



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

Configurações Retrógradas em Sistemas Extrassolares

Alan Cefali Signor

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Alan Cefali Signor

Configurações retrógradas em sistemas extrassolares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais

Rio Claro - SP
2024

S578c Signor, Alan Cefali
Configurações retrógradas em sistemas extrassolares / Alan Cefali
Signor. -- Rio Claro, 2024
79 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Maria Helena Moreira Morais

1. Sistemas extrassolares. 2. Ressonâncias de movimento médio. 3.
Mecânica Celeste. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Alan Cefali Signor

Configurações retrógradadas em sistemas extrassolares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais
IGCE / UNESP/ Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter
FEG / UNESP/ Guaratinguetá (SP)

Prof. Dr. Nelson Callegari Junior
IGCE / UNESP/ Rio Claro (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 06 de Novembro de 2024.

Agradecimentos

Sou muito grato a minha mãe, meu pai, minha vó e meu vô por tudo que me ensinaram e por todo apoio que recebi durante minha vida. Seus ensinamentos me inspiraram a buscar ser uma pessoa melhor a cada dia e nunca terei palavras suficientes para os agradecer por isso.

Agradeço a minha orientadora, Maria Helena Moreira Morais, por todo conhecimento e oportunidade que me proporcionou durante a graduação e o mestrado. Agradeço ao professor Alexandre C. M. Correia por ter me recebido na Universidade de Coimbra em Portugal e aos amigos que fiz durante o estágio no exterior: Sérgio, Konstantinos, Timothée e Everson. Também agradeço ao Vitor por toda amizade e companheirismo durante o período do estágio; por coincidência, já havíamos nos conhecido anteriormente no Brasil.

Sou muito grato ao apoio e a colaboração dos amigos que fiz devido à pesquisa/mestrado: Gabriel, Luis, Daniel, Maria Júlia e Eduardo. Agradeço também aos meus grandes amigos: Kenji, Alessandro, Paulo, Leonardo, Guilherme, Alexandre, Marina, Thayarak, Ian e Person.

O presente trabalho foi realizado com o apoio dos processos nº 2021/11982-5 e nº 2023/02528-4, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

*“Knowledge is preferable to ignorance.
Better by far to embrace the hard
truth than a reassuring fable.”*

Carl Sagan

Resumo

Neste trabalho, investigamos a estabilidade de configurações planetárias retrógradas em sistemas extrassolares. Inicialmente, estudamos sistemas hipotéticos em ressonâncias de movimento médio até quinta ordem. Assumindo o semi-eixo maior nominal das ressonâncias, determinamos as famílias de ponto fixo em função das excentricidades, da massa do corpo retrógrado e da configuração orbital. Variando estes parâmetros foi possível observar como o espaço de fase muda com o aumento da massa. Encontramos configurações estáveis para todas ressonâncias estudadas. Além do mais, exploramos o caso de um asteroide ou planeta em ressonância com um binário estelar com razão de massa entre 0.01 e 0.5 (massas iguais) por meio de seções de Poincaré. Na segunda parte do projeto, estudamos a dinâmica do sistema extrassolar ν Octantis. Este sistema é composto por duas estrelas e um planeta, sendo que devido a sua estabilidade, o planeta só pode estar em uma configuração retrógrada. Por conta da complexidade desse sistema, desenvolvemos um novo método de análise que consiste na combinação de mapas de estabilidade com Corner Plots, o qual denominamos Corner Maps. Como as massas das estrelas são comparáveis, o período orbital do planeta apresenta grandes oscilações, assim calculamos os valores médio desse parâmetro utilizando análise de frequência. Comparando as simulações com os dados observacionais, concluímos que a estabilidade da órbita do planeta está relacionada a uma ressonância de movimento médio de alta ordem (31/-12; 28/-11) e/ou devido a configuração de equilíbrio secular, i.e. o planeta e o binário possuem órbitas alinhadas e com taxas de precessão similares. Nossos resultados indicam as possíveis configurações para o planeta e provêm evidências a favor da hipótese planetária.

Palavras-chave: Sistemas extrassolares, Ressonâncias de movimento médio, Mecânica Celeste.

Abstract

In this work, we investigate the stable configuration for retrograde planets in extrasolar systems. Initially, we study hypothetical systems in mean motion resonances until fifth order. Assuming the nominal semi-major axis of the resonances, we determine the fixed point families in function of the eccentricities, the mass of the retrograde body and the orbital configuration. Varying these parameters, it was possible to observe how the phase space changes with the increase of mass. We found stable configuration for all studied resonances. Furthermore, we explore the case of an asteroid or planet in resonance with a stellar binary with a mass ratio between 0.01 and 0.5 (equal masses) through Poincaré sections. In the second part of the project, we study the dynamics of the extrasolar system ν Octantis. This system is composed by two stars and a planet, where due to its stability, the planet must be in a retrograde configuration. Due to the complexity of this system, we developed a new method of analysis that consists of combining stability maps with Corner Plots, which we call Corner Maps. As the masses of the stars are comparable, the planet's orbital period presents large oscillations, so we calculate the average value of this parameter using frequency analysis. Comparing the simulations with the observational data, we conclude that the long-term stability of the planet's orbit is related to a high-order mean motion resonance (31/-12; 28/-11) and/or due to a secular equilibrium, i.e. the planet and the binary have aligned orbits and similar precession rates. Our results indicate the possible configurations for the planet and provide evidences in favour of the planetary hypothesis.

Keywords: Extrasolar systems, Mean-motion resonances, Celestial Mechanics.

Sumário

1	Introdução	8
2	Configurações Retrógradas	10
2.1	Ressonância 1/-1 (Figs. 2.3 - 2.7)	13
2.1.1	Famílias Periódicas em função da massa	17
2.2	Ressonância 1/-3 (Figs. 2.12 - 2.17)	20
2.3	Ressonância 3/-1 (Figs. 2.18 - 2.22)	24
2.4	Ressonância 1/-4 (Figs. 2.23 - 2.26)	28
2.5	Ressonância 4/-1 (Figs. 2.27 - 2.30)	31
2.6	Ressonância 2/-3 (Figs. 2.31 - 2.34)	34
2.7	Ressonância 3/-2 (Figs. 2.35 - 2.38)	37
2.8	Ressonâncias retrógradas em sistemas perturbados	41
3	Sistema ν Octantis	45
3.1	Introdução ao Sistema	45
3.2	Soluções orbitais e planos de referência	46
3.3	Procurando pela estabilidade dinâmica	51
3.4	Metodologia	52
3.4.1	Corner Maps	52
3.4.2	Curvas de $\sqrt{\chi^2}$	54
3.5	Caso coplanar	54
3.5.1	Todas condições iniciais estáveis	55
3.5.2	Condições iniciais estáveis sem libração de $\Delta\varpi$ e $\phi's$	58
3.5.3	Equilíbrio Secular	60
3.5.4	Ressonâncias de Movimento Médio	62
3.6	Caso Inclinado	65
3.6.1	Todas condições iniciais estáveis	65
3.6.2	Condições iniciais estáveis sem libração de $\Delta\varpi$ e $\phi's$	68
3.6.3	Equilíbrio Secular	69
3.6.4	Ressonâncias de Movimento Médio	71
4	Conclusão	73

Capítulo 1

Introdução

A grande maioria dos corpos que observamos no Sistema Solar possui o mesmo sentido de translação desde seus primórdios, o motivo está diretamente relacionado ao processo de formação de um sistema planetário. Um sistema planetário é formado a partir de uma nuvem de gás interestelar e poeira que, por conta da sua rotação, converge para um disco (Pfalzner et al., 2015); desse modo, a maior parte dos objetos segue o sentido dessa rotação até os dias atuais (sentido anti-horário). Porém, existem asteroides retrógrados na natureza, ou seja, que se movem no sentido horário e assim como os corpos prógrados que se movem no sentido anti-horário, estes corpos também possuem regiões de estabilidade determinadas por ressonâncias de movimento médio. Estas configurações ocorrem quando dois objetos orbitam uma estrela em direções opostas e possuem períodos orbitais comensuráveis (Morais & Giuppone, 2012). A identificação de corpos retrógrados só foi possível por conta de diversos estudos numéricos e analíticos para o caso circular restrito de três corpos, que proveram uma base sólida a respeito da dinâmica ressonante de asteroides com altas inclinações, em particular no caso de configurações retrógradas planares (inclinação orbital próxima de 180°) (Morais & Namouni, 2013b, 2016; Namouni & Moraes, 2015). Estes estudos permitiram a identificação de Centauros em ressonâncias retrógradas com Júpiter e Saturno (Morais & Namouni, 2013a) e do asteroide (514107) Ka'epaoka'awela que está em uma ressonância coorbital com Júpiter (Wiegert et al., 2017; Moraes e Namouni, 2017; Namouni e Moraes, 2018a). Recentemente, famílias de órbitas periódicas de ressonâncias retrógradas no caso circular/elíptico restrito de três corpos foram computadas por Kotoulas e Voyatzis (2020a, 2020b) e Kotoulas et al. (2022).

No caso do asteroide coorbital retrógrado de Júpiter, (514107) Ka'epaoka'awela, sabemos que muito provavelmente o mesmo foi capturado pelo Sol bilhões de anos atrás e devido a ressonância com Júpiter, está em uma órbita estável até os dias de hoje (Namouni & Moraes, 2018b). Como descrito em Malmberg et al. (2011), planetas também podem ser capturados por outras estrelas; suas simulações demonstraram que encontros

próximos entre estrelas podem conduzir a trocas de planetas. Assim, há a possibilidade de um planeta ser capturado em uma configuração retrógrada e convergir à uma órbita estável em uma ressonância retrógrada. Além do mais, estes encontros próximos estelares podem também alterar as órbitas já presentes no sistema. Pfalzner et al. (2024) investigaram esse tipo de alteração orbital no caso de objetos transnetunianos, sendo que uma parte destes se tornaram retrógrados.

A detecção de exoplanetas em sistemas extrassolares é feita por meio de diferentes métodos. Um destes é o método da velocidade radial, que detecta os planetas a partir do movimento da estrela em torno do centro de massa do sistema. Quando a estrela se aproxima de nós, o comprimento de onda da luz diminui (desvio para o azul) e quando ela se afasta o comprimento de onda da luz aumenta (desvio para o vermelho); esse fenômeno é conhecido como Efeito Doppler. Assim, conseguimos identificar o movimento da estrela por meio das suas linhas espectrais, sendo que por meio da velocidade destas linhas podemos modelar o sistema através de ajustes às observações (Murray & Correia, 2010). A possibilidade da existência de configurações em que os planetas orbitam no sentido contrários em outros sistemas foi investigado por Gayon e Bois (2008) e Gayon-Markt e Bois (2009). Estes autores mostraram que o ajuste da curva de velocidade radial pode ter, em alguns casos, resíduos melhores para a configuração retrógrada do que para a configuração prógrada. Portanto, é possível que alguns dos sistemas extrassolares conhecidos possuam planetas retrógrados. O sistema ν Octantis é o melhor candidato para abrigar um planeta em órbita retrógrada, as informações a respeito desse sistema foram descritas na Seção 3.1.

Durante o mestrado, publicamos três artigos diretamente relacionados ao tema do projeto: Caritá et al. (2022, 2023) e Signor et al. (2023). Os artigos em que sou segundo autor serão descritos de forma breve durante o texto. Outros dois artigos estão em desenvolvimento, o primeiro a respeito do ν Octantis que está em etapa final de desenvolvimento, e o segundo sobre as famílias da ressonância coorbital retrógrada obtidas em função da massa do corpo retrógrado. Nesta dissertação, abordaremos de forma detalhada a respeito destes artigos em preparação e do artigo Signor et al. (2023).

No Capítulo 2, nós descrevemos os nossos métodos numéricos e apresentamos os resultados das simulações considerando sistemas ressonantes hipotéticos: as Seções 2.1 - 2.7 descrevem as simulações das ressonâncias retrógradas de ordem 2, 4 e 5; na Seção 2.8 abordamos de forma breve sobre como identificar ressonâncias retrógradas em sistemas perturbados. No Capítulo 3, nós apresentamos a metodologia e os resultados referentes à dinâmica do sistema extrassolar ν Octantis. As discussões e conclusões foram descritas no Capítulo 4.

Capítulo 2

Configurações Retrógradas

Consideramos o problema de três corpos composto por uma estrela com a massa do sol e dois planetas orbitando em sentidos opostos, um no sentido anti-horário (prógrado) e a outra no sentido horário (retrógrado). Para a análise deste sistema utilizamos a notação usual para os elementos orbitais astrocêntricos: a (semi-eixo maior), e (excentricidade), I (inclinação orbital), ω (argumento do pericentro), Ω (longitude do nodo ascendente), M (anomalia média), P (período orbital), λ (longitude média), ϖ (longitude do pericentro). As variáveis com subscrito p são referentes ao planeta prógrado, enquanto as variáveis sem subscrito descrevem os elementos relacionados ao planeta retrógrado. O planeta prógrado possui massa de $0.001M_{\odot}$ e possui um semi-eixo maior normalizado ($a_p = 1$ AU). Para o caso elíptico restrito de três corpos (ER3BP) o planeta possui massa igual a zero, já no caso do problema de três corpos o planeta retrógrado possui massa igual a de Netuno ($5.149 \times 10^{-5}M_{\odot}$), Saturno ($2.857 \times 10^{-4}M_{\odot}$) ou Júpiter ($10^{-3}M_{\odot}$). Por meio da variação da massa do corpo retrógrado, podemos determinar a estabilidade das ressonâncias em função de alguns valores de massa. Em dois artigos, investigamos as configurações estáveis de todas ressonâncias retrógradas de movimento médio até quinta ordem, ou seja, 1/-1, 1/-2, 2/-1 (Caritá et al., 2022) e 1/-3, 3/-1, 1/-4, 4/-1, 2/-3, 3/-2 (Signor et al., 2023).

As integrações numéricas foram realizadas utilizando o REBOUND (Rein & Liu, 2012), para as ressonâncias 1/-1, 1/-2 e 2/-1 utilizamos o integrador de passo adaptativo IAS15 (Rein & Spiegel, 2015). Já no caso das outras ressonâncias utilizamos o integrador Burlish Stoer no REBOUND. As figuras para representação da variação dos elementos orbitais foram obtidas utilizando o integrador Burlish Stoer através do MERCURY (Chambers, 1999). A integração para uma condição inicial é interrompida caso a distância deste objeto em relação a estrela seja maior que $10 a_p$ (escape) ou quando a distância em relação a qualquer um dos outros corpos seja menor que a soma de seus raios (colisão).

Assumimos o referencial anti-horário, de modo que as longitudes no plano orbital do planeta prógrado (movimento anti-horário) são medidas na direção de seu movimento or-

bital; portanto, $\lambda_p = \Omega_p + \omega_p + M_p$, $\varpi_p = \omega_p + \Omega_p$. Consequentemente, as longitudes do planeta retrógrado (movimento horário) são medidas na direção contrária de seu movimento orbital, dessa forma, $\lambda = \Omega - \omega - M$, $\varpi = \Omega - \omega$. Esta também é o referencial utilizado por convenção pelo integrador REBOUND.

Por meio dos mapas ressonantes buscamos compreender sobre a estabilidade destes sistemas. Uma das formas de identificar ressonâncias de movimento médio é analisando a variação temporal dos ângulos ressonantes. De forma geral, os ângulos mais relevantes para cada ressonância de movimento médio podem ser determinados através de todas combinações de A e B de modo que $A + B = k$, onde $k = p + q$ e é a ordem da uma ressonância retrógrada p/q . A expressão geral do ângulo ressonante no caso planar é:

$$\phi_n = -q \lambda - p \lambda_p + A \varpi_p + B \varpi; \quad (2.1)$$

onde A, B são inteiros positivos e n é um número inteiro entre 0 e k . Assim para uma ressonância de ordem k , precisamos considerar $k + 1$ ângulos:

$$\phi_0 = -q \lambda - p \lambda_p + (p + q) \varpi \quad (2.2)$$

$$\phi_1 = -q \lambda - p \lambda_p + (p + q) \varpi_p \quad (2.3)$$

$$\phi_2 = -q \lambda - p \lambda_p + q \varpi_p + p \varpi \quad (2.4)$$

$$\phi_3 = -q \lambda - p \lambda_p + p \varpi_p + q \varpi \quad (2.5)$$

⋮

sendo que o primeiro com $n = 0$ é o ângulo ressonante do problema circular restrito de três corpos (Morais & Namouni, 2013b). Nos mapas ressonantes indicamos em quais regiões ocorrem libração do ϕ_0 e de $\Delta \varpi = \varpi - \varpi_p$ simultaneamente, estas indicam o ponto fixo do problema ressonante e foram representadas nos mapas por meio de um símbolo branco.

Para facilitar a interpretação das figuras, relacionamos uma cor para cada argumento ressonante diferente de ϕ_0 . Regiões de libração de um desses ângulos foram representados por símbolos em suas cores respectivas. Estas cores também foram utilizadas nas figuras com a evolução dos elementos orbitais. A barra de cor dos mapas indicam a semi-amplitude da libração do ϕ_0 (variação máxima em torno do centro ressonante). Identificamos que dois tipos de famílias podem existir nos mapas ressonantes, no caso em que ϕ_0 e $\Delta \varpi$, ou um dos outros argumentos ressonantes libram (em torno de 0 ou π) com semi-amplitude menor que $\pi/4$.

Em nossas simulações os planetas estão em uma configuração coplanar, de modo que o corpo retrógrado possui uma inclinação orbital inicial de $I = 179.99^\circ$. Se considerássemos o caso estritamente 2D (sistema irreal), iríamos observar famílias que são verticalmente instáveis, ou seja, configurações que são estáveis no caso coplanar mas instáveis com

inclinações próximas de 180° (Morais & Namouni, 2019; Morais et al., 2021). Inicialmente, fixamos as longitudes dos nodos em zero ($\Omega = \Omega_p = 0$).

Os resultados para as integrações numéricas foram apresentados em mapas ressonantes em uma grade de excentricidade do corpo retrógrado versus excentricidade do planeta prógrado. Esses mapas possuem 6400 condições iniciais de (e, e_p) obtidas por uma grade de 80×80 condições iniciais em um intervalo de $(0, 1)$. Para cada condição inicial, o sistema planetário é integrado por $2 \times 10^5 T_p$. Com intuito de representar todas configurações possíveis, representamos nossos resultados em mapas com quatro quadrantes resultando assim em um total de 25600 condições iniciais. Estes quadrantes correspondem as permutações entre o caso alinhado/anti-alinhado no pericentro/apocentro, de modo que:

- Q2: $\varpi_p = 0$; $\varpi = \pi$,
- Q3: $\varpi_p = \pi$; $\varpi = \pi$.
- Q1: $\varpi_p = 0$; $\varpi = 0$,
- Q4: $\varpi_p = \pi$; $\varpi = 0$.

A anomalia média do planeta prógrado possui o mesmo valor que a longitude do pericentro ($M_p = \varpi_p$) e a anomalia média do corpo retrógrado é dada por $M = 0$ ou por $M = \pi$. Nas Figuras 2.1 e 2.2 representamos as condições iniciais de todos quadrantes para as ressonâncias internas e externas de 4^{a} e 5^{a} ordem.

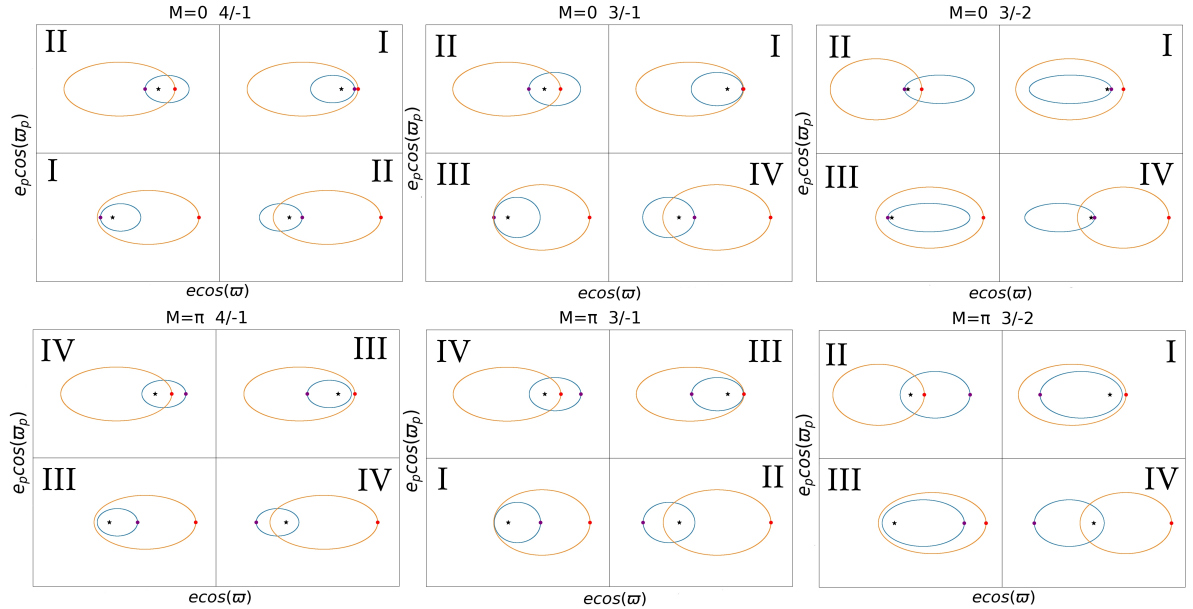


Figura 2.1: Configurações para as ressonâncias internas ilustrando a orientação dos pericentros e dos apocentros para as anomalias médias $M = 0$ e $M = \pi$. Os numerais Romanos indicam o par de condições iniciais que são equivalentes após meio período dos objetos externos (4/-1 e 3/-1). No caso da 3/-2, as configurações são equivalentes depois de um período inteiro.

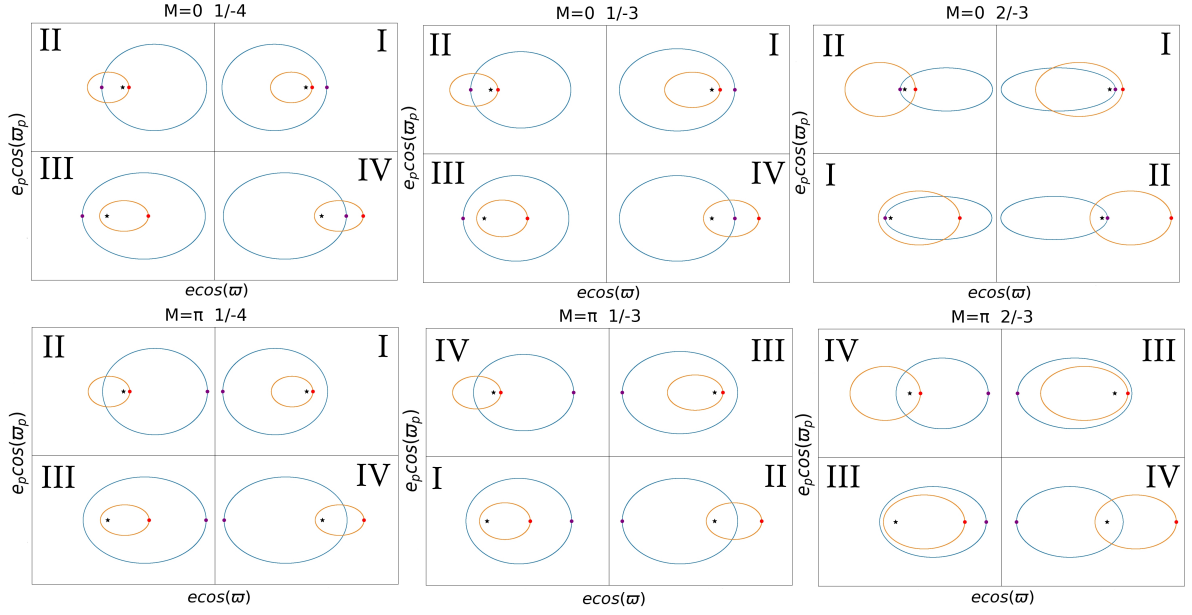


Figura 2.2: Configurações para as ressonâncias internas ilustrando a orientação dos pericentros e dos apocentros para as anomalias médias $M = 0$ e $M = \pi$. Os numerais Romanos indicam o par de condições iniciais que são equivalentes após meio período dos objetos externos (1/-4 e 1/-3). No caso da 2/-3, as configurações são equivalentes depois de um período inteiro.

A simetria entre os quadrantes foi identificada pelos numerais Romanos, estes indicam quais condições iniciais são equivalentes com um *time-lag* de meio período do objeto externo (1/-3, 3/-1, 1/-4, 4/-1) ou após um *time-lag* de um período do objeto externo (2/-3, 3/-2). Essa equivalência ocorre devido a comensurabilidade entre os períodos orbitais, entretanto, devido a interação gravitacional entre os corpos, sabemos que essa relação não é exata.

2.1 Ressonância 1/-1 (Figs. 2.3 - 2.7)

Para a ressonância 1/-1 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -\lambda - \lambda_p + 2\varpi \quad (\text{barra de cor}) \quad (2.6)$$

$$\phi_1 = -\lambda - \lambda_p + 2\varpi_p \quad (\text{azul}) \quad (2.7)$$

$$\phi_2 = -\lambda - \lambda_p + \varpi_p + \varpi \quad (\text{vermelho}) \quad (2.8)$$

Os mapas de estabilidade para o ER3BP foram apresentados na Figura 2.3. A barra de cor dos mapas representa a amplitude do ângulo ressonante ϕ_0 , em que o roxo escuro/azul indica o centro ressonante. Para este caso, não observamos famílias de ponto fixo para $M = 0$. Obtivemos famílias de ponto fixo para $M = \pi$ no Q_1 e Q_4 ; porém, essas famílias ocorrem quando o planeta possui excentricidade próxima de 1. Ademais, a região correspondente a libração do ϕ_0 em torno de π para alta excentricidade, e , é maior quando $M = \pi$ do que no caso em que $M = 0$.

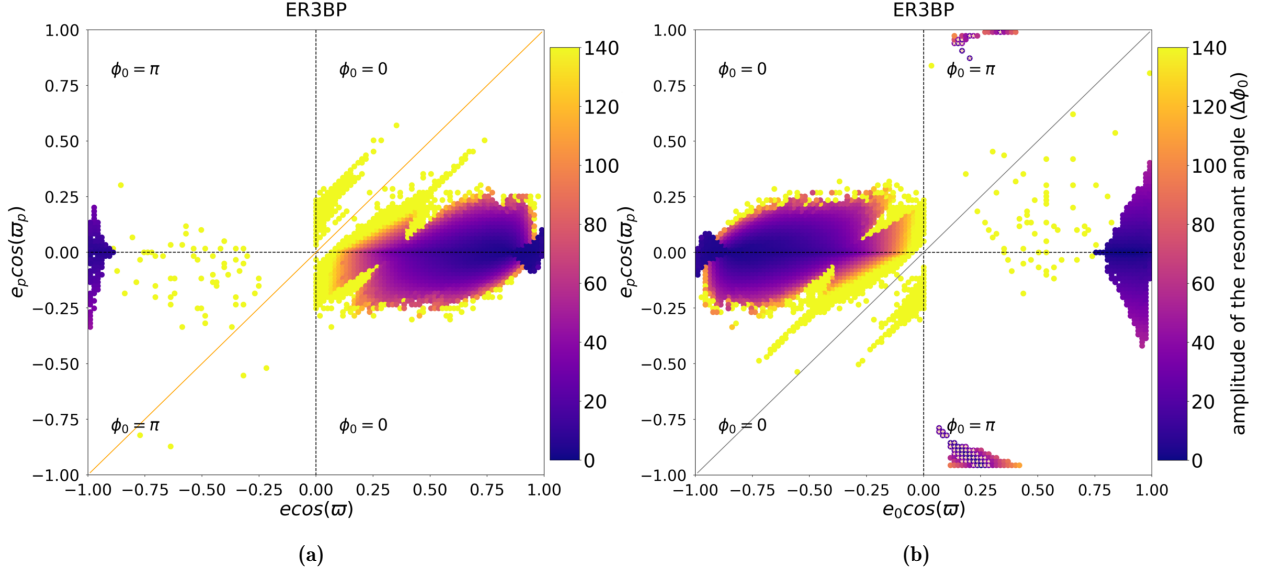


Figura 2.3: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-1 no problema elíptico restrito de três corpos (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

A ressonância 1/-1 considerando a razão de massa de Júpiter com Sol no caso circular restrito de três corpos foi estudada por Morais e Namouni (2019). Há dois modos ressonantes planares: $\phi_0 = 0$ com centro ocorrendo para a localização nominal da ressonância $a = 1$ quando $e > 0.5$ (de acordo com nossos resultados); e $\phi = \pi$ que ocorre para localização nominal $a = 1$ quando $e > 0.75$ (também de acordo com nossos mapas).

Na Figura 2.4 apresentamos os mapas considerando que o corpo retrógrado possui a massa de Netuno. No centro da região de libração de ϕ_0 , surge uma família de ponto fixo próximo de $e_p = 0$, observada em Q_1 para $M = 0$ e Q_3 para $M = \pi$. Embora a família de ponto fixo aparente ter falhas na Figura 2.4, verificamos por meio de uma grade de maior resolução que a família é contínua.

Os mapas para o caso em que o corpo retrógrado possui a massa de Saturno são apresentados na Figura 2.5. Para este valor da massa, obtemos apenas soluções estáveis para $\phi_0 = \pi$ para altos valores de e . Quando $e_p \approx 0$ há uma família de ponto fixo no centro da região de $\phi_0 = \pi$ com $M = \pi$.

Na Figura 2.6 apresentamos os mapas considerando ambos planetas com a massa de Júpiter. Neste caso, as ilhas de estabilidade estão associadas as famílias de ponto fixo que ocorrem para $\phi_0 = \pi$ em Q_3 da Figura 2.6a, e Q_1 da Figura 2.6b. Além dessas famílias, todas outras condições iniciais são instáveis devido a colisão ou escape. Por meio da Figura 2.7, representamos a evolução orbital da condição inicial circulada em vermelho ($e_0 = 0.94$, $e_p = 0.47$).

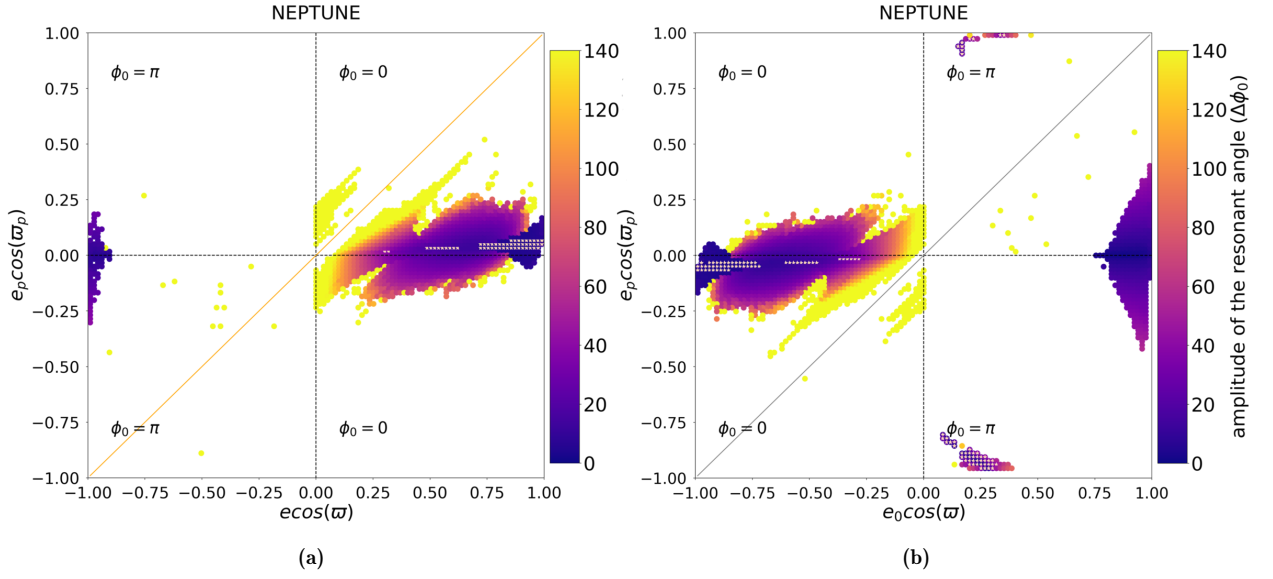


Figura 2.4: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-1 considerando o segundo planeta com a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

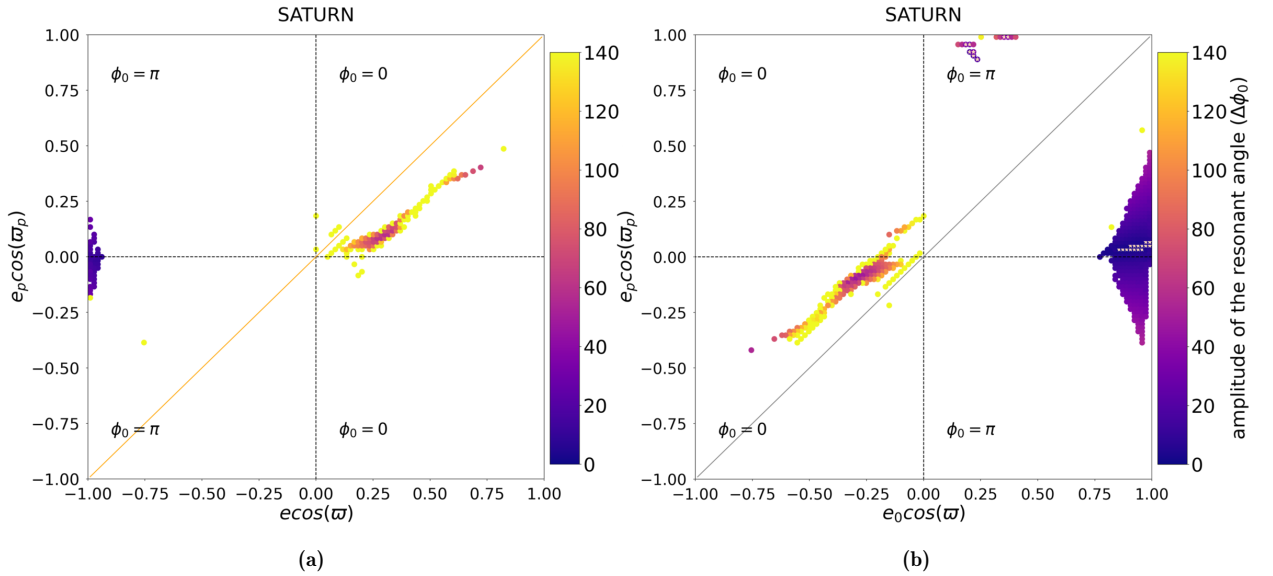


Figura 2.5: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-1 considerando o segundo planeta com a massa de Saturno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

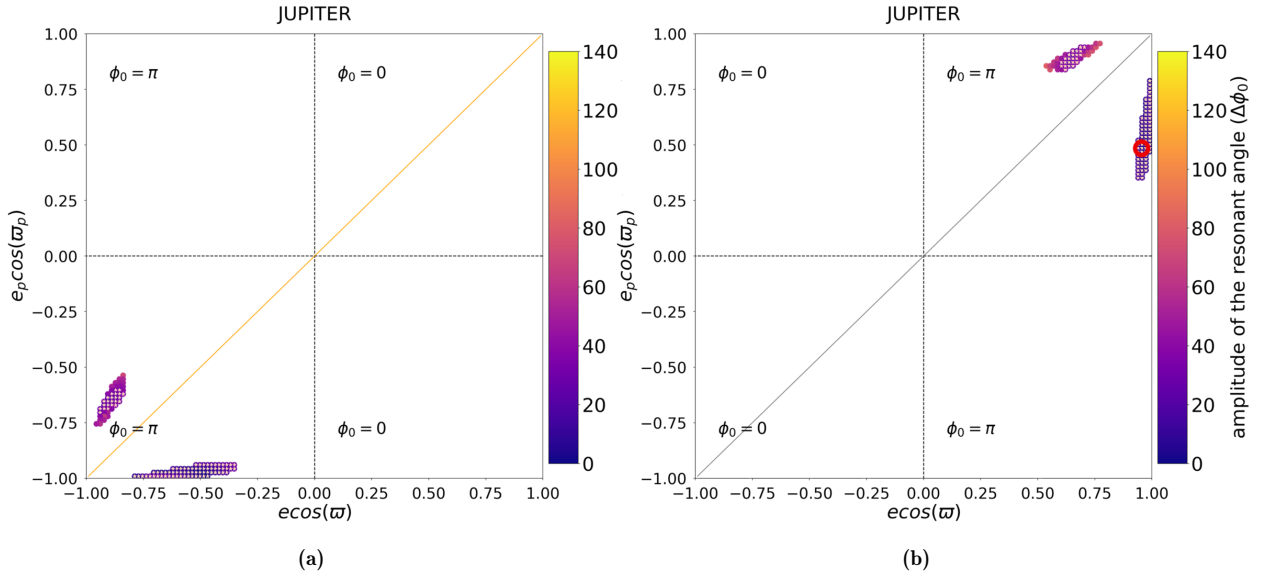


Figura 2.6: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-1 considerando dois planetas com a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

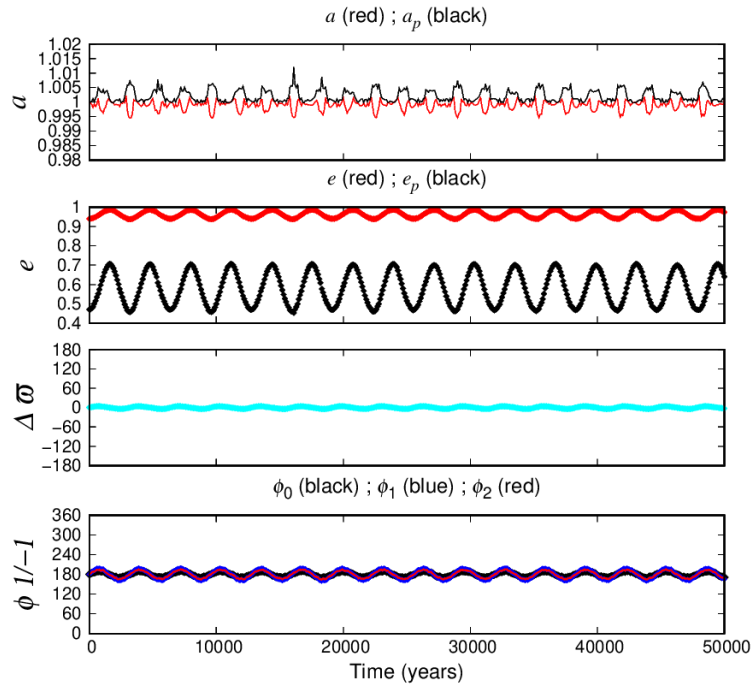


Figura 2.7: Evolução orbital da condição inicial circulada em vermelho na Figura 2.6b, ($e = 0.94$, $e_p = 0.47$). O primeiro painel representa o semi-eixo maior dos dois planetas, o segundo painel mostra a excentricidade de ambos planetas, o terceiro painel mostra a variação da longitude do periastro e no último painel a variação dos ângulos ressonantes foi representada.

2.1.1 Famílias Periódicas em função da massa

Essa subseção será destinada a comentar a respeito da continuação dos trabalhos descritos neste capítulo. A ideia é explorar outros parâmetros orbitais além das excentricidades. Especialmente para a ressonância coorbital, realizamos um segundo conjunto de simulações variando a massa do corpo retrógrado de forma aleatória no intervalo de 0 a $0.012 M_{\odot}$. Dessa forma, conseguimos determinar as famílias ressonantes em função deste parâmetro. Fixamos a massa do corpo prógrado e representamos em gráficos 3D apenas as condições iniciais que possuem libração de todos os ângulos ressonantes e do $\Delta\varpi$ com semi-amplitude menor que 60° , i.e. todas condições iniciais representadas são pontos fixos. As configurações orbitais são as mesmas descritas no Capítulo 2, sendo que cada quadrante será representado com uma cor diferentes: Q_1 vermelho, Q_3 azul e Q_4 verde. Não observamos condições iniciais ressonantes em Q_2 . Lembrando que o modo ressonante com $\phi_0 = 0$ ocorre no Q_1 e Q_4 para $M = 0$, e no Q_3 para $M = \pi$. Já o modo ressonante $\phi_0 = \pi$ ocorre no Q_3 para $M = 0$, e no Q_1 e Q_4 para $M = \pi$. Para cada valor de m_p , variamos cada parâmetro de forma aleatória e integramos 6 milhões de condições iniciais. Na Figura 2.8 representamos os gráficos para $M = 0$ e $M = \pi$ considerando que o planeta prógrado possui a massa de Júpiter ($0.001 M_{\odot}$).

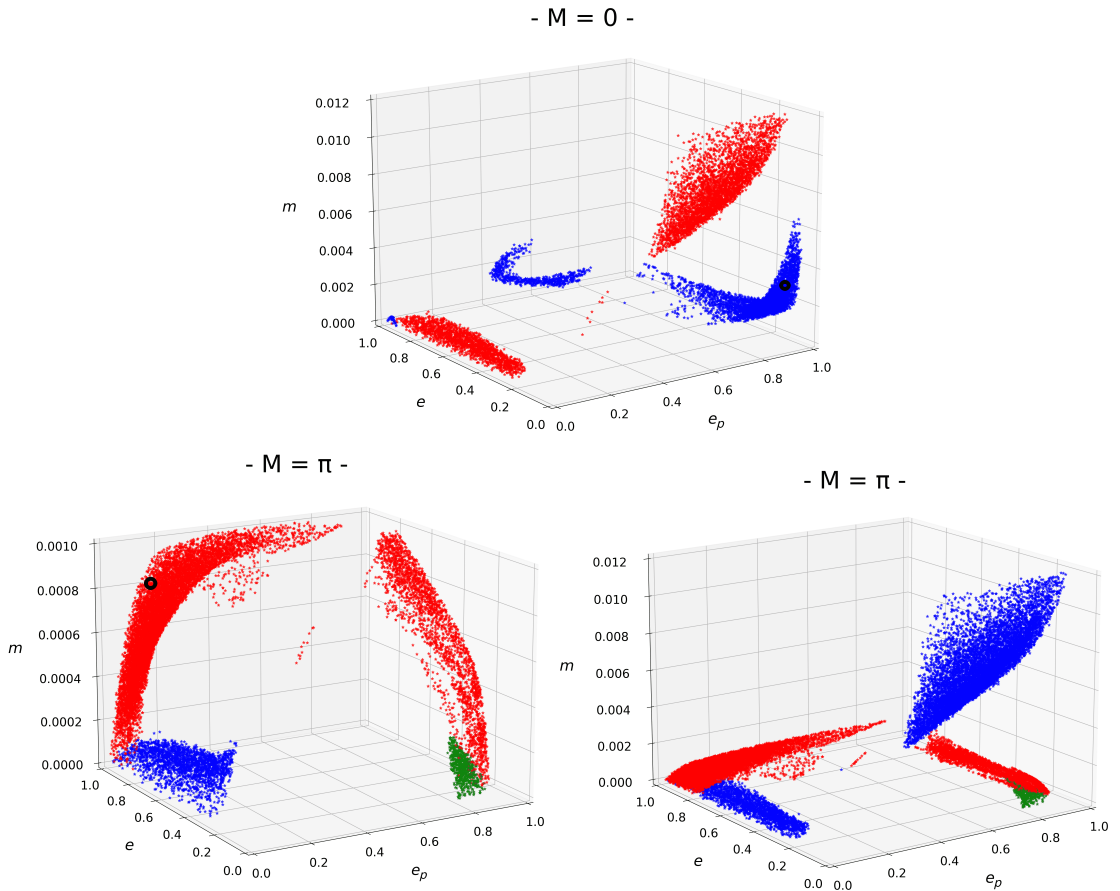


Figura 2.8: Gráficos 3D para a ressonância 1/-1 com $M = 0$ e $M = \pi$. As condições iniciais ressonantes foram representadas em vermelho (Q_1), azul (Q_3) e verde (Q_4).

Para o mapa de $M = 0$, podemos observar duas famílias do Q_1 e Q_3 próximas de $m = 0$. Outras duas famílias de Q_3 surgem para valores de $m > m_p = 0.001 \mathcal{M}_\odot$. Uma grande família de Q_1 existe para excentricidades de 0.5 a 0.9 e m de 0.005 a 0.01. Já para $M = \pi$, representamos um gráfico para um intervalo menor de m de 0 a $0.001 \mathcal{M}_\odot$; podemos observar duas famílias de Q_1 que existem até as massas dos planetas serem iguais. Uma família referente ao Q_3 e outra referente ao Q_4 também podem ser observadas, ambas ocorrem para baixos valores de m . Uma pequena família do Q_1 existe para $m \approx 0.0004 \mathcal{M}_\odot$ e excentricidades próximas de 0.5. Ao considerar todo intervalo da massa, podemos ver que há uma família de Q_3 semelhante a família de Q_1 observada para $M = 0$, sendo que estas são simétricas. Esses resultados estão de acordo com os obtidos na seção anterior, i.e, os resultados obtidos através dos mapas de estabilidade considerando as duas massas fixas também podem ser observados nos gráficos 3D.

A evolução das condições iniciais circuladas em preto na Figura 2.8 foram representadas na Figura 2.9. Ambas condições iniciais possuem libração dos ângulos ressonantes em torno de 180° e libração do $\Delta\varpi$ em torno de 0, (a) Q_3 com $M = 0$ e (b) Q_1 com $M = \pi$.

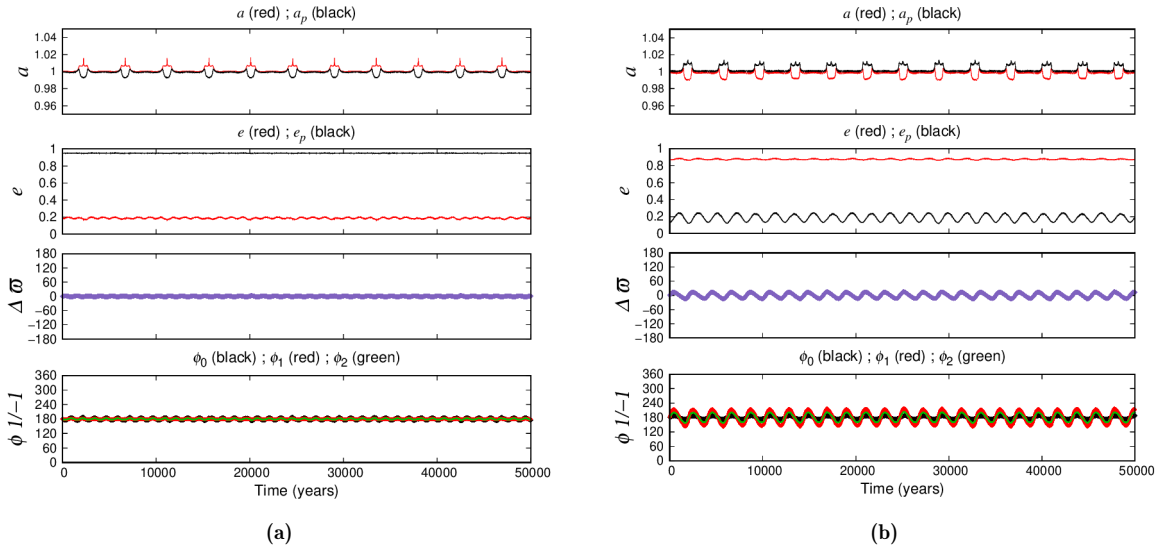


Figura 2.9: Evolução orbital das condições iniciais circuladas na Figura 2.8. Em (a), a condição inicial é $e = 0.1825$, $e_p = 0.9483$, $m = 0.00136 \mathcal{M}_\odot$. Em (b) a condição inicial é $e = 0.8684$, $e_p = 0.1341$, $m = 0.0008 \mathcal{M}_\odot$. O primeiro painel representa o semi-eixo maior dos dois planetas, o segundo painel mostra a excentricidade de ambos planetas, o terceiro painel mostra a variação da longitude do periastro e no último painel a variação dos ângulos ressonantes foi representada.

Na Figura 2.10 representamos os gráficos obtidos ao considerar que o planeta prógrado possui $m_p = 0.004 \mathcal{M}_\odot$. A família de Q_3 com alta excentricidade surge somente quando $m > m_p$. Uma outra família de Q_3 surge para altas excentricidades de ambos os corpos. A família para baixos valores de m continua a existir. Podemos observar duas outras famílias de Q_1 , sendo que ambas possuem excentricidades próximas de 0.5, os valores das massas para estas família são próximos de 0.004 e 0.006 \mathcal{M}_\odot . No caso de $M = \pi$, o

comportamento de uma das família de Q_1 com $m < m_p$ é semelhante ao observado para $m_p = 0.001 \mathcal{M}_\odot$. Porém, neste caso, há somente uma família grande no espaço de fase, as outras duas famílias possuem valores medianos de excentricidade e massa um pouco menor que $0.004 \mathcal{M}_\odot$. A família de Q_3 para $m = 0$ e e_p próximo de zero continua a existir.

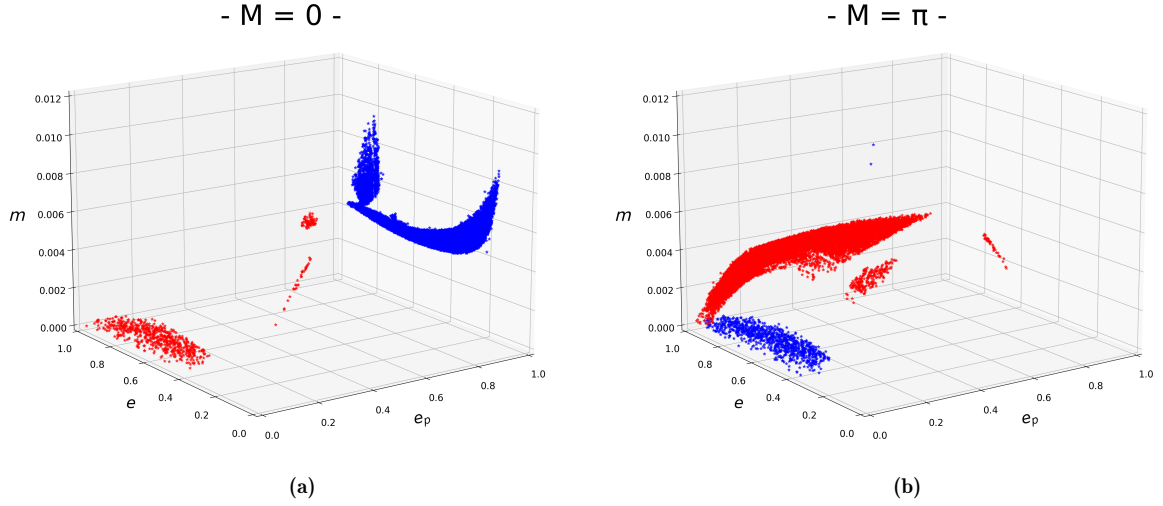


Figura 2.10: Gráficos 3D para a ressonância 1/-1. As condições iniciais ressonantes foram representadas em vermelho (Q_1) e azul (Q_3); (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$.

As regiões ressonantes obtidas para $m_p = 0.008 \mathcal{M}_\odot$ foram apresentadas nos gráficos 3D da Figura 2.11. As famílias do caso restrito para $e_p \approx 0$ existem para ambos os gráficos. Para $M = 0$, há uma pequena família de Q_1 para $m \approx 0.005$. A família de Q_3 para altas excentricidade do planeta prógrado novamente surge para valores de $m > m_p$. No caso de $M = \pi$, a principal família de Q_1 não existe no caso restrito, como esperado essa família existe para $m < m_p$. Com o aumento da massa do corpo prógrado, a família de Q_1 para valores de excentricidades próximos de 0.5 aumentou de tamanho, se unindo a família principal.

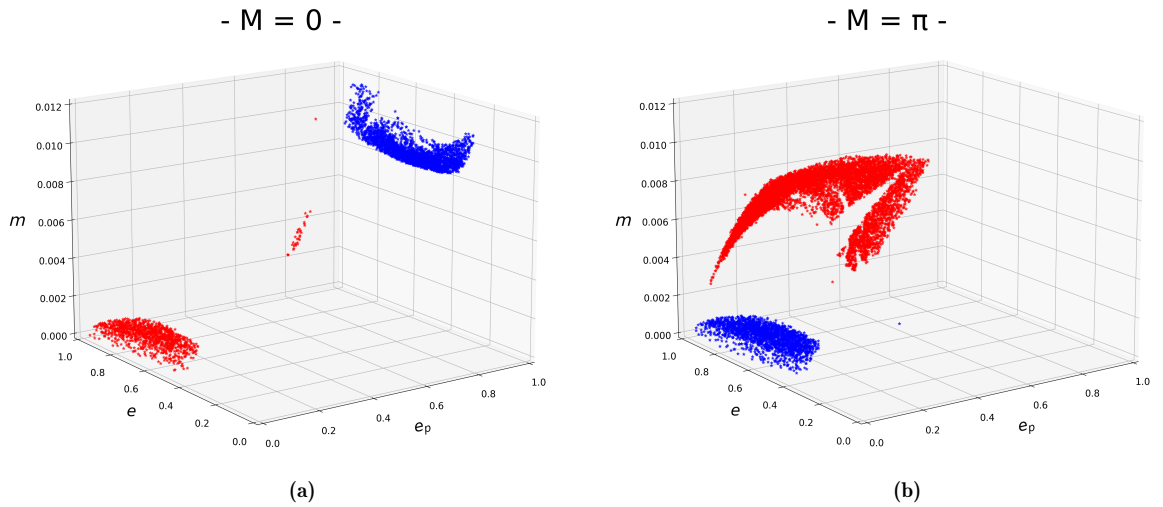


Figura 2.11: Gráficos 3D para a ressonância 1/-1. As condições iniciais ressonantes foram representadas em vermelho (Q_1) e azul (Q_3); (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$.

2.2 Ressonância 1/-3 (Figs. 2.12 - 2.17)

Para a ressonância 1/-3 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -3\lambda - \lambda_p + 4\varpi \quad (\text{barra de cor}) \quad (2.9)$$

$$\phi_1 = -3\lambda - \lambda_p + 4\varpi_p \quad (\text{vermelho}) \quad (2.10)$$

$$\phi_2 = -3\lambda - \lambda_p + 3\varpi_p + \varpi \quad (\text{verde}) \quad (2.11)$$

$$\phi_3 = -3\lambda - \lambda_p + \varpi_p + 3\varpi \quad (\text{azul}) \quad (2.12)$$

$$\phi_4 = -3\lambda - \lambda_p + 2\varpi_p + 2\varpi \quad (\text{ciano}) \quad (2.13)$$

Na Figura 2.12, apresentamos os resultados para caso elíptico restrito do problema de três corpos (ER3BP). As regiões verdes e azuis indicam libração do ϕ_2 e do ϕ_3 respectivamente. As famílias de ponto fixo onde há libração de todos os ângulos ressonantes analisados, e do $\Delta\varpi$ em torno de 0 ou π , foram representadas por símbolos brancos. Para $M = 0$ (a), não existem famílias do ponto fixo, porém há libração do ϕ_0 em todos quadrantes. No Q_1 podemos observar duas pequenas regiões coloridas que indicam libração de apenas um dos ângulos, nesse caso ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul).

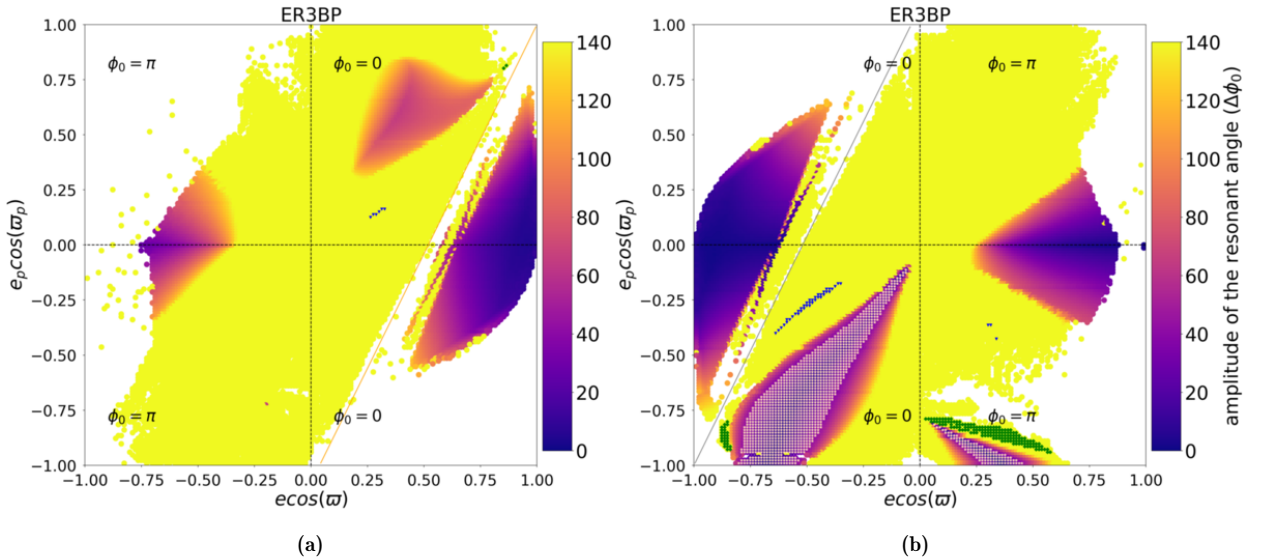


Figura 2.12: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-3 no problema elíptico restrito de três corpos (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Para o mapa com $M = \pi$, uma grande família de ponto fixo surge no Q_3 . Neste quadrante, também há duas regiões, representadas em verde/azul, em que apenas o ϕ_2/ϕ_3 libram. No Q_4 existe outra família de ponto fixo onde o $\Delta\varpi$ e três dos cinco ângulos

ressonantes libram em torno de π , os outros dois ângulos libram em torno de 0. Ao se afastar do centro da família periódica ocorre aumento da semi-amplitude de libração dos ângulos ressonantes e do $\Delta\varpi$. O aumento da semi-amplitude da libração do ϕ_2 é menor do que nos outros ângulos. Em volta dessa região de ponto fixo, há uma região de libração apenas do ϕ_2 , representada em verde. No Q_4 também há algumas condições iniciais com libração somente do ϕ_3 .

Os mapas para o caso planetário onde o segundo planeta possui a massa de Netuno foram apresentados na Figura 2.13. De forma geral, as regiões de estabilidade são similares aos mapas para o caso restrito, entretanto, nos mapas de Netuno surgem algumas famílias de ponto fixo próximas de $e_p = 0$ nos Q_1 e Q_3 para ambos valores de anomalia média. As regiões de libração de apenas um dos ângulos, representada em verde e azul, são mais extensas do que no caso restrito.

Nas Figuras 2.14a e 2.14b representamos, respectivamente, a evolução orbital das condições iniciais circuladas em preto no Q_3 e Q_4 da Figura 2.13b. Para o Q_3 , uma família de ponto fixo com libração em torno de 0 é apresentada. Para o Q_4 , escolhemos uma condição inicial da família de ponto fixo com libração dos ângulos ressonantes em ambos os centros, e com $\Delta\varpi$ librando em torno π .

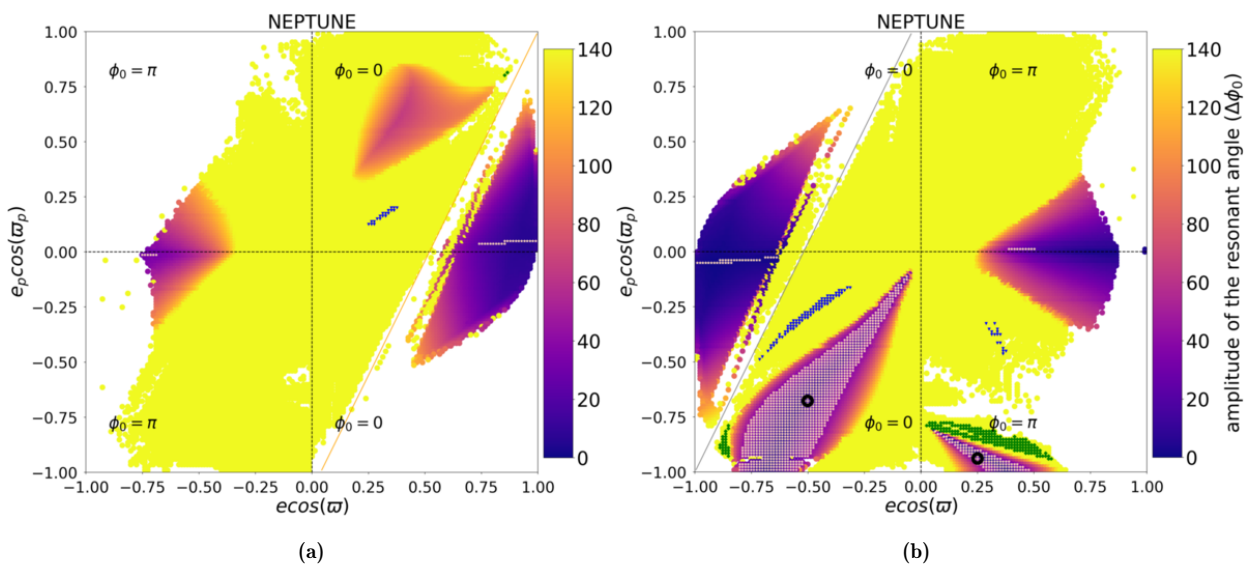


Figura 2.13: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-3 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Os mapas de estabilidade para o caso planetário onde o segundo planeta possui a massa de Saturno foram apresentados na Figura 2.15. Em relação a Figura 2.15a, podemos ver

que a principal diferença em relação ao mapa considerando Netuno é que as regiões de ponto fixo presentes no Q_1 possuem um valor mais elevado de e_p . A região de libração do ϕ_2 também desaparece para esse valor da massa.

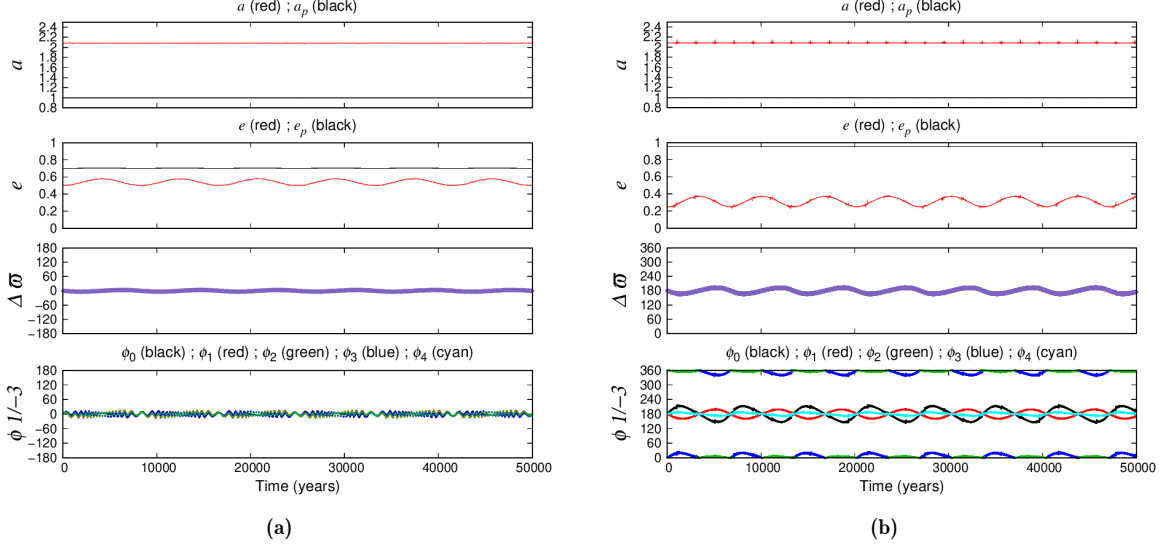


Figura 2.14: Evolução orbital das condições iniciais circuladas na Figura 2.13. Em (a), a condição inicial é $e = 0.5$, $e_p = 0.7$. Em (b) a condição inicial é $e = 0.25$, $e_p = 0.95$. O primeiro painel representa o semi-eixo maior dos dois planetas, o segundo painel mostra a excentricidade de ambos planetas, o terceiro painel mostra a variação da longitude do periastro e no último painel a variação dos ângulos ressonantes foi representada.

Já na Figura 2.15b, podemos ver um pequeno aumento dos valores de e_p para a família de ponto fixo do Q_1 . No Q_3 , a família de ponto fixo com altos valores de e , observada para $e_p \approx 0$ no caso de Netuno, está agora com $e_p \approx 0.25$. As famílias de ponto fixo e região de libração do ϕ_2 , presentes no Q_4 , são parcialmente destruídas quando consideramos a massa de Saturno, o que indica que essas regiões muito provavelmente desaparecerão para maiores massas. Algumas condições iniciais de ponto fixo surgem próximo de $e_p = 0$; além do mais, surge uma grande região de libração do ϕ_3 em torno de 0.

Os mapas de estabilidade para o caso em que o planeta retrógrado possui a massa de Júpiter foram apresentados na Figura 2.16. Podemos observar na Figura 2.16a uma extensa família de ponto fixo. Porém, essa família é destruída para certos valores de excentricidade, na região branca no centro da família, sendo essas condições iniciais verticalmente instáveis. A região em azul, onde ocorre apenas libração do ϕ_3 é dividida em duas. No Q_3 da Figura 2.16b, a família de ponto fixo e a região azul são similares às descritas para o mapa com $M = 0$. Ademais, há duas outras famílias de ponto fixo nesse quadrante. A família de ponto fixo observada anteriormente para altos valores de e_p , no Q_4 com $M = \pi$, é quase totalmente destruída. A família com libração do ϕ_3 diminuí em tamanho e a região de ponto fixo próxima de $e_p = 0$ é deslocada para valores um pouco maiores de e_p .

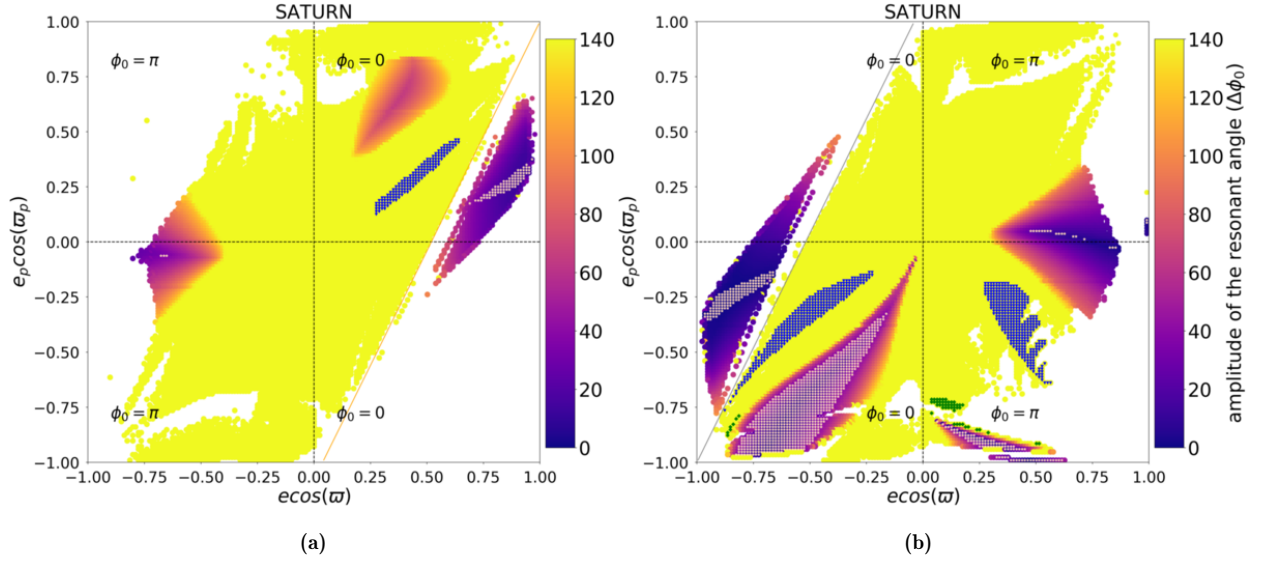


Figura 2.15: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-3 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Saturno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

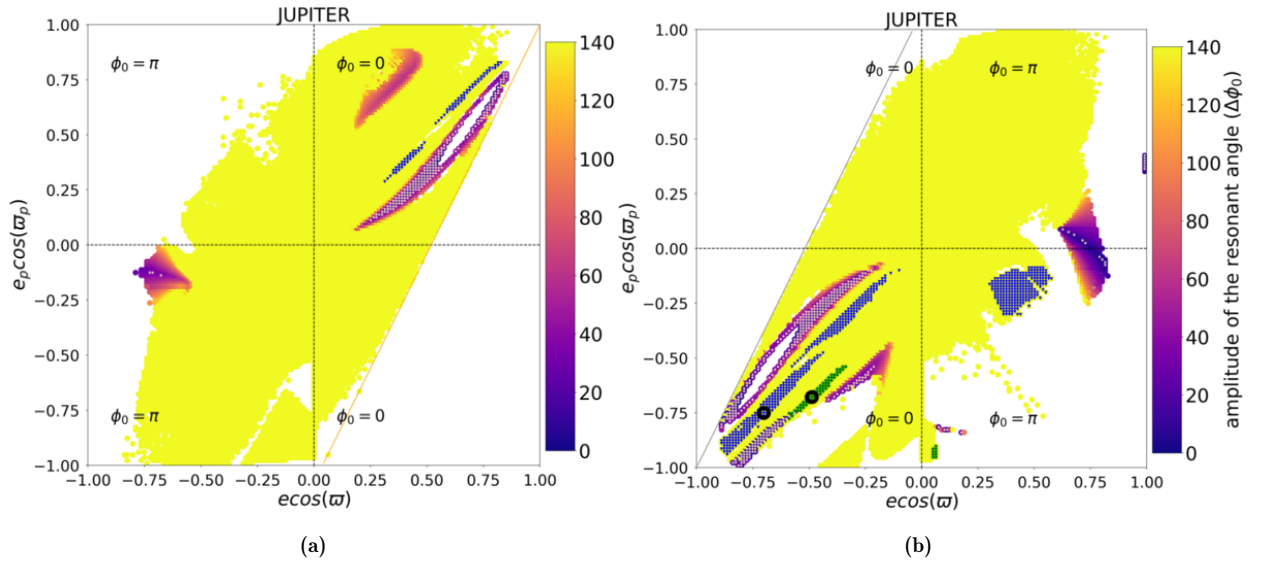


Figura 2.16: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-3 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Na Figura 2.17, apresentamos a evolução orbital de duas condições iniciais circulares na Q_3 do mapa com $M = \pi$, uma delas é mantida pela libração do ϕ_3 enquanto a outra

possui libração de ϕ_2 , sendo que há circulação do $\Delta\varpi$ em ambas.

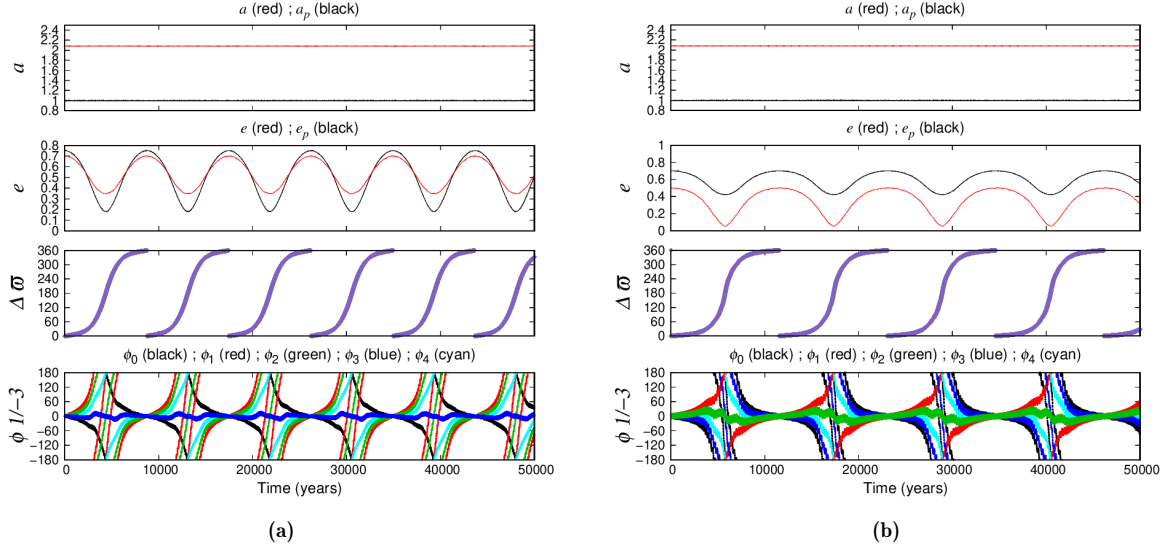


Figura 2.17: Evolução orbital das condições iniciais circuladas na Figura 2.16. Em (a), a condição inicial é $e = 0.7$, $e_p = 0.75$. Em (b) a condição inicial é $e = 0.5$, $e_p = 0.7$. O primeiro painel representa o semi-eixo maior dos dois planetas, o segundo painel mostra a excentricidade de ambos planetas, o terceiro painel mostra a variação da longitude do periastron e no último painel a variação dos ângulos ressonantes foi representada.

2.3 Ressonância 3/-1 (Figs. 2.18 - 2.22)

Para a ressonância 3/-1 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -1\lambda - 3\lambda_p + 4\varpi \text{ (barra de cor)} \quad (2.14)$$

$$\phi_1 = -1\lambda - 3\lambda_p + 4\varpi_p \text{ (vermelho)} \quad (2.15)$$

$$\phi_2 = -1\lambda - 3\lambda_p + \varpi_p + 3\varpi \text{ (verde)} \quad (2.16)$$

$$\phi_3 = -1\lambda - 3\lambda_p + 3\varpi_p + \varpi \text{ (azul)} \quad (2.17)$$

$$\phi_4 = -1\lambda - 3\lambda_p + 2\varpi_p + 2\varpi \text{ (ciano)} \quad (2.18)$$

Os resultados para o caso restrito (ER3BP) para $M = 0$ e $M = \pi$ foram apresentados na Figura 2.18. A simetria entre os mapas é evidente, para $M = 0$, as famílias de ponto fixo estão presentes em Q_1 , Q_2 e Q_3 , por outro lado para $M = \pi$ as famílias do ponto fixo existem em Q_1 , Q_3 e Q_4 . No Q_1 para $M = 0$ há três famílias de ponto fixo e uma região de libração de ϕ_3 . A família de ponto fixo no Q_2 para $M = 0$ é mantida pela libração de ϕ_2 e ϕ_3 em torno de 0, e ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_4 e $\Delta\varpi$ em torno de π , também há uma região de libração de ϕ_2 nesse quadrante. No Q_3 para $M = 0$, há duas famílias de ponto fixo mantidas pela libração de todos os ângulos e do $\Delta\varpi$ em torno de π . Para o mapa considerando $M = \pi$, as mesmas regiões de estabilidade são observadas devido a simetria; de modo que o Q_1 é similar ao Q_3 para $M = 0$ e os quadrantes Q_3 e Q_4 possuem as mesmas famílias de ponto

fixo que os quadrantes Q_1 e Q_2 do mapa com $M = 0$. No Q_3 para $M = \pi$ surgem algumas condições iniciais com libração do ϕ_2 .

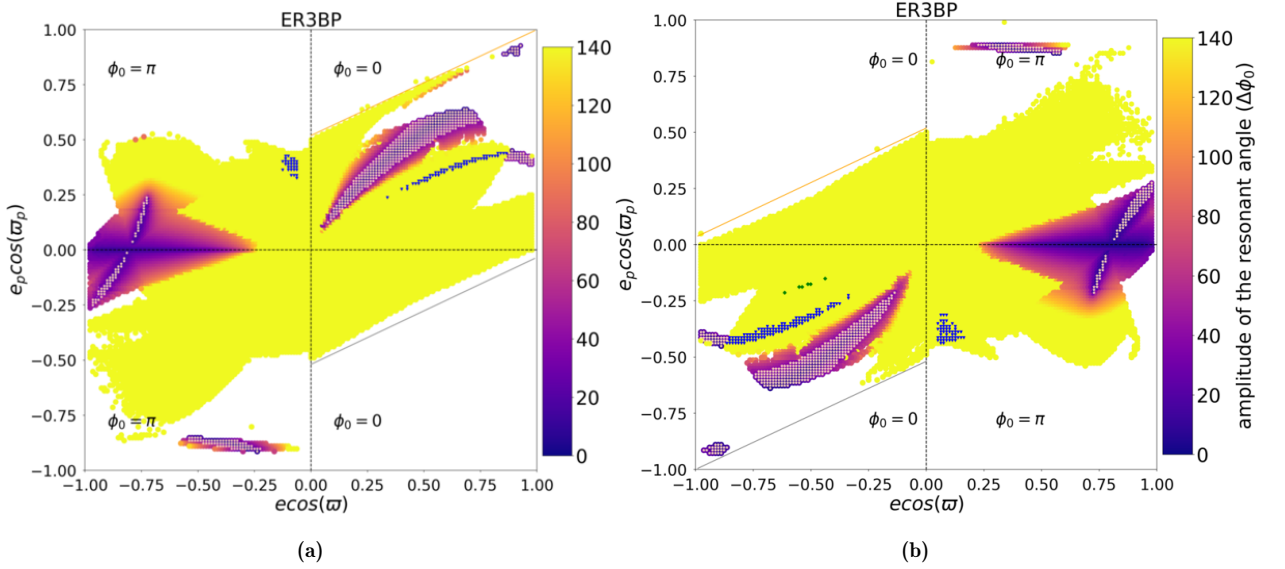


Figura 2.18: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-1 no problema elíptico restrito de três corpos (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Os mapas para o problema planetário em que o planeta retrógrado possui a massa de Netuno foram apresentados na Figura 2.19. A principal diferença em relação aos mapas do caso restrito é a separação da família de ponto fixo, observada em Q_3 para $M = 0$ e Q_1 para $M = \pi$, em duas famílias. Com aumento da massa, a região de libração de ϕ_2 no Q_3 para $M = \pi$ se tornou mais evidente. A evolução orbital de duas condições iniciais circuladas na Figura 2.19 foram representadas na Figura 2.20. A condição inicial circulada em Q_1 para $M = 0$ corresponde a uma família de ponto fixo em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram em torno de 0 (Figura 2.20a). A Figura 2.20b mostra a evolução orbital da condição inicial circulada em Q_4 para $M = \pi$, essa também corresponde a uma família de ponto fixo, porém, com libração dos ângulos ressonantes em torno de ambos os centros e com $\Delta\varpi$ librando em torno de π .

Na Figura 2.21 apresentamos os mapas de estabilidade para o caso em que o segundo planeta possui a massa de Saturno. No Q_1 para $M = 0$, há três famílias de ponto fixo, uma região de libração do ϕ_3 e uma região de libração do ϕ_2 que não havia sido observada no mapa utilizando a massa de Netuno. As famílias de ponto fixo no Q_2 para $M = 0$ e Q_4 para $M = \pi$ são parcialmente destruída com o aumento da massa. No Q_3 para $M = 0$ somente a família de ponto fixo com alto valor de e_p sobrevive. No Q_3 para $M = \pi$, as famílias de ponto fixo e as regiões de libração de ϕ_2 e ϕ_3 sobrevivem ao aumento de massa do terceiro corpo.

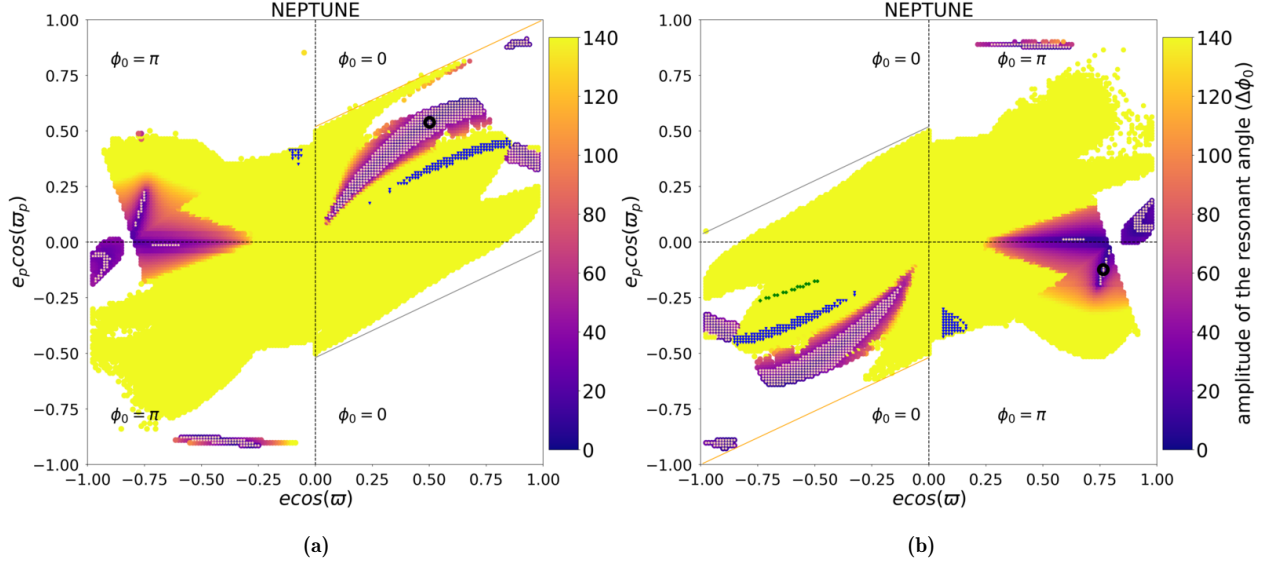


Figura 2.19: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-1 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

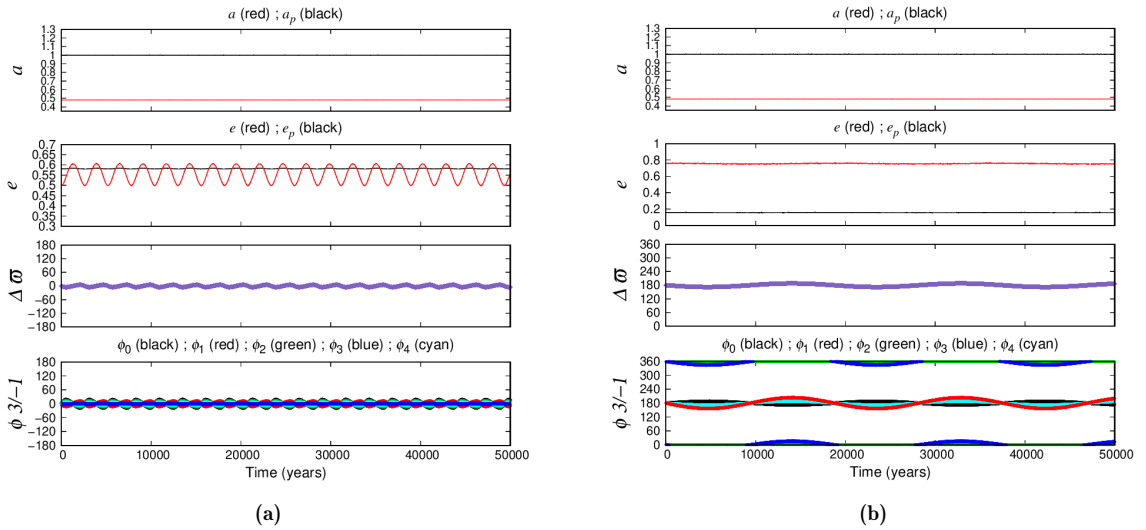


Figura 2.20: Evolução orbital das condições iniciais circuladas na Figura 2.19. Em (a), a condição inicial é $e = 0.5$, $e_p = 0.7$. Em (b) a condição inicial é $e = 0.25$, $e_p = 0.95$. O primeiro painel representa o semi-eixo maior dos dois planetas, o segundo painel mostra a excentricidade de ambos planetas, o terceiro painel mostra a variação da longitude do periastro e no último painel a variação dos ângulos ressonantes foi representada.

Na Figura 2.22 foram representadas os mapas para o caso em que o terceiro corpo possui a massa de Júpiter. De forma geral, há uma destruição das pequenas famílias de ponto fixo observadas até a massa de Saturno. A principal família de ponto fixo ainda está presente em Q_1 para $M = 0$, e Q_3 para $M = \pi$, entretanto para alguns valores de excentricidade essa família é verticalmente instável. No Q_3 para $M = 0$, e no Q_4 para

$M = \pi$, surgem duas novas regiões estáveis mantidas pela libração do ϕ_1 em torno de π . As regiões de libração de ϕ_2 e ϕ_3 sobrevivem ao aumento de massa do segundo planeta.

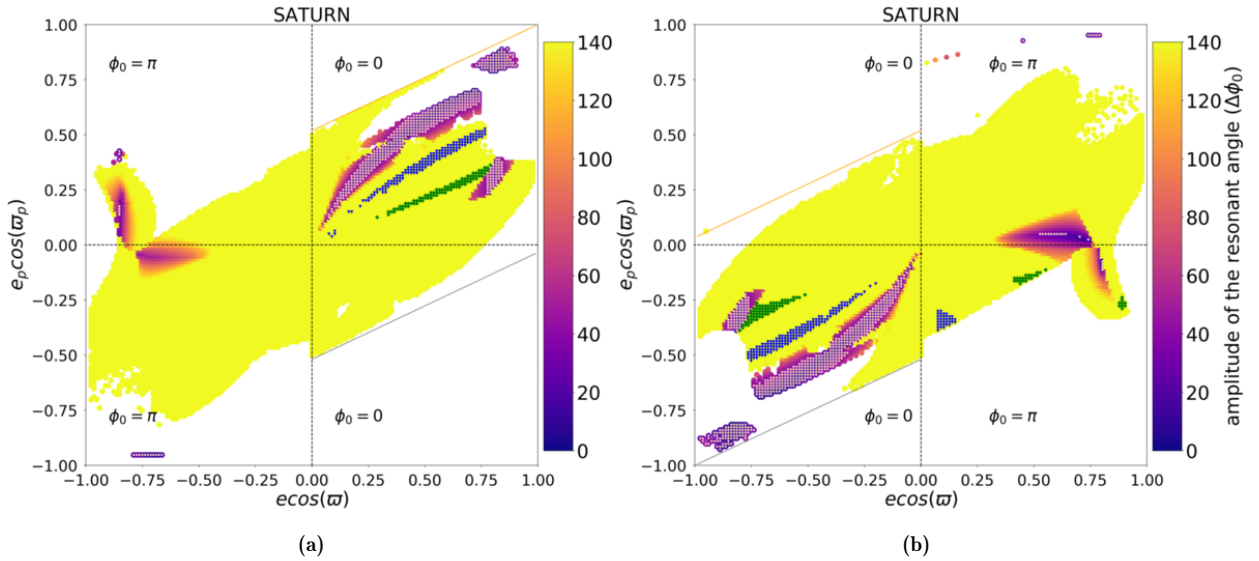


Figura 2.21: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-1 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Saturno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_2 (verde) e ϕ_2 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

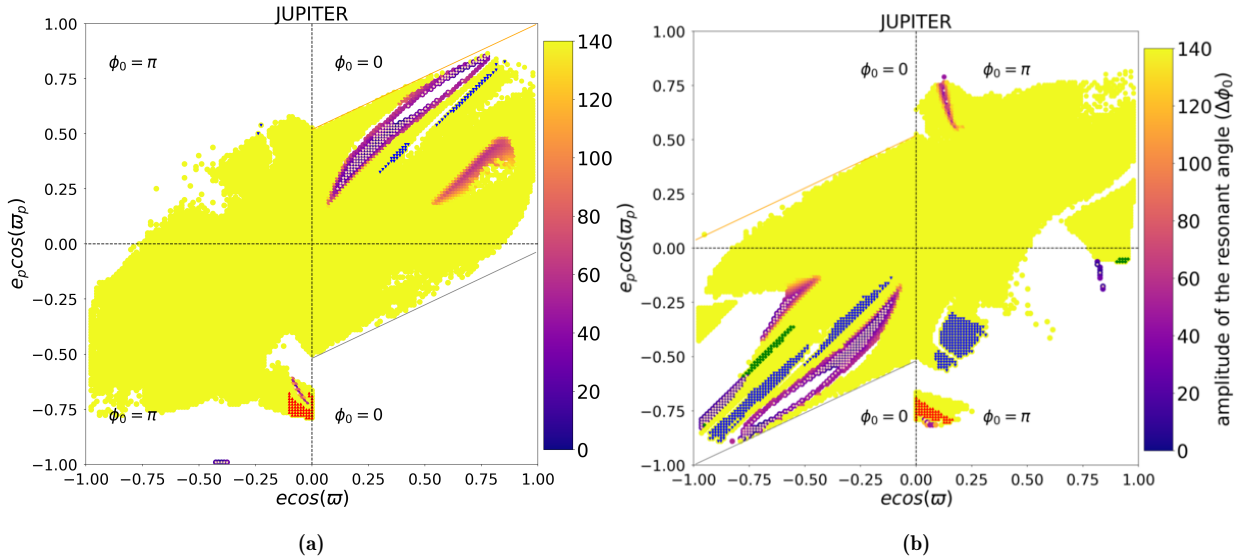


Figura 2.22: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-1 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. As estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os símbolos coloridos indicam libração de um ângulo ressonante, ϕ_1 (vermelho), ϕ_2 (verde) e ϕ_2 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

2.4 Ressonância 1/-4 (Figs. 2.23 - 2.26)

Para a ressonância 1/-4 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -4\lambda - \lambda_p + 5\varpi \quad (\text{barra de cor}) \quad (2.19)$$

$$\phi_1 = -4\lambda - \lambda_p + 5\varpi_p \quad (\text{vermelho}) \quad (2.20)$$

$$\phi_2 = -4\lambda - \lambda_p + 4\varpi_p + \varpi \quad (\text{verde}) \quad (2.21)$$

$$\phi_3 = -4\lambda - \lambda_p + \varpi_p + 4\varpi \quad (\text{azul}) \quad (2.22)$$

$$\phi_4 = -4\lambda - \lambda_p + 3\varpi_p + 2\varpi \quad (\text{ciano}) \quad (2.23)$$

$$\phi_5 = -4\lambda - \lambda_p + 2\varpi_p + 3\varpi \quad (\text{magenta}) \quad (2.24)$$

Através dos mapas de estabilidades ao considerar o problema elíptico restrito de três corpos, representados na Figura 2.23, podemos ver que não há família do ponto fixo para os dois valores de anomalia média estudados. No Q1 do mapa em que $M = 0$, há uma família mantida somente pela libração do ϕ_3 ; certas condições iniciais do Q2 para $M = \pi$ também são mantidas pela libração de ϕ_3 . Além das regiões de libração de ϕ_0 para o caso em que o corpo retrógrado possui alta excentricidade, observa-se no Q1 do mapa para $M = \pi$ uma região de libração de ϕ_0 no caso em que o planeta prógrado possui alta excentricidade ($e_p > 0.75$).

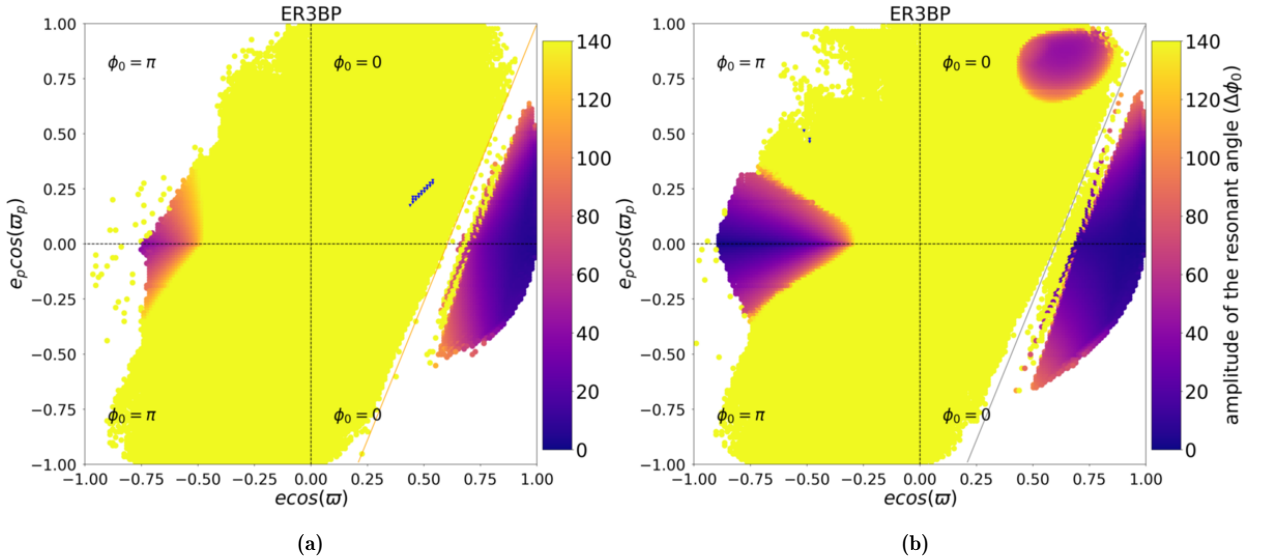


Figura 2.23: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-4 no problema elíptico restrito de três corpos (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos azuis indicam libração apenas de ϕ_3 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Os resultados ao considerar o problema de três corpos em que o planeta retrógrado possui a massa de Netuno são similares ao caso elíptico restrito (Figura 2.24). A principal diferença que ocorre neste novo sistema é de famílias de ponto fixo para valores em que o planeta prógrado possui baixas excentricidades. Estas famílias existem para ambos valores iniciais de anomalia média ($M = 0$ e π). Uma família do ponto fixo para o caso em que o planeta prógrado possui uma órbita excêntrica também pode ser observada no Q1 do mapa para $M = \pi$; há também em Q2 para este mesmo valor da anomalia média, um maior número de condições iniciais mantidas somente pela libração do ϕ_3 .

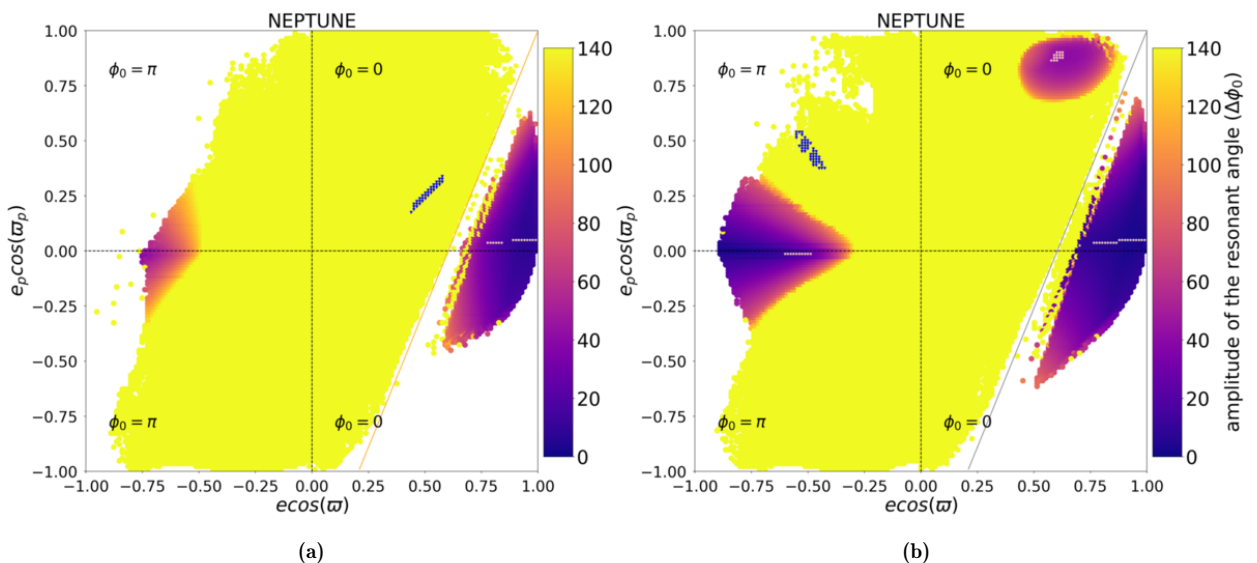


Figura 2.24: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-4 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos azuis indicam libração apenas de ϕ_3 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Os mapas de estabilidades para o caso em que o planeta secundário possui a massa de Saturno foram representados pela Figura 2.25. As famílias de libração do ϕ_3 são mais evidentes para a massa de Saturno do que de Netuno, além de que para Q_1 com $M = \pi$ há uma nova família mantida pela libração de ϕ_3 . Similar ao observado para outras ressonâncias, as regiões de ponto fixo observadas para o caso com a massa de Netuno (Q_1 para $M = 0$ e $M = \pi$) são deslocada para maiores valores de e_p . Com o aumento da massa do segundo corpo ocorre também um aumento da região de ponto fixo no caso em que o planeta possui alta excentricidade (Q_1 para $M = \pi$).

Na Figura 2.26 foram representados os mapas ao considerar que o segundo planeta possui a massa de Júpiter. Neste caso, podemos ver pelo Q_1 de ambas figuras ($M = 0$ e $M = \pi$) que a maior parte da região de ponto fixo é destruída; essa instabilidade é causada pela perturbação mútua entre os planetas de modo que há o aumento da inclinação dos

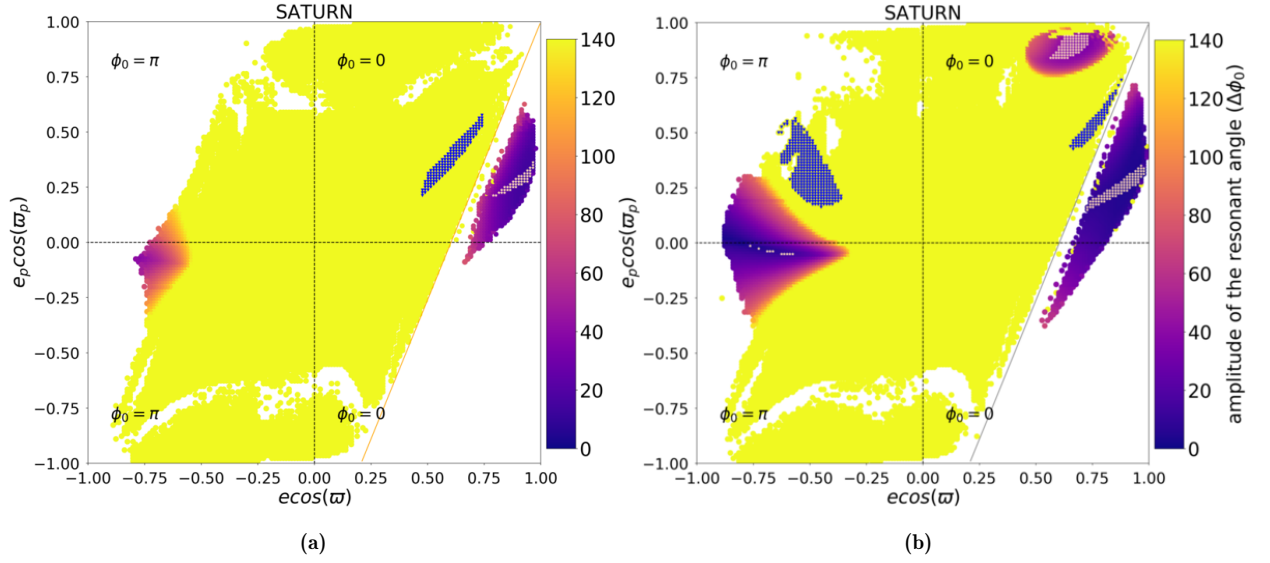


Figura 2.25: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-4 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Saturno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos azuis indicam libração apenas de ϕ_3 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

planetas, assim resultando na colisão do planeta retrógrado com a estrela. Para $M = \pi$, surge uma pequena região do ponto fixo para altas excentricidades do planeta prógrado no Q_1 ; ademais, duas regiões mantidas pela libração do ϕ_3 são observadas no Q_1 e Q_2 .

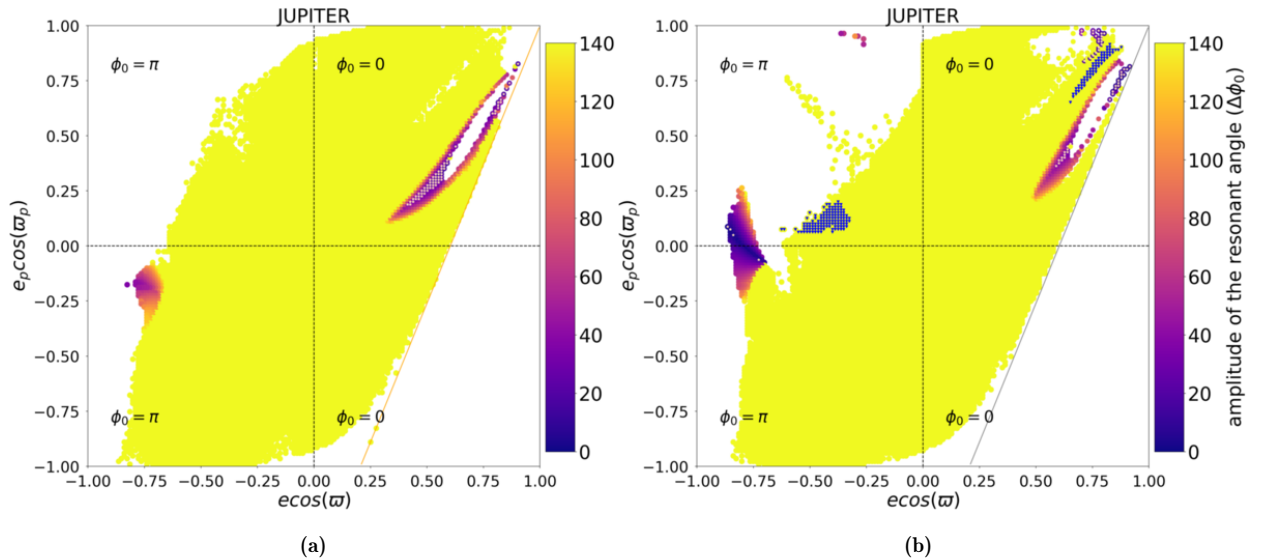


Figura 2.26: Mapas de estabilidade para a ressonância 1/-4 no problema de três corpos no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos azuis indicam libração apenas de ϕ_3 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

2.5 Ressonância 4/-1 (Figs. 2.27 - 2.30)

Para a ressonância 4/-1 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -1\lambda - 4\lambda_p + 5\varpi \quad (\text{barra de cor}) \quad (2.25)$$

$$\phi_1 = -1\lambda - 4\lambda_p + 5\varpi_p \quad (\text{vermelho}) \quad (2.26)$$

$$\phi_2 = -1\lambda - 4\lambda_p + 1\varpi_p + 4\varpi \quad (\text{verde}) \quad (2.27)$$

$$\phi_3 = -1\lambda - 4\lambda_p + 4\varpi_p + 1\varpi \quad (\text{azul}) \quad (2.28)$$

$$\phi_4 = -1\lambda - 4\lambda_p + 2\varpi_p + 3\varpi \quad (\text{ciano}) \quad (2.29)$$

$$\phi_5 = -1\lambda - 4\lambda_p + 3\varpi_p + 2\varpi \quad (\text{magenta}) \quad (2.30)$$

Na Figura 2.27 apresentamos os mapas para o problema elíptico restrito de 3 corpos. Como podemos ver pelos mapas, a simetria dessa ressonância ocorre através do eixo x. Para o mapa de $M = 0$, existem famílias periódicas e regiões de libração do ϕ_3 em todos quadrantes; as famílias periódicas de Q_2 e Q_4 são mantidas pela libração dos ângulos ressonantes ϕ_0, ϕ_3, ϕ_4 em torno de 0, e ϕ_1, ϕ_2, ϕ_5 em torno de π . Para $M = \pi$, há duas famílias periódicas com altos valores de e_p em Q_1 e Q_3 .

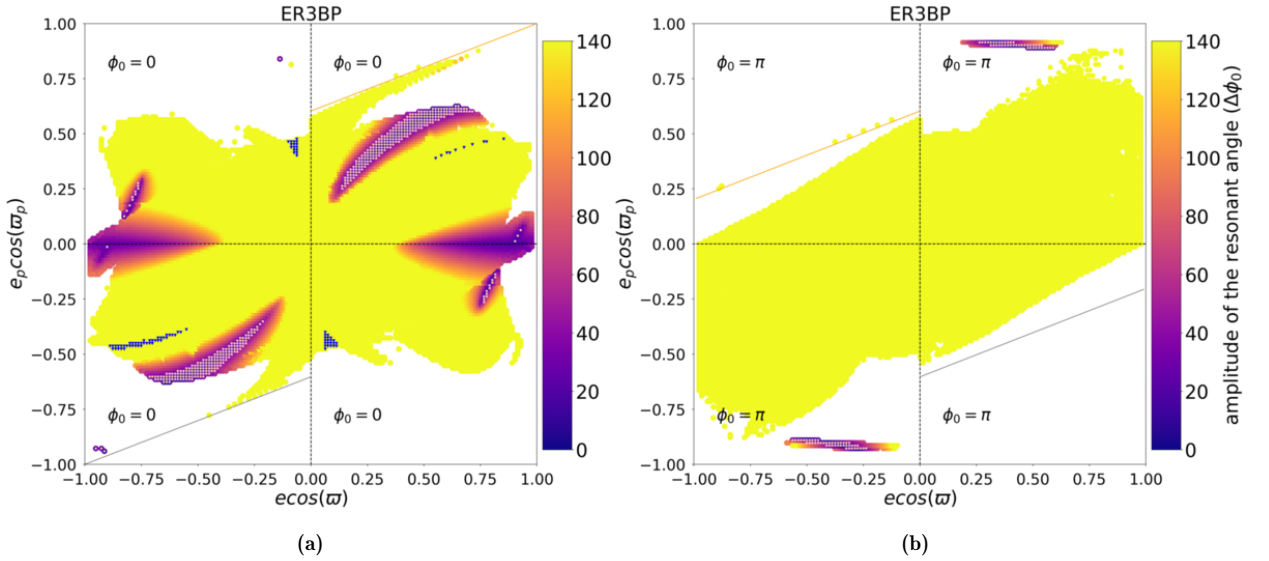


Figura 2.27: Mapas de estabilidade para a ressonância 4/-1 no problema elíptico restrito de três corpos (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos azuis indicam libração apenas de ϕ_3 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Os mapas de estabilidade considerando o planeta retrógrado com a massa de Netuno foram dispostos na Figura 2.28. Para $M = 0$, uma família periódica com $e_p \approx 0$ surge em Q_1 . Em Q_1 e Q_3 , há famílias periódicas para altos valores de e e e_p . A região de libração

do ϕ_3 em Q_3 desaparece com o aumento da massa. Para $M = \pi$, as famílias de ponto fixo são similares as observadas no mapa do caso restrito.

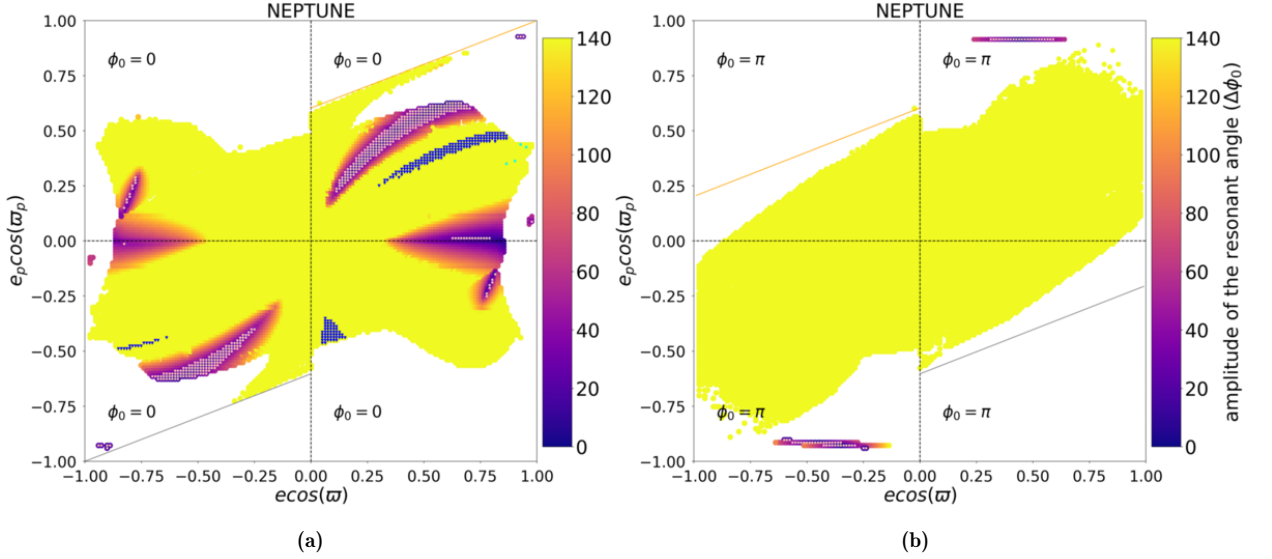


Figura 2.28: Mapas de estabilidade para a ressonância 4/-1 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos azuis indicam libração apenas de ϕ_3 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

Na Figura 2.29 apresentamos os mapas considerando o segundo planeta com a massa de Saturno. Para $M = 0$, as famílias periódicas com $e_p \approx 0$ presentes no caso de Netuno desaparecem. A região de libração de ϕ_3 também desaparece em Q_3 , por outro lado, surge uma nova família de libração do ϕ_4 em Q_4 . As principais famílias periódicas em Q_1 e Q_3 diminuem em tamanho, enquanto as famílias periódicas com alto valor de e e e_p crescem um pouco. Para $M = \pi$, a família periódica diminui consideravelmente em tamanho com o aumento da massa.

Na Figura 2.30, os mapas de estabilidade considerando que o segundo planeta possui a massa de Júpiter são apresentados. Para $M = 0$, podemos ver que uma região considerável dentro da família é destruída quando ambos planetas possuem a mesma massa. Essa instabilidade ocorre por conta dessas condições iniciais serem verticalmente instáveis, fazendo com que um dos planetas colida com a estrela. A região de libração do ϕ_3 reaparece em Q_3 e sobrevive ao aumento da massa em Q_4 . Em Q_4 , há uma região estável mantida pela libração de ϕ_1 em torno de π . Similar aos mapas considerando outros valores de massa para o planeta, há pouquíssimas famílias no mapa para $M = \pi$; no caso da massa de Júpiter, uma região de libração do ϕ_1 surge em Q_3 .

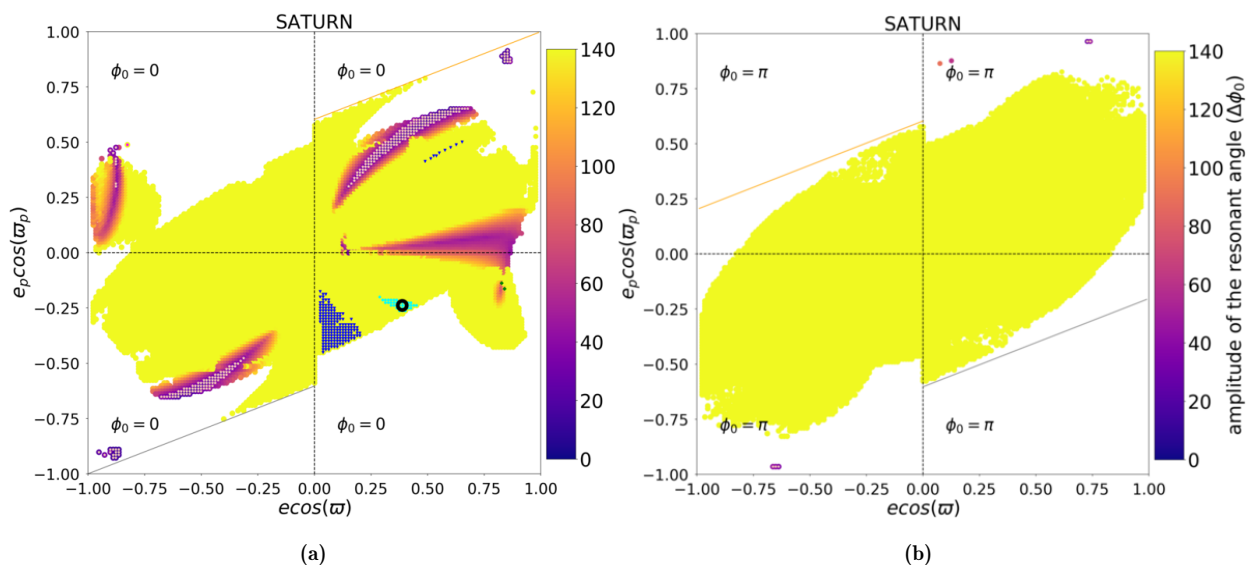


Figura 2.29: Mapas de estabilidade para a ressonância 4/-1 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Saturno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos coloridos indicam libração apenas de um dos ângulos ressonantes, ϕ_3 (azul) e ϕ_4 (ciano). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

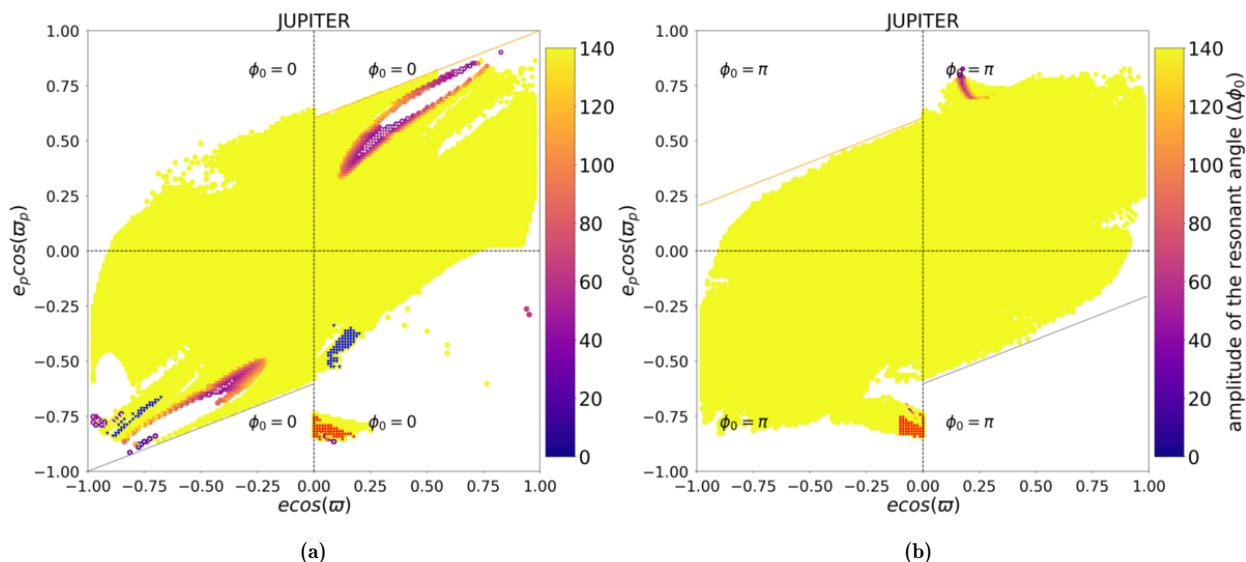


Figura 2.30: Mapas de estabilidade para a ressonância 4/-1 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos coloridos indicam libração apenas de um dos ângulos ressonantes, ϕ_1 (vermelho) e ϕ_3 (azul). As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de meio período do corpo externo.

2.6 Ressonância 2/-3 (Figs. 2.31 - 2.34)

Para a ressonância 2/-3 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -3\lambda - 2\lambda_p + 5\varpi \quad (\text{barra de cor}) \quad (2.31)$$

$$\phi_1 = -3\lambda - 2\lambda_p + 5\varpi_p \quad (\text{vermelho}) \quad (2.32)$$

$$\phi_2 = -3\lambda - 2\lambda_p + 3\varpi_p + 2\varpi \quad (\text{verde}) \quad (2.33)$$

$$\phi_3 = -3\lambda - 2\lambda_p + 2\varpi_p + 3\varpi \quad (\text{azul}) \quad (2.34)$$

$$\phi_4 = -3\lambda - 2\lambda_p + 4\varpi_p + 1\varpi \quad (\text{ciano}) \quad (2.35)$$

$$\phi_5 = -3\lambda - 2\lambda_p + 1\varpi_p + 4\varpi \quad (\text{magenta}) \quad (2.36)$$

No caso em que consideramos que o terceiro corpo possui massa desprezível, podemos ver pela Figura 2.31 que as famílias do ponto fixo só existem para $M = 0$. A família presente no Q4 possui libração de $\phi_0, \phi_3, \phi_4, \Delta\varpi$ em torno de 0 e ϕ_1, ϕ_2, ϕ_5 em torno de π . Para $M = \pi$ existem somente certas regiões para baixos valores de e_p que são estáveis devido a libração de ϕ_0 . As duas famílias em Q_3 no mapa de $M = 0$ estão relativamente de acordo com os resultados obtidos por Kotoulas e Voyatzis (2020b) considerando o caso restrito, quando o planeta possui a massa de Netuno. Nossa família do Q_4 é um pouco diferente comparada a obtida por Kotoulas e Voyatzis (2020b), mas isso ocorre devido a diferença entre as massas utilizadas para o planeta prógrado.

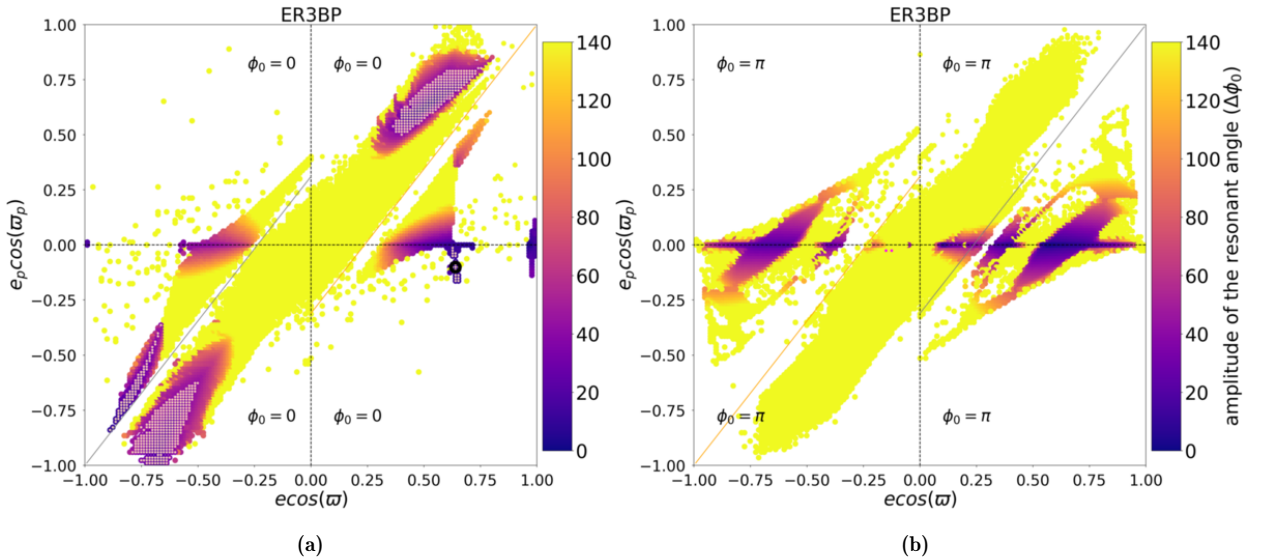


Figura 2.31: Mapas de estabilidade para a ressonância 2/-3 no caso restrito (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

Ao utilizarmos a massa de Netuno para o segundo planeta observamos (Figura 2.32) que a principal diferença em relação aos mapas do caso restrito se dá pelo surgimento de algumas regiões de ponto fixo para baixos valores de e_p no caso em que $M = \pi$. Já para $M = 0$, a família de ponto fixo de Q_4 desaparece, havendo assim para esse valor de anomalia média apenas famílias em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram em torno de 0 (Q_1 e Q_3).

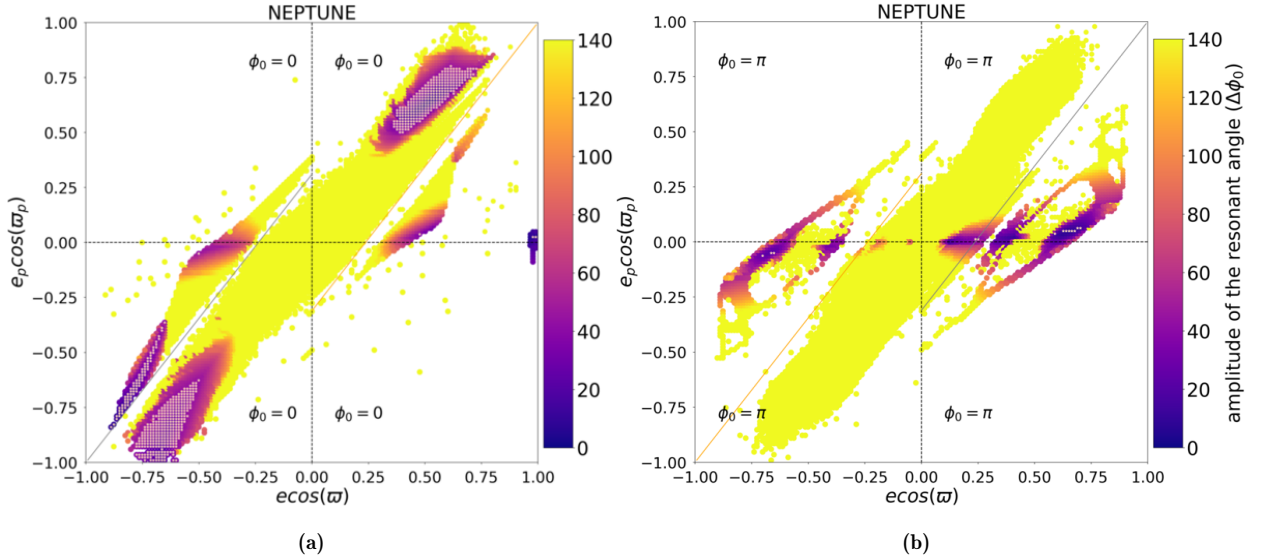


Figura 2.32: Mapas de estabilidade para a ressonância 2/-3 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

Os mapas de estabilidade considerando um planeta secundário com a massa de Saturno foram dispostos na Figura 2.33. De forma geral, as famílias observadas no caso da massa de Netuno continuam a existir, a principal diferença, é que tanto para $M = 0$ quanto para $M = \pi$, há um pequeno aumento de e_p para as famílias que possuíam $e_p \approx 0$. No caso de $M = \pi$ toda estabilidade passa a ser limitada pelas duas linhas de colisão.

Os mapas para o caso em que ambos planetas possuem a massa de Júpiter foram representados na Figura 2.34. Para $M = 0$, as únicas regiões estáveis são as famílias de ponto fixo que existem para altas excentricidades de ambos os planetas (Q_1 e Q_3). Para $M = \pi$, as duas famílias estáveis também estão presentes no Q_1 e Q_3 ; entretanto, estas condições iniciais são mantidas pela libração dos ângulos ressonantes para menores valores de e e e_p .

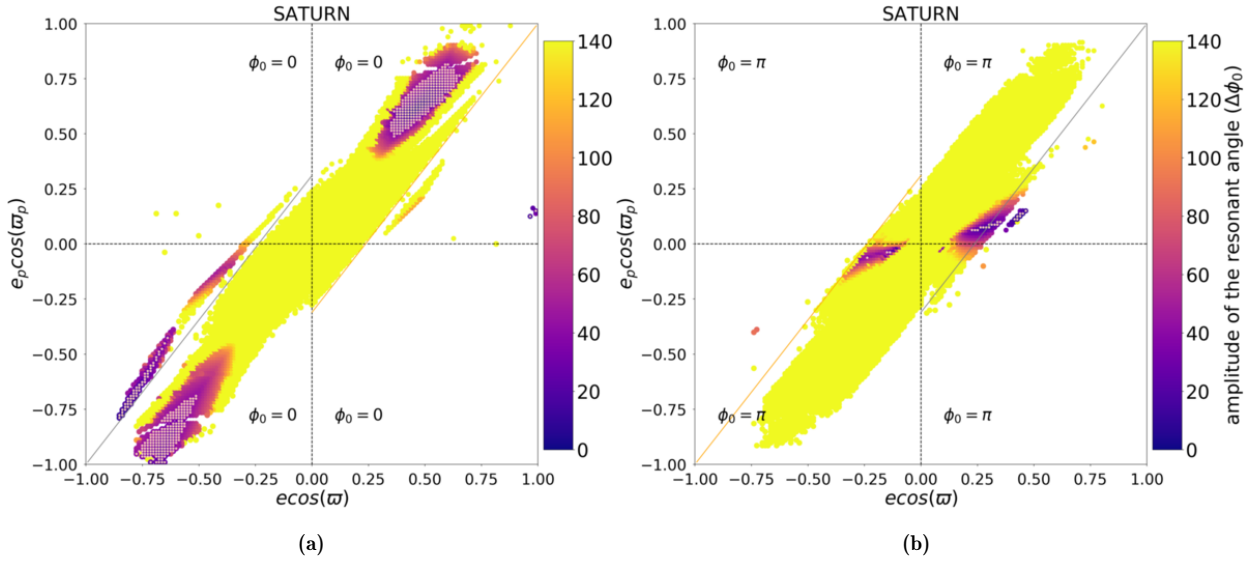


Figura 2.33: Mapas de estabilidade para a ressonância 2/-3 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Saturno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

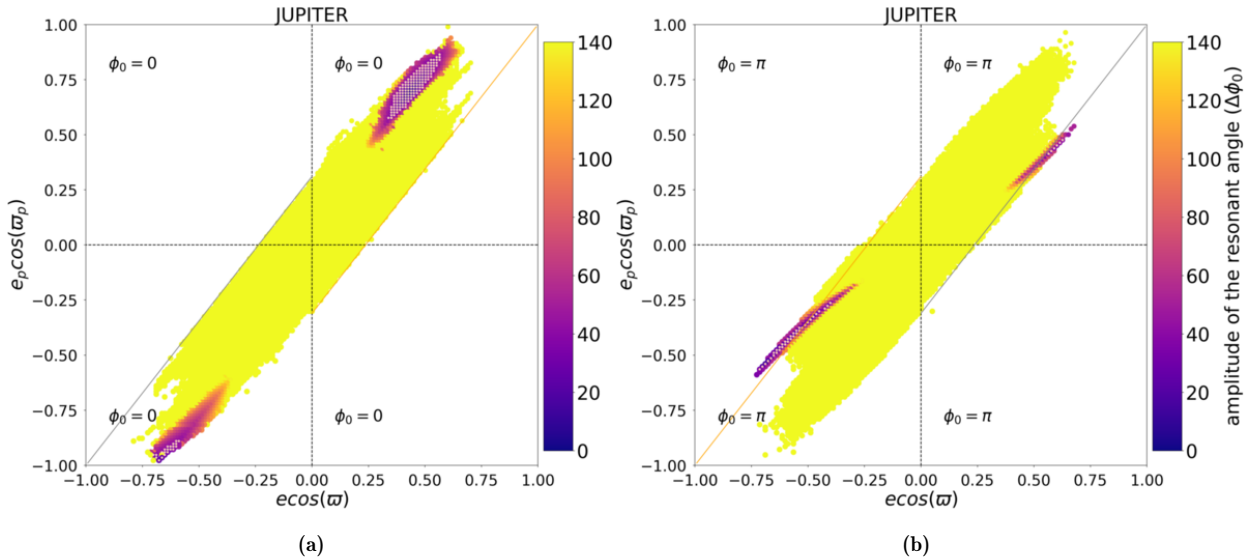


Figura 2.34: Mapas de estabilidade para a ressonância 2/-3 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

2.7 Ressonância 3/-2 (Figs. 2.35 - 2.38)

Para a ressonância 3/-2 precisamos considerar os seguintes ângulos ressonantes:

$$\phi_0 = -2\lambda - 3\lambda_p + 5\varpi \quad (\text{barra de cor}) \quad (2.37)$$

$$\phi_1 = -2\lambda - 3\lambda_p + 5\varpi_p \quad (\text{vermelho}) \quad (2.38)$$

$$\phi_2 = -2\lambda - 3\lambda_p + 2\varpi_p + 3\varpi \quad (\text{verde}) \quad (2.39)$$

$$\phi_3 = -2\lambda - 3\lambda_p + 3\varpi_p + 2\varpi \quad (\text{azul}) \quad (2.40)$$

$$\phi_4 = -2\lambda - 3\lambda_p + 1\varpi_p + 4\varpi \quad (\text{ciano}) \quad (2.41)$$

$$\phi_5 = -2\lambda - 3\lambda_p + 4\varpi_p + 1\varpi \quad (\text{magenta}) \quad (2.42)$$

Na Figura 2.35 apresentamos os mapas do caso restrito para essa ressonância. A simetria ocorre entre quadrantes equivalentes para $M = 0$ e $M = \pi$. Existem famílias periódicas em Q_1 e Q_4 para ambos valores de anomalia média, a família de Q_4 é mantida pela libração de ϕ_0, ϕ_2, ϕ_5 em torno de 0, e $\phi_1, \phi_3, \phi_4, \Delta\varpi$ em torno de π . Para $M = 0$, algumas condições iniciais possuem libração de ϕ_1 em torno de 0.

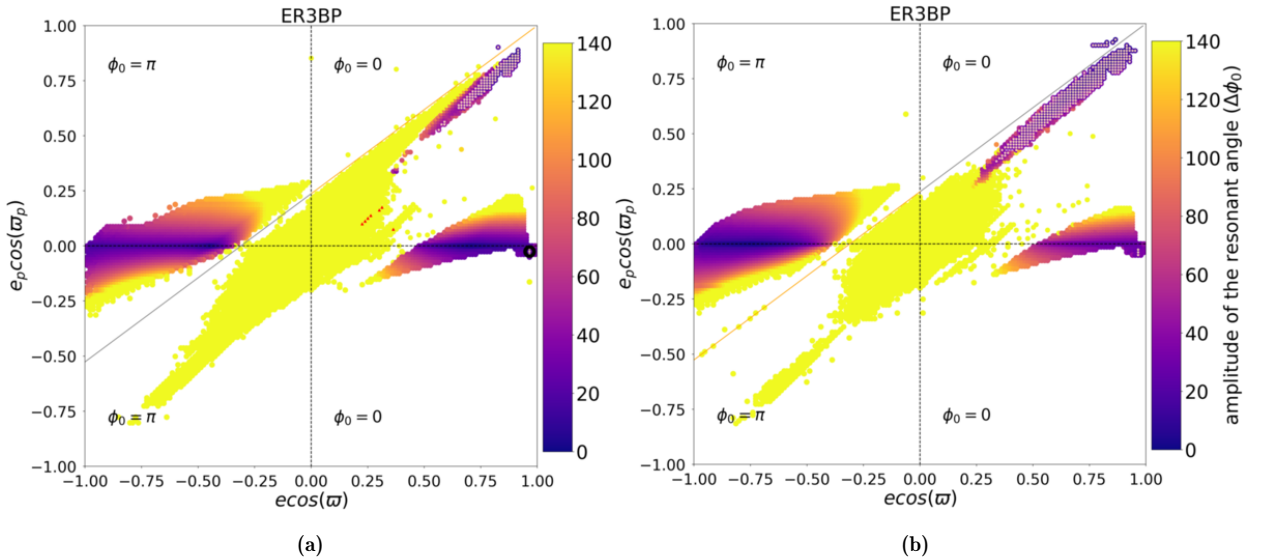


Figura 2.35: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-2 no caso restrito (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos vermelhos indicam libração apenas de ϕ_1 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

Os mapas de estabilidade considerando um planeta com a massa de Netuno foram dispostos na Figura 2.36. Para $M = 0$, surgem novas famílias periódicas em Q_1 e Q_3 com baixos valores de excentricidade do planeta prógrado. A região de libração do ϕ_1 ainda continua a existir com o aumento da massa. Para $M = \pi$, uma família periódica para

baixos valores de e_p também surge em Q_3 . A família com $e = 0.96$ presente no Q_4 do caso restrito some com o aumento da massa.

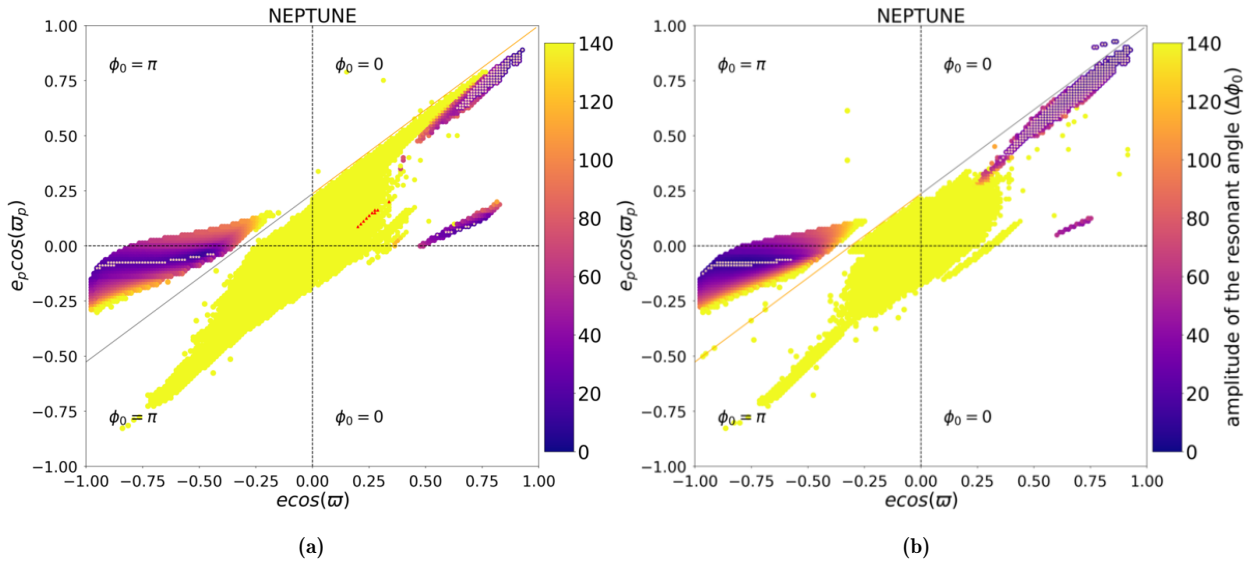


Figura 2.36: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-2 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Netuno (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. Os pontos vermelhos indicam libração apenas de ϕ_1 . As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

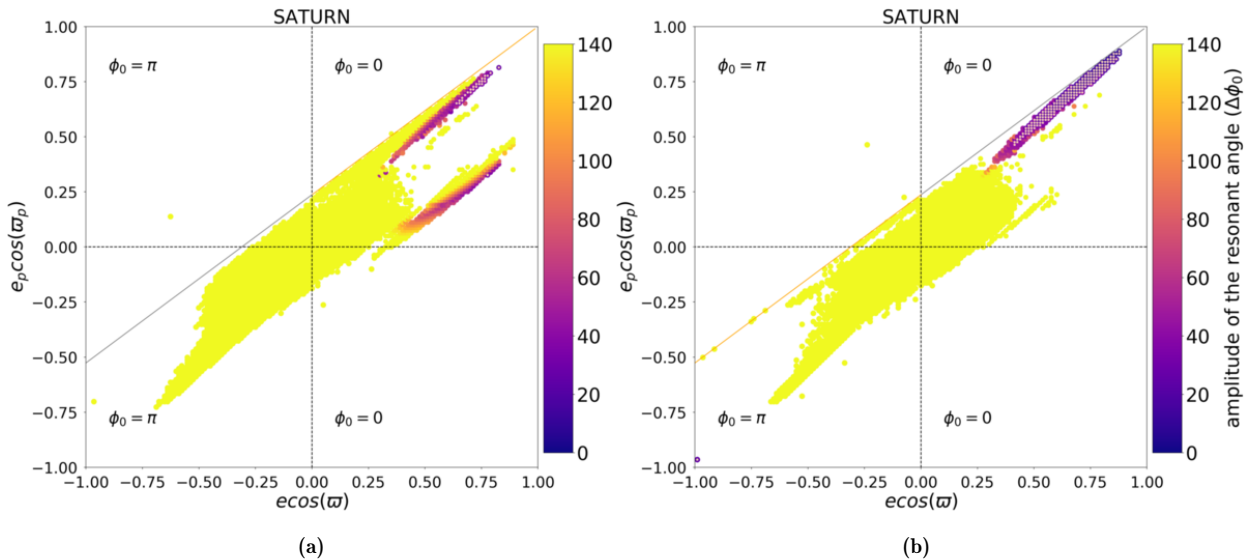


Figura 2.37: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-2 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

Na Figura 2.37 apresentamos os mapas quando o segundo planeta possui a massa de Saturno. Em geral, para ambos valores da anomalia média, a família de Q_3 desaparece. Para $M = 0$, a família periódica com baixos valores de e_p , observada em Q_1 no caso de Netuno, praticamente desaparece. A região de libração do ϕ_1 não existe para este valor da massa.

Os mapas considerando o planeta retrógrado com a massa de Júpiter foram apresentados na Figura 2.38. Em ambos mapa, há uma família periódica em Q_3 , mantida pela libração de todos ângulos ressonantes e $\Delta\varpi$ em torno de π . Quando ambos planetas possuem a massa de Júpiter, as duas principais famílias observadas em Q_1 existem para menores valores de excentricidade do planeta prógrado.

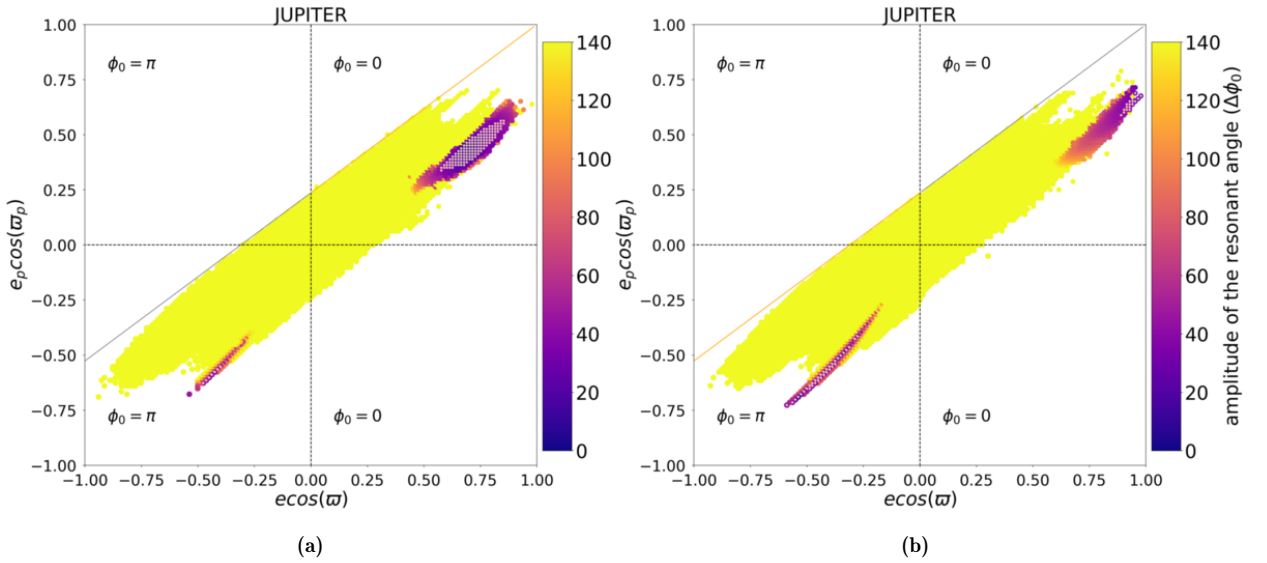


Figura 2.38: Mapas de estabilidade para a ressonância 3/-2 no caso em que o segundo planeta possui a massa de Júpiter (a) $M = 0$; (b) $M = \pi$. A barra de cor representa a libração do ângulo ressonante para o caso restrito (ϕ_0), as estrelas brancas representam a libração do ponto fixo, em que todos os ângulos e o $\Delta\varpi$ libram. As linhas em laranja e cinza representam, respectivamente colisão no tempo zero ou depois de um período do corpo externo.

Neste capítulo descrevemos os resultados presentes em dois artigos já publicados (Caritá et al., 2022; Signor et al., 2023), sendo que na Seção 2.1.1 apresentamos alguns resultados de um artigo em preparação.

Por meio destes resultados, observamos que em geral, quando aumentamos a massa do planeta retrógrado para a massa de Netuno, algumas famílias de ponto fixo adicionais surgem próximo do eixo x ($e_p \approx 0$). Continuando a aumentar a massa do corpo retrógrado, estas famílias se afastam do eixo x e a região de ponto fixo se torna menos predominante no espaço de fase, ou seja, quando os planetas possuem a massa de Júpiter, há menos condições iniciais referente a famílias de ponto fixo do que considerando outros valores de massa. Isso acontece para todas ressonâncias de segunda, quarta e quinta ordem. Exceto pelas ressonâncias 2/-3 e 3/-2, observamos que há uma região considerável de

ponto fixo que se torna verticalmente instável quando ambos planetas possuem a mesma massa. Esta instabilidade não é causada devido a encontros próximos, mas sim pelo aumento/diminuição da inclinação do corpo prógrado/retrógrado até que um dos dois colida com o estrela.

Observamos algumas diferenças entre nossos resultados numéricos e as famílias periódicas reportadas em (Kotoulas & Voyatzis, 2020a, 2020b). No caso da ressonância 3/-1, observamos uma nova família de ponto fixo e uma família para alta excentricidade (e_p). Para a ressonância 4/-1, também obtivemos famílias para altos valores de e_p e também recuperamos uma família de ponto fixo próxima do eixo x para altos valores de e , estando assim de acordo com a bifurcação da família ressonante excêntrica do CR3BP reportada em Kotoulas e Voyatzis (2020a), porém esta não pode ser computada pelos autores devido a dificuldades numéricas. Para as ressonâncias 4/-1 e 3/-2, as famílias de ponto fixo que ocorrer devido a bifurcação da família circular do CR3BP, reportadas em Kotoulas e Voyatzis (2020a), não se estendem até $e = 0$ e $e_p = 0$ nos nossos resultados. Isto ocorre devido aos diferentes métodos utilizados. Enquanto Kotoulas e Voyatzis (2020a) computam as famílias periódicas utilizando o método da continuação do CR3BP, nós obtemos a informação sobre estas famílias por meio de mapas de estabilidade onde observamos as regiões quasi-periódicas em torno das famílias periódicas estáveis. Quando estas famílias são pequenas, a resolução do nosso mapa pode não ser suficiente para identificá-las. Entretanto, a informação sobre a extensão das regiões quasi-periódicas é importante e portanto nosso trabalho é complementar a Kotoulas e Voyatzis (2020a). Ademais, para a ressonância 2/-3, observamos um desacordo esperado devido a diferença entre as massas do planeta prógrado utilizadas neste trabalho e em Kotoulas e Voyatzis (2020b). Por meio de simulações adicionais considerando a massa de Netuno para o planeta prógrado, obtivemos, exceto pelas famílias com alto valor de e_p , resultados em acordo com Kotoulas e Voyatzis (2020b).

Como introduzido no Capítulo 1, sabemos que planetas em órbitas retrógradas podem existir em sistemas extrassolares. Nossos resultados indicam quais configurações retrogradadas estáveis são possíveis em sistemas com planetas em ressonâncias até quinta ordem. Portanto, estes podem ser utilizados como um guia para procurar por tais sistemas.

2.8 Ressonâncias retrógradas em sistemas perturbados

Como os elementos orbitais são aproximações do problema de dois corpos, sabemos que com o aumento da perturbação gravitacional, os elementos orbitais Keplerianos exibem variações maiores de curto período, assim tornando difícil a utilização destes parâmetros. Como os ângulos ressonantes dependem dos elementos orbitais, os mesmos não são mais úteis para identificação das ressonâncias quando o problema possui massas comparáveis. Nos artigos Caritá et al. (2023) e Morais e Namouni (2013b), o movimento de uma partícula teste retrógrada em um sistema binário foi estudado utilizando seções de Poincaré. Em ambos, a identificação das ressonâncias de movimento médio se dá por meio do número de ilhas e pela forma da órbita no referencial não inercial. Nessa seção, apresentaremos alguns resultados que obtivemos em Caritá et al. (2023), estes resultados foram reproduzidos com a permissão da *Springer Nature* (“*Reproduced with permission from Springer Nature*”; <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-023-08779-y>).

Para construir as seções de Poincaré integramos numericamente as equações do movimento do problema circular restrito de três corpos planar considerando o referencial sinódico baricêntrico. O binário é composto por uma estrela primária e secundária separadas por 1 unidade de distância de modo que a constante gravitacional é assumida como $G = 1$. As massas do primário e do secundário são respectivamente, $1 - \mu$ e μ com massa total igual a 1, sendo que $\mu = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}$. O parâmetro de massa foi variado de 0.01 até 0.5 em passos de 0.01 e, assim como Morais e Namouni (2013b), restringimos o intervalo da constante de Jacobi utilizando a seguinte equação:

$$C < \frac{2(1 - \mu)}{|x + \mu|} + \frac{2\mu}{|x - 1 + \mu|} - \mu(\mu + 2x). \quad (2.43)$$

para este intervalo e escolhendo $x_1 > 0$ e $\dot{y}_0 < 0$, ou $x_1 < 0$ e $\dot{y}_0 > 0$ garantimos que as órbitas serão retrógradas.

As seções de Poincaré foram construídas por Gabriel Caritá no âmbito de seu projeto de mestrado no IGCE (UNESP, Rio Claro), sob a orientação da Profa. Dra. Maria Helena Moreira Morais. No entanto, as seções de Poincaré, a análise dos resultados e a escrita do artigo (Caritá et al., 2023) só foram finalizados mais tarde; portanto, os resultados descritos aqui não constam na sua dissertação de mestrado defendida em Fevereiro de 2022 (Caritá, 2022). A Equação 2.44 pode ser facilmente deduzida utilizando as equações de geometria de uma ressonância, assim obtemos uma relação entre os períodos da órbita periódica (T) e o período do binário (T_b):

$$T = kT_{con} = qT_b \quad (2.44)$$

sendo que k é a ordem de ressonância e T_{con} é o período de conjunção ($y = 0$ na seção de Poincaré (x, \dot{x})). Os tempos de conjunção foram apresentados na Tabela 1 do artigo.

Como essa equação é deduzida assumindo que o movimento da partícula teste não é perturbado, sabemos que esta não é exata no caso em que as massas das estrelas do binário são comparáveis. Escolhemos nesse trabalho identificar as órbitas periódicas ressonantes por meio de 4 métodos: i) número total de ilhas na seção de Poincaré; ii) formato da órbita no referencial sinódico; iii) por meio da relação entre o período da órbita periódica e período do binário (Eq. 2.44); iv) através da ordem das ressonância nas seções de Poincaré. Mais detalhes sobre a construção das seções e a identificação das ressonâncias podem ser encontradas em Caritá et al. (2023). Nas Figuras 2.39 e 2.40, estão alguns exemplos de órbitas ressonantes no referencial não inercial.

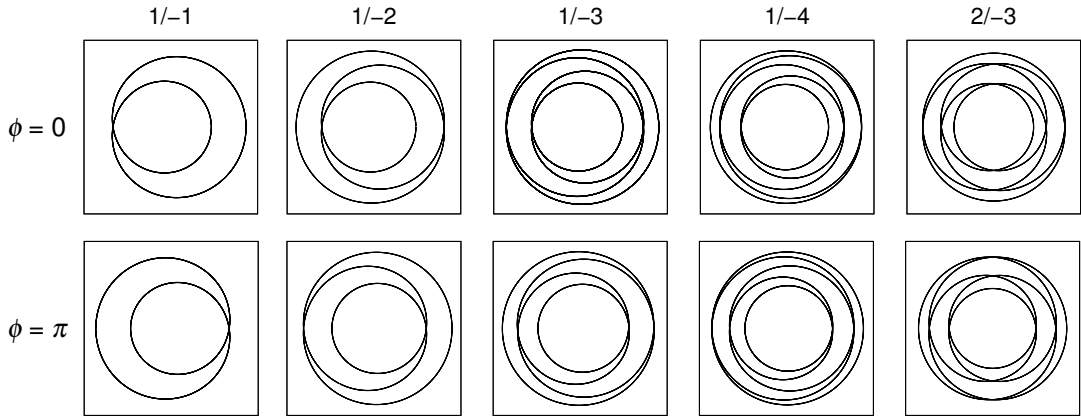


Figura 2.39: Órbitas ressonantes com excentricidade $e = 0.3$ no referencial sinódico: 1/-1, 1/-2, 1/-3, 1/-4, 2/-3 com $\phi = 0$ e π . Estas figuras foram obtidas considerando o caso não perturbado.

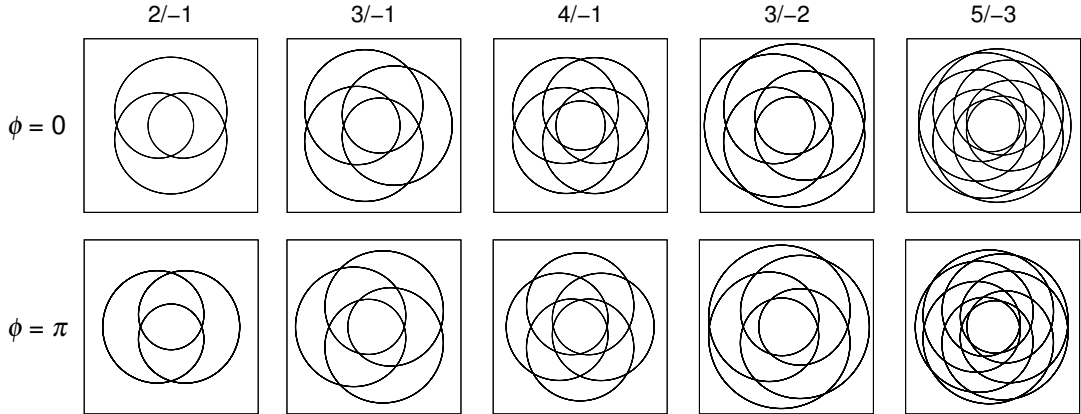


Figura 2.40: Órbitas ressonantes com excentricidade $e = 0.3$ no referencial sinódico: 2/-1, 3/-1, 4/-1, 3/-2, 5/-3 com $\phi = 0$ e π . Estas figuras foram obtidas considerando o caso não perturbado.

Utilizando estas órbitas ressonantes no referencial sinódicos podemos identificar as ilhas nas seções por meio de comparação. Identificamos as ressonâncias em diferentes modo de libração: ϕ librando em torno de 0 (modo a), ϕ librando em torno de π (modo b), e ressonância assimétrica (modo c). Os resultados de todas seções obtidas foram condensados em Tabelas disponíveis no artigo (Caritá et al., 2023).

Na Figura 2.41 apresentamos exemplos de ressonâncias exteriores e interiores para $\mu = 0.01$ e $C = 0.3$. As órbitas apresentadas de cima para baixo são: ressonância 2/-

1 (modo a e b) com períodos $\approx 1.024 T_b$ e $\approx 0.997 T_b$, respectivamente; 3/-2 (modo a) com período de $\approx 2.007 T_b$ e finalmente 2/-3 (modo b) com período de $\approx 2.998 T_b$. As ressonâncias 1/-2 e 1/-1 também foram identificadas por meio de legendas na seção.

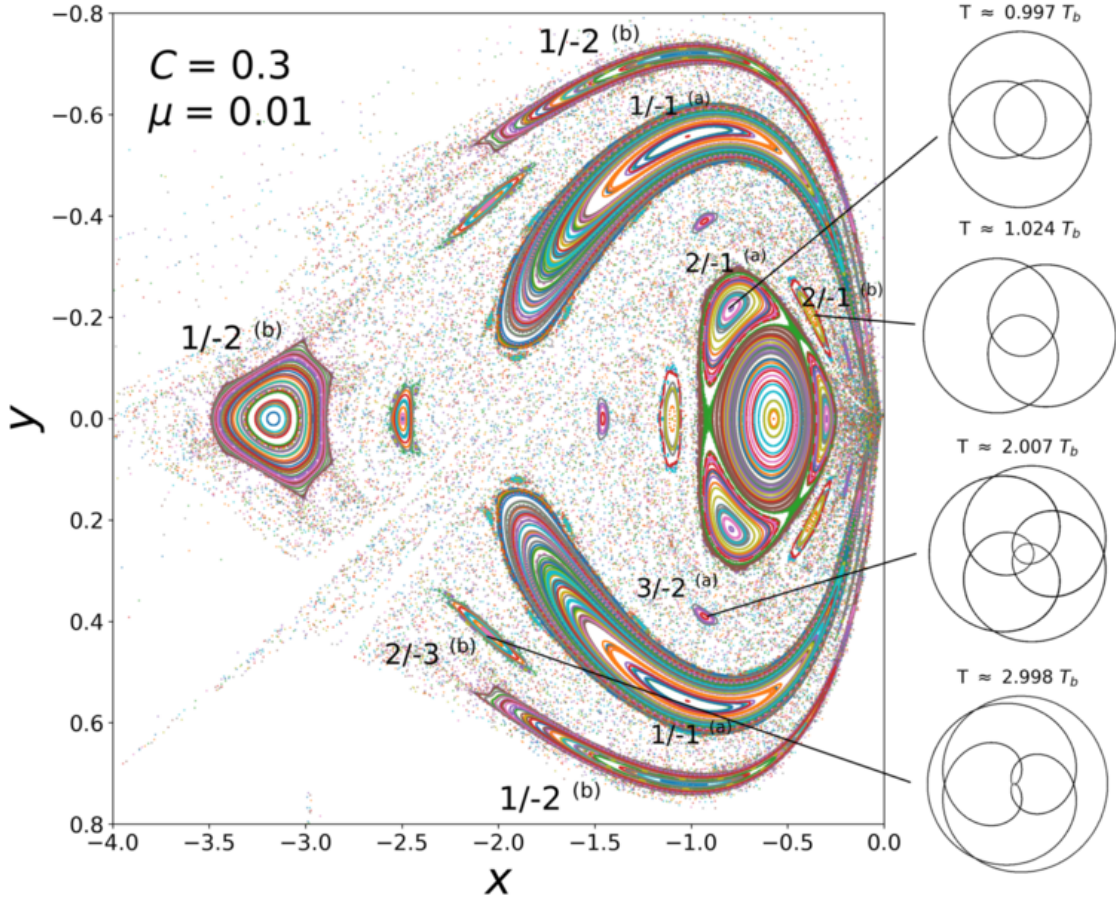


Figura 2.41: Seções de Poincaré para $C = 0.3$ e $\mu = 0.01$ mostrando ressonância exteriores e interiores com centros de libração (a) ou (b). O formato dessas órbitas no referencial sinódico também foi representado.

Na Figura 2.42 apresentamos a seção de Poincaré para $C = -1.7$ e $\mu = 0.5$ (sistema binário com massas iguais). Também representamos as órbitas ressonantes no referencial sinódico e a legenda respectiva a cada ressonância. No meio, há uma órbita circular, sendo que (I) e (II) referem-se as órbitas ressonantes assimétricas com períodos próximos de $1.84 T_b$ para ressonância 1/-2, e $2.7 T_b$ para a ressonância 1/-3, ambos no modo (c). Também mostramos uma ressonância 2/-5 simétrica com modo (b) e período de $\approx 4.57 T_b$.

Nesta seção descrevemos os resultados do artigo (Caritá et al., 2023). Por meio do modelo do problema circular restrito de três corpos planar (PCR3BP), investigamos o intervalo da constante de Jacobi para as ressonâncias retrógradas até quinta ordem em sistemas binários com $0.01 \leq \mu \leq 0.5$. Nós observamos que a ressonâncias coorbital e as ressonâncias internas e externas existem para altas razões de massa. Também identificamos bifurcações das órbitas periódicas ressonantes. Em particular, bifurcações de

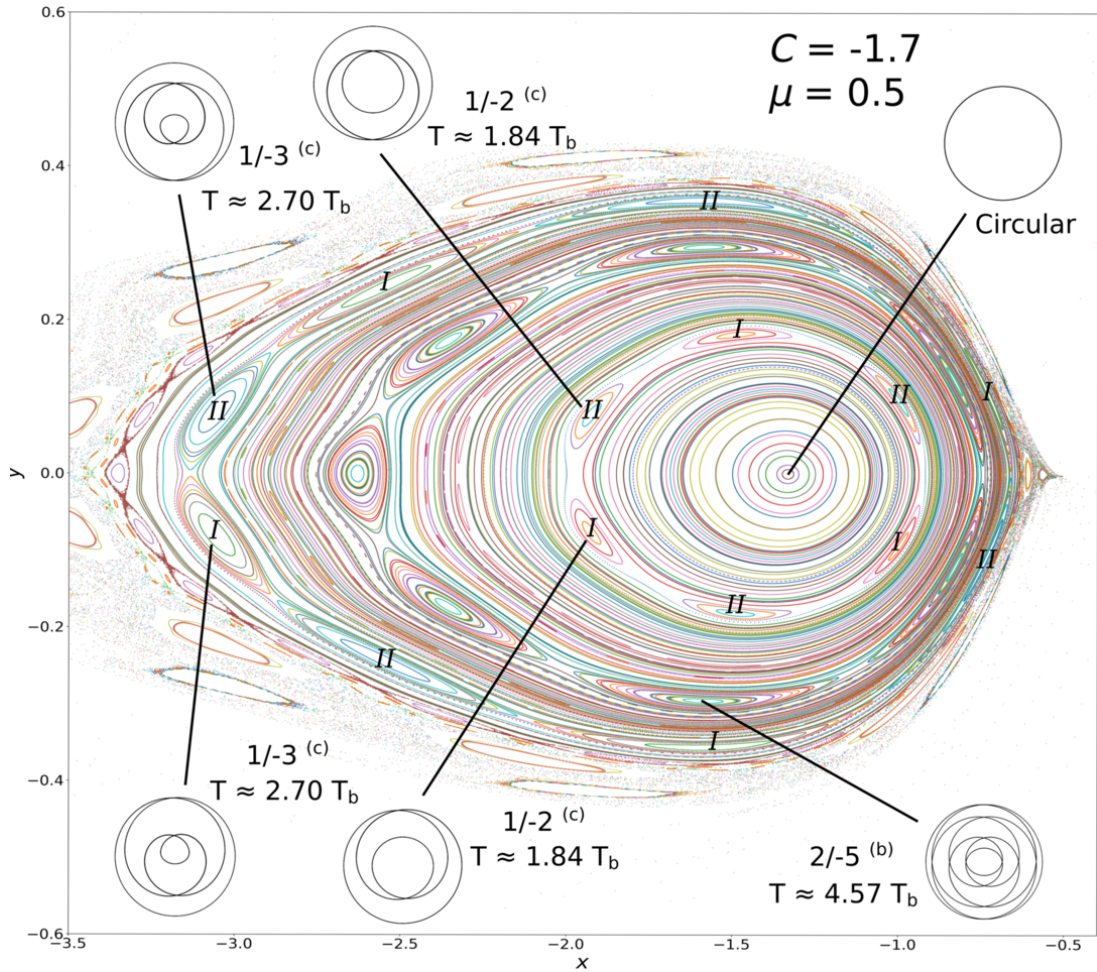


Figura 2.42: Seções de Poincaré para $C = -1.7$ e $\mu = 0.5$ mostrando uma órbita circular, bifurcação assimétrica de uma ressonância $1/2$ (c) com 2 centros de libração indicados por (I) e (II), uma ressonância $2/5$ com centro de libração (b) e uma bifurcação assimétrica da ressonância $1/3$ (c) com 2 centros de libração também indicados por (I) e (II).

duplicação de período para a ressonância $1/-1$, e bifurcações de duplicação e triplicação de período para a ressonância $1/-2$. Ressonâncias assimétricas foram observadas para todas ressonâncias externas do tipo $1/-n$ com $n > 1$. Estas ressonâncias ocorrem apenas para sistemas binários com massas próximas ($\mu > 0.47$).

Os resultados apresentados neste capítulo são relevantes para a identificação de exoplanetas retrógrados em sistemas binários estelares.

Capítulo 3

Sistema ν Octantis

3.1 Introdução ao Sistema

Há mais de uma década, diversos estudos foram publicados com o intuito de investigar a natureza do sinal periódico presente no sistema ν Octantis (Ramm et al., 2009). Para estar de acordo com os dados de velocidade radial, o planeta precisa estar aproximadamente no meio das duas estrelas, ou seja, o planeta não orbita o centro de massa do sistema mas sim a estrela central. Este tipo de órbita é conhecida como circunestelar ou configuração do tipo S (Dvorak, 1984). Além do mais, devido a instabilidade, o planeta não pode estar em uma configuração prógrada (Holman & Wiegert, 1999). Os autores deste artigo determinaram que uma configuração prógrada coplanar só pode ser estável em um sistema planetário do tipo S com massas e excentricidades similares ao binário do ν Octantis, se o semi-eixo maior do planeta for menor que um quarto da distância entre as duas estrelas. Portanto, como o planeta no sistema ν Octantis possui semi-eixo maior próximo da metade da distância das duas estrelas ($a_{pl} \approx 0.5 a_{bin}$), ele necessariamente precisa estar em uma configuração retrógrada (Eberle & Cuntz, 2010; Morais & Giuppone, 2012; Quarles et al., 2012).

O primeiro a investigar essa possibilidade foi Eberle e Cuntz (2010), suas simulações compararam os casos prógrado e retrógrado e mostraram que apenas a configuração retrógrada possui estabilidade orbital de longo prazo, confirmando assim que a configuração prógrada é impossível. Explorando um conjunto mais extenso de condições iniciais e incluindo as incertezas observacionais, Quarles et al. (2012) continuou a investigação e conclui o mesmo que o trabalho anterior. Ambos estudos consideraram o caso restrito de três corpos.

Uma razão 5:2 entre os períodos do planeta e do binário pode se observada nas curvas de velocidade radial (Ramm et al., 2009), assim surge a possibilidade do sistema estar em uma ressonância de movimento médio. Esse tipo de configuração foi explorada por

Goździewski et al. (2013), que identificou as regiões ressonantes estáveis em função do semi-eixo maior do planeta, da inclinação relativa e da massa da estrela secundária. Além da ressonância de movimento médio $5/-2$, Goździewski et al. (2013) observou um espaço de fase caótico com pequenas ilhas de estabilidade. Suas melhores soluções estáveis, obtidas pelos modelos Keplerianos e de N-corpos, são restritas à essas ilhas.

Morais e Correia (2012) propuseram que se ν Octantis B fosse um sistema binário os efeitos seculares em ν Octantis A poderiam mimetizar a velocidade radial de um possível planeta. As velocidades radiais seriam similar devido a influência do binário na precessão apsidal da órbita do primário. Entretanto, novas observações de Ramm et al. (2016) mostraram que a órbita do primário não possui um movimento apsidal necessário para essa explicação alternativa ser plausível. A possibilidade de que a perturbação da velocidade radial seja causada por manchas solares ou pulsação estelar foi explorado por Ramm (2015) e Ramm et al. (2021). Estes estudos mostraram que ν Octantis A é uma estrela quieta, fornecendo assim mais argumentos apenas a favor da existência do planeta retrógrado. Durante esse capítulo, determinamos quais são as configurações mais prováveis para o planeta do sistema extrassolar ν Octantis.

3.2 Soluções orbitais e planos de referência

As medições da velocidade radial deste sistema tiveram início em 2001. De 2006 até 2013, Ramm (2015) e Ramm et al. (2009, 2016) utilizaram detectores de diferentes resoluções para obter 1437 valores de velocidade radial para ν Octantis A. Essas velocidades radiais foram representadas na Tabela 3, 4 e 5 de Ramm et al. (2016), a precisão média de cada conjunto de observações foi, respectivamente, 3.59, 18.69 e 14.99 m/s . De 2018 até 2019, 210 valores de velocidade radiais foram obtidos pelo espectrógrafo HARPS, sendo que este espectrógrafo pode atingir uma precisão na ordem de 1 m/s (Mayor et al., 2003), para esse sistema em específico atingiu uma precisão média de 2.93 m/s .

A dinâmica de um sistema composto por três corpos pode ser descrita usando o plano entre dois deles como referência. No caso de ν Octantis, os ângulos e as inclinações são medidos a partir do plano do binário estelar. Porém, para compararmos com os dados observacionais, é necessário analisar os elementos orbitais em relação ao plano do céu. Neste capítulo, as variáveis com superscrito \star são medidas em relação ao plano de referência do binário, enquanto as variáveis sem superscrito são medidas em relação ao plano do céu. As variáveis com subscrito 1 e 2 referem-se ao planeta retrógrado e a estrela secundária, respectivamente. Devido o sistema ser do tipo S, as coordenadas astrocêntricas são mais apropriadas do que as coordenadas Jacobianas (normalmente utilizadas para estudar sistemas do tipo P). Essas coordenadas já foram definidas no capítulo 2.

A correlação entre os dois planos de referência é dada por meio de transformações de trigonometria esférica (Giuppone et al., 2012) (Eqs. 3.1 - 3.6). Para simplificar essas transformações podemos definir dois ângulos adicionais; a diferença entre as longitudes do nodo ascendentes no plano do céu $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$, e a diferença entre o argumento do pericentro do planeta em ambos referenciais $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_1^*$.

Com o intuito de estudar o sistema do ponto de vista do plano do binário (I_1^*, Ω_1^*) , é necessário utilizar as seguintes relações:

$$\cos I_1 = \cos I_2 \cos I_1^* - \sin I_2 \sin I_1^* \cos \Omega^*, \quad (3.1)$$

$$\cos \Delta\omega = \frac{(\cos I_2 - \cos I_1 \cos I_1^*)}{(\sin I_1 \sin I_1^*)}, \quad (3.2)$$

$$\cos \Delta\Omega = \cos \Omega^* \cos \Delta\omega + \sin \Omega^* \sin \Delta\omega \cos I_1^*. \quad (3.3)$$

sendo que no caso em que $0^\circ < \Omega_1^* < 180^\circ$, implica em $0^\circ < \Delta\omega < 180^\circ$ e $0^\circ < \Delta\Omega < 180^\circ$, e para $180^\circ < \Omega_1^* < 360^\circ$, temos $180^\circ < \Delta\omega < 360^\circ$ e $180^\circ < \Delta\Omega < 360^\circ$.

Por outro lado, para descrever os parâmetros do sistema a partir do plano do céu (I_1, Ω_1) , as transformações são

$$\cos I_1^* = \cos I_2 \cos I_1 + \sin I_2 \sin I_1 \cos \Delta\Omega, \quad (3.4)$$

$$\cos \Delta\omega = \frac{(\cos I_2 - \cos I_1 \cos I_1^*)}{(\sin I_1 \sin I_1^*)}, \quad (3.5)$$

$$\cos \Omega^* = \cos \Delta\Omega \cos \Delta\omega + \sin \Delta\Omega \sin \Delta\omega \cos I_1. \quad (3.6)$$

Considerando todos os dados observacionais disponíveis, computamos os ajustes Kepleriano e Newtoniano, dados respectivamente nas Tabelas 1 e 2. As diferenças entre os dois ajustes são: o ajuste Kepleriano assume as órbitas dos corpos como elipses fixas. Desse modo, este ajuste não considera a interação mútua entre os objetos. Ao contrário do anterior, o ajuste Newtoniano leva em consideração a interação entre os corpos. Portanto, o ajuste Kepleriano calcula os elementos orbitais referentes ao valor médio do período orbital, já o ajuste Newtoniano calcula os valores instantâneos dos elementos orbitais.

O ajuste Newtoniano foi calculado usando o método iterativo de Levenberg-Marquardt (Press et al., 1992), assumindo movimento coplanar retrógrado. Este processo foi aplicado anteriormente para sistemas planetários prógrados em Correia et al. (2005, 2009) e Couetdic et al. (2010). A data de referência foi alterada em relação às soluções anteriores (Goździewski et al., 2013; Ramm et al., 2009, 2016). Para minimizar a difusão das soluções, consideramos uma época próxima ao tempo médio de todas as observações, ou seja, JD 245 5000. Usando o tempo da primeira observação como referência (JD 245 2068.0607), Ramm et al. (2009) obteve uma estimativa precisa da inclinação e da longitude do nodo ascendente do binário, $I_2 = 70, 8^\circ$ e $\Omega_2 = 87, 0^\circ$. Como esses dois parâmetros não

apresentam variações significativas até JD 245 5000, utilizamos os mesmos valores como constantes em nossos ajustes. Para o caso totalmente coplanar com $I_1^* = 180^\circ$, utilizando as equações 3.1 e 3.4 obtemos que $I_1 = 109.2^\circ$ e $\Omega_1 = 267^\circ$. Para o caso coplanar, obtivemos $\sqrt{\chi^2} = 1.7572$ para o ajuste Kepleriano e $\sqrt{\chi^2} = 1.994$ para o ajuste Newtoniano.

	Planeta	ν Oct B		Planeta	ν Oct B
\mathcal{M} (\mathcal{M}_\odot)	0.0028370934	0.58606592	\mathcal{M} (\mathcal{M}_\odot)	0.0020012785	0.58538632
K (km s $^{-1}$)	0.04098 ± 0.00018	7.05253 ± 0.00014	K (km s $^{-1}$)	0.03003 ± 0.00014	7.044 ± 0.000141
P (dias)	409.18191 ± 0.12251	1050.05264 ± 0.00395	P (dias)	373.39093 ± 0.2549	1052.98232 ± 0.02131
a (AU)	1.2649 ± 0.00566	2.62799 ± 0.00064	a (AU)	1.18987 ± 0.00922	2.63260 ± 0.00195
e	0.01430 ± 0.00430	0.23605 ± 0.00002	e	0.11853 ± 0.00459	0.237222 ± 0.00003
ω ($^\circ$)	117.54446 ± 14.37138	75.20720 ± 0.00673	ω ($^\circ$)	152.31454 ± 2.20244	74.72438 ± 0.00734
M ($^\circ$)	191.56295 ± 14.37541	264.35006 ± 0.00710	M ($^\circ$)	164.24793 ± 2.24213	265.00199 ± 0.00781
λ ($^\circ$)	216.10740 ± 0.34042	66.55726 ± 0.00226	λ ($^\circ$)	223.56248 ± 0.42	66.72639 ± 0.0027
Ω ($^\circ$)	-	-	Ω ($^\circ$) (fixo)	267.0	87.0
I ($^\circ$)	-	-	I ($^\circ$) (fixo)	109.2	70.8
\mathcal{M}_0 (\mathcal{M}_\odot)	1.61		\mathcal{M}_0 (\mathcal{M}_\odot)	1.61	
rms (m/s)	6688.7240		rms (m/s)	5631.1209	
$\sqrt{\chi^2}$	1.7572		$\sqrt{\chi^2}$	1.9940	

Tabela 1 e 2: Respectivamente, foram dispostos os parâmetros orbitais obtidos através dos ajustes Kepleriano e Newtoniano utilizando todas 1650 observações disponíveis (2001-2019). A época das nossas soluções é próxima do meio das observações (JD 245 5000).

Os parâmetros presentes nas tabelas são: \mathcal{M} (massa), K (semi-amplitude da curva de velocidade radial), P (período orbital), a (semi-eixo maior), e (excentricidade), ω (argumento do pericentro), Ω (longitude do pericentro), M (anomália média), λ (longitude média), I (inclinação orbital), rms (raiz do valor quadrático médio), $\sqrt{\chi^2}$ (raiz do qui-quadrado reduzido). Lembrando que os ângulos presentes nas tabelas estão no referencial do plano do céu. Para estes ajustes, utilizamos a definição padrão para o qui-quadrado reduzido:

$$\chi^2 = \left[\sum_i \frac{(Fit_i - Obs_i)^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{1}{\nu} \quad (3.7)$$

onde σ é o erro das observações e ν representa os graus de liberdade do sistema, dado pela diferença entre o número de observações e o número de parâmetros considerados no ajuste. Valores de $\sqrt{\chi^2}$ próximos de 1.0 indicam que o ajuste está de acordo com as observações. Esta proximidade está relacionada com os erros das observações.

O conjunto de todas 1650 velocidades radiais sobrepostas ao ajuste Kepleriano foi disposto na Figura 3.1. A curva do ajuste Kepleriano no painel superior foi obtida apenas considerando a componente da velocidade radial da estrela secundária. No painel inferior, apresentamos a diferença entre os dados observacionais e o ajuste Kepleriano (resíduos). Na Figura 3.2, também representamos o ajuste a estes resíduos.

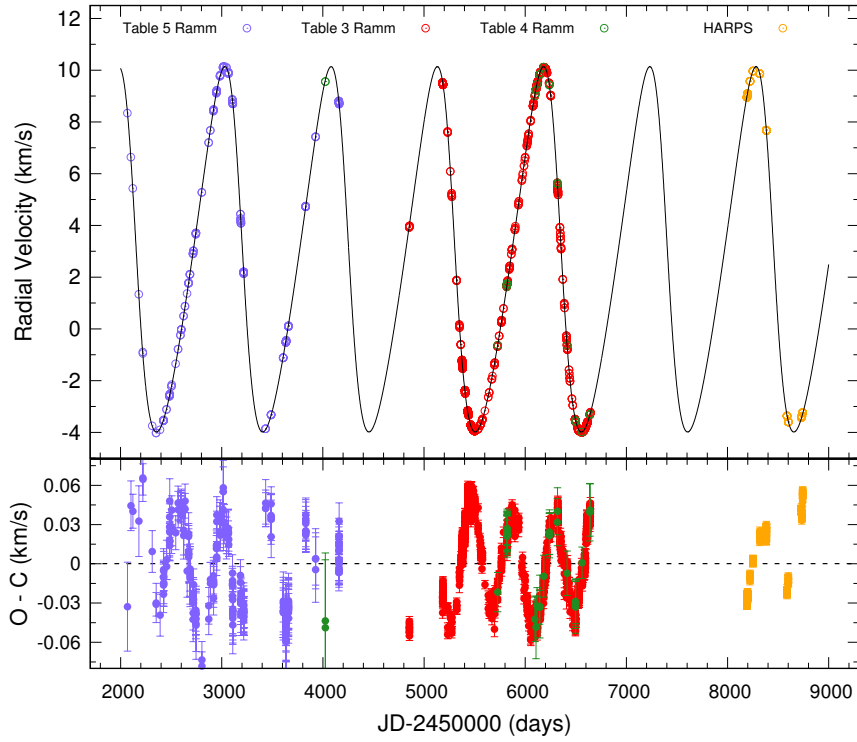


Figura 3.1: Todas valores de velocidade radial obtidas para o sistema ν Octantis entre 2001 e 2019, sobrepostas a solução orbital Kepleriana considerando apenas o binário estelar (Tabela 1).

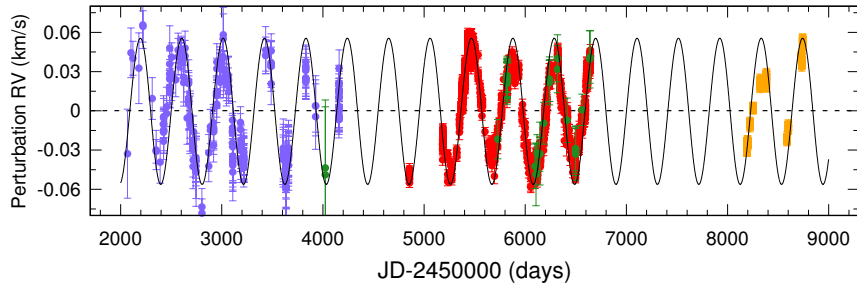


Figura 3.2: Ajuste aos resíduos da curva kepleriana.

O ajuste e os dados observacionais em função da longitude média do planeta foram representados na Figura 3.3. Podemos ver que os dados observacionais preenchem toda fase orbital do planeta.

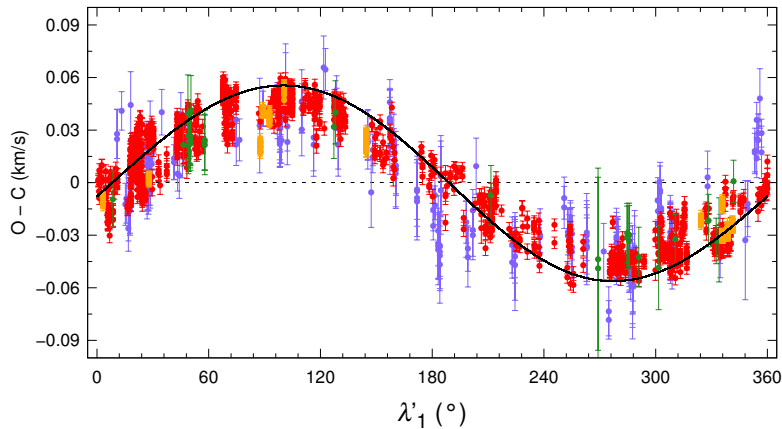


Figura 3.3: Resíduos da curva Kepleriana do painel inferior da Figura 3.1 em função da fase orbital do planeta.

Como um primeiro passo, integramos as duas soluções obtidas pelos ajustes representados nas Tabelas 1 e 2. No caso da solução do ajuste Kepleriano, fica claro que a mesma é totalmente instável após algumas décadas de integração. Já a solução do ajuste Newtoniano se torna instável depois de alguns milhões de anos. Considerando cinco casas decimais, o tempo de sobrevivência dessa condição inicial é ainda menor; isso mostra o quanto a estabilidade do planeta é sensível as condições iniciais. A condição inicial foi integrada utilizando o software REBOUND por meio do integrador de passo adaptativo Bulirsch-Stoer (Rein & Liu, 2012) e considerando a precisão do integrador como 10^{-12} . A integração era interrompida quando um dos corpos possuía distância em relação a estrela central maior que 5 unidades de distância entre as estrelas do binário (escape) ou quando a distâncias entre dois corpos era menor que a soma de seu raio (colisão). A variação dos parâmetros orbitais da solução da Tabela 2 foram representados na Figura 3.4. A excentricidade do planeta varia de 0.001 a 0.43 e o seu período orbital oscila de 350 a 540 dias em um curto espaço de tempo. Assim, os valores instantâneos do período orbital/semi-eixo maior e da excentricidade apresentados na Tabela 2 não dão muita informação sobre o sistema. Como o ajuste Kepleriano fornece os valores médios do período orbital e da longitude média, estes dois parâmetros são mais fiáveis em comparação com o ajuste newtoniano.

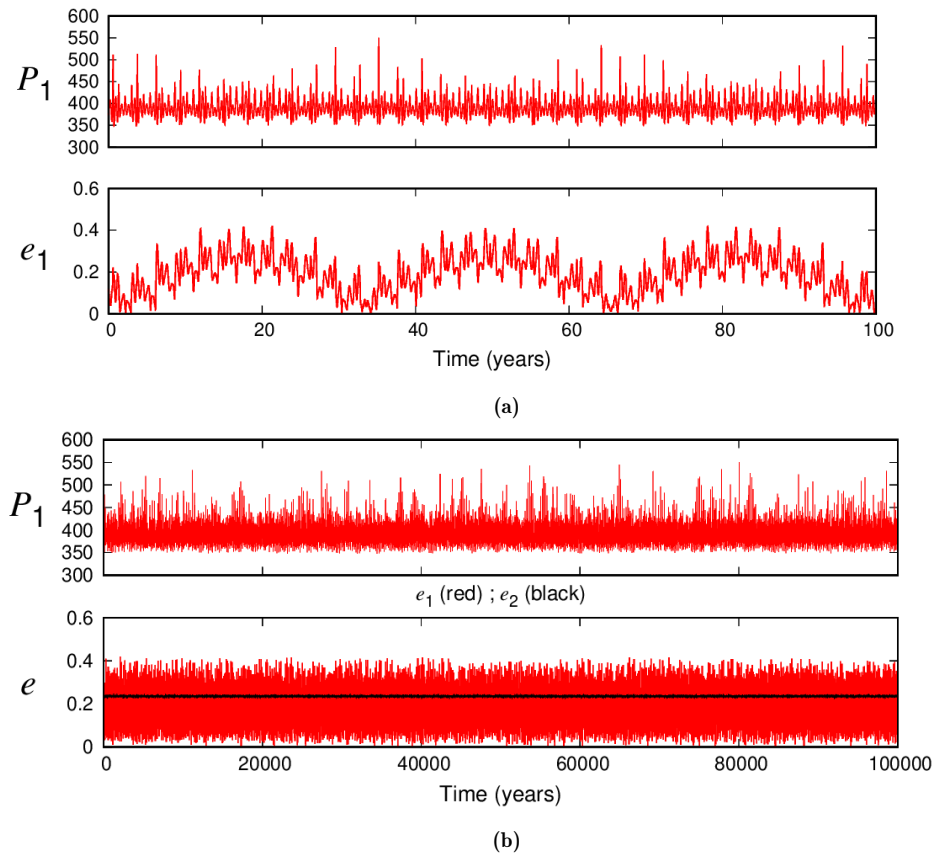


Figura 3.4: Evolução dos parâmetros orbitais para a condição inicial obtida por meio do ajuste Newtoniano, representada em (a) 100 anos e (b) 1×10^5 anos.

3.3 Procurando pela estabilidade dinâmica

Como o planeta e as estrelas se movem em sentidos oposto, as definições das longitudes são diferentes para cada corpo, assim similar ao descrito no Capítulo 2 assumimos o referencial anti-horário, de modo que as longitudes são medidas na direção de movimento orbital da estrela prógrada, portanto $\lambda_2^* = \varpi_2^* + M_2^*$, onde $\varpi_2^* = \omega_2^* + \Omega_2^*$; e $\lambda_1^* = \varpi_1^* - M_1^*$, onde $\varpi_1^* = \Omega_1^* - \omega_1^*$. Usando o plano do céu como referência para compararmos com os dados observacionais, definimos a longitude média neste referencial como $\lambda_1' = \omega_1 + \Omega_1 + M_1$.

Como descrito anteriormente, os ajustes obtidos a partir dos dados observacionais do sistema são instáveis, ou seja, utilizando estes ajustes como referência, precisamos buscar por configurações com estabilidade de longa duração. Devido a razão entre os períodos orbitais do planeta e do binário estelar, uma das possibilidades é a do planeta estar em uma configuração de ressonância de movimento médio. Como o intuito de identificá-las, utilizamos os ângulos ressonantes descritos no Capítulo 2 para procurar por esse tipo de configuração. Estes ângulos libram em torno de certos centros quando a configuração é ressonante. A localização nominal da ressonância em um sistema perturbado pode variar consideravelmente (Caritá et al., 2023) e o período orbital do planeta possui grandes oscilações. Por conta destes fatores consideramos, analisamos diferentes ressonâncias retrógradas: 5/-2; 3/-1; 2/-1. Além do mais, procuramos por ressonâncias de movimento médio de alta ordem próximas da 5/-2: 18/-7, 23/-9, 28/-11.

No caso do ν Octantis, devido a diferença entre as massas da estrela secundária e do planeta, a longitude do periastro da estrela ϖ_p possui variação de curto período mínima em relação a longitude do periastro do planeta ϖ . Portanto, pelas equações dos ângulos ressonantes (obtidas a partir da Equação 2.1), sabemos que o ϕ_1 é o ângulo com menor amplitude de libração, pois é o único que não depende de ϖ . Por esse motivo, utilizaremos esse ângulo como referência para determinarmos as condições iniciais ressonantes.

O sistema possui razão entre as massas $\mu \approx 0.267$ e pelo que verificamos as variações de curto período não são altas o suficiente para invalidar o uso dos elementos orbitais, assim mesmo que os ângulos ressonantes ϕ_n e $\Delta\varpi$ tenham oscilações de alta amplitude ainda é possível utilizá-los para identificar certas ressonâncias. Através dos nossos testes determinamos as ressonâncias considerando o limite em que $\sigma_{\Delta\phi_1} < 175^\circ$, sendo que σ representa a semi-amplitude de libração. Lembrando que existe libração dos outros ângulos ressonantes, porém verificamos que estes libram com semi-amplitude maior que o ϕ_1 . Para o caso inclinado, também consideramos ângulos ressonantes dependentes de Ω , porém não encontramos qualquer libração destes nas nossas simulações.

3.4 Metodologia

3.4.1 Corner Maps

Para procurar as regiões estáveis do sistema planetário, exploramos o espaço de fase usando como referência a solução dinâmica apresentada na Tabela 2. Assumindo as condições iniciais da estrela secundária como fixas, dividimos as simulações em dois casos: o caso coplanar e inclinado. No caso coplanar, a inclinação inicial e a longitude do nodo ascendente do planeta são consideradas fixas, assim variamos os valores iniciais de P_1 , e_1 , λ'_1 e ω_1 (espaço de fase 4D). Já no caso inclinado, além dos parâmetros considerados para o caso planar iremos variar também a inclinação e a longitude do nodo ascendente, ou seja P_1 , e_1 , λ'_1 , ω_1 , I_1^* e Ω_1^* (espaço de fase 6D).

Os nossos resultados foram representado utilizando um tipo de Corner Plot, que é basicamente uma forma de projeção de um conjunto multidimensional de parâmetros em múltiplos espaços de fase 2D, ou seja, um espaço N -dimensional pode ser representado por $N_{2D} = N(N-1)/2$ gráficos bidimensionais. No entanto, como queremos explorar a estabilidade de longa duração do sistema, desenvolvemos para este trabalho uma nova forma de análise que consiste na combinação de mapas de estabilidade com Corner Plots, os quais denominamos Corner Maps. O desenvolvimento desse tipo de gráfico foi necessário devido a projeção de condições iniciais nos espaços 2D, tornando impossível a construção de mapas de estabilidade. Os três passos para a construção dos Corner Maps são:

1. Relacionar as condições iniciais aleatórias com uma grade igualmente espaçado, de modo que cada pixel de cada gráfico 2D irá conter um diferente conjunto de condições iniciais.
2. Escolha de um indicador de estabilidade para ser representado por uma barra de cor nos Corner Maps.
3. Análise estatística do indicador de estabilidade para cada conjunto de condições iniciais presentes em cada pixel.

Neste trabalho, escolhemos a difusão caótica de cada trajetória como indicador de estabilidade, essa difusão foi calculada através da análise de frequência, método utilizado para determinar as frequências principais de uma série temporal. Comparando a frequência de maior amplitude em dois intervalos de tempos, calculamos sua difusão. Este indicador de estabilidade tende a zero para órbitas regulares e assume valores altos para movimento caótico (Laskar, 1993). O intervalo considerado para a difusão foi de 10^{-8} a 10^{-2} , sendo que valores menores que 10^{-5} indicam que a órbita é regular. Devido a alta variação do período do planeta, calculamos o valor médio deste parâmetro para cada condição inicial,

representado por $\langle P_1 \rangle$. Tanto a difusão quanto o período médio foram obtidos utilizando o programa TRIP (Gastineau & Laskar, 2011). Após diversos testes em relação a análise estatística, escolhemos representar a estabilidade de cada pixel pelo valor da mediana de cada distribuição. Os valores da média e da moda também foram testados, embora os resultados das três análises sejam similares, o valor da mediana é o mais apropriado e provem um melhor contraste entre as cores nos mapas. Para evitar a diferença entre peso dos valores baixos e altos da difusão nas distribuições, usamos uma escala logarítmica para representar a difusão.

Para obter a informação estatística de forma correta, precisamos escolher o número total de condições iniciais e a resolução da grade de modo que cada pixel tenha um número mínimo de pontos aleatórios para descrever uma distribuição. Para a construção dos Corner Maps em ambos casos estudados, integramos 5 milhões de condições iniciais e aplicamos uma grade de 200x200 para cada mapa de estabilidade 2D. As equações de movimento foram integradas utilizando o software REBOUND com o integrador de passo adaptativo Bulirsch-Stoer (Rein & Liu, 2012), a precisão do integrador foi definida em 10^{-12} . Cada condição inicial foi integrada por 12×10^3 anos ou por volta de $4174 P_B$, pelos nossos testes, esse tempo é o suficiente para a convergência do indicador da difusão caótica. Aplicando filtros as condições aleatórias antes da transformação para a grade igualmente espaçado, podemos representar apenas as condições iniciais que satisfazem algumas condições. Esse tipo de análise feita por partes é essencial para entender totalmente a dinâmica do espaço de fase multidimensional. Com o intuito de procurar pelas possíveis configuração do planeta, aplicamos quatro filtros aos dados das simulações: Condições iniciais estáveis (que sobreviveram a integração); Condições estáveis sem libração de $\Delta\varpi$ e $\phi'_n s$; Condições iniciais que possuem libração apenas de $\Delta\varpi$; Condições iniciais ressonantes (libração de ϕ_1). No caso inclinado, devido a maior instabilidade do espaço de fase, também construímos alguns Corner Maps considerando apenas as condições iniciais com baixa difusão de frequências.

Portanto, seguindo esses passos, podemos identificar a correlação entre cada variável considerando as informações estatísticas presentes nos dados da simulação, determinando assim as regiões estáveis do espaço de fase utilizando diferentes condições e consequentemente determinando também as possíveis configurações do planeta. Para comparar com os dados observacionais, o ajuste Kepleriano e de N-corpos também são representados nos Corner Maps. Os parâmetros mais confiáveis do ajuste Kepleriano foram representados pelas linhas verticais e horizontais (valores de $\langle P_1 \rangle$ e λ'_1), já os parâmetros do ajuste de N-corpos foram representados por círculos pretos. Como o ajuste Newtoniano calcula o valor instantâneo do período orbital, o valor médio desse parâmetro foi calculado para ser representado nos mapas dependentes de $\langle P_1 \rangle$.

3.4.2 Curvas de $\sqrt{\chi^2}$

Além da procura pela estabilidade por meio do cálculo da difusão caótica, também fizemos uma segunda integração para cada condição inicial e calculamos os valores de velocidade radial para cada instante de tempo obtido observacionalmente; ou seja, integramos da época dos ajustes até a primeira (JD 2452068.06) e até a última observação (JD 2458742.63). Desse modo, podemos comparar com todas observações e calcular qual condição inicial aleatória possui o menor valor de $\sqrt{\chi^2}$. A solução com valor mínimo utilizando este método e o método de Levenberg-Marquardt foram muito semelhantes, assim validando o método, e indicando que encontramos o mínimo absoluto para os parâmetros escolhidos do binário.

Este método também nos permite determinar a região de $\sqrt{\chi^2}$ em torno do mínimo absoluto. Devido a projeção das condições iniciais em cada mapa 2D, o gráfico de contorno de $\sqrt{\chi^2}$ não são bem definidos. Como alternativa, utilizamos elipses de confiança com 2σ para delimitar as regiões de $\sqrt{\chi^2}$ nos Corner Maps. Estas elipses contêm por volta de 95% das condições iniciais com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$ e foram representadas nos mapas em vermelho e azul respectivamente.

3.5 Caso coplanar

Utilizando as equações 3.1 e 3.4, calculamos os valores da inclinação e da longitude do nodo ascendente para o planeta em relação ao plano do céu, $I_1 = 109.2^\circ$ e $\Omega_1 = 267^\circ$. No entanto, a configuração estritamente coplanar permite o aparecimento de famílias verticalmente instáveis, ou seja não representa a dinâmica de um sistema realista (Morais & Namouni, 2016, 2019). Portanto, assim como no Capítulo 2, assumimos uma inclinação relativa entre o planeta e o binário de $I_1^* = 179.99^\circ$; desse modo temos que $I_1 = 109.19^\circ$ e $\Omega_1 = 267^\circ$. Fixando I_1 e Ω_1 nestes valores podemos utilizar os parâmetros para a estrela secundária obtidos no ajuste Newtoniano (Tabela 3.2) e assim construir os Corner Maps seguindo a descrição da Seção 3.4.1. Para este caso, inicialmente variamos os seguintes parâmetros nos intervalos respectivos: P_1 em (288 – 478) dias; e_1 em (0 – 0.5); λ_1' em (0 – 360°); ω_1 em (0 – 360°). Por conta da grande variação de P_1 decidimos considerar um intervalo maior para este parâmetro e calculamos seu valor médio $\langle P_1 \rangle$. Dessa forma, conseguimos ter uma visão geral do espaço de fase e assim identificar através das curvas de $\sqrt{\chi^2}$ quais intervalos são mais prováveis para o planeta. Após a obtenção dos primeiros Corner Maps, decidimos realizar um segundo conjunto de simulações agora com um zoom no período orbital e na longitude do nodo ascendente, assim: P_1 em (350 – 430) dias; e_1 em (0 – 0.5); λ_1' em (180 – 250°); ω_1 em (0 – 360°). O intervalo considerado para o valor médio do período orbital foi $\langle P_1 \rangle$ em (400 – 425) dias. Como esperado, os círculos

referentes ao ajuste Newtoniano estão dentro das curvas de $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ em todos mapas de estabilidades, indicando que realmente determinamos a localização do mínimo absoluto.

A comparação entre os mapas de estabilidades $P_1 \times \lambda'_1$ considerando o período orbital instantâneo e médio foi representada na Figura 3.5. O valor médio do período orbital do planeta calculado pelo ajuste Newtoniano (círculo preto) é quase idêntico ao valor do período obtido pelo ajuste Kepleriano (linha preta horizontal). Os valores de λ'_1 de ambos ajustes também são muito próximos.

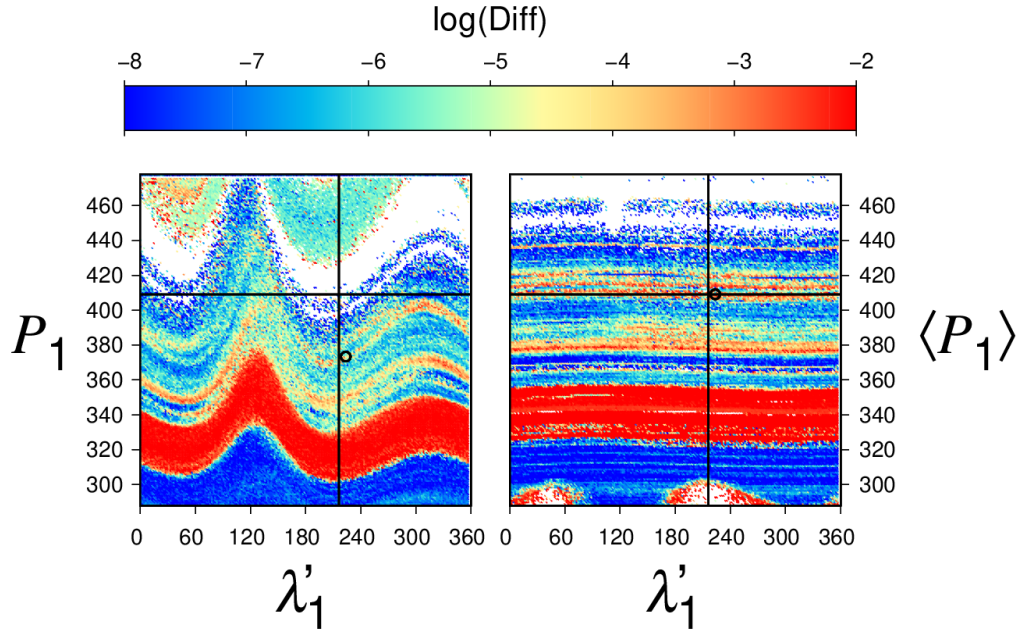


Figura 3.5: Comparação entre os mapas de estabilidade considerando o valor inicial e médio do período orbital do planeta. As linhas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente.

Pela integração de 5 milhões condições iniciais, aplicamos os filtros já descritos anteriormente ao conjunto de dados. As regiões brancas nos mapas de estabilidade representam as condições iniciais que não cumpriram as respectivas condições dos filtros, os resultados obtidos para cada filtro serão descritos nas seguintes subseções.

3.5.1 Todas condições iniciais estáveis

Representamos na Figura 3.6 apenas as regiões que sobreviveram aos 12 mil anos de integração. Por volta de 25% de todas condições iniciais sobreviveram a integração, entretanto, apenas 10% de todas condições iniciais possui difusão caótica menor que 10^{-6} . Nos mapas dependentes do $\langle P_1 \rangle$, as regiões de estabilidade estão divididas em camadas. Usando apenas esta filtragem de dados e olhando para o mapa $\langle P_1 \rangle \times \lambda'_1$, podemos ver claramente que as regiões de baixa difusão ocorrem para valores de $\langle P_1 \rangle$ aproximadamente constantes. De 405 a 425 dias, existem duas camadas estáveis; em 410 dias e em 420 dias, as configurações orbitais destas duas camadas serão identificadas nas próximas subseções.

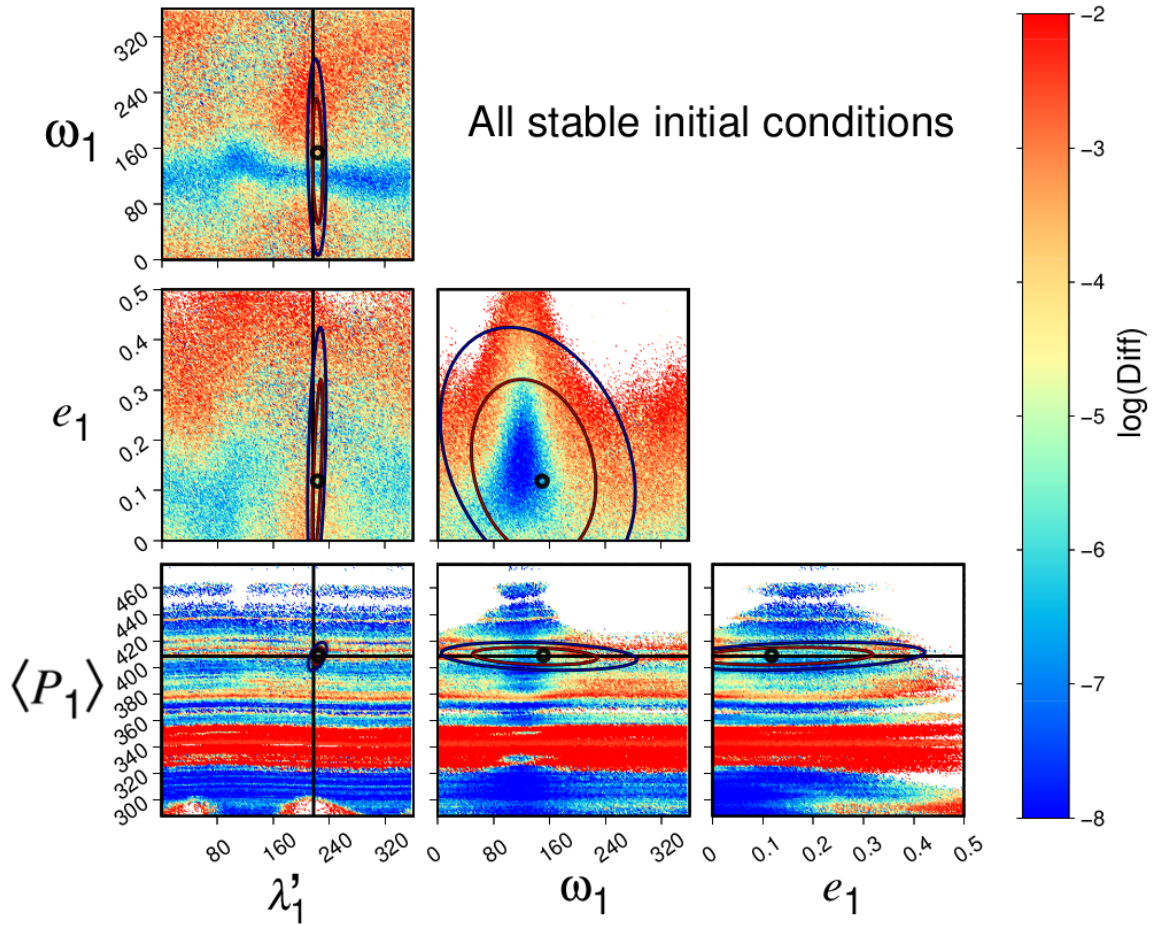


Figura 3.6: Corner map referente a todas condições iniciais estáveis. O ajuste Kepleriano foi representado com as linhas verticais e horizontais. Já os valores relacionados ao ajuste Newtoniano foram representados pelos círculos pretos. As elipses vermelhas e azuis determinam as regiões em que o $\sqrt{\chi^2} < 3.0$ e $\sqrt{\chi^2} < 4.0$, respectivamente.

Considerando a correlação entre os parâmetros e os valores de $\langle P_1 \rangle$ e λ'_1 obtidos pelo ajuste Kepleriano, os intervalos de estabilidade bem definidos para os outros dois parâmetros são: $\omega_1 (100^\circ, 140^\circ)$; $e_1 (0.08^\circ, 0.3^\circ)$. Através deste filtro que considera todas configurações estáveis, podemos ter uma ideia sobre a localização das regiões com estabilidade a longo prazo no espaço de fase.

Por meio do zoom na região em torno do valor do melhor ajuste no mapa de $\langle P_1 \rangle$ e λ'_1 (Figura 3.7), fica claro que os ajustes Kepleriano e Newtoniano estão em uma região de alta difusão. Portanto, mesmo que exista condições iniciais com baixa difusão nesta região, estatisticamente essa região apresenta um comportamento caótico. Porém, existem três regiões de baixa difusão para valores constantes de $\langle P_1 \rangle \approx 406.5, 412.5$ e 420 dias, estas regiões existem em torno das localizações nominais das ressonâncias de movimento médio 31/-12, 28/-11 e 5/-2, respectivamente. Apenas as regiões referentes as ressonâncias 31/-12 e 28/-11 estão dentro das elipses de confiança.

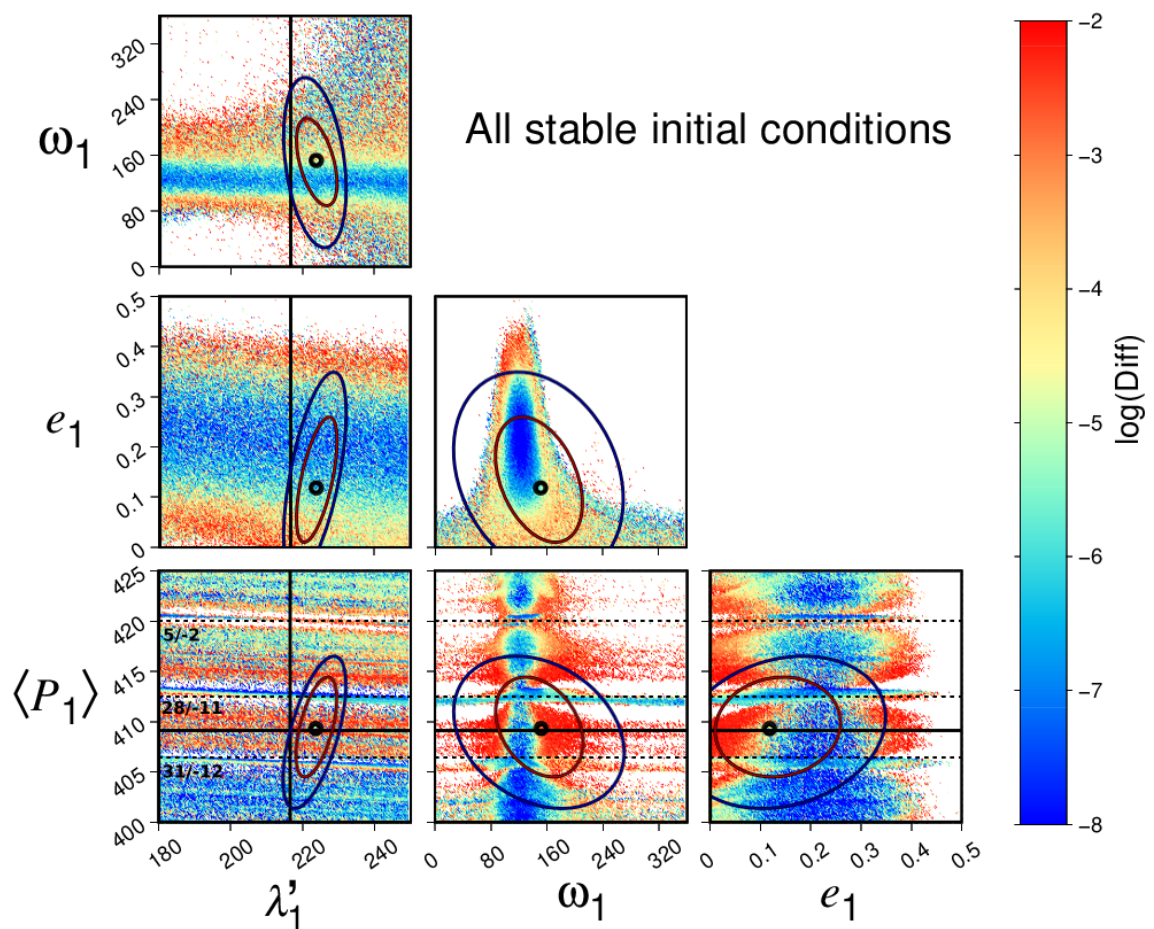


Figura 3.7: Corner map referente a todas condições iniciais estáveis. O ajuste Kepleriano foi representado com as linhas verticais e horizontais. Já os valores relacionados ao ajuste Newtoniano foram representados pelos círculos pretos. As elipses vermelhas e azuis determinam as regiões em que $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$, respectivamente.

3.5.2 Condições iniciais estáveis sem libração de $\Delta\varpi$ e ϕ_1 's

O Corner Map mostrado na Figura 3.8 é composto por todas condições iniciais estáveis que não possuem libração de $\Delta\varpi$ e de nenhum ϕ_1 associado as ressonâncias de movimento médio consideradas. Para essas condições iniciais, os valores de ω_1 e e_1 são menos definidos, nos mapas de estabilidade destes dois parâmetros podemos ver uma região de alta difusão para $0.15 < e < 0.25$ e $\omega \approx 120^\circ$.

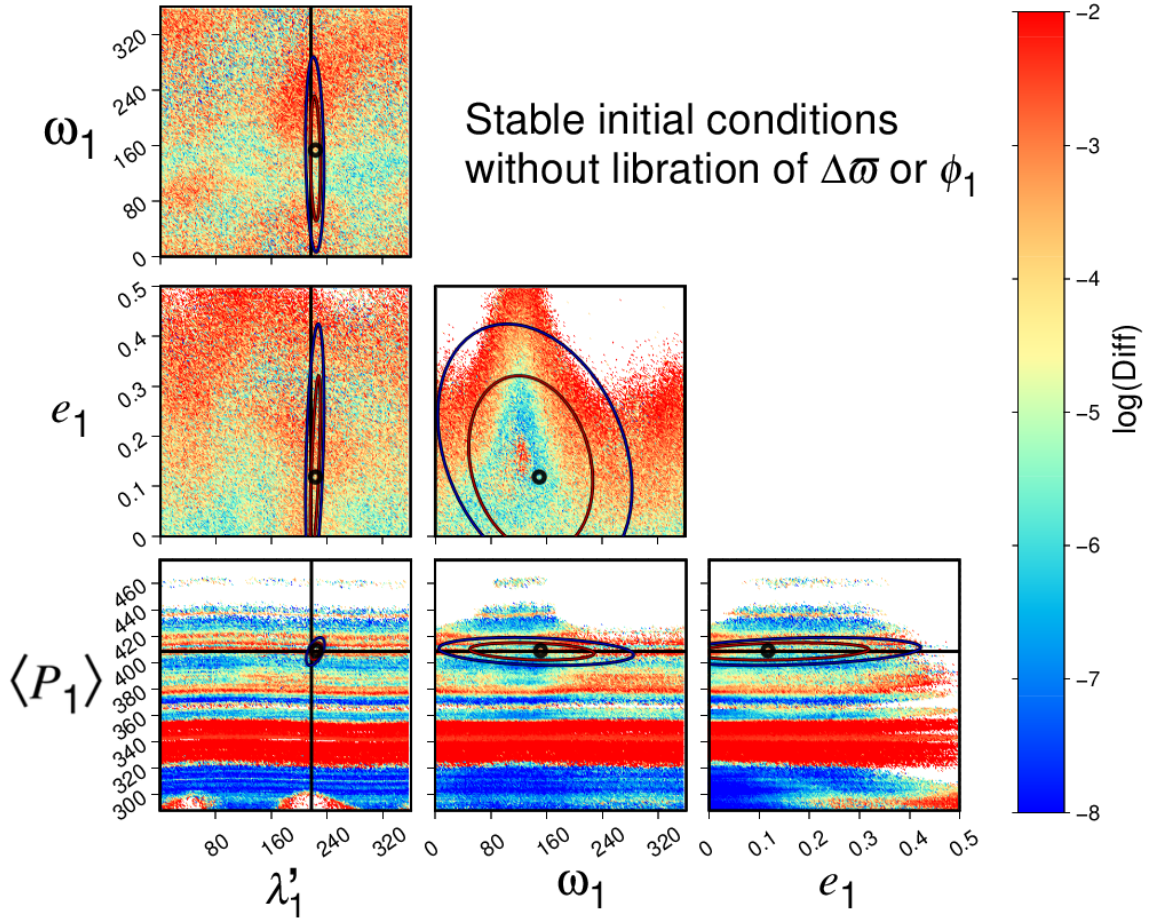


Figura 3.8: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais estáveis sem libração do $\Delta\varpi$ ou ϕ_1 . As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 3.0$ e $\sqrt{\chi^2} < 4.0$.

Considerando apenas as condições iniciais com P_1 e λ_1 próximos das curvas de $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ (Figura 3.9), observamos novamente duas regiões com baixa difusão relacionadas as ressonâncias de movimento médio de alta ordem 31/-12 e 28/-11. Estas regiões continuam a aparecer neste filtro pois não encontramos libração dos ângulos ressonantes referentes as estas ressonâncias. Estas foram identificadas apenas por meio da localização nominal da ressonância nos mapas dependentes de $\langle P_1 \rangle$.

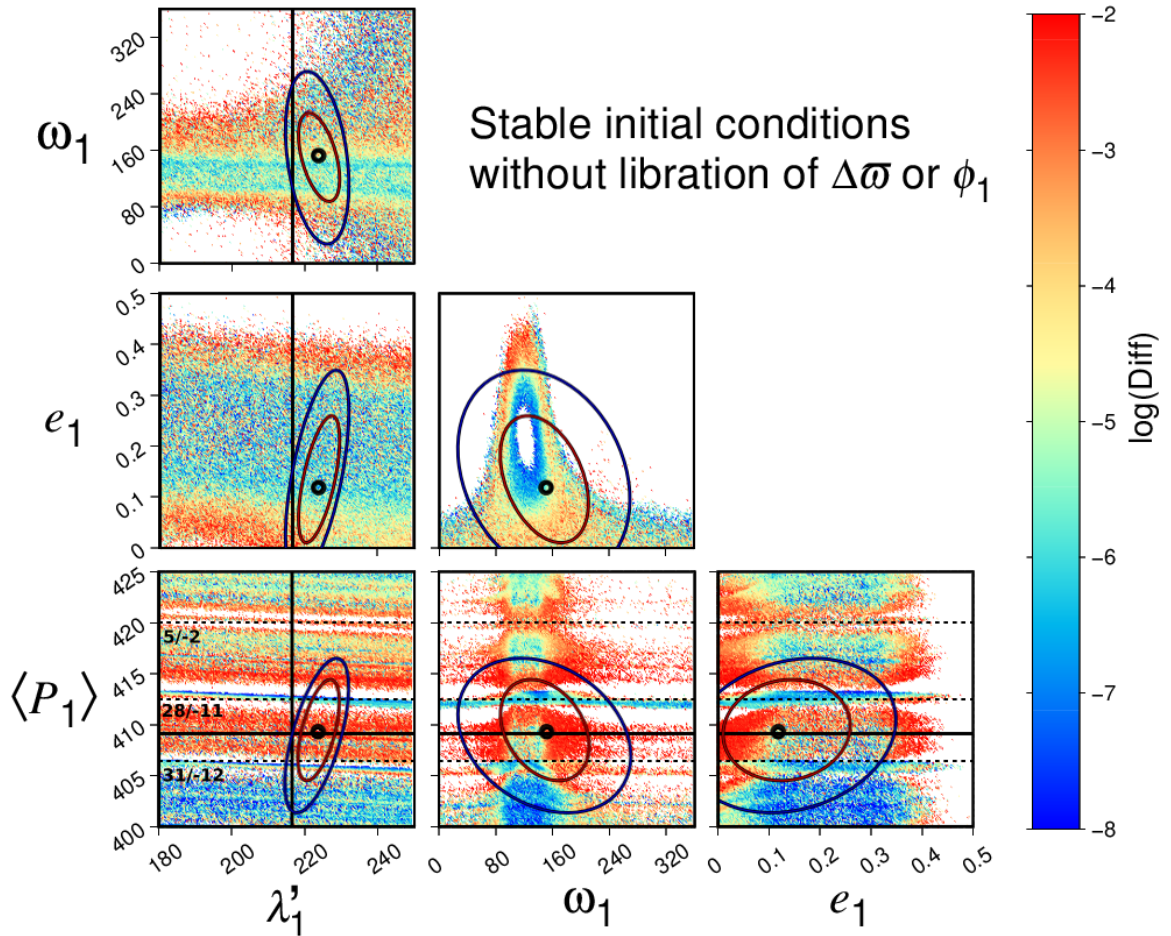


Figura 3.9: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais estáveis sem libração do $\Delta\varpi$ ou ϕ_1 . As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

3.5.3 Equilíbrio Secular

O Corner Map considerando as condições iniciais que possuem libração do $\Delta\varpi$ é apresentado na Figura 3.10. As condições iniciais possuem libração de semi-amplitude $\sigma_{\Delta\varpi} < 175^\circ$ e libram em torno de 0° . Os mapas de estabilidade para esta configuração têm poucas regiões de alta difusão. Cerca de 12% de todas as condições iniciais estáveis têm baixa difusão apenas devido à libração de $\Delta\varpi$ (125 mil condições iniciais). Para estas condições iniciais, o planeta e o binário têm taxas de precessão da longitude do pericentro aproximadamente iguais (equilíbrio secular), este tipo de configuração evita encontros próximos entre os dois corpos. Com exceção do mapa de $\lambda'_1 \times \omega_1$, os círculos referentes à melhor solução do ajuste de N-corpos estão dentro das regiões com baixa difusão nos mapas de estabilidade. No entanto, através das curvas $\sqrt{\chi^2}$ fica claro que as localizações do mínimo absoluto estão em regiões de baixa difusão em todos os mapas de estabilidade, incluindo o mapa de $\lambda'_1 \times \omega_1$. Perto das linhas de ajuste Kepleriano, uma camada estreita em 420 dias não é representada usando este filtro. Esta camada está relacionada com o ressonância de movimento médio 5/-2, em que uma parte das condições iniciais tem libração de $\Delta\varpi$ mas também possuem libração de pelo menos um dos ângulos ressonantes.

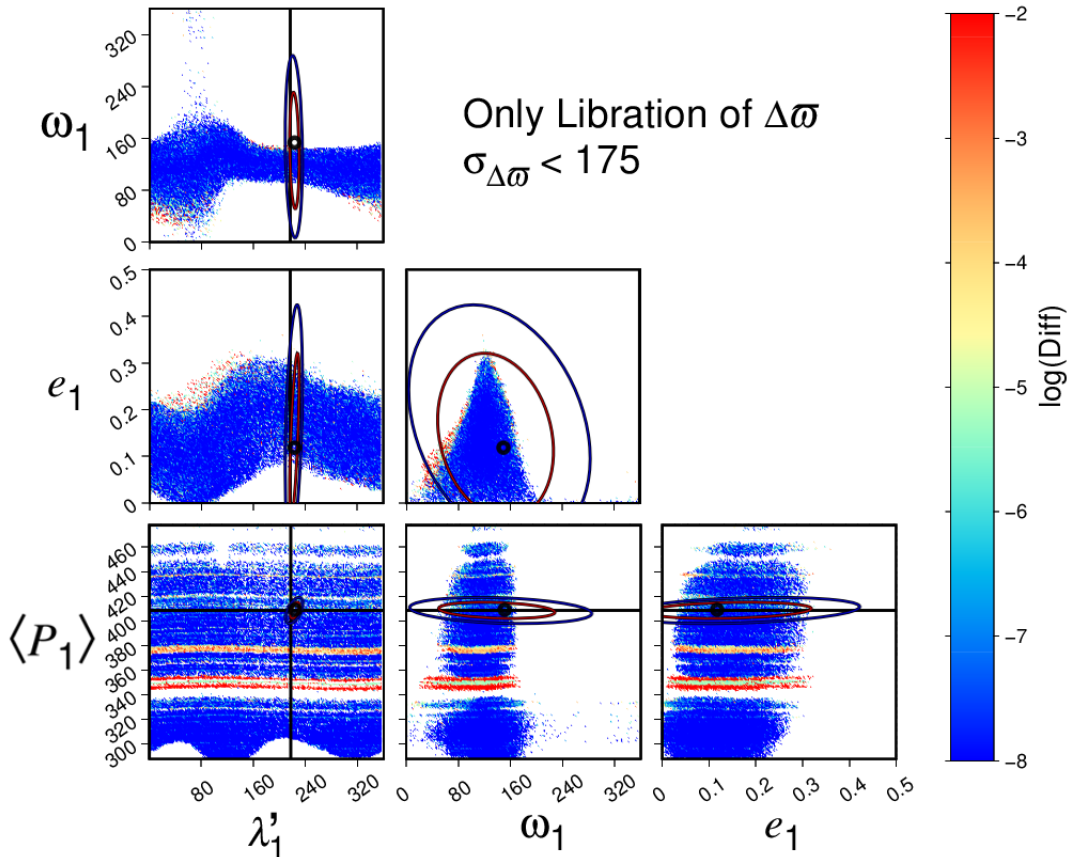


Figura 3.10: Corner map referente as condições iniciais estáveis somente devido a libração do $\Delta\varpi$. O ajuste Kepleriano foi representado com as linhas verticais e horizontais. Já os valores relacionados ao ajuste Newtoniano foram representados pelos círculos pretos. As elipses vermelhas e azuis determinam as regiões em que o $\sqrt{\chi^2} < 3.0$ e $\sqrt{\chi^2} < 4.0$, respectivamente.

Dando zoom no período orbital e na longitude média, podemos observar o espaço de fase em detalhe (Figura 3.11). Todos mapas de estabilidade possuem baixa difusão devido a libração do $\Delta\varpi$. Há certas regiões bem estreitas próximas das ressonâncias de movimento médio 28/-11 e 31/-12, que também são mantidas pelo equilíbrio secular. Essas condições iniciais também podem estar relacionadas as ressonâncias, portanto sendo uma configuração de ponto de fixo.

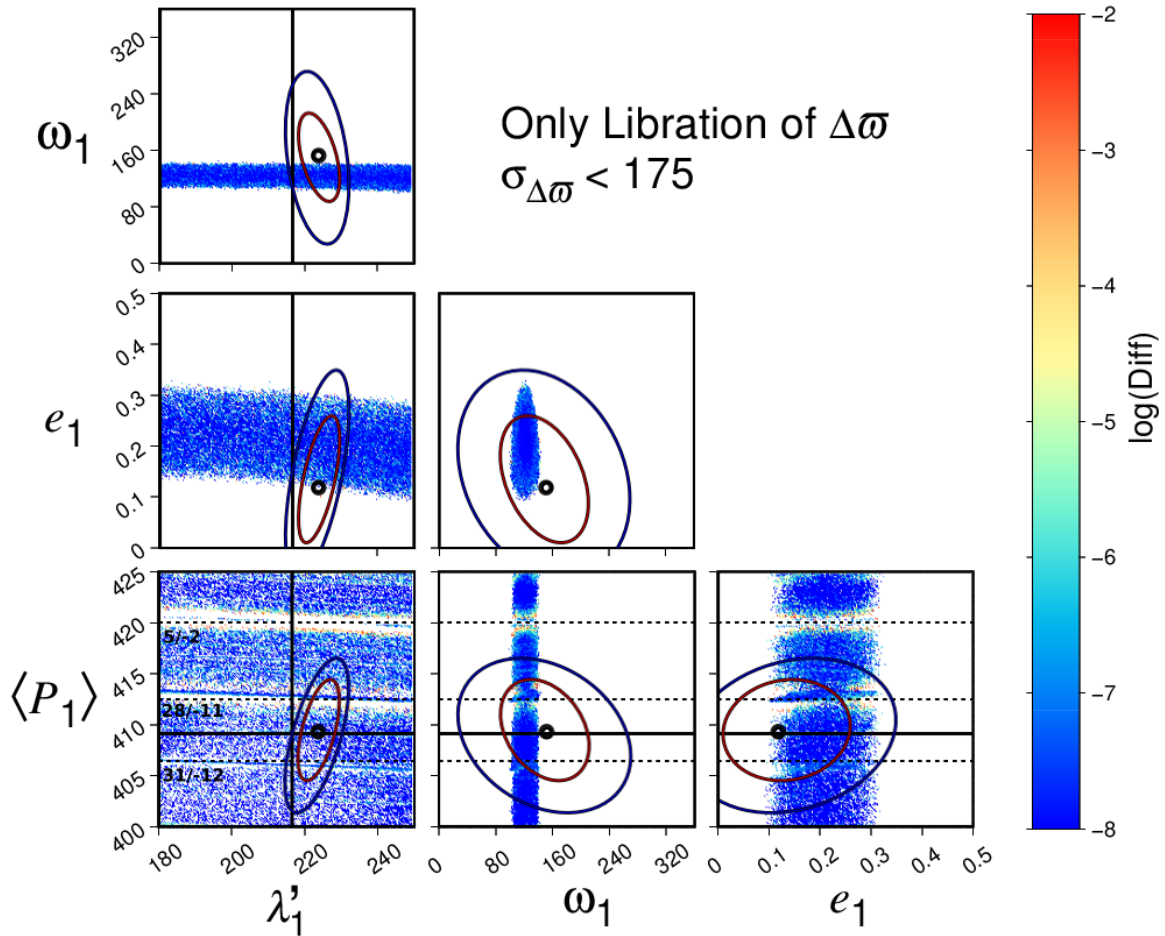


Figura 3.11: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais com libração do $\Delta\varpi$. As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

3.5.4 Ressonâncias de Movimento Médio

Na Figura 3.12 apresentamos os mapas de estabilidade dependentes de P_1 e $\langle P_1 \rangle$ considerando as condições iniciais com libração do ϕ_1 . A partir desses mapas podemos ver que o período instantâneo do planeta possui altas variações. Como esperado para as ressonâncias de movimento médio, os mapas que dependem do período médio possuem apenas uma região em torno de um valor específico de $\langle P_1 \rangle$, dado por $P_2/(p/q)$. Devido ao intervalo do período considerado, estudamos três ressonâncias de movimento médio (2/-1, 3/-1, 5/-2), sendo que as três existem e são estáveis no espaço de fase. Estudamos estas ressonância com o intuito de ter um entendimento geral do sistema. Como se trata de um sistema perturbado, as localizações das ressonâncias nesse tipo de sistema podem estar deslocadas (Caritá et al., 2023); implicando em um deslocamento do $\langle P_1 \rangle$ ressonante.

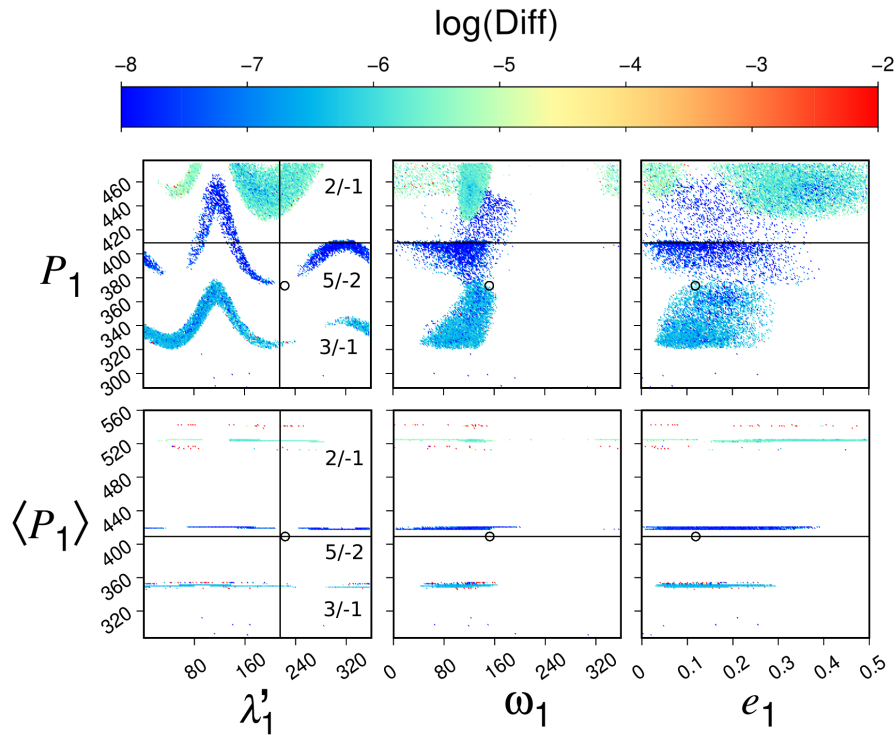


Figura 3.12: Mapas de estabilidade referentes as condições iniciais que possuem libração do ϕ_1 nas ressonâncias 2/-1, 5/-2 e 3/-1 ($\sigma_{\Delta\phi_1} < 175^\circ$) para comparação entre os mapas de estabilidade dependentes de P_1 e $\langle P_1 \rangle$. As linhas verticais são referentes ao ajuste Kepleriano e os círculos são referentes ao ajuste Newtoniano.

Comparando com os ajustes das observações, como esperado a ressonância 5/-2 é a mais plausível das três estudadas. As condições iniciais com libração do ângulo ressonante ϕ_1 da 5/-2 foram representadas no Figura 3.13. Com base no mapa de $\langle P_1 \rangle$, λ_1' , conseguimos perceber que existe uma diferença de 10 dias no período médio do planeta e que o valor de λ_1' está localizado na lacuna das condições iniciais ressonantes. Essa diferença fica mais evidente na Figura 3.14. Portanto, a ressonância 5/-2 não é uma configuração muito provável, apenas as ressonâncias 28/-11 e 31/-12 são possíveis para o planeta no caso próximo de coplanar.

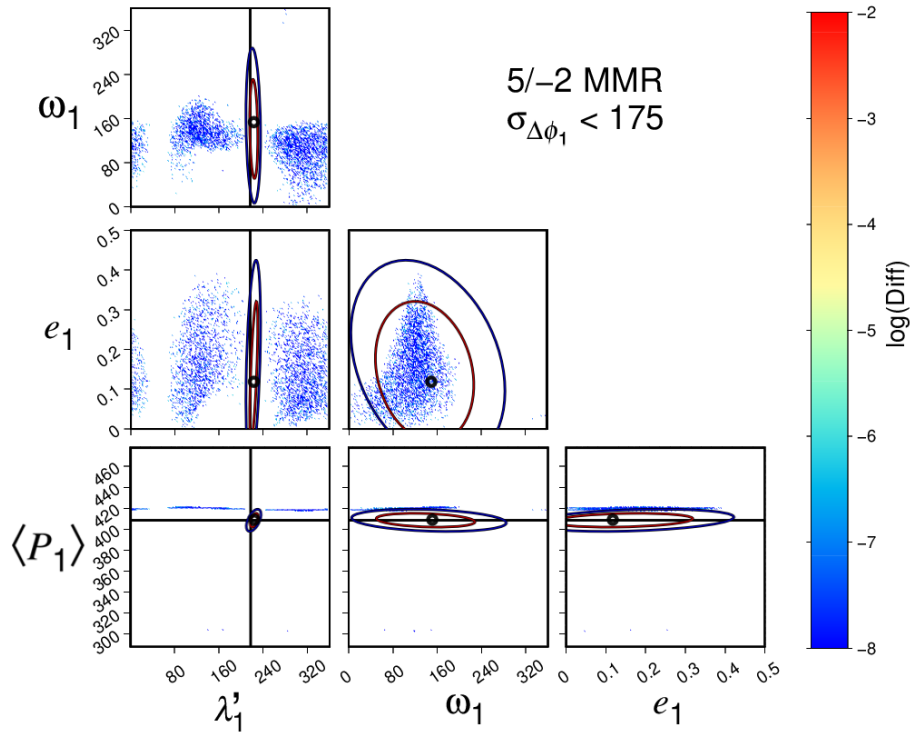


Figura 3.13: Corner map referente as condições iniciais em ressonância 5/-2. O ajuste Kepleriano foi representado com as linhas verticais e horizontais. Já os valores relacionados ao ajuste Newtoniano foram representados pelos círculos pretos. As elipses vermelhas e azuis determinam as regiões em que $\sqrt{\chi^2} < 3.0$ e $\sqrt{\chi^2} < 4.0$, respectivamente.

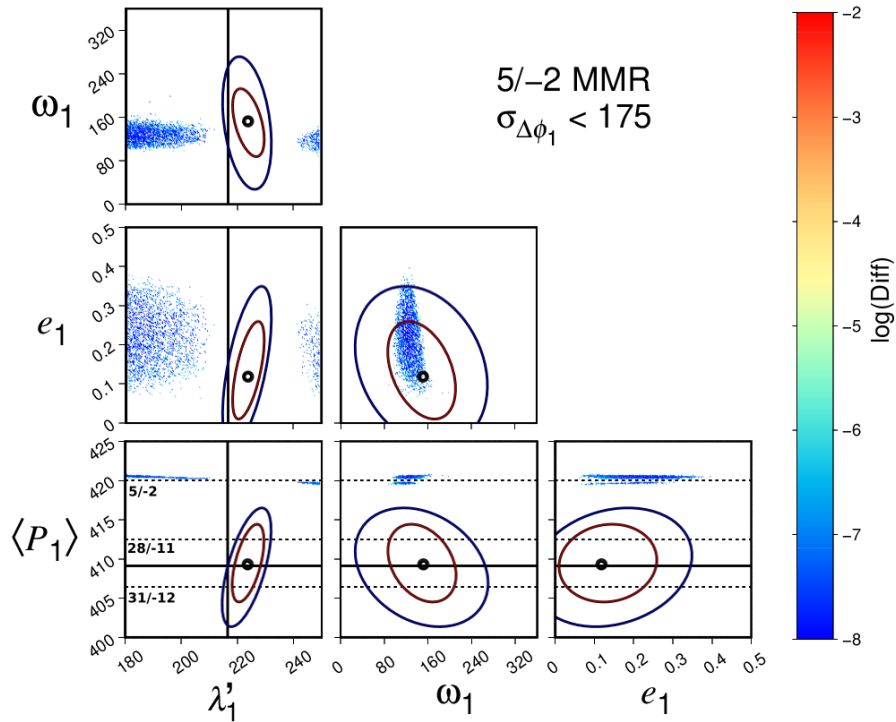


Figura 3.14: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais com libração de ϕ_1 . As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

Na Figura 3.15, representamos as condições iniciais que possuem $\langle P_1 \rangle$ próximo da localização das ressonâncias 31/-12, 28/-11 e 5/-2. Os valores nominais de $\langle P_1 \rangle$ são próximos de 406.5, 412.5 e 420 dias, respectivamente. Assim para a identificação dessas regiões ressonantes, utilizamos um intervalo de ± 1.5 dias. A diferença em utilizar o período orbital inicial P_1 e o valor médio $\langle P_1 \rangle$ pode ser observada em seis painéis. Através das regiões de baixa difusão podemos ver para quais valores dos parâmetros a ressonância de movimento médio ocorre. As elipses de confiança em função destes parâmetros também foram representadas. A ressonância 5/-2 existe para $\omega_1 \approx 130^\circ$ e $0.15 < e_1 < 0.33$, a ressonância 28/-11 existe para qualquer valor de ω_1 e $0 < e_1 < 0.4$, e a ressonância 31/-12 existe para $\omega_1 \approx 120^\circ$ e $0.1 < e_1 < 0.32$.

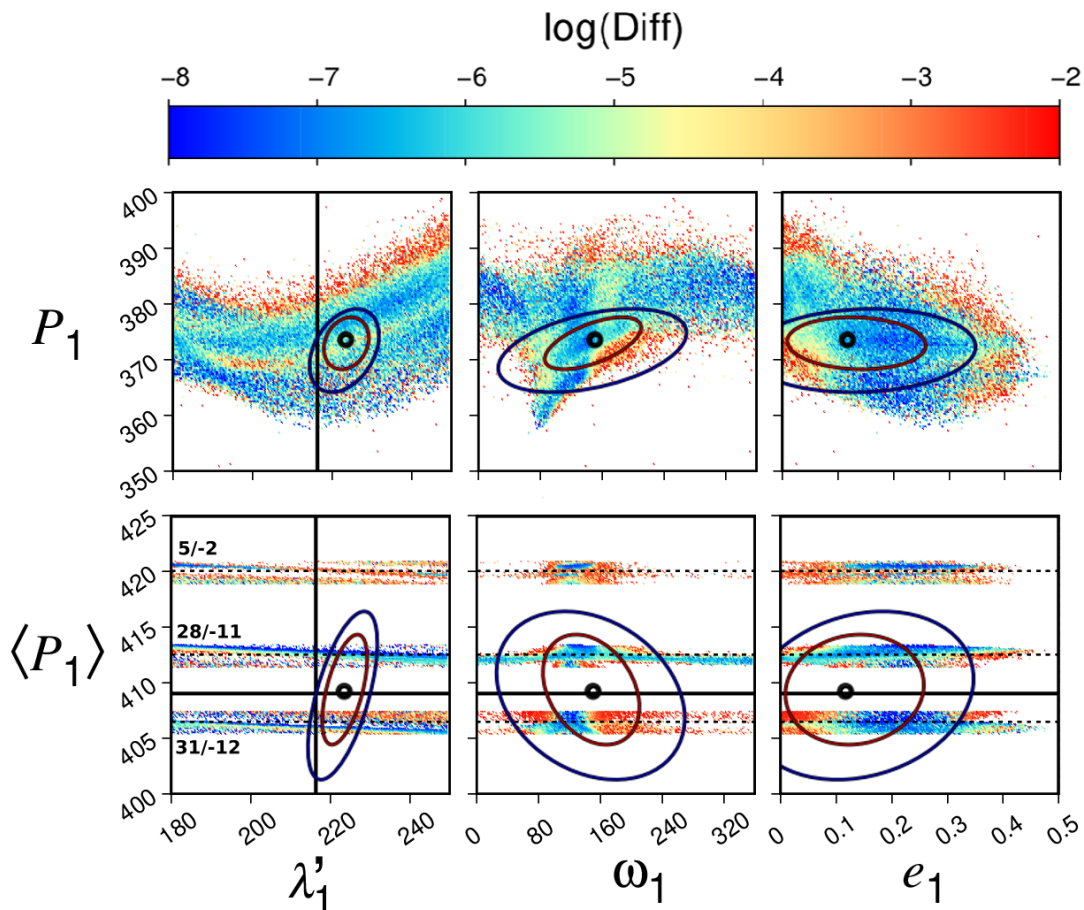


Figura 3.15: Mapas de estabilidade referentes as condições iniciais que possuem $\langle P_1 \rangle$ próximo das localizações nominais das ressonâncias 31/-12, 28/-11 e 5/-2. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As linhas verticais são referentes ao ajuste Kepleriano e os círculos são referentes ao ajuste Newtoniano. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

3.6 Caso Inclinado

No caso inclinado, além dos parâmetros considerados no caso coplanar também variamos a longitude do nodo ascendente e a inclinação do planeta. O intervalo para cada um dos seis parâmetros foi: P_1 em (350 – 410) dias; e_1 em (0 – 0.5); λ'_1 em (180° – 250°); ω_1 em (0° – 360°); Ω_1^* em (0 – 360°) e I_1^* em (160° – 179.99°). Os parâmetros orbitais em relação ao plano do binário foram obtidos utilizando as equações (3.1 - 3.6). Lembrando que precisamos utilizar um intervalo considerável em P_1 por conta de dois motivos: 1) há uma grande variação desse parâmetro em um curto intervalo de tempo, 2) iremos representar o valor de $\langle P_1 \rangle$ nos mapas. O intervalo considerado para P_1 foi determinado de modo a obter o intervalo de interesse para $\langle P_1 \rangle$.

Como mostrado por Goździewski et al. (2013), ao considerar a variação da inclinação, a instabilidade domina o espaço de fase, assim a maior parte das condições iniciais possuem alto valor de difusão. Porém, por meio de alguns filtros, podemos observar regiões bem definidas que possuem baixos valores de difusão. As curvas de $\sqrt{\chi^2}$ são aproximadamente independentes dos valores iniciais de I_1^* e Ω_1^* . Como o planeta pode assumir qualquer valor destes parâmetros, é necessário analisar a estabilidade orbital em função deles. Para uma melhor visualização das regiões de baixa difusão, também aplicamos um filtro adicional que considera apenas as condições iniciais com difusão menor que 10^{-6} . Lembrando que as condições iniciais são consideradas regulares para valores de difusão menores que 10^{-5} , porém para este caso escolhemos um valor com uma menor ordem de grandeza para garantir que as condições iniciais não estão no limiar entre o comportamento regular e caótico.

3.6.1 Todas condições iniciais estáveis

O Corner Map considerando todas condições iniciais estáveis foi apresentado na Figura 3.16. A maior parte das condições iniciais que sobreviveram a integração possui alta difusão. Porém, há duas regiões de baixa difusão com $\langle P_1 \rangle \approx 406.5$ e 412.5 dias; essas regiões estão relacionadas com a libração do $\Delta\varpi$ e/ou com as ressonâncias de alta ordem 31/-12 e 28/-11, respectivamente. Similar ao caso coplanar, uma parte das condições iniciais na região próxima de $\langle P_1 \rangle \approx 420$ dias é estável devido a ressonância 5/-2. A partir do mapa de $\langle P_1 \rangle$ x I_1^* , podemos ver a dependência dessas regiões com a inclinação, a maior parte das condições iniciais na região da ressonância 28/-11 possui difusão relativamente baixa para $I_1^* > 167^\circ$. Além disso, essa região é a única em que o planeta pode assumir qualquer valor inicial de ω_1 e ainda assim ter baixa difusão. Apresentando apenas as condições iniciais com difusão menor que 10^{-6} (Figura 3.17), as regiões em $\langle P_1 \rangle \approx 406.5$, 412.5 e 420 dias, relacionadas com ressonâncias de movimento médio, se tornam ainda mais evidentes.

De forma geral, as curvas de $\sqrt{\chi^2}$ para o caso inclinado são mais amplas em relação ao caso coplanar. O parâmetro que possui maior dependência com a inclinação é o λ_1 , sendo que com a variação da inclinação as elipses de confiança de λ_1 se tornam 4x mais amplas. Como as condições iniciais próximas de $\langle P_1 \rangle \approx 412.5$ dias (28/-11) possuem o menor valor da difusão de frequências no espaço de fase, e uma parte delas está dentro das curvas de $\sqrt{\chi^2}$, o planeta provavelmente está nessa região. Para esta região, os valores iniciais dos parâmetros orbitais limitados pelo intervalo das elipses de confiança vermelhas e pelas regiões de baixa difusão são: λ_1^* em $(200^\circ - 245^\circ)$; ω_1 em $(75^\circ - 210^\circ)$; e_1 em $(0 - 0.24)$; Ω_1^* em $(0^\circ - 330^\circ)$; I_1^* em $(170^\circ - 180^\circ)$.

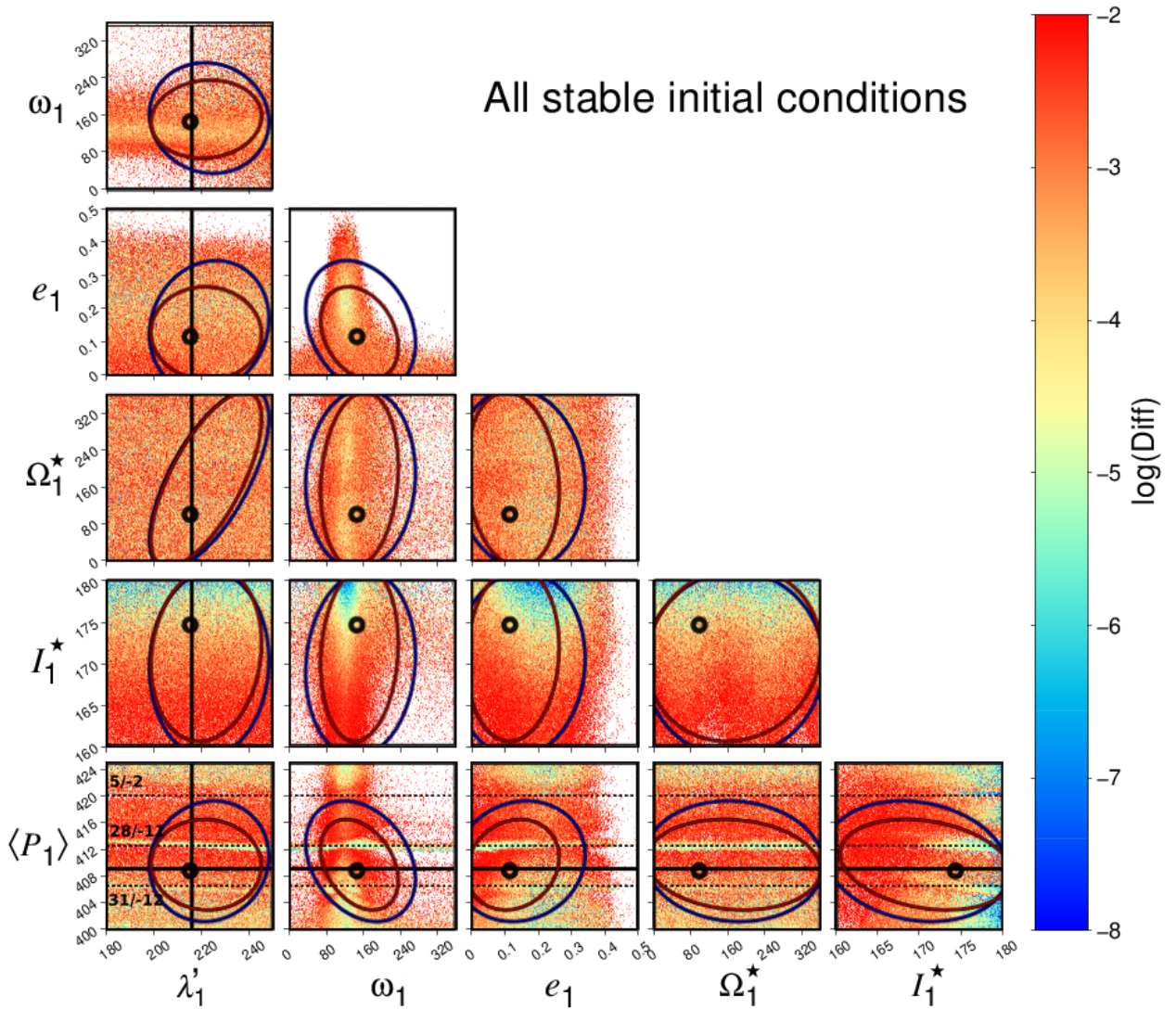


Figura 3.16: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais estáveis. As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

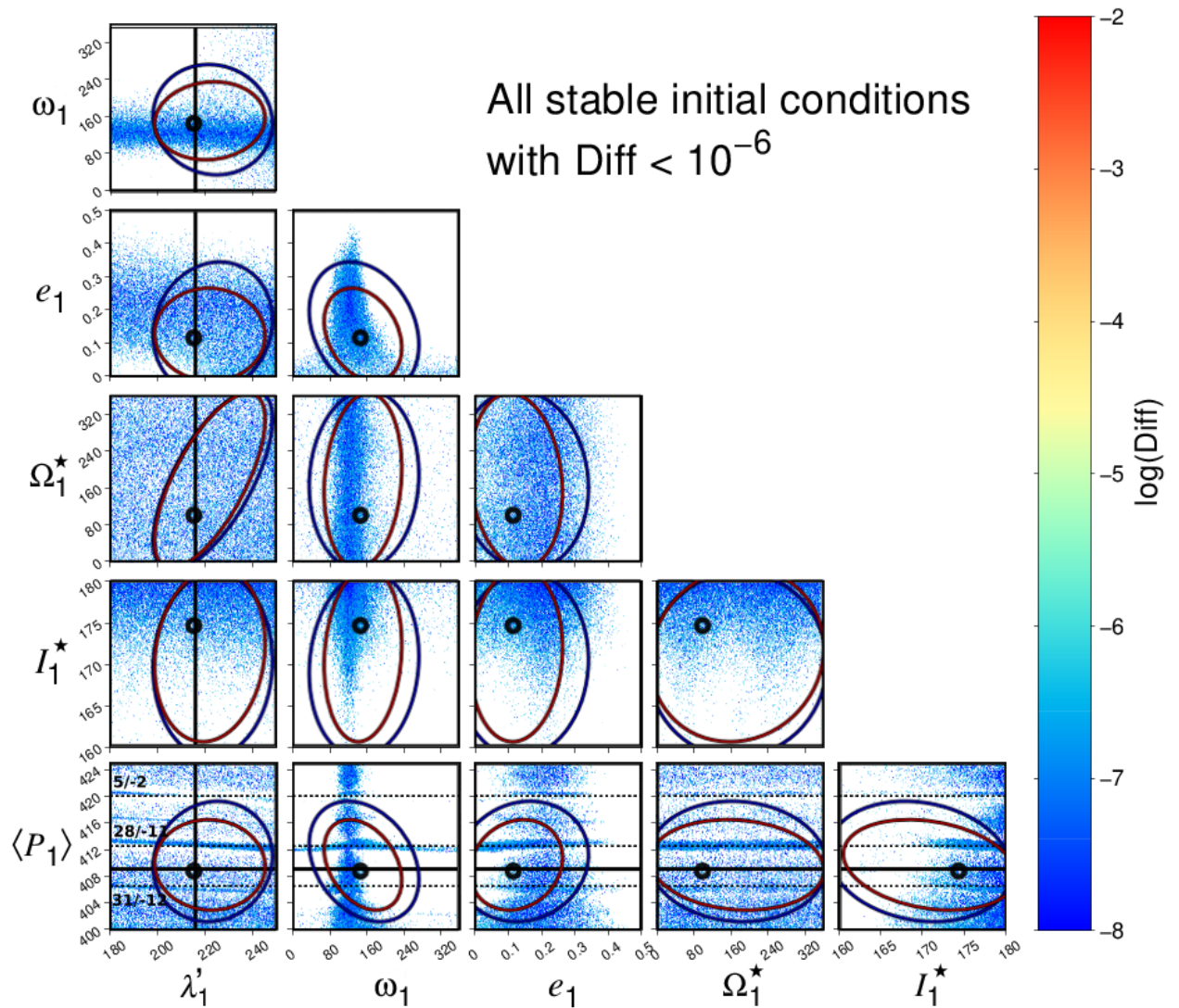


Figura 3.17: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais estáveis que possuem difusão menor que 10^{-6} . As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

3.6.2 Condições iniciais estáveis sem libração de $\Delta\varpi$ e ϕ_1

O Corner Map referente as condições iniciais estáveis sem libração de $\Delta\varpi$ e ϕ_1 é apresentado na Figura 3.18. Por meio do mapa de $e_1 \times \omega_1$, podemos ver que há um aumento do índice de difusão na região com $0.15 < e_1 < 0.3$. Isso ocorre porque essa região está relacionada com a ressonância de movimento médio 5/-2 e com a libração do $\Delta\varpi$. Portanto, utilizando esse filtro, os valores iniciais de e_1 e ω_1 com baixa difusão circundam essa região. Isso também é observado no caso coplanar. Porém, essa região não se torna totalmente instável em 12000 anos como na Figura 3.8. Como não foi possível identificar as ressonâncias de alta ordem a partir dos ângulos ressonantes, as regiões referente à elas continuam a aparecer nos Corner Maps. As condições iniciais sem libração de $\Delta\varpi$ ou ϕ_1 representam 80% de todas condições iniciais estáveis, assim não há uma grande diferença entre o Corner Map obtido utilizando este filtro e a Figura 3.16. Filtrando as condições iniciais com valores de difusão menores que 10^{-6} , essa porcentagem diminui para 60%.

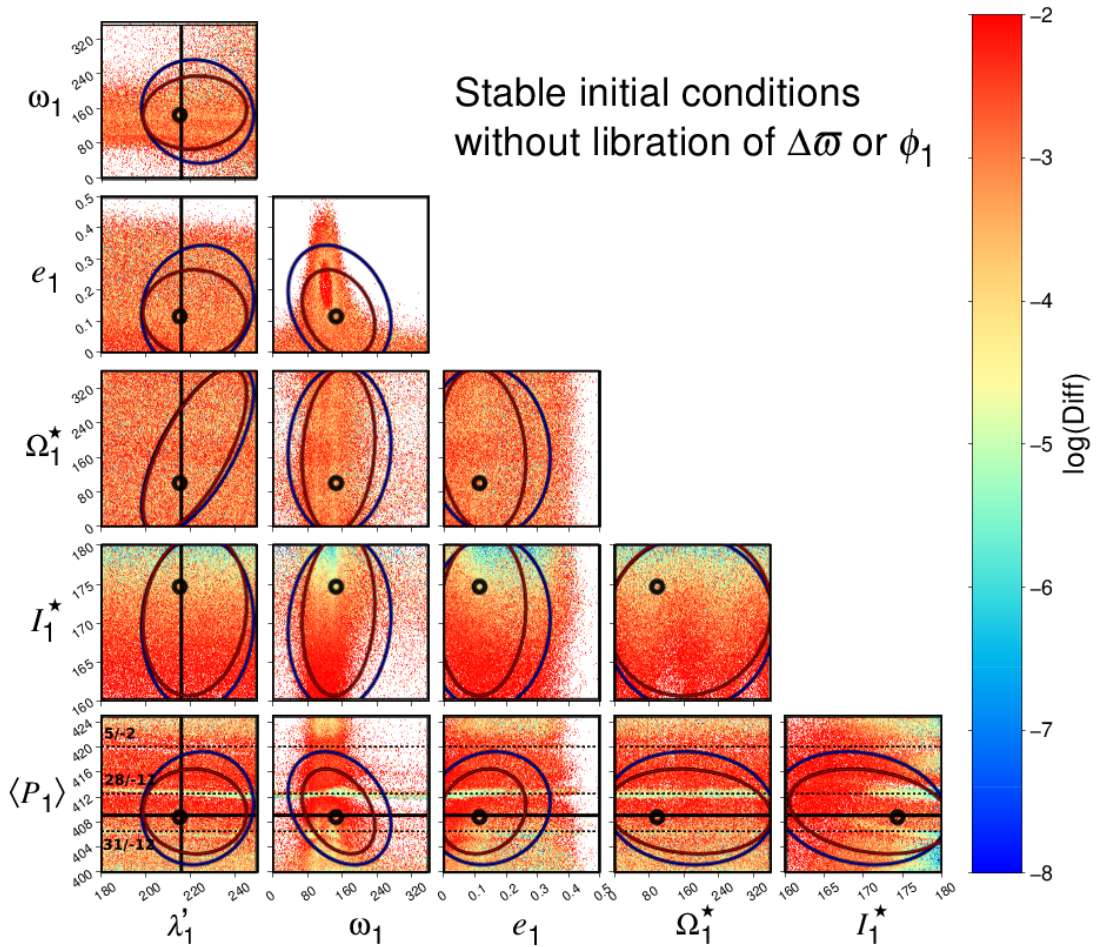


Figura 3.18: Corner Map para o caso inclinado considerando apenas as condições iniciais estáveis sem libração do $\Delta\varpi$ ou ϕ_1 . As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

3.6.3 Equilíbrio Secular

Na Figura 3.19 apresentamos as condições iniciais que possuem somente libração de $\Delta\varpi$. Ao contrário do caso coplanar, a libração do $\Delta\varpi$ não garante um valor baixo da difusão para a maior parte das condições iniciais. De $\langle P_1 \rangle \approx 407$ até 412 dias, há uma região dispersa de condições iniciais com diferentes valores de difusão, onde parte delas possui difusão menor que 10^{-6} . Uma região bem definida com baixa difusão pode ser identificada em $\langle P_1 \rangle \approx 413$ dias (próxima da ressonância 28/-11). Essas condições iniciais possuem valor de ω_1 em torno de 120° e $I_1^* < 173^\circ$. Ademais, essa região se torna mais visível ao representar apenas as condições iniciais com baixa difusão no Corner Map (Figura 3.20).

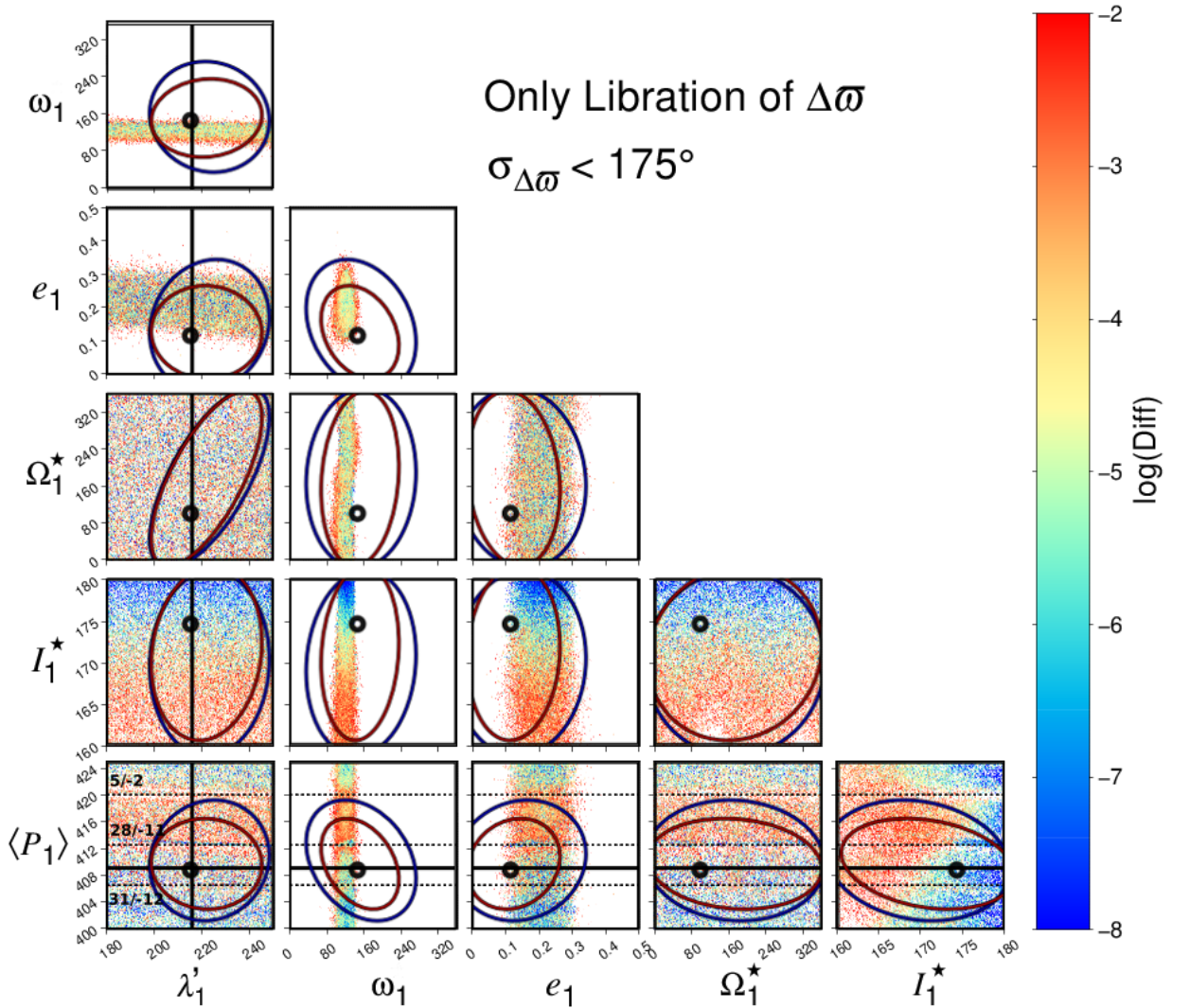


Figura 3.19: Corner Map para o caso inclinado considerando as condições iniciais estáveis devido apenas a libração de $\Delta\varpi$. As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

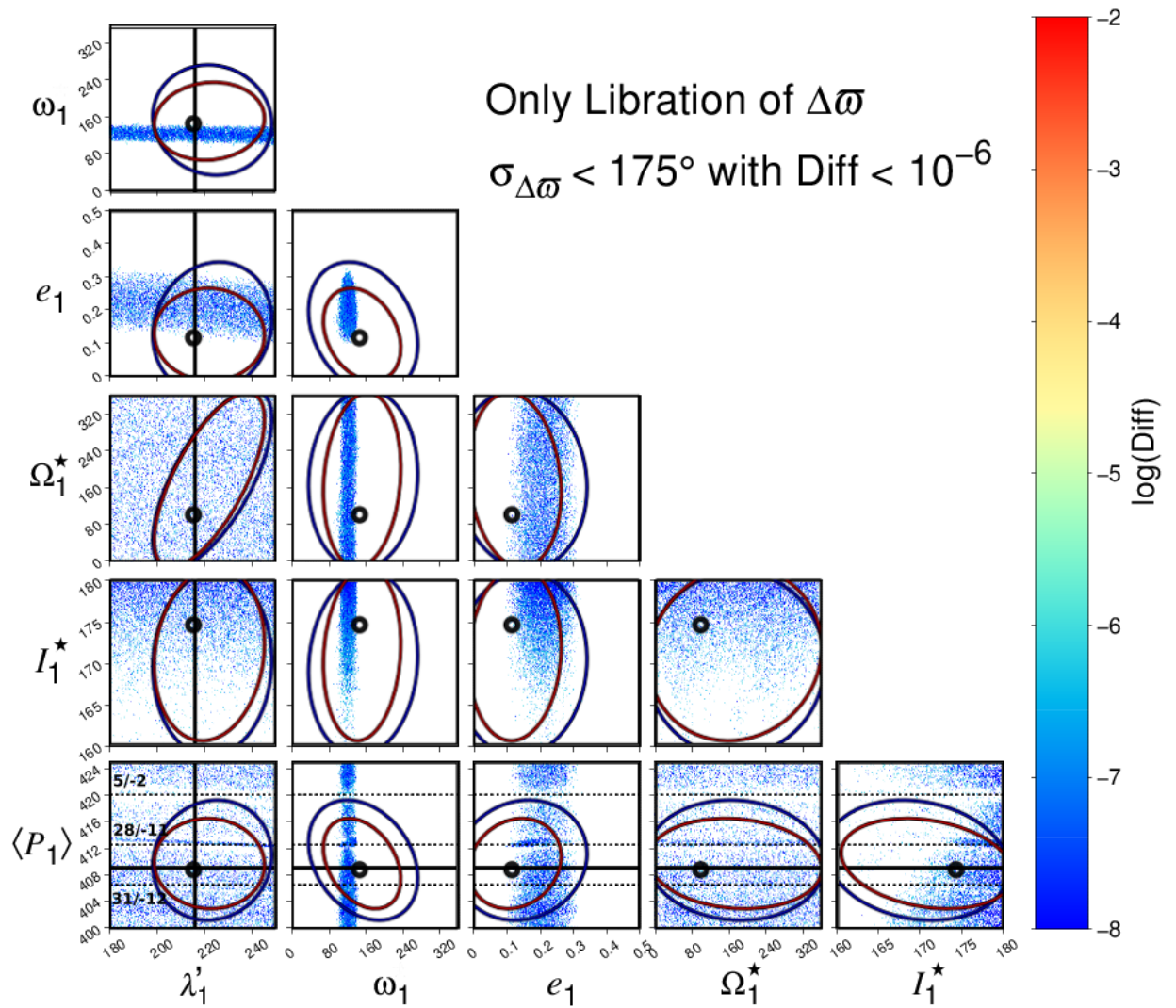


Figura 3.20: Corner Map para o caso inclinado considerando as condições iniciais que possuem baixa difusão devido apenas a libração de $\Delta\varpi$. As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

3.6.4 Ressonâncias de Movimento Médio

O Corner Map referente a ressonância 5/-2 é apresentado na Figura 3.21. Mesmo com as curvas de $\sqrt{\chi^2}$ sendo mais abrangentes ao variar a inclinação, estas curvas não alcançam a família da ressonância 5/-2. Os valores de $\langle P_1 \rangle$ e λ_1 para esta ressonâncias continuam fora das curvas de $\sqrt{\chi^2}$. Essa ressonância pode assumir qualquer valor de Ω_1^* e existe para $I_1^* < 165^\circ$.

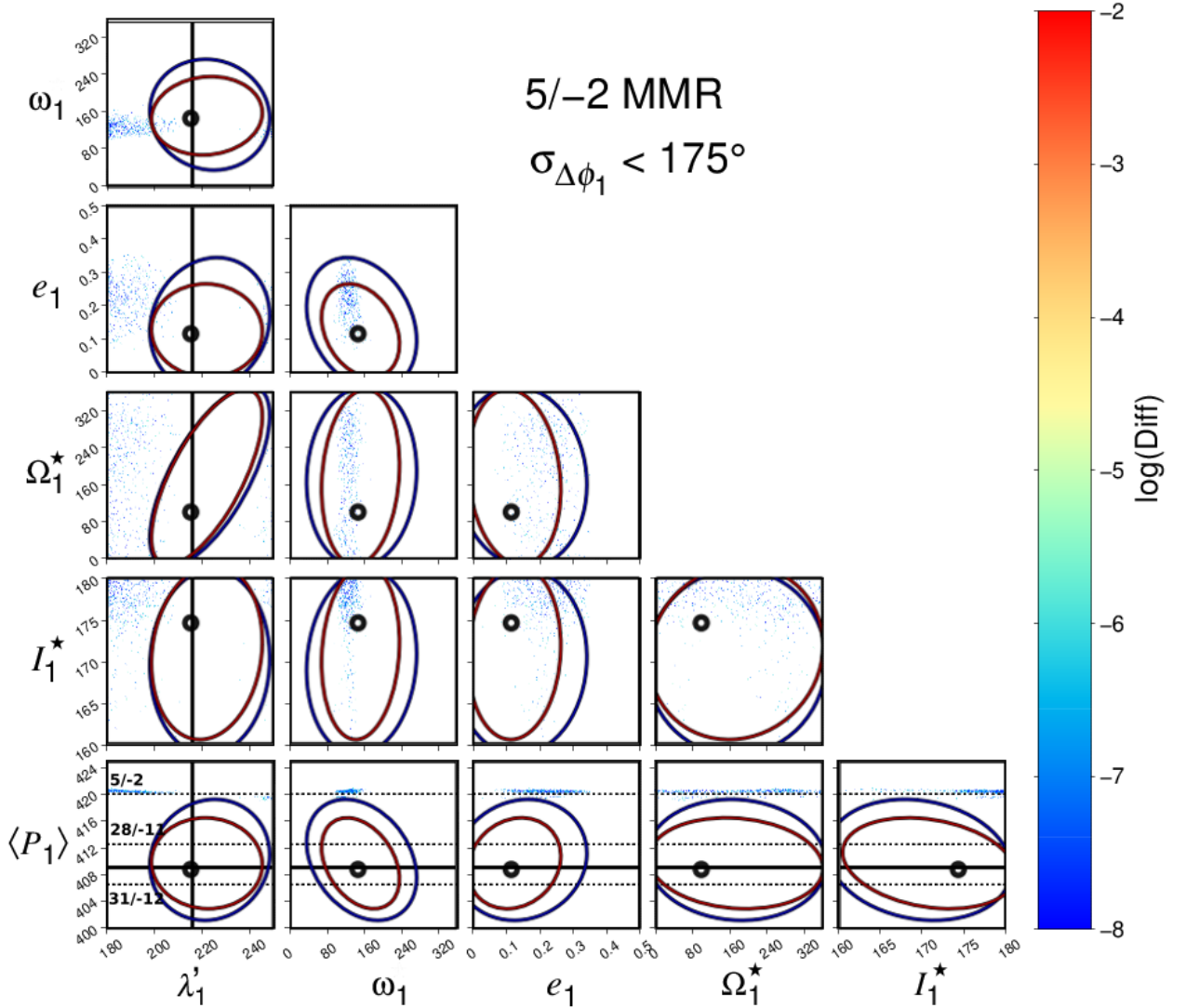


Figura 3.21: Corner Map para o caso inclinado considerando as condições iniciais em ressonância 5/-2 com o binário, estas possuem libração do ângulos ressonante ϕ_1 . As linhas contínuas e os círculos representam os ajustes Kepleriano e Newtoniano, respectivamente. As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

No intervalo considerado de $\langle P_1 \rangle$, não foi possível identificar outras condições iniciais em ressonâncias de movimento médio utilizando os ângulos ressonantes. Assim, as outras ressonâncias podem ser identificadas por meio da localização nominal, ou seja a partir

dos valores de $\langle P_1 \rangle$. Similar ao caso coplanar, as ressonâncias 28/-11 e 31/-12 são as mais prováveis para o planeta ao considerar o caso inclinado. Na Figura 3.22, representamos as condições iniciais que possuem $\langle P_1 \rangle$ próximo da localização das ressonâncias 31/-12, 28/-11 e 5/-2. Os valores nominais de $\langle P_1 \rangle$ são próximos de 406.5, 412.5 e 420 dias, respectivamente. Assim para a identificação dessas regiões ressonantes, utilizamos um intervalo de ± 1.5 dias. A diferença em utilizar o período orbital inicial P_1 e o valor médio $\langle P_1 \rangle$ pode ser observada em seis painéis. Representando apenas as regiões com baixa difusão podemos ver para quais valores dos parâmetros as ressonâncias de movimento médio ocorrem. A ressonância 5/-2 ocorre para $\omega_1 \approx 125^\circ$, $0.1 < e_1 < 0.32$ e $I_1^* > 160^\circ$. Já a ressonância 28/-11 existe para qualquer valor de ω_1 , $0 < e_1 < 0.38$ e $I_1^* > 168^\circ$. No caso da ressonância 31/-12, temos $\omega_1 \approx 120^\circ$, $0.05 < e_1 < 0.43$ e $I_1^* > 167^\circ$. Todas ressonâncias existem para qualquer valor de Ω_1^* . Apenas as ressonâncias de alta ordem (28/-11 e 31/-12) possuem condições iniciais com valores de $\langle P_1 \rangle$ e λ_1' dentro das elipses de confiança mais abrangentes ($\sqrt{\chi^2} < 3.0$).

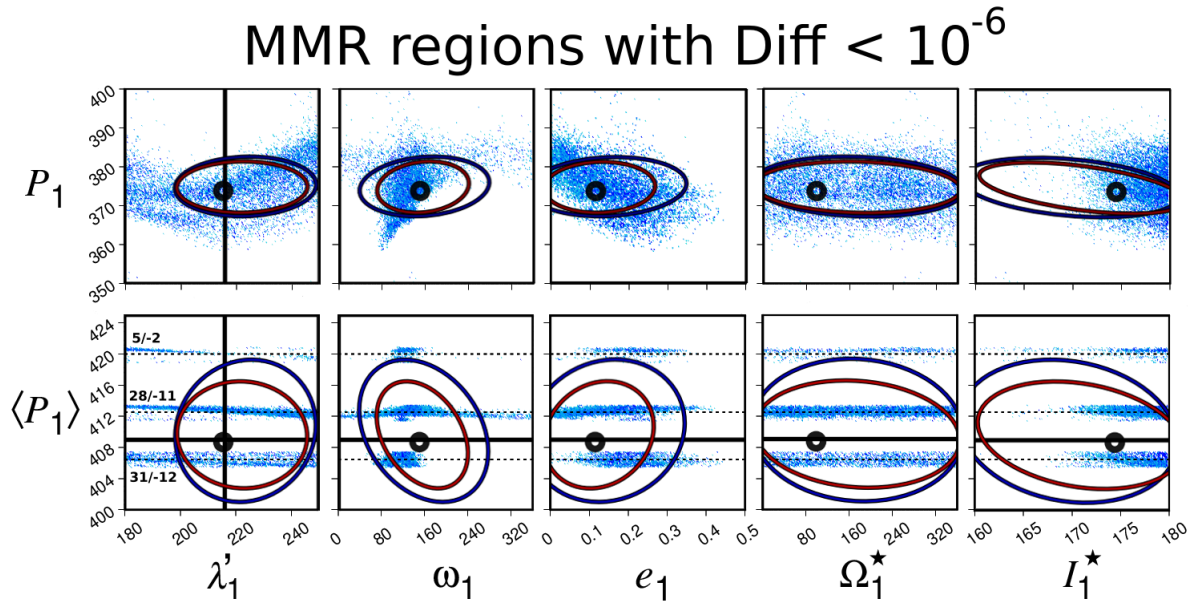


Figura 3.22: Mapas de estabilidade referentes as condições iniciais que possuem $\langle P_1 \rangle$ próximo das localizações nominais das ressonâncias 31/-12, 28/-11 e 5/-2 e difusão menor que 10^{-6} . As elipses de confiança representam as regiões com $\sqrt{\chi^2} < 2.5$ e $\sqrt{\chi^2} < 3.0$. As linhas verticais são referentes ao ajuste Kepleriano e os círculos são referentes ao ajuste Newtoniano. As localizações nominais das ressonâncias com o binário foram representadas por linhas pontilhadas.

Capítulo 4

Conclusão

Com o intuito de estudarmos a respeito das configurações retrógradas ressonantes no problema planetário, realizamos simulações de sistemas hipotéticos em ressonâncias de até quinta ordem. Por meio dessas simulações, encontramos configurações estáveis em todas as ressonâncias estudadas. Em particular, uma configuração em que dois planetas com a massa de Júpiter estão em ressonância coorbital (ressonância 1/-1). Estes resultados podem ser úteis para identificar exoplanetas em configurações de ressonância de movimento médio.

Através de simulações do problema circular restrito de três corpos (PCR3BP), investigamos a dinâmica de um asteroide ou planeta em torno um binário estelar com razão de massa entre 0.01 e 0.5 (massas iguais). Por meio da construção de seções de Poincaré, identificamos ressonâncias retrógradas até quinta ordem e concluímos que este tipo de configuração ocorre em sistemas compostos por estrelas com altas razões de massa. Este resultado é relevante para a identificação de exoplanetas retrógrados em sistemas binários.

Nessa segunda parte do projeto, estudamos o sistema extrassolar ν Octantis. Escolhemos estudá-lo, pois o planeta presente neste sistema só pode ser estável caso possua uma órbita retrógrada. Exploramos as possíveis configurações para o planeta por meio de dois casos diferentes: o caso coplanar, onde o planeta orbita no mesmo plano que o binário estelar e o caso inclinado. Devido ao número de parâmetros desconhecidos do sistema, desenvolvemos uma nova metodologia que permite analisar a estabilidade de um sistema com múltiplos graus de liberdade, Corner Maps (descrita na Seção 3.4.1). Através desse método, foi possível determinar quais configurações provêm estabilidade a longo prazo para o planeta. Devido as massas das estrelas serem comparáveis, o período orbital do planeta apresenta grandes oscilações, assim realizando uma análise de frequência para cada condição inicial calculamos o valor médio deste parâmetro. Através do cálculo do período orbital médio foi possível comparar as regiões de estabilidade com os dados observacionais (ajustes Kepleriano e Newtoniano). Além do mais, obtivemos a localização

do mínimo absoluto do caso coplanar utilizando dois ajustes Newtonianos calculados por métodos distintos. Nossa metodologia para procurar por configurações de estabilidade orbital pode também ser aplicada para outros sistemas extrassolares.

Analisando os Corner Maps para os casos estudados, determinamos três possíveis configurações para o planeta no sistema ν Octantis. O planeta pode estar em uma configuração de equilíbrio secular (libração do $\Delta\varpi$), de modo que as órbitas do planeta e do binário são alinhadas e precessam juntas. O planeta também pode estar na ressonância de movimento médio 31/-12 ou 28/-11. Entre estas, a ressonância 28/-11 é estatisticamente mais provável que a 31/-12; sendo que esta é estável para qualquer valor inicial de ω_1 na época utilizada nas simulações. Considerando apenas as condições iniciais com difusão $< 10^{-5}$ que estão dentro das elipses de confiança ($\sqrt{\chi^2} < 2.5$), obtemos que por volta de 20% destas condições iniciais são estáveis devido ao equilíbrio secular, 11% estão na região da ressonância 31/-12 e 59% estão na região da 28/-11. Não conseguimos identificar a origem da estabilidade de 10% das condições iniciais. Para as ressonâncias de movimento médio, consideramos as condições iniciais sem libração de $\Delta\varpi$ que estão em torno da localização nominal da ressonância. Portanto, como a maior parte das condições iniciais com libração de $\Delta\varpi$ estão na região da ressonância 28/-11, estamos desconsiderando a possibilidade das condições iniciais serem ressonâncias de ponto fixo, assim tornando a configuração da ressonância 28/-11 ainda mais provável.

A maior parte das condições iniciais com baixa difusão no caso inclinado possui $I_1^* > 168^\circ$, portanto a configuração mais provável para o planeta do sistema ν Octantis é uma órbita quasi-coplanar com o binário na ressonância 28/-11. Desse modo, nossos resultados provêm argumentos estatísticos que indicam que o planeta provavelmente está em uma configuração de ressonância de movimento médio de alta ordem.

Bibliografia

- Caritá, G., Signor, A., & Morais, M. (2022). A numerical study of the 1/2, 2/1, and 1/1 retrograde mean motion resonances in planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *515*(2), 2280–2292.
- Caritá, G., Signor, A., Morais, M., de Carvalho, R. E., & Prado, A. (2023). Retrograde resonances at high mass ratio in the circular restricted 3-body problem. *Nonlinear Dynamics*, *111*(18), 17021–17035.
- Caritá, G. A. (2022). Análise da estabilidade e ressonância de órbitas retrógradas planares do problema de três corpos em sistemas estelares e planetários.
- Chambers, J. E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *304*(4), 793–799.
- Correia, A., Udry, S., Mayor, M., Benz, W., Bertaux, J.-L., Bouchy, F., Laskar, J., Lovis, C., Mordasini, C., Pepe, F., et al. (2009). The HARPS search for southern extra-solar planets-XVI. HD 45364, a pair of planets in a 3: 2 mean motion resonance. *Astronomy & Astrophysics*, *496*(2), 521–526.
- Correia, A., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., & Santos, N. C. (2005). The CORALIE survey for southern extra-solar planets-XIII. A pair of planets around HD 202206 or a circumbinary planet? *Astronomy & Astrophysics*, *440*(2), 751–758.
- Couetdic, J., Laskar, J., Correia, A. C., Mayor, M., & Udry, S. (2010). Dynamical stability analysis of the HD 202206 system and constraints to the planetary orbits. *Astronomy & Astrophysics*, *519*, A10.
- Dvorak, R. (1984). Numerical experiments on planetary orbits in double stars. *Celestial Mechanics*, *34*, 369–378.
- Eberle, J., & Cuntz, M. (2010). On the reality of the suggested planet in the ν Octantis system. *The Astrophysical Journal Letters*, *721*(2), L168.
- Gastineau, M., & Laskar, J. (2011). TRIP: A Computer Algebra System Dedicated to Celestial Mechanics and Perturbation Series. *ACM Commun. Comput. Algebra*, *44*(3/4), 194–197. <https://doi.org/10.1145/1940475.1940518>

- Gayon, J., & Bois, E. (2008). Are retrograde resonances possible in multi-planet systems? *Astronomy & Astrophysics*, *482*(2), 665–672.
- Gayon-Markt, J., & Bois, E. (2009). On fitting planetary systems in counter-revolving configurations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, *399*(1), L137–L140.
- Giuppone, C., Morais, M., Boué, G., & Correia, A. (2012). Dynamical analysis and constraints for the HD 196885 system. *Astronomy & Astrophysics*, *541*, A151.
- Goździewski, K., Słonina, M., Migaszewski, C., & Rozenkiewicz, A. (2013). Testing a hypothesis of the ν Octantis planetary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *430*(1), 533–545.
- Holman, M. J., & Wiegert, P. A. (1999). Long-term stability of planets in binary systems. *The Astronomical Journal*, *117*(1), 621.
- Kotoulas, T., Morais, M. H. M., & Voyatzis, G. (2022). The phase space structure of retrograde mean motion resonances with Neptune: the 4/5, 7/9, 5/8 and 8/13 cases. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *134*(6), 1–25.
- Kotoulas, T., & Voyatzis, G. (2020a). Planar retrograde periodic orbits of the asteroids trapped in two-body mean motion resonances with Jupiter. *Planetary and Space Science*, *182*, 104846.
- Kotoulas, T., & Voyatzis, G. (2020b). Retrograde periodic orbits in 1/2, 2/3 and 3/4 mean motion resonances with Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *132*(6), 1–16.
- Laskar, J. (1993). Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *67*(1-3), 257–281.
- Malmberg, D., Davies, M. B., & Hoggie, D. C. (2011). The effects of fly-bys on planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *411*(2), 859–877.
- Mayor, M., Pepe, F., Queloz, D., Bouchy, F., Rupprecht, G., Lo Curto, G., Avila, G., Benz, W., Bertaux, J. .-, Bonfils, X., Dall, T., Dekker, H., Delabre, B., Eckert, W., Fleury, M., Gilliotte, A., Gojak, D., Guzman, J. C., Kohler, D., . . . Weilenmann, U. (2003). Setting New Standards with HARPS. *The Messenger*, *114*, 20–24.
- Morais, H., & Namouni, F. (2017). Reckless orbiting in the Solar System. *Nature*, *543*(7647), 635–636.
- Morais, M., & Correia, A. (2012). Precession due to a close binary system: an alternative explanation for ν -Octantis? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *419*(4), 3447–3456.
- Morais, M., & Giuppone, C. (2012). Stability of prograde and retrograde planets in circular binary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *424*(1), 52–64.

- Morais, M., & Namouni, F. (2013a). Asteroids in retrograde resonance with Jupiter and Saturn. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, *436*(1), L30–L34.
- Morais, M., & Namouni, F. (2013b). Retrograde resonance in the planar three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *117*(4), 405–421.
- Morais, M., & Namouni, F. (2016). A numerical investigation of coorbital stability and libration in three dimensions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *125*(1), 91–106.
- Morais, M., & Namouni, F. (2019). Periodic orbits of the retrograde coorbital problem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *490*(3), 3799–3805.
- Morais, M., Namouni, F., Voyatzis, G., & Kotoulas, T. (2021). A study of the 1/2 retrograde resonance: periodic orbits and resonant capture. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, *133*(5), 1–14.
- Murray, C. D., & Correia, A. C. (2010). Keplerian orbits and dynamics of exoplanets. *Exoplanets*, *1*, 15–23.
- Namouni, F., & Morais, H. (2018a). Coorbital capture at arbitrary inclination. *Computational and Applied Mathematics*, *37*(1), 65–71.
- Namouni, F., & Morais, M. H. M. (2015). Resonance capture at arbitrary inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *446*(2), 1998–2009.
- Namouni, F., & Morais, M. H. M. (2018b). An interstellar origin for Jupiter’s retrograde co-orbital asteroid. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, *477*(1), L117–L121.
- Pfalzner, S., Davies, M. B., Gounelle, M., Johansen, A., Munker, C., Lacerda, P., Zwart, S. P., Testi, L., Trieloff, M., & Veras, D. (2015). The formation of the solar system. *Physica Scripta*, *90*(6), 068001.
- Pfalzner, S., Govind, A., & Portegies Zwart, S. (2024). Trajectory of the stellar flyby that shaped the outer Solar System. *Nature Astronomy*, 1–7.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*.
- Quarles, B., Cuntz, M., & Musielak, Z. E. (2012). The stability of the suggested planet in the ν Octantis system: a numerical and statistical study. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *421*(4), 2930–2939.
- Ramm, D. (2015). Line-depth-ratio temperatures for the close binary ν Octantis: new evidence supporting the conjectured circumstellar retrograde planet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *449*(4), 4428–4442.
- Ramm, D., Nelson, B., Endl, M., Hearnshaw, J., Wittenmyer, R., Gunn, F., Bergmann, C., Kilmartin, P., & Brogt, E. (2016). The conjectured S-type retrograde planet

- in ν Octantis: more evidence including four years of iodine-cell radial velocities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 460(4), 3706–3719.
- Ramm, D., Pourbaix, D., Hearnshaw, J. B., & Komonjinda, S. (2009). Spectroscopic orbits for K giants β Reticuli and ν Octantis: what is causing a low-amplitude radial velocity resonant perturbation in ν Oct? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 394(3), 1695–1710.
- Ramm, D., Robertson, P., Reffert, S., Gunn, F., Trifonov, T., Pollard, K., & Cantalloube, F. (2021). A photospheric and chromospheric activity analysis of the quiescent retrograde-planet host ν Octantis A. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 502(2), 2793–2806.
- Rein, H., & Liu, S.-F. (2012). REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 537, A128.
- Rein, H., & Spiegel, D. S. (2015). IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(2), 1424–1437.
- Signor, A. C., Caritá, G. A., & Morais, M. H. M. (2023). A numerical study of fourth- and fifth-order retrograde mean motion resonances in planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 520(3), 4696–4714.
- Wiegert, P., Connors, M., & Veillet, C. (2017). A retrograde co-orbital asteroid of Jupiter. *Nature*, 543(7647), 687–689.

Anexo – Licença de uso de imagem

As figuras representadas na Seção 2.8 foram reproduzidas com permissão da *Springer Nature*. A licença de uso de imagem do artigo referenciado abaixo está disponível em anexo.

Caritá, G., Signor, A., Morais, M., de Carvalho, R. E., & Prado, A. (2023). *Retrograde resonances at high mass ratio in the circular restricted 3-body problem*. *Nonlinear Dynamics*, 111 (18), 17021–17035 (<https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-023-08779-y>).

SPRINGER NATURE LICENSE TERMS AND CONDITIONS

Nov 11, 2024

This Agreement between Alan Signor ("You") and Springer Nature ("Springer Nature") consists of your license details and the terms and conditions provided by Springer Nature and Copyright Clearance Center.

License Number	5904250938339
License date	Nov 08, 2024
Licensed Content Publisher	Springer Nature
Licensed Content Publication	Nonlinear Dynamics
Licensed Content Title	Retrograde resonances at high mass ratio in the circular restricted 3-body problem
Licensed Content Author	G. A. Caritá et al
Licensed Content Date	Aug 9, 2023
Type of Use	Thesis/Dissertation
Requestor type	academic/university or research institute
Format	print and electronic
Portion	figures/tables/illustrations
Number of figures/tables/illustrations	4
Will you be translating?	yes, without original language
Number of languages	1

Circulation/distribution	1 - 29
Author of this Springer Nature content	yes
Title of new work	Configurações retrógradas em sistemas extrassolares
Institution name	Universidade Estadual Paulista
Expected presentation date	Dec 2024
Portions	Figures 1, 2, 9 and 11
The Requesting Person / Organization to Appear on the License	Alan Signor
Specific Languages	Portuguese
Requestor Location	Mr. Gabriel Caritá Av. 54 1468 Rio Claro, São Paulo 13504190 Brazil
Billing Type	Invoice
Billing Address	Mr. Gabriel Caritá Av. 54 1468 Rio Claro, Brazil 13504190
Total	0.00 USD

Terms and Conditions

Springer Nature Customer Service Centre GmbH Terms and Conditions

The following terms and conditions ("Terms and Conditions") together with the terms specified in your [RightsLink] constitute the License ("License") between you as Licensee and Springer Nature Customer Service Centre GmbH as Licensor. By clicking 'accept' and completing the transaction for your use of the material ("Licensed

Material"), you confirm your acceptance of and obligation to be bound by these Terms and Conditions.

1. Grant and Scope of License

1. 1. The Licensor grants you a personal, non-exclusive, non-transferable, non-sublicensable, revocable, world-wide License to reproduce, distribute, communicate to the public, make available, broadcast, electronically transmit or create derivative works using the Licensed Material for the purpose(s) specified in your RightsLink Licence Details only. Licenses are granted for the specific use requested in the order and for no other use, subject to these Terms and Conditions. You acknowledge and agree that the rights granted to you under this License do not include the right to modify, edit, translate, include in collective works, or create derivative works of the Licensed Material in whole or in part unless expressly stated in your RightsLink Licence Details. You may use the Licensed Material only as permitted under this Agreement and will not reproduce, distribute, display, perform, or otherwise use or exploit any Licensed Material in any way, in whole or in part, except as expressly permitted by this License.

1. 2. You may only use the Licensed Content in the manner and to the extent permitted by these Terms and Conditions, by your RightsLink Licence Details and by any applicable laws.

1. 3. A separate license may be required for any additional use of the Licensed Material, e.g. where a license has been purchased for print use only, separate permission must be obtained for electronic re-use. Similarly, a License is only valid in the language selected and does not apply for editions in other languages unless additional translation rights have been granted separately in the License.

1. 4. Any content within the Licensed Material that is owned by third parties is expressly excluded from the License.

1. 5. Rights for additional reuses such as custom editions, computer/mobile applications, film or TV reuses and/or any other derivative rights requests require additional permission and may be subject to an additional fee. Please apply to journalpermissions@springernature.com or bookpermissions@springernature.com for these rights.

2. Reservation of Rights

Licensor reserves all rights not expressly granted to you under this License. You acknowledge and agree that nothing in this License limits or restricts Licensor's rights in or use of the Licensed Material in any way. Neither this License, nor any act, omission, or statement by Licensor or you, conveys any ownership right to you in any Licensed Material, or to any element or portion thereof. As between Licensor and you, Licensor owns and retains all right, title, and interest in and to the Licensed Material subject to the license granted in Section 1.1. Your permission to use the Licensed Material is expressly conditioned on you not impairing Licensor's or the applicable copyright owner's rights in the Licensed Material in any way.

3. Restrictions on use

3. 1. Minor editing privileges are allowed for adaptations for stylistic purposes or formatting purposes provided such alterations do not alter the original meaning or intention of the Licensed Material and the new figure(s) are still accurate and representative of the Licensed Material. Any other changes including but not limited to, cropping, adapting, and/or omitting material that affect the meaning,

intention or moral rights of the author(s) are strictly prohibited.

- 3. 2. You must not use any Licensed Material as part of any design or trademark.
- 3. 3. Licensed Material may be used in Open Access Publications (OAP), but any such reuse must include a clear acknowledgment of this permission visible at the same time as the figures/tables/illustration or abstract and which must indicate that the Licensed Material is not part of the governing OA license but has been reproduced with permission. This may be indicated according to any standard referencing system but must include at a minimum 'Book/Journal title, Author, Journal Name (if applicable), Volume (if applicable), Publisher, Year, reproduced with permission from SNCSC'.

4. STM Permission Guidelines

- 4. 1. An alternative scope of license may apply to signatories of the STM Permissions Guidelines ("STM PG") as amended from time to time and made available at <https://www.stm-assoc.org/intellectual-property/permissions/permissions-guidelines/>.
- 4. 2. For content reuse requests that qualify for permission under the STM PG, and which may be updated from time to time, the STM PG supersede the terms and conditions contained in this License.
- 4. 3. If a License has been granted under the STM PG, but the STM PG no longer apply at the time of publication, further permission must be sought from the Rightsholder. Contact journalpermissions@springernature.com or bookpermissions@springernature.com for these rights.

5. Duration of License

5. 1. Unless otherwise indicated on your License, a License is valid from the date of purchase ("License Date") until the end of the relevant period in the below table:

Reuse in a medical communications project	Reuse up to distribution or time period indicated in License
Reuse in a dissertation/thesis	Lifetime of thesis
Reuse in a journal/magazine	Lifetime of journal/magazine
Reuse in a book/textbook	Lifetime of edition
Reuse on a website	1 year unless otherwise specified in the License
Reuse in a presentation/slide kit/poster	Lifetime of presentation/slide kit/poster. Note: publication whether electronic or in print of presentation/slide kit/poster may require further permission.
Reuse in conference proceedings	Lifetime of conference proceedings
Reuse in an annual report	Lifetime of annual report
Reuse in training/CME materials	Reuse up to distribution or time period indicated in License
Reuse in newsmedia	Lifetime of newsmedia
Reuse in coursepack/classroom materials	Reuse up to distribution and/or time period indicated in license

6. Acknowledgement

6. 1. The Licensor's permission must be acknowledged next to the Licensed Material in print. In electronic form, this acknowledgement must be visible at the same time as the figures/tables/illustrations or abstract and must be hyperlinked to the journal/book's homepage.
6. 2. Acknowledgement may be provided according to any standard referencing system and at a minimum should include "Author, Article/Book Title, Journal name/Book imprint, volume, page number, year, Springer Nature".

7. Reuse in a dissertation or thesis

7. 1. Where 'reuse in a dissertation/thesis' has been selected, the following terms apply: Print rights of the Version of Record are provided for; electronic rights for use only on institutional repository as defined by the Sherpa guideline (www.sherpa.ac.uk/romeo/) and only up to what is required by the awarding institution.
7. 2. For theses published under an ISBN or ISSN, separate permission is required. Please contact journalpermissions@springernature.com or bookpermissions@springernature.com for these rights.
7. 3. Authors must properly cite the published manuscript in their thesis according to current citation standards and include the following acknowledgement: *'Reproduced with permission from Springer Nature'*.

8. License Fee

You must pay the fee set forth in the License Agreement (the "License Fees"). All amounts payable by you under this License are exclusive of any sales, use, withholding, value added or similar taxes, government fees or levies or other assessments. Collection and/or remittance of such taxes to the relevant tax authority shall be the responsibility of the party who has the legal obligation to do so.

9. Warranty

9. 1. The Licensor warrants that it has, to the best of its knowledge, the rights to license reuse of the Licensed Material. **You are solely responsible for ensuring that the material you wish to license is original to the Licensor and does not carry the copyright of another entity or third party (as credited in the published version).** If the credit line on any part of the Licensed Material indicates that it was reprinted or adapted with permission from another source, then you should seek additional permission from that source to reuse the material.
9. 2. EXCEPT FOR THE EXPRESS WARRANTY STATED HEREIN AND TO THE EXTENT PERMITTED BY APPLICABLE LAW, LICENSOR PROVIDES THE LICENSED MATERIAL "AS IS" AND MAKES NO OTHER REPRESENTATION OR WARRANTY. LICENSOR EXPRESSLY DISCLAIMS ANY LIABILITY FOR ANY CLAIM ARISING FROM OR OUT OF THE CONTENT, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO ANY ERRORS, INACCURACIES, OMISSIONS, OR DEFECTS CONTAINED THEREIN, AND ANY IMPLIED OR EXPRESS WARRANTY AS TO MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. IN NO EVENT SHALL LICENSOR BE LIABLE TO YOU OR ANY OTHER PARTY OR ANY OTHER PERSON OR FOR ANY SPECIAL, CONSEQUENTIAL, INCIDENTAL, INDIRECT, PUNITIVE, OR EXEMPLARY DAMAGES, HOWEVER CAUSED, ARISING OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE DOWNLOADING, VIEWING OR

USE OF THE LICENSED MATERIAL REGARDLESS OF THE FORM OF ACTION, WHETHER FOR BREACH OF CONTRACT, BREACH OF WARRANTY, TORT, NEGLIGENCE, INFRINGEMENT OR OTHERWISE (INCLUDING, WITHOUT LIMITATION, DAMAGES BASED ON LOSS OF PROFITS, DATA, FILES, USE, BUSINESS OPPORTUNITY OR CLAIMS OF THIRD PARTIES), AND WHETHER OR NOT THE PARTY HAS BEEN ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGES. THIS LIMITATION APPLIES NOTWITHSTANDING ANY FAILURE OF ESSENTIAL PURPOSE OF ANY LIMITED REMEDY PROVIDED HEREIN.

10. Termination and Cancellation

10. 1. The License and all rights granted hereunder will continue until the end of the applicable period shown in Clause 5.1 above. Thereafter, this license will be terminated and all rights granted hereunder will cease.

10. 2. Licensor reserves the right to terminate the License in the event that payment is not received in full or if you breach the terms of this License.

11. General

11. 1. The License and the rights and obligations of the parties hereto shall be construed, interpreted and determined in accordance with the laws of the Federal Republic of Germany without reference to the stipulations of the CISG (United Nations Convention on Contracts for the International Sale of Goods) or to Germany's choice-of-law principle.

11. 2. The parties acknowledge and agree that any controversies and disputes arising out of this License shall be decided exclusively by the courts of or having jurisdiction for Heidelberg, Germany, as far as legally permissible.

11. 3. This License is solely for Licensor's and Licensee's benefit. It is not for the benefit of any other person or entity.

Questions? For questions on Copyright Clearance Center accounts or website issues please contact springernaturesupport@copyright.com or +1-855-239-3415 (toll free in the US) or +1-978-646-2777. For questions on Springer Nature licensing please visit <https://www.springernature.com/gp/partners/rights-permissions-third-party-distribution>

Other Conditions:

Version 1.4 - Dec 2022

Questions? customercare@copyright.com.
