de Fourier para A^μ e p_μ , que no caso do campo Eletromagnético livre são dadas pelas expressões (2.34), (2.40) e (2.41), com as mesmas definições dos vetores de polarização $\varepsilon_r^\mu(k)$. Como os parênteses de Dirac dados na equação (2.91) coincidem com os parênteses de Berezin usuais da equação (2.18), as relações de comutação quânticas deles derivadas para os operadores $a_r(k)$, $a_r^\dagger(k)$, $a_0(k)$, $a_0^\dagger(k)$, $b_0(k)$ e $b_0^\dagger(k)$ são as mesmas e dadas pelas equações (2.43) e (2.44).

Em relação aos campos de Dirac ψ e $\bar{\psi}$ fazemos a decomposição de Fourier

$$\psi(x) = \int d^3p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_p}} \left[c_\alpha(p) u^{(\alpha)}(p) e^{-ipx} + d_\alpha^\dagger(p) v^{(\alpha)}(p) e^{ipx} \right], \quad (2.125)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_p}} \left[d_\alpha(p) \bar{v}^{(\alpha)}(p) e^{-ipx} + c_\alpha^\dagger(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) e^{ipx} \right], \quad (2.126)$$

onde $u^{(\alpha)}(p)$ e $v^{(\alpha)}(p)$ são, respectivamente, os spinores para energias positivas e negativas que seguem a normalização

$$u^{\dagger(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) = v^{\dagger(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) = \frac{E_p}{m} \delta_{\alpha\beta}, \quad E_p = \left(m^2 + (\vec{p})^2 \right)^{1/2}, \quad (2.127)$$

usual em muitos textos [49, 50], bem como $\bar{u}^{(\alpha)} = u^{\dagger(\alpha)} \gamma^0$, $\bar{v}^{(\alpha)} = v^{\dagger(\alpha)} \gamma^0$.

Como ψ e $\bar{\psi}$ são ambos ímpares, os parênteses de Dirac dados pela equação (2.92) tornam-se **anticomutadores** de tal forma que

$$\{\psi_\alpha, \bar{\psi}_\beta\} = \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta + \bar{\psi}_\beta \psi_\alpha = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta^3(x - y). \quad (2.128)$$

A substituição das expansões (2.125) e (2.126) nesta relação leva às relações de anticomutação para os operadores $c_\alpha(p)$, $d_\alpha(p)$, $c_\alpha^\dagger(p)$ e $d_\alpha^\dagger(p)$

$$\{c_\alpha(p), c_\beta^\dagger(p')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(p - p'); \quad \{d_\alpha(p), d_\beta^\dagger(p')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(p - p'). \quad (2.129)$$

Tais relações nos permitem construir um espaço de Fock para férmions em que $c_\alpha^\dagger(p)$ é o operador de criação de partículas e $d_\alpha^\dagger(p)$ é o operador de criação de antipartículas.

Vejamos agora quais as restrições impostas pelos vínculos de primeira classe aos estados físicos. Como a estrutura do vínculo $p^0 = 0$ é exatamente a mesma apresentada no caso do campo Eletromagnético livre, as condições que este impõe sobre os estados físicos não se alteram em relação aos resultados obtidos na seção anterior. Contudo o segundo vínculo de primeira classe é alterado para $\partial_i p^i - e \bar{\psi} \gamma^0 \psi = 0$ e, portanto, devemos ter novas condições sobre os estados físicos. O termo $\partial_i p^{(+i)}$ tem a mesma

forma da equação (2.50), mas o termo $\rho = e \bar{\psi} \gamma^0 \psi$ é simplesmente a densidade de carga elétrica, cuja integral espacial nos dá a carga total Q

$$Q = \int d^3x \rho = e \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = e \int d^3p \left[c_{\alpha}^{\dagger}(p) c_{\alpha}(p) - d_{\alpha}^{\dagger}(p) d_{\alpha}(p) \right]. \quad (2.130)$$

A expressão para $\rho(x)$ é

$$\begin{aligned} \rho(x) = & e \frac{m}{(2\pi)^3} \int d^3p' d^3p \frac{1}{\sqrt{E_{p'}} \sqrt{E_p}} \times \\ & \left[d_{\alpha}(p) c_{\beta}(p') v^{\dagger(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p') e^{-i(p+p')x} \right. \\ & + c_{\alpha}^{\dagger}(p) c_{\beta}(p') u^{\dagger(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p') e^{i(p-p')x} \\ & + d_{\alpha}(p) d_{\beta}^{\dagger}(p') v^{\dagger(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p') e^{-i(p-p')x} \\ & \left. + c_{\alpha}^{\dagger}(p) d_{\beta}^{\dagger}(p') u^{\dagger(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p') e^{i(p+p')x} \right], \end{aligned} \quad (2.131)$$

não permitindo estabelecer uma relação simples entre os operadores fermiônicos e os operadores $a_0(k)$ e $a_3(k)$ do campo Eletromagnético. Contudo, fica evidente que para os estados físicos haverá uma relação entre as contribuições relativas dos setores espúrio e longitudinal do campo Eletromagnético e as contribuições provenientes do operador densidade de carga. Para ilustrar esta relação de forma mais clara podemos considerar o vetor de corrente j^{μ} com uma expressão em séries de Fourier tal que tenhamos para a componente j^0

$$j^0(x) = \int \frac{d^3k \cdot (\omega_k)^{3/2}}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \left[j^0(k) e^{-ikx} + j^{\dagger 0}(k) e^{ikx} \right]. \quad (2.132)$$

Neste caso, teremos que a condição imposta pelo vínculo secundário sobre os estados físicos será

$$\partial_i p^{(+i)} |\psi\rangle - j^{(+0)} |\psi\rangle = \int \frac{d^3k \cdot (\omega_k)^{3/2}}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \left[a_0(k) - a_3(k) - j^0(k) \right] e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.133)$$

$$\left[a_0(k) - a_3(k) - j^0(k) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (2.134)$$

Este resultado é condizente com a interpretação usual, feita a partir da análise do propagador de Feynman para o fóton livre (ver referência [49], página 90), de que os fótons longitudinais e escalares são os mediadores da interação de Coulomb.

Se agora substituirmos no Lagrangeano (2.65) o termo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, relativo ao campo Eletromagnético livre, pelo termo correspondente ao uso do Lagrangeano de Fermi, teremos o novo Lagrangeano

$$L = \int \mathcal{L} d^3x = \int \left(-\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi \right) d^3x, \quad (2.135)$$

o qual resultará novamente na equação (2.54) como expressão para os momentos p^μ e, como no caso livre, desaparecem os estados espúrios relacionados ao setor A^0 , p_0 . A condição de consistência a ser satisfeita para a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ é justamente a Lei de Gauss **com fontes** $\partial_i E^i = e \bar{\psi} \gamma^0 \psi$. A substituição das definições operatoriais do potencial vetor em $\partial_\mu A^\mu$ e $\partial_i E^i$ envolve somente os operadores relacionados aos fótons transversais e longitudinais e resultam nas expressões (2.57) e (2.60), respectivamente. Estas condições, combinadas com coeficientes apropriados, levam exatamente à relação entre estes fótons e a densidade de carga elétrica para os estados físicos que acabamos de descrever acima.

Por fim, consideremos o caso em que a componente A^0 não é uma variável independente, mas sim obtida através da interação coulombiana instantânea tal que

$$A^0(x) = \int d^3y \frac{\rho(y)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (2.136)$$

onde $\rho = e \bar{\psi} \gamma^0 \psi$. Este resultado corresponde a uma fixação parcial de gauge com um vínculo da forma $\varphi' = \partial_i p^i - \partial_i \partial^i A^0 \approx 0$ tal que o vínculo $p^0 \approx 0$ agora é de segunda classe. Esta condição, junto com o vínculo secundário $\partial_i p^i - \rho = 0$, fornece a equação $\partial_i \partial^i A^0 = \rho$ que leva à equação (2.136). Com isto não temos mais os operadores

associados à componente A^0 do campo, de forma que a expressão para p^i passa a ser

$$\begin{aligned} p^i &= -\left(\partial^0 A^i - \partial^i A^0\right) = -i \int \frac{d^3 k \cdot \omega_k}{\sqrt{2\omega_k} (2\pi)^3} \varepsilon_r^i(k) \left[-a_r(k) e^{-ikx} + a_r^\dagger(k) e^{ikx}\right] \\ &\quad + \partial^i \int d^3 y \frac{\rho(x)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}. \end{aligned} \quad (2.137)$$

A divergência deste operador é

$$\begin{aligned} \partial_i p^i &= - \int \frac{d^3 k \cdot (\omega_k)^{3/2}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} \left[a_3(k) e^{-ikx} + a_3^\dagger(k) e^{ikx} \right] \\ &\quad + \partial_i \partial^i \int d^3 y \frac{\rho(x)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \end{aligned} \quad (2.138)$$

de forma que o termo ρ na condição $\partial_i p^i - \rho = 0$ é anulado pelo último termo da expressão acima. Deste modo, a condição $\partial_i p^i - \rho = 0$ sobre os estados físicos resulta em

$$\left(\partial_i p^{(+i)} - \rho^{(+)}\right) |\psi\rangle = - \int \frac{d^3 k \cdot (\omega_k)^{3/2}}{\sqrt{2} (2\pi)^3} a_3(k) e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.139)$$

$$a_3(k) |\psi\rangle = 0, \quad (2.140)$$

de forma que para tais estados não pode haver fótons transversais presentes, resultado que coincide com o resultado conhecido da quantização no gauge de Coulomb.

Os resultados que acabamos de obter com as fixações parciais de gauge são equivalentes àqueles obtidos nos casos correspondentes do campo Eletromagnético livre e ilustram, mais uma vez, as características que havíamos mencionado a respeito da quantização “a gauge livre” de sistemas singulares.

Comentários finais

Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares, fazendo sua generalização para sistemas com variáveis pertencentes à álgebra de Berezin. No desenvolvimento demonstramos em detalhes a equivalência entre as condições de integrabilidade no formalismo de Hamilton-Jacobi e as condições de consistência no formalismo de Dirac. Demonstramos que o formalismo de Hamilton-Jacobi permite-nos, através da análise das condições de integrabilidade de suas equações características, obter eventuais vínculos secundários que surjam na teoria. Portanto, não é necessário partir de um conjunto completo de vínculos obtidos via formalismo de Dirac, como usualmente é feito na literatura.

Em particular, vimos que no formalismo de Hamilton-Jacobi as equações diferenciais totais para as características devem incluir todos os vínculos de primeira classe, primários e secundários, resultando automaticamente na conjectura de Dirac de que a dinâmica deve ser gerada com todos os vínculos de primeira classe presentes no Hamiltoniano. Além disso, vimos que o problema gerado pela presença de vínculos de segunda classe pode ser resolvido de forma natural pela introdução dos parênteses de Dirac.

Do ponto de vista quântico, vimos que a interpretação do processo de quantização via Hamilton-Jacobi como uma quantização a “gauge livre” requer um certo cuidado, apesar de esta ter sido uma das motivações de Dirac em seus trabalhos iniciais sobre sistemas singulares [5, 6]. Em primeiro lugar porque não temos mais a situação do caso clássico em que a forma das equações de movimento, incluindo todos os vínculos de

primeira classe, faz com que a evolução temporal do sistema permita chegar, a partir de uma mesma configuração inicial, a todos os estados fisicamente equivalentes. Estes estados são aqueles conectados por meio de transformações canônicas geradas pelos vínculos de primeira classe. Mas no caso quântico, apesar de haver diversos estados correspondentes a um mesmo estado físico, os vínculos de primeira classe já não geram mais transformações que ligam dois estados quânticos equivalentes. Isso ocorre porque agora estes vínculos anulam os estados físicos de forma que a “transformação de gauge” (2.9) é uma mera identidade ao atuar sobre estes estados.

Em segundo lugar, vimos, através dos exemplos, que em determinadas circunstâncias a exigência de que os estados físicos sejam anulados pelos vínculos de primeira classe pode levar a uma fixação implícita do gauge. Além disso, os exemplos mostram que a quantização a “gauge livre” pode levar a complicações na construção da teoria quântica, como a existência de estados espúrios do sistema. Devemos ainda mencionar que todo o estudo aqui realizado pode ser estendido para teorias com derivadas de ordem superior [51, 52].

Quanto a desenvolvimentos futuros, diversas alternativas se apresentam. Uma delas é o estudo da relação entre o formalismo de Hamilton-Jacobi e a interpretação de David Bohm para a Mecânica Quântica [53, 54], suas implicações na Cosmologia Quântica e seus desdobramentos no caso de sistemas singulares.

Além disso, é importante analisar o tratamento dos vínculos de segunda classe por meio da expansão do espaço de fase através da introdução de novas variáveis. Este método introduz simetrias de gauge nos sistemas físicos, transformando vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe, dando origem a alternativas de quantização de sistemas singulares como o método BFFT [55, 56, 57, 58]. A teoria original seria então recuperada através de um processo de fixação de gauge; contudo, torna-se necessário verificar a equivalência entre diferentes procedimentos de fixação de gauge da teoria expandida, assim como o resultado obtido através da quantização a “gauge

livre” da mesma.

Por fim, pretendemos estudar a relação com a simetria BRST e supersimetria.

Apêndice A: Noções Básicas da álgebra de Berezin

Faremos aqui uma breve apresentação da álgebra de Berezin, suas definições e propriedades básicas. A abordagem aqui apresentada baseia-se naquela encontrada no apêndice D da referência [13], de onde retiramos as definições aqui apresentadas, e um tratamento mais completo pode ser encontrado nas referências [35] e [36].

Nosso ponto de partida é a álgebra de Grassman $\mathcal{G}$ sobre o campo dos complexos, que é aquela cujos elementos geradores ξ^α ($\alpha = 1, \dots, m$) satisfazem às relações

$$\xi^\alpha \xi^\beta + \xi^\beta \xi^\alpha = 0. \quad (\text{A.1})$$

Um elemento geral g nessa álgebra é dado por

$$g = f_0 + f_\alpha \xi^\alpha + f_{\alpha_1 \alpha_2} \xi^{\alpha_1} \xi^{\alpha_2} + \dots + f_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \xi^{\alpha_1} \xi^{\alpha_2} \dots \xi^{\alpha_m}, \quad (\text{A.2})$$

onde os coeficientes f são complexos e devem ser antissimétricos nos seus índices, de forma a não gerar ambigüidades na representação de g . Devemos assumir também uma operação de involução ($g \rightarrow g^+$; $g, g^+ \in \mathcal{G}$) definida na álgebra de Grassman tal que

$$(g^+)^+ = g; (g_1 g_2)^+ = g_2^+ g_1^+; (c_1 g_1 + c_2 g_2)^+ = c_1^* g_1^+ + c_2^* g_2^+, \quad (\text{A.3})$$

onde c_1 e c_2 são números complexos, e que os elementos geradores ξ^α sejam involutivos, i.e. $(\xi^\alpha)^+ = \xi^\beta$.

Consideremos também uma álgebra $\mathcal{F}$ de funções contínuas e infinitamente deriváveis definida sobre o conjunto dos complexos, com um conjunto de elementos geradores $\theta^i(c)$ ($i = 1, \dots, k$) onde $\theta^i(c) = c^i$, que também tenha a propriedade de involução acima e satisfaça à condição

$$\left(\theta^i(c)\right)^+ = c^{i*} = c^j = \theta^j(c). \quad (\text{A.4})$$

Podemos então generalizar a expressão (A.2) admitindo que os coeficientes f pertençam à álgebra $\mathcal{F}$ de tal forma que o conjunto gerado por elementos da forma

$$b = f_0(\theta) + f_\alpha(\theta)\xi^\alpha + f_{\alpha_1\alpha_2}(\theta)\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2} + \dots + f_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(\theta)\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\dots\xi^{\alpha_m}, \quad (\text{A.5})$$

é uma álgebra sobre os números complexos com elementos geradores (θ, ξ) e que chamamos de *álgebra de Berezin* (ou $\mathcal{B}$ -álgebra) $\mathcal{B}$.

Designaremos os elementos geradores da $\mathcal{B}$ -álgebra como $z^a = (\theta^i, \xi^\alpha)$, onde

$$z^a = \theta^i, \quad a = i = 1, \dots, k; \quad z^a = \xi^\alpha, \quad a = k + \alpha, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (\text{A.6})$$

Por construção há um operador de involução na $\mathcal{B}$ -álgebra tal que $b \rightarrow b^+$; $b, b^+ \in \mathcal{B}$ e

$$(b^+)^+ = b; \quad (b_1 b_2)^+ = b_2^+ b_1^+; \quad (c_1 b_1 + c_2 b_2)^+ = c_1^* b_1^+ + c_2^* b_2^+, \quad (\text{A.7})$$

onde, como antes, c_1 e c_2 são números complexos.

O subespaço de $\mathcal{B}$ composto pelos elementos cuja representação (A.5) contém apenas potências ímpares dos ξ 's é chamado $\mathcal{B}'$ e os elementos a ele pertencentes são chamados de *elementos ímpares*. Já os elementos pertencentes ao subespaço $\mathcal{B}''$, composto pelas representações (A.5) que possuem apenas potências pares dos ξ 's, são chamados de *elementos pares*.

Os elementos pertencentes a $\mathcal{B}''$ são permutáveis com todos os outros elementos de $\mathcal{B}$, enquanto os elementos pertencentes a $\mathcal{B}'$ anticomutam entre si e, em particular, temos $b^2 = 0$ para todo $b \in \mathcal{B}'$. Obviamente temos $\theta \in \mathcal{B}''$ e $\xi \in \mathcal{B}'$, de forma que os θ 's são os

geradores pares e os ξ 's os ímpares. Para elementos pertencentes a $\mathcal{B}'$ ou $\mathcal{B}''$ podemos falar de uma *paridade de Grassman* definida., mas em geral um elemento de $\mathcal{B}$ será composto pela soma de elementos de paridades diferentes, i.e.

$$b = b' + b'', \quad b' \in \mathcal{B}', \quad b'' \in \mathcal{B}''. \quad (\text{A.8})$$

Definimos então a paridade $P_{(b)}$ de um elemento b pertencente a $\mathcal{B}'$ ou $\mathcal{B}''$ como

$$P_{(b)} = 1, \quad b \in \mathcal{B}'; \quad P_{(b)} = 0, \quad b \in \mathcal{B}''. \quad (\text{A.9})$$

Obviamente temos que $P_{(\theta)} = 0$ e $P_{(\xi)} = 1$ e a paridade de um elemento $b_3 = b_1 b_2$ é dada por

$$P_{(b_3)} = \left(P_{(b_1)} + P_{(b_2)} \right) \pmod{2}. \quad (\text{A.10})$$

Podemos também definir uma paridade $P_{(a)}$ do índice a tal que coincida com a do gerador z^a , i.e. $P_{(a)} = P_{(z^a)}$. Deste modo temos as seguintes relações de comutação para elementos da $\mathcal{B}$ -álgebra

$$b_1 b_2 = (-1)^{P_{(b_1)} P_{(b_2)}} b_2 b_1, \quad (\text{A.11})$$

e, em especial, para os elementos geradores da álgebra

$$z^a z^b = (-1)^{P_{(a)} P_{(b)}} z^b z^a. \quad (\text{A.12})$$

Como os elementos da $\mathcal{B}$ -álgebra em geral não comutam, temos dois tipos de derivadas: uma à direita, definida como

$$\frac{\partial_r}{\partial z^a} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} P_{(a)} P_{(a_j)}} \delta_a^{a_i} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_{i-1}} z^{a_{i+1}} \dots z^{a_k}, \quad (\text{A.13})$$

e outra à esquerda definida como

$$\frac{\partial_l}{\partial z^a} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_k} = \sum_{i=1}^k (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} P_{(a)} P_{(a_j)}} \delta_a^{a_i} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_{i-1}} z^{a_{i+1}} \dots z^{a_k}. \quad (\text{A.14})$$

Estas definições são tais que temos

$$db = \frac{\partial_r b}{\partial z^a} dz^a = dz^a \frac{\partial_l b}{\partial z^a}, \quad (\text{A.15})$$

onde os dz^a têm a mesma paridade dos elemetos geradores z^a correspondentes. É importante notar que não existe uma definição padrão de derivadas à direita e à esquerda na literatura. As definições aqui usadas concordam, por exemplo, com as usadas na referência [14] mas estão invertidas em relação àquelas usadas na referência [12].

No caso específico de $b_1 b_2$, por exemplo, temos

$$\frac{\partial_r}{\partial z^a} (b_1 b_2) = (-1)^{P(b_2)P(a)} \frac{\partial_r b_1}{\partial z^a} b_2 + b_1 \frac{\partial_r b_2}{\partial z^a}, \quad (\text{A.16})$$

onde b_2 deve ter paridade definida, e

$$\frac{\partial_l}{\partial z^a} (b_1 b_2) = \frac{\partial_l b_1}{\partial z^a} b_2 + (-1)^{P(b_1)P(a)} b_1 \frac{\partial_l b_2}{\partial z^a}, \quad (\text{A.17})$$

onde b_1 deve ter paridade definida.

Algumas propriedades das derivadas, a partir de suas definições, são

$$\frac{\partial_r}{\partial z^a} \frac{\partial_r}{\partial z^c} b = (-1)^{P(a)P(c)} \frac{\partial_r}{\partial z^c} \frac{\partial_r}{\partial z^a} b; \quad \frac{\partial_l}{\partial z^a} \frac{\partial_l}{\partial z^c} b = (-1)^{P(a)P(c)} \frac{\partial_l}{\partial z^c} \frac{\partial_l}{\partial z^a} b, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial_l}{\partial z^a} \frac{\partial_r}{\partial z^c} b = \frac{\partial_r}{\partial z^c} \frac{\partial_l}{\partial z^a} b, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial_l}{\partial z^a} b = (-1)^{P(a)+P(a)P(b)} \frac{\partial_r}{\partial z^a} b, \quad (\text{A.20})$$

onde na última equação b deve ter paridade definida.

Sendo $b(y^a(z^b))$ uma função composta dos z 's, temos que a regra da cadeia será

$$\frac{\partial_l b}{\partial z^b} = \frac{\partial_l y^a}{\partial z^b} \frac{\partial_l b}{\partial y^a}; \quad \frac{\partial_r b}{\partial z^b} = \frac{\partial_r b}{\partial y^a} \frac{\partial_r y^a}{\partial z^b}, \quad (\text{A.21})$$

enquanto que considerando-se um parâmetro numérico λ tal que $y^a(\lambda, z^b)$, teremos

$$\frac{\partial b}{\partial \lambda} = \frac{\partial y^a}{\partial \lambda} \frac{\partial_l b}{\partial y^a} = \frac{\partial_r b}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial \lambda}. \quad (\text{A.22})$$

A integral dos elementos da $\mathcal{B}$ -álgebra com relação a um conjunto $z^{a_1}, \dots, z^{a_k}$ de elementos geradores, i.e.

$$I = \int b(z) dz^{a_1} \dots dz^{a_k}, \quad (\text{A.23})$$

é, por definição, uma função linear de $b(z)$ e portanto podemos definir separadamente as integrais em relação aos geradores pares e ímpares. Deste modo a integral de $b(z)$ em relação a um conjunto de elementos pares $\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_k}$ é definida como

$$I = \int b(z) d\theta^{i_1} \dots d\theta^{i_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} b(z)|_{\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_k} \rightarrow c^{i_1}, \dots, c^{i_k}} dc^{i_1} \dots dc^{i_k}, \quad (\text{A.24})$$

e portanto é uma integral nas variáveis usuais c^i . Já para a integral em relação a um conjunto de variáveis ímpares temos a definição

$$\int d\xi^\alpha = 0, \quad \int \xi^\alpha d\xi^\alpha = 1, \quad (\text{A.25})$$

(sem somatória no índice repetido) e portanto essa integral coincide com a derivada em relação ao elemento correspondente, i.e.

$$\int b(z) d\xi^{\alpha_1} \dots d\xi^{\alpha_k} = \frac{\partial_r}{\partial \xi^{\alpha_k}} \dots \frac{\partial_r}{\partial \xi^{\alpha_1}} b(z). \quad (\text{A.26})$$

Com essas definições a integral de uma derivada total é zero, i.e.

$$\int \frac{\partial_l b}{\partial z^a} dz^a = \int \frac{\partial_r b}{\partial z^a} dz^a = 0, \quad (\text{A.27})$$

e a integração por partes torna-se

$$\int \frac{\partial_l b_1}{\partial z^a} b_2 dz^a = -(-1)^{P_{b_1} P_{(a)}} \int b_1 \frac{\partial_l b_2}{\partial z^a} dz^a, \quad (\text{A.28})$$

onde nas equações acima não há somatória no índice repetido e b_1 tem paridade definida.

Por fim mencionamos a definição de super-matrizes M , que são aquelas cujos elementos M_{ab} pertencem à $\mathcal{B}$ -álgebra, tendo uma paridade definida, e que possuem uma paridade associada a seus índices $(P_{(a)}, P_{(b)})$ tal que seja válida a relação

$$P_{(M_{ab})} = P_{(a)} + P_{(b)}. \quad (\text{A.29})$$

A ordem de sucessão dos índices pares e ímpares é arbitrária desde que $P_{(a)} = P_{(b)}$ para $a = b$.

Supermatrizes possuem diversas propriedades semelhantes às das matrizes usuais, enquanto outras podem ser bem diferentes. Por exemplo, existem 5 operações de transposição, sendo que nem todas obedecem à regra usual da transposição do produto, i.e. $(MN)^T = N^T M^T$. De forma análoga, a propriedade de simetria ou antissimetria de uma supermatriz é específica da operação de transposição a qual se refere. Não abordaremos estes tópicos aqui pois não são necessários ao desenvolvimento aqui realizado, apenas sugerimos as referências já mencionadas para maiores detalhes. O único resultado que mencionamos é que se uma supermatriz possui uma supermatriz inversa, as inversas à esquerda e à direita são idênticas.

Apêndice B: Formalismo de Dirac

Apresentaremos aqui as idéias básicas do formalismo Hamiltoniano generalizado de Dirac. Iremos nos ater apenas às idéias centrais e resultados fundamentais, sendo que maiores detalhes são encontrados nas referências [7, 12, 59].

Consideremos então um Lagrangeano que seja uma função par das N coordenadas q^i e suas velocidades. Para passar ao formalismo Hamiltoniano, por meio da introdução dos momentos $p_i = \partial_r L / \partial \dot{q}^i$, é necessário que a *super-matriz Hessiana*

$$H_{ij} \equiv \frac{\partial_r p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial_r^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad (\text{B.1})$$

seja não singular para que possamos expressar todas as velocidades como funções das variáveis canônicas, i.e. as coordenadas e os momentos. Se esta condição não for satisfeita e a supermatriz tiver posto $P = N - R$, poderemos resolver apenas P velocidades $\dot{q}_a$ em função das coordenadas q 's e dos momentos p 's e das R velocidades $\dot{q}_\alpha$ restantes, ou seja

$$\dot{q}_a = f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \quad (\text{B.2})$$

onde $\alpha = 1, \dots, R$ e $a = R + 1, \dots, N$. Substituindo esta expressão na definição dos momentos canonicamente conjugados temos que:

$$p_i = \tilde{g}_i(q, \dot{q}_a, \dot{q}_\alpha) = \tilde{g}_i(q, f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha) = g_i(q, p_b, \dot{q}_\alpha). \quad (\text{B.3})$$

Entretanto temos que $p_b \equiv g_b$ para $b = R + 1, \dots, N$ e conseqüentemente as R expressões restantes para os momentos p_α ($\alpha = 1, \dots, R$) não podem conter nenhuma

das R velocidades $\dot{q}_\alpha$ não resolvidas, do contrário seríamos capazes de resolver algumas delas em função dos momentos p_α , o que iria contradizer o fato da supermatriz Hessiana ter posto P . Deste modo, temos R vínculos Φ_α dados por

$$p_\alpha = g_\alpha(q, p_b) \Rightarrow \Phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha(q, p_b) = 0, \quad (\text{B.4})$$

e chamados de **vínculos primários**.

Levando em conta estes resultados o Hamiltoniano canônico será dado por

$$H_c = g_\alpha(q, p_b) \dot{q}^\alpha + p_a f^a(q, p_b, \dot{q}_\alpha) - L(q, \dot{q}_a = f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha). \quad (\text{B.5})$$

Derivando parcialmente pela esquerda em relação aos $q's$, aos p_a e às velocidades não resolvidas $\dot{q}_\alpha$ e usando a definição dos momentos, teremos

$$\frac{\partial_l H_c}{\partial q_i} = \frac{\partial_l g_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}^\alpha + (-1)^{P_{(i)} P_{(a)}} p_a \frac{\partial_l f^a}{\partial q_i} - \frac{\partial_l L}{\partial q_i} - \frac{\partial_l f_a}{\partial q_i} \frac{\partial_l L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial_l g_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}^\alpha - \frac{\partial_l L}{\partial q_i}, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_l H_c}{\partial p_a} &= f_a + (-1)^{P_{(b)} P_{(a)}} p_b \frac{\partial_l f^b}{\partial p_a} + \frac{\partial_l g_\alpha}{\partial p_a} \dot{q}^\alpha - \frac{\partial_l f_b}{\partial p_a} \frac{\partial_l L}{\partial \dot{q}_b} \\ &= f_a + \frac{\partial_l g_\alpha}{\partial p_a} \dot{q}^\alpha = \dot{q}_a + \frac{\partial_l g_\alpha}{\partial p_a} \dot{q}^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial_r H_c}{\partial \dot{q}_\alpha} = g_\alpha + p_b \frac{\partial_r f^b}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial_r f_b}{\partial \dot{q}_\alpha} = g_\alpha - \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0. \quad (\text{B.8})$$

A última das equações acima nos mostra que o Hamiltoniano canônico **não possui dependência explícita nas velocidades não resolvidas**. Além disso, usando as equações de Euler-Lagrange e a definição dos momentos, podemos escrever as equações (B.6) e (B.7) como

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial_r}{\partial q_i} (H_c - g_\alpha \dot{q}^\alpha), \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{q}_a = \frac{\partial_l}{\partial p_a} (H_c - g_\alpha \dot{q}^\alpha). \quad (\text{B.10})$$

Estas são as equações Hamiltonianas que podem ser escritas para um sistema singular e só estão definidas num subespaço do espaço de fase definido pelos vínculos (B.4). Se quisermos ampliar este sistema para todo o espaço de fase devemos introduzir o conceito de **igualdades fracas**.

Uma função $F(q, p)$ é dita fracamente nula, escreve-se $F \approx 0$, se ela se anula na hipersuperfície definida pelos vínculos, ou seja,

$$F|_{\Phi_\alpha=0} = 0 \Rightarrow F \approx 0. \quad (\text{B.11})$$

Se além disso o gradiente de F se anula nessa hipersuperfície F será fortemente nula ($F \simeq 0$), ou seja

$$\left. \frac{\partial_r F}{\partial q_i} \right|_{\Phi_\alpha=0} = \left. \frac{\partial_r F}{\partial p_i} \right|_{\Phi_\alpha=0} = 0 \Rightarrow F \simeq 0. \quad (\text{B.12})$$

Os vínculos são claramente igualdades fracas já que

$$\left. \frac{\partial_r \Phi_\alpha}{\partial p_i} \right|_{\Phi_\alpha=0} = \left. \frac{\partial_r p_\alpha}{\partial p_i} \right|_{\Phi_\alpha=0} = \delta_{\alpha i}|_{\Phi_\alpha=0} \neq 0, \quad (\text{B.13})$$

de forma que devem ser escritos como $\Phi_\alpha \approx 0$.

Uma importante propriedade derivada desta definição, que apresentaremos sem sua demonstração, é que se duas funções F e D são fracamente iguais ($F \approx D$) então a seguinte igualdade forte é válida

$$F - \frac{\partial_r F}{\partial p_\alpha} \Phi_\alpha \simeq D - \frac{\partial_r D}{\partial p_\alpha} \Phi_\alpha. \quad (\text{B.14})$$

A demonstração desta identidade pode ser encontrada na referência [59]. Como consequência deste resultado uma função F fracamente nula é igual a uma combinação linear dos vínculos.

Consideraremos agora que o Hamiltoniano canônico, que só é definido na hipersuperfície dos vínculos e não depende dos momentos p_α , seja a restrição a essa hipersuperfície de uma função H' definida em todo o espaço de fase, ou seja $H_c \approx H'$. Teremos então

$$\frac{\partial_r}{\partial q_i} H_c \approx \frac{\partial_r}{\partial q_i} \left(H' - \frac{\partial_r H'}{\partial p_\alpha} \Phi_\alpha \right), \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial_r}{\partial p_i} H_c \approx \frac{\partial_r}{\partial q_i} \left(H' - \frac{\partial_r H'}{\partial p_\alpha} \Phi_\alpha \right), \quad (\text{B.16})$$

e com isso as equações (B.9) e (B.10) tornam-se

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial_r}{\partial q_i} \left(H'' + \Phi_\alpha \dot{q}^\alpha \right), \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{q}_a \approx \frac{\partial_l}{\partial p_a} \left(H'' + \Phi_\alpha \dot{q}^\alpha \right), \quad (\text{B.18})$$

onde usamos $H'' = H' - \frac{\partial_r H'}{\partial p_\alpha} \Phi_\alpha$ e o fato de que $g_\alpha \approx p_\alpha - \Phi_\alpha$. O índice a na última equação pode ser estendido para variar em toda faixa $i = 1, \dots, N$ pois esta equação será trivialmente satisfeita para $i = \alpha = 1, \dots, R$. Além disso, apesar de H'' não ser completamente determinado, podemos fazer $H'' \simeq H_c$. Deste modo temos agora as equações Hamiltonianas

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial_r}{\partial q_i} \left(H_c + \Phi_\alpha \dot{q}^\alpha \right); \quad \dot{q}_i = \frac{\partial_l}{\partial p_i} \left(H_c + \Phi_\alpha \dot{q}^\alpha \right), \quad (\text{B.19})$$

que podem ser escritas usando os parênteses de Berezin como

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_P\}_B; \quad \dot{q}_i = \{q_i, H_P\}_B, \quad (\text{B.20})$$

onde

$$H_P = H_c + \Phi_\alpha \dot{q}^\alpha, \quad (\text{B.21})$$

é o **Hamiltoniano primário**.

Devemos mencionar que o conjunto dos vínculos pode sempre ser mudado para um conjunto equivalente que define a mesma hipersuperfície através de uma transformação inversível do tipo $\Phi'_\beta = \Phi^\alpha A_{\alpha\beta}$. Com essa mudança os coeficientes arbitrários dos vínculos no Hamiltoniano primário passam a ser $u_\alpha = A_{\alpha\beta}^{-1} \dot{q}^\beta$, mantendo inalterada a dinâmica do sistema a menos de uma redefinição dos parâmetros arbitrários. Daqui por diante os coeficientes arbitrários no Hamiltoniano serão designados por u_α , possuindo a mesma paridade que o vínculo relacionado de forma que o Hamiltoniano continue

sendo uma função par, mas sem a identificação explícita com as velocidades uma vez que esta identificação pode ser facilmente perdida.

Também é importante frisar que a definição das igualdades fracas faz com que seja obrigatório o cálculo dos parênteses de Berezin **antes** de usar o fato de os vínculos serem nulos. Isso deve-se ao fato de que tais parênteses são definidos em termos das componentes do gradiente no espaço de fase que não são nulas para uma função fracamente nula.

Agora, por uma questão de consistência, devemos exigir que os vínculos primários sejam preservados na evolução temporal do sistema e, portanto, devemos ter como **condições de consistência**

$$\dot{\Phi}_\alpha \approx \{\Phi_\alpha, H_P\}_B \approx 0. \quad (\text{B.22})$$

Estas condições podem resultar em três situações distintas: num primeiro caso podemos ter expressões envolvendo os coeficientes u_α , de forma que um certo número deles deixem de ser arbitrários, podendo ser expressos em função das variáveis canônicas. Outra possibilidade é que estas condições resultem em expressões do tipo $\Psi_\alpha \approx 0$, que não envolvem os coeficientes u_α mas não se anulam com o uso dos vínculos. Estas expressões devem então ser consideradas **novos vínculos** e são chamadas de **vínculos secundários**. Por fim, podemos ter uma igualdade trivialmente satisfeita que não levará a novos vínculos ou a condições sobre os parâmetros u_α .

O número de parâmetros u_α que podem ser determinados a partir das condições (B.22) é dado pelo posto da matriz $R \times R$ com elementos dados pelos parênteses de Berezin dos vínculos primários, i.e. $\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}_B$. Se o posto desta matriz for R todos os parâmetros arbitrários serão determinados. Mas se esta matriz tiver $R' \leq R$ autovetores nulos teremos $R - R'$ coeficientes u_α determinados e R' equações independentes dos coeficientes u_α que irão gerar vínculos secundários se não forem identicamente satisfeitas. Contudo, devemos ter em mente que a hipersuperfície dos vínculos deve

ser definida **também** pelos vínculos secundários. Isso pode reduzir o posto da matriz $\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}_B$ fazendo com que menos coeficientes u_α sejam determinados e novos vínculos secundários possam surgir.

Consideremos então que tenhamos determinado um certo número de coeficientes u_α e obtido um número M de vínculos secundários Ψ_α . Estes vínculos secundários também devem satisfazer condições de consistência do tipo da equação (B.22), podendo levar à determinação de mais parâmetros arbitrários u_α ou ao surgimento de novos vínculos que também serão chamados de vínculos secundários por uma questão de simplicidade. O processo deve então ser repetido até que não surja nenhum novo vínculo.

Este processo em geral termina após poucas interações nos deixando com um número total M' de vínculos secundários, denominados Ψ_α , a serem considerados junto com os R vínculos primários, totalizando $T = R + M'$ vínculos. Teremos então um sistema total de T equações

$$\dot{\Theta}_\alpha \approx \{\Theta_\alpha, H_P\}_B = \{\Theta_\alpha, H_c\}_B + \{\Theta_\alpha, \Phi_\beta\}_B u^\beta \approx 0, \quad (\text{B.23})$$

onde Θ_α designa o conjunto total dos vínculos primários e secundários. Estas equações irão determinar um número total de coeficientes arbitrários u_α dado pelo posto, que é menor ou igual a R , da matriz $T \times R$ cujos elementos são os parênteses de Berezin do conjunto total dos vínculos com os vínculos primários, i.e. $\{\Theta_\alpha, \Phi_\beta\}_B$. Se esta matriz tem posto $P \leq R$ teremos uma solução geral para o sistema de equações não homogêneo (B.23) dada por

$$u_\alpha \approx U_\alpha + V_{(a)\alpha} v^a; \quad a = 1, \dots, R - P, \quad (\text{B.24})$$

onde U_α é uma solução particular, v_a são novos parâmetros arbitrários e $V_{(a)\alpha}$ são as $R - P$ soluções do sistema homogêneo $\{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha\}_B u^\alpha \approx 0$ associado (B.23). Substituindo o resultado acima na expressão para o Hamiltoniano primário teremos

$$H_P = H_c + \Phi_\alpha U^\alpha + \Phi_\alpha V_{(a)}^\alpha v^a,$$

$$H_P = \overline{H} + \Phi'_a v^a, \quad (\text{B.25})$$

onde

$$\overline{H} = H_c + \Phi_\alpha U^\alpha; \quad \Phi'_a = \Phi_\alpha V_{(a)}^\alpha. \quad (\text{B.26})$$

Esta forma do Hamiltoniano, uma vez satisfeitas todas as condições de consistência, é chamada **Hamiltoniano total**.

Deste modo, após todas as condições de consistência serem satisfeitas resta-nos uma dinâmica descrita em termos de um número $R - P$ de constantes arbitrárias, de um novo “Hamiltoniano” $\overline{H}$ que incorpora os P coeficientes que foram determinados e dos $R - P$ novos vínculos Φ'_a primários, dados como uma combinação linear dos vínculos primários. Estes novos vínculos Φ'_a têm a importante propriedade de ter parênteses de Berezin nulos com todos os outros vínculos pois

$$\{\Theta_\beta, \Phi'_a\}_B = \{\Theta_\beta, \Phi_\alpha V_{(a)}^\alpha\}_B \approx \{\Theta_\beta, \Phi_\alpha\}_B V_{(a)}^\alpha \approx 0, \quad (\text{B.27})$$

em virtude do fato de $V_{(a)}^\alpha$ ser solução do sistema homogêneo associado a (B.23).

Funções que têm parênteses de Berezin nulos com todos os vínculos são chamadas de **funções de primeira classe**. Aquelas que não têm essa propriedade são chamadas **funções de segunda classe**. Pode-se mostrar [59] que os parênteses de Berezin entre funções de primeira classe também são de primeira classe.

Por cálculo direto podemos mostrar também que o “Hamiltoniano” $\overline{H}$ é uma função de primeira classe, de forma que a dinâmica do sistema, após satisfeitas todas as condições de consistência, é dada por um Hamiltoniano H_P de primeira classe.

Os vínculos podem então ser divididos em vínculos de primeira e segunda classe **de forma independente** da divisão em vínculos primários e secundários. O conjunto total de vínculos de primeira classe pode ser obtido por meio dos autovetores $V'_{(a)\beta}$ com autovalor nulo da matriz $T \times T$ cujos elementos são dados pelos parênteses de Berezin de todos os vínculos, i.e. $\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}_B$, uma vez que

$$\{\Theta_\beta, \Theta_\alpha V'_{(a)}^\alpha\}_B \approx \{\Theta_\beta, \Theta_\alpha\}_B V'_{(a)}^\alpha \approx 0, \quad (\text{B.28})$$

e, portanto $\Theta'_a = \Theta_\beta V'_{(a)}{}^\beta$ é de primeira classe.

A matriz $\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}_B$ contém a matriz $\{\Theta_\beta, \Phi_\alpha\}$ e por conseguinte possui pelo menos tantos autovetores com autovalor nulo quanto esta última. Isso fica claro ao fazermos um ordenamento de tal modo que os R primeiros vínculos Θ_α sejam os vínculos primários Φ_α e os M' restantes são os vínculos secundários Ψ_α . Deste modo, é fácil notar que a matriz $\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}_B$ possui ao menos $R - P$ autovetores com autovalor nulo na forma

$$V''_{(a)\beta} = (V_{(a)\alpha}, 0); \quad \alpha = 1, \dots, R; \quad \beta = 1, \dots, T; \quad a = 1, \dots, R - P, \quad (\text{B.29})$$

onde $V_{(a)\alpha}$ são os autovetores associados de autovalor nulo da matriz $\{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha\}_B$. Desta forma, a combinação linear $\Theta_\beta V''_{(a)}{}^\beta$ irá gerar exatamente os vínculos primários de primeira classe Φ'_a . Os outros autovetores com autovalor nulo $V''_{(a)\beta}$ que a matriz $\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}_B$ possui irão gerar combinações $\Theta_\beta V''_{(a)}{}^\beta$ contendo vínculos secundários e que, portanto, serão vínculos secundários de segunda classe.

Consideremos agora que tenhamos formado o maior número possível de vínculos de primeira classe, por meio de combinações lineares dos vínculos, ficando então com S vínculos de segunda classe que designaremos por Θ''_α . A matriz Δ , de dimensão $S \times S$, formada pelos parênteses de Berezin destes vínculos, i.e. $\Delta_{\alpha\beta} = \{\Theta''_\alpha, \Theta''_\beta\}_B$, tem a propriedade de ser não singular, ou seja, seu determinante não se anula **nem mesmo fracamente**. Do contrário, existiria pelo menos uma relação entre suas colunas (ou linhas) tal que $\Delta_{\alpha\beta} A^\beta \approx 0$, onde os coeficientes A^β não são todos nulos. Mas isso implica em $\{\Theta''_\alpha, \Theta''_\beta A^\beta\}_B \approx \{\Theta''_\alpha, \Theta''_\beta\}_B A^\beta \approx 0$ e portanto a combinação $\Theta''_\beta A^\beta$ seria um novo vínculo de primeira classe, contrariando nossa hipótese inicial de que já tínhamos o maior número possível de vínculos de primeira classe.

Escrevendo a matriz Δ explicitamente em termos dos vínculos primários Φ''_α e se-

cundários Ψ''_α de segunda classe teremos

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\Phi''_\alpha, \Phi''_\beta\} & \{\Phi''_\alpha, \Psi''_D\} \\ \{\Psi''_B, \Phi''_\beta\} & \{\Psi''_B, \Psi''_D\} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

onde os índices α e β estão sendo usados para os vínculos primários de segunda classe e os índices B e D para os vínculos secundários de segunda classe. A matriz inversa Δ^{-1} terá a forma

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{\alpha\beta}^{-1} & \Delta_{\alpha D}^{-1} \\ \Delta_{B\beta}^{-1} & \Delta_{BD}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Dividindo o Hamiltoniano primário (B.21) em termos dos vínculos primários de primeira e segunda classes teremos

$$H_P = H_c + \Phi'_\alpha v^\alpha + \Phi''_\beta c^\beta, \quad (\text{B.32})$$

sendo que as condições de consistência (B.23) tornar-se-ão

$$\begin{aligned} \{\Phi'_\alpha, H_c\}_B &\approx 0, \\ \{\Psi'_\gamma, H_c\}_B &\approx 0, \\ \{\Phi''_\alpha, H_c\}_B + \{\Phi''_\alpha, \Phi''_\beta\}_B c^\beta &\approx 0, \\ \{\Psi''_B, H_c\}_B + \{\Psi''_B, \Phi''_\beta\}_B c^\beta &\approx 0. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Os coeficientes c^β podem então ser determinados por

$$c^\beta \approx -(\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Phi''_\alpha, H_c\}_B - (\Delta^{-1})^{\beta B} \{\Psi''_B, H_c\}_B, \quad (\text{B.34})$$

de forma que a equação de movimento para uma função F das variáveis canônicas torna-se

$$\begin{aligned} \dot{F} &\approx \left\{ F, H_c + \Phi'_\alpha v^\alpha + \Phi''_\beta c^\beta \right\}_B, \\ \dot{F} &\approx \left\{ F, H_c + \Phi'_\alpha v^\alpha \right\}_B + \left\{ F, \Phi''_\beta \right\}_B c^\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F} \approx & \{F, H_c + \Phi'_\alpha v^\alpha\}_B \\ & - \{F, \Phi''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Phi''_\alpha, H_c\}_B - \{F, \Phi''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta B} \{\Psi''_B, H_c\}_B \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Mas da definição da inversa Δ^{-1} temos que

$$(\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Phi''_\alpha, \Phi''_\gamma\}_B + (\Delta^{-1})^{\beta B} \{\Psi''_B, \Phi''_\gamma\}_B \approx 0, \quad (\text{B.36})$$

e usando este resultado nas condições de consistência (B.33) obtemos

$$(\Delta^{-1})^{DB} \{\Psi''_B, H_c\}_B + (\Delta^{-1})^{D\alpha} \{\Phi''_\alpha, H_c\}_B \approx 0, \quad (\text{B.37})$$

Contraindo este termo com $\{F, \Psi''_D\}$ podemos reescrever o lado direito da equação (B.35) como

$$\dot{F} \approx \{F, H_c + \Phi'_\alpha v^\alpha\}_B - \{F, \Theta''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Theta''_\alpha, H_c\}_B, \quad (\text{B.38})$$

onde agora todos os vínculos de segunda classe Θ''_β aparecem de forma simétrica do lado direito da igualdade. Como os vínculos Φ'_α são de primeira classe podemos escrever a expressão acima como

$$\dot{F} \approx \{F, H'_T\}_B - \{F, \Theta''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Theta''_\alpha, H'_T\}_B, \quad (\text{B.39})$$

onde $H'_T = H_c + \Phi'_\alpha v^\alpha$ é o Hamiltoniano canônico acrescido apenas dos vínculos primários de primeira classe multiplicados por coeficientes arbitrários.

Podemos definir agora os parênteses de Dirac $\{F, K\}_D$ entre duas funções das variáveis canônicas F e K como

$$\{F, K\}_D = \{F, K\}_B - \{F, \Theta''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Theta''_\alpha, K\}_B. \quad (\text{B.40})$$

Eles têm a importante propriedade de serem identicamente nulos sempre que uma das funções F ou K for um dos vínculos de segunda classe, pois

$$\{F, \Theta''_\gamma\}_D = \{F, \Theta''_\gamma\}_B - \{F, \Theta''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\Theta''_\alpha, \Theta''_\gamma\}_B,$$

$$\begin{aligned}\{F, \Theta''_\gamma\}_D &= \{F, \Theta''_\gamma\}_B - \{F, \Theta''_\beta\}_B (\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \Delta_{\alpha\gamma}, \\ \{F, \Theta''_\gamma\}_D &= \{F, \Theta''_\gamma\}_B - \{F, \Theta''_\beta\}_B \delta^\beta_\gamma = 0.\end{aligned}\tag{B.41}$$

Além disso, possuem todas as propriedades dos parênteses de Berezin (ou de Poisson), em especial eles satisfazem a identidade de Jacobi expressa na equação (1.9).

Em termos dos parênteses de Dirac a equação de movimento (B.39) torna-se simplesmente

$$\dot{F} \approx \{F, H'_T\}_D.\tag{B.42}$$

A vantagem em introduzir os parênteses de Dirac está no fato de que, ao descrevermos a dinâmica do sistema em termos deles, os vínculos de segunda classe podem ser transformados em identidades fortes pois qualquer função tem parênteses de Dirac identicamente nulos com eles. Deste modo, os vínculos de segunda classe desaparecem da teoria, mas **cada um deles elimina um grau de liberdade do espaço de fase**.

Quando apenas variáveis pares estão presentes a matriz Δ é antissimétrica e uma matriz antissimétrica não singular deve obrigatoriamente ter um número par de linhas e colunas. Portanto, neste caso, teremos um número par de vínculos de segunda classe e sempre é possível encontrar uma transformação canônica, ao menos localmente, tal que os pares de vínculos de segunda classe tomem a forma de pares P_α e Q^α das novas variáveis canônicas. Com isso, os parênteses de Dirac tornam-se parênteses de Poisson (pois só há variáveis pares) expressos em termos das variáveis canônicas restantes após a eliminação dos P 's e Q 's correspondentes aos vínculos de segunda classe. Esta construção esclarece a redução do espaço de fase pelo uso dos parênteses de Dirac, mas devemos frisar que em geral não é possível obter uma transformação global que faça com que os vínculos de segunda classe tenham a forma de pares de coordenadas canonicamente conjugadas.

No caso de variáveis ímpares estarem presentes pode haver um número ímpar de vínculos de segunda classe, o que implicará num espaço de fase de dimensão ímpar.

Por fim, devemos mencionar alguns aspectos relacionados às transformações de gauge e suas relações com os vínculos de primeira classe. Por princípio deve ser impossível distinguir fisicamente as diferentes escolhas dos coeficientes arbitrários que multiplicam os vínculos de primeira classe. Deste modo, duas configurações do sistema obtidas a partir da mesma condição inicial mas com escolhas distintas dos coeficientes arbitrários em H'_T devem ser consideradas como um mesmo estado físico. Isso implica que os vínculos primários de primeira classe devem ser geradores de transformações canônicas que não alteram o estado físico, transformações essas que foram identificadas por Dirac como transformações de gauge.

Também é possível mostrar [7] que pelo menos alguns dos vínculos secundários de primeira classe podem gerar transformações deste tipo. Dirac então formulou aquela que é atualmente conhecida como **conjectura de Dirac**: que todos os vínculos de primeira classe, primários e secundários, são geradores de transformações de gauge. Esta conjectura é válida na maioria dos sistemas de interesse físico, mas a questão de sua validade geral e da forma exata da combinação linear de vínculos de primeira classe que atua como gerador das transformações de gauge ainda é fruto de pesquisas [8, 9, 10].

Contudo, assumindo a validade da conjectura de Dirac podemos escrever a dinâmica do sistema em termos do chamado Hamiltoniano estendido H_E

$$H_E = H_c + \Theta'_\alpha v^\alpha, \quad (\text{B.43})$$

que contém todos os vínculos de primeira classe Θ'_α , primários e secundários, multiplicados por coeficientes arbitrários. Este Hamiltoniano contém todos os geradores de transformações de gauge e, portanto, possui toda a liberdade dinâmica do sistema clássico.

Bibliografia

- [1] P. G. Bergmann and J. L. Anderson - *Phys. Rev.* **83**, 1018 (1951).
- [2] P. G. Bergmann - *Phys. Rev.* **75**, 680 (1949).
- [3] P. G. Bergmann and J. H. M. Brunings - *Rev. Mod. Phys.* **21**, 480 (1949).
- [4] P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller & H. Zatzkis - *Phys. Rev.* **80**, 81 (1950).
- [5] P. A. M. Dirac - *Canadian Journal of Mathematics* **2**, 129 (1950).
- [6] P. A. M. Dirac - *Canadian Journal of Mathematics* **3**, 1 (1951).
- [7] P. A. M. Dirac - *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).
- [8] R. Sugano and T. Kimura - *Phys. Rev.* **D41**, 1247 (1990).
- [9] N. P. Chitaia, S. A. Gogilidze & Yu. S. Surovtsev - *Phys. Rev.* **D56**, 1142 (1997).
- [10] J. M. Pons and J. Antonio García - e-print hep-th/9908151.
- [11] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim - *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976).
- [12] K. Sundermeyer - Lecture Notes in Physics, 169: *Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982).

-
- [13] D. M. Gitman and I. V. Tyutin - *Quantization of Fields with Constraints* (Springer-Verlag, 1990).
- [14] M. Henneaux and C. Teitelboin - *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, New Jersey, 1992).
- [15] L. Faddeev and R. Jackiw - *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988).
- [16] R. Jackiw - e-print hep-th/9306075. Publicado em *Constraint Theory and Quantization Methods: From Relativistic Particles to Field Theory and General Relativity*, Proceedings do 2nd “Workshop on Constraint Theory and Quantization Methods”, Montepulciano, Italia, 1993; página 163 (F. Colomo, L. Lusanna & G. Marmo, editores. World Scientific, 1994).
- [17] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek - *Mod. Phys. Lett.* **A7**, 1737 (1992).
- [18] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek - *Int. J. Mod. Phys.* **A7**, 4981 (1992).
- [19] C. Wotzasek - *Ann. Phys. (N.Y.)* **243**, 76 (1995).
- [20] H. Montani - *Int. J. Mod. Phys.* **A8**, 4319 (1993).
- [21] J. A. García and J. M. Pons - *Int. J. Mod. Phys.* **A12**, 451 (1997).
- [22] J. A. García and J. M. Pons - *Int. J. Mod. Phys.* **A13**, 3691 (1998).
- [23] P. G. Bergmann - *Phys. Rev.* **144**, 1078 (1966).
- [24] P. A. M. Dirac - *Phys. Rev.* **114**, 924 (1959).
- [25] A. Komar - *Phys. Rev.* **153**, 1385 (1967).
- [26] A. Komar - *Phys. Rev.* **170**, 1195 (1968).
- [27] A. Komar - *Phys. Rev.* **D1**, 1521 (1970).

-
- [28] A. Komar - *Phys. Rev.* **D4**, 923 (1971).
- [29] E. T. Newman and C. Rovelli - *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1300 (1992).
- [30] S. Frittelli, S. Koshti, E. T. Newman and C. Rovelli - *Phys. Rev.* **D49**, 6883 (1994).
- [31] Y. Güler - *Il Nuovo Cimento* **B107**, 1389 (1992).
- [32] Y. Güler - *Il Nuovo Cimento* **B107**, 1143 (1992).
- [33] G. Longhi, D. Dominici, J. Gomis and J. M. Pons - *The Hamilton-Jacobi Formalism for systems with constraints*, em *Lecture Notes in Physics*, 162: *Proceedings of the Workshop "Relativistic Action at a Distance: Classical and Quantum Aspects"*, Editado por J. Llosa, página 165 (Springer-Verlag, 1981).
- [34] B. M. Pimentel, J. L. Tomazelli and R. G. Teixeira - *Ann. Phys. (N.Y.)* **267**, 75 (1998).
- [35] F. A. Berezin - *Introduction to Superalysis* - Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. 9 (D. Reidel Publishing Company, 1987).
- [36] F. A. Berezin - *The Method of Second Quantization* (Academic Press, 1966).
- [37] C. Lanczos - *The Variational Principles of Mechanics* (Dover Publications, 4th edition, 1986).
- [38] H. Goldstein - *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 2nd edition, 1980).
- [39] L. Landau and E. Lifshitz - *Mecânica* (Editora Mir, 1978).
- [40] W. Yourgrau and S. Mandelstam - *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* (Dover Publications, 1979).
- [41] C. Carathéodory - *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part II*, Página 205 (Holden-Day, 1967).

-
- [42] G. F. D. Duff - *Partial Differential Equations* (University of Toronto Press, 1956).
- [43] C. Carathéodory - *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I* (Holden-Day, 1967).
- [44] E. M. Rabei and Y. Güler - *Phys. Rev.* **A46**, 3513 (1992).
- [45] S. I. Muslih and Y. Güler - *Il Nuovo Cimento* **B110**, 307 (1995).
- [46] E. M. Rabei - *Hadronic Journal* **19**, 597 (1996).
- [47] S. Shanmugadhasam - *J. Math. Phys.* **14**, 677 (1973).
- [48] P. J. Steinhardt - *Ann. Phys. (N.Y.)* **128**, 425 (1980).
- [49] F. Mandl and G. Shaw - *Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons, 1984).
- [50] L. H. Rider - *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1985).
- [51] B. M. Pimentel and R. G. Teixeira - *Il Nuovo Cimento* **B111**, 841 (1996).
- [52] B. M. Pimentel and R. G. Teixeira - *Il Nuovo Cimento* **B113**, 805 (1998).
- [53] D. Bohm and B. J. Hiley - *The Undivided Universe* (Routledge, 1995).
- [54] P. R. Holland - *The Quantum Theory of Motion : An Account of the De Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 1995).
- [55] I. A. Batalin and E. S. Fradkin - *Phys. Lett.* **B180**, 157 (1986).
- [56] I. A. Batalin and E. S. Fradkin - *Nucl. Phys.* **B279**, 514 (1987).
- [57] I. A. Batalin, E. S. Fradkin and T. E. Fradkina - *Nucl. Phys.* **B314**, 158 (1989).
- [58] I. A. Batalin and I. V. Tyutin - *Int. J. Mod. Phys.* **A6**, 3255 (1991).

- [59] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda - *Classical Dynamics: A Modern Perspective*
(Wiley, 1974).