



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Matheus Eduardo Dametto Silva

Observações sobre o 'span' de determinadas classes de variedades

São José do Rio Preto
2022

Matheus Eduardo Dametto Silva

Observações sobre o 'span' de determinadas classes de variedades

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Nome do Programa, junto ao Programa de Pós-Graduação em Nome do Programa, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadoras: FAPESP – Proc.. 2020/00814-1
CAPES

Orientador: Prof^a. Dr^a. Alice Kimie Miwa Libardi

São José do Rio Preto
2022

S586o Silva, Matheus Eduardo Dametto
Observações sobre o 'span' de determinadas classes de variedades / Matheus Eduardo Dametto Silva. -- São José do Rio Preto, 2022
87 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Topologia Diferencial. 2. Campos de Vetores. 3. Classes Características. 4. Variedades Diferenciáveis. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Matheus Eduardo Dametto Silva

Observações sobre o 'span' de determinadas classes de variedades

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Nome do Programa, junto ao Programa de Pós-Graduação em Nome do Programa, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadoras: FAPESP – Proc. 2020/00814-1.
CAPES

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Alice Kimie Miwa Libardi
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. João Peres Vieira
UNESP – Câmpus de Rio Claro

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFSCar – São Carlos

São José do Rio Preto
21 de fevereiro de 2022

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a honra de estar sempre perto de pessoas maravilhosas e inspiradoras. Agradeço também pelas experiências e oportunidades que tive durante toda minha vida.

Agradeço minha família, ao meu pai Luís, minha mãe Márcia, e meu irmão Lucas, que sempre me deram amizade, amor, carinho, afeto, motivação e conselhos. Vocês são a base da minha vida, sem vocês eu não seria o que sou hoje.

Deixo também meu agradecimento à minha namorada Maria, que está ao meu lado desde a minha graduação, me proporcionando alegrias e momentos de atenção. Agradeço também à minha cunhada Elis que com sua luz nos presenteou com o maior de tesouro de nossas vidas, minha sobrinha Julia.

Agradeço a todos os meus familiares e meus amigos. Em especial, aos amigos que fiz na Unesp, que sempre compartilharam grandes momentos de felicidade e aprendizagem comigo.

Também sou grato a todos meus professores do ensino fundamental e médio. Aos professores da universidade, que me ajudaram a admirar toda a beleza da matemática. Em particular, agradeço minha orientadora, Dra. Alice, por toda paciência, motivação e os ensinamentos, e ao professor João Peres, que me orientou durante a graduação e me auxiliou a conquistar meus objetivos.

Por fim, agradeço ao IBILCE por todo suporte dado ao projeto e agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior, Capes e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, processo 2020/00814-1, que apoiaram financeiramente este projeto.

RESUMO

Esta dissertação tem por finalidade apresentar parte do artigo [14] de P. Sanrakaran, onde é feita uma ampla discussão sobre o problema dos campos de vetores para os espaços homogêneos. O '*span*' de uma variedade diferenciável M é definido como sendo o maior natural r tal que existem campos de vetores linearmente independentes em todos os pontos da variedade. Tomando como base alguns resultados e exemplos, nosso objetivo será determinar o $\text{span}(M)$, ou obter uma boa aproximação para tal. Em especial, trabalharemos na Variedades de Stiefel e na Variedades de Stiefel Projetivas. Será apresenta algumas conjecturas propostas por J. Korbas e P. Zvengrowski no artigo [6]. Para que tal discussão seja possível, será necessário um estudo preliminar acerca de conceitos pertinentes para o entendimento e apreciação deste tema, tais como alguns tópicos de topologia algébrica, variedades diferenciáveis, fibrados vetoriais e classes características.

Palavras-chave: Topologia Diferencial. Variedades Diferenciáveis. Fibrados. Classes Características. Campo de Vetores.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to present the part of the P. Sanrakaran article [14], where the problem of vector fields for homogeneous spaces is widely discussed. The span of a smooth manifold M is defined to be the greatest natural r such that there are linearly independent vector fields at all points of the manifold. Based on some results and examples, our goal will be to determine the span (M), or to get a good approximation for it. In particular, we will work on Stiefel Manifolds and the Projective of Stiefel Manifolds. We present some conjectures proposed by J. Korbass and P. Zvengrowski in the article [6]. For the discussion to be possible, a preliminary study of relevant concepts for the understanding and evaluation of this theme will be necessary, such as some concepts of Algebraic Topology, smooth manifolds, vector bundles and characteristic classes.

Keywords: Differential Topology. Smooth Manifolds. Fiber Bundle. Characteristic Class. Vector Fields.

Sumário

1	Introdução	9
2	Homotopia e Homologia	11
2.1	Homotopia	11
2.2	Homologia Singular	13
2.3	Homologia Relativa	20
2.4	Cohomologia	21
2.5	Produtos Cup e Cross	24
3	Ações sobre Espaços Topológicos	25
3.1	Ações de Grupos	25
3.1.1	Ações de Recobrimento	28
3.2	Espaços Homogêneos	29
4	Fibrados	32
4.1	Fibrados Vetoriais	32
4.2	Fibrados Vetoriais Euclidianos	36
4.3	Outros Fibrados Vetoriais	37
4.3.1	Fibrado Restrição	38
4.3.2	Fibrados Induzidos	38
4.3.3	Produtos Cartesianos	40
4.3.4	Soma de Whitney	40
4.3.5	Complementos Ortogonais	41
4.4	Fibrados Orientados	43
4.5	Fibrados Principais	44
5	Classes de Stiefel-Whitney	46
6	Variedades Diferenciáveis	50
6.1	A Variedade Tangente	53
6.2	Orientação de Variedades	57
6.3	Grupos e Álgebras de Lie	61
7	Fibrados em Variedades Diferenciáveis	65
7.1	Fibrados Diferenciáveis	65
7.2	Classes Características de Fibrados Diferenciáveis	67

8 O Problema dos Campos de Vetores	69
8.1 Resultados sobre o <i>span</i> de Esferas	72
8.2 Resultados sobre o <i>span</i> de Variedades Usando Classes Características	75
8.3 Span de Produtos de Variedades	78
9 Campos de Vetores em Espaços Homogêneos	81
9.1 Variedades de Stiefel	81
9.2 Variedades de Stiefel Projetivas	82
9.3 Conjecturas	84
Referências	85

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em apresentar os campos de vetores para algumas variedades, o que será explorados nos capítulos 8 e 9. Em particular, estaremos interessados no seguinte problema:

O Problema dos Campos de Vetores: Seja M uma variedade suave. Determinar o número máximo r de campos de vetores linearmente independente em M . Denotamos r por $\text{span}(M)$.

Iniciaremos nossa abordagem trazendo aspectos básicos da Topologia Algébrica, como a homotopia e a teoria de homologia. Tais conceitos serão necessários para o desenvolvimento do tema em questão, como pode ser visto nos capítulos posteriores, em especial no capítulo 6.

O capítulo 3 será dedicado as ações, tema central para a definição dos fibrados principais e os espaços homogêneos. Além disso, o desenvolvimento deste tema irá permitir uma melhor compreensão da seção 6.3, a qual se destina aos Grupos e Álgebras Lie.

No capítulo 4 iremos definir alguns objetos importantes chamados, em particular o chamado fibrado vetorial. No capítulo 7 exploraremos um caso particular de fibrado vetorial, o fibrado tangente.

O capítulo 5 será dedicado a definir e trabalhar com as classes de Stiefel-Whitney. Essas classe estão associadas a um fibrado vetorial através de 4 axiomas. Novamente, no capítulo 7 iremos trabalhar com as classes de Stiefel-Whitney que estão relacionadas ao fibrado tangente.

Os capítulo 4, 5 e 7 possuem como referenciais teóricos o livro *Characteristic Class* de John W. Milnor e James D. Stasheff ([11]) e a dissertação de Alex M. Barbosa ([1]).

No capítulo 6 se encontra um dos temas mais importantes e relevantes para este trabalho, as variedades diferenciáveis. Através de algumas construções, poderemos trazer a definição 6.9, a qual define os campos de vetores. As definições e os resultados presentes neste capítulo serão usados nos capítulos posteriores.

No capítulo 8, iremos enunciar o problema dos campos de vetores. Serão apresentados alguns resultados que nos permite resolver tal problema para certas variedades, como as esferas e os espaços projetivos.

Por fim, no capítulo 9, teremos o problema dos campos de vetores generalizado. Neste capítulo, será apresentado alguns resultados em aberto com relação ao '*span*' das variedades de Stiefel projetivas.

Os capítulos 8 e 9 tem como base o artigo *The Vector Field Problem For Homogeneous Spaces* de Parameswaran Sankaran ([13]).

Capítulo 2

Homotopia e Homologia

Iniciaremos este trabalho com alguns conceitos básicos de Homotopia e Homologia. Apresentaremos tais assuntos através de exemplos e resultados. Representaremos o intervalo real fechado $[0, 1]$ pela letra I , quando não houver ambiguidade.

2.1 Homotopia

Definição 2.1. Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica a g ($f \simeq g$) se existe uma aplicação contínua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$,

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad H(x, 1) = g(x)$$

Dizemos que H é a homotopia entre f e g , e denotamos $H: f \simeq g$.

Proposição 2.1. *A relação de homotopia \simeq é uma relação de equivalência.*

Demonstração: De fato, sejam $f, g, h: X \rightarrow Y$ aplicações contínuas, temos

i) Reflexiva: defina $F: X \times I \rightarrow Y$ por $F(x, t) = f(x)$, para todo $(x, t) \in X \times I$, segue que F é uma aplicação contínua e

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = f(x)$$

Logo, $f \simeq f$.

ii) Simétrica: suponha $K: f \simeq g$. Defina $G: X \times I \rightarrow Y$ por $G(x, t) = K(x, 1-t)$, para todo $(x, t) \in X \times I$. Assim

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= K(x, 1) = g(x) \\ G(x, 1) &= K(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

Portanto, se $f \simeq g$ concluímos que $g \simeq f$.

iii) Transitiva: suponha $F: f \simeq g$ e $H: g \simeq h$. Defina $L: X \times I \rightarrow Y$ por

$$L(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x, 2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note que para $t = \frac{1}{2}$, temos

$$F(x, 2 \cdot \frac{1}{2}) = F(x, 1) = g(x)$$

e

$$H(x, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1) = H(x, 0) = g(x)$$

Deste modo, segue que L é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} L(x, 0) &= K(x, 0) = f(x) \\ L(x, 1) &= H(x, 1) = h(x) \end{aligned}$$

Portanto, $f \simeq h$. □

Definição 2.2. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia se existe uma aplicação $g : Y \rightarrow X$ contínua tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$.

Neste caso dizemos que X tem o mesmo tipo de homotopia de Y , e denotamos $X \equiv Y$.

A relação tipo de homotopia \equiv é uma relação de equivalência. De fato, sejam X, Y e Z espaços topológicos, temos

i) Reflexiva: utilizando a aplicação identidade $Id_X : X \rightarrow X$, segue que $Id_X \circ Id_X = Id_X$ e, portanto, $Id_X \circ Id_X \simeq Id_X$. Logo, concluímos que $X \equiv X$.

ii) Simétrica: suponha $X \equiv Y$, isto é, existe uma equivalência homotópica $f : X \rightarrow Y$, com $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$.

Com isso, temos que g é uma equivalência homotópica, com f sendo tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. Deste modo, segue que $Y \equiv X$.

iii) Transitiva: suponha $X \equiv Y$ e $Y \equiv Z$, isto é, existem equivalências homotópicas $f : X \rightarrow Y$ e $h : Y \rightarrow Z$, com $g : Y \rightarrow X$ e $k : Z \rightarrow Y$ tais que $f \circ g \simeq Id_Y$, $g \circ f \simeq Id_X$, $h \circ k \simeq Id_Z$ e $k \circ h \simeq Id_Y$.

Deste modo, tomando as composições $h \circ f : X \rightarrow Z$ e $g \circ k : Z \rightarrow X$ temos que estas são contínuas e

$$\begin{aligned} (h \circ f) \circ (g \circ k) &= h \circ (f \circ g) \circ k \simeq h \circ Id_Y \circ k = h \circ k \simeq Id_Z \\ (g \circ k) \circ (h \circ f) &= g \circ (k \circ h) \circ f \simeq g \circ Id_Y \circ f = g \circ f \simeq Id_X \end{aligned}$$

Portanto, $X \equiv Z$.

Exemplo 2.2. O disco $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Com efeito, sem perda de generalidade tomemos o ponto como sendo a origem de \mathbb{R}^n .

Assim, defina $i : \{0\} \rightarrow \mathbb{D}^n$ como sendo a inclusão $i(0) = 0$, e $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \{0\}$ como sendo a aplicação constantemente nula $r(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{D}^n$. Deste modo, $r \circ i = Id_{\{0\}}$.

Ainda, defina $H : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow \mathbb{D}^n$ por $H(x, t) = x \cdot t$, para todo $(x, t) \in \mathbb{D}^n \times I$. Logo, H é contínua e

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= 0 = i \circ r(x) \\ H(x, 1) &= x = Id_{\mathbb{D}^n} \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $i \circ r \simeq Id_{\{0\}}$ e $r \circ i \simeq Id_{\mathbb{D}^n}$ e, conseqüentemente, $\mathbb{D}^n \equiv \{0\}$.

2.2 Homologia Singular

As próximas seções serão utilizadas para introduzir duas importantes teorias da Topologia Algébrica, a saber, a Homologia Singular e sua noção dual, a Cohomologia Singular. Apresentaremos estes conceitos de forma breve, os quais poderão ser encontrados com maior desenvolvimento em [15] e [8].

Iniciaremos nossa abordagem à homologia singular recordando a definição de módulo.

Consideraremos R um anel comutativo com unidade. Um R -módulo M é um grupo abeliano aditivo tal que, para todo $m, n \in M$ e $r, s, 1 \in R$, temos

$$i) \quad (r + s)m = rm + sm$$

$$ii) \quad r(m + n) = rm + rn$$

$$iii) \quad (r \cdot s)m = r \cdot (s \cdot m)$$

$$iv) \quad 1 \cdot m = m$$

Ainda, o R -módulo M é dito ser livre se existe um subconjunto $S \subset M$ tal que

i) para todo $m \in M$, existem $s_1, \dots, s_n \in S$ e escalares $r_1, \dots, r_n \in R$ tais que

$$m = \sum_{i=1}^n r_i s_i$$

ii) todo conjunto finito P contido em S é linearmente independente.

Chamamos S de uma base de M . Em outras palavras, M é um R -módulo livre se, e somente se, M possui uma base.

Definição 2.3. Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ qualquer. A envoltória convexa de T ($E(T)$) é a intersecção de todos os conjuntos convexos em \mathbb{R}^n que contém T .

Dada uma coleção $\{x_0, \dots, x_p\} \in \mathbb{R}^n$ de $p+1$ pontos, definimos o p -simplexo como sendo $E(\{x_0, \dots, x_p\})$, onde $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ formam um conjunto linearmente independente. Note que independe do ponto fixado.

Proposição 2.3. Seja $\{x_0, \dots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:

a) $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ são linearmente independentes;

b) Se $\sum_{i=0}^p s_i x_i = \sum_{i=0}^p t_i x_i$ e $\sum_{i=0}^p s_i = \sum_{i=0}^p t_i$, então $s_i = t_i$, para $i = 0, \dots, p$

Demonstração: Suponha que $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ são linearmente independentes.

Se $\sum_{i=0}^p s_i x_i = \sum_{i=0}^p t_i x_i$ e $\sum_{i=0}^p s_i = \sum_{i=0}^p t_i$, então

$$0 = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_i - \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) x_0 = \sum_{i=0}^p (s_i - t_i) (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^p (s_i - t_i) (x_i - x_0)$$

donde concluímos que $s_i = t_i$, para $i = 0, \dots, p$

Por outro lado, suponhamos que seja válido b). Mostremos que $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ são linearmente independentes, ou seja, mostremos que se

$$\sum_{i=0}^p t_i (x_i - x_0) = 0$$

então $t_i = 0$, para $i = 0 \dots, p$.

Pois bem, se $\sum_{i=0}^p t_i(x_i - x_0) = 0$, então $\sum_{i=0}^p t_i x_i = \left(\sum_{i=0}^p t_i\right) x_0 = \left(\sum_{i=0}^p t_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^p 0 x_i$.

Como $t_0 + t_1 + \dots + t_p = (t_0 + t_1 + \dots + t_p) + 0 + \dots + 0$, segue pela hipótese que t_1, \dots, t_p são todos iguais a zero. Consequentemente, $t_0 = 0$ e, portanto

$$x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$$

são linearmente independentes □

Tomando uma ordenação x_0, \dots, x_p de pontos de \mathbb{R}^n , com $p \leq n$, cada ponto $s \in p$ -simplexo é univocamente caracterizado por uma coleção de coordenadas $s = (t_0, \dots, t_p)$, com $\sum_{i=0}^p t_i = 1$ e $0 \leq t_i \leq 1$, para $i = 0, \dots, p$.

Definição 2.4. Seja $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ a base canônica. Um p -simplexo padrão σ_p é dado por $E(x_0, \dots, x_p)$, onde $x_i = e_{i+1}$, $i = 1, \dots, p$.

Observação 2.4. Desde que $\sigma_1 = E(x_0, x_1) = [x_0, x_1]$, por vezes consideraremos σ_1 como sendo o subconjunto fechado da reta real $[0, 1]$, uma vez que $[x_0, x_1] \approx [0, 1]$.

Sejam X um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade. Um p -simplexo singular em X é uma função contínua $\varphi : \sigma_p \rightarrow X$. Denotamos o conjunto formado pelos p -simplexos singulares por $C_p(X)$ e, seu R -módulo gerado é denotado por $S_p(X, R)$. Quando não houver ambiguidade, denotaremos o R -módulo gerado simplesmente por $S_p(X)$.

Note que um elemento $\alpha \in S_p(X, R)$ é da forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^t r_i \varphi_i$$

onde $\varphi_i : \sigma_i \rightarrow X$ é uma função contínua, e $r_i \in R$ para todo $i = 1, \dots, t$. Chamamos α de p -cadeia singular de X .

Seja $\varphi \in C_p(X)$ um p -simplexo singular e j um inteiro tal que $0 \leq j \leq p$. Definimos a j -ésima face de φ como sendo o $(p-1)$ -simplexo singular de X dado por

$$\partial_j \varphi(t_0, \dots, t_{p-1}) = \varphi(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{p-1})$$

Com isso, temos que $\partial_j : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$. Desde que $C_p(X) \subset S_p(X, R)$ e ∂_j está definida em $C_p(X)$, podemos estender por linearidade ∂_j a um único homomorfismo $S_p(X, R) \rightarrow S_{p-1}(X, R)$, que por simplicidade será denotado também por ∂_j e definido por

$$\partial_j \left(\sum_{i=1}^t r_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^t r_i \partial_j(\varphi_i)$$

Assim, definimos o operador bordo como sendo o homomorfismo $\partial : S_p(X, R) \rightarrow S_{p-1}(X, R)$ por

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 + \dots + (-1)^p \partial_p = \sum_{i=1}^p (-1)^i \partial_i$$

Lema 2.5. $\partial_j \circ \partial_i = \partial_{i-1} \circ \partial_j$ sempre que $j < i$.

Demonstração: Com efeito, note que para todo $p > 0$, temos que $\partial_j \circ \partial_i, \partial_{i-1} \circ \partial_j : C_p(X) \rightarrow C_{p-2}(X)$. Dado $\varphi \in C_p(X)$ e $(t_0, \dots, t_{p-2}) \in \sigma_{p-2}$ arbitrários, segue que

$$\begin{aligned} (\partial_j \circ \partial_i)\varphi(t_0 \cdots t_{p-2}) &= \partial_i\varphi(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{p-2}) \\ &= \varphi(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{p-2}) \end{aligned}$$

uma vez que ∂_i adiciona 0 na i -ésima coordenada e, após aplicar ∂_j , a i -ésima coordenada se torna t_{i-1} , já que $j < i$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} (\partial_{i-1} \circ \partial_j)\varphi(t_0 \cdots t_{p-2}) &= \partial_j\varphi(t_0, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{p-2}) \\ &= \varphi(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{p-2}) \end{aligned}$$

donde concluímos o resultado. □

Proposição 2.6. A composição $\partial \circ \partial$ é igual a zero.

Demonstração: Para facilitar a compreensão desta demonstração, utilizaremos a notação ∂^p para apresentar o operador bordo $\partial : S_p(X, R) \rightarrow S_{p-1}(X, R)$, para todo $p \geq 0$. Sendo assim, queremos verificar que $\partial^{p+1} \circ \partial^p = 0$.

Sem perda de generalidade, faremos a demonstração para um elemento arbitrário φ na base $C_p(X)$. Deste modo, temos

$$\begin{aligned} \partial^{p-1} \circ \partial^p(\varphi) &= \partial^{p-1} \left(\sum_{i=1}^p (-1)^i \partial_i \varphi \right) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \partial^{p-1}(\partial_i \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j \partial_j \partial_i \varphi \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p-1}} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{0 \leq i \leq j < p} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.5, segue que o primeiro termo pode ser escrito

$$\sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi = \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_{i-1} \partial_j \varphi$$

Chamando $i-1 = j'$ e $j = i'$, substituindo na soma acima, temos

$$\sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_{i-1} \partial_j \varphi = \sum_{0 \leq i' \leq j' < p} (-1)^{i'+j'+1} \partial_{j'} \partial_{i'} \varphi = - \sum_{0 \leq i' \leq j' < p} (-1)^{i'+j'} \partial_{j'} \partial_{i'} \varphi$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{0 \leq i \leq j < p} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi &= - \sum_{0 \leq i' \leq j' < p} (-1)^{i'+j'} \partial_{j'} \partial_{i'} \varphi + \sum_{0 \leq i \leq j < p} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\partial^{p-1} \circ \partial^p = 0$, para todo $p > 0$. □

Em decorrência da Proposição 2.6 temos que a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_p(X, R) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X, R) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é uma sequência semi-exata. Por convenção, $\partial: S_0(X, R) \rightarrow 0$ é o homomorfismo nulo.

Tais sequências são chamadas complexos de cadeias e denotadas por $\{S_n(X), \partial\}$.

Desde que ∂ é um homomorfismo, seu núcleo e sua imagem são subgrupos de $S_n(X, R)$ e $S_{n-1}(X, R)$ respectivamente, os quais serão denotados por

$$\begin{aligned} Z_n(X, R) &= \{\alpha \in S_n(X, R); \partial(\alpha) = 0\} \\ B_n(X, R) &= \{\beta \in S_n(X, R); \partial(\alpha) = \beta, \alpha \in S_{n+1}(X, R)\} \end{aligned}$$

Os elementos de $Z_n(X, R)$ são chamados de n -ciclos, enquanto os elementos de $B_n(X, R)$ são chamados de n -bordos.

Note que, sendo a sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_p(X, R) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X, R) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

semi-exata, temos que $B_n(X, R) \subset Z_n(X, R)$ e portanto podemos definir o grupo quociente

$$H_n(X, R) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

denominado n -ésimo grupo de homologia singular de X com coeficientes em R .

Sejam X e Y espaços topológicos arbitrários e tome $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua qualquer. Iremos construir uma aplicação em nível de homologia a partir da aplicação f tomada.

Inicialmente, faremos a construção nas cadeias de R -módulos, definindo $(f_n)_\# : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ por

$$(f_n)_\# \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (f \circ \varphi_i), \text{ onde } \varphi_i \in C_n(X), \text{ para todo } i = 1, \dots, r.$$

Mostremos que $(f_n)_\#$ é uma aplicação de cadeias, ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_n(X, R) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(X, R) \\ (f_n)_\# \downarrow & & \downarrow (f_{n-1})_\# \\ S_n(Y, R) & \xrightarrow{\partial} & S_{n-1}(Y, R) \end{array}$$

é comutativo.

Pois bem, desde que $f \circ \partial_j(\varphi) : \sigma_{n-1} \rightarrow Y$ e $\partial_j(f \circ \varphi) : \sigma_{n-1} \rightarrow Y$ são $(n-1)$ -simplexos singulares em Y , com $\varphi \in C_n(X)$, então

$$f \circ \partial(\varphi)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(\varphi(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1})) = \partial(f \circ \varphi)(t_0, \dots, t_{n-1})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\partial \circ (f_n)_\# \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i \right) &= \partial \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i (f \circ \varphi_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^r \alpha_i \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_j (f \circ \varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_i \partial_j (f \circ \varphi_i) \\
&= (f_n)_\# \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_i \partial_j (\varphi_i) \right) \\
&= (f_n)_\# \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_j \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i \right) \right) \\
&= (f_n)_\# \left(\partial \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i \right) \right)
\end{aligned}$$

Deste modo, temos que $(f_n)_\#(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$ e $(f_n)_\#(B_n(X)) \subset B_n(Y)$.

Portanto, para todo $n \geq 0$, $(f_n)_\#$ induz um homomorfismo $(f_n)_* : H_n(X, R) \rightarrow H_n(Y, R)$, dado por

$$(f_n)_* (\varphi + B_n(X)) = (f_n)_\#(\varphi) + B_n(Y)$$

onde $\varphi \in Z_n(X, R)$.

Note que se $\varphi + B_n(X) = \varphi' + B_n(X)$, então $\varphi - \varphi' \in B_n(X)$ e, conseqüentemente, $(f_n)_\#(\varphi - \varphi') \in B_n(Y)$, ou seja, $(f_n)_\#(\varphi) - (f_n)_\#(\varphi') \in B_n(Y)$. Deste modo, temos

$$(f_n)_\#(\varphi) + B_n(Y) = (f_n)_\#(\varphi') + B_n(Y)$$

e, portanto, $(f_n)_* (\varphi + B_n(X)) = (f_n)_* (\varphi' + B_n(X))$, o que mostra que $(f_n)_*$ está bem-definida.

Ainda, seja $g : Y \rightarrow Z$ uma aplicação contínua qualquer, então, para todo $n \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
((g \circ f)_n)_* \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i + B_n(X) \right) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (g \circ f(\varphi_i)) + B_n(Z) \\
&= (g_n)_* \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i (f \circ \varphi_i) + B_n(Y) \right) \\
&= (g_n)_* \circ (f_n)_* \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i + B_n(X) \right)
\end{aligned}$$

Agora, se considerarmos a identidade $Id_X : X \rightarrow X$, para todo $n \geq 0$, temos

$$(Id_n)_* \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i + B_n(X) \right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i + B_n(X) = Id_{H_n(X)} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \varphi_i + B_n(X) \right)$$

Exemplo 2.7. Seja X um espaço constituído de um único ponto, digamos $X = \{x\}$. Para cada $n \geq 0$, existe um único n -simplexo singular $\varphi_n : \sigma_n \rightarrow \{x\}$.

Como $C_n(\{x\}) = \{\varphi_n\}$, segue que $S_n(\{x\}, R) = \{k\varphi_n; k \in R\}$, ou seja, no complexo de cadeias

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_1(\{x\}, R) \xrightarrow{\partial} S_0(\{x\}, R) \xrightarrow{\partial} 0$$

cada $S_n(\{x\}, R)$ é um grupo cíclico infinito gerado por $\varphi_n \in C_n(\{x\})$. Ainda, $\partial_i \varphi_n = \varphi_{n-1}$, uma vez que $\partial_i \varphi_n \in C_{n-1}(\{x\})$. Deste modo

$$\partial \varphi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \varphi_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi_{n-1}$$

donde concluimos, para $n \geq 0$,

$$\partial\varphi_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ ímpar ou } n = 0 \\ \varphi_{n-1} & , \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$$

Calculemos agora $Z_n(\{x\}, R)$. Se n for ímpar ou nulo, então $\partial\varphi_n = 0$ e, conseqüentemente, $\text{Ker}(\partial) = S_n(\{x\}, R)$, uma vez que $S_n(\{x\}, R) = R\varphi_n$.

Se n for par, temos que ∂ é injetora, isto é, $Z_n(\{x\}, R) = \text{Ker}(\partial) = 0$, já que $\partial\varphi_n = 0 \Leftrightarrow \varphi_{n-1} = 0$.

Com isso, temos

$$Z_n(\{x\}, R) = \begin{cases} S_n(\{x\}, R) & , \text{ se } n \text{ ímpar ou } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$$

Vejamos agora $B_n(\{x\}, R)$. Se n for ímpar, então $n+1$ é par e, conseqüentemente,

$$B_n(\{x\}, R) = \partial(S_{n+1}(\{x\}, R)) = S_n(\{x\}, R)$$

Agora, se n for par ou nulo, então $n+1$ é ímpar e

$$B_n(\{x\}, R) = \partial(S_{n+1}(\{x\}, R)) = 0$$

Logo,

$$B_n(\{x\}, R) = \begin{cases} S_n(\{x\}, R) & , \text{ se } n \text{ ímpar} \\ 0 & , \text{ se } n \text{ par ou } n = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$H_n(\{x\}, R) = \begin{cases} R & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

Proposição 2.8. *Se X é um espaço topológico conexo por caminhos, então $H_0(X, R) \approx R$.*

Demonstração: Consideremos o complexo de cadeias

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_1(\{x\}, R) \xrightarrow{\partial} S_0(\{x\}, R) \xrightarrow{\partial} 0$$

Note que $Z_0(X, R) = \text{Ker}(\partial_{(0)}) = S_0(X, R)$, ou seja, $Z_0(X, R)$ é o R -módulo livre gerado por $C_0(X) = \{\varphi : \sigma_0 \rightarrow X\} = X$. Logo, temos

$$H_0(X, R) = \frac{Z_0(X, R)}{B_0(X, R)} = \frac{S_0(X, R)}{B_0(X, R)}$$

Dado $\alpha \in S_0(X, R)$, temos que α é escrito da forma

$$\alpha = \sum_{x \in X} n_x \cdot x$$

onde $n_x = 0$ a menos de um número finito de x . Assim, podemos escrever

$$\alpha = \sum_{i=1}^s r_i x_i$$

Para demonstrar tal resultado, basta definirmos um homomorfismo $f : S_0(X, R) \rightarrow R$ tal que $\text{Ker}(f) = B_0(X, R)$ e aplicar o Primeiro Teorema do Isomorfismo.

Pois bem, para cada $\alpha = \sum_{i=1}^s r_i x_i \in S_0(X, R)$ defina $f : S_0(X, R) \rightarrow R$ por $f(\alpha) = \sum_{i=1}^s r_i$. Inicialmente, observe que f é um homomorfismo sobrejetor, pois dados $\alpha, \theta \in S_0(X, R)$ e $u \in R$ arbitrários, com $\alpha = \sum_{i=1}^s r_i x_i$ e $\theta = \sum_{i=1}^t q_i x_i$, e supondo sem perda de generalidade $s \geq t$, temos

$$u\alpha + \theta = u \sum_{i=1}^s r_i x_i + \sum_{i=1}^t q_i x_i = \sum_{i=1}^s u r_i x_i + \sum_{i=1}^t q_i x_i = \sum_{i=1}^s (u r_i x_i + q_i x_i) = \sum_{i=1}^s (u r_i + q_i) x_i$$

onde $q_i = 0$, para $t < i \leq s$.

Assim,

$$\begin{aligned} f(u\alpha + \theta) &= f\left(\sum_{i=1}^s (u r_i + q_i) x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^s (u r_i + q_i) \\ &= u \sum_{i=1}^s r_i + \sum_{i=1}^t q_i \\ &= u f(\alpha) + f(\theta) \end{aligned}$$

Ainda, dado $r \in R$ qualquer, tomando $r x_0 \in S_0(X, R)$, temos $f(r x_0) = r$, isto é, f é sobrejetora

Finalmente, dado $\beta \in B_0(X, R)$, segue que $\beta = \partial\left(\sum_{i=1}^s r_i \varphi_i\right)$, onde $\sum_{i=1}^s r_i \varphi_i \in S_1(X, R)$ e $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow X$ é contínua. Logo,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= f\left(\partial\left(\sum_{i=1}^s r_i \varphi_i\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^s r_i (\partial_0 - \partial_1) \varphi_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^s r_i (\partial_0 \varphi_i - \partial_1 \varphi_i)\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^s r_i (\varphi_i(1) - \varphi_i(0))\right) \\ &= \sum_{i=1}^s r_i (f(\varphi_i(1)) - f(\varphi_i(0))) \\ &= \sum_{i=1}^s (r_i - r_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto, $\beta \in \text{Ker}(f)$. Logo $B_0(X, R) \subset \text{Ker}(f)$.

Reciprocamente, seja $r_1 x_1 + \dots + r_s x_s \in \text{Ker}(f)$, ou seja, $r_1 + \dots + r_s = 0$.

Fixemos um ponto $a \in X$. Para cada $i = 1, \dots, s$, seja $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho ligando o ponto a fixado ao ponto x_i . Tal caminho existe desde que X é conexo por caminhos.

Tome $\gamma = r_1\varphi_1 + \dots + r_s\varphi_s \in S_1(X, R)$. Então

$$\begin{aligned}
 \partial\gamma &= \partial(r_1\varphi_1 + \dots + r_s\varphi_s) \\
 &= \sum_{i=1}^s r_i(\partial_0 - \partial_1)(\varphi_i) \\
 &= \sum_{i=1}^s r_i(\partial_0(\varphi_i) - \partial_1(\varphi_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^s r_i(\varphi_i(1) - \varphi_i(0)) \\
 &= \sum_{i=1}^s r_i(x_i - a) \\
 &= \sum_{i=1}^s r_i x_i - \sum_{i=1}^s r_i a \\
 &= \sum_{i=1}^s r_i x_i
 \end{aligned}$$

Logo, $r_1x_1 + \dots + r_sx_s \in B_0(X, R)$ e, portanto, $B_0(X, R) = \text{Ker}(f)$.

Desde que f é sobrejetora, segue do Primeiro Teorema do Isomorfismo que

$$H_0(X, R) = \frac{S_0(X, R)}{B_0(X)} = \frac{S_0(X, R)}{\text{Ker}(f)} \approx \text{Im}(f) = R$$

□

Proposição 2.9. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $g: Y \rightarrow X$ o inverso homotópico da f . Logo, $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{H_n(Y)}$. Também, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{H_n(X)}$.

Portanto, f_* é um isomorfismo. □

O próximo resultado nos dá informações sobre um importante espaço, as esferas unitárias de dimensão n . A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [15].

Proposição 2.10. *Sejam R um anel comutativo com unidade qualquer e \mathbb{S}^n a esfera unitária de dimensão n . Então*

$$\begin{aligned}
 a) \quad H_j(\mathbb{S}^0, R) &= \begin{cases} R \oplus R & , \quad j = 0 \\ 0 & , \quad j \neq 0 \end{cases} \\
 b) \quad H_j(\mathbb{S}^n, R) &= \begin{cases} R & , \quad j = 0 \text{ ou } j = n \\ 0 & , \quad j \text{ caso contrário} \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.3 Homologia Relativa

Aqui, X representará um espaço topológico arbitrário e R uma anel comutativo com unidade.

Considere A um subespaço de X . Desde que $S_n(A, R) \subset S_n(X, R)$, para todo $n \geq 0$, e $S_n(X, R)$ é um R -módulo, podemos fazer o grupo quociente $\frac{S_n(X, R)}{S_n(A, R)}$, o qual será denotado por $S_n(X, A)$. Portanto, as cadeias em A são triviais em $S_n(X, A)$. Desde que o operador bordo $\partial : S_n(X, R) \rightarrow S_{n-1}(X, R)$ leva $S_n(A, R)$ em $S_{n-1}(A, R)$, este induz um operador bordo quociente $\bar{\partial} : S_n(X, A) \rightarrow S_{n-1}(X, A)$ dado por $\bar{\partial}(\bar{\alpha}) = \partial(\alpha) + S_{n-1}(A, R)$, para todo $\bar{\alpha} \in S_n(X, A)$.

Deste modo, como $\partial \circ \partial = 0$, segue que o operador bordo relativo preserva a relação $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. Assim, temos a seguinte sequência semi-exata

$$\cdots \rightarrow S_n(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}} S_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}} S_{n-2}(X, A) \rightarrow \cdots$$

De modo análogo ao realizado na seção anterior, vamos representar

$$Z_n(X, A) = \text{Ker}(\bar{\partial}) = \{\bar{\alpha} \in S_n(X, A); \bar{\partial}(\bar{\alpha}) \in S_n(A)\}$$

e

$$B_n(X, A) = \text{Im}(\bar{\partial}) = \{\bar{\alpha} \in S_n(X, A); \text{existe } \bar{\beta} \in S_{n+1}(X, A) \text{ tal que } \bar{\partial}(\bar{\beta}) = \bar{\alpha}\}$$

Novamente, os elementos de $Z_n(X, A)$ são chamados n -ciclos e os elementos de $B_n(X, A)$ são chamados n -bordos. Como a sequência acima é semi-exata, segue que $B_n(X, A) \subset Z_n(X, A)$, o que nos permite a seguinte definição

Definição 2.5. Definimos os **grupos de homologia relativa** como sendo o grupo quociente

$$H_n(X, A) := \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}$$

Os elementos de $H_n(X, A)$ serão da forma $\bar{\alpha} + B_n(X, A)$, onde $\bar{\alpha} \in Z_n(X, A)$.

2.4 Cohomologia

Construiremos agora os complexos de cohomologia, utilizando a construção realizada para a homologia. Para isto, necessitaremos do functor Hom , o qual será definido ao longo desta seção.

Considere R um anel comutativo com unidade qualquer, X e Y R -módulos. Denotamos por $\text{Hom}_R(X, Y)$ o seguinte conjunto

$$\text{Hom}_R(X, Y) := \{\varphi : X \rightarrow Y; \varphi \text{ é um } R\text{-homomorfismo}\}$$

Quando não houver ambiguidade, iremos omitir o anel na notação.

Dados dois homomorfismos $\varphi, \psi \in \text{Hom}(X, Y)$ arbitrários e um escalar $r \in R$ qualquer, definimos o adição $+$ e o produto por escalar \cdot em $\text{Hom}(X, Y)$ por $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ e $(r \cdot \varphi)(x) = r(\varphi(x))$, para todo $x \in X$.

Deste modo, com a adição estabelecida acima, $\text{Hom}(X, Y)$ se torna um grupo abeliano. Além disso, a associação $(r, \varphi) \mapsto r \cdot \varphi$ de $R \times \text{Hom}(X, Y)$ em $\text{Hom}(X, Y)$ faz deste um R -módulo.

Definição 2.6. O R -módulo $\text{Hom}(X, R)$ é chamado **módulo de todos os R -homomorfismos** de X em Y .

Proposição 2.11. Para todo R -módulo X , sempre vale que $\text{Hom}(R, X)$ é isomorfo a X .

Demonstração: Com efeito, defina a função $h : \text{Hom}(R, X) \rightarrow X$ por $h(\varphi) = \varphi(1)$, para todo $\varphi \in \text{Hom}(R, X)$, onde $1 \in R$ denota a unidade do anel. Note que h é um homomorfismo, uma vez que dados $\varphi, \psi \in \text{Hom}(R, X)$ e $r \in R$ quaisquer, temos

$$h(r \cdot \varphi + \psi) = (r \cdot \varphi + \psi)(1) = (r \cdot \varphi)(1) + \psi(1) = r(\varphi(1)) + \psi(1) = rh(\varphi) + h(\psi)$$

Agora, devemos mostrar que h é um isomorfismo. Sejam $\varphi, \psi \in \text{Hom}(R, X)$ tais que $\varphi \neq \psi$. Desde que R é gerado por 1, segue que $\varphi(1) \neq \psi(1)$, pois caso contrário, para todo $r \in R$, teríamos

$$\varphi(r) = \varphi(1r) = r\varphi(1) = r\psi(1) = \psi(1r) = \psi(r)$$

o que é um absurdo pela hipótese. Portanto, $\varphi(1) \neq \psi(1)$ implica que $h(\varphi) \neq h(\psi)$, isto é, h é injetora.

Ainda, dado $x \in X$ qualquer, como X é um R -módulo, segue que $1 \cdot x = x$. Defina $i : R \rightarrow X$ por $i(r) = r \cdot x$, para todo $r \in R$. Assim,

$$h(i) = i(1) = 1 \cdot x = x$$

ou seja, h é sobrejetora.

Portanto, h é um isomorfismo. □

Agora, sejam X, X', Y, Y' R -módulos quaisquer e considere $f \in \text{Hom}(X, X')$, $g \in \text{Hom}(Y', Y)$ arbitrários. Defina a aplicação $\text{Hom}(f, g) : \text{Hom}(X', Y') \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$ por $\text{Hom}(f, g)(\varphi) = g \circ \varphi \circ f$, para todo $\varphi \in \text{Hom}(X', Y')$. Ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Hom}(f, g)(\varphi)} & Y \\ f \downarrow & & \uparrow g \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & Y' \end{array}$$

Note que $\text{Hom}(f, g)$ é um homomorfismo, pois dados $\varphi, \psi \in \text{Hom}(X', Y')$ e $r \in R$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}(f, g)(r \cdot \varphi + \psi) &= g \circ (r \cdot \varphi + \psi) \circ f \\ &= g \circ [(r \cdot \varphi) \circ f + \psi \circ f] \\ &= g \circ [(r \cdot \varphi) \circ f] + g \circ \psi \circ f \\ &= r(g \circ \varphi \circ f) + g \circ \psi \circ f \\ &= r\text{Hom}(f, g)(\varphi) + \text{Hom}(f, g)(\psi) \end{aligned}$$

Proposição 2.12. *O homomorfismo Hom satisfaz:*

i) $\text{Hom}(Id_X, Id_Y) = Id_{\text{Hom}(X, Y)}$;

ii) Dados $f \in \text{Hom}(X, X')$, $f' \in \text{Hom}(X', X'')$, $g \in \text{Hom}(Y', Y)$ e $g' \in \text{Hom}(Y'', Y')$, segue que

$$\text{Hom}(f' \circ f, g \circ g') = \text{Hom}(f, g) \circ \text{Hom}(f', g')$$

Demonstração: i) Dado qualquer $\varphi \in \text{Hom}(X, Y)$, segue que

$$\text{Hom}(Id_X, Id_Y)(\varphi) = Id_Y \circ \varphi \circ Id_X = \varphi = Id_{\text{Hom}(X, Y)}(\varphi)$$

ii) Seja $\psi \in \text{Hom}(X'', Y'')$ qualquer. Então

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(f' \circ f, g \circ g')(\psi) &= (g \circ g') \circ \psi \circ (f' \circ f) \\
 &= g \circ (g' \circ \psi f') \circ f \\
 &= g \circ \text{Hom}(f', g')(\psi) \circ f \\
 &= \text{Hom}(f, g) [\text{Hom}(f', g')(\psi)] \\
 &= \text{Hom}(f, g) \circ \text{Hom}(f', g')(\psi)
 \end{aligned}$$

□

Definido o homomorfismo Hom e visto algumas de suas propriedades, estamos aptos em introduzir a cohomologia.

Seja

$$\cdots \rightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

um complexo de cadeias de um R -módulo X arbitrário.

Considere Q um R -módulo arbitrário e o homomorfismo identidade $\text{Id}_Q : Q \rightarrow Q$. Denotando $\text{Hom}(S_n(X); Q)$ por $S^n(X; Q)$, definimos um homomorfismo

$$\delta : S^n(X; Q) \rightarrow S^{n+1}(X; Q)$$

por $\delta(\varphi) = \text{Hom}(\partial, \text{Id}_Q)(\varphi) = \text{Id}_Q \circ \varphi \circ \partial$, onde $\varphi \in S^n(X; Q)$ é um homomorfismo de cadeias.

Note que δ é tal que

$$\delta \circ \delta = \text{Hom}(\partial, \text{Id}_Q) \circ \text{Hom}(\partial, \text{Id}_Q) = \text{Hom}(\partial \circ \partial, \text{Id}_Q \circ \text{Id}_Q) = \text{Hom}(0_S, \text{Id}_Q) = 0$$

onde 0_S é o homomorfismo nulo da cadeia S e $0 : S \rightarrow Q$ é o homomorfismo nulo da cadeia S no R -módulo Q .

Deste modo, construímos um novo complexo de cadeias

$$\cdots \rightarrow S^{n-1}(X; Q) \xrightarrow{\delta} S^n(X; Q) \xrightarrow{\delta} S^{n+1}(X; Q) \rightarrow \cdots$$

Assim como feito em homologia, convencionamos as seguinte notações de alguns submódulos: $Z^n(X; Q) = \text{Ker}(\delta)$ e $B^n(X; Q) = \text{Im}(\delta)$. Os elementos de $Z^n(X; Q)$ são chamados de n -cociclos e os elementos de $B^n(X; Q)$ são chamados n -cobordos.

Definição 2.7. Definimos o n -ésimo grupo de cohomologia de X com coeficientes em Q , o conjunto quociente

$$H^n(X; Q) := \frac{Z^n(X; Q)}{B^n(X; Q)}$$

De modo análogo a homologia relativa, podemos construir a cohomologia relativa, utilizando apenas o dual da homologia.

Assim, dado A um subconjunto do R -módulo X , denotamos $H^n(X, A; Q)$ o n -ésimo grupo de cohomologia de X em relação à A com coeficientes em Q .

2.5 Produtos Cup e Cross

Nesta seção, iremos introduzir um produto entre duas classes de cohomologia. Iniciaremos com a seguinte definição

Definição 2.8. Seja X um espaço topológico junto com os R -módulos de cohomologia $H^k(X; R)$. Definimos o **produto cup** por

$$\begin{aligned} \smile: H^k(X; R) \times H^l(X; R) &\rightarrow H^{k+l}(X; R) \\ ([\varphi] \quad , \quad [\psi]) &\mapsto [\varphi \smile \psi] \end{aligned}$$

onde $\varphi: S^k(X, R) \rightarrow R$ e $\psi: S^l(X, R) \rightarrow R$ são cociclos, e $\varphi \smile \psi: S^{k+l}(X, R) \rightarrow R$ é o cociclo dado por

$$\varphi \smile \psi(\theta) = (\varphi(\theta \gamma_k^{k+l}))(\psi(\theta \gamma_l^{k+l}))$$

com $\theta \in C_{k+l}(X)$, $\gamma_k^{k+l}: \sigma_k \rightarrow \sigma_{k+l}$ e $\gamma_l^{k+l}: \sigma_l \rightarrow \sigma_{k+l}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_k^{k+l}(t_0, \dots, t_k) &= (t_0, \dots, t_k, 0, \dots, 0) \\ \gamma_l^{k+l}(t_0, \dots, t_l) &= (0, \dots, 0, t_0, \dots, t_l) \end{aligned}$$

O produto *cup* possui a seguinte propriedade:

Teorema 2.13. *Sejam $\alpha \in H^k(X; R)$ e $\beta \in H^l(X; R)$ quaisquer. Então $\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha$.*

Demonstração: ([4] p. 215-217)

Por fim, definimos o produto '*cross*' através do produto '*cup*'.

Definição 2.9. Dados dois espaços topológicos X , Y e um anel comutativo com unidade R , definimos o **produto cross** como o homomorfismo

$$\begin{aligned} \mu: H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) &\rightarrow H^*(X \times Y; R) \\ u \otimes v &\mapsto u \times v \end{aligned}$$

onde $u \times v = p_1^*(u) \smile p_2^*(v)$, onde $p_1: X \times Y \rightarrow X$ e $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ são as projeções.

Capítulo 3

Ações sobre Espaços Topológicos

3.1 Ações de Grupos

Definição 3.1. Sejam um grupo topológico G e um espaço topológico X . Uma ação de G em X é um homomorfismo $\rho: G \rightarrow \text{Homeo}(X)$, onde

$$\text{Homeo}(X) = \{h: X \rightarrow X; h \text{ é um homeomorfismo}\}$$

Deste modo, cada $g \in G$ é associado a um homeomorfismo $\rho(g) = g: X \rightarrow X$.

Para todo $x \in X$ e cada $g \in G$, denotaremos $\rho(g)(x) = g(x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

Quando X está equipado com uma ação de G , X é dito ser um **G -espaço**.

Como uma ação $\rho: G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ é um homomorfismo, segue que:

- Sejam $g_1, g_2 \in G$ arbitrários e $x \in X$ qualquer. Então $\rho(g_1), \rho(g_2): X \rightarrow X$ e $\rho(g_1)[\rho(g_2)(x)] \in X$ é tal que $\rho(g_1)[\rho(g_2)(x)] = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(x) = \rho(g_1 \cdot g_2)(x)$.
- Para o elemento identidade $e_G \in G$, temos $\rho(e_G) = Id_X: X \rightarrow X$, uma vez que $\rho(e_G) = e_{\text{Homeo}(X)} = Id_X$.
- Dados $g, g^{-1} \in G$ tais que $g \cdot g^{-1} = e_G$, temos

$$Id_X = \rho(e_G) = \rho(g \cdot g^{-1}) = \rho(g) \cdot \rho(g^{-1})$$

ou seja, têm-se $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$

Dizemos que uma ação é **livre** se, para algum $x \in X$, existir $g \in G$ tal que $gx = x$, então $g = 1$.

Quando a ação de G sobre X é livre, X é dito ser um **G -espaço livre**.

Seja $X^* \subset X \times X$ o subespaço formado por todos os pares $(x, gx) \in X \times X$, onde $x \in X$ e $g \in G$ são arbitrários. Existe uma função $\beta: X^* \rightarrow G$ tal que $x\beta(x, g) = g$, para todo par $(x, g) \in X^*$. A aplicação β é chamada **translação**.

Proposição 3.1. *Seja $\beta: X^* \rightarrow G$ uma translação. Então β possui as seguintes propriedades:*

P1) $\beta(x, x) = 1$, para todo $x \in X$;

P2) $\beta(x, x') \cdot \beta(x', x'') = \beta(x, x'')$, para todo $x, x', x'' \in X$;

P3) $\beta(x', x) = \beta(x, x')^{-1}$, para todo $x, x' \in X$.

Demonstração: P1) Desde que β é uma translação, segue que $x\beta(x, x) = x$ e, conseqüentemente, $\beta(x, x) = e_G$, uma vez que X é um G -espaço livre.

P2) Note que,

$$x\beta(x, x'') = x'' = x'\beta(x', x'') = x\beta(x, x') \cdot \beta(x', x'')$$

donde segue que $\beta(x, x'') = \beta(x, x') \cdot \beta(x', x'')$.

P3) Do item P2), segue que

$$\beta(x, x') \cdot \beta(x', x) = \beta(x, x)$$

e pelo item P1), temos

$$\beta(x, x) = e_G$$

Portanto, $\beta(x', x) = \beta(x, x')^{-1}$. □

Definição 3.2. Uma aplicação $h: X \rightarrow Y$ entre G -espaços é um G -**morfismo** se $h(gx) = gh(x)$, para todo $x \in X$ e $g \in G$. Denotamos o conjunto de todos G -morfismos de X em Y por $M_G(X, Y)$.

Sejam $h: X \rightarrow Y$ e $k: Y \rightarrow Z$ G -morfismos, então, para todo $x \in X$ e $s \in G$, segue que

$$k \circ h(gx) = k(h(gx)) = k(gh(x)) = gk(h(x)) = g[k \circ h(x)]$$

ou seja, a composição de G -morfismos é um G -morfismo.

Denotaremos por sp_G a categoria constituída pelos G -espaços e os G -morfismos.

Definição 3.3. Sejam G um grupo topológico e X um espaço topológico. Dado $x \in X$ arbitrário, definimos a **órbita** de x em G associada a ação $\rho: G \rightarrow Homeo(X)$ por

$$Gx = \{\rho(g)(x) = g \cdot x \in X; g \in G\}$$

Dados $x, y \in X$ arbitrários, estabelecemos a seguinte relação: $x \sim y$, se existir $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Note que esta relação é uma relação de equivalência, pois:

i) Como $e_G \in G$ é o elemento identidade de G , segue que $e_G \cdot x = x$, para todo $x \in X$.

ii) Se $x, y \in X$ são tais que existe $g \in G$, tal que $y = g \cdot x$, então tomando o elemento $g^{-1} \in G$, segue que $g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} \cdot g) \cdot x = e_G \cdot x = x$.

iii) Sejam $x, y, z \in X$ e $g_1, g_2 \in G$ tais que $y = g_1 \cdot x$ e $z = g_2 \cdot y$. Então,

$$z = g_2 \cdot y = g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) x$$

Deste modo, cada órbita é uma classe de equivalência da relação de equivalência estabelecida acima. Assim, segue que duas órbitas coincidem ou são disjuntas.

Seja X um G -espaço, Dizemos que $x, x' \in X$ são G -**equivalentes** quando suas órbitas coincidirem. O conjunto de todas as órbitas de X em G com a topologia quociente será denotado por $X \text{ mod } G$.

Um conjunto não-vazio $Y \subset X$ é dito ser invariante pela ação $\rho: G \rightarrow Homeo(X)$ se para todo $y \in Y$ e todo $g \in G$, têm-se que $g \cdot y \in Y$, ou seja, vale $Gy \subset Y$.

Se X é uma órbita de G , isto é, se para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$, dizemos que esta ação é transitiva ou que o grupo G é transitivo sobre X .

Definição 3.4. Seja G uma ação sobre o espaço topológico X . Dado $x \in X$ qualquer, definimos o **subgrupo de isotropia** de x em G como o conjunto

$$G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\}$$

Este subgrupo também é chamado de estabilizador de x .

Note que dados $x, y \in X$ tais que $y = g \cdot x$, para algum $g \in G$, então $G_y = gG_xg^{-1}$. De fato, se $h \in G_y$, então $h \cdot y = y$, ou seja, $(hg) \cdot x = g \cdot x$. Multiplicando ambos os lados por g^{-1} obtemos $(g^{-1}hg) \cdot x = x$, o que ocorre apenas se $g^{-1}hg \in G_x$ e, conseqüentemente, $h \in gG_xg^{-1}$.

Reciprocamente, dado $gfg^{-1} \in gG_xg^{-1}$ qualquer, onde $f \in G_x$, temos

$$(gfg^{-1}) \cdot y = (gfg^{-1})(g \cdot x) = (gf)(g^{-1}g)x = (gf) \cdot x = g(f \cdot x) = g \cdot x = y$$

Com isso, temos que em uma ação transitiva os grupos de isotropia são conjugados entre si.

Veremos a seguir um exemplo de ação transitiva. Para isto, recordemos a definição de grupo ortogonal.

Considere $M_n(\mathbb{R})$ o grupo das matrizes reais invertíveis de ordem n , com a operação multiplicação de matrizes. Denotamos por $O(n)$ o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ formado por

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \cdot A^t = Id_n\}$$

ou seja, $O(n)$ é o subgrupo formado pelas matrizes reais invertíveis de ordem n , cuja matriz inversa coincide com a matriz transposta. $O(n)$ é chamado de **grupo ortogonal**.

Note que, toda matriz $A \in O(n)$ possui $\det(A) = \pm 1$. Para verificar isto, recordemos duas propriedades sobre o determinante de matrizes, a saber,

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, para $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ arbitrários.
- $\det(A^t) = \det(A)$, para todo $A \in M_n(\mathbb{R})$

Assim,

$$1 = \det(Id_n) = \det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(A) \cdot \det(A)$$

o que conclui nossa afirmação.

Deste modo, $O(n)$ é um grupo formado por duas componentes conexas, sendo uma formada pelas matrizes de determinante 1, e a outra componente formada pelas matrizes de determinante -1 .

Denotaremos

$$SO(n) := \{A \in O(n); \det(A) = 1\}$$

a componente que contém a matriz identidade e chamaremos este subconjunto de **grupo ortogonal especial**.

Exemplo 3.2. $O(2)$ atua transitivamente sobre a esfera \mathbb{S}^1 . Com efeito, dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{S}^1$ arbitrários, sejam α o ângulo entre o eixo das abscissas e o ponto (x_0, y_0) e θ o ângulo entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . Com isso, temos $x_0 = \cos(\alpha)$ e $y_0 = \sin(\alpha)$. Além disso, segue que

$$\begin{aligned} x_1 = \cos(\alpha + \theta) &= \cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta) = x_0\cos(\theta) - y_0\sin(\theta) \\ y_1 = \sin(\alpha + \theta) &= \sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\theta) = y_0\cos(\theta) + x_0\sin(\theta) \end{aligned}$$

Deste modo, tomando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

segue que $(x_1, y_1) = A \cdot (x_0, y_0)$.

Ainda,

$$\det(A) = \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$$

donde segue que $A \in O(2)$.

De modo geral, $O(n)$ atua transitivamente sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} , uma vez que dados $x_0, x_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ arbitrários, existe uma rotação que leva x_0 a x_1 . Esta rotação tem uma matriz ortonormal associada, já que $\|x_0\| = 1 = \|x_1\|$. Assim, ocorre que a inversa de tal matriz coincide com sua transposta, concluindo o resultado.

As matrizes rotação ortonormais se dividem em dois grupos, as matrizes próprias (cujo determinante é igual a 1), e as impróprias (determinante igual a -1). Sendo assim, $SO(n)$ também atua transitivamente sobre \mathbb{S}^{n-1} .

Exploraremos mais as ações transitivas na próxima seção.

3.1.1 Ações de Recobrimento

Definição 3.5. Um recobrimento do espaço X é um espaço topológico \tilde{X} junto com uma função $p: \tilde{X} \rightarrow X$ que satisfaz:

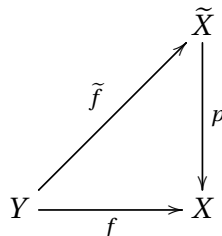
Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X tal que, para cada α , $p^{-1}(U_\alpha)$ é uma união disjunta de conjuntos abertos em \tilde{X} , cada um dos quais é homeomorfo à U_α via p ;

Essa união pode ser vazia, então p não é necessariamente sobrejetiva.

Os homeomorfismos $f: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, tais que $p \circ f = p$, são chamados '**deck transformations**'. Estes homeomorfismos formam um grupo $G(\tilde{X})$ em relação à composição, chamado '**deck transformation group**'.

Definição 3.6. Sejam $p: \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de cobertura de X e uma aplicação $f: Y \rightarrow X$, onde Y é um espaço topológico. Um levantamento de f é uma aplicação contínua $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$

De outro modo, temos o seguinte diagrama comutativo



Os homeomorfismos de $G(\tilde{X})$ possuem a propriedade de levantamento único, que será enunciada a seguir:

Proposição 3.3. *Sejam $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento e $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação, onde Y é um espaço topológico. Se $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ são dois levantamentos de f que coincidem em um ponto e Y é conexo, então $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Demonstração: Considere $A = \{x \in Y; \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$. Note que A não é vazio, uma vez que os levantamentos coincidem em um ponto. Mostremos que A é um conjunto aberto e fechado de Y e, como Y é conexo, concluiremos que $A = Y$.

Pois bem, para $y \in Y$ arbitrário, seja $U \subset X$ uma vizinhança de $f(y)$. Logo, $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta de conjuntos abertos \tilde{U}_α em \tilde{X} , cada um homeomorfo a U por p . Seja \tilde{U}_1 o aberto que contém $\tilde{f}_1(y)$ e \tilde{U}_2 o aberto que contém $\tilde{f}_2(y)$.

Como \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 são contínuas, existe $V \subset Y$ uma vizinhança de y que é mapeada em \tilde{U}_1 por \tilde{f}_1 e mapeada em \tilde{U}_2 pela \tilde{f}_2 .

Desde que $p \circ \tilde{f}_1(y) = f(y) = p \circ \tilde{f}_2(y)$, segue que, se $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$, então $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$. Logo, $\tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2$ ao longo da vizinhança V e, conseqüentemente, A é fechado por ser o complementar da união dessas vizinhanças.

Por outro lado, se $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, então $\tilde{f}_1(y) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$, e conseqüentemente, $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$, uma vez que \tilde{U}_1 e \tilde{U}_2 são abertos na união disjunta em \tilde{X} . Logo, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$, uma vez que $p \circ \tilde{f}_1(y) = p \circ \tilde{f}_2(y)$ e p é injetora em $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$. Deste modo, temos que A é a união dessas vizinhanças e, conseqüentemente, A é aberto, o que conclui o resultado. \square

A ação da deck transformation group $G(\tilde{X})$ em \tilde{X} satisfaz a seguinte condição:

Cada $x \in X$ tem uma vizinhança \tilde{U} tal que, para $f_1, f_2 \in G(\tilde{X})$ distintas, as imagens $f_1(\tilde{U})$, e $f_2(\tilde{U})$ são disjuntas. Em outras palavras, $f_1(\tilde{U}) \cap f_2(\tilde{U}) \neq \emptyset$ implica $f_1 = f_2$.

Com efeito, sejam $U \subset X$ uma vizinhança de $x \in X$ e $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ um aberto tal que $p(\tilde{U})$ é homeomorfo à U . Se $f_1(\tilde{U}) \cap f_2(\tilde{U}) \neq \emptyset$, para algum $f_1, f_2 \in G(\tilde{X})$, então existem $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{U}$ tais que $f_1(\tilde{x}_1) = f_2(\tilde{x}_2)$.

Deste modo, temos $p(f_1(\tilde{x}_1)) = p(f_2(\tilde{x}_2))$. Mas, $p = p \circ f_1$ e $p = p \circ f_2$. Então $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) \in U$. Como p é um homeomorfismo entre \tilde{U} e U , segue que $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ e, conseqüentemente, $f_1(\tilde{x}_1) = f_2(\tilde{x}_2) = f_2(\tilde{x}_1)$.

Assim, como o homeomorfismo $f_2^{-1} \circ f_1 \in G(\tilde{X})$ fixa o ponto \tilde{x}_1 , segue da Proposição 3.3 que $f_2^{-1} \circ f_1$ fixa todos os pontos, isto é, $f_2^{-1} \circ f_1 = Id_{G(\tilde{X})}$, ou seja, $f_1 = f_2$.

3.2 Espaços Homogêneos

Nesta seção estaremos interessados em apresentar e discutir resultados referente as ações transitivas. Iniciaremos com a seguinte definição

Definição 3.7. Seja X um espaço topológico não vazio e G um grupo topológico. Dizemos que X é um G -espaço se G é uma ação sobre X .

Em particular, se ação de G em X é transitiva, então X é um **espaço homogêneo**.

O Exemplo 3.2 mostra que a esfera \mathbb{S}^{n-1} é um espaço homogêneo.

Mostraremos que um espaço homogêneo também pode ser entendido como um quociente.

Inicialmente, note que para todo $x \in X$, seu grupo de isotropia G_x é um subgrupo de G . Assim, consideremos o quociente $\frac{G}{G_x}$ e a aplicação $\pi : G \rightarrow \frac{G}{G_x}$ projeção natural, dada por $\pi(g) = gG_x$, para todo $g \in G$.

Note que ação de G sobre o quociente $\frac{G}{G_x}$ é uma ação transitiva, uma vez que dados $gG_x, hG_x \in \frac{G}{G_x}$ quaisquer, tomando $hg^{-1} \in G$, temos

$$(hg^{-1}) \cdot gG_x = h \cdot (g^{-1}g)G_x = hG_x$$

Quando G é um grupo transitivo sobre X , podemos construir uma bijeção entre $\frac{G}{G_x}$ e X . Para isto, fixado $x_0 \in X$ arbitrário, defina $\pi' : G \rightarrow X$ por $\pi'(g) = g \cdot x_0$, para todo $g \in G$. Deste modo, temos para $x \in X$,

$$(\pi')^{-1}(x) = \{g \in G; g \cdot x_0 = x\} = \{g, h \in G; (gh) \cdot x_0 = x \text{ e } h \cdot x_0 = x_0\} = gG_{x_0}$$

uma vez que G atua transitivamente sobre X .

Com isto, definimos $\xi_{x_0} : \frac{G}{G_{x_0}} \rightarrow X$ por $\xi_{x_0}(gG_{x_0}) = g \cdot x_0$, para todo $gG_{x_0} \in \frac{G}{G_{x_0}}$. Note que ξ_{x_0} é uma bijeção, pois dados $hG_{x_0}, kG_{x_0} \in \frac{G}{G_{x_0}}$ tais que $\xi_{x_0}(hG_{x_0}) = \xi_{x_0}(kG_{x_0})$, então $h \cdot x_0 = k \cdot x_0$ e, conseqüentemente, $k^{-1}h \in G_{x_0}$. Logo, $hG_{x_0} = kG_{x_0}$.

Agora, dado $x \in X$ qualquer, como G é transitivo, existe $h \in G$ de modo que $x = h \cdot x_0$. Tomando $hG_{x_0} \in \frac{G}{G_{x_0}}$, temos $\xi_{x_0}(hG_{x_0}) = h \cdot x_0 = x$.

Observe que, para todo $g \in G$, temos a seguinte igualdade

$$\xi_{x_0} \circ \pi(g) = \xi_{x_0}(gG_{x_0}) = g \cdot x_0 = \pi'(g)$$

Deste modo, podemos identificar $\frac{G}{G_x}$ com X , para todo $x \in X$, quando G for compacto e X de Hausdorff ou quando π' for uma aplicação aberta.

De fato, se G for compacto, segue que $\frac{G}{G_x}$ é compacto e, como ξ_x é contínua e X é um espaço de Hausdorff, então ξ_x é uma aplicação fechada e, conseqüentemente, é um homeomorfismo.

Ainda, caso π' seja uma aplicação aberta, então para todo $B \subset \frac{G}{G_x}$ aberto, temos $\pi^{-1}(B) \subset G$ aberto e, conseqüentemente, $\pi'(\pi^{-1}(B)) \subset X$ é aberto, isto é, $\xi_x(B)$ é aberto. Portanto, ξ_x é uma aplicação aberta e, por conseqüente, é um homeomorfismo.

Exemplo 3.4. O grupo $M_n(\mathbb{R})$ é transitivo sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. De fato, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, existe uma rotação que leva x em y . A matriz associada a tal rotação é inversível, uma vez que existe a rotação de y para x . Portanto, temos que $M_n(\mathbb{R})$ é transitivo.

Desde que os subgrupos de isotropia de $M_n(\mathbb{R})$ são conjugados entre si em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, basta calcularmos o subgrupo de isotropia para $e_1 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Note que, dada $A \in M_n(\mathbb{R})$ da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

temos que $A \cdot e_1 = e_1$, onde $a = [a_{1,2} \cdots a_{1,n}]$ e $C \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Logo, temos que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é homeomorfo a $\frac{M_n(\mathbb{R})}{M_n(\mathbb{R})_{e_1}}$.

Exemplo 3.5. Afirmamos que \mathbb{S}^{n-1} é homeomorfo a $\frac{O(n)}{O(n-1)}$.

Com efeito, pelo Exemplo 3.2, temos que $O(n)$ é um grupo transitivo sobre \mathbb{S}^{n-1} e, pelas observações anteriores, segue que \mathbb{S}^{n-1} é homeomorfo ao quociente $\frac{O(n)}{O(n)_{e_1}}$, com $e_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Agora, dado $A \in O(n)_{e_1}$, do Exemplo 3.4, podemos concluir que A é da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde $B \in O(n-1)$. Deste modo, definimos um homeomorfismo de $O(n)_{e_1}$ em $O(n-1)$ que a cada $A \in O(n)_{e_1}$, associa a matriz $B \in O(n-1)$. Portanto, $O(n)_{e_1}$ é homeomorfo a $O(n-1)$ e, como \mathbb{S}^{n-1} é homeomorfo ao quociente $\frac{O(n)}{O(n)_{e_1}}$, concluímos a afirmação.

Capítulo 4

Fibrados

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre fibrados, trabalhando através de resultados e exemplos. A partir da noção de fibrados, será possível determinar a classe de Stiefel-Whitney e a classe de Euler, temas de relevância neste trabalho e que serão exploradas no próximo capítulo.

Iniciaremos nosso estudo com os fibrados vetoriais reais, que serão chamados simplesmente fibrados vetoriais, uma vez que os espaços vetoriais que serão trabalhados serão reais.

4.1 Fibrados Vetoriais

Seja B um espaço topológico fixo, o qual será chamado espaço base. Definimos um fibrado vetorial sobre B do seguinte modo:

Definição 4.1. Um **fibrado vetorial** ξ sobre $B = B(\xi)$ consiste do seguinte:

- i*) um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado espaço total;
 - ii*) uma aplicação contínua sobrejetiva $\pi : E(\xi) \rightarrow B(\xi)$ chamada aplicação projeção;
 - iii*) para cada $b \in B(\xi)$, o conjunto $\pi^{-1}(b) = \{x \in E; \pi(x) = b\}$ tem estrutura de um espaço vetorial.
- Satisfazendo a seguinte condição, chamada Condição de Trivialidade Local:

Para cada ponto $b \in B$ existem um aberto $U \subset B$ que contém b , um inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que, para cada $b_0 \in U$ a correspondência $x \rightarrow h(b_0, x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, define um isomorfismo entre o espaço vetorial \mathbb{R}^n e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

Nestas condições, dizemos que ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado vetorial, ou um fibrado vetorial, e $rank(\xi) = n$.

Observação 4.1. As operações $+$: $\pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$ e \cdot : $\pi^{-1}(b) \times \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$ que tornam $\pi^{-1}(b)$ um espaço vetorial real são definidas do seguinte modo:

Considere $e, e_1, e_2 \in \pi^{-1}(b)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer. Desde que h é um homeomorfismo, existem $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $h(b, x) = e$, $h(b, x_1) = e_1$ e $h(b, x_2) = e_2$. Sendo assim, definimos

$$\begin{aligned}e_1 + e_2 &= h(b, x_1 + x_2) \\ \alpha e &= h(b, \alpha x)\end{aligned}$$

Note que estas operações estão bem definidas, pois

$$\begin{aligned}\pi(e_1 + e_2) &= \pi(h(b, x_1 + x_2)) = \pi \circ h(b, x_1 + x_2) = b \\ \pi(\alpha e) &= \pi(h(b, \alpha x)) = \pi \circ h(b, \alpha x) = b\end{aligned}$$

uma vez que $h(b, x_1 + x_2), h(b, \alpha x) \in \pi^{-1}(b)$.

Nos próximos exemplos, a estrutura de espaço vetorial considerada será a mesma desta observação.

Definição 4.2. Chamamos o par (U, h) de **sistema de coordenadas locais** para ξ sobre $b \in B$. Quando for possível escolher U igual ao espaço básico inteiro, ξ será chamado um fibrado trivial.

Definição 4.3. O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado de **fibra** sobre $b \in B$ e será denotado por $F_b = F_b(\xi)$.

Note que o fato da aplicação π ser sobrejetiva garante que F_b nunca será vazio, embora possa ser simplesmente um único ponto.

Exemplo 4.2. Fibrado trivial

Seja B um espaço topológico arbitrário. Considere $E = B \times \mathbb{R}^n$ e $\pi : E \rightarrow B$ a projeção sobre o primeiro fator, $\pi(b, x) = b$, para todo $(b, x) \in B \times \mathbb{R}^n$. Logo, π é uma aplicação contínua e sobrejetiva. Ainda,

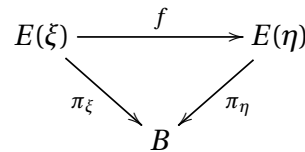
$$\pi^{-1}(B) = \{(b, x) \in B \times \mathbb{R}^n; \pi(b, x) \in B\} = B \times \mathbb{R}^n = E$$

Dado $b \in B$ qualquer, temos que B é uma vizinhança de b e então podemos tomar $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B) = B \times \mathbb{R}^n$ como sendo o homeomorfismo identidade dado por $h(b, x) = (b, x)$, para todo $(b, x) \in B \times \mathbb{R}^n$. Assim, a correspondência $x \rightarrow h(b, x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, é um isomorfismo de espaços vetoriais.

O fibrado trivial será denotado por ϵ_B^n .

Definição 4.4. Dizemos que dois fibrados ξ e η são **isomorfos** ($\xi \cong \eta$), quando $B(\xi) = B = B(\eta)$ e existir um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que $f|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo, para todo $b \in B$.

Na definição acima, temos que o seguinte diagrama é comutativo



Proposição 4.3. Um fibrado ξ é trivial se, e somente se, ξ é isomorfo a ϵ_B^n .

Demonstração: Suponha que ξ seja trivial. Logo, temos $U = B$ um aberto e, pela condição de trivialidade local, existe um homeomorfismo $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$, isto é, temos um homeomorfismo $h : E(\epsilon_B^n) \rightarrow E(\xi)$, onde $E(\epsilon_B^n) = B \times \mathbb{R}^n$, tal que a correspondência $x \mapsto h(b, x)$, para todo $b \in B$ seja um isomorfismo, ou seja, $h|_{F_b(\epsilon_B^n)} : F_b(\epsilon_B^n) \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo.

Portanto, segue da Definição 4.4 que $\xi \cong \epsilon_B^n$.

Reciprocamente, suponha que $\xi \cong \epsilon_B^n$, isto é, existe um homeomorfismo $f : E(\epsilon_B^n) \rightarrow E(\xi)$. Desde que $E(\epsilon_B^n) = B \times \mathbb{R}^n$ e $E(\xi) = \pi^{-1}(B)$, segue que $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(B)$ é um homeomorfismo, satisfazendo a condição de trivialidade local, com $U = B$ um aberto.

Portanto, ξ é um fibrado trivial. □

Definição 4.5. Definimos o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ como o conjunto de todos os pares $\{-x, x\}$, com $x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ arbitrário, munido da topologia quociente.

Exemplo 4.4. Fibrado linha canônico

Considere $B = \mathbb{R}P^n$, $E \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ o subconjunto consistindo de todos os pares $(\{\pm x\}, v)$ tal que v é um múltiplo escalar de x , e $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definida por $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$, para todo $(\pm x, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Logo, π é contínua e sobrejetiva.

Cada fibra F_x pode ser identificada com a reta passando pela origem de \mathbb{R}^{n+1} cujo vetor diretor é $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e esta reta possui estrutura usual como subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n+1} .

Mostremos a condição de trivialidade local.

Seja $U \subset \mathbb{S}^n$ um conjunto aberto qualquer suficientemente pequeno de modo a não conter nenhum par de pontos antípodos e U_1 a imagem de U em $\mathbb{R}P^n$. Defina $h : U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U_1)$ por $h(\pm x, t) = (\{\pm x\}, tx)$, para todo par $(x, t) \in U \times \mathbb{R}$.

Note que a aplicação $k : \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}$ dada por $k(\{\pm x\}, v) = (\{\pm x\}, t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que $v = tx$, para todo $(x, v) \in \pi^{-1}(U_1)$, é uma aplicação contínua tal que

$$h \circ k(\{\pm x\}, v) = h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, v)$$

e

$$k \circ h(\{\pm x\}, t) = k(\{\pm x\}, tx) = (\{\pm x\}, t)$$

Ou seja, h é um homeomorfismo.

Portanto, o par (U_1, h) é um sistema de coordenadas locais.

O fibrado linha canônico será denotado por γ_n^1 .

Definição 4.6. Uma seção de um fibrado vetorial ξ , com espaço base B , é uma função contínua $s : B \rightarrow E(\xi)$ tal que $\pi \circ s = Id_B$. Dizemos que a função s é uma seção não-nula se $s(b) \in E(\xi)$ é um vetor não-nulo da fibra $F_b(\xi)$, para todo $b \in B$.

Lema 4.5. Se ξ é um fibrado trivial, então ξ admite uma seção não-nula.

Demonstração: Desde que ξ é um fibrado trivial, temos $\xi \cong \epsilon_B^n$, para algum $n > 0$. Logo, existe um homeomorfismo $h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ tal que $h|_{F_b(\epsilon_B^n)} : F_b(\epsilon_B^n) \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo.

Defina $s : B \rightarrow E(\xi)$ por $s(b) = h(b, x)$, para todo $b \in B$ e $x \in \mathbb{R}^n$ não-nulo. Deste modo, s é uma aplicação contínua e

$$\pi_\xi \circ s(b) = \pi_\xi \circ h(b, x) = \pi_\xi(h(b, x)) = b$$

uma vez que $h(b, x) \in \pi^{-1}(b)$. Assim, s é uma seção do fibrado ξ .

Mostremos que s é não-nula. Desde que $x \in \mathbb{R}^n$ é não-nulo, segue que $(b, x) \in F_b(\epsilon_B^n)$ é não-nulo e, conseqüentemente, como h é um isomorfismo nas fibras, temos que $h(b, x) \in F_b(\xi)$ é não-nulo, ou seja, s é uma seção não-nula. \square

Teorema 4.6. O fibrado linha canônico γ_n^1 é não trivial, para $n \geq 0$.

Demonstração: Para demonstrar tal fato, iremos mostrar que toda seção de γ_n^1 se anula em algum elemento.

Pois bem, considere $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$ uma seção de γ_n^1 que, pelo Exemplo 4.4, é definida por $s(\{\pm x\}) = (\{\pm x\}, t(x)x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$, onde $t : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Note que para qualquer $x \in \mathbb{S}^n$, temos

$$(\{\pm x\}, t(x)x) = s(\{\pm x\}) = s(\{\mp x\}) = (\{\mp x\}, t(-x)(-x)) = (\{\pm x\}, -t(-x)x)$$

ou seja, $t(-x) = -t(x)$.

Como \mathbb{S}^n é conexo e t é contínua, segue que $t(\mathbb{S}^n)$ é um intervalo real que contém a origem. Logo, existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $t(x_0) = 0$ e, conseqüentemente, $s(\{\pm x_0\}) = (\{\pm x_0\}, 0)$ que é o vetor nulo da fibra $F_{\{\pm x_0\}}(\gamma_n^1)$, para $n \geq 1$, isto é, a função s não é uma seção não-nula. \square

Definição 4.7. Um conjunto de seções $\{s_1, \dots, s_n\}$ sobre um fibrado ξ é **linearmente independente** se, para cada $b \in B(\xi)$ o conjunto $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é linearmente independente na fibra $F_b(\xi)$.

Lema 4.7. *Sejam ξ e η fibrados sobre B e $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ uma função contínua que leva cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente no espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$. Então f é um homeomorfismo, ou seja, ξ e η são isomorfos.*

Demonstração: Devemos mostrar que f é uma bijeção e $f^{-1} : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é contínua. Inicialmente, mostremos que f é uma bijeção.

Sejam $x_1, x_2 \in E(\xi)$ tais que $x_1 \neq x_2$. Queremos mostrar que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para isto, iremos analisar dois casos, a saber,

(i) $x_1, x_2 \in F_b(\xi)$, para $b \in B$.

(ii) $x_1 \in F_{b_1}(\xi)$ e $x_2 \in F_{b_2}(\xi)$, com $b_1, b_2 \in B$ e $b_1 \neq b_2$.

No caso (i), temos que x_1 e x_2 pertencem a mesma fibra. Assim, basta observar que $f|_{F_b(\xi)}$ é um isomorfismo e, conseqüentemente, $f(x_1) \neq f(x_2)$ em $F_b(\eta)$.

No caso (ii), temos $f(x_1) \in F_{b_1}(\eta)$ e $f(x_2) \in F_{b_2}(\eta)$. Deste modo $f(x_1) \neq f(x_2)$, pois caso contrário teríamos

$$b_1 = \pi_\xi(x_1) = \pi_\eta(f(x_1)) = \pi_\eta(f(x_2)) = \pi_\xi(x_2) = b_2$$

o que é um absurdo, visto que $b_1 \neq b_2$.

Agora, provemos que f é sobrejetora. Para isto, seja $a \in E(\eta)$ qualquer. Então, $a \in F_{\pi_\eta(a)}(\eta)$. Como $f|_{F_{\pi_\eta(a)}(\xi)}$ é um isomorfismo, existe $v \in F_{\pi_\eta(a)}(\xi)$ tal que $f|_{F_{\pi_\eta(a)}(\xi)}(v) = a$, isto é, $f(v) = a$.

Por fim, devemos mostrar que $f^{-1} : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é contínua. Para tanto, considere $b_0 \in B$ e (U, g) e (V, h) sistemas de coordenadas locais para ξ e η , respectivamente, com $b_0 \in U \cap V$.

Deste modo, sendo g e h homeomorfismos, segue que g^{-1} e h^{-1} são contínuas. Considere, então a composição

$$(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} F_U(\xi) \xrightarrow{f} F_V(\eta) \xrightarrow{h^{-1}} (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

definida por $h^{-1} \circ f \circ g(b, x) = (b, [f_{ij}(b)]_{n \times n}(x))$, para todo $(b, x) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, onde $[f_{ij}(b)]_{n \times n}$ é a matriz do isomorfismo linear $(h(b, _))^{-1} \circ f \circ g(b, _) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para todo $b \in U \cap V$.

Tomando $[F_{ij}(b)]_{n \times n} = [f_{ij}(b)]_{n \times n}^{-1}$, obtemos que $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, definida por $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h(b, y) = (b, [F_{ij}(b)]_{n \times n}(y))$, para todo $(b, y) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ é contínua e, conseqüentemente, f^{-1} é contínua, uma vez que g e h são homeomorfismos.

Portanto, f é um homeomorfismo e, pela Definição 4.4, $\xi \cong \eta$.

Teorema 4.8. *Um \mathbb{R}^n -fibrado ξ é trivial se, e somente se ξ admite n seções linearmente independentes.*

Demonstração: Suponha que ξ é trivial, ou seja, $\xi \cong \epsilon_{B(\xi)}^n$. Assim, existe um homeomorfismo $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ tal que $f(\{b\} \times \mathbb{R}^n) \subset F_b(\xi)$ e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow F_b(\xi)$ é um isomorfismo linear, para todo $b \in B(\xi)$.

Defina $s_i : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ por $s_i(b) = f(b, e_i)$, para todo $b \in B(\xi)$ e $i = 1, \dots, n$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n .

Com isso, como $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é um isomorfismo, para qualquer $b \in B(\xi)$, e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é linearmente independente, então $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é linearmente independente.

Ainda, sendo f contínua, segue que s_i é contínua, para $i = 1, \dots, n$.

Portanto, obtemos um conjunto $\{s_1, \dots, s_n\}$ de n seções linearmente independentes de ξ .

Reciprocamente, sejam $s_1, \dots, s_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ seções linearmente independentes de ξ . Defina $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ por

$$f(b, x) = \sum_{i=1}^n x_i s_i(b)$$

para qualquer $(b, x) \in B(\xi) \times \mathbb{R}^n$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Mostremos que $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é um isomorfismo linear. Com efeito, dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}((b, x) + \alpha(b, y)) &= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}((b, x) + (b, \alpha y)) \\ &= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, x + \alpha y) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha y_i) s_i(b) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i s_i(b) + \alpha \sum_{i=1}^n y_i s_i(b) \\ &= f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, x) + \alpha f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, y) \end{aligned}$$

Logo, $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é uma aplicação linear. Ainda, considere $e \in F_b(\xi)$ arbitrário. Como $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é linearmente independente e $\dim(F_b(\xi)) = n$, obtemos que $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ é uma base para $F_b(\xi)$, ou seja, existem $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$e = \sum_i^n r_i s_i(b)$$

Assim, tomando $(b, r) \in \{b\} \times \mathbb{R}^n$, onde $r = (r_1, \dots, r_n)$, segue que $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}(b, r) = e$.

Deste modo, temos que $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n}$ é um isomorfismo linear.

Ainda, note que f é contínua, pois s_i são funções contínuas, para $i = 1, \dots, n$.

Portanto, segue do Lema 4.7, que $\xi \cong \epsilon^n_{B(\xi)}$, isto é, ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial. □

4.2 Fibrados Vetoriais Euclidianos

Para alguns propósitos, é importante estudarmos alguns fibrados vetoriais específicos, aqueles em que cada fibra possui estrutura de um espaço vetorial Euclidiano. Iniciemos recordando a definição de forma quadrática:

Definição 4.8. Dizemos que uma função de valores reais $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$, sobre um espaço vetorial de dimensão finita V , é uma **forma quadrática** se μ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mu(v) = \sum_{i=1}^n l_i(v) l'_i(v)$$

onde $l_i, l'_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ são transformações lineares, para $i = 1, \dots, n$ e $\mu(v) \neq 0$ para todo $v \neq 0$ em V .

Cada forma quadrática determina uma aplicação bilinear e simétrica $\langle _, _ \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w))$$

para todo par $(v, w) \in V \times V$. Em particular, para todo $v \in V$, temos

$$\begin{aligned}
 \langle v, v \rangle &= \frac{1}{2} (\mu(v+v) - \mu(v) - \mu(v)) \\
 &= \frac{1}{2} (\mu(2v) - 2\mu(v)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n l_i(2v) l'_i(2v) - 2\mu(v) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(4 \sum_{i=1}^n l_i(v) l'_i(v) - 2\mu(v) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (4\mu(v) - 2\mu(v)) = \mu(v)
 \end{aligned}$$

Se $\mu(v) > 0$, para todo $v \in V$, com $v \neq 0$, então a forma quadrática é dita ser positiva.

Definição 4.9. Um **espaço vetorial euclidiano** é um espaço vetorial real V de dimensão finita, com uma forma quadrática positiva definida $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$.

O número real $\langle v, w \rangle$ será chamado produto interno entre v e w em V e denotaremos $\|v\|^2 = \mu(v) = \langle v, v \rangle$.

Definição 4.10. Um **fibrado vetorial euclidiano** ξ é um fibrado vetorial real junto com uma função contínua $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $b \in B$, a restrição $\mu|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma quadrática positiva. A função μ será chamada de **métrica Euclidiana** do fibrado ξ .

Lema 4.9. *Sejam ξ um \mathbb{R}^n -fibrado trivial e $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica Euclidiana qualquer de ξ . Então, existem n seções $s_1, \dots, s_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ de ξ que são ortonormais, no sentido que*

$$\langle s_i(b), s_j(b) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

para qualquer $b \in B(\xi)$.

Demonstração: Como ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado trivial, segue do Teorema 4.8, que existem n seções linearmente independentes $s'_1, \dots, s'_n : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$ de ξ . Aplicando o processo de Gram-Schmidt para $s'_1(b), \dots, s'_n(b)$, obtemos um base ortonormal $\{s_1(b), \dots, s_n(b)\}$ para $F_b(\xi)$, para todo $b \in B(\xi)$.

Como as funções resultantes s_i são contínuas, para todo $i = 1, \dots, n$, segue que s_1, \dots, s_n são n seções ortonormais de ξ . □

Exemplo 4.10. Para qualquer espaço topológico B e qualquer inteiro $n > 0$, temos que ϵ_B^n é um fibrado Euclidiano.

Para isto, defina $\mu : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(b, (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, para todo $(b, (x_1, \dots, x_n)) \in B \times \mathbb{R}^n$. Assim, μ é contínua, pela própria definição, e μ restrita a cada fibra de ϵ_B^n é uma forma quadrática definida positiva.

Portanto, ϵ_B^n é um fibrado Euclidiano.

4.3 Outros Fibrados Vetoriais

Nesta seção, iremos ver modos básicos de construir novos fibrados a partir de fibrados já conhecidos.

4.3.1 Fibrado Restrição

Sejam ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi : E(\xi) \rightarrow B(\xi)$, e $B_0 \subset B(\xi)$ um subespaço topológico. Adotando $E_0 = \pi^{-1}(B_0)$ e $\bar{\pi} = \pi|_{\pi^{-1}(B_0)} : E_0(\xi) \rightarrow B_0$ obtemos um novo fibrado vetorial, que será denotado por $\xi|_{B_0}$ e chamado restrição de ξ a B_0 .

Verifiquemos que $\xi|_{B_0}$ é de fato um fibrado vetorial. Pois bem, sendo π contínua, desde que $\bar{\pi} = \pi|_{\pi^{-1}(B_0)}$ segue que $\bar{\pi}$ é contínua. Além disso, do modo como tomamos E_0 e definimos $\bar{\pi}$, temos que esta é sobrejetiva.

Ainda, para cada $b \in B_0$, temos que

$$F_b(\xi|_{B_0}) = \bar{\pi}^{-1}(b) = \pi|_{\pi^{-1}(B_0)}^{-1}(b) = \pi^{-1}(b) \cap \pi^{-1}(B_0) = \pi^{-1}(b) = F_b(\xi)$$

ou seja, cada fibra da restrição $F_b(\xi|_{B_0})$ é igual a fibra correspondente $F_b(\xi)$. Assim, estas fibras possuem mesma estrutura de espaço vetorial.

Agora, verifiquemos a trivialidade local. Para isto, seja $b \in B_0$ qualquer. Como ξ é um fibrado vetorial, existem $U \subset B(\xi)$ um aberto contendo $b \in B_0$ e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que a correspondência $x \rightarrow h(b, x)$ é um isomorfismo linear entre \mathbb{R}^n e $F_b(\xi)$.

Tomando $U_0 = U \cap B_0$ e definindo $h_0 = h|_{U_0 \times \mathbb{R}^n} : U_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_0) = \bar{\pi}^{-1}(U_0)$, temos que $U_0 \subset B_0$ é um aberto que contém $b \in B_0$ e h_0 é um homeomorfismo. A correspondência $x \rightarrow h_0(b, x)$ é um isomorfismo linear, visto que h é um homeomorfismo e a correspondência $x \rightarrow h_0(b, x)$ é um isomorfismo linear.

Portanto, $\xi|_{B_0}$ é de fato um \mathbb{R}^n -fibrado vetorial.

4.3.2 Fibrados Induzidos

Sejam ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi_\xi : E(\xi) \rightarrow B$ e B_1 um espaço topológico arbitrário. Para qualquer função contínua $f : B_1 \rightarrow B$, construímos o fibrado vetorial induzido $f^*\xi$ sobre B_1 , onde $B(f^*\xi) = B_1$ é o espaço base, o espaço total é tomado como o conjunto

$$E(f^*\xi) = \{(b, e) \in B_1 \times E(\xi); f(b) = \pi_\xi(e)\}$$

e a projeção $\pi_1 : E(f^*\xi) \rightarrow B_1$ é dada por $\pi_1(b, e) = b$, para todo par $(b, e) \in E(f^*\xi)$.

Assim o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(f^*\xi) & \xrightarrow{\hat{f}} & E(\xi) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo, onde $\hat{f} : E(f^*\xi) \rightarrow E(\xi)$ é dado por $\hat{f}(b, e) = e$, para todo $(b, e) \in E(f^*\xi)$.

Com efeito, para $(b, e) \in E(f^*\xi)$ arbitrário, temos $\pi_\xi \circ \hat{f}(b, e) = \pi_\xi(e)$. Por outro lado, $f \circ \pi_1(b, e) = f(\pi_1(b, e)) = f(b)$. Pela definição de $E(f^*\xi)$, segue que $f(b) = \pi_\xi(e)$.

Agora, para todo $b \in B_1$, note que

$$\begin{aligned} F_b(f^*\xi) &= \{(x, e) \in E(f^*\xi); \pi_1(x, e) = b\} \\ &= \{(x, e) \in E(f^*\xi); x = b\} \\ &= \{(b, e) \in E(f^*\xi)\} \\ &= \{(b, e) \in B_1 \times E(\xi); f(b) = \pi_\xi(e)\} \\ &= \{b\} \times F_{f(b)}(\xi) \\ &\approx F_{f(b)}(\xi) \end{aligned}$$

onde o isomorfismo acima é dado pela restrição de \hat{f} a $F_b(f^*\xi)$.

Provemos a trivialidade local. Para isto, suponha que (U, h) é um sistema de coordenadas locais de ξ e $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_\xi^{-1}(U)$ é o isomorfismo que associa $x \mapsto h(b, x)$.

Tomemos $U_1 = f^{-1}(U)$ e definimos $h_1: U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1)$ por $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x))$, para todo $(b, x) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$.

Note que, por definição $U \subset B$ é um aberto e, como f é contínua, $U_1 = f^{-1}(U)$ é um aberto também. Ainda, sendo h contínua, segue que h_1 também é contínua.

Por fim, devemos verificar que h_1 é uma bijeção cuja a inversa é contínua. Para tal, defina $g: \pi_1^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^n$ por $g(b, e) = (b, \theta^{-1}(e))$, para todo $(b, e) \in \pi_1^{-1}(U_1)$, onde $\theta^{-1}: \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a inversa do isomorfismo θ . Uma vez que $b \in U_1 = f^{-1}(U)$ e $f(b) = \pi_\xi(e)$, segue que g está bem-definida e é contínua, já que θ^{-1} o é.

Assim, para $(b, x) \in U_1 \times \mathbb{R}^n$ e $(b, e) \in \pi_1^{-1}(U_1)$ quaisquer, temos

$$g \circ h_1(b, x) = g(h_1(b, x)) = g(b, h(f(b), x)) = (b, \theta^{-1}(h(f(b), x))) = (b, x) = Id_{U_1 \times \mathbb{R}^n}(b, x)$$

e

$$h_1 \circ g(b, e) = h_1(g(b, e)) = h_1(b, \theta^{-1}(e)) = (b, h(f(b), \theta^{-1}(e))) = (b, \theta(\theta^{-1}(e))) = (b, e) = Id_{\pi_1^{-1}(U_1)}(b, e)$$

Logo, h_1 é de fato uma homeomorfismo.

O fibrado induzido nos sugere o seguinte conceito, que a priori, é mais geral. Sejam ξ e η fibrados vetoriais.

Definição 4.11. Dizemos que uma função contínua $g: E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma aplicação fibrada de ξ em η se leva cada fibra $F_b(\xi)$ isomorficamente em alguma fibra $F_{b'}(\eta)$.

Definindo $\bar{g}: B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ por $\bar{g}(b) = b'$, para todo $b \in B(\xi)$ e $g(F_b(\xi)) = F_{b'}(\eta)$, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B(\xi) & \xrightarrow{\bar{g}} & B(\eta) \end{array}$$

o qual devemos mostrar que comuta.

Inicialmente, verifiquemos que \bar{g} é contínua. Para isto, mostraremos que π_ξ é uma aplicação aberta ou, de modo suficiente, mostraremos que $\pi_\xi|_{\pi_\xi^{-1}(U)}: \pi_\xi^{-1}(U) \rightarrow U$ é uma aplicação aberta, onde (U, h) representa um sistema de coordenadas locais para ξ sobre o ponto $b \in B(\xi)$.

Pois bem, seja $A \subset \pi_\xi^{-1}(U)$ um aberto. Logo, $h^{-1}(A) \subset U \times \mathbb{R}^n$ e $p_1(h^{-1}(A)) \subset U$ são abertos, onde $p_1: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator. Desde que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi_\xi^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \swarrow \pi_\xi \\ & & U \end{array}$$

segue que $\pi_\xi(A) = p_1(h^{-1}(A)) \subset U$ é um aberto, isto é, π_ξ é uma aplicação aberta.

De modo análogo, temos que π_η é uma aplicação aberta.

Agora, para qualquer $V \subset B(\eta)$ aberto, temos $\pi_\eta^{-1}(V)$ é um aberto de $E(\eta)$ e, como g é contínua e π_ξ é aberta, segue que $\pi_\xi \left(g^{-1} \left(\pi_\eta^{-1}(V) \right) \right)$ é um aberto em $B(\xi)$. Como $\bar{g}^{-1}(V) = \pi_\xi \left(g^{-1} \left(\pi_\eta^{-1}(V) \right) \right)$, segue que \bar{g} é contínua.

Ainda, dado $x \in E(\xi)$ qualquer, temos que $x \in F_{\pi_\xi(x)}(\xi)$ e $g(F_{\pi_\xi(x)}(\xi)) = F_{b'}(\eta)$, para algum $b' \in B(\eta)$. Então, $\bar{g} \circ \pi_\xi(x) = \bar{g}(\pi_\xi(x)) = b'$.

Por outro lado, $\pi_\eta \circ g(x) = b'$, uma vez que $g(x) \in F_{b'}(\eta)$.

Portanto, segue que $\bar{g} \circ \pi_\xi = \pi_\eta \circ g(x)$.

Lema 4.11. *Se $g : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é uma aplicação fibrada e $\bar{g} : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ é a aplicação correspondente nos espaços bases, então $\xi \cong \bar{g}^* \eta$.*

Demonstração: Defina $h : E(\xi) \rightarrow E(\bar{g}^* \eta)$ por $h(x) = (\pi_\xi(x), g(x))$, para todo $x \in E(\xi)$.

Desde que $\pi_\eta(g(x)) = \bar{g}(\pi_\xi(x))$, para todo $x \in E(\xi)$, segue que h está bem-definida. Além disso, h é contínua, já que π_ξ e g o são.

Agora, se $x \in F_b(\xi)$, então

$$h(x) = (\pi_\xi(x), g(x)) = (b, g(x)) \in \{b\} \times F_{\bar{g}(b)}(\eta) = F_b(\bar{g}^* \eta)$$

pois $\pi_\eta(g(x)) = \bar{g}(\pi_\xi(x)) = \bar{g}(b)$. Assim, $h(F_b(\xi)) \subset F_b(\bar{g}^* \eta)$.

Ainda, sendo g uma aplicação fibrada, temos que $g|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_{\bar{g}(b)}(\eta)$ é um isomorfismo linear, então $h|_{F_b(\xi)} : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\bar{g}^* \eta)$ dada por $h|_{F_b(\xi)}(x) = (b, g|_{F_b(\xi)}(x))$ também é um isomorfismo linear.

Portanto, segue do Lema 4.7 que h é um homeomorfismo, ou seja, $\xi \cong \bar{g}^* \eta$.

4.3.3 Produtos Cartesianos

Dados dois fibrados vetoriais ξ_1, ξ_2 com aplicações projeções $\pi_i : E_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, o **produto cartesiano** $\xi_1 \times \xi_2$ é definido como sendo o fibrado com projeção $\pi = \pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$. Assim, π é contínua e sobrejetora, e cada fibra $F_{(b_1, b_2)} = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ tem a estrutura de um espaço vetorial.

Vejamos a trivialidade local.

Seja $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ qualquer. Como ξ_1 e ξ_2 são fibrados, existem (U_1, h_1) e (U_2, h_2) sistemas de coordenadas locais para de π_1 e π_2 , respectivamente.

Então, considere o aberto $U = U_1 \times U_2 \subset B_1 \times B_2$ que contém $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$, e defina $h : U \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ por $h((x, y), (r_1, r_2)) = (h_1(x, r_1), h_2(y, r_2))$, para todo $((x, y), (r_1, r_2)) \in U \times \mathbb{R}^{n+m}$.

Deste modo, como h_1 e h_2 são homeomorfismos, segue que h também é um homeomorfismo. Ainda, a associação $(r_1, r_2) \mapsto h((b_1, b_2), (r_1, r_2))$ é um isomorfismo linear, uma vez que as associações $r_1 \mapsto h_1(b_1, r_1)$ e $r_2 \mapsto h_2(b_2, r_2)$ o são.

Portanto, $\xi_1 \times \xi_2$ é um fibrado vetorial.

4.3.4 Soma de Whitney

Sejam ξ_1 e ξ_2 fibrados sobre o mesmo espaço base B , e $d : B \rightarrow B \times B$ a aplicação diagonal dada por $d(b) = (b, b)$, para todo $b \in B$. Denominamos $d^*(\xi_1 \times \xi_2) = \xi_1 \oplus \xi_2$, a **soma de Whitney** entre ξ_1 e ξ_2 .

Note que, para $b \in B$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
F_b(\xi_1 \oplus \xi_2) &= F_b(d^*(\xi_1 \times \xi_2)) \\
&= \{b\} \times F_{d(b)}(\xi_1 \times \xi_2) \\
&= \{b\} \times F_{(b,b)}(\xi_1 \times \xi_2) \\
&= \{b\} \times F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2) \\
&\cong \{b\} \times F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)
\end{aligned}$$

Definição 4.12. Sejam ξ e η fibrados sobre o mesmo espaço base B com $E(\xi) \subset E(\eta)$. Dizemos que ξ é um subfibrado de η , denotado por $\xi \subset \eta$, quando $F_b(\xi)$ for um subespaço de $F_b(\eta)$, para qualquer $b \in B$.

Lema 4.12. Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de um fibrado η tal que cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é igual a soma direta de dois subespaços $F_b(\xi_1)$ e $F_b(\xi_2)$. Então $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

Demonstração: Defina $f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\eta)$ por $f(b, (e_1, e_2)) = e_1 + e_2$, para qualquer $(b, (e_1, e_2)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$. Note que f está bem-definida, pois para qualquer $(b, (e_1, e_2)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$, temos que $d(b) = \pi_1 \times \pi_2(e_1, e_2)$, isto é, $(b, b) = (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2))$. Logo, $e_i \in F_b(\xi_i)$, para $i = 1, 2$. Assim, $e_1 + e_2 \in F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2) = F_b(\eta) \subset E(\eta)$.

Ainda, f é contínua, pois $f = i \circ s \circ \hat{d}$, onde $i : F_b(\eta) \rightarrow E(\eta)$ é a inclusão, $s : F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2) \rightarrow F_b(\eta)$ é a aplicação soma dada por $s(e_1, e_2) = e_1 + e_2$, para todo $(e_1, e_2) \in F_b(\xi_1) \times F_b(\xi_2)$, e $\hat{d} : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\xi_1 \times \xi_2)$ é definida por $\hat{d}(b, (e_1, e_2)) = (e_1, e_2)$, para qualquer $(b, (e_1, e_2)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$. Note que, para qualquer $(b, (e_1, e_2)) \in E(\xi_1 \oplus \xi_2)$, temos $\hat{d}(b, (e_1, e_2)) = (e_1, e_2) \in F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, como visto acima.

Por fim, vejamos que f é um isomorfismo linear nas fibras. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(b, (x, y)), (b, (z, w)) \in F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$, temos

$$\begin{aligned}
f(\alpha(b, (x, y)) + (b, (z, w))) &= f(b, (\alpha x + z, \alpha y + w)) \\
&= \alpha x + z + \alpha y + w \\
&= \alpha(x + y) + z + w \\
&= \alpha f(b, (x, y)) + f(b, (z, w))
\end{aligned}$$

Agora, f é uma bijeção, uma vez que dado qualquer $p \in F_b(\eta) = F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$, existem únicos $x \in F_b(\xi_1)$ e $y \in F_b(\xi_2)$ tais que $w = x + y$, ou seja, $w = f(b, (x, y))$.

Portanto, segue do Lema 4.7 que f é um homeomorfismo, isto é, $\eta \cong \xi_1 \oplus \xi_2$.

4.3.5 Complementos Ortogonais

Dado um subfibrado $\xi \subset \eta$, existe um subfibrado complementar tal que η se decomponha como uma soma de Whitney?

Se η está provido com uma métrica Euclidiana, então tal somando complementar pode ser construído, como veremos a seguir.

Para cada $b \in B$, defina $F_b(\xi^\perp) = F_b(\xi)^\perp = \{v \in F_b(\eta); \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in F_b(\xi)\}$. Consideraremos ξ^\perp o fibrado vetorial com espaço base $B(\xi^\perp) = B$, espaço total $E(\xi^\perp) = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$ e aplicação projeção $\pi_{\xi^\perp} = \pi_\eta|_{E(\xi^\perp)} : E(\xi^\perp) \rightarrow B$.

Deste modo, π_{ξ^\perp} é contínua e sobrejetora. Ainda, para qualquer $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
\pi_{\xi^\perp}^{-1}(b) &= \left(\pi_\eta|_{E(\xi^\perp)} \right)^{-1}(b) \\
&= \pi_\eta^{-1}(b) \cap E(\xi^\perp) \\
&= F_b(\eta) \cap \bigcup_{x \in B} F_x(\xi^\perp) \\
&= \bigcup_{x \in B} F_b(\eta) \cap F_x(\xi^\perp) \\
&= F_b(\eta) \cap F_b(\xi^\perp) \\
&= F_b(\xi^\perp)
\end{aligned}$$

Assim, resta provarmos a trivialidade local.

Suponha η um \mathbb{R}^n -fibrado e ξ um \mathbb{R}^m -fibrado, com $m < n$. Sejam $b_0 \in B$ arbitrário e $U \subset B$ um aberto contendo b_0 tal que (U, h) e (U, k) fornecem uma trivialidade local para η e ξ , respectivamente.

Note que, como $F_b(\xi) \subset F_b(\eta)$, para todo $b \in B$, então se $x \in F_{\pi_\xi(x)}(\xi)$, segue que $\pi_\eta(x) = \pi_\xi(x)$. Ainda, se $x \in \pi_\xi^{-1}(U)$, então $\pi_\eta(x) = \pi_\xi(x) \in U$, isto é, $x \in \pi_\eta^{-1}(U)$. Logo, $\pi_\xi^{-1}(U) \subset \pi_\eta^{-1}(U)$.

Por outro lado, segue do Lema 4.9, que existem $s_1, \dots, s_m : B \rightarrow E(\xi)$ seções ortonormais de $\xi|_U$ e $s'_1, \dots, s'_n : B \rightarrow E(\eta)$ seções ortonormais de $\eta|_U$. Portanto, a matriz $A = \left(\langle s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle \right)_{m \times n}$ tem posto m .

De fato, vejamos que as m -linhas de A são linearmente independentes. Para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\langle s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle \right) = (0 \cdots 0) \\
&\Leftrightarrow \left(\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_1(b_0) \rangle, \dots, \langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_n(b_0) \rangle \right) = (0 \cdots 0) \\
&\Leftrightarrow \langle \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0), s'_j(b_0) \rangle = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i(b_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}
\end{aligned}$$

Assim, existe $V \subset U$ aberto contendo b_0 tal que, para qualquer $b \in V$, $\text{rank} \left(\langle s_i(b), s'_j(b) \rangle \right)_{m \times n} = m$.

Então, para qualquer $b \in V$, o conjunto $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$ é linearmente independente em $F_b(\eta)$. Pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, temos que, para qualquer $b \in V$, $\{s_1(b), \dots, s_m(b), s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)\}$ é uma base ortonormal de $F_b(\eta)$.

Deste modo, definindo $g : V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \pi_{\xi^\perp}^{-1}(V)$ por $g(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) = \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b)$, para todo $(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) \in V \times \mathbb{R}^{n-m}$, temos que g é contínua e com inversa $g^{-1} : \pi_{\xi^\perp}^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-m}$ dada por

$$g^{-1}(e) = (\pi_{\xi^\perp}(e), (\langle e, s_{m+1}(\pi_{\xi^\perp}(e)) \rangle, \dots, \langle e, s_n(\pi_{\xi^\perp}(e)) \rangle))$$

para todo $e \in \pi_{\xi^\perp}^{-1}(V)$, que também é contínua, ou seja, g é um homeomorfismo.

Verifiquemos que g^{-1} é de fato a inversa de g . Para qualquer $e \in \pi_{\xi^\perp}^{-1}(V)$, temos

$$\begin{aligned}
g \circ g^{-1}(e) &= g(\pi_{\xi^\perp}(e), (\langle e, s_{m+1}(\pi_{\xi^\perp}(e)) \rangle, \dots, \langle e, s_n(\pi_{\xi^\perp}(e)) \rangle)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-m} \langle e, s_{i+m}(\pi_{\xi^\perp}(e)) \rangle s_{i+m}(\pi_{\xi^\perp}(e)) \\
&= e \\
&= Id_{\pi_{\xi^\perp}^{-1}(V)}(e)
\end{aligned}$$

pois $e \in \pi_{\xi^\perp}^{-1}(V) \subset E(\xi^\perp) = \bigcup_{b \in B} F_b(\xi^\perp)$, isto é, $e \in F_{\pi_{\xi^\perp}(e)}(\xi^\perp) = F_{\pi_{\xi^\perp}(e)}(\xi)^\perp$ e, por conseguinte, $\langle e, s_i(\pi_{\xi^\perp}(e)) \rangle = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Reciprocamente, para qualquer $(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) \in V \times \mathbb{R}^{n-m}$, temos

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ g(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) &= g^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b) \right) \\ &= (b, (x_1, \dots, x_{n-m})) \\ &= Id_{V \times \mathbb{R}^{n-m}}(b, (x_1, \dots, x_{n-m})) \end{aligned}$$

uma vez que, $\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b) \in F_b(\xi^\perp) = F_b(\xi)^\perp$, então $\pi_{\xi^\perp} \left(\sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b) \right) = b$. Ainda,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b), s_{j+m}(b) \right\rangle = x_j$$

para todo $j = 1, \dots, n-m$.

Por fim, a associação $(x_1, \dots, x_{n-m}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-m} x_i s_{i+m}(b_0)$, para todo $b_0 \in V$ é um isomorfismo linear.

Portanto, ξ^\perp é, de fato, um fibrado vetorial.

Teorema 4.13. *Se ξ é um sub-fibrado de um fibrado Euclidiano η sobre uma base B , então $\eta \approx \xi \oplus \xi^\perp$.*

Demonstração: Desde que $F_b(\eta) = F_b(\xi) \oplus F_b(\xi^\perp)$, para todo $b \in B$, segue do Lema 4.12 o resultado. \square

Definição 4.13. O fibrado ξ^\perp é chamado de complemento ortogonal de ξ em η .

4.4 Fibrados Orientados

A partir de agora, iremos trabalhar com cohomologia com coeficientes nos inteiros \mathbb{Z} , uma vez que a orientação do fibrado orientado irá interferir na Classe de Euler, que será definido no próximo capítulo.

Inicialmente consideraremos V um espaço vetorial, o qual possui duas orientações. Note que uma escolha de orientação de V corresponde a uma escolha de um dos dois geradores do grupo de homologia singular $H_n(V, V_0; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, onde $V_0 = V - \{0\}$.

De fato, considere σ_n o n -simplexo padrão, com vértices ordenados de modo padrão. Tome uma orientação de V que preserva o mergulho linear $\theta: \sigma_n \rightarrow V$ tal que $\theta(b) = 0$, onde $b \in \sigma_n$ é o baricentro de σ_n . Deste modo, temos que $\theta(\partial\sigma_n) \subset V_0$ e, conseqüentemente, $\theta \in Z_n(V, V_0; \mathbb{Z})$. Portanto, $[\theta] = \mu_V \in H_n(V, V_0; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} = \langle \mu_V \rangle$.

Analogamente, para cohomologia, temos $H^n(V, V_0; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} = \langle u_V \rangle$, onde $u_V(\mu_V) = 1$.

Agora, considere um fibrado vetorial ξ de fibra com dimensão $n > 0$.

Definição 4.14. Uma orientação para o fibrado ξ é uma função que associa uma orientação para cada fibra F_b de ξ , para todo $b \in B(\xi)$, satisfazendo a seguinte condição de compatibilidade local:

Para todo ponto $b_0 \in B(\xi)$, existe um sistema de coordenadas locais (N, h) , com $b_0 \in N$ e $h: N \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(N)$ tal que para cada fibra F_b , com $b \in N$, o isomorfismo $x \mapsto h(b, x)$ de \mathbb{R}^n em F_b preserva orientação.

Em termos de cohomologia, isto significa que para cada fibra F_b , é atribuído um gerador preferido $u_{F_b} \in H^n(V, V_0; \mathbb{Z})$.

A condição de compatibilidade local implica que para todo ponto no espaço base, existe uma vizinhança N e uma classe de cohomologia $u \in H^n(\pi^+(N), \pi^+(N)_0; \mathbb{Z})$ tal que, para toda fibra F sobre N , a restrição $u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ é igual a u_F .

Definição 4.15. A classe $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ é chamada classe fundamental de cohomologia do par E, E_0 .

4.5 Fibrados Principais

Seja X um G -espaço qualquer. É possível determinar um fibrado com espaço base $X \text{ mod } G$, espaço total sendo X e aplicação projeção $\pi : X \rightarrow X \text{ mod } G$ definida por $\pi(x) = G_x$, para todo $x \in X$, onde $g \in G$. Tal fibrado será denotado por $\alpha(X)$.

Definição 4.16. Sejam ξ e ξ' dois fibrados. Dadas duas aplicações contínuas $u : E(\xi) \rightarrow E(\xi')$ e $f : B(\xi) \rightarrow B(\xi')$, um **morfismo fibrado** é um par de aplicações $(u, f) : (E(\xi), B(\xi)) \rightarrow (E(\xi'), B(\xi'))$ tal que $\pi_{\xi'} \circ u = f \circ \pi_{\xi}$. Ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{u} & E(\xi') \\ \pi_{\xi} \downarrow & & \downarrow \pi_{\xi'} \\ B(\xi) & \xrightarrow{f} & B(\xi') \end{array}$$

Se $h : X \rightarrow Y$ é um G -morfismo, segue que para $gx \in G_x$ arbitrário, com $g \in G$, temos que $h(gx) = gh(x) \in G_{h(x)}$ e, conseqüentemente, podemos concluir que $h(G_x) \subset G_{h(x)}$. Deste modo, utilizando h podemos definir uma nova aplicação $\bar{h} : X \text{ mod } G \rightarrow Y \text{ mod } G$ dada por $\bar{h}(G_x) = G_{h(x)}$, para todo $G_x \in X \text{ mod } G$, com $x \in X$ qualquer.

O morfismo fibrado $(h, \bar{h}) : \alpha(X) \rightarrow \alpha(Y)$ definido por $(h, \bar{h})(x, G_{x'}) = (h(x), \bar{h}(G_{x'}))$, para todo par $(x, G_{x'}) \in (X, X \text{ mod } G)$, será denotado por $\alpha(h)$, onde $\alpha(X) = (X, X \text{ mod } G)$ e $\alpha(Y) = (Y, Y \text{ mod } G)$.

Dados dois G -morfismos $h : X \rightarrow Y$ e $k : Y \rightarrow Z$, para todo $x \in X$, temos

$$\bar{k} \circ \bar{h}(G_x) = \bar{k}(G_{h(x)}) = G_{k(h(x))} = G_{k \circ h(x)} = \overline{k \circ h}(G_x)$$

Proposição 4.14. A coleção $\alpha : sp_G \rightarrow Bun$ é um funtor, onde Bun é a categoria com os fibrados sendo objetos e os morfismos fibrados sendo os morfismos.

Demonstração: De fato, pela definição de α , segue que dado um objeto $X \in sp_G$ arbitrário, $\alpha(X)$ é um objeto em Bun .

Dada a aplicação identidade $Id_X : X \rightarrow X$, segue que $\overline{Id}_X : X \text{ mod } G \rightarrow X \text{ mod } G$ é dada por

$$\overline{Id}_X(G_x) = G_{Id_X(x)} = G_x = Id_{X \text{ mod } G}(G_x)$$

para todo $x \in X$. Logo, $\alpha(Id_X) = (Id_X, Id_{X \text{ mod } G}) : \alpha(X) \rightarrow \alpha(X)$ é tal que, para todo $(x, G_{x'}) \in \alpha(X)$, temos

$$(Id_X, Id_{X \text{ mod } G})(x, G_{x'}) = (x, G_{x'}) = Id_{\alpha(X)}(x, G_{x'})$$

Ainda, dados $h: X \rightarrow Y$ e $k: Y \rightarrow Z$ dois G -morfismos, segue que

$$\alpha(k \circ h) = (k \circ h, \overline{k \circ h}) = (k \circ h, \overline{k} \circ \overline{h}) = (k, \overline{k}) \circ (h, \overline{h}) = \alpha(k) \circ \alpha(h)$$

Portanto, segue o resultado. □

Definição 4.17. Um fibrado ξ é chamado **G -fibrado** se ξ e $\alpha(E(\xi))$ são isomorfos, para alguma estrutura de G -espaço em $E(\xi)$ através de um isomorfismo $(Id_{E(\xi)}, \overline{h}) : \alpha(E(\xi)) \rightarrow (E(\xi), B(\xi))$, onde $\overline{h} : E(\xi) \text{ mod. } G \rightarrow B(\xi)$ é um homeomorfismo.

Por fim, temos a definição de G -fibrado principal

Definição 4.18. X é chamado um **G -espaço principal** se X é um G -espaço livre com função translação contínua $\beta : X^* \rightarrow G$, onde $X^* = \{(x, gx) \in X \times X; x \in X \text{ e } g \in G\}$. Um fibrado ξ com espaço total X , onde X é um G -espaço principal, é chamado **G -fibrado principal**.

Capítulo 5

Classes de Stiefel-Whitney

Neste capítulo iniciaremos o estudo de classes características introduzindo quatro axiomas que caracterizam as classes de cohomologia de Stiefel-Whitney, não nos preocupando, por ora, com problemas relativos à sua existência e unicidade.

Nesta seção o grupo de coeficientes será sempre \mathbb{Z}_2 , o grupo dos inteiros módulo 2.

Os axiomas são:

Axioma 1. A cada \mathbb{R}^n -fibrado vetorial ξ , existe uma sequência de classes de cohomologia singular $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, chamadas classes de Stiefel-Whitney de ξ , que satisfazem:

- i) $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$;
- ii) $w_i = 0$, para $i > n$

Axioma 2. (Naturalidade) Se ξ e η são fibrados vetoriais tais que $\xi \cong \bar{f}^* \eta$, para alguma aplicação fibrada $f: B(\xi) \rightarrow B(\eta)$, então $w_i(\xi) = \bar{f}^*(w_i(\eta))$, para todo $i \geq 0$.

Axioma 3. (Teorema do Produto de Whitney) Se ξ e η são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, então

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k (w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta))$$

para qualquer $k \geq 0$.

Axioma 4. Para o fibrado linha canônico γ_1^1 sobre o espaço real projetivo $\mathbb{R}P^1$, temos $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$.

Assumiremos, por ora, a validade dos quatro axiomas.

Vejamos algumas consequências e aplicações:

Proposição 5.1. Se ξ é isomorfo à η , então $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.

Demonstração: Desde que $\xi \cong \eta$, existe um homeomorfismo $f: E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ tal que, para todo $b \in B$, temos $f(F_b(\xi)) \subset F_b(\eta)$ e $f|_{F_b(\xi)}: F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo linear.

Como f é uma aplicação fibrada de ξ em η , então a aplicação correspondente de f nos espaços bases deve ser necessariamente a identidade $Id_B: B \rightarrow B$.

Assim, segue que $\xi \cong Id_B^* \eta$. Deste modo, segue do Axioma 2 que $w_i(\xi) = (Id_B)_1^*(w_i(\eta)) = w_i(\eta)$, para qualquer $i \geq 0$. □

Proposição 5.2. Se ξ é um fibrado trivial, então $w_i(\xi) = 0$, para $i > 0$.

Demonstração: Como ξ é um fibrado trivial, isto é, $\xi \cong \epsilon_{B(\xi)}^n$, para algum inteiro $n \geq 0$, então $w_i(\xi) = w_i(\epsilon_{B(\xi)}^n)$, pela Proposição 5.1. Assim, mostremos que $w_i(\epsilon_{B(\xi)}^n) = 0$, para $i > 0$.

Para tanto, fixado $b_0 \in B(\xi)$ qualquer, defina $f : B(\xi) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b_0\} \times \mathbb{R}^n$ por $f(b, r) = (b_0, r)$, para todo $(b, r) \in B(\xi) \times \mathbb{R}^n$. Assim, f é contínua e $f|_{\{b\} \times \mathbb{R}^n} : \{b\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{b_0\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear, para todo $b \in B(\xi)$.

Logo, f é uma aplicação fibrada de $\epsilon_{B(\xi)}^n$ em $\epsilon_{b_0}^n$, com aplicação correspondente nos espaços bases a aplicação constante $c : B(\xi) \rightarrow \{b_0\}$. Então, $\epsilon_{B(\xi)}^n \cong c^* \epsilon_{b_0}^n$.

Com isso, segue do Axioma 2 que $w_i(\epsilon_{B(\xi)}^n) = c_i^*(w_i(\epsilon_{b_0}^n))$. Porém, $c_i^* : H^i(\{b_0\}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação nula para $i > 0$, uma vez que $H^i(\{b_0\}, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $i > 0$.

Assim, $0 = c_i^*(w_i(\epsilon_{b_0}^n)) = w_i(\epsilon_{B(\xi)}^n) = w_i(\xi)$. □

Proposição 5.3. *Se ξ e η são fibrados sobre o mesmo espaço base B tais que ξ é trivial, então $w_k(\xi \oplus \eta) = w_k(\eta)$, para qualquer $k \geq 0$.*

Demonstração: Inicialmente, note que

$$w_0(\xi \oplus \eta) = w_0(\xi) \smile w_0(\eta) = 1 \smile w_0(\eta) = w_0(\eta)$$

Agora, para $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} w_k(\xi \oplus \eta) &= \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta) \\ &= 1 \smile w_k(\eta) + \sum_{i=1}^k w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta) \\ &= w_k(\eta) + 0 \\ &= w_k(\eta) \end{aligned}$$

o que conclui o resultado. □

Proposição 5.4. *Se ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado Euclidiano e possui k seções linearmente independentes, com $1 \leq k \leq n$, então:*

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = \cdots = w_n(\xi) = 0$$

Em particular, se ξ possui uma seção não-nula, então $w_n(\xi) = 0$.

Demonstração: Se ξ admite k seções linearmente independentes, segue do Teorema 4.8 que existe um \mathbb{R}^k -subfibrado trivial de ξ , digamos ϵ .

Deste modo, como ξ é um \mathbb{R}^n -fibrado Euclidiano, então $\xi \cong \epsilon \oplus \epsilon^\perp$, onde ϵ^\perp é um \mathbb{R}^{n-k} -fibrado. Assim, temos que

$$w_i(\xi) = w_i(\epsilon \oplus \epsilon^\perp) = w_i(\epsilon^\perp)$$

para qualquer $i > 0$.

Sendo ϵ^\perp um \mathbb{R}^{n-k} -fibrado, concluímos que $w_i(\xi) = w_i(\epsilon^\perp) = 0$, para $i > n - k$. □

Definição 5.1. Denotaremos por $H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$ o anel das séries infinitas formais

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

onde $a_i \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots$.

A operação soma deste anel é dada por

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots) + (b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots$$

Ainda, a operação produto deste anel é definida por

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

onde $c_k = \sum_{i=0}^k (a_i \smile b_{k-i})$, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$.

Observação 5.5. Note que, a operação produto definida acima é associativa, já que $H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$ é um anel, e é comutativa pelo Teorema 2.13.

Definição 5.2. A classe de Stiefel-Whitney total de um \mathbb{R}^n -fibrado ξ é o elemento

$$W(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots + w_n + 0 + 0 + \cdots \in H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$$

Deste modo, o Axioma 3 pode ser reescrito como $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi)W(\eta)$

Lema 5.6. A coleção de todas as séries formais infinitas

$$W = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$$

com o primeiro termo 1 forma um grupo abeliano com relação ao produto definido acima.

(Este grupo é exatamente o grupo das unidades do anel $H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$)

Demonstração: Pela Observação 5.5, sabemos que a operação produto é associativa, comutativa e seu elemento neutro é $1 + 0 + 0 + \cdots \in H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$. Assim, basta provarmos a existência do elemento inverso de um elemento arbitrário

$$W = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$$

Para tanto, defina $\overline{W} = 1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots$, onde $\overline{w}_k = \sum_{i=1}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}}$, para cada $k = 1, 2, \dots$.

Assim, $W\overline{W} = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$, onde $c_k = \sum_{i=0}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}}$, para cada $k = 0, 1, 2, \dots$.

Então, para $k = 0$, temos

$$c_0 = w_0 \smile \overline{w_0} = 1 \smile 1 = 1$$

E, para $k \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}} \\ &= 1 \smile \overline{w_k} + \sum_{i=1}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}} \\ &= \overline{w_k} + \sum_{i=1}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}} \\ &= \sum_{i=1}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}} + \sum_{i=1}^k w_i \smile \overline{w_{k-i}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

uma vez que estamos trabalhando com coeficientes em \mathbb{Z}_2 .

Logo, $W\overline{W} = 1 + 0 + 0 + \cdots$ e, portanto, \overline{W} é o elemento inverso de $W \in H^\Pi(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$. □

Agora, a igualdade $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi)W(\eta)$ pode ser reescrita como $W(\eta) = \overline{W}(\xi)W(\xi \oplus \eta)$.

Nestas condições, podemos garantir pela Proposição 5.2 o seguinte

Corolário 5.7. Se $\xi \oplus \eta$ for um fibrado trivial, então $W(\eta) = \overline{W}(\xi)$.

Agora, calcularemos as classes de Stiefel-Whitney de alguns casos especiais.

Exemplo 5.8. A classe total de Stiefel-Whitney do fibrado linha canônico γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ é dada por $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, onde $\langle a \rangle = H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Com efeito, considere a inclusão $i: E(\gamma_1^1) \hookrightarrow E(\gamma_n^1)$, que é uma aplicação fibrada de γ_1^1 em γ_n^1 , com aplicação correspondente nos espaços bases sendo a inclusão $j: \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$.

Com isso, $\gamma_1^1 \cong j^* \gamma_n^1$ e, pelo Axioma 2, temos $w_k(\gamma_1^1) = j_k^*(w_k(\gamma_n^1))$. Note que, para $k > 1$, decorre do Axioma 1 que $w_k(\gamma_n^1) = 0$, uma vez que γ_n^1 é um \mathbb{R} -fibrado.

Por outro lado, segue do Axioma 4 que $w_1(\gamma_1^1) = b \neq 0$, onde $\langle b \rangle = H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$, isto é, $j_1^*(w_1(\gamma_n^1)) = b \neq 0$. Como j_1^* é linear e $w_1(\gamma_n^1) \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \langle a \rangle$, então $w_1(\gamma_n^1) = a$ e, conseqüentemente, $W(\gamma_n^1) = 1 + a$.

Exemplo 5.9. Por definição o fibrado linha canônico γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ é um subfibrado do fibrado trivial $\epsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$. Deste modo, podemos considerar γ^\perp o complemento ortogonal de γ_n^1 em $\epsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}$, ou seja, $\epsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1} \cong \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$.

Então, como $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ é um fibrado trivial, segue que $W(\gamma^\perp) = \overline{W}(\gamma_n^1)$. Sendo γ^\perp um \mathbb{R}^n -fibrado, devemos calcular apenas $w_i(\gamma^\perp)$, para $1 \leq i \leq n$, afim de obter $W(\gamma^\perp)$.

Pois bem, por definição, temos $w_0(\gamma^\perp) = \overline{w}_0(\gamma_n^1) = 1$ e $w_k(\gamma^\perp) = \overline{w}_k(\gamma_n^1) = \sum_{i=1}^k w_i(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_{k-i}(\gamma_n^1)$. Como $W(\gamma_n^1) = 1 + a$, podemos concluir que $w_k(\gamma^\perp) = \overline{w}_k(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_n^1) \smile \overline{w}_{k-1}(\gamma_n^1) = a \smile \overline{w}_{k-1}(\gamma_n^1)$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} w_k(\gamma^\perp) &= a \smile \overline{w}_{k-1}(\gamma_n^1) \\ &= a \smile (a \smile \overline{w}_{k-2}(\gamma_n^1)) \\ &= a^2 \smile \overline{w}_{k-2}(\gamma_n^1) \\ &= a^2 \smile (a \smile \overline{w}_{k-3}(\gamma_n^1)) \\ &= a^3 \smile \overline{w}_{k-3}(\gamma_n^1) \\ &= \dots \\ &= a^{k-1} \smile \overline{w}_1(\gamma_n^1) \end{aligned}$$

Agora, veja que $w_1(\gamma^\perp) = \overline{w}_1(\gamma_n^1) = a \smile \overline{w}_0(\gamma_n^1) = a \smile 1 = a$. Assim, $w_k(\gamma^\perp) = a^k$.

Portanto, temos $W(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

Capítulo 6

Variedades Diferenciáveis

Abordaremos agora o conceito de variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m . No que segue, deixaremos subentendido que o espaço considerado será paracompacto, conexo e de Hausdorff.

Definição 6.1. Seja M um espaço topológico. Um **sistema de coordenadas locais** em M é um homeomorfismo $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sobre $x(U) \subset \mathbb{R}^m$, onde $U \subset M$ é um aberto. Dizemos que m é a dimensão do espaço M .

Para cada ponto $p \in U$, têm-se $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$, onde os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamados as coordenadas do ponto $p \in M$ no sistema x .

Definição 6.2. Um **atlas de dimensão m** sobre um espaço topológico M é uma coleção \mathfrak{A} de sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios cobrem M .

Chamamos o espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m de **variedade topológica de dimensão m** .

Dizer que os domínios dos sistemas de coordenadas no atlas \mathfrak{A} cobrem M , significa que, para cada ponto $p \in M$, é possível tomar um aberto $U \subset M$, chamado vizinhança coordenada de \mathfrak{A} , tal que $p \in U$, e um homeomorfismo $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

De modo equivalente, podemos dizer que M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^m .

Dados os sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente ao sistema y .

A correspondência

$$(x^1(p), \dots, x^m(p)) \leftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ chamado mudança de coordenadas.

O uso do sistema de coordenadas e o homeomorfismo mudança de coordenada nos permitem definir e utilizar ferramentas de espaços euclidianos para as variedades, visto que em um espaço topológico tal noção não é possível

Se $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ é outro sistema de coordenadas locais tal que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$, então

$$z \circ x^{-1} = (z \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}) : x(U \cap V \cap W) \rightarrow z(U \cap V \cap W)$$

Em particular, temos $x \circ y^{-1} = (y \circ x^{-1})^{-1}$, uma vez que

$$Id_{x(U)} = x \circ x^{-1} = (x \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1})$$

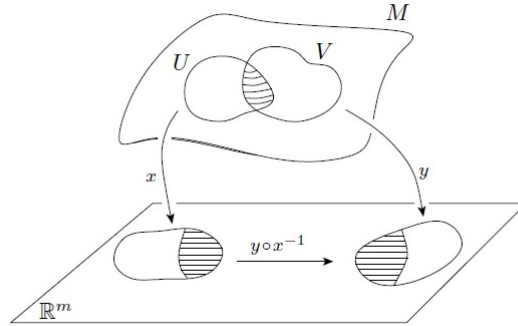


Figura 6.1: Mudança de Coordenada

Fonte: [10], p. 106

Definição 6.3. Um atlas \mathfrak{A} sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável de classe C^k ($k \geq 1$) se todas as mudanças de coordenadas $y \circ x^{-1}$ são aplicações de classe C^k , com $x, y \in \mathfrak{A}$. Denotamos por $\mathfrak{A} \in C^k$.

Dizemos que um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ em M é admissível, relativamente à \mathfrak{A} , se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertencente à \mathfrak{A} , com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $x \circ z^{-1}$ e $z \circ x^{-1}$ são de classe C^k , isto é, se $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M .

Um atlas \mathfrak{A} de dimensão m e classe C^k sobre M é dito ser maximal quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a ele.

Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas maximal de classe C^k . Para isto, basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Note que em um atlas diferenciável \mathfrak{A} , como $x \circ y^{-1} = (y \circ x^{-1})^{-1}$, segue que os homeomorfismos são, de fato, difeomorfismos de classe C^k .

Definição 6.4. Uma **variedade diferenciável** de dimensão m e classe C^k é um par ordenado (M, \mathfrak{A}) , onde M é um espaço topológico, paracompacto, conexo de Hausdorff, e \mathfrak{A} é uma atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M .

Em particular, usaremos o termo variedade suave de dimensão m , quando a variedade for de classe C^∞ .

Observação 6.1. No restante desta seção apresentaremos, por conveniência, definições e exemplos utilizando variedades suaves, porém essas noções e resultados podem ser estendidos para as variedades diferenciáveis m -dimensional de classe C^k , para $k \geq 1$ qualquer.

Agora, iremos estender a noção de diferenciabilidade para as aplicações entre variedades. Esta noção irá se estender de modo natural, uma vez que uma variedade se comporta localmente como um espaço vetorial, onde existem ferramentas para a diferenciabilidade de uma aplicação.

Definição 6.5. Sejam M, N variedades suaves. Uma aplicação entre variedades $f : M \rightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $f_{xy} := y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$.

A aplicação f_{xy} é denominada expressão de f nas coordenadas locais x, y .

Por fim, dizemos que $f : M \rightarrow N$ é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos de M . Ainda, f é de classe C^k se sua expressão for de classe C^k .

Observe que, como os homeomorfismos mudança de coordenadas em M e N são difeomorfismos, a definição de diferenciabilidade independe dos sistemas de coordenadas. Com efeito, suponha que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ seja diferenciável e sejam $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y' : V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ sistemas de coordenadas em M e N respectivamente, com $f(U') \subset V'$. Assim

$$y' \circ f \circ (x')^{-1} = (y' \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ (x')^{-1})$$

que é diferenciável.

Definição 6.6. Diremos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre variedades quando f for uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Se f e f^{-1} forem ambas de classe C^k , então f é um difeomorfismo de classe C^k .

Exemplo 6.2. Seja p um ponto fixado de M e $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ um intervalo. A função suave $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\lambda(0) = p$ é chamada um caminho suave em M que passa por p .

O vetor velocidade deste caminho em $t = 0$ é definido como sendo o vetor $\frac{d\lambda}{dt}|_{t=0}$, cuja α -ésima coordenada é dada por $\frac{d\lambda_\alpha(0)}{dt}$.

Até aqui, construímos uma base teórica para que possamos trabalhar com os elementos de um espaço topológico M , de modo semelhante ao desenvolvido para os espaço euclidianos. Deste modo, podemos considerar simplesmente o caso $M \subset \mathbb{R}^L$, onde L é um conjunto de índices, e \mathbb{R}^L o espaço vetorial constituído das funções contínuas de L em \mathbb{R} . Munimos então o espaço \mathbb{R}^L com a topologia do produto cartesiano de cópias de \mathbb{R} e M com a topologia relativa.

Deste modo, iremos tomar a seguinte definição alternativa de uma variedade diferenciável:

Definição 6.7. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^L$ é uma variedade suave de dimensão n , se para cada $p \in M$, existir uma função suave $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^L$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, tal que φ satisfaz:

- φ é um homeomorfismo de A sobre $\varphi(A)$;
- para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$, os n vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}$ avaliados em a são linearmente independentes.

Chamamos a tripla $(A, \varphi(A), \varphi)$ de parametrização local de M .

Observe que em uma parametrização local $(A, \varphi(A), \varphi)$, desde que φ é uma função suave, o homeomorfismo $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$ é um difeomorfismo, bem como seu inverso φ^{-1} . Desde modo, podemos entender φ^{-1} como um sistema de coordenadas locais suave.

6.1 A Variedade Tangente

Nesta seção exploraremos um dos principais assuntos deste trabalho, o espaço tangente de uma variedade.

Definição 6.8. Sejam $(A, \varphi(A), \varphi)$ uma parametrização local de $M \subset \mathbb{R}^L$, $p \in M$ e $a \in A$ tal que $\varphi(a) = p$. Um vetor $v \in \mathbb{R}^L$ é tangente à variedade M em p se v pode ser expresso como combinação linear dos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}(a), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}(a)$$

A coleção de todos os vetores tangentes à M em p é chamado espaço tangente à M em p e será denotado por $T_p M$.

Definimos ainda a variedade tangente de M como sendo

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^L; v \in T_p M\} \subset M \times \mathbb{R}^L$$

Note que, para todo $p \in M$, um vetor arbitrário $v \in T_p M$, se escreve como uma combinação linear dos n vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}(a), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}(a)$, onde $n = \dim(M)$. Deste modo, o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}(a), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}(a) \right\} \subset T_p M$$

forma uma base para o espaço tangente $T_p M$, donde podemos concluir que $\dim(T_p M) = \dim(M)$. Consequentemente, podemos aferir que $\dim(TM) = 2n$.

Introduzimos a estrutura de variedade diferenciável em TM a partir da estrutura de M do seguinte modo: seja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma sistema de coordenadas em M . Construímos um sistema de coordenadas em TM fazendo $\tilde{x}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dado por

$$\tilde{x}(p, v) = (x^1(p), \dots, x^n(p), \alpha^1(x(p)), \dots, \alpha^n(x(p)))$$

para todo $v = \sum_{i=1}^n \alpha^i(x(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde $\tilde{U} = p_1^{-1}(U)$, sendo $p_1: TM \rightarrow M$ a projeção no primeiro fator.

Lema 6.3. Um vetor $v \in \mathbb{R}^L$ é tangente à variedade M em p se, e somente se, v é o vetor tangente de um caminho que passa por p .

Demonstração: Com efeito, seja $(A, \varphi(A), \varphi)$ uma parametrização local de M e tome $v \in T_p M$ tal que $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_j}(a)$. Defina $\lambda: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ como sendo o caminho dado por $\lambda(t) = \varphi(a_1(t), \dots, a_n(t))$, com $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ tal que $a_j(t) = a_j + t\alpha_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. Então

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}(a)\alpha_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}(a)\alpha_n = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \frac{da_1}{dt} \Big|_{t=0} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{da_n}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\lambda}{dt} \Big|_{t=0}$$

Por outro lado, se $v = \frac{d\lambda}{dt} \Big|_{t=0}$, temos que

$$v = \frac{d\lambda}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\varphi(a_1(t), \dots, a_n(t))) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \frac{da_1}{dt} \Big|_{t=0} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \frac{da_n}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}(a)\alpha_i$$

ou seja, v é um vetor tangente a M no ponto p .

Portanto, segue o resultado. □

Agora, considere duas variedades suaves M, N , uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ e uma parametrização local $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$ de M , tal que, para algum $a \in A$, $\varphi(a) = p$, para $p \in M$.

Para todo $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial a_j}(a) \in T_p M$, defina $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ por $D_p f(v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial a_j}(a)$, para todo $v \in T_p M$. Note que $D_p f$ é uma transformação linear e está bem-definida, uma vez que, pelo Lema 6.3, temos $v = \frac{d\lambda}{dt}|_{t=0}$, para algum caminho suave $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\lambda(0) = p \in M$. Segue então, que $f \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ é um caminho suave tal que $f \circ \lambda(0) = f(p) \in N$. Logo, o vetor $\frac{d(f \circ \lambda)}{dt}|_{t=0} \in T_{f(p)} N$, e

$$\frac{d(f \circ \lambda)}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi(a_1(t), \dots, a_n(t)))|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt}|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial a_j}(a) \alpha_j = D_p f(v)$$

Chamamos $D_p f$ a derivada de f em p .

Combinando as funções derivadas $D_p f$, para todo $p \in M$, obtemos uma função $Df : TM \rightarrow TN$ dada por $Df(p, v) = (f(p), D_p f(v))$, para todo $(p, v) \in TM$.

Definição 6.9. Um **campo de vetores contínuo (diferenciável)** v é uma aplicação contínua (diferenciável) da variedade suave M no espaço tangente TM que, para cada $p \in M$, associa um vetor $v(p) \in T_p M$.

Definição 6.10. Seja v um campo de vetores. Um ponto $p \in M$ é dito ser uma **singularidade** de v se $v(p) \in T_p M$ for nulo.

Em particular, se existir uma vizinhança de p na qual o campo de vetores v não possui outra singularidade, dizemos que p é uma **singularidade isolada** de v .

No que segue, Θ denotará o campo de vetores nulo, ou seja, dado $p \in M$ qualquer, temos que $\Theta(p) = (p, 0) \in TM$.

Quando $D_p v(T_p M)$ e $D_p \Theta(T_p M)$ possuírem apenas o vetor nulo em comum, dizemos que a singularidade $p \in M$ do campo de vetores v é **simples**.

Seja $v : M \rightarrow TM$ um campo de vetores contínuo sobre M e $p \in M$ uma singularidade isolada de v . Existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que, para todo $q \in V - p$, temos $v(q) \neq 0$. Seja $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais de M e coloquemos $a = x(p) \in x(V) \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $q \in V$, temos

$$v(q) = \sum_{i=1}^n \alpha^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$$

onde, para cada $i = 1, \dots, n$ a função $\alpha^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Obtemos assim uma aplicação contínua $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ pondo $f(u) = (\alpha^1(u), \dots, \alpha^n(u))$, para todo $u \in U$.

Sendo $p \in V$ a única singularidade de v em V , temos $f(u) = 0 \in \mathbb{R}^n$ apenas quando $u = a$, consequentemente, $f(U - a) \subset \mathbb{R}^n - 0$.

Podemos relacionar os campos de vetores contínuos com os campos de vetores diferenciáveis através dos seguintes resultados

Teorema 6.4. *Seja M uma variedade compacta. Dado um campo de vetores contínuo v sobre M e $\epsilon > 0$, existe um campo de vetores diferenciável w sobre M tal que $|v - w| < \epsilon$*

Demonstração: [[9], p. 95-97].

Corolário 6.5. *Se existe um campo de vetores contínuo v sem singularidades, então existe um campo de vetores diferenciável sem singularidades.*

Demonstração: Sejam $\{V_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de abertos tais que $\bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha = M$ e $\{U_\beta\}$ uma cobertura de M por abertos tais que $\overline{U_j} \subset V_j$. Dado $p \in V_\alpha \subset M$, temos $v(p) \in T_p M$ dado por

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(p)$$

Coloque $\epsilon = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |a_\alpha^i(p)|; p \in \overline{U_j}; j = 1, \dots, r \right\}$. Desde que v não possui singularidades, segue que $\epsilon > 0$. Pelo Teorema 6.4, podemos aproximar v por um campo diferenciável w de modo que

$$|w - v| < \frac{\epsilon}{2n}$$

Então, para todo $p \in \overline{U_j}$, temos

$$w(p) = \sum_{i=1}^n b_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(p)$$

onde $|b_\alpha^i(p) - a_\alpha^i(p)| < \frac{\epsilon}{2n}$. Logo,

$$\epsilon \leq \sum_{i=1}^n |a_\alpha^i(p)| \leq \sum_{i=1}^n |b_\alpha^i(p) - a_\alpha^i(p)| + \sum_{i=1}^n |b_\alpha^i(p)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n |b_\alpha^i(p)|$$

donde $\sum_i |b_\alpha^i(p)| \geq \frac{\epsilon}{2}$, quaisquer que sejam $p \in \overline{U_j}$ e $j = 1, \dots, r$.

Assim, $w(p) \neq 0$ em todo $p \in M$. □

Proposição 6.6. *Seja $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em M , onde a singularidade p do campo de vetores v pertence a U . Temos*

$$v(q) = \sum_{i=1}^n a^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$$

com $q \in U$ e $a^i(p) = 0$, para $i = 1, \dots, n$.

A singularidade p é simples se, e somente se $\det \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \neq 0$, avaliada no ponto p .

Demonstração: Em termos dos sistemas de coordenadas x em M e \tilde{x} em TM , as aplicações v e Θ se exprimem do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Theta: (x^1, \dots, x^n) &\rightarrow (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \\ v: (x^1, \dots, x^n) &\rightarrow (x^1, \dots, x^n, a^1(x^1, \dots, x^n), \dots, a^n(x^1, \dots, x^n)) \end{aligned}$$

Note que, como os vetores $\frac{\partial}{\partial x^i}$, para $i = 1, \dots, n$ formam uma base de $T_p M$ e p é uma singularidade simples, então os vetores

$$D_p \Theta \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, D_p \Theta \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right), D_p v \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, D_p v \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

são linearmente independentes.

Cada vetor $D_p \Theta \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ possui coordenadas $(0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ em relação ao sistema de coordenadas \tilde{x} , , isto é, todas coordenadas são nulas exceto a i -ésima, que é igual a 1. E as coordenadas do vetor $D_p v \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ em \tilde{x} são

$$\left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial a^1}{\partial x^j}(p), \dots, \frac{\partial a^n}{\partial x^j}(p) \right)$$

onde as n primeiras coordenadas são nulas exceto a j -ésima.

Assim, a matriz quadrada onde as colunas são as coordenadas dos vetores $D_p \Theta \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ e $D_p v \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ com relação ao sistema \tilde{x} possui a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \end{pmatrix}$$

onde os quatro blocos são matrizes $n \times n$.

Portanto, a matriz tem determinante não nulo se, e somente, se, os $2n$ vetores $\frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p)$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, são linearmente independentes.

Mas, este determinante é justamente $\det \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p) \right)$, o que demonstra o Lema. \square

Corolário 6.7. *As singularidades simples de um campo de vetores diferenciável são isoladas no conjunto das singularidades deste campo.*

Demonstração: Seja $p \in M$ uma singularidade simples de v . Para um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $p \in U$ e $v(q) = \sum_i a^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$, $q \in U$ arbitrário, temos $a^i(p) = (0, \dots, 0)$, para $i = 1, \dots, n$ e $\det \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p) \right) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de p tal que a aplicação

$$(x^1, \dots, x^n) = q \mapsto (a^1(q), \dots, a^n(q))$$

é um difeomorfismo de V sobre uma vizinhança do ponto $(0, \dots, 0)$.

Portanto, para todo ponto $q \neq p$ em V , teremos que $(a^1(q), \dots, a^n(q)) \neq (0, \dots, 0)$, ou seja, p é a única singularidade de v na vizinhança V . \square

Estabeleceremos agora o seguinte resultado sobre os campos de vetores diferenciáveis e as singularidades simples desses campos.

Teorema 6.8. *Todo campo de vetores diferenciável pode ser aproximado (na topologia C^1) por um campo diferenciável de singularidades simples.*

Demonstração: [[9], p. 115].

Definição 6.11. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades suaves. Um ponto $p \in M$ é dito ser um **ponto regular** de f se $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é uma aplicação linear bijetiva.

Se para cada ponto $p \in M$, a derivada $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva, dizemos que f é uma **imersão**. Neste caso, dizemos que M pode ser imersa em N .

Em particular, se f for um homeomorfismo entre M e sua imagem $f(M)$, chamamos f de um **mergulho**.

Podemos definir também um valor regular da aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ em um ponto $q \in N$. Neste caso, $q \in N$ é dito ser regular de f se, para todo $p \in f^{-1}(q)$, a aplicação linear $D_p f : T_p M \rightarrow T_q N$ for sobrejetiva em $T_q N$.

6.2 Orientação de Variedades

Introduziremos agora a noção de orientabilidade de uma variedade. Porém, antes veremos tal noção aplicada em espaços vetoriais e, em seguida, estenderemos esse conceito para as variedades.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita n e \mathcal{B} o conjunto das bases ordenadas de V . Definiremos uma relação de equivalência em \mathcal{B} do seguinte modo:

Sejam $\{b_1, \dots, b_n\}$ e $\{c_1, \dots, c_n\}$ duas bases ordenadas de V . Diremos que essas bases são equivalentes se

$$b_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j c_i, \quad j = 1, \dots, n$$

onde (α_i^j) tem determinante positivo.

Então, uma orientação no espaço vetorial V é uma dessas classes de equivalência. Um espaço vetorial orientado é um par formado por um espaço vetorial V e uma orientação. As bases de V pertencentes a esta orientação serão chamadas positivas, e as outras negativas.

Definição 6.12. Diremos que uma variedade diferenciável M é orientável quando for possível orientar cada espaço tangente $T_p M$, $p \in M$, de modo que a orientação desses espaços varie "continuamente" no seguinte sentido:

Se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas locais em M , com $U \subset M$ conexo, então a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right\} \in T_p M$$

associada ao sistema x , ou é positivo para todo $p \in A$, ou então é negativo para todo $p \in A$.

No primeiro caso, diremos que o sistema x é positivo e escrevemos $x > 0$. No segundo, dizemos que x é negativo e denotamos $x < 0$.

M é orientada quando se escolhe uma coleção de orientações nos espaços $T_p M$ do tipo acima e tal coleção é a orientação de M .

Enunciaremos o próximo Teorema apenas para o entendimento das próximas construções. Assim, não daremos uma demonstração para tal resultado, a qual pode ser encontrada em [9].

Teorema 6.9 (Teorema de Sard). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. O conjunto dos pontos de N que são valores regulares de f tem medida nula em N .*

Lembremos que uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciáveis é uma função própria, quando, para todo compacto $K \subset N$, a imagem inversa $f^{-1}(K) \subset M$ é um compacto.

Consideremos M e N variedades diferenciáveis orientadas n -dimensional e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria.

Pelo Teorema de Sard, temos que o conjunto dos valores regulares $q \in N$ da aplicação f é denso em N e, como f é própria, esse conjunto é aberto em N .

Seja, pois $q \in N$ um valor regular de f . Temos

$$f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_r\} \subset M$$

Em cada ponto $p_i \in f^{-1}(q)$, a aplicação linear tangente $D_{p_i}f : T_{p_i}M \rightarrow T_qN$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais orientados.

Diremos que o ponto p_i é positivo ($p_i > 0$) se $D_{p_i}f$ preservar a orientação, e negativo ($p_i < 0$) caso $D_{p_i}f$ inverter a orientação.

Definição 6.13. Definiremos o grau de f no valor regular q como o "número algébrico" de pontos em $f^{-1}(q)$. Ou seja, o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $f^{-1}(q)$. Usaremos a notação $gr_q(f)$.

Teorema 6.10. *Sejam M e N variedades orientadas de mesma dimensão, sendo N conexa, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Então o grau $gr_p(f)$ é o mesmo, qualquer que seja o valor regular $p \in N$.*

Demonstração: [[9], p. 34-36]

Além do conceito de grau de uma aplicação, podemos também definir o grau local de uma aplicação.

Definição 6.14. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $a \in U$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Definimos o **grau local** de f em a , denotado por $\gamma_a(f)$, do seguinte modo:

Seja $D = D(a; \epsilon) \subset U$ uma bola fechada e considere $j : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D - a$ dada por $j(x) = a + \epsilon x$, para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\rho : \mathbb{R}^n - b \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $\rho(y) = \frac{y - b}{|y - b|}$, para todo $y \in \mathbb{R}^n - b$.

Quando $\epsilon \rightarrow \infty$, obtemos $D = \mathbb{R}^n$, consideraremos então $j(x) = a + x$, para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Colocamos $\gamma_a(f) = gr_*(\rho \circ f \circ j)$.

Definição 6.15. O **índice** da singularidade p no campo de vetores v é o grau local $\gamma_a(f)$ da aplicação $f : U - a \rightarrow \mathbb{R}^n - 0$. Denotaremos o índice por $I_v(p)$.

Teorema 6.11 (pag. 123). *A soma dos índices de um campo de vetores diferenciável sobre M cujas singularidades são todas simples, é um invariante de M .*

Demonstração: [[9], p. 123].

A soma dos índices das singularidades de um campo de vetores diferenciável é chamada **característica de Euler** de M e indicada por $\chi(M)$.

Teorema 6.12. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $a \in U$ e $f : U - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{b\}$ uma função contínua. Então $\gamma_a(f)$ é zero se, e somente se, para toda bola fechada $D = D(a, \epsilon) \subset U$, existe uma função contínua $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n - \{b\}$ que coincide com f em $U - \text{int}.D$.*

Demonstração: [[9], p. 139-140].

Lema 6.13 (pag. 145). *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ esferas disjuntas de centros a_1 e a_2 , respectivamente, contidas no interior de uma esfera S_0 . Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{a_1, a_2\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ uma aplicação contínua, e coloquemos $f_i = f|_{S_i}$, com $i = 0, 1, 2$. Se orientarmos igualmente as esferas S_i , teremos $gr.(f_0) = gr.(f_1) + gr.(f_2)$.*

Demonstração: [[9], p. 145-146]

Teorema 6.14. *Seja v um campo de vetores contínuo sobre M com $p_1, p_2 \in M$ singularidades isoladas. Dado $V \subset M$ um aberto conexo tal que p_1 e p_2 são as únicas singularidades de v em V , existe um campo de contínuo u sobre M que coincide com v em $M - V$, e que admite uma única singularidade $p \in V$. Além disso, $I_u(p) = I_v(p_1) + I_v(p_2)$.*

Demonstração: Desde que V é conexo, existe um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $U \subset V$ é um aberto que contém p_1 e p_2 . Sejam $a_1 = x(p_1)$ e $a_2 = x(p_2)$, e considere a expressão do campo de vetores v em um ponto $q \in U$ qualquer dada por

$$v(q) = \sum_{i=1}^n \alpha^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$$

Considere ainda uma bola fechada $D(0, r)$, contendo os pontos a_1 e a_2 em seu interior. A expressão de v em termos do sistema x nos fornece uma aplicação contínua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(z) = (\alpha^1(z), \dots, \alpha^n(z))$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Note que $f(z) = 0$ apenas quando $z = a_1$ ou quando $z = a_2$, visto que p_1 e p_2 são as únicas singularidades de v em V .

Em particular, se $|z| = r$, temos $f(z) \neq 0$. Defina uma aplicação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad |z| \geq r \\ \frac{|z|}{r} \cdot f\left(\frac{r}{|z|} \cdot z\right) & , \quad 0 < |z| \leq r \\ 0 & , \quad z = 0 \end{cases}$$

Desde que f é contínua, segue que g é contínua, coincide com f fora de $B(0, r)$ e $g(z) = 0$ somente quando $z = 0$. Sejam $\beta^1, \dots, \beta^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ as funções contínuas tais que $g(z) = (\beta^1(z), \dots, \beta^n(z))$. Defina um campo de vetores $u : M \rightarrow TM$ por

$$u(q) = \begin{cases} v(q) & , \quad q \in M - U \\ \sum_{i=1}^n \beta^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q) & , \quad q \in U \end{cases}$$

Desde que g coincide com f fora de $D(0, r)$, concluímos que u é um campo de vetores contínuo que coincide com v em $M - V$ e a única singularidade de u em V é o ponto $p = x^{-1}(0)$.

Mostremos então que $I_u(p) = I_v(p_1) + I_v(p_2)$. Para isto, considere D_1 e D_2 duas bolas disjuntas de $D(0, r)$, com centro em a_1 e a_2 , respectivamente. Sejam S_0, S_1 e S_2 os bordos das bolas $D(0, r), D_1$ e D_2 , respectivamente. Por fim, indiquemos com $j_0 : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D(0, r) \setminus \{0\}$, $j_1 : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D_1 \setminus \{a_1\}$ e $j_2 : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D_2 \setminus \{a_2\}$ as equivalências de homotopia usuais. Temos

$$\begin{aligned} I_v(p_1) &= gr.(\rho f j_1) \\ I_v(p_2) &= gr.(\rho f j_2) \\ I_u(p) &= gr.(\rho g j_0) = gr.(\rho f j_0) \end{aligned}$$

onde a última igualdade é válida uma vez que $g|_{S_0} = f|_{S_0}$, e $S_0 = j_0(\mathbb{S}^{n-1})$.

Portanto, o resultado segue do último Lema. □

Corolário 6.15. *Seja v é um campo de vetores contínuo sobre M com finitas singularidades $p_1, \dots, p_n \in M$. Dado $V \subset M$ um aberto conexo contendo todas as singularidades de v , existe um campo de vetores contínuo u sobre M que coincide com v em $M - V$, e que admite uma única singularidade $p \in V$. Além disso, $I_u(p) = \sum_{i=1}^n I_v(p_i)$.*

Demonstração: Com efeito, consideremos primeiro as singularidades p_1 e p_2 . Seja $V_{12} \subset V$ um aberto conexo de modo que as únicas singularidades de v sejam p_1 e p_2 . Aplicando o Teorema 6.14, obtemos um campo de vetores contínuo u_1 sobre M que coincide com v em $M - V_{12}$, com $I_{u_1}(q_2) = I_v(p_1) + I_v(p_2)$.

Agora, consideremos um aberto conexo $V_{23} \subset V$ que contém q_2 e p_3 e nenhuma outra singularidade de u_1 . Aplicando novamente o Teorema 6.14, obtemos um campo de vetores contínuo u_2 sobre M , que coincide com u_1 em $M - V_{23}$ e, conseqüentemente, coincide com v em $M - V$. Assim, u_2 possui apenas uma singularidade $q_3 \in V_{23}$ e $I_{u_2}(q_3) = I_v(p_1) + I_v(p_2) + I_v(p_3)$.

Prosseguindo de modo análogo, concluiremos que existe um campo de vetores contínuo $u = u_{m-1}$ sobre M , que coincide com v em $M - V$ e admite apenas uma singularidade $p = q_m$ em M , tal que $I_u(p) = \sum_{i=1}^m I_v(p_i)$. □

Corolário 6.16. *Em toda variedade compacta existe um campo de vetores contínuo com apenas uma singularidade.*

Demonstração: De fato, dada a variedade compacta M , sempre podemos encontrar um campo de vetores contínuo sobre M com um número finito de singularidades do seguinte modo:

Tomemos um campo de vetores contínuo w sobre M (se necessário, w pode ser o campo de vetores nulo) e aproximamos um campo de vetores diferenciável v cujas singularidades são todas simples. Assim, as singularidades de v são isoladas e, como M é compacta, elas são em número finito. Daí aplicando o Corolário 6.15 ao campo de vetores v , obtemos o campo de vetores contínuo u com apenas uma singularidade. □

Teorema 6.17. *Seja v um campo de vetores contínuo sobre uma variedade compacta M , com um número finito de singularidades p_1, \dots, p_m . Têm-se $I_v(p_1) + \dots + I_v(p_m) = \chi(M)$.*

Demonstração: Pelo Corolário 6.15, existe um campo de vetores contínuo u sobre M que possui somente uma singularidade p , com $I_u(p) = \sum_{i=1}^m I_v(p_i)$. Nosso objetivo é mostrar que $I_u(p) = \chi(M)$.

Seja $x: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas locais em M , com $p \in V$. Considere uma bola fechada $D \subset \mathbb{R}^n$ centrada em $a = x(p)$ e chamemos de S o bordo de D . Aplicando o Teorema 6.14, tomemos um campo de vetores diferenciável w sobre M que possui apenas singularidades simples e que está próximo de u que satisfaz as seguintes condições:

1) Não existem singularidades de w em $M - x^{-1}(int.D)$

2) Se $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são as aplicações dadas por $f(z) = (\alpha^1(z), \dots, \alpha^n(z))$ e $g(z) = (\beta^1(z), \dots, \beta^n(z))$, onde

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^n \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

em V , então

$$\left\| \frac{f(z)}{|f(z)|} - \frac{g(z)}{|g(z)|} \right\| < 2$$

para todo $z \in S$.

Por conseguinte, $I_u(p) = gr.(\rho \circ f \circ j) = gr.(\rho \circ g \circ j)$. Assim, $I_u(p)$ é igual ao grau da restrição $(\rho g)|_S$, onde g é definida pelo campo w em termos do sistema de coordenadas x . Ora, w possui apenas um número finito de singularidades em M , digamos q_1, \dots, q_n , as quais pertencem a $x^{-1}(int.B)$. Além disso, estas singularidades são todas simples, de modo que $\sum_i I_w(q_i) = \chi(M)$.

Sejam $a_1 = x(q_1), \dots, a_r = x(q_r) \in int.B$ e tomemos (pequenas) esferas disjuntas S_i centradas em a_i e contidas em S . Considerando a aplicação

$$h = \rho \circ g : \mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \rightarrow S^{n-1}$$

temos $I_u(p) = gr.(h|_S)$ e $I_w(q_i) = gr.(h|_{S_i})$.

Assim, $\chi(M) = \sum_{i=1}^n gr.(h|_{S_i})$, mas pela generalização do Lema 6.13, vale que $gr.(h|_S) = \sum_{i=1}^n gr.(h|_{S_i})$, o que demonstra que $\chi(M) = I_u(p)$. \square

6.3 Grupos e Álgebras de Lie

Veremos um caso particular de variedade diferenciável, os chamados Grupos de Lie, os quais possuem a seguinte definição:

Definição 6.16. Um **grupo de Lie** é uma variedade diferenciável G munido de uma estrutura de grupo tal que as aplicações

$$\begin{aligned} (g, h) \in G \times G &\mapsto gh \in G \\ g \in G &\mapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

são diferenciáveis. Denotaremos o elemento neutro de G por e .

Um homomorfismo entre grupos de Lie G e H é uma função diferenciável $\varphi : G \rightarrow H$ que é um homomorfismo de grupos. Um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo cuja inversa também é um homomorfismo de grupos de Lie.

Definição 6.17. Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação à esquerda de G sobre M é uma função diferenciável $\alpha : G \times M \rightarrow M$ tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad \alpha(gh, p) &= \alpha(g, \alpha(h, p)), \forall g, h \in G \text{ e } \forall p \in M \\ (ii) \quad \alpha(e, p) &= p, \forall p \in M \end{aligned}$$

De modo análogo, uma ação à direita de G sobre M é uma função diferenciável $\beta : M \times G \rightarrow M$ que satisfaz

$$\begin{aligned} (iii) \quad \beta(p, gh) &= \beta(\beta(p, g), h), \forall g, h \in G \text{ e } \forall p \in M \\ (iv) \quad \beta(p, e) &= p, \forall p \in M \end{aligned}$$

Dada uma ação à esquerda $\alpha : G \times M \rightarrow M$, para cada $g \in G$ podemos construir uma aplicação $\alpha_g : M \rightarrow M$ dada por $\alpha_g(p) = \alpha(g, p)$, para todo $p \in M$. Pelo item (i), segue que $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$. Ainda, $\alpha_e = Id_M$, pelo item (ii).

Note que as aplicações $\alpha_g : M \rightarrow M$ são difeomorfismos, para todo $g \in G$. De fato, considere para todo $g \in G$ a inclusão $i_g : M \rightarrow G \times M$ dada por $i_g(p) = (g, p)$, para todo $p \in M$. Deste modo, temos $\alpha_g = \alpha \circ i_g$ e, como i_g é diferenciável, segue que α_g também é diferenciável, uma vez que α é diferenciável por definição.

Ainda, desde que $\alpha_g^{-1} : M \rightarrow M$ é tal que $\alpha_g \circ \alpha_g^{-1} = Id_M$ e $Id_M = \alpha_e = \alpha_{gg^{-1}} = \alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}}$, segue que $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ que também é diferenciável, donde segue que α_g é um difeomorfismo.

Proposição 6.18. *As ações dadas pelas aplicações $l, r : G \times G \rightarrow G$ definidas por $l(g, h) = gh$ e $r(g, h) = hg$, para todo par $(g, h) \in G \times G$, são transitivas.*

Para cada $g \in G$, os difeomorfismos $l_g, r_g : G \rightarrow G$ são chamados translação à esquerda por g e translação à direita por g , respectivamente.

Demonstração: De fato, pela Definição 6.16, segue que estas aplicações são diferenciáveis e, pela Definição 6.17 temos que são ações, com l uma ação à esquerda e r uma ação à direita.

Agora, dados $g, h \in G$ quaisquer, o elemento $g^{-1}h \in G$, é tal que $l(g, g^{-1}h) = g(g^{-1}h) = h$. Por outro lado, o elemento $hg^{-1} \in G$ é tal que $r(g, hg^{-1}) = (hg^{-1})g = h$.

Observe que as ações l e r mostram que para quaisquer dois pontos no Grupo de Lie, existe um único difeomorfismo global que leva um ponto no outro. \square

Note que se $g \in G$ é tal que, para algum $h \in G$ vale que $l(g, h) = h$ e $r(g, h) = h$, segue que $g = e$, pois se $(g, h) \in G \times G$ é tal que $l(g, h) = h$, então considerando o elemento neutro $e \in G$, temos

$$g = ge = g(hh^{-1}) = (gh)h^{-1} = hh^{-1} = e$$

De modo análogo vale para r .

Assim podemos concluir que dados $g, h \in G$ arbitrários, têm-se que $T_g G$ e $T_h G$ são isomorfos, através do isomorfismo $l_{hg^{-1}} : G \rightarrow G$. Como $l_{hg^{-1}}(g) = h$, então $Dl_{hg^{-1}} : T_g G \rightarrow T_h G$ é um isomorfismo, onde $Dl_{hg^{-1}}$ denota a derivada de l no elemento $hg^{-1} \in G$.

Da unicidade de tais difeomorfismos, podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 6.18. Um campo de vetores tangentes $v : G \rightarrow TG$ à um grupo de Lie G é dito ser invariante à esquerda se $v(h) = (Dl_{hg^{-1}})v(g)$, quaisquer que sejam $g, h \in G$. Enquanto que o campo é dito invariante à direita se $v_h = (Dr_{g^{-1}h})v_g$.

Denotaremos o conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G por \mathfrak{l} e o conjunto dos campos invariantes à direita por \mathfrak{r}

Exemplo 6.19. Considere o grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ com a estrutura diferenciável usual. Assim, a aplicação $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x - y$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é diferenciável, pela estrutura de \mathbb{R} . Portanto, \mathbb{R} com a operação adição é um grupo de Lie.

Vejamos agora como construir um novo grupo de Lie através de um produto cartesiano de outros dois grupos de Lie.

Sejam G, H grupos de Lie e $\alpha : H \times G \rightarrow G$ uma ação à esquerda de H sobre G tal que, para todo $h \in H$, a função $\alpha_h : G \rightarrow G$ é um homomorfismos de grupos de Lie.

Considere a variedade $G \times H$ e defina, para todo par $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ a operação

$$(g_1, h_1) \cdot_{\alpha} (g_2, h_2) := (g_1 \cdot \alpha_{h_1}(g_2), h_1 h_2)$$

Deste modo, $(G \times H, \cdot_{\alpha})$ tem a estrutura de grupo, com elemento neutro (e_G, e_H) e elemento inverso de (g, h) o elemento $(\alpha_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1})$. A multiplicação e a inversão neste grupo são dadas por

$$\begin{aligned} ((g_0, h_0), (g_1, h_1)) &\in (G \times H) \times (G \times H) &\mapsto (g_0 g_1, h_0 h_1) &\in G \times H \\ (g_0, h_0) &\in G \times H &\mapsto (g_0^{-1}, h_0^{-1}) &\in G \times H \end{aligned}$$

Desde que G e H são grupos de Lie, segue as funções coordenadas da multiplicação e da inversão são diferenciáveis. Logo, $G \times H$ possui multiplicação e inversão diferenciáveis, donde segue que este é um grupo de Lie chamado produto semi-direto de G e H , e é denotado por $G \rtimes_{\alpha} H$.

Definição 6.19. Seja \mathbb{K} um corpo. Dizemos que um espaço vetorial \mathcal{A} é uma álgebra sobre \mathbb{K} (\mathbb{K} -álgebra) se existe uma operação

$$* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

que satisfaz, para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$ e $k \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (i) \quad a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (ii) \quad (a + b) * c &= a * c + b * c \\ (iii) \quad k(a * b) &= (ka) * b = a * (kb) \end{aligned}$$

Se \mathcal{A} é uma álgebra linear associativa, define-se o colchete $[X, Y]$ dos vetores X e Y em \mathcal{A} por

$$[X, Y] = XY - YX$$

onde XY indica o produto da álgebra \mathcal{A} .

Definição 6.20. Uma **álgebra de Lie** sobre um corpo \mathbb{K} é uma \mathbb{K} -álgebra \mathcal{A} com um operador bilinear $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ dado por $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ que satisfaz

$$\begin{aligned} (i) \quad [Y, X] &= -[X, Y] \text{ (antisimetria)} \\ (ii) \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= 0 \text{ (identidade de Jacobi)} \end{aligned}$$

para todos X, Y e Z em \mathcal{A} .

Note que com a definição de colchete, \mathcal{A} é uma álgebra de Lie, pois

$$[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y]$$

Ainda

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [X, Y]Z - Z[X, Y] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX = XYZ + ZYX - (YXZ + ZXY) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} [[Y, Z], X] &= [Y, Z]X - X[Y, Z] \\ &= (YZ - ZY)X - X(YZ - ZY) \\ &= YZX - ZYX - XYZ + XZY = XZY + YZX - (XYZ + ZYX) \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} [[Z, X], Y] &= [Z, X]Y - Y[Z, X] \\ &= (ZX - XZ)Y - Y(ZX - XZ) \\ &= ZXY - XZY - YZX + YXZ = YXZ + ZXY - (XZY + YZX) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Somando (6.1), (6.2) e (6.3), podemos inferir que

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Proposição 6.20. *O espaço vetorial dos campos de vetores invariantes à esquerda \mathfrak{l} é isomorfo ao espaço vetorial $T_g G$, para todo $g \in G$.*

Demonstração: Pela Proposição 6.18, basta mostrarmos que \mathfrak{l} é isomorfo a $T_e G$. Para isto, defina a aplicação $f : \mathfrak{l} \rightarrow T_e G$ por $f(v) = v(e)$, para todo $v \in \mathfrak{l}$, onde $e \in G$ é o elemento neutro.

Assim, dados $v, w \in \mathfrak{l}$ quaisquer e α um escalar, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha v + w) &= (\alpha v + w)(e) \\ &= (\alpha v)(e) + w(e) \\ &= \alpha v(e) + w(e) \\ &= \alpha f(v) + f(w) \end{aligned}$$

Logo, f é um homomorfismo.

Ainda, $\ker(f) = \{v \in \mathfrak{l}; f(v) = 0\} = \{v \in \mathfrak{l}; v(e) = 0\} = \{0\}$, ou seja, f é injetor e, conseqüentemente, f é um isomorfismo. □

Segue da Proposição anterior que podemos induzir em $T_g G$ uma estrutura de álgebra de Lie.

Capítulo 7

Fibrados em Variedades Diferenciáveis

Abordaremos agora os fibrados em que o espaço base e o espaço total são variedades diferenciáveis e a aplicação projeção é uma aplicação diferenciável. Estes fibrados são chamados fibrados diferenciáveis.

Dentre os fibrados diferenciáveis, o fibrado tangente será de extrema importância para o entendimento dos próximos capítulos. Iremos explorar este fibrado através de alguns exemplos, que se relacionam com os temas abordados nos capítulos 4 e 5.

7.1 Fibrados Diferenciáveis

Definição 7.1. Um **fibrado vetorial diferenciável** é um fibrado vetorial onde B e E são variedades diferenciáveis, $\pi : E \rightarrow B$ é uma aplicação diferenciável sobrejetiva e, para cada $b \in B$, existe um sistema de coordenadas locais (U, h) , com $b \in U$, tal que h é um difeomorfismo.

Definição 7.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço. Para cada $p \in M$, definimos o **espaço normal** de M em p como sendo o complemento ortogonal de $T_p M$ em \mathbb{R}^n .

Exemplo 7.1. Fibrado normal

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável. Considere $B = M$ e $E \subset M \times \mathbb{R}^n$ definido por $E = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n, v \in (T_p M)^\perp\}$, e $\pi : E \rightarrow M$ dada por $\pi(p, v) = p$, para todo $(p, v) \in E$. Assim, π é contínua e sobrejetiva.

Cada fibra $F_p = \{p\} \times (T_p M)^\perp$ tem estrutura de espaço vetorial semelhante aos definidos no capítulo 4.

O fibrado normal da variedade diferenciável M será denotado por ν_M .

A condição de trivialidade local deste fibrado será demonstrada posteriormente.

Exemplo 7.2. Fibrado tangente

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável de dimensão $k \geq 0$. Considere $B = M$, $E = TM$ e $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, w) = p$, para todo par $(p, w) \in TM$. Deste modo, π é contínua e sobrejetiva.

Como M é diferenciável, para qualquer $p \in M$, considere $\phi : U \rightarrow V$ uma parametrização local de M em torno de p , onde $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset M$ são abertos. Logo, temos $D\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(V)$, uma vez que $TU = U \times \mathbb{R}^k$, pois U é aberto em \mathbb{R}^k , e $TV = \{(v, z) \in V \times \mathbb{R}^n; z \in T_v V\} = \{(v, z) \in TM; \pi(v, z) \in V\} = \pi^{-1}(V)$.

Defina $h: V \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(V)$ por $h(b, v) = (b, D_{\phi^{-1}(b)}\phi(v))$, para todo $(b, v) \in V \times \mathbb{R}^k$, ou seja, h é definida de modo que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U \times \mathbb{R}^k & \\ \phi^{-1} \times Id_{\mathbb{R}^k} \nearrow & & \searrow D\phi \\ V \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(V) \end{array}$$

é comutativo.

Assim, temos que h é um homeomorfismo, visto que é a composição de homeomorfismos. Ainda, a correspondência $v \rightarrow h(b, v) = (b, D_{\phi^{-1}(b)}\phi(v))$ para todo $b \in V$, é um isomorfismo de espaços vetoriais, uma vez que ϕ é um difeomorfismo, segue que $D_{\phi^{-1}(b)}\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow T_v V$ é um isomorfismo.

O fibrado tangente da variedade M será denotado por τ_M .

Note que para o fibrado tangente τ_M , uma seção $s: M \rightarrow TM$ é um campo de vetores.

Definição 7.3. Se τ_M for um fibrado trivial, então a variedade M é chamada **paralelizável**.

Em vista do Teorema 4.8 e da Definição 7.3, podemos dizer que uma variedade suave M é paralelizável se $\tau_M \cong \epsilon_M^k$.

Vejam os exemplos de variedade paralelizável.

Exemplo 7.3. Seja $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $T\mathbb{S}^1 = \{(x, v) \mid x \in \mathbb{S}^1 \text{ e } v \in T_x\mathbb{S}^1\}$ seu fibrado tangente. Uma vez que podemos identificar \mathbb{R}^2 com os números complexos \mathbb{C} , podemos considerar $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, isto é, $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) = x + iy \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$.

Dado um ponto $(x, y) \in \mathbb{C}$ arbitrário, podemos escrevê-lo em sua forma polar $z = (x, y) = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = |z|e^{i\theta}$, para algum $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Defina $s: \mathbb{S}^1 \rightarrow T\mathbb{S}^1$ por $s(z) = \left(e^{i\theta}, e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \right)$, para todo $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$.

Note que s está bem definida, pois se $(x, y) = z = e^{i\theta}$, então $e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{i\theta} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = (x, y) \cdot i = z \cdot i$ e, consequentemente, $\langle z, z \cdot i \rangle = 0$.

Ainda, como cada coordenada de s é uma função contínua, segue que s é uma função contínua e, para todo $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, vale que

$$\pi_{\tau_{\mathbb{S}^1}} \circ s(z) = \pi_{\tau_{\mathbb{S}^1}}(s(z)) = \pi_{\tau_{\mathbb{S}^1}}\left(e^{i\theta}, e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}\right) = e^{i\theta} = z = Id_{\mathbb{S}^1}(z)$$

e $s(z) \neq 0 \in F_z(\tau_{\mathbb{S}^1})$, pois $z \cdot i \neq 0$.

Portanto, s é uma seção não-nula de $\tau_{\mathbb{S}^1}$ e do Teorema 4.8, têm-se que $\tau_{\mathbb{S}^1} \cong \epsilon_{\mathbb{S}^1}^1$.

Uma métrica euclidiana $\mu: TM \rightarrow \mathbb{R}$ do fibrado tangente τ_M é chamada de **métrica Riemanniana** e o par (M, μ) é chamado de variedade Riemanniana.

Exemplo 7.4. Para qualquer variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$, temos que τ_M é um fibrado Euclidiano.

Para isto, defina $\mu: TM \rightarrow \mathbb{R}$ por $\mu(x, (v_1, \dots, v_n)) = \sum_{i=1}^n v_i^2$, para todo $(x, (v_1, \dots, v_n)) \in TM$. Assim, μ é contínua, pela própria definição, e μ restrita a cada fibra de τ_M é uma forma quadrática definida positiva.

Portanto, τ_M é um fibrado Euclidiano.

Tendo em vista o fibrado produto cartesiano, temos o seguinte resultado para o fibrado tangente:

Exemplo 7.5. Sejam $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ variedades diferenciáveis. Considere a variedade $M = M_1 \times M_2$ e tomemos seu fibrado tangente $TM = \{(x_1, x_2), (v_1, v_2)\} \in M \times \mathbb{R}^{n+m}; (v_1, v_2) \in T_{(x_1, x_2)}M = T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2\}$.

Defina $f: TM \rightarrow TM_1 \times TM_2$ por $f((x_1, x_2), (v_1, v_2)) = ((x_1, v_1), (x_2, v_2))$, para todo $((x_1, x_2), (v_1, v_2)) \in TM$. Assim, f está bem-definida e é contínua.

Ainda, f mapeia cada fibra $F_{(b_1, b_2)}(\tau_M)$ na fibra correspondente $F_{b_1}(\tau_{M_1}) \times F_{b_2}(\tau_{M_2})$.

Portanto, segue do Lema 4.7 que f é um homeomorfismo, ou seja, $\tau_M \cong \tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.

Exemplo 7.6. Suponha que $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$ sejam variedades diferenciáveis e N com uma métrica Riemanniana. Então o fibrado τ_M é um sub-fibrado da restrição $\tau_N|_M$.

Com efeito, considere $(x, v) \in E(\tau_M) = TM$ qualquer, com $x \in M$ e $v \in T_xM$. Como $M \subset N$, então T_xM é um subespaço vetorial de T_xN . Logo, $x \in N$ e $v \in T_xN$, ou seja, $(x, v) \in TN = E(\tau_N)$. Sendo $x \in M$, temos $(x, v) \in \pi_{\tau_N}^{-1}(M)$ e, conseqüentemente, $(x, v) \in E(\tau_N|_M)$.

Ainda, para qualquer $b \in M$, $F_b(\tau_M)$ é um subespaço vetorial de $F_b(\tau_N|_M)$. De fato, como T_bM é um subespaço vetorial de T_bN , então $F_b(\tau_M) = \{b\} \times T_bM$ é um subespaço vetorial de $\{b\} \times T_bN = F_b(\tau_N) = F_b(\tau_N|_M)$.

Definição 7.4. O fibrado normal de uma variedade M em uma variedade Riemanniana N é chamado o complemento ortogonal $\tau_M^\perp \subset \tau_N|_M$.

Corolário 7.7. Para alguma subvariedade diferenciável M de uma variedade diferenciável Riemanniana N temos $\tau_N|_M \approx \tau_M \oplus \tau_M^\perp$

Exemplo 7.8. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade C^∞ . Pela definição do fibrado tangente τ_M , segue que $\tau_M \subset \epsilon_M^n$. Logo, $\epsilon_M^n \approx \tau_M \oplus \tau_M^\perp$.

Observação 7.9. Se ξ é um fibrado vetorial diferenciável e f uma aplicação diferenciável, então E_1 é uma subvariedade diferenciável de $B_1 \times E$.

Com efeito, como E é uma variedade diferenciável, B_1 um espaço topológico arbitrário com uma função diferenciável $f: B_1 \rightarrow B$ e B uma variedade diferenciável, então B_1 também é uma variedade diferenciável e, conseqüentemente, $B_1 \times E$ é uma variedade diferenciável de dimensão k .

Assim, para cada ponto $(b, e) \in B_1 \times E$ existe uma vizinhança V em $B_1 \times E$ que é difeomórfica a um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^k$. Tomando a restrição $f|_{E_1}$ temos que a variedade E_1 é diferenciável. Como $E_1 \subset B_1 \times E$, segue que E_1 é uma subvariedade de $B_1 \times E$.

7.2 Classes Características de Fibrados Diferenciáveis

Teorema 7.10 (Teorema da Dualidade de Whitney). *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -variedade C^∞ , então $w_i(\tau_M) = \overline{w}_i(\nu_M)$, para todo $i \geq 0$.*

Demonstração: Como visto no Exemplo 7.8, temos que $\epsilon_M^n \approx \tau_M \oplus \tau_M^\perp = \tau_M \oplus \nu_M$, ou seja, $\tau_M \oplus \nu_M$ é um fibrado trivial e, conseqüentemente, $W(\tau_M) = \overline{W}(\nu_M)$, isto é, $w_i(\tau_M) = \overline{w}_i(\nu_M)$, para todo $i \geq 0$. \square

Exemplo 7.11. Seja τ o fibrado tangente da esfera unitária \mathbb{S}^n . Então a classe $w(\tau) = w(\mathbb{S}^n)$ é igual a 1. Em outras palavras, o fibrado tangente de \mathbb{S}^n não pode ser distinguido do fibrado trivial de \mathbb{S}^n , do ponto de vista de classes características.

Pois, como $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade diferenciável, então $\tau_{\mathbb{S}^n} \oplus \nu_{\mathbb{S}^n} \approx \epsilon_{\mathbb{S}^n}^{n+1}$. Deste modo, $w_i(\mathbb{S}^n) = \overline{w}_i(\nu_{\mathbb{S}^n})$, para todo $i \geq 0$.

Mostremos que $\nu_{\mathbb{S}^n}$ é um fibrado trivial. Inicialmente, como $\dim(T_x \mathbb{S}^n)^\perp = 1$ e $x \in \mathbb{S}^n$ é um vetor normal de $T_x \mathbb{S}^n$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$, então $x \in (T_x \mathbb{S}^n)^\perp$.

Deste modo, defina $s : \mathbb{S}^n \rightarrow E(\nu_{\mathbb{S}^n})$ por $s(x) = (x, x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Observe que s está bem-definida, é contínua e é uma seção não-nula de $\nu_{\mathbb{S}^n}$, desde que $x \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Logo, segue do Teorema 4.8 que $\nu_{\mathbb{S}^n}$ é um fibrado trivial.

Logo, $w_0(\nu_{\mathbb{S}^n}) = 1$ e $w_j(\nu_{\mathbb{S}^n}) = 0$, para todo $j \geq 1$. Como $\overline{w}_0(\nu_{\mathbb{S}^n}) = 1$ e

$$\overline{w}_k(\nu_{\mathbb{S}^n}) = \sum_{i=1}^k w_i(\nu_{\mathbb{S}^n}) \smile \overline{w}_{k-i}(\nu_{\mathbb{S}^n}) = 0$$

para todo $k \geq 1$.

Então, $w_0(\mathbb{S}^n) = 1$ e $w_i(\mathbb{S}^n) = 0$, para todo $i \geq 1$, isto é, $W(\mathbb{S}^n) = 1$.

Capítulo 8

O Problema dos Campos de Vetores

Assumiremos a partir de agora que todas as variedades serão suaves paracompactas e de Hausdorff.

Seja M uma variedade conexa de dimensão $n \geq 1$. Se $p \in M$, o espaço tangente à M em p será denotado por T_pM . Ainda, denotaremos o fibrado tangente de M por τM e seu espaço total $\bigcup_{p \in M} T_pM = TM$.

A projeção do fibrado é denotada por $\pi : TM \rightarrow M$ e definida por $\pi(x, v) = x$, onde $x \in M$ e $v \in T_xM$.

Definição 8.1. Um campo de vetores v em M é uma aplicação

$$\begin{aligned} v : M &\rightarrow T_pM, & \text{para todo } p \in M \\ p &\mapsto v(p) \end{aligned}$$

que varia continuamente com p .

Deste modo, v é contínua e, dado $x \in M$ arbitrário, temos

$$\pi \circ v(x) = \pi(v(x)) = \pi(x, v) = x$$

Em outras palavras, v é uma seção transversal contínua do fibrado tangente.

Definição 8.2. Seja M uma variedade suave. O número inteiro r é chamado de $span(M)$ se r for o maior inteiro não-negativo de modo que exista campos de vetores contínuos v_1, v_2, \dots, v_r em M tal que $v_1(p), v_2(p), \dots, v_r(p) \in T_pM$ são linearmente independentes, para todo $p \in M$.

Note que dizer que os campos $v_1(p), v_2(p), \dots, v_r(p) \in T_pM$ são linearmente independentes, para todo $p \in M$, equivale a dizer que os campos v_1, \dots, v_r não possuem singularidades em M . Assim, podemos dizer que o $span(M)$ é o número de campos de vetores contínuos que não possuem singularidades.

Estaremos preocupados com o seguinte problema:

O Problema dos Campos de Vetores: Determinar o $span(M)$, onde M é uma variedade suave.

Acontece que, no problema dos campos de vetores, se exigirmos que o campo de vetores seja suave, então o número r resultante não se altera. Esta é uma consequência do fato que o espaço de todas as funções suaves é denso no espaço de todas as funções contínuas.

Então, podemos trabalhar com campos de vetores suaves. Ainda, note que a seguinte desigualdade é válida $0 \leq span(M) \leq dim(M)$.

Definição 8.3. Dizemos que uma variedade M é paralelizável se $span(M) = dim(M)$.

Vejam agora alguns exemplos de campos de vetores em variedades com os respectivos span.

Exemplo 8.1. Se M é um subespaço de \mathbb{R}^n , então $span(M) = dim(M) = n$.

Para ver isto, sejam $x_1, \dots, x_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas de \mathbb{R}^n restritas à M , e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação dada por $x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, para todo $p \in M$.

Para todo $1 \leq j \leq n$, defina $v_j : M \rightarrow TM$ por

$$v_j(p) = \left. \frac{\partial x}{\partial x_j} \right|_p$$

para todo $p \in M$.

Então, os vetores v_j são vetores linearmente independentes tangentes à M .

Exemplo 8.2. Seja $M = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Então, dado o par $(x, y) \in \mathbb{S}^1$, fazendo a associação

$$(x, y) \mapsto -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \in T_{(x,y)} \mathbb{S}^1$$

obtemos um campo de vetores (suave) tangente à \mathbb{S}^1 . Portanto, $span(\mathbb{S}^1) = 1$.

Exemplo 8.3. Considere a esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e o espaço tangente à \mathbb{S}^n em $x = (x_0, \dots, x_n)$, $T_x \mathbb{S}^n$, como o subespaço $\{x\}^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Quando $n = 3$, podemos considerar \mathbb{R}^4 como a álgebra de divisão dos quatérnions sobre \mathbb{R} gerado por i e j , onde

$$i^2 = -1 = j^2, k = ij = -ji$$

e conseqüentemente,

$$k^2 = -1, ik = -j, ki = j, kj = -i, jk = i$$

A esfera \mathbb{S}^3 é o espaço dos quatérnions unitários. Multiplicando (à esquerda) pelos quatérnions unitários i, j, k obtemos campos de vetores v_1, v_2, v_3 em \mathbb{S}^3 , respectivamente, a saber, dado $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{S}^3$, temos

$$\begin{aligned} v_1(q) &= iq = -q_1 + q_0 i - q_3 j + q_2 k \\ v_2(q) &= jq = -q_2 + q_3 i + q_0 j - q_1 k \\ v_3(q) &= kq = -q_3 - q_2 i + q_1 j + q_0 k \end{aligned}$$

Calculando o produto interno usual dos vetores acima, obtemos

$$v_r(q) \perp q \quad \text{e} \quad v_r(q) \perp v_s(q)$$

para $r = 1, 2, 3, s = 1, 2, 3, r \neq s$.

Além disso, $\|v_r(q)\| = 1$, para todo $q \in \mathbb{S}^3$ e $r = 1, 2, 3$, uma vez que

$$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1 \quad \text{e} \quad \|q\| = 1$$

Portanto, v_1, v_2, v_3 são campos de vetores linearmente independentes em \mathbb{S}^3 e, então, concluímos que $span(\mathbb{S}^3) = 3 = dim(\mathbb{S}^3)$.

Usando a multiplicação nos octônios, nós podemos escrever explicitamente 7 campos de vetores sempre linearmente independentes em \mathbb{S}^7 . A álgebra dos octônios, denotada por $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$, é também conhecida por Álgebra de Cayley.

A álgebra $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$ é uma álgebra de divisão não-comutativa, não-associativa e gerada sobre \mathbb{R} por e_i , $1 \leq i \leq 7$, com multiplicação dada pela seguinte tabela

1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

onde $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{O}$ denota a identidade da multiplicação.

Observe na tabela que $e_i^2 = -1$ e $e_i e_j = -e_j e_i$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ainda, a multiplicação por e_j preserva a norma euclidiana em \mathbb{O} , onde o produto interno canônico é entendido ser com respeito à base e_j , $0 \leq j \leq 7$.

Agora, defina $v_j: \mathbb{S}^7 \rightarrow T\mathbb{S}^7$ por $v_j(x) = e_j x$, para $0 \leq j \leq 7$ e todo $x \in \mathbb{S}^7$. Então

$$v_0(x) = e_0 x = 1x = x$$

e

$$\|v_j(x)\| = \|e_j x\| = \|e_j\| \cdot \|x\| = 1 \cdot 1 = 1$$

Ainda, para todo $x \in \mathbb{S}^7$

$$v_i(x) \perp v_j(x), i \neq j$$

Portanto, v_1, v_2, \dots, v_7 são campos de vetores em \mathbb{S}^7 que são sempre linearmente independentes e, conseqüentemente, $span(\mathbb{S}^7) = 7$

Exemplo 8.4. Seja G um grupo de Lie e $u \in T_e G$, onde e denota o elemento identidade de G . Obtemos um campo de vetores, denotado por v em G , tomando $v(g) = Dl_g(u) \in T_g G$, para $g \in G$, onde $l_g: G \rightarrow G$ é a multiplicação à esquerda por g , ou seja, dado $h \in G$, temos $l_g(h) = g \cdot h$.

Note que, dados $g, h \in G$, segue que

$$v(h) = D\lambda_h(v(g)) = D\lambda_h \circ Dl_g(u) = D(\lambda_h \circ l_g)(u) = D\lambda_{h \cdot g}(u) = v(h \cdot g)$$

$$v(h) = Dl_h(u) = Dl_{hg^{-1}g}(u) = (Dl_{hg^{-1}}) \circ Dl_g(u) = (Dl_{hg^{-1}})(v(g))$$

Portanto, v é um campo de vetores invariante à esquerda em G , à menos de um isomorfismo.

Por outro lado, todo campo de vetores invariante à esquerda em G é determinado pelo seu valor na identidade. Portanto, $T_e G$ é identificado com o espaço vetorial de todos os campos de vetores à esquerda em G .

Se v_1, \dots, v_n formam uma base para $T_e G$, então o campo de vetores à esquerda v_1, \dots, v_n são sempre linearmente independentes. Em particular, $span(G) = dim(G)$.

O colchete de Lie de dois campos de vetores invariantes à esquerda são novamente invariantes à esquerda, fazendo $T_e G$ uma álgebra de Lie, que será denotada por \mathfrak{g} .

Exemplo 8.5. Podemos generalizar o Exemplo 8.4 para G -fibrados principais do seguinte modo:

Seja $\pi : P \rightarrow M$ a projeção de um fibrado principal suave sobre a variedade suave M com fibra e grupo estrutural um grupo de Lie G . Sejam $\nu \in \mathfrak{g}$ e $p \in P$.

Identificando G com a órbita $G_p \subset P$ através de p , ou seja, $G_p = \{g \cdot p; g \in G\}$, nós obtemos um vetor tangente $\widetilde{\nu}_q \in T_q P$ que corresponde a ν_g , onde $g \cdot p = q \in G_p \subset P$.

Desde que ν é um campo de vetores invariantes à esquerda, e a ação de G em P corresponde a multiplicação à esquerda no grupo de Lie G , $\widetilde{\nu}_q$ não depende da escolha de p e, então, gera um campo de vetor $\widetilde{\nu}$ em P .

Uma escolha de uma base ν_1, \dots, ν_n para \mathfrak{g} , gera um campo de vetores sempre linearmente independentes $\widetilde{\nu}_1 \dots, \widetilde{\nu}_n$. Então, vemos que $\text{span}(P) \geq \dim(G)$.

Exemplo 8.6. Suponha que $p : M \rightarrow N$ é uma projeção de cobertura, onde M e N são variedades suaves e p é uma aplicação suave. Seja Γ a deck transformation group que atua à esquerda de M . Então a ação de Γ em M é, via difeomorfismo, uma ação induzida em TM . Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $e \in T_x M$, escreveremos $\gamma_* e$ ao invés de $D_x \gamma(e)$, para $x \in M$ arbitrário.

Se $x \in M$, então $D_x p : T_x M \rightarrow T_{p(x)} N$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Desde que $p = p \circ \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos que $D_x p(e) = D_{\gamma \cdot x} p(\gamma_* e)$. Portanto, o vetor tangente $D_x p(e) \in T_{p(x)} N$ pode ser identificado com o conjunto

$$[x, e] := \{(\gamma \cdot x, \gamma_* e), \gamma \in \Gamma\}$$

Se ν é um campo de vetor suave em N , então nós podemos levantar a um campo de vetor $\widetilde{\nu}$ em M definido por

$$p_* (\widetilde{\nu}(x)) = \nu(p(x))$$

onde p_* denota $D_x p$. Se ν_1, \dots, ν_k são um k -campo em N , então $\widetilde{\nu}_1, \dots, \widetilde{\nu}_k$ também o são. Consequentemente, $\text{span}(M) \geq \text{span}(N)$.

Observamos ainda que o campo de vetor $\widetilde{\nu}$ obtido como um levantamento de um campo de vetor ν em N , é Γ -invariante, pois para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in M$, temos

$$p_* (\widetilde{\nu}(\gamma(x))) = \nu(p(\gamma(x))) = \nu(p(x)) = p_* (\widetilde{\nu}(x)) = (p \circ \gamma)_* (\widetilde{\nu}(x)) = p_* \circ \gamma_* (\widetilde{\nu}(x))$$

ou seja, $\widetilde{\nu}(\gamma(x)) = \gamma_* (\widetilde{\nu}(x))$.

Por outro lado, se u é um campo de vetor Γ -invariante em M , ele é levantamento de um único campo de vetor ν em N .

8.1 Resultados sobre o span de Esferas

Nesta seção iremos determinar o span das esferas e dos espaços projetivos. Iniciaremos com a seguinte definição

Definição 8.4. Uma aplicação bilinear $\mu : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada uma multiplicação ortogonal se, para todo $u \in \mathbb{R}^k$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|\mu(u, v)\| = \|u\| \cdot \|v\|$$

Dada uma multiplicação ortogonal μ e uma transformação ortogonal Φ de \mathbb{R}^n , temos que a aplicação bilinear $\Phi \circ \mu$ é novamente uma aplicação ortogonal, pois

$$\|\Phi \circ \mu(u, v)\| = \|\phi(\mu(u, v))\| = \|\mu(u, v)\| = \|u\| \cdot \|v\|$$

para todo $u \in \mathbb{R}^k$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Também, se $u \in \mathbb{R}^k$ é um vetor unitário, então $\mu_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\mu_u(v) = \mu(u, v)$ é uma transformação ortogonal, uma vez que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\|\mu_u(v)\| = \|\mu(u, v)\| = \|u\| \cdot \|v\| = \|v\|$$

Usando estas observações, podemos normalizar μ tal que $\mu(e_1, y) = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

A proposição a seguir relaciona a existência de uma multiplicação ortogonal com o $span$ de \mathbb{S}^{n-1} .

Proposição 8.7. *Se existe uma multiplicação ortogonal $\mu : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $span(\mathbb{S}^{n-1}) \geq k - 1$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, assuma que $\mu(e_1, y) = y$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Sejam $x \in \mathbb{R}^k$ um vetor unitário e $\mu_x(y) = \mu(x, y)$. Como visto acima, μ_x é um operador ortogonal. Façamos $\mu_i = \mu_{e_i}$, $1 \leq i \leq k$. Afirmamos que se $y \neq 0$, então $\mu_i(y)$ são todos linearmente independentes, $1 \leq i \leq k$.

Com efeito, suponha $\sum_{i=1}^k a_i \mu_i(y) = 0$, com algum $a_j \neq 0$ e, suponhamos também sem perda de generalidade, $\sum_{i=1}^k a_i^2 = 1$. Então $a = \sum_{i=1}^k a_i e_i$ é um vetor unitário e, conseqüentemente

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^k a_i \mu_i(y) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k a_i \mu(e_i, y) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \mu(a_i e_i, y) \right\| = \left\| \mu \left(\sum_{i=1}^k a_i e_i, y \right) \right\| = \|\mu(a, y)\| = \|y\|$$

Desta forma, temos que $y = 0$, o que contradiz o fato assumido de $y \neq 0$.

Agora, mostremos que $\mu_i(v) \perp \mu_j(v)$, sempre que $i \neq j$ e $v \in \mathbb{R}^n$ é não nulo. Para isto, tome $b = e_i + e_j \in \mathbb{R}^k$, com $i \neq j$. Segue que

$$\begin{aligned} \|b\|^2 = \|e_i + e_j\|^2 &= \langle e_i + e_j, e_i + e_j \rangle \\ &= \langle e_i, e_i \rangle + \langle e_i, e_j \rangle + \langle e_j, e_i \rangle + \langle e_j, e_j \rangle \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Então, usando o fato de μ ser uma multiplicação ortogonal, temos

$$\|\mu(b, v)\|^2 = \|b\|^2 \|v\|^2 = 2\|v\|^2 \tag{8.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\mu(b, v)\|^2 &= \|\mu(e_i + e_j, v)\|^2 \\ &= \|\mu(e_i, v) + \mu(e_j, v)\|^2 \\ &= \langle \mu(e_i, v) + \mu(e_j, v), \mu(e_i, v) + \mu(e_j, v) \rangle \\ &= \langle \mu(e_i, v), \mu(e_i, v) \rangle + \langle \mu(e_i, v), \mu(e_j, v) \rangle + \langle \mu(e_j, v), \mu(e_i, v) \rangle + \langle \mu(e_j, v), \mu(e_j, v) \rangle \\ &= \|\mu_i(v)\|^2 + 2\langle \mu(e_i, v), \mu(e_j, v) \rangle + \|\mu_j(v)\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\langle \mu(e_i, v), \mu(e_j, v) \rangle + \|v\|^2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Segue de (8.1) e (8.2)

$$\|v\|^2 + 2\langle \mu(e_i, v), \mu(e_j, v) \rangle + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 \Rightarrow 2\langle \mu(e_i, v), \mu(e_j, v) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mu(e_i, v), \mu(e_j, v) \rangle = 0$$

donde concluimos que $\mu(e_i, v) \perp \mu(e_j, v)$.

Desde que $\mu_1 = id_{\mathbb{R}^n}$, nós mostramos que as associações $v \mapsto \mu_j(v)$ são campos vetoriais que sempre são linearmente independentes em \mathbb{S}^{n-1} . Portanto, $span(\mathbb{S}^{n-1}) \geq k-1$. \square

Quando $\mu_1 = id_{\mathbb{R}^n}$, segue que $\mu_j = \mu_{e_j}$, $2 \leq j \leq k$, são transformações ortogonais anti-simétricas de \mathbb{R}^n , pois para $j = 2, \dots, k$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mu_j(v+w), v+w \rangle &= \langle \mu_j(v) + \mu_j(w), v+w \rangle \\ &= \langle \mu_j(v), v \rangle + \langle \mu_j(v), w \rangle + \langle \mu_j(w), v \rangle + \langle \mu_j(w), w \rangle \\ &= \langle \mu_j(v), w \rangle + \langle \mu_j(w), v \rangle \end{aligned}$$

donde segue que

$$\langle \mu_j(v), w \rangle = -\langle \mu_j(w), v \rangle$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \|\mu_j \circ \mu_j(w) + w\|^2 &= \langle \mu_j \circ \mu_j(w) + w, \mu_j \circ \mu_j(w) + w \rangle \\ &= \langle \mu_j \circ \mu_j(w), \mu_j \circ \mu_j(w) \rangle + \langle \mu_j \circ \mu_j(w), w \rangle + \langle w, \mu_j \circ \mu_j(w) \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|w\|^2 + 2\langle \mu_j \circ \mu_j(w), w \rangle + \|w\|^2 \\ &= 2\|w\|^2 - 2\langle \mu_j(w), \mu_j(w) \rangle \\ &= 2\|w\|^2 - 2\|w\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Deste modo, concluimos que $\mu_j \circ \mu_j(w) + w = 0$, isto é, $\mu_j \circ \mu_j(w) = -Id_{\mathbb{R}^n}(w)$.

Reciprocamente, se existem transformações ortogonais anti-simétricas μ_i , $2 \leq i \leq k$ satisfazendo as relações acima, então existe uma multiplicação ortogonal $\mu : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\mu_i = \mu_{e_i}$, $i \geq 2$, com $\mu_1 = id_{\mathbb{R}^n}$.

As transformações μ_2, \dots, μ_k são conhecidas como as transformações de Radon-Hurwitz.

A proposição acima apresenta uma relação do 'span' da esfera $n-1$ -dimensional com a existência de uma multiplicação ortogonal. Porém, os espaços reais envolvidos não apresentam nenhuma relação quanto a sua dimensão. Vejamos agora um modo de relacionar as dimensões envolvidas:

Escreva $n = 2^{4a+b}(2c+1)$, onde a, b e c são inteiros satisfazendo $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 3$ e $c \geq 0$. Tal representação é válida para todo n inteiro positivo e é única. Representemos por $\rho(n)$ o número $8a + 2^b$.

Tal número é conhecido como **número de Radon-Hurwitz**, e representa o valor máximo de k tal que existe uma multiplicação ortogonal.

Dos fatos estabelecidos acima, podemos enunciar a Proposição 8.7 do seguinte modo

Teorema 8.8. *Sejam $n \geq 2$ e $\rho(n)$ o número de Radon-Hurwitz. Então $span(\mathbb{S}^{n-1}) \geq \rho(n) - 1$.*

Em 1962 J. F. Adams demonstrou que o limite inferior de Radon-Hurwitz é também o limite superior, determinando de modo preciso o *span* das esferas. Assim, o seguinte resultado foi estabelecido

Teorema 8.9 ([5], pag. 236-239). *Seja $n \geq 2$. Então $span(\mathbb{S}^{n-1}) = \rho(n) - 1$.*

Note que, com as notações usadas na Proposição 8.7, os campos de vetores μ_j na esfera \mathbb{S}^{n-1} são aplicações ímpares, pois, para todo $y \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\mu_j(-y) = \mu(e_j, -y) = -\mu(e_j, y) = -\mu_j(y)$$

Desde que a aplicação que leva \mathbb{S}^{n-1} no espaço $(n-1)$ -dimensional real projetivo $\mathbb{R}P^{n-1}$ é uma aplicação de recobrimento com deck transformation group \mathbb{Z}_2 gerado pela aplicação antípoda, temos que μ_j define campos de vetores $\tilde{\mu}_j$ no espaço quociente $\mathbb{R}P^{n-1} = \frac{\mathbb{S}^{n-1}}{\mathbb{Z}_2}$

Portanto, temos o limite inferior $\text{span}(\mathbb{R}P^{n-1}) \geq \rho(n) - 1$. Reciprocamente, do Exemplo 8.6, temos $\text{span}(\mathbb{S}^{n-1}) \geq \text{span}(\mathbb{R}P^{n-1})$. Consequentemente, o Teorema 8.9 produz o seguinte

Corolário 8.10. $\text{span}(\mathbb{R}P^{n-1}) = \rho(n) - 1$.

Demonstração: Imediato do Teorema 8.9. □

8.2 Resultados sobre o span de Variedades Usando Classes Características

Determinar o span de uma variedade é, em geral, um problema difícil. Contudo, existem técnicas e ferramentas da topologia algébrica sendo aplicadas com sucesso para obter invariantes (obstruções) cujo anulamento (ou não anulamento) levaria a limitantes inferiores (ou superiores) para o span . Geralmente o caso de obter limitante inferior para o span é muito mais difícil do que encontrar invariantes cujo não anulamento leva a limitantes superiores.

O seguinte resultado dá uma condição suficiente e necessária para o span ser pelo menos 1.

Teorema 8.11. *Seja M uma variedade suave conexa compacta. Então o $\text{span}(M) \geq 1$ se, e somente se, a característica de Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M é zero.*

Demonstração: Utilizaremos os conceitos e resultados acerca de singularidades para demonstrar este resultado. Deste modo, iremos demonstrar que existe um campo de vetores sem singularidades sobre M se, e somente se, $\chi(M) = 0$.

Inicialmente, suponha que existe um campo de vetores contínuo sem singularidades sobre M . Pelo Corolário 6.5, existe um campo de vetores diferenciável sem singularidades sobre M . Desde que a soma dos índices é um invariante de M , concluímos que $\chi(M) = 0$ por definição.

Reciprocamente, suponha $\chi(M) = 0$. Pelo Teorema 6.17, existe um campo de vetores contínuo ν_0 com finitas singularidades $s_1, \dots, s_m \in M$ tal que

$$\sum_{i=1}^m I_{\nu_0}(s_i) = \chi(M)$$

Aplicando os Teoremas 6.4 e 6.8, existe um campo de vetores diferenciável ν cujas singularidades s_1, \dots, s_m são todas simples e

$$\sum_{i=1}^m I_{\nu}(s_i) = \chi(M) = 0$$

Usando o Corolário 6.15, obtemos um campo u sobre M com uma única singularidade $p \in M$ tal que $I_u(p) = 0$.

Sejam $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas sobrejetivo, com $p \in V$ e

$$u_q = \sum_{j=1}^n \alpha^j(x(q)) \frac{\partial x}{\partial x_j}(q), \forall q \in V$$

onde $\alpha^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais contínuas.

Defina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(z) = (\alpha^1(z), \dots, \alpha^n(z))$, para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Note que, para $a = x(p)$, temos $f(a) = 0$. Logo, $f(\mathbb{R}^n - \{a\}) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ e grau de f é zero.

Tomemos D a bola fechada de centro a em \mathbb{R}^n . Pelo Teorema 6.12, existe uma aplicação contínua $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ que coincide com f em $\mathbb{R}^n - \text{int}.D$. Seja $g(z) = (\beta^1(z), \dots, \beta^n(z))$, com $\beta^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais contínuas.

Definimos um campo vetorial w sobre M pondo

$$w_q = \begin{cases} u_q & , \quad q \in M - x^{-1}(D) \\ \sum_{j=1}^n \beta^j(x(q)) \frac{\partial}{\partial x_j}(q) & , \quad q \in x^{-1}(D) \end{cases}$$

Logo, w é um campo de vetores contínuo que não possui singularidades. O que conclui a demonstração. \square

O Teorema da Dualidade de Poincaré afirma que em uma variedade orientada M de dimensão n , o k -ésimo grupo de cohomologia de M é isomorfo ao seu $(n - k)$ -ésimo grupo de homologia, ou seja,

$$H^k(M, R) \approx H_{n-k}(M, R)$$

Por este resultado, quando $\dim(M) = d$ é ímpar, a característica de Euler-Poincaré de M se anula, e nós temos

Corolário 8.12. *Suponha que $\dim(M)$ é ímpar. Então $\text{span}(M) \geq 1$.*

A noção de *span* se estende de forma natural para qualquer fibrado vetorial sobre um espaço topológico arbitrário.

Definição 8.5. O *span* de um fibrado real ξ sobre X com projeção $p : E(\xi) \rightarrow X$ é o número máximo r , denotado por $\text{span}(\xi)$, tal que existem seções transversais não-nulas $s_1, \dots, s_r : X \rightarrow E(\xi)$ linearmente independentes.

Da definição acima, temos que o *span* do fibrado tangente τ_M é o número máximo de seções transversais não-nulas $s_1, \dots, s_r : M \rightarrow TM$ que são linearmente independentes em todos os pontos de M . Isto é, o *span* é o número máximo de campos de vetores contínuos não-nulos, o que coincide com a Definição 8.2. Com isso, temos que o $\text{span}(M)$ e o $\text{span}(\tau_M)$ coincidem.

Definição 8.6. O número $\text{rank}(\xi) - \text{span}(\xi)$ é chamado dimensão geométrica de ξ .

Aqui, e no que segue, ϵ denota um fibrado linha trivial e $k \cdot \eta$ denota a k -vezes soma de Whitney $\eta \oplus \dots \oplus \eta$.

Definição 8.7. Seja M uma variedade suave conexa. O $span$ estável de M , denotada por $span^0(M)$, é definida como sendo

$$span^0(M) := span(\tau(M) \oplus \epsilon) - 1$$

Definição 8.8. Dizemos que M é estavelmente trivial se $\tau(M) \oplus \epsilon$ é trivial.

As variedades estavelmente paralelizáveis são também conhecidas como π -variedades.

Em particular, M é estavelmente trivial se, e somente se, $\tau(M) \oplus \epsilon$ é trivial.

O $span$ estável de uma variedade é frequentemente utilizado por ser uma boa aproximação para o $span$ da variedade. Além disso, podemos utilizar ferramentas da topologia algébrica e diferencial para calcular o $span$ estável.

Recordemos que as classes de Stiefel-Whitney são classes estáveis no seguinte sentido: $\omega_j(\xi \oplus r\epsilon) = \omega_j(\xi)$, para todos $j \geq 0$, $r \geq 1$ e $\omega_k(\xi) = 0$, se $k > rank(\xi)$, para qualquer fibrado vetorial ξ .

Segue que se $\omega_{d-r}(M) \neq 0$, para algum $r \geq 0$, onde $d = dim(M)$, então $span^0(M) \leq r$.

Observação 8.13. Todas as esferas são estavelmente paralelizáveis e então $span^0(\mathbb{S}^n) = span(\mathbb{S}^n)$ se, e somente se, $n = 1, 3, 7$.

Reciprocamente, temos o seguinte resultado

Teorema 8.14. Para todo $n \geq 1$, $span^0(\mathbb{R}P^n) = span(\mathbb{R}P^n)$.

Demonstração: Se n é par, a classe de Stiefel-Whitney $\omega_n(\mathbb{R}P^n) \neq 0$ e, conseqüentemente, o $span^0(\mathbb{R}P^n)$ se anula. Ainda, pela Observação 8.13, a afirmação segue válida para $n = 1, 3, 7$.

Então, assumamos que n é ímpar diferente de 1, 3 ou 7. Se η é um \mathbb{R}^n -fibrado tal que

$$\eta \oplus \epsilon \approx (n+1)\xi \approx \tau(\mathbb{R}P^n) \oplus \epsilon$$

então η é isomorfo a $\tau(\mathbb{R}P^n)$. (esta afirmação é devida a James e Thomas em *An Approach to the Enumeration Problem for Non-Stable Vector Bundles*).

Deste modo temos que a dimensão geométrica de $\tau(\mathbb{R}P^n)$ e de $\tau(\mathbb{R}P^n) \oplus \epsilon$ são iguais, ou equivalentemente, $span^0(\mathbb{R}P^n) = span(\mathbb{R}P^n)$, o que conclui a demonstração. \square

Teorema 8.15. Seja M uma variedade compacta conexa de dimensão d . Suponha que M é estavelmente paralelizável. Então ou M é paralelizável ou $span(M) = span(\mathbb{S}^d) = \rho(d+1) - 1$.

Demonstração: [2]

Note que \mathbb{S}^d é paralelizável quando $d = 1, 3, 7$.

Vejamos agora mais alguns exemplos

Exemplo 8.16. Seja S uma superfície compacta conexa orientada de genus g . Sua característica de Euler-Poincaré é $\chi(S) = 2 - 2g$. Portanto, quando $g \neq 1$, temos $span(S) = 0$, via Teorema 8.11.

Quando $g = 1$, S é igual ao toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, o qual é paralelizável.

Quando $g = 0$, a superfície $S = \mathbb{S}^2$. Assim, fixado um mergulho $j : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, denote ν o fibrado normal com respeito a j . Então nós obtemos que

$$3\epsilon = j^*(\tau(\mathbb{R}^3)) = \tau(S) \oplus \nu$$

Desde que S é orientável, o fibrado normal ν é trivial e nós concluímos que S é estavelmente paralelizável.

Exemplo 8.17. Suponha que M seja uma superfície não-orientada. Então ela possui uma dupla cobertura orientada $p : S \rightarrow M$. Têm-se, $\chi(M) = \frac{1}{2} \cdot \chi(S)$. Segue que $\text{span}(M) = 0$, exceto quando S é um toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Quando S é um toro, M é a garrafa de Klein e nós temos $\chi(M) = 0$. Pelo Teorema 8.11, $\text{span}(M) \geq 1$.

Desde que M é não-orientada, $\text{span}(M) < \dim(M) = 2$ e, conseqüentemente, $\text{span}(M) = 1$. Ainda, M não é estavelmente paralelizável.

8.3 Span de Produtos de Variedades

Se M, N são variedades suaves compactas conexas, então

$$\text{span}(M) + \text{span}(N) \leq \text{span}(M \times N)$$

onde a igualdade segue quando $\text{span}(M) = 0 = \text{span}(N)$, via Teorema 8.11.

Se M, N são estavelmente paralelizáveis, então $M \times N$ também é. A recíproca também é válida, pois o fibrado normal da inclusão de cada fator no produto $M \times N$ é trivial.

Assim, se $M \times N$ é paralelizável, podemos concluir que M e N são paralelizáveis, como veremos no Teorema a seguir

Teorema 8.18. *A variedade $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ é paralelizável se ao menos um dos $m \geq 1$ ou $n \geq 1$ for ímpar. Se ambos m e n são pares, então $\text{span}(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) = 0$.*

Demonstração: Assuma que m é ímpar. Então

$$\tau(\mathbb{S}^m) = \epsilon \oplus \eta \tag{8.3}$$

para alguma subfibra $\eta \subset \tau(\mathbb{S}^m)$. Seja p_i , $i = 1, 2$, a projeção no i -ésimo fator de $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$. Usando

$$\epsilon \oplus \tau(\mathbb{S}^n) = (n+1)\epsilon \tag{8.4}$$

temos

$$\begin{aligned} \tau(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) &= p_1^*(\tau(\mathbb{S}^m)) \oplus p_2^*(\tau(\mathbb{S}^n)) \\ &\stackrel{8.3}{=} p_1^*(\epsilon \oplus \eta) \oplus \tau(\mathbb{S}^n) \\ &= p_1^*(\eta) \oplus \epsilon \oplus \tau(\mathbb{S}^n) \\ &\stackrel{8.4}{=} p_1^*(\eta) \oplus (n+1)\epsilon \\ &= p_1^*(\epsilon \oplus \eta) \oplus n \cdot \epsilon \\ &= p_1^*(2\epsilon \oplus \eta) \oplus (n-1)\epsilon \\ &= (m+1)\epsilon \oplus (n-1)\epsilon = (m+n)\epsilon \end{aligned}$$

Agora, se m e n são pares, então

$$\chi(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) = \chi(\mathbb{S}^m) \times \chi(\mathbb{S}^n) = 4$$

e, pelo Teorema 8.11, concluímos que $\text{span}(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) = 0$. □

Teorema 8.19. *Suponha que M, N sejam variedades suaves compactas conexas de dimensão positiva. Assuma que $\chi(N) = 0$ e $\text{span}^0(M) \geq 1$. Então*

$$\text{span}^0(M) + \text{span}^0(N) \leq \text{span}(M \times N) \leq \text{span}^0(M \times N) \leq \min\{\text{span}^0(M) + \dim(N); \dim(M) + \text{span}^0(N)\}$$

Além disso, se M, N são estavelmente paralelizáveis, então $M \times N$ é paralelizável.

Demonstração: Desde que $\chi(N) = 0$, segue do Teorema 8.11, que $r = \text{span}(N) \geq 1$. Escreva $\tau(N) = \theta \oplus r \cdot \epsilon$ e $\tau(N) \oplus \epsilon = \eta \oplus (s+1)\epsilon$, onde $s = \text{span}^0(N)$.

De modo análogo, escrevamos $\tau(M) \oplus \epsilon = \xi \oplus (p+1)\epsilon$, onde $p = \text{span}^0(M) \geq 1$.

A fim de simplificar as notações, denotaremos $\tau M := pr_1^*(\tau(M))$, $\tau N := pr_2^*(\tau(N))$, $\theta := pr_2^*(\theta)$, onde $pr_1 : M \times N \rightarrow M$ é a projeção no primeiro fator e $pr_2 : M \times N \rightarrow N$ é a projeção no segundo fator.

Assim, utilizando a mesma técnica usada na demonstração do Teorema 8.18, temos

$$\begin{aligned} \tau(M \times N) &= \tau M \oplus \tau N \\ &= \tau(M) \oplus \tau(N) \\ &= \tau(M) \oplus \theta \oplus r \cdot \epsilon \\ &= (\tau(M) \oplus \epsilon) \oplus \theta \oplus (r-1)\epsilon \\ &= \xi \oplus (p+1)\epsilon \oplus \theta \oplus (r-1)\epsilon \\ &= \xi \oplus (p-1)\epsilon \oplus \theta \oplus r \cdot \epsilon \oplus \epsilon \\ &= \xi \oplus (p-1)\epsilon \oplus \tau(N) \oplus \epsilon \\ &= \xi \oplus (p-1)\epsilon \oplus \eta \oplus (s+1)\epsilon \\ &= \xi \oplus \eta \oplus (p+s)\epsilon \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\text{span}(M \times N) \geq p + s = \text{span}^0(M) + \text{span}^0(N)$$

Agora, fixe um ponto $q \in N$. A inclusão natural $M \subset M \times N$ levanta o fibrado tangente de $M \times N$ para $\tau(N) \oplus \dim(N) \cdot \epsilon$. Isto implica que $\text{span}^0(M \times N)$ não pode ser maior que $\text{span}^0(M) + \dim(N)$. De modo similar, $\text{span}^0(M \times N) \leq \text{span}^0(N) + \dim(M)$, o que conclui a prova. □

Teorema 8.20. *Suponha que $16 \nmid m$ e $16 \nmid n$, ou $m = 2, 4, 8$. Então, $\text{span}(\mathbb{R}P^{m-1} \times \mathbb{R}P^{n-1}) = \rho(m) + \rho(n) - 2$.*

Demonstração: Seja $m = 2, 4$ ou 8 . Então, pela definição do número de Radon-Hurwitz, podemos concluir que $\rho(m) = m$ e, para qualquer variedade N , temos

$$\text{span}(\mathbb{R}P^{m-1} \times N) = \rho(m) - 1 + \text{span}^0(N) = m - 1 + \text{span}^0(N)$$

Fazendo $N = \mathbb{R}P^{n-1}$, temos $\text{span}^0(N) = \text{span}(N) = \rho(n) - 1$, o que prova este caso.

Agora, façamos o outro caso. Então, suponhamos que 16 não divide m nem n . Neste caso, $\rho(m) = 2^r$, $\rho(n) = 2^s$, onde $m = 2^r m'$ e $n = 2^s n'$, com m' e n' sendo ímpares. Usando a fórmula

$$\omega_j(\mathbb{R}P^{m-1}) = \binom{m}{j} a^j \in H^j(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 a^j$$

obtemos que $\omega_{m-2^r} \neq 0$ e $\omega_j(M) = 0$, para $j > m - 2^r$. As afirmações também seguem para N .

Assim,

$$\omega_{m+n-2^r-2^s}(M \times N) = \omega_{m-2^r}(M) \times \omega_{n-2^s}(N) \neq 0$$

consequentemente, $\text{span}(M \times N) \leq 2^r + 2^s - 2$.

Desde que temos

$$\text{span}(M \times N) \geq \text{span}(M) + \text{span}(N)$$

segue que

$$\text{span}(M \times N) \geq \rho(m) - 1 + \rho(n) - 1 = 2^r + 2^s - 2$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 8.21. Seja $M = S \times \mathbb{S}^1$, onde S é uma superfície não-orientável. Então M é não-orientável e, consequentemente, não-paralelizável. Então, $1 \leq \text{span}(M) \leq 2$.

Se $S = K$ (a garrafa de Klein), nós temos que $\text{span}(M) = 2$. Isto segue do isomorfismo de fibrados

$$\tau(M_1 \times M_2) \cong \tau(M_1) \times \tau(M_2) \cong pr_1^*(\tau(M_1)) \oplus pr_2^*(\tau(M_2))$$

onde $pr_j : M \rightarrow M_j$ é a j -ésima projeção, $j = 1, 2$.

Se $S = \mathbb{R}P^2$, ou geralmente, se S tem característica de Euler-Poincaré ímpar, então a classe de Stiefel-Whitney $\omega_2(S) \in H^2(S, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ é não-nula. Isto implica que $\omega_2(M) \neq 0$ e segue que $\text{span}(M) = 1$.

Exemplo 8.22. Seja $M = \mathbb{R}P^m \times \mathbb{S}^n$. Se m é ímpar, então

$$\text{span}^0(\mathbb{R}P^m) + \text{span}^0(\mathbb{S}^n) \stackrel{8.14}{=} \text{span}(\mathbb{R}P^m) + n \stackrel{8.19}{\leq} \text{span}(M)$$

Por outro lado

$$\text{span}(M) \stackrel{8.19}{\leq} \text{span}^0(\mathbb{R}P^m) + \dim(\mathbb{S}^n) \stackrel{8.14}{=} \text{span}(\mathbb{R}P^m) + n$$

ou seja, $\text{span}(M) = \text{span}(\mathbb{R}P^m) + n = \rho(m+1) + n - 1$, pelo Corolário 8.10.

Se m, n são ambos pares, então $\text{span}(M) = 0$ e $\text{span}^0(M) = n$, desde que $\omega_m(M) \neq 0$.

Se m é par e n é ímpar, então

$$\text{span}(\mathbb{S}^n) \leq \text{span}(\mathbb{R}P^m) + \text{span}(\mathbb{S}^n) \stackrel{8.19}{\leq} \text{span}(M) \stackrel{8.19}{\leq} \text{span}^0(M) = n$$

Mas o valor exato do span parece ser desconhecido em geral. Quando $m = 2$ e $n \equiv 1 \pmod{8}$, $n \geq 9$, acontece que $\text{span}(M) = 3$, enquanto $\text{span}^0(M) = n$.

Capítulo 9

Campos de Vetores em Espaços Homogêneos

Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado. Consideremos a estrutura diferencial natural em espaços homogêneos $M = G/H$. Então a aplicação quociente $G \rightarrow G/H$ é suave.

Teorema 9.1. *Seja $\Gamma \subset G$ um subgrupo discreto de um grupo de Lie G . Então G/Γ é paralelizável.*

Demonstração: Utilizaremos para esta demonstração os espaços de classes laterais à esquerda $\Gamma \backslash G$ ao invés das classes laterais à direita G/Γ . O fibrado tangente $\tau(\Gamma \backslash G)$ possui a seguinte descrição:

$$T(\Gamma \backslash G) = G \times \mathfrak{g} / \sim$$

onde $(x, v) \sim (hx, d\lambda_h(v))$, com $x \in G$, $v \in \mathfrak{g}$ e $h \in \Gamma$.

Sejam v_1, \dots, v_n campos de vetores não-nulos linearmente independentes e G -invariantes em G , onde $n = \dim(G)$. Desde que $d\lambda_h(v_j(x)) = v_j(hx)$, para todo $h \in \Gamma$, temos que

$$\overline{v_j}(\Gamma x) = [x, v_j(x)] \in T_{Hx}(\Gamma \backslash G)$$

é um campo de vetores suave bem-definido em $\Gamma \backslash G$, para $1 \leq j \leq n$. □

9.1 Variedades de Stiefel

Seja $1 \leq k \leq n$. Recordemos que a variedade de Stiefel $V_{n,k}$ é o espaço ordenado de todas as k -uplas (v_1, \dots, v_k) de vetores unitários de \mathbb{R}^n que são dois a dois ortogonais (com o produto interno padrão).

Quando $k = 1$, $V_{n,1}$ é a esfera S^{n-1} . O grupo $SO(n)$ atua transitivamente em $V_{n,k}$ com isotropia em (e_1, \dots, e_k) , sendo $I_k \times SO(n-k) = SO(n-k)$. Consequentemente, $V_{n,k} \approx SO(n)/SO(n-k)$.

Seja $\beta_{n,k}$ (ou simplesmente β) o fibrado vetorial real sobre $V_{n,k}$ cuja fibra sobre qualquer k -frame $v = (v_1, \dots, v_k) \in V_{n,k}$ é o espaço vetorial real $\{v_1, \dots, v_k\}^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Temos o isomorfismo do fibrado vetorial real

$$k\epsilon_{\mathbb{R}} \oplus \approx n\epsilon_{\mathbb{R}} \tag{9.1}$$

onde $\epsilon_{\mathbb{R}}$ denota o fibrado vetorial real trivial. Novamente, $\epsilon_{\mathbb{R}}$ irá denotar o fibrado real linha trivial

Teorema 9.2. *As variedades de Stiefel real $V_{n,k}$ é paralelizável quando $k \geq 2$.*

Demonstração: A seguinte descrição do fibrado tangente se deve a Lam (*A formula for the tangent bundle of flag manifolds and related spaces*):

$$\tau(V_{n,k}) \approx k\beta \oplus \binom{k}{2}\epsilon$$

onde o isomorfismo é de fibrado vetorial real.

Se $k \geq 3$, então $\binom{k}{2} \geq k$. De fato, sendo $k \geq 3$, segue que $k-1 \geq 2$ e, conseqüentemente, $k(k-1) \geq 2k$, isto é, $\frac{k(k-1)}{2} \geq k$. Agora, note que

$$\frac{k(k-1)}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \binom{k}{2}$$

donde concluímos a afirmação.

Ainda, note que $\binom{k}{2} = k-1 + \binom{k-1}{2}$, uma vez que, sendo $\binom{k-1}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, temos

$$k-1 + \binom{k-1}{2} = k-1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \frac{2(k-1) + (k-1)(k-2)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!}$$

e como $\frac{k!}{2!(k-2)!} = \binom{k}{2}$, segue a afirmação.

Usando o isomorfismo 9.1 ($\beta \oplus k\epsilon \approx n\epsilon$), obtemos

$$\begin{aligned} \tau(V_{n,k}) &\approx k\beta \oplus \binom{k}{2}\epsilon \\ &\approx (k-1)\beta \oplus \beta \oplus k\epsilon \oplus \left(\binom{k-1}{2} - 1\right)\epsilon \\ &\stackrel{9.1}{\approx} (k-1)\beta \oplus n\epsilon \oplus \left(\binom{k-1}{2} - 1\right)\epsilon \\ &\approx (k-1)\beta \oplus \left(\binom{k-1}{2} + n - 1\right)\epsilon \end{aligned}$$

o que leva à trivialidade de $V_{n,k}$.

Quando $k = 2$, o argumento acima falha para $V_{n,2}$. Contudo utilizando a teoria de obstruções, é possível mostrar que $\tau(V_{n,2}) \oplus \epsilon$ é trivial. Portanto, $V_{n,2}$ é estavelmente paralelizável. \square

9.2 Variedades de Stiefel Projetivas

Inicialmente, daremos a definição de variedades de Stiefel projetivas.

A **variedade de Stiefel projetiva real** $PV_{n,k}$ é definida como o quociente de $V_{n,k}$ sob a identificação antípoda $v \sim -v$. Deste modo $PV_{n,1}$ é o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n-1}$. A variedade $PV_{n,k}$ é o espaço homogêneo

$$\frac{O(n)}{(\mathbb{Z}_2 \times O(n-k))}$$

onde o fator \mathbb{Z}_2 é o subgrupo $\{I_k, -I_k\} \subset O(k) \subset O(n)$.

A aplicação quociente $V_{n,k} \rightarrow PV_{n,k}$ é a aplicação de cobertura dupla que é universal, exceto quando $k = n-1$, caso em que $V_{n,n-1} \approx SO(n)$.

Denotaremos por $\zeta_{n,k}$ (ou simplesmente por ζ) o fibrado linha real sobre $PV_{n,k}$ associado à aplicação $V_{n,k} \rightarrow PV_{n,k}$. Ainda, denotaremos por $\beta_{n,k}$ (ou apenas β) o fibrado sobre $PV_{n,k}$ cuja fibra sobre um ponto $[v_1, \dots, v_k] \in PV_{n,k}$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_k$ em \mathbb{R}^n .

A projeção na j -ésima coordenada $p_j : PV_{n,k} \rightarrow PV_{n,1} (= \mathbb{R}P^{n-1})$ se levanta a uma aplicação fibrada de $PV_{n,k}$ em $PV_{n,1}$. Ou seja, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{n,k} & \longrightarrow & V_{n,1} \\ q_k \downarrow & & \downarrow q_1 \\ PV_{n,k} & \xrightarrow{p_j} & PV_{n,1} \end{array}$$

Conseqüentemente, $p_j^*(\xi) \approx \zeta$, para $1 \leq j \leq k$, onde ξ é o fibrado linha de Hopf em $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Usando isto, obtemos o seguinte isomorfismo de fibrados vetoriais reais sobre $PV_{n,k}$

$$k\zeta_{n,k} \oplus \beta_{n,k} \approx n\epsilon \quad (9.2)$$

Fazendo a multiplicação tensorial pelo conjugado $\overline{\zeta_{n,k}}$ ($\approx \zeta_{n,k}$ em \mathbb{R}) e usando o isomorfismo $\zeta \otimes \bar{\zeta} \approx \epsilon$, obtemos

$$k\epsilon \oplus \beta_{n,k} \otimes \zeta_{n,k} \approx n\zeta_{n,k} \quad (9.3)$$

O fibrado linha de Hopf sobre as variedades de Stiefel projetivas reais possui a seguinte propriedade universal. Os dois teoremas a seguir podem ser encontrados em [13]

Teorema 9.3. *Seja ξ qualquer fibrado linha real sobre um espaço topológico X . Então existe um inteiro positivo n e um fibrado vetorial real η tal que $\eta\xi \approx \eta \oplus k\epsilon$ como fibrados vetoriais reais se, e somente se, existe uma aplicação contínua $f : X \rightarrow PV_{n,k}$ tal que $f^*(\zeta) \approx \xi$.*

Seja

$$N := \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ n - k + j; \binom{n}{n - k + j} \equiv 1 \pmod{2} \right\}$$

Denotemos por $V = V(x_1, \dots, x_m)$ uma \mathbb{Z}_2 -álgebra gerada pelos elementos homogêneos x_j , $1 \leq j \leq m$, tal que

$$\{x_1^{\epsilon_1} \cdots x_m^{\epsilon_m}; \epsilon_j \in \{0, 1\}\}$$

forma uma base para o \mathbb{Z}_2 espaço vetorial $V(x_1, \dots, x_m)$.

Teorema 9.4. *A álgebra de cohomologia mod.2 é isomorfa a*

$$\mathbb{Z}_2[y] / (\langle y^N \rangle \otimes V(y_{n-k}, \dots, y_{N-2}, y_N \cdots y_{n-1}))$$

onde $\deg(y) = 1$, $\deg(y_j) = j$, $n - k \leq j \leq n - 1$, com $(j \neq N - 1)$, para uma álgebra V adequada. Além disso, $\omega_1(\zeta) = y$.

As seguintes descrições do fibrado tangente da variedade de Stiefel projetiva real foram obtidas por K. Y. Lam (*A formula for the tangent bundle of flag manifolds and related spaces*)

$$\tau(PV_{n,k}) \approx \binom{k}{2} \epsilon \oplus k\zeta \otimes \beta \quad (9.4)$$

Usando o isomorfismo 9.3, obtemos a seguinte descrição para o fibrado tangente estável

$$\tau(PV_{n,k}) \oplus \binom{k+1}{2} \epsilon \approx nk\zeta \quad (9.5)$$

Determinar o *span* de uma variedade $PV_{n,k}$ projetiva real, para valores gerais n, k é um problema aberto. Para certos conjuntos infinitos de valores de (n, k) o *span* foi determinado. Quando k está em uma faixa superior (aproximadamente $k \geq \frac{n}{2}$) boas estimativas para o *span* foram obtidas. Acontece que as estimativas são precisas sempre que o *span* e o span^0 são iguais.

A fonte principal de estimativas para o limite inferior do span^0 de $PV_{n,k}$ é a solução do problema de campos de vetores generalizado.

O **problema dos campos de vetores generalizado** propõe a seguinte questão:

Qual é o maior valor de r tal que $m\zeta_{n,1}$ é isomorfo a um fibrado vetorial $r\epsilon \oplus \eta$?

Isto é, o problema pede para determinar $\text{span}(m\zeta_{n,1})$.

Note que se $m < n$, então $\omega(\zeta_{n,1}) \neq 0$ e, por consequência, $r = 0$. Quando $m \geq n$, temos $r \geq m - n + 1$, uma vez que qualquer fibrado vetorial ξ com $\text{rank}(\xi) = m$ sobre qualquer CW -complexo de dimensão d é isomorfo a $(m - d)\epsilon \oplus \eta$, para um fibrado vetorial η adequado.

Agora, considerando $q : PV_{n,k} \rightarrow PV_{n,1}$ como a projeção, desde que $\zeta_{n,k} \approx q^*(\zeta_{n,1})$, temos que $\text{span}(m\zeta_{n,k}) \geq \text{span}(m\zeta_{n,1})$. Isso nos dá limites inferiores para $\text{span}^0(PV_{n,k})$.

9.3 Conjecturas

Apontamos aqui duas conjecturas de Korbas e Zvengrowski:

Conjectura A: $\text{span}^0(PV_{n,k}) = \text{span}(PV_{n,k})$, para todos n, k .

Conjectura B: $\text{span}(PV_{n,k}) \geq \kappa_{n,k}$, onde $\kappa_{n,k} := \text{span}(nk\zeta_{n,1}) - \binom{k+1}{2}$.

A *Conjectura A* já foi validada para muitos casos, enquanto que a *Conjectura B* já mostrou ser válida para todos os casos, exceto quando n é par e $k = 2$.

Podemos destacar uma relação entre as duas conjecturas, no caso a *Conjectura A* é mais forte do que a *Conjectura B*, no sentido de que se a *Conjectura A* for válida, a *Conjectura B* também será. Com efeito, suponha que

$$\text{span}(PV_{n,k}) = \text{span}^0(PV_{n,k}) = \text{span}(nk\zeta_{n,k}) - \binom{k+1}{2}$$

seja válida. Considerando $p : PV_{n,k} \rightarrow PV_{n,1}$ a projeção, desde que $\zeta_{n,k} = p^*(\zeta_{n,1})$, temos que $\text{span}(nk\zeta_{n,k}) \geq \text{span}(nk\zeta_{n,1})$.

Então, concluímos que $\text{span}(PV_{n,k}) \geq \kappa_{n,k}$.

Referências

- [1] BARBOSA, Alex M. **Classes de Stiefel-Whitney e de Euler**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, 2017.
- [2] BREDON, Glen E.; KOSINSKI, Antoni A. **Vector Fields on π -Manifolds**. Annals of Mathematics, p. 85 – 90, 1966.
- [3] DAMETTO SILVA, Matheus E. **Álgebra Homológica**. Relatório Científico (Iniciação Científica) - Universidade Estadual Paulista, 2019.
- [4] HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.
- [5] HUSEMOLLER, Dale. **Fibre Bundles**. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [6] KORBAS, Julius; ZVENGROWSKI, Peter. **On sectioning tangent bundles and other vector bundles**. Circolo Matematico di Palermo, 1996.
- [7] KORBAS, Julius; ZVENGROWSKI, Peter. **The Vector Field Problem for Projective Stiefel Manifolds**. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, vol. 15, p. 219 – 234, 2009.
- [8] LIER, Matias de Jong Van. **Topological Complexity and the Lusternik-Schnirelmann Category**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, 2021.
- [9] LIMA, Elon L. **Introdução à Topologia Diferencial**. IMPA, 1961.
- [10] LIMA, Elon L. **Variiedades Diferenciáveis**. IMPA, 2011.
- [11] MILNOR, John W.; STASHEFF, James D. **Characteristic Classes**. 1 ed. New Jersey: Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1994.
- [12] PAULINO SILVA, Rafael. **Ações de Semigrupos em Fibrados**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, 2014.
- [13] SANKARAN, Parameswaran. **The Vector Field Problem For Homogeneous Spaces**. Algebraic Topology and Related Topics, p. 223 – 264, 2019.
- [14] THOMAS, Emery. **Vector Fields on Manifolds**. Bulletin American Mathematical Society, vol. 75, p. 643 – 683, 1969.
- [15] VICK, James W. **Homology Theory: an introduction to algebraic topology**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] WHITEHEAD, George W. **Elements of Homotopy Theory**. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1978.