

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

HENRIQUE FIGUEIREDO CHERULLI

Investigação de um Modelo Não Linear de 6 GDL para UAVs .

São João da Boa Vista

2023

Henrique Figueiredo Cherulli

Investigação de um Modelo Não Linear de 6 GDL para UAVs

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientadora: Profª Dra. Priscilla Andressa de Sousa Silva

São João da Boa Vista

2023

C523i	Cherulli, Henrique Figueiredo Investigação de um modelo não linear de 6 GDL para UAVs / Henrique Figueiredo Cherulli. -- São João da Boa Vista, 2023 73 p. : il., tabs., fotos Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista Orientadora: Priscilla Andressa de Sousa Silva 1. Engenharia aeroespacial. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais. 3. Drone. 4. Python (Linguagem de programação de computador). I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

INVESTIGAÇÃO DE UM MODELO NÃO LINEAR DE 6 GDL PARA UAVS

Aluno: Henrique Figueiredo Cherulli

Orientador: Prof.^a Dr.^a Priscilla Andressa de Sousa Silva

Banca Examinadora:

- Priscilla Andressa de Sousa Silva (Orientadora)
- Carlos do Carmo Pagani Júnior (Examinador)
- Vagner Candido de Sousa (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 014/2022)
--

São João da Boa Vista, 13 de fevereiro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família, em especial, meus pais e irmão, os quais me apoiaram e me deram todo o auxílio que precisei durante toda a minha vida pessoal e acadêmica. Agradeço também a minha namorada, por toda a parceria e apoio, em cada momento dos últimos 7 anos, estando junto comigo em toda a minha formação.

Aos meus professores, amigos e demais membros do corpo técnico da Faculdade de Engenharia de São João da Boa Vista, por esses mais de cinco anos de convivência diária, aprendizados, auxílios e amizade.

Aos meus amigos e colegas de trabalho da Seamax Aircraft, que me ajudaram nos momentos finais deste projeto, com dicas, conselhos e apoio.

Por último, um agradecimento especial a minha Professora e Orientadora, Dr^a Priscilla Andressa de Sousa Silva, que me ajudou e orientou desde o primeiro ano de graduação, em toda a minha iniciação científica e agora em meu TCC. Foram vários congressos, relatórios e um artigo publicado que me permitiram desenvolver habilidades e me deram experiências únicas e fundamentais em minha formação.

RESUMO

Os avanços na tecnologia e poder computacional permitiram uma verdadeira revolução no campo da engenharia de simulação, economizando recursos ao possibilitar um estudo detalhado de um modelo físico sem a necessidade de construí-lo em escala real. No campo da aeronáutica não foi diferente, e os modelos dinâmicos são hoje uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento de novos projetos e aperfeiçoamento de diversas características de voo através de simuladores e sistemas de controle. Neste trabalho foi realizado o estudo de um modelo de 6 graus de liberdade utilizando a linguagem de programação Python visando aumentar as referências de dinâmica de voo disponíveis nesta que é hoje uma das linguagens mais utilizadas no mundo e destaca-se por dispor de software aberto e de fácil acesso. O modelo foi testado utilizando dados de uma aeronave VANT, desenvolvida pelo Instituto ETH de Zurich, e todo o desenvolvimento, incluindo o algoritmo, foi disponibilizado neste texto a fim de se contribuir com trabalhos futuros.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica de Voo. Sistema não Linear. Python.

ABSTRACT

Advancements in technology and computing power have allowed for a true revolution in the field of simulation engineering, saving resources by enabling a detailed study of a physical model without the need to build it to full scale. In aeronautics, this is no different, and dynamic models are now a fundamental tool for developing new projects and improving various flight characteristics through simulators and control systems. In this study, a 6-degree-of-freedom model was developed using the Python programming language in order to expand the available references for flight dynamics in one of the most widely used and accessible open-source software languages. The model was tested using data from an unmanned aerial vehicle (UAV) developed by the ETH Institute in Zurich, and the entire development process, including the algorithm, was made available in this text to contribute to future work.

KEYWORDS: Flight Dynamics. Non-linear System. Python.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	O primeiro VANT - O Kettering Bug.	16
Figura 2	Northrop Grumman RQ-4 Global Hawk - Aeronave VANT militar de última geração.	17
Figura 3	Spad SVIII - Aeronave tripulada da 1ªGuerra Mundial, contemporânea ao Kettering Bug.	18
Figura 4	Boeing E-3 Sentry - Aeronave militar de monitoramento dos anos 2000.	18
Figura 5	VANT de pulverização agrícola SV-60 - AgroAviation.	19
Figura 6	Representação do sistema de eixos com origem na Terra.	21
Figura 7	Representação do sistema de eixos com origem na aeronave.	22
Figura 8	Representação esquemática dos vetores de posição relativa entre o eixo fixo no corpo e fixo na Terra.	32
Figura 9	Sentidos positivos de forças e momentos.	39
Figura 10	Superfícies de controle do VANT.	43
Figura 11	Polares de Sustentação.	44
Figura 12	Polares de Arrasto.	45
Figura 13	Polar de eficiência aerodinâmica.	45
Figura 14	Curvas de variação dos coeficientes de momento.	46
Figura 15	Polar de velocidades.	47
Figura 16	Algoritmo de simulação em tempo contínuo.	48
Figura 17	Resposta do sistema a uma situação de planeio.	52
Figura 18	Trajetória da aeronave no espaço - Condição de planeio.	53
Figura 19	Representação do aumento inicial de α em planeio, apesar do aumento de θ . . .	53
Figura 20	Resposta do sistema a uma situação de curva não nivelada.	54
Figura 21	Trajetória da aeronave no espaço - Condição de curva.	55
Figura 22	Resposta do sistema a uma situação de cruzeiro.	56
Figura 23	Trajetória da aeronave no espaço - Condição de cruzeiro.	57
Figura 24	Comparação de tempo de execução entre os diferentes métodos de integração numérica.	58
Figura 25	Comparação de trajetórias obtidas para os diferentes métodos de integração numérica.	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Derivadas dos coeficientes aerodinâmicos de força	43
Tabela 2 – Derivadas dos coeficientes de estabilidade	43

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado
GDL	Graus de Liberdade
EDO	Equação Diferencial Ordinária
<i>NES</i>	<i>North-East-Down</i>
<i>frd</i>	<i>Forward-Right-Down</i>
<i>BDF</i>	<i>Backward differentiation formula</i>
ISA	<i>International Standard Atmosphere</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

b	Envergadura da asa
$\bar{c}$	Corda média aerodinâmica
$C_{frd,NED}$	Matriz de rotação de um sistema de coordenadas frd para um sistema NED
$C_{B,W}$	Matriz de rotação de um sistema de eixos dos ventos para fixo no corpo
$C_{W,B}$	Matriz de rotação de um sistema de eixos fixo no corpo para o eixo dos ventos
C_X	Coefficientes de arrasto
C_Y	Coefficientes de força lateral
C_Z	Coefficiente de sustentação
F_T	Força propulsiva
g	Aceleração gravitacional
h_E	Altitude da aeronave
$I_{x,y,z}$	Momentos de inércia
L	Momento de rolagem
m	Massa
M	Momento de arfagem
$M_{A,T}$	Momentos aerodinâmicos e propulsivos
N	Momento de guinada
P, p	Taxa de rolagem
$\tilde{p}$	Taxa angular de rolagem adimensional
Q, q	Taxa de arfagem
$\tilde{q}$	Taxa angular de arfagem adimensional
$\bar{q}$	Pressão dinâmica
R, r	Taxa de guinada
$\tilde{r}$	Taxa angular de guinada adimensional
S	Área alar

T_R	Tração requerida para voo nivelado
U	Componente de velocidade na direção x
$\mathbf{v}$	Velocidade relativa
V	Componente de velocidade na direção Y
V_T	Velocidade relativa
W	Componente de velocidade na direção z
X	Força aerodinâmica ao longo do eixo x - Arrasto
x_E	Deslocamento na direção do eixo x
Y	Força aerodinâmica ao longo do eixo y - Força lateral
y_E	Deslocamento na direção do eixo y
Z	- Força aerodinâmica ao longo do eixo z - Sustentação
α	Ângulo de ataque
α_T	Ângulo de ataque do motor
β	Ângulo de derrapagem ou <i>sideslip</i>
δ_{a1}	Deflexão do aileron direito
δ_{a2}	Deflexão do aileron esquerdo
δ_{e1}	Deflexão do profundor direito
δ_{e2}	Deflexão do profundor esquerdo
δ_p	Deflexão do leme
ϕ	Ângulo de rolamento
θ	Ângulo de arfagem
ω	Velocidade angular
ψ	Ângulo de guinada
ρ	Densidade do ar
ρ_A	Densidade de aeronave
$\dot{x}$	Derivada de x em relação ao tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação	13
1.2	Objetivo	14
1.3	Organização textual	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	Veículos Aéreos não Tripulados - VANT's	16
2.1.1	Desafios tecnológicos para o futuro dos VANTs	19
2.2	Conceitos Preliminares para o Modelo Dinâmico não Linear de Aeronaves	20
2.2.1	Sistemas de Coordenadas	20
2.2.1.1	Sistemas de Coordenadas Fixos na Terra	21
2.2.1.2	Eixos de Coordenadas Fixos na Aeronave	22
2.2.2	Ângulos de Euler	23
2.3	Métodos numéricos para solução de EDO's	24
2.3.1	Método Runge-Kutta	24
2.3.2	Método LSODA	25
3	DESENVOLVIMENTO	27
3.1	Hipóteses Adotadas no Modelo Não Linear	27
3.2	Modelagem das equações	28
3.2.1	Equações Provenientes das Forças	28
3.2.2	Equações Provenientes dos Momento	32
3.2.3	Equações Cinemáticas	36
3.2.4	Equações de posição	37
3.3	Resumo das equações do modelo não linear de 6 GDL	37
3.4	Forças e Momentos Aerodinâmicos	39
3.4.1	Forças Aerodinâmicas	39
3.4.1.1	Derivadas Aerodinâmicas	40
3.4.2	Momentos Aerodinâmicos	41
3.4.2.1	Derivadas de Estabilidade	41
3.4.3	Força Propulsiva e Modelo Atmosférico	42
3.5	Descrição da aeronave VANT desenvolvida pelo Instituto ETH de Zurich	42
3.5.1	Características gerais e superfícies de controle	42
3.5.2	Parâmetros aerodinâmicos	43
3.5.3	Estudo preliminar da aeronave e de suas características Aerodinâmicas e de Performance	44
3.6	Algoritmo de simulação de tempo contínuo	48

4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	50
4.1	Estudo de condições iniciais	51
4.1.1	Descida não tracionada - Planeio	51
4.1.2	Curva não nivelada	53
4.1.3	Simulação de voo nivelado com aplicação de comandos de controle	55
4.2	Estudo comparativo de rotinas de resolução de EDO's	57
5	CONCLUSÃO	60
5.1	Sugestões para trabalhos futuros	60
	REFERÊNCIAS	62
	ANEXO A – ALGORITMO DO MODELO DINÂMICO NÃO LINEAR DE 6GDL	64
	ANEXO B – DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES UTILIZADAS	72

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

A ideia de se criar um modelo matemático que pudesse descrever o comportamento de voo de uma aeronave surgiu de forma quase simultânea com os primeiros voos de Santos Dumont e seu 14-Bis em 1906 (CALHOUN, 2006; FILHO, 2005).

Mesmo antes do primeiro voo de uma aeronave motorizada, em 1891, Frederick W. Lanchester (1868-1946) começou seus estudos sobre dinâmica de voo elaborando modelos matemáticos que pudessem descrever o voo de um planador, modificando este modelo para uma aeronave propelida já em 1908, em sua obra *Aerodanetics* (CRAES, 2014).

Pouco tempo depois do modelo criado por Lanchester, em 1911, George H. Bryan (1864-1928) desenvolveu um sistema de equações de voo essencialmente com as mesmas bases dos modelos atuais (NAPOLITANO, 2012). Apesar disso, mesmo que a forma geral tenha sido criada a mais de um século, a teoria de dinâmica de voo passou, e ainda passa, por diversas evoluções, tornando os modelos cada vez mais fiéis à realidade.

A evolução destes modelos permitiu uma verdadeira revolução na forma como as aeronaves são projetadas. Graças a eles, engenheiros e projetistas podem ter um vislumbre do comportamento em voo sem a necessidade de construir fisicamente seu projeto, permitindo estudos parametrizados e a validação de características Aerodinâmicas, de Desempenho, Estabilidade e Controle da aeronave, tornando o processo mais eficiente e economizando recursos financeiros (ZIPFEL, 2000; OLIVEIRA, 2022). Além disso, modelos dinâmicos também são a base para a criação de simuladores de voo e novos sistemas de controle, permitindo o treinamento de pilotos sem a necessidade da aeronave real e a criação de sistemas de piloto automático e de aumento de estabilidade, impactando na maior segurança da aviação.

Dada a sua grande importância na criação e implementação de sistemas de controle, os modelos dinâmicos também constituem uma ferramenta fundamental no pleno desenvolvimento e consolidação da tecnologia de Veículos Aéreos não Tripulados (VANT's ou em inglês UAVs) (FAN et al., 2020). Este tipo de tecnologia é intimamente relacionada a sistemas de controle, uma vez que seu comando é feito a distância, diminuindo assim a sensibilidade do piloto.

A relevância dos VANT's no mundo da aviação é um consenso na área. De acordo com Hodgkinson e Johnston (2018) "Drones (VANT's) representam o terceiro ponto de guinada (na tecnologia da aviação)", tamanha sua importância e poder de inovação. Ainda de acordo com o autor, a criação dos VANT's é algo equiparável ao surgimento dos automóveis substituindo as carruagens nos meios de transporte, devido às grandes mudanças que podem decorrer desta tecnologia.

Além disso, tanto o desenvolvimento de modelos dinâmicos quanto a criação e operação de VANT's estão intimamente relacionados à revolução tecnológica no campo da computação. Seja na resolução das equações diferenciais dos sistemas dinâmicos ou na alocação dos comandos digitais recebidos pelos controladores embarcados, o poder de processamento e uso de uma linguagem de programação são fundamentais para estes sistemas (ZIPFEL, 2000; FAN et al., 2020).

Atualmente, softwares como o MatLab-Simulynk possuem grandes bibliotecas de modelos dinâmicos de aeronaves tanto em 3 GDL quanto em 6 GDL (MATHWORKS, 2023), além de diversos tutoriais disponíveis tanto no site da MATHWORKS, quanto em vídeos independentes do YouTube, de forma que uma rápida pesquisa na internet fornece diversas referências para utilização de modelos no software, facilitando assim o estudo destes modelos.

Porém, diferente de outras linguagens de programação, o MatLab é um software pago o que o torna menos acessível. Por esse motivo, o desenvolvimento de modelos de simulação em outras linguagens é de grande importância para facilitar o acesso e permitir maiores fontes de referência em softwares de código abertos, diminuindo assim os custos envolvidos.

1.2 OBJETIVO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso será realizado o estudo e implementação de um modelo não linear de 6 GDL e tempo contínuo utilizando como base de programação a linguagem Python e, como laboratório didático, uma aeronave VANT desenvolvida pelo Instituto ETH de Zurich (DUCARD; GEERING, 2008; ZHANG et al., 2013).

A escolha da linguagem de programação baseia-se no fato de, diferentemente do MatLab, o Python não possuir bibliotecas de modelos de 6 GDL tão acessíveis e detalhadas carecendo de referências e exemplos online. Dessa forma que este trabalho contribuirá para o desenvolvimento de estudos futuros utilizando uma linguagem de código aberto.

Além disso, dados da pesquisa anual realizada pelo site StackOverflow (2023), referência no âmbito da programação, mostram que o Python é uma das 4 linguagens de programação mais utilizadas por usuários da plataforma e a mais popular entre as pessoas que estão iniciando seus estudos, o que demonstra a importância da linguagem como ferramenta profissional e de aprendizado.

1.3 ORGANIZAÇÃO TEXTUAL

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é realizado uma breve revisão bibliográfica envolvendo o contexto histórico e futuro dos VANT's, conceitos preliminares para o desenvolvimento do modelo dinâmico de aeronaves e um embasamento teórico de métodos de solução de EDO's implementados no Python.

No Capítulo 3 é feito o desenvolvimento das equações do modelo não linear de 6 GDL, a descrição dos parâmetros aerodinâmicos presentes no modelo e um estudo preliminar de características aerodinâmicas e de desempenho da aeronave simulada, incluindo o efeito das superfícies de comando. O capítulo é finalizado com uma descrição do algoritmo que faz a simulação em tempo contínuo no Python.

Já no Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados das simulações para diferentes condições iniciais, realizando ainda uma comparação quantitativa da eficiência, baseada no tempo necessário para simulação de cada uma das duas rotinas de solução numérica mais populares presentes na biblioteca SciPy do Python: *odeint* e *solve_ivp*.

Por fim, no Capítulo 5, é feita a conclusão e são apresentadas sugestões de trabalhos futuros, enquanto nos Anexos A e B encontram-se disponíveis o algoritmo implementado e o detalhamento de suas funções, respectivamente.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

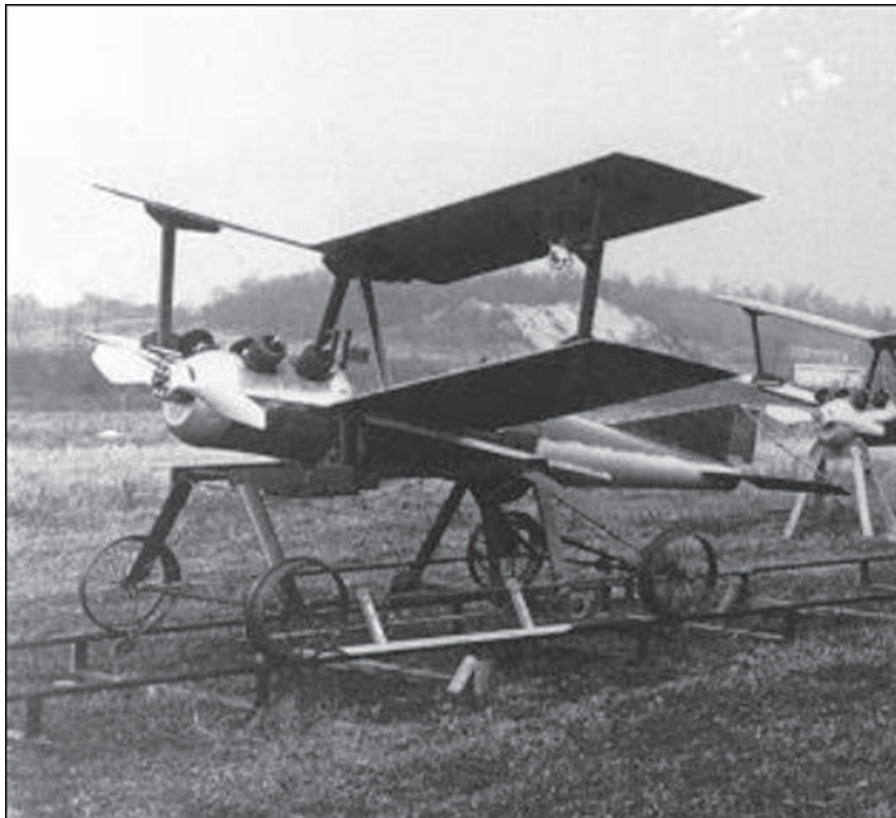
2.1 VEÍCULOS AÉREOS NÃO TRIPULADOS - VANT'S

De acordo com Fan et al. (2020, p.1), "um Veículo Aéreo não Tripulado (VANT) é um veículo aéreo movido à energia e reutilizável sem um controle manual a bordo", e, como complementa Roberto (2013, p. 5), "os mesmos podem voar de forma autônoma, semi-autônoma ou manualmente pilotados por um piloto em terra".

A tecnologia dos VANT's, tal qual a grande maioria das tecnologias atuais, teve suas origens atreladas ao uso militar, especificamente, à Primeira Guerra Mundial (FAHLSTROM; GLEASON; SADRAEY, 2022). Um dos primeiros VANT's de asa fixa foi construído em 1917, apenas 11 anos após o primeiro voo realizado por Santos Dummond e seu 14-bis. O projeto foi encomendado pelo exército norte americano e idealizado por Charles Kettering, sendo batizado de Kettering Bug (ROBERTO, 2013; FAHLSTROM; GLEASON; SADRAEY, 2022).

O Kettering Bug era utilizado como uma aeronave torpedo, sendo guiado por um conjunto de pré-configurações de voo que o levavam ao alvo. Essa aeronave podia voar por aproximadamente 64 km, a uma velocidade de 88 km/h, carregando até 80 kg de explosivos (FAHLSTROM; GLEASON; SADRAEY, 2022). Na Figura 1 pode-se observar o Kettering Bug.

Figura 1 – O primeiro VANT - O Kettering Bug.



Fonte: Roberto (2013)

Desde essa época, os VANT's passaram por grandes evoluções tecnológicas, impulsionados

ainda mais pelos períodos de guerra do século XX, que levaram ao desenvolvimento de grandes projetos tecnológicos, como o Northrop Grumman RQ-4 Global Hawk, Figura 2. Essa aeronave militar norte americana apresenta capacidade de voos em altas altitudes e alcance global, podendo sobrevoar qualquer parte do mundo partindo de sua base (HOUPIS; SHELDON, 2013). Aliado às suas capacidades de desempenho, essa aeronave ainda possui sistemas embarcados de última geração, permitindo-a realizar operações de espionagem, monitoramento e inteligência com notável eficiência, e, por ser remotamente tripulada, com maior segurança do que aeronaves convencionais.

Figura 2 – Northrop Grumman RQ-4 Global Hawk - Aeronave VANT militar de última geração.



Fonte: Corporation (2022)

Os VANT's são um produto da integração entre as indústrias aeronáutica e de informação e, graças a grande evolução de ambas as áreas nos últimos anos e às diversas aplicações existentes, cada vez mais esse setor vem ganhando seu espaço de independência dentro da indústria e se distanciando das aeronaves tripuladas (FAN et al., 2020). Isso pode ser observado pela diferenciação no design de aeronaves VANT's modernas em relação aos aviões contemporâneos. Enquanto os primeiros VANT's seguiam basicamente os mesmos conceitos das aeronaves da época, como pode ser observado ao se comparar a Figura 1 com a Figura 3, que apresenta o Spad SVIII de 1917 que, assim como o Kettering Bug, era biplano, com motor dianteiro e empenagem com geometria convencional similar. Já na comparação da Figura 2 com a Figura 4, observa-se o Boeing E-3 Sentry, aeronave também utilizada em missões de reconhecimento e monitoramento, como o Global Hawk, onde as semelhanças de design são mínimas.

No caso da comparação do Global Hawk com o E-3, também é interessante notar uma das grandes vantagens das aeronaves VANT's. Ambas são aeronaves de longo alcance utilizadas para missões de monitoramento e reconhecimento, porém, o Global Hawk é consideravelmente menor, e portanto, mais discreto e adequado para seu objetivo. Essa diferença de tamanho ocorre pois, no caso do E-3, além da tripulação de voo toda a equipe responsável pela inteligência da missão também deveria estar a bordo da aeronave devido às limitações na tecnologia de informação da época, enquanto o Global Hawk só precisa carregar os instrumentos de monitoramento enquanto toda a equipe, sejam pilotos ou equipe de inteligência, encontram-se em solo.

Apesar de terem surgido com foco na aplicação militar, tal qual outras tecnologias, os VANT's evoluíram e passaram a ter, cada vez mais, aplicações de uso civil (FAHLSTROM; GLEASON; SADRAEY, 2022).

Figura 3 – Spad SVIII - Aeronave tripulada da 1ªGuerra Mundial, contemporânea ao Kettering Bug.



Fonte: Disponível em Google Imagens.

Figura 4 – Boeing E-3 Sentry - Aeronave militar de monitoramento dos anos 2000.



Fonte: Disponível em Google Imagens.

As missões e aplicações para um VANT são diversas e, por se tratar de uma tecnologia em aprimoramento, a cada dia surgem novas ideias (FAHLSTROM; GLEASON; SADRAEY, 2022). De forma geral, as aplicações, tanto para a área civil, quanto para a militar, recaem sobre atividades de reconhecimento ou monitoramento, sendo estas os maiores campos de pesquisa atual.

Do ponto de vista militar, como já foi exemplificado, as aeronaves VANT's são utilizadas em missões de reconhecimento, espionagem e inteligência em território inimigo além de missões de ataque ar-solo, permitindo que o avião avance pelas linhas de defesa inimiga sem que a tripulação seja exposta, diminuindo assim os riscos de perdas humanas nas batalhas. Também, por não ser necessário espaço para a tripulação, o design dessas aeronaves é mais livre do que o de uma aeronave convencional, permitindo a adoção de tecnologias *stealth* com maior facilidade. Nesse sentido, destacam-se além do já citado Global Hawk, as aeronaves Northrop Grumman X-47A Pegasus e General Atomics MQ-9 Reaper, ambas utilizadas pela Força Aérea dos Estados Unidos (HOUPIS; SHELDON, 2013).

Já no campo civil, os VANT's já são uma realidade amplamente utilizada em aplicações relacionadas à agricultura no Brasil, onde destacam-se empresas já consolidadas como a Xmobots, a Flight Solutions e a Airship, que atuam na área de agricultura de precisão (JORGE; INAMASU, 2014). Além disso, outras empresas, como a recém criada AgroAviation, também desenvolvem novos produtos para a área no país, como o VANT SV-60 apresentado na Figura 5.

Figura 5 – VANT de pulverização agrícola SV-60 - AgroAviation.



Fonte: Disponível em Google Imagens.

Além disso, os VANT's também podem ser utilizados para atividades relacionadas ao mapeamento e fiscalização de áreas urbanas (GRANDE, 2021), fotografias aéreas, controle de pássaros próximos a aeroportos (TECMUNDO.COM.BR, 2018), aplicações meteorológicas, atividades relacionadas a logística e até mesmo cinematografia, como no filme "007 - Skyfall" (ARAÚJO et al., 2015).

2.1.1 Desafios tecnológicos para o futuro dos VANTs

O desenvolvimento pleno da tecnologia de VANT's passa atualmente por 4 áreas de pesquisa: Manufatura; Controle de Voo e Navegação; Energia e Propulsão; e Aumento de carga paga (FAN et al., 2020); onde as características únicas de operação em relação à aviação convencional permitem o surgimento de soluções inovadoras.

1. Tecnologias de Manufatura

Do ponto de vista de tecnologias de manufatura, o fato dos VANT's não possuírem tripulantes embarcados permite diferentes soluções de design, que contemplam as áreas de aerodinâmica, aeroelasticidade, estruturas e materiais aeronáuticos. Além disso, a produção de VANT's por vezes envolve a utilização de materiais compósitos e tecnologias de manufatura aditiva.

Dessa forma, o estudo dessas áreas é fundamental para o surgimento de inovações tecnológicas que permitirão o pleno desenvolvimento e consolidação do mercado.

2. Tecnologias de Controle de Voo e Navegação

Uma vez que os VANT's são pilotados remotamente, a consciência situacional do piloto é afetada e, por vezes, seus reflexos e comandos podem sofrer com atrasos. Dessa forma, tecnologias

que auxiliam no comando de voo da aeronave de forma automática ou semi-autônoma, são fundamentais para o aumento da segurança de voo.

Nesse sentido, o desenvolvimento de sistemas que possibilitem a rápida aquisição de dados e integração entre os diferentes veículos dentro de um ambiente de voo, juntamente com sistemas de controle, são de suma importância para os VANT's.

3. Tecnologias de Energia e Propulsão

Outra área de pesquisa que demanda atenção é o sistema propulsivo dos VANT's. Nesse campo, as tecnologias com combustível alternativo, como motores elétricos, estão sendo amplamente testadas nessas aeronaves, a fim de baratear cada vez mais os produtos, principalmente para o uso civil.

Além disso, soluções de alta densidade energética também são importantes, principalmente no caso de VANT's pequenos, uma vez que o peso vazio dessas aeronaves precisa ser reduzido, e o aumento do alcance amplia o leque de aplicações possíveis.

4. Tecnologias para o aumento de Carga Paga

Independentemente da aplicação para a qual o VANT é empregado, assim como na aviação convencional, a capacidade de transportar grandes quantidades de carga paga é sempre fundamental para o sucesso comercial de uma aeronave.

Pensando no futuro de entrega de produtos porta a porta, por exemplo, a evolução da capacidade de carga paga juntamente com o aumento do alcance são as chaves para o desenvolvimento desta tecnologia.

2.2 CONCEITOS PRELIMINARES PARA O MODELO DINÂMICO NÃO LINEAR DE AERONAVES

2.2.1 Sistemas de Coordenadas

Seja qual for a metodologia utilizada para o desenvolvimento de um modelo dinâmico para aeronaves, o primeiro passo consiste em estabelecer os sistemas de eixos referenciais que servirão de base para o desenvolvimento das equações.

A definição de um sistema de eixos coordenados de referência é bastante ampla, existindo diversos tipos de eixos tradicionalmente definidos e a escolha de qual sistema será adotado é pautada principalmente por conveniência e preferência pessoal dependendo de qual será a aplicação do modelo implementado (ETKIN, 2012).

Etkin (2012) define um total de sete eixos de referências úteis para o desenvolvimento de um modelo dinâmico para aeronaves, sendo eles: Inercial, Fixo na Terra, Vertical Fixo no Veículo, Fixo na Atmosfera, Eixo dos Ventos, Fixo no Corpo e Eixo de Estabilidade. De forma análoga, porém simplificada, Cook (2012) concentra estes sistemas referenciais em dois grandes grupos, os referenciais Fixos na Terra e os Fixos no Corpo, sendo a classificação baseada na posição da origem do sistema em relação à aeronave. Nessa classificação, os sistemas Inercial, Fixo na Terra e Fixo na Atmosfera,

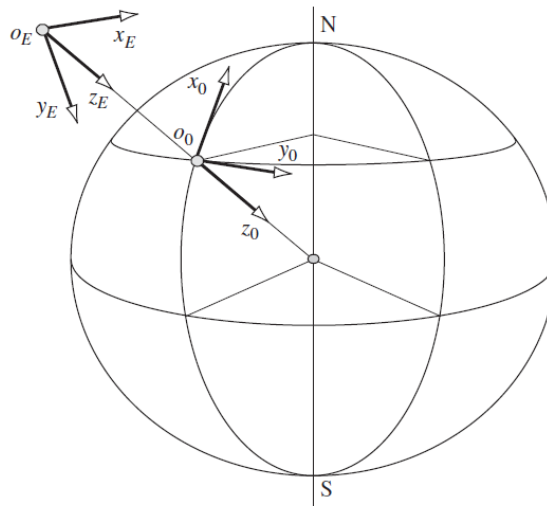
definidos por ETKIN, seriam classificados simplesmente como Fixos na Terra, enquanto os demais sistemas seriam enquadrados na definição de sistemas Fixos no Corpo feita por COOK.

2.2.1.1 Sistemas de Coordenadas Fixos na Terra

Esse sistema de eixos é constituído por um conjunto de 3 eixos ortogonais baseados na regra da mão direita, cuja origem encontra-se em algum ponto na superfície da Terra (o_0, x_0, y_0, z_0) ou em um ponto qualquer fixo na atmosfera (o_E, x_E, y_E, z_E), como observa-se na Figura 6 (COOK, 2012).

Para o caso do sistema com origem na superfície, assumindo-se o ponto o_0 como sendo a origem, tem-se a direção o_0-x_0 apontando para o Norte, o_0-y_0 apontando para o Leste e o_0-z_0 apontando para o centro da Terra, no mesmo sentido do vetor gravidade, conforme ilustrado na Figura 6. Esse tipo de orientações de eixos é conhecido como *NED* (*North - East - Down*).

Figura 6 – Representação do sistema de eixos com origem na Terra.



Fonte: Cook (2012)

O sistema de coordenadas definido tem como característica o fato do plano horizontal, $o_0-x_0-y_0$ ser tangente ao ponto da superfície onde encontra-se a origem. Dada a forma geométrica da Terra, um sistema de coordenadas esféricas é mais indicado quando se trata de aplicações de navegação a nível global (COOK, 2012). Para aplicações locais, é válida a hipótese de simplificação de *Terra Plana*, a partir da qual a direção z fica "presa" ao vetor gravidade, tornando mais fácil a completa descrição das coordenadas de voo dentro dos sistemas de coordenadas.

Além do sistema de coordenadas o_0, x_0, y_0, z_0 , na Figura 6 também é apresentado o sistema o_E, x_E, y_E, z_E , onde a direção o_E-z_E é coincidente com a direção o_0-z_0 , e o plano $o_E-x_E-y_E$ é paralelo ao plano $o_0-x_0-y_0$ na superfície da Terra. A principal diferença desse sistema de coordenadas, relaciona-se à direção do eixo o_E-x_E , o qual não aponta para o norte como no sistema original, mas sim para uma direção arbitrária escolhida em função da trajetória de voo (COOK, 2012).

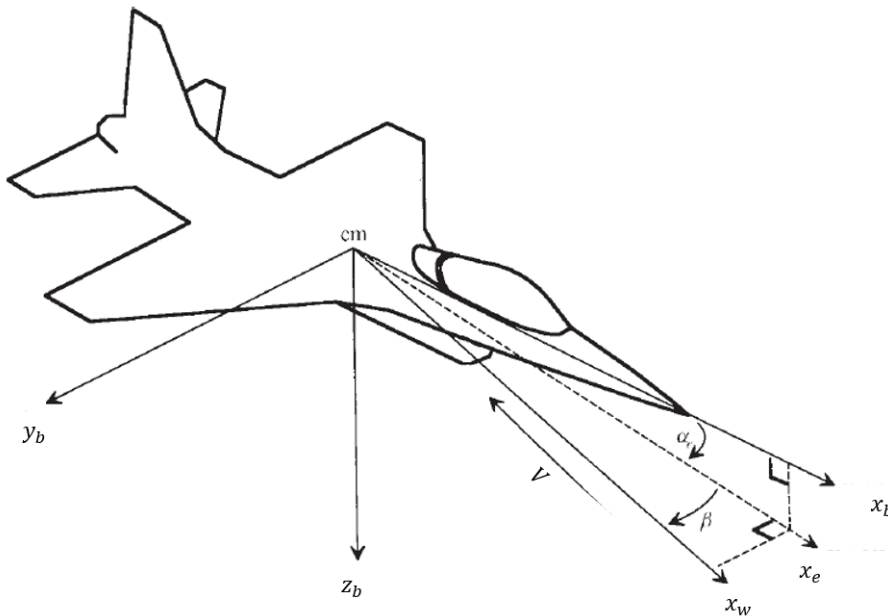
2.2.1.2 Eixos de Coordenadas Fixos na Aeronave

Além dos sistemas fixos em pontos externos à aeronave, para algumas aplicações é conveniente a definição de sistemas de referências fixos no corpo.

Como ponto comum à maioria dos sistemas fixos na aeronave, a origem o , em geral, é definida de forma coincidente ao centro de gravidade ou centro da massa, enquanto as direções dos eixos coordenados variam para cada sistema.

No caso geral de eixos fixos na aeronave, o eixo ox_b é definido paralelo ao plano de simetria da fuselagem da aeronave, enquanto a direção do eixo oy_b é paralela à envergadura das asas e ao eixo oz_b definido de forma ortogonal aos dois primeiros. Os sentidos positivos são definidos com base na regra da mão direita, sendo o eixo x_b positivo no sentido do nariz da aeronave, y_b positivo na direção da asa direita na vista do piloto, e o eixo z_b positivo no sentido do vetor gravidade, conforme mostrado na Figura 7 (COOK, 2012; ETKIN, 2012). Este tipo de orientação dos eixos também é conhecido como *frd* (*Forward - Right - Down*).

Figura 7 – Representação do sistema de eixos com origem na aeronave.



fonte: Adaptado de Stevens, Lewis e Johnson (2015)

Além desse sistema de eixos, também é conveniente a definição de sistemas de eixos paralelos ao vetor velocidade da aeronave, chamados de Eixo de Estabilidade e Eixo dos Ventos. O sistema de estabilidade, representado por $ox_e y_e z_e$ na Figura 7, possui o eixo x rotacionado em um ângulo α_e em torno do eixo y , chamado de ângulo de incidência estacionário da aeronave, de modo que o mesmo coincida com o plano do vetor velocidade da aeronave. Este sistema é bastante útil quando se trabalha com forças aerodinâmicas, uma vez que as mesmas são obtidas em função do ângulo α_e (COOK, 2012; STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). Já o sistema $ox_w y_w z_w$ acrescenta ainda uma rotação em torno do eixo z em um ângulo β , também chamado de ângulo de derrapagem ou *sideslip*.

Utilizando esses dois ângulos, ângulo de ataque α e ângulo de derrapagem β , é possível definir todas as forças e momentos aerodinâmicos atuantes na aeronave, facilitando assim sua modelagem e o estudo de sua dinâmica (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

2.2.2 Ângulos de Euler

Tão importante quanto a definição dos sistemas de referência é a definição dos ângulos de Euler para transformação de coordenadas entre esses sistemas, dada a grande variedade de eixos que podem ser escolhidos e as particularidades e vantagens na escolha de cada um deles para determinada aplicação (ETKIN, 2012; NAPOLITANO, 2012).

Os ângulos de Euler são um conjunto de três ângulos, ϕ definido como o ângulo de rolagem da aeronave ao redor do eixo x , θ o ângulo de arfagem ao redor do eixo y e, por fim, ψ ângulo de guinada, proveniente da rotação ao redor do eixo z (COOK, 2012), de modo que a orientação de cada sistema de eixos referente a outro qualquer pode ser obtida através de 3 rotações consecutivas ψ , θ e ϕ (ETKIN, 2012).

O sentido positivo de cada um dos ângulos é definido pela regra da mão direita. Dessa forma:

- ϕ : Sentido positivo para rolamento com tendência da asa esquerda subir e a direita descer, do ponto de vista do piloto;
- θ : Sentido positivo para arfagem com tendência de levantar o nariz da aeronave;
- ψ : Sentido positivo para guinada com tendência de direcionar o nariz da aeronave para a asa direita.

Executando as três rotações consecutivas na ordem definida obtém-se a matriz de rotação mostrada em 1, que fornece a transformação de um sistema de orientação *NED* para um sistema *frd* (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015):

$$C_{frd,NED} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Também é interessante obter as matrizes de rotação do sistema de eixos dos ventos para o sistema fixo no corpo, $C_{B,W}$ (equação 2), decorrente do conjunto de rotações $(-\beta, \alpha, 0)$, respectivamente, e a rotação contrária, do eixo fixo no corpo para o eixo dos ventos, $C_{W,B}$ (equação 3), proveniente das rotações $(\beta, -\alpha, 0)$, respectivamente (ETKIN, 2012):

$$C_{B,W} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$C_{W,B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (3)$$

os ângulos de Euler, conforme apresentados, possuem as seguintes restrições de intervalo:

$$-\pi < \phi \leq \pi \quad (4)$$

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$-\pi < \psi \leq \pi$$

Essas modulações angulares podem ser obtidas utilizando-se as funções arco tangente de quarto quadrante (*numpy.arctan2*), no caso de ϕ e ψ , e utilizando a função arco seno (*numpy.arcsin*) no caso de θ (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE EDO'S

Existem diversos métodos numéricos para solução de EDO's em todas as grandes linguagens de programação. No Python, a principal biblioteca com métodos numéricos é o SciPy e os dois principais algoritmos de integração são o *solve_ivp* e o *odeint* (SCIPY, 2023a).

2.3.1 Método Runge-Kutta

O primeiro método numérico utilizado é o Runge-Kutta disponível por padrão na função *solve_ivp*. Esse método foi desenvolvido em conjunto por Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta e, em sua forma clássica, consiste em um método de 4ª ordem com erro de truncamento proporcional a h^5 (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2021) e é utilizado para resolver problemas de valor inicial do tipo

$$y' = f(t, y) \quad (5a)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (5b)$$

A fórmula do método de Runge-Kutta envolve a média ponderada dos termos de $f(t, y)$ que compõem o intervalo de $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, seguindo como base a seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right) \quad (6)$$

onde h é o tamanho do passo desejado e os termos k são dados por:

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right) \\ k_{n3} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right) \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned} \quad (7)$$

O método acima é conhecido como método de Runge-Kutta clássico, ou método de Runge-Kutta de 4ª Ordem e 4 estágios (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2021), o qual está disponível na função

solve_ivp, porém não por padrão.

Por padrão, a função *solve_ivp* utiliza o método Runge-Kutta de 4ª Ordem e 5 estágios, o qual é dado por (ROMA; NÓS, 2012):

$$y_{n+1} = \frac{25}{216}k_{n_1} + \frac{1408}{2565}k_{n_3} + \frac{2197}{4104}k_{n_4} - \frac{1}{5}k_{n_5}, \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{n_1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n_2} &= f\left(t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}hk_{n_1}\right) \\ k_{n_3} &= f\left(t_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}hk_{n_1} + \frac{9}{32}hk_{n_2}\right) \\ k_{n_4} &= f\left(t_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}hk_{n_1} - \frac{7200}{2197}hk_{n_2} + \frac{7296}{2197}hk_{n_3}\right) \\ k_{n_5} &= f\left(t_n + h, y_n + \frac{439}{216}hk_{n_1} - 8hk_{n_2} + \frac{3680}{513}hk_{n_3} - \frac{845}{4104}hk_{n_4}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

A documentação completa da função *solve_ivp* pode ser acessada no site <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html> (SCIPY, 2023c).

2.3.2 Método LSODA

O método LSODA (*Livermore Solver for ODEs Automatic Selection*) é o algoritmo de integração numérica por trás da função *odeint* da biblioteca SciPy. Esse algoritmo foi desenvolvido inicialmente na linguagem FORTRAN por L. R. Petzold (HINDMARSH, 1992).

Esse algoritmo funciona baseado em dois métodos de integração de passo variável, o método de Adams e o método de Fórmula Inversa de Diferenciação (*Backward differentiation formula* BDF) (HINDMARSH, 1992).

O algoritmo inicia a solução pelo método de Adams e monitora os dados automaticamente a fim de escolher o melhor método de solução, podendo ou não alterar para o método BDF (HINDMARSH; PETZOLD, 2005).

O método de Adams é baseado na solução da equação

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t) dt. \quad (10)$$

Isso é feito através de uma aproximação da derivada $\phi'(t)$ utilizando um polinômio de grau k , o que define a ordem $k + 1$ do método de Adams (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2021). Para um polinômio de grau 1, segunda ordem, tem-se:

$$P_1(t) = At + B. \quad (11)$$

Deseja-se determinar os coeficientes A e B do polinômio e , para isso, utiliza-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} At_n + B &= \phi'(t_n) \\ At_{n-1} + B &= \phi'(t_{n-1}), \end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por:

$$A = \frac{\phi'(t_n) - \phi'(t_{n-1})}{h} \quad B = \frac{\phi'(t_{n-1})t_n - \phi'(t_n)t_{n-1}}{h}. \quad (13)$$

Substituindo $\phi'(t)$ por $P_1(t)$, obtém-se:

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \frac{A}{2}(t_{n+1}^2 - t_n^2) + B(t_{n+1} - t_n), \quad (14)$$

ou ainda, adotando $\phi(t_{n+1}) = y_{n+1}$, $\phi(t_n) = y_n$, $\phi'(t_n) = f(t_n, y_n)$ e $\phi'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}hf_n - \frac{1}{2}hf_{n-1}. \quad (15)$$

Já o método de BDF também usa polinômios de grau k , sendo a fórmula mais simples do método resultante da adoção de um polinômio de grau 1, $P_1(t) = At + B$, dada por (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2021)

$$At_n + B = y_n \quad (16a)$$

$$At_{n+1} + B = y_{n+1}. \quad (16b)$$

Escolhendo os coeficientes A e B de forma que

$$A = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (17)$$

Subtraindo as equações do sistema de equações 16, obtém-se uma segunda expressão para A

$$A = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (18)$$

Combinando as equações 17 e 18,

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (19)$$

A equação acima consiste no método BDF de 1ª ordem. Ordens superiores podem ser obtidas a partir de métodos análogos ao demonstrado (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2021).

A documentação completa da função *odeint* pode ser acessada no site <<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>> (SCIPY, 2023b).

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 HIPÓTESES ADOTADAS NO MODELO NÃO LINEAR

Para o desenvolvimento do modelo adotado neste trabalho foram utilizadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Hipótese de "Terra Plana" (*Flat Earth*): Esta hipótese, como o próprio nome sugere, desconsidera a curvatura de Terra no desenvolvimento das equações do modelo dinâmico, dessa forma, o vetor gravidade fica "preso" ao mesmo eixo vertical do sistema de referência tangente a superfície (COOK, 2012). De acordo com Roskam (2018) "Experiências indicam que essa hipótese é aceitável até mesmo para aeronaves supersônicas mas não para hipersônicas", portanto, para o atual estado da arte e aplicação da maioria das aeronaves VANT's, essa hipótese é válida.

Além do efeito no vetor gravidade, outra consequência dessa hipótese, permite que se adote a Terra como um referencial inercial onde as leis de movimento de Newton são válidas, uma vez que a velocidade angular da Terra pode ser desconsiderada nesse modelo (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015; ROSKAM, 2018).

As principais desvantagens dessa hipótese estão relacionadas à perda de precisão quando usada para se determinar a posição da aeronave em relação a Terra, porém, para distâncias curtas (voos regionais) e para a altitude, este modelo permite aproximações razoáveis (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

- Aeronave de Massa Constante ($\dot{m} = 0$): A adoção dessa hipótese desconsidera a variação de massa de uma aeronave que ocorreria, entre outros motivos, em função do consumo de combustível do sistema propulsivo. Para aeronaves comerciais de longo alcance, como, por exemplo, o Boeing 777-200, a massa de combustível corresponde a aproximadamente 38% do peso máximo de decolagem da aeronave (BOEING, 2023), logo, no percurso completo a variação de massa é considerável, e essa hipótese não seria adequada. Ainda assim, se a análise for concentrada em apenas um percurso curto de voo a hipótese é válida.

Já para aeronaves menores, como a aeronave leve esportiva Seamax M-22, em condição de peso máximo de decolagem, o combustível representa aproximadamente 12% da massa total (SEAMAX, 2023), representando um erro menor na adoção da hipótese levando em consideração o percurso completo de voo. O mesmo tende a ocorrer para VANT's, tornando essa hipótese adequada para os propósitos deste trabalho.

Vale destacar ainda que uma das principais frentes de desenvolvimento tecnológicos para VANT's encontra-se no campo da propulsão elétrica, onde essa hipótese torna-se ainda mais verídica, uma vez que a variação de combustível para células de bateria é desprezível quando comparado a combustíveis fósseis.

- Corpo rígido: para esse modelo, assume-se que não ocorrem deformações estruturais na aeronave, tais como deformações nas asas decorrentes de cargas aerodinâmicas, de modo que a posição relativa entre cada parte da aeronave é sempre constante. Dessa forma, o modelo não leva em conta fenômenos aeroelásticos.

3.2 MODELAGEM DAS EQUAÇÕES

3.2.1 Equações Provenientes das Forças

Para o desenvolvimento das equações de força da aeronave é conveniente a adoção do sistema de eixos dos ventos, uma vez que as forças aerodinâmicas são calculadas com base no vento relativo (ZHANG et al., 2013).

As notações utilizadas nessa seção têm como referência o livro de Stevens, Lewis e Johnson (2015), e serão explicadas conforme a necessidade no decorrer do texto. Para mais detalhes consulte o livro *Aircraft Control and Simulation* (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015, p.3 - 4).

Partindo da segunda Lei de Newton para conservação de momento linear, pode-se obter as equações de força no referencial do eixo dos ventos da seguinte forma: Primeiramente, imagine que o eixo dos ventos é obtido a partir de duas rotações, sendo a primeira partindo do eixo fixo no corpo da aeronave sofrendo uma variação $-\alpha$ em torno do eixo y , onde o sinal negativo representa o sentido contrário ao da regra da mão direita, que gera uma velocidade angular $-\dot{\alpha}$ na direção $\mathbf{j}$. A segunda rotação é proveniente de uma variação β em torno do eixo z que por sua vez gera uma velocidade angular $\dot{\beta}$ na direção $\mathbf{k}$, conforme ilustrado na Figura 7.

De acordo com Stevens, Lewis e Johnson (2015), a equação da derivada da velocidade sob a hipótese de Terra plana, em sua forma matricial, desconsiderando o movimento relativo do vento, é dada por

$${}^b\dot{\mathbf{v}}_{rel} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_{A,T} + \mathbf{g} - \omega_{b/e} \times \mathbf{v}_{rel}, \quad (1)$$

onde,

${}^b\dot{\mathbf{v}}_{rel}$, $\mathbf{v}$ são o vetor derivada da velocidade relativa e o vetor velocidade relativa, respectivamente, com o índice superior b à esquerda indicando que a derivada é calculada com relação ao sistema de coordenadas fixo no corpo, composto por ${}^b\dot{\mathbf{v}}_{rel} = [\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}]^T$;

$\mathbf{F}_{A,T}$ representa o vetor de forças aerodinâmicas e propulsivas, indicadas respectivamente pelos subíndices A e T , calculadas com relação ao sistema de referência fixo no corpo;

$\mathbf{g}$ é o vetor de componentes gravitacionais no plano tangente à terra, ou seja, com apenas uma componente em z ;

$\omega_{b/e}$ é o vetor de componentes de velocidade angular, com o subíndice b/e indicando a referência de rotação entre os eixos fixos no corpo e de estabilidade;

Deseja-se obter o modelo com base no sistema referencial dos ventos, para isso, deve-se fazer uma projeção partindo-se do sistema fixo no corpo para o sistema desejado. Começando pelas derivadas, tem-se

$${}^w\dot{\mathbf{v}}_{rel} + \omega_{w/b} \times \mathbf{v}_{rel} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{A,T} + \mathbf{g} - \omega_{b/e} \times \mathbf{v}_{rel}. \quad (2)$$

A operação no lado esquerdo da equação 2 refere-se ao procedimento para se realizar a rotação de um vetor derivada. Maiores detalhes podem ser encontrados em Stevens, Lewis e Johnson (2015, p. 17) e Etkin (2012, p. 118).

Convertendo os demais vetores para o eixo dos ventos, obtém-se a equação matricial 3:

$${}^w\dot{\mathbf{v}}_{rel}^w + \tilde{\omega}_{w/b}^w \mathbf{v}_{rel}^w = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{A,T}^w + C_{w/b} C_{b,n} \mathbf{g}^n - \tilde{\omega}_{b/e}^w \mathbf{v}_{rel}^w \quad (3)$$

onde,

${}^w\mathbf{v}_{rel}^w$ novamente é o vetor velocidade relativa, dessa vez com o índice superior w à esquerda indicando que a derivada é calculada com relação ao sistema de coordenadas do vento, e também o mesmo índice à direita indicando que o vetor está descrito neste sistema de coordenadas, sendo $\mathbf{v}_{rel}^w$ dado pela equação 9 e ${}^w\dot{\mathbf{v}}_{rel}^w = [\dot{V}_T, 0, 0]^T$;

$\mathbf{F}_{A,T}^w$ representa o vetor de forças aerodinâmicas e propulsivas, dado no sistema de coordenadas do vento;

$C_{w/b}, C_{b,n}$ são as matrizes de rotação dos ângulos de Euler, sendo o subíndice b, n para a primeira rotação do sistema inercial fixo na Terra para o sistema fixo no corpo e o subíndice w, b referente à rotação do sistema fixo no corpo para o eixo dos ventos;

$\mathbf{g}^n$ representa o vetor de componentes gravitacionais no sistema de coordenadas inercial fixo na terra;

$\tilde{\omega} \mathbf{v}_{rel}$ representa o produto vetorial entre a matriz ω (3×3), cuja forma geral é apresentada na equação 8, e o vetor coluna $\mathbf{v}_{rel}$ (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015, p. 8);

sendo

$$\omega_{s/b}^s = \omega_{s/b}^b = [0 \quad -\dot{\alpha} \quad 0]^T \quad (4)$$

$$\omega_{w/s}^w = \omega_{w/s}^s = [0 \quad 0 \quad -\dot{\beta}]^T, \quad (5)$$

tem-se:

$$\omega_{w/b} = \omega_{w/s} + \omega_{s/b}. \quad (6)$$

Com isso, fazendo a rotação de $\omega_{s/b}$ para o eixo dos ventos utilizando o ângulo de Euler β , obtém-se

$$\omega_{w/s}^w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

Para finalizar o lado esquerdo da equação, tem-se

$$\tilde{\omega}_{w/s}^w = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & -\dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} & 0 & \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta & -\dot{\alpha} \sin \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_{rel}^w = \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Realizando o produto matricial entre as equações 8 e 9 o lado esquerdo da equação 3 torna-se (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015)

$${}^w\dot{\mathbf{v}}_{rel}^w + \tilde{\omega}_{w/b}^w \mathbf{v}_{rel}^w = \begin{bmatrix} \dot{V}_T \\ \dot{\beta} V_T \\ \dot{\alpha} V_T \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Assumindo que as forças propulsivas são geradas paralelamente ao eixo $x_b z_b$, mas com um ângulo α_T em relação ao eixo $x_b y_b$ (α_T positivo no quando gera uma rotação no sentido negativo da direção z_b), as forças aerodinâmicas e propulsivas são dadas por (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015):

$$\mathbf{F}_{A,T}^W = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_T \cos (\alpha + \alpha_T) \\ 0 \\ F_T \sin (\alpha + \alpha_T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (11)$$

onde F_T representa o módulo da força propulsiva e X, Y e Z são as forças aerodinâmicas geradas ao longo dos eixos x_w, y_w e z_w , respectivamente.

Já o vetor gravidade, após ser rotacionado para o eixo dos ventos utilizando as equações 3 e 1, apresenta a seguinte composição

$$\mathbf{g}^w = C_{W,B} C_{NED,frd} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{g}^w = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(-\cos \alpha \cos \beta \sin \theta + \sin \beta \sin \phi \sin \theta + \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \cos \theta) \\ g(\cos \alpha \sin \beta \sin \theta + \cos \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \cos \theta) \\ g(\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \phi \cos \theta) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Por fim, tem-se que a matriz $\tilde{\omega}_{b/e}^w$ com as componentes de aceleração angular do corpo em relação a terra, calculados no eixo dos ventos é dada por

$$\tilde{\omega}_{b/e}^w = \begin{bmatrix} 0 & -R_w & Q_w \\ R_w & 0 & -P_w \\ -Q_w & P_w & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Dessa forma,

$$\tilde{\omega}_{b/e}^w \mathbf{v}_{rel}^w = \begin{bmatrix} 0 \\ V_T R_w \\ -V_T Q_w \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Os termos R_w e Q_w são os valores das velocidades angulares calculadas no eixo dos ventos, porém, no desenvolvimento deste trabalho optou-se por utilizar apenas as equações de força no eixo dos ventos, sendo mais conveniente as velocidades angulares e demais variáveis de estado serem calculadas no eixo fixo no corpo, seguindo o trabalho realizado por Zhang et al. (2013). Com isso, realizou-se uma rotação do eixo dos ventos para o eixo fixo no corpo passando antes pelo eixo de estabilidade, conforme os passos abaixo:

$$\begin{bmatrix} P_w \\ Q_w \\ R_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_s \\ Q_s \\ R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_s \cos \beta + Q_s \sin \beta \\ -P_s \sin \beta + Q_s \cos \beta \\ R_s \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} P_s \\ Q_s \\ R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos -\alpha & 0 & -\sin -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin -\alpha & 0 & \cos -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cos \alpha + r \sin \alpha \\ q \\ -p \sin \alpha + r \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Com isso,

$$\begin{bmatrix} P_w \\ Q_w \\ R_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta (p \cos \alpha + r \sin \alpha) + q \sin \beta \\ -\sin \beta (p \cos \alpha + r \sin \alpha) + q \cos \beta \\ -p \sin \alpha + r \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Dessa forma, combinando cada termo desenvolvido separadamente, pode-se obter as três equações de força para o modelo não linear da aeronave, considerando o eixo dos ventos como referencial e as componentes de aceleração angular referentes ao eixo fixo no corpo, conforme apresentado nas equações 19 abaixo (ZHANG et al., 2013; STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015):

$$\dot{V}_T = \frac{1}{m} (F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \cos \beta + X + mg_1) \quad (19a)$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{mV_T} (-F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \sin \beta + Y + mg_2) + p \sin \alpha - r \cos \alpha \quad (19b)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{mV_T \cos \beta} (-F_T \sin(\alpha + \alpha_T) + Z + mg_3) + q - (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \tan \beta. \quad (19c)$$

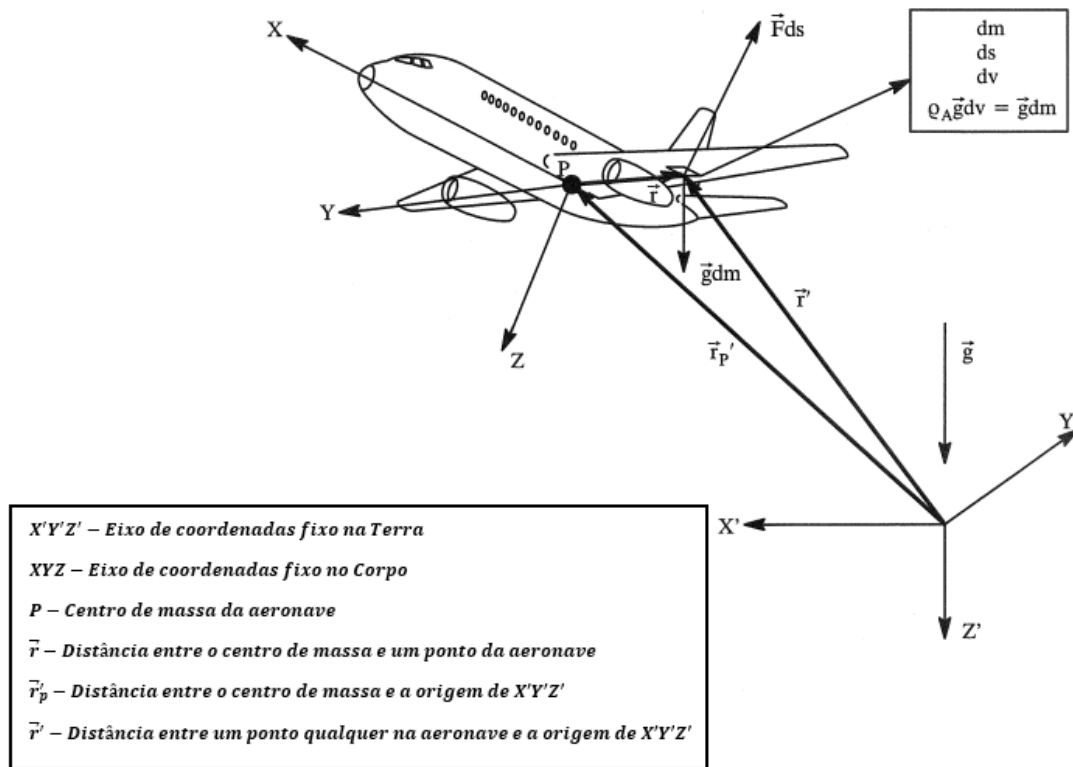
3.2.2 Equações Provenientes dos Momento

Para o desenvolvimento das equações de momento, adotando dessa vez o sistema de eixos fixo no corpo (ZHANG et al., 2013), partimos do princípio de conservação de momento angular, dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_v \vec{r}' \times \rho_A \frac{d\vec{r}'}{dt} dv = \int_v \vec{r}' \times \rho_A \vec{g} dv + \int_S \vec{r}' \times \vec{F} dS, \quad (20)$$

onde, $\vec{r}' = \vec{r}'_p + \vec{r}$ é o braço de momento entre um ponto qualquer na aeronave e o referencial fixo na Terra, com $\vec{r}'_p$ sendo a distância do centro de massa da aeronave a um ponto na Terra e $\vec{r}$ a distância entre o centro de massa e um ponto qualquer na aeronave, como ilustrado na Figura 8. As integrais $\int_v$ e $\int_S$ representam integrais de volume e de superfície da aeronave completa, respectivamente. Dessa forma, o lado esquerdo da equação representa a taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular e o direito os momentos aplicados na aeronave, sendo a primeira integral referente ao peso da aeronave e a segunda às forças aerodinâmicas (ROSKAM, 2018).

Figura 8 – Representação esquemática dos vetores de posição relativa entre o eixo fixo no corpo e fixo na Terra.



Fonte: Adaptado de Roskam (2018)

Considerando que a massa total da aeronave é dada por

$$m = \int_v \rho_A dv, \quad (21)$$

com base na hipótese de massa constante, tem-se $\frac{dm}{dt} = 0$. Além disso, devido a hipótese de aeronave rígida, a posição relativa entre os componentes de massa da aeronave também são constantes e, uma

vez escolhido o sistema de eixos fixo no corpo que, por padrão, tem sua origem no centro de massa da aeronave, tem-se

$$\int_v \vec{r} \rho_A dv = 0, \quad (22)$$

o que leva à seguinte relação

$$\vec{r}'_p = \frac{1}{m} \int_v \rho_A \vec{r}' dv. \quad (23)$$

Com isso, o lado esquerdo da equação 20, pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \int_v \rho_A (\vec{r}'_p + \vec{r}) dv = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} m \vec{r}'_p = m \frac{d\vec{V}_p}{dt}, \quad (24)$$

onde, $\vec{V}_p = \frac{d\vec{r}'_p}{dt}$ é a velocidade do centro de massa da aeronave. Já no lado direito da equação 20 tem-se

$$\int_v \rho_A \vec{g} dv + \int_S \vec{F} dS = m \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T. \quad (25)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_v \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \rho_A dv = \int_s \vec{r} \times \vec{F} dS = \vec{M}_A + \vec{M}_T, \quad (26)$$

onde o termo $\vec{F}$ representa uma medida de força por unidade de superfície e os termos $F_{A,T}$, $M_{A,T}$ são referentes às forças e momentos totais aerodinâmicos e propulsivos atuando na aeronave, respectivamente.

A equação 26 apresenta uma integral de volume com termos dependentes do tempo, o que torna sua resolução complicada. A fim de eliminar tal dependência, será realizada uma mudança de coordenadas, passando as equações do eixo fixo na Terra para o eixo fixo na aeronave. Para realizar essa mudança, deve-se aplicar a relação de transformação 27, a seguir:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A}, \quad (27)$$

mesmo tipo de operação anteriormente apresentada na equação 2, afim de se manterem válidas as Leis de Newton, uma vez que o sistema fixo no corpo não é um referencial inercial (ROSKAM, 2018).

Na equação 27, $\vec{A}$ representa um vetor qualquer a ser rotacionado e $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular da aeronave em relação a Terra.

Aplicando a relação de rotação apresentada na Equação 27 ao primeiro termo do lado esquerdo da equação 26, assumindo que todos os elementos de massa da aeronave permanecem unidos e que não há motores rotativos na aeronave, pode-se obter a equação 28 a seguir:

$$\int_v \vec{r} \times \left\{ \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right\} \rho_A dv = \vec{M}_A + \vec{M}_T. \quad (28)$$

Uma vez que o termo $\vec{\omega}$ é constante em relação ao sistema de eixos fixo na aeronave, ele pode ser retirado da integral de volume, tornando-a independente do tempo, o que era o objetivo da transformação (ROSKAM, 2018).

Resolvendo o produto vetorial do lado esquerdo da equação 28, obtém-se

$$\int_v \left[\vec{\omega} (\vec{r} \cdot \vec{r} - \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega} + \vec{r} \times \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}))) \right] \rho_A dv = \vec{M}_A + \vec{M}_T. \quad (29)$$

A partir da equação 29, considerando

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (30a)$$

$$\vec{\omega} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k} \quad (30b)$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{P}\hat{i} + \dot{Q}\hat{j} + \dot{R}\hat{k} \quad (30c)$$

e utilizando as considerações das equações 30, pode-se expandir os termos da equação 29, separando as parcelas da integral do lado esquerdo da equação, de forma a se obter

$$\int_v \vec{\omega} (\vec{r} \cdot \vec{r}) \rho_A dv = (\dot{P}\hat{i} + \dot{Q}\hat{j} + \dot{R}\hat{k}) \int_v (x^2 + y^2 + z^2) \rho_A dv \quad (31a)$$

$$- \int_v \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \rho_A dv = - \int_v (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(x\dot{P} + y\dot{Q} + z\dot{R}) \rho_A dv \quad (31b)$$

$$\int_v \vec{r} \times \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \rho_A dv = \int_v \left\{ (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k})(xP + yQ + zR) \right\} \rho_A dv. \quad (31c)$$

Ao realizar a junção das equações 31, surgem integrais correspondentes aos elementos do tensor de inércia, conforme mostrado a seguir

$$\int_v (y^2 + z^2) \rho_A dv = I_x \quad \int_v (xy) \rho_A dv = I_{xy} \quad \int_v (xz) \rho_A dv = I_{xz} \quad (32a)$$

$$\int_v (x^2 + z^2) \rho_A dv = I_y \quad \int_v (yx) \rho_A dv = I_{yx} = I_{xy} \quad \int_v (yz) \rho_A dv = I_{yz} = I_{zy} \quad (32b)$$

$$\int_v (x^2 + y^2) \rho_A dv = I_z \quad \int_v (zx) \rho_A dv = I_{zx} = I_{xz} \quad \int_v (zy) \rho_A dv = I_{zy} = I_{yz} \quad (32c)$$

Uma vez que a maioria das aeronaves possui simetria em relação ao plano XZ , os termos de inércia cruzados são $I_{xy} = I_{yx} = 0$.

Por fim, sendo os vetores das componentes de momento aerodinâmico e propulsivo, $\vec{M}_A$ e $\vec{M}_T$, dados por

$$\vec{M}_A = L_A \hat{i} + M_A \hat{j} + N_A \hat{k} \quad (33)$$

$$\vec{M}_T = L_T \hat{i} + M_T \hat{j} + N_T \hat{k}. \quad (34)$$

Utilizando as definições de momento de inércia das equações 32 juntamente com as equações 31, obtém-se as equações de conservação de momento da aeronave na forma escalar, apresentadas na equação 35 (ROSKAM, 2018):

$$I_x \dot{P} - I_{xz} \dot{R} - I_{xz} PQ + (I_z - I_y) RQ = L_A + L_T \quad (35a)$$

$$I_y \dot{Q} - (I_x - I_z) PR + I_x z (P^2 + R^2) = M_A + M_T \quad (35b)$$

$$I_z \dot{R} - I_{xz} \dot{P} + (I_y - I_x) PQ + I_{xz} QR = N_A + N_T. \quad (35c)$$

A fim de facilitar a modelagem e implementação computacional, as equações de momento mostradas nas equações 35, foram reescritas seguindo o procedimento exemplificado para a equação 35a, e reproduzido para as demais equações, conforme apresentado a seguir (ZHANG et al., 2013; STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

Utilizando a equação 35c, isolamos o termo $\dot{R}$, a fim de substituí-lo na equação 35a:

$$\dot{R} = \frac{1}{I_z} (N + I_{xz} \dot{P} - (I_y - I_x) PQ - I_{xz} QR) \quad (36)$$

$$I_x \dot{P} - I_{xz} \left(\frac{1}{I_z} (N + I_{xz} \dot{P} - (I_y - I_x) PQ - I_{xz} QR) \right) - I_{xz} PQ + (I_z - I_y) RQ = L, \quad (37)$$

onde, $L = L_A + L_T$, $N = N_A + N_T$ e $M = M_A + M_T$. Abrindo os termos da equação, afim de se isolar o termo $\dot{P}$, obtém-se

$$\left[\frac{I_x I_z - I_{xz}^2}{I_z} \right] \dot{P} = - \left[\frac{I_{xz} I_y}{I_z} - \frac{I_{xz} I_x}{I_z} - I_{xz} \right] PQ - \left[\frac{I_{xz}^2}{I_z} + I_z - I_y \right] RQ + L + \frac{I_{xz}}{I_z} N. \quad (38)$$

Isolando $\dot{P}$ e colocando Q em evidência na equação 38, tem-se:

$$\dot{P} = \frac{1}{I_x I_z - I_{xz}^2} \{ [(I_x - I_y + I_z) I_{xz}] P + [(I_y - I_z) I_z - I_{xz}] R \} Q + \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} L + \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} N. \quad (39)$$

Definindo os seguintes termos auxiliares mostrados em 40, e substituindo-os na equação 39,

$$\Gamma = I_x I_z - I_{xz}^2 \quad (40a)$$

$$c_1 = \frac{(I_y - I_z)I_z - I_{xz}}{\Gamma} \quad c_2 = \frac{(I_x - I_y + I_z)I_{xz}}{\Gamma} \quad c_3 = \frac{I_z}{\Gamma} \quad c_4 = \frac{I_{xz}}{\Gamma}, \quad (40b)$$

tem-se a equação 41, que fornece uma forma mais simples para a equação de momento:

$$\dot{P} = (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 L + c_4 N. \quad (41)$$

De forma análoga, definindo os demais termos auxiliares mostrados em 42

$$c_5 = \frac{I_z - I_x}{I_y} \quad c_6 = \frac{I_{xz}}{I_y} \quad c_7 = \frac{1}{I_y} \quad (42a)$$

$$c_8 = \frac{I_x(I_x - I_y) + I_{xz}}{\Gamma} \quad c_9 = \frac{I_x}{\Gamma} \quad (42b)$$

Em seguida, isolando as variáveis $\dot{Q}$ e $\dot{R}$, nas equações 35b e 35c, pode-se obter as equações de momento mostradas em 43 (ZHANG et al., 2013):

$$\dot{P} = (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 L + c_4 N \quad (43a)$$

$$\dot{Q} = c_5 P R - c_6 (P^2 - R^2) + c_7 M \quad (43b)$$

$$\dot{R} = (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 L + c_9 N. \quad (43c)$$

3.2.3 Equações Cinemáticas

As equações cinemáticas da aeronave utilizam as relações dos ângulos de Euler, definidas pela matriz de rotação $C_{NED,frd} = C_{frd,NED}^T$, apresentada na equação 1, para determinar a orientação da aeronave relativa ao sistema de eixos fixos na Terra (ROSKAM, 2018).

Considerando U, V e W as componentes de velocidade nas direções x, y e z , respectivamente, no sistema de eixos fixo na aeronave, pode-se obter as componentes $\dot{x}', \dot{y}'$ e $\dot{z}'$ da velocidade definida no sistema de eixos fixo na terra, a partir da seguinte relação

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix} = C_{frd,NED}^T \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Para obter a trajetória da aeronave em termos de $x'(t), y'(t)$ e $z'(t)$, é necessário realizar a integração da equação 44. Para isso, utiliza-se a relação mostrada na equação 45, que descreve uma relação entre a taxa de variação dos ângulos de Euler e as componentes de velocidade angular da aeronave (ROSKAM, 2018):

$$\vec{\omega} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k} = \vec{\psi} + \vec{\theta} + \vec{\phi}. \quad (45)$$

Fazendo as rotações nos eixos necessárias, a partir da equação 45, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Ao realizar o processo de inversão da equação matricial, tem-se:

$$\dot{\phi} = P + (Q \sin \phi + R \cos \phi) \tan \theta \quad (47a)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (47b)$$

$$\dot{\psi} = \frac{Q \sin \phi + R \cos \phi}{\cos \theta}. \quad (47c)$$

3.2.4 Equações de posição

Apesar das limitações quanto à posição existentes no modelo com hipótese de Terra plana, para deslocamentos relativamente curtos e para a altitude, este modelo ainda pode ser usado de forma satisfatória (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

Considerando situação de vento estacionário, as equações de posição podem ser obtidas fazendo a rotação do vetor velocidade relativa no eixo dos ventos para o sistema fixo na terra, através da seguinte equação, onde $C_{NED,frd} = C_{frd,NED}^T$, equação 1 (ETKIN, 2012)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{h}_E \end{bmatrix} = C_{NED,frd} \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{h}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T \cos \theta \cos \psi \\ V_T \cos \theta \sin \psi \\ -V_T \sin \theta \end{bmatrix} \quad (49)$$

Essas equações não interferem nas demais variáveis de estado da aeronave, apenas servem como variáveis auxiliares para representar a dinâmica da aeronave, com x_E representando o deslocamento ao longo do eixo x , y_E o deslocamento ao longo do eixo y e h_E a altitude ou deslocamento ao longo do eixo z .

3.3 RESUMO DAS EQUAÇÕES DO MODELO NÃO LINEAR DE 6 GDL

Com as equações desenvolvidas nas seções anteriores, pode-se escrever o sistema não linear de 6 GDL para uma aeronave, com 12 termos, mostrado no sistema de equações 50.

Neste sistema, as variáveis de estado são a velocidade do ar, os ângulos de ataque e derrapagem, as componentes de aceleração angular da aeronave, os ângulos de Euler e as variáveis de posição:

$$\mathbf{X} = [V_T \quad \alpha \quad \beta \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_E \quad y_E \quad h_E]^T.$$

Equações de Força:

$$\dot{V}_T = \frac{1}{m}(F_T \cos(\alpha + \alpha_T) \cos \beta + X + mg_1) \quad (50a)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{mV_T \cos \beta}(-F_T \sin(\alpha + \alpha_T) + Z + mg_3 + mV_T(Q \cos \beta - P_s \sin \beta)) \quad (50b)$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{mV_T}(-F_T \cos(\alpha + \alpha_T) + Y + mg_2 - mV_T R_s) \quad (50c)$$

Equações de Momento:

$$\dot{P} = (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 L + c_4 N \quad (50d)$$

$$\dot{Q} = c_5 PR - c_6(P^2 - R^2) + c_7 M \quad (50e)$$

$$\dot{R} = (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 L + c_9 N \quad (50f)$$

Equações Cinemáticas:

$$\dot{\phi} = P + (Q \sin \phi + R \cos \phi) \tan \theta \quad (50g)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (50h)$$

$$\dot{\psi} = \frac{Q \sin \phi + R \cos \phi}{\cos \theta} \quad (50i)$$

Equações de Posição

$$\dot{x}_E = V_T \cos \theta \cos \psi \quad (50j)$$

$$\dot{y}_E = V_T \cos \theta \sin \psi \quad (50k)$$

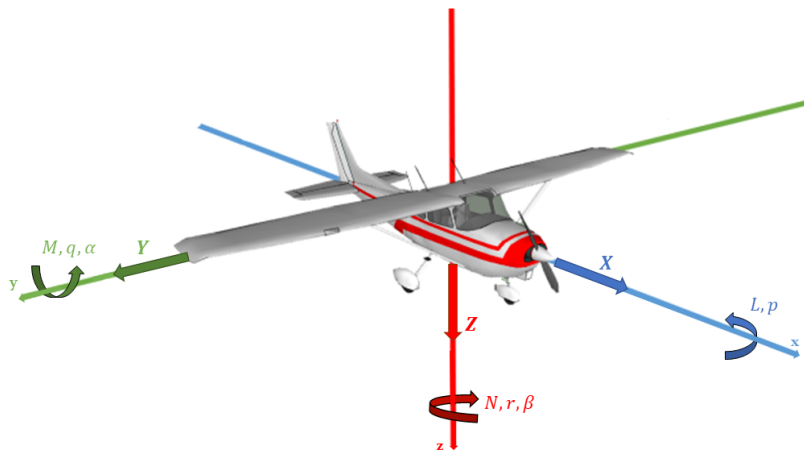
$$\dot{h}_E = -V_T \sin \theta \quad (50l)$$

3.4 FORÇAS E MOMENTOS AERODINÂMICOS

Analisando as equações do modelo de 6 GDL, observa-se que as mesmas dependem dos termos de força aerodinâmica X , Y e Z e dos termos de momento aerodinâmico L , M e N , que serão modelados nas seções seguintes.

Na Figura 9, são apresentados os sentidos positivos definidos para cada um desses componentes a partir da regra da mão direita.

Figura 9 – Sentidos positivos de forças e momentos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4.1 Forças Aerodinâmicas

As equações de força definidas na seção 3.2.1 estão referenciadas ao eixo dos ventos, o qual tem seu eixo x alinhado com o vetor vento relativo, o eixo y apontando para a asa direita e o eixo z para baixo. Em função dessa definição, em especial do eixo x , as forças X , Y e Z definidas representam as forças tradicionais aerodinâmicas Arrasto D , força Lateral C e Sustentação L (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015), sendo sustentação e arrasto definidos no sentido inverso aos eixos x e z .

As forças aerodinâmicas são definidas como função da pressão dinâmica $\bar{q}$, da área de referência S e de um coeficiente aerodinâmico, conforme as equações a seguir

$$X = D = \bar{q}SC_D$$

$$Z = L = \bar{q}SC_L \quad (51)$$

$$Y = C = \bar{q}SC_C,$$

onde, $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_T^2$.

Dessa forma, pode-se observar que, além da área da asa, os fatores principais que distinguem o comportamento aerodinâmico de duas aeronaves quaisquer são os coeficientes aerodinâmicos das mesmas.

De forma geral, os coeficientes aerodinâmicos são funções do ângulo de ataque α , do ângulo de derrapagem β , do número de Mach M , da altitude h e da deflexão de superfícies de controle. Além disso, esses coeficientes são calculados com relação à aeronave completa, portanto cada parte da aeronave contribui de uma forma distinta, por exemplo: asa, fuselagem e empenagem. As escolhas de quais desses fatores serão levados em conta durante a utilização do modelo de 6 GDL interfere em sua acurácia (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015).

A seguir, é apresentada a modelagem de cada um desses componentes no presente trabalho, seguindo por base o modelo aerodinâmico utilizado nas obras de Zhang et al. (2013) e Ducard e Geering (2008).

Por questão de notação, visto que o momento de guinada já é denotado pela letra L , arrasto, força lateral e sustentação serão representados pelas letras X , Y e Z respectivamente, da mesma forma que os coeficientes a eles relacionados.

3.4.1.1 Derivadas Aerodinâmicas

As derivadas aerodinâmicas são componentes dos coeficientes aerodinâmicos, representando o comportamento desses coeficientes em função de diversos parâmetros a serem escolhidos. As modelagens de cada um desses coeficientes e suas derivadas foram feitas da seguinte forma:

1. Coeficiente de Sustentação (C_Z): tem seu comportamento atrelado principalmente à variação do ângulo de ataque α e foi modelado utilizando-se duas derivadas aerodinâmicas independentes, C_{Z_1} e C_{Z_α} (ZHANG et al., 2013):

$$C_Z = C_{Z_1} + C_{Z_\alpha} \alpha. \quad (52)$$

- A derivada C_{Z_1} é um parâmetro constante independente de α e corresponde à sustentação gerada pela aeronave em um ângulo de ataque nulo.
- A derivada C_{Z_α} representa a variação do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque α em radianos.

É importante notar que o modelo adotado não leva em conta a influência de dispositivos hipersustentadores como flaps na geração de sustentação e também não considera o efeito de stall, como será melhor discutido no decorrer deste trabalho (ZHANG et al., 2013).

2. Coeficiente de Arrasto (C_X): além do ângulo de ataque, o coeficiente de arrasto também é influenciado pelo ângulo de derrapagem β de forma quadrática:

$$C_X = C_{X1} + C_{X_\alpha} \alpha + C_{X_{\alpha^2}} \alpha^2 + C_{X_{\beta^2}} \beta^2. \quad (53)$$

- A derivada C_{X_1} é um parâmetro constante independente de α referente ao coeficiente de arrasto parasita.
- As derivadas C_{X_α} e $C_{X_{\alpha^2}}$ representam a variação do coeficiente de arrasto em função do ângulo de ataque α em radianos, de forma linear e quadrática.
- A derivada $C_{X_{\beta^2}}$ representa a variação do coeficiente de arrasto em função do ângulo de derrapagem β de forma quadrática em radianos.

3. Coeficiente de força lateral (C_Y): neste caso, a maior influência é única que será levada em consideração neste modelo, é o ângulo de derrapagem β :

$$C_Y = C_{Y_\beta}\beta. \quad (54)$$

- A derivada C_{Y_β} representa a variação da força lateral em função do ângulo de derrapagem β .

3.4.2 Momentos Aerodinâmicos

Além das forças aerodinâmicas, também surgem nas equações do modelo de 6 GDL os seguintes momentos aerodinâmicos L , M , N , referentes à rolagem, arfagem e guinada, respectivamente (ZHANG et al., 2013).

As equações destes momentos são dadas por:

$$L = \bar{q}SbC_L$$

$$M = \bar{q}S\bar{c}C_M \quad (55)$$

$$N = \bar{q}SbC_N,$$

onde, novamente $\bar{q}$ é a pressão dinâmica, S é a área de referência, b é a envergadura, $\bar{c}$ é a corda média aerodinâmica e $C_{L,M,N}$ são os coeficientes de momento da aeronave.

De forma semelhante aos coeficientes aerodinâmicos, os coeficientes de momento também são funções do ângulo de ataque e de derrapagem, além do número de Mach, altitude e entradas de controle STEVENS; LEWIS; JOHNSON.

3.4.2.1 Derivadas de Estabilidade

As derivadas de estabilidade contém, além dos coeficientes relacionados a α e β , coeficientes relacionados às superfícies de controle primárias de uma aeronave. No caso, serão consideradas 5 superfícies independentes e suas deflexões: Ailerons direito e esquerdo δ_{a1} e δ_{a2} , Profundores direito e esquerdo δ_{e1} e δ_{e2} e, por fim, o leme direcional δ_r .

Além disso, também existem componentes relacionados às taxas angulares adimensionais, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ e $\tilde{r}$ (ZHANG et al., 2013):

$$\tilde{p} = \frac{bp}{2V_T} \quad \tilde{q} = \frac{\bar{c}q}{2V_T} \quad \tilde{r} = \frac{br}{2V_T} \quad (56)$$

1. Coeficiente de Momento de Rolagem (C_L):

$$C_L = C_{L1}\delta_{a1} + C_{L2}\delta_{a2} + C_{L3}\delta_{e1} + C_{L4}\delta_{e2} + C_{L\beta}\beta + C_{Lp}\tilde{p} + C_{Lr}\tilde{r}. \quad (57)$$

2. Coeficiente de Momento de Arfagem (C_M):

$$C_M = C_{M1}\delta_{a1} + C_{M2}\delta_{a2} + C_{M3}\delta_{e1} + C_{M4}\delta_{e2} + C_{Mq}\tilde{q} + C_{M\alpha}\alpha. \quad (58)$$

3. Coeficiente de Momento de Guinada (C_N):

$$C_N = C_{N\delta_r}\delta_r + C_{Nr}\tilde{r} + C_{N\beta}\beta. \quad (59)$$

3.4.3 Força Propulsiva e Modelo Atmosférico

Neste trabalho, tanto a força propulsiva quanto as variações nas condições atmosféricas, não foram objeto de foco de estudo. Por esse motivo foi considerado um valor constante para a força propulsiva em cada simulação realizada e um valor constante para a densidade de $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$, segundo o padrão ISA para o nível do mar.

Apesar disso, sabe-se que tanto a força propulsiva quanto a densidade variam com a altitude, alterando a acuracidade do modelo com relação à realidade.

No caso específico da força propulsiva, não haviam dados suficientes da aeronave VANT do Instituto ETH de Zurich sobre seu grupo motopropulsor, impedindo uma modelagem adequada (ZHANG et al., 2013; DUCARD; GEERING, 2008).

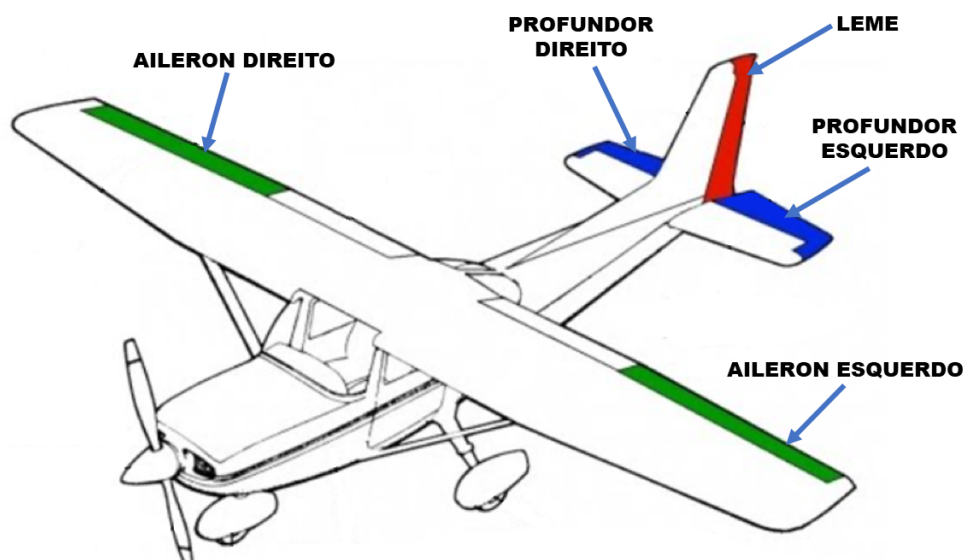
3.5 DESCRIÇÃO DA AERONAVE VANT DESENVOLVIDA PELO INSTITUTO ETH DE ZURICH

3.5.1 Características gerais e superfícies de controle

A aeronave considerada neste projeto, foi uma aeronave VANT de pequenas dimensões, desenvolvida no Instituto ETH de Zurich. Essa mesma aeronave, já foi objeto de estudo de outros trabalhos utilizados como referência, entre eles o trabalho de Ducard e Geering (2008) e Zhang et al. (2013), e possui 3,1 m de envergadura, 0,58 m de corda média aerodinâmica e 1,80 m² de área alar com 28 kg de massa.

A aeronave conta também com 5 superfícies de comando, sendo elas, os ailerons esquerdo e direito, os profundores esquerdo e direito e o leme, conforme esquematizado na Figura 10. O sentido de deflexão adotado neste trabalho segue a seguinte convenção: deflexão de aileron e profundor positivos quando estes são defletidos para cima, e leme positivo quando este é defletido para a direita (ZHANG et al., 2013).

Figura 10 – Superfícies de controle do VANT.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.5.2 Parâmetros aerodinâmicos

Conforme visto nas seções 3.4.1.1 e 3.4.2.1, para o desenvolvimento do modelo de 6 GDL são necessárias diversas derivadas aerodinâmicas e de estabilidade. Na Tabela 1 e na Tabela 2 são apresentadas as derivadas utilizadas, obtidas a partir do trabalho de Ducard e Geering (2008, p. 13).

Tabela 1 – Derivadas dos coeficientes aerodinâmicos de força

Derivada	Descrição	Valor	Derivada	Descrição	Valor
C_{X_1}	Derivada adimensional de arrasto	$-2,12 \times 10^{-2}$	C_{Y_β}	Derivada adimensional de força lateral	$-3,79 \times 10^{-2}$
C_{X_α}	Derivada adimensional de arrasto	$-2,66 \times 10^{-2}$	C_{Z_1}	Derivada adimensional de sustentação	$1,29 \times 10^{-2}$
$C_{X_{\alpha^2}}$	Derivada adimensional de arrasto	-1,55	C_{Z_α}	Derivada adimensional de sustentação	-3,25
$C_{X_{\beta^2}}$	Derivada adimensional de arrasto	$-4,01 \times 10^{-1}$			

Fonte: Disponível em Ducard e Geering (2008, p. 13)

Tabela 2 – Derivadas dos coeficientes de estabilidade

Derivada	Descrição	Valor	Derivada	Descrição	Valor
$C_{L_1} = -C_{L_2}$	Derivada adimensional de eficiência do aileron	$3,395 \times 10^{-2}$	$C_{M_3} = C_{M_4}$	Derivada adimensional de eficiência do profundor	$-3,89 \times 10^{-2}$
$C_{L_3} = -C_{L_4}$	Derivada adimensional de eficiência do profundor	$4,85 \times 10^{-3}$	C_{M_α}	Derivada adimensional do ângulo de ataque	$-9,03 \times 10^{-2}$
C_{L_p}	Derivada adimensional de fator de amortecimento	$-1,92 \times 10^{-1}$	C_{M_q}	Derivada adimensional de fator de amortecimento	-9,83
C_{L_r}	Derivada adimensional de fator de amortecimento	$3,61 \times 10^{-2}$	C_{N_r}	Derivada adimensional de fator de amortecimento	$-2,14 \times 10^{-1}$
C_{L_β}	Derivada adimensional do ângulo de derrapagem	$-1,30 \times 10^{-2}$	C_{N_β}	Derivada adimensional do ângulo de derrapagem	$8,67 \times 10^{-2}$
$C_{M_1} = C_{M_2}$	Derivada adimensional de eficiência do aileron	$2,725 \times 10^{-1}$	$C_{N_{\delta_r}}$	Derivada adimensional de eficiência do leme	$2,25 \times 10^{-2}$ *

Fonte: Disponível em Ducard e Geering (2008, p. 13)

Na Tabela 2, a derivada adimensional de eficiência de comando do leme $\delta_{N\delta_r}$, não teve seu valor retirado do trabalho de Ducard e Geering (2008), pois, a mesma não está disponível no trabalho. Para fins da simulação, foi utilizado um valor próximo ao encontrado em projetos anteriores da equipe Adelphi Aerodesign Team, visto que as aeronaves apresentam dimensões gerais semelhantes.

Além disso, outros dados da aeronave também necessários são os momentos de inércia, dados por:

$$I_{xx} = 2,56 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{yy} = 10,9 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{zz} = 11,3 \text{ kg.m}^2$$

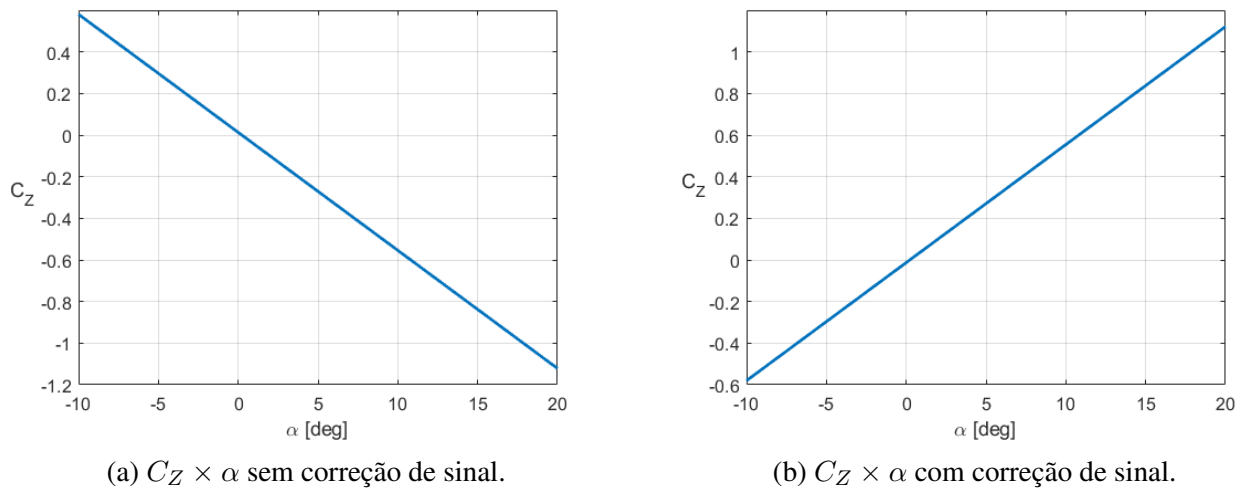
$$I_{xz} = 0,50 \text{ kg.m}^2.$$

3.5.3 Estudo preliminar da aeronave e de suas características Aerodinâmicas e de Performance

A fim de obter uma maior familiaridade com a aeronave estudada, bem como validar dados do modelo aerodinâmico utilizado, como descrito na seção 3.4, foi realizado um estudo inicial das características aerodinâmicas da aeronave.

Primeiramente, foi realizado um estudo das principais polares aerodinâmicas: sustentação, $C_Z \times \alpha$, arrasto $C_X \times \alpha$ e eficiência aerodinâmica $C_Z/C_X \times \alpha$, utilizando para isso, as equações dos coeficientes apresentadas em 52 e 53, lembrando que C_Z e C_X são os coeficientes de sustentação e arrasto, tradicionalmente referenciados por C_L e C_D , respectivamente.

Figura 11 – Polares de Sustentação.



Fonte: Elaborado pelo autor.¹

A partir de uma primeira análise das polares de arrasto e sustentação, percebe-se que, devido à forma como as equações de força foram implementadas com sentido invertido ao real no sistema de coordenadas, equações 19, os valores das curvas aerodinâmicas são obtidos com sentido invertido, sendo necessário uma correção de sinal para se visualizar os gráficos em suas formas tradicionais, como observa-se na Figura 11 e Figura 12.

Além disso, como previamente citado, o modelo aerodinâmico utilizado para descrever o coeficiente de sustentação C_Z é simplificado e não prevê a ocorrência de estol, como observa-se na Figura 11b, não sendo, portanto, adequado para simulação de ângulos de ataque elevados.

Já o modelo utilizado para a polar de arrasto prevê o comportamento quadrático esperado para este tipo de curva, como observado na Figura 12b.

Por fim, na Figura 13, observa-se a curva da razão entre sustentação e arrasto esperada para a aeronave em função do ângulo de ataque, apresentando um valor de eficiência máxima de aproximadamente 8.07 em um ângulo de ataque de 6.78°, condizente com resultados esperados para uma curva desse tipo.

Figura 12 – Polares de Arrasto.

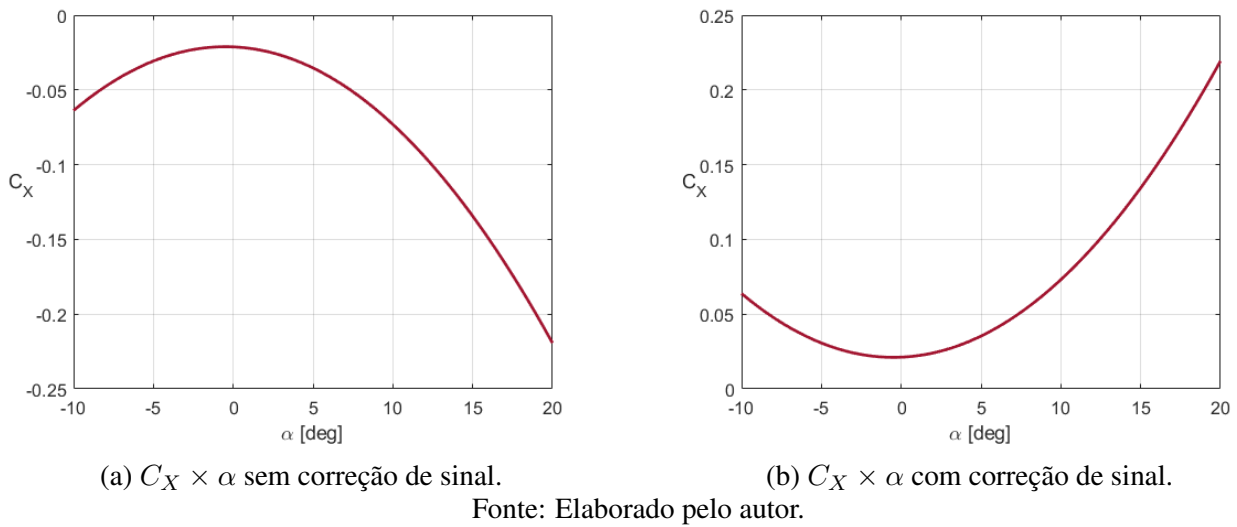
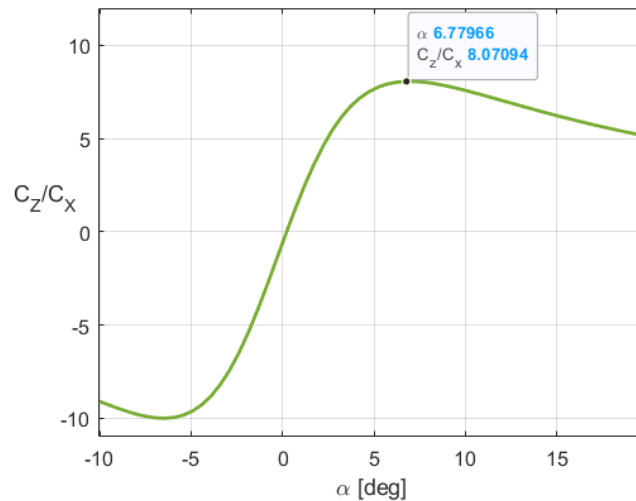


Figura 13 – Polar de eficiência aerodinâmica.



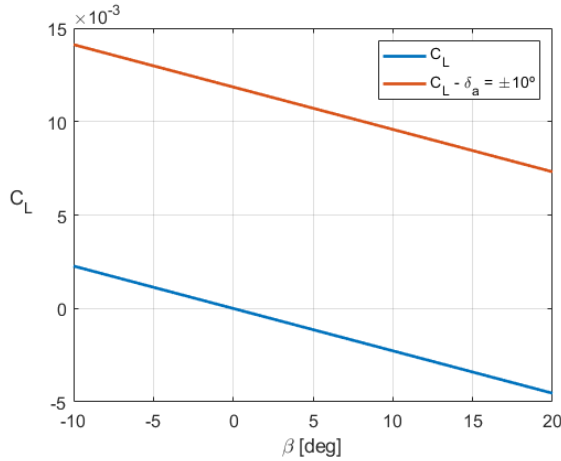
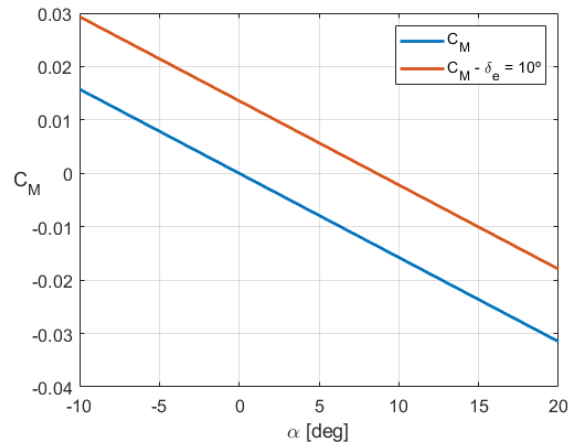
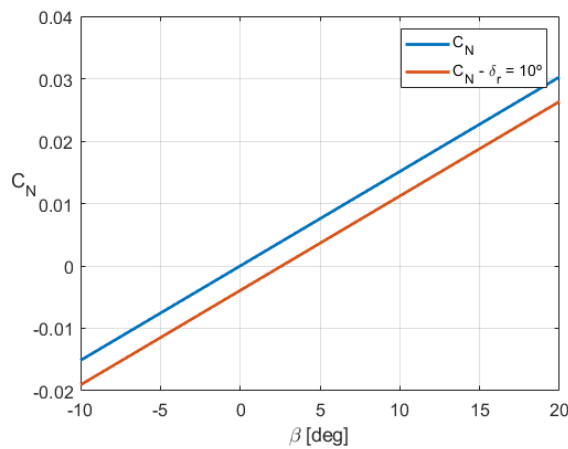
Em seguida, foi realizado o mesmo tipo de estudo dessa vez para os coeficientes de momento, como observado na Figura 14. Neste caso, diferente das polares dos coeficientes de sustentação e arrasto, o sentido dos coeficientes está correto, devido à modelagem seguindo eixos de referência fixos no corpo, no caso das equações de momento 43, diferente do caso das equações de força 19, algo que pode ser validado a partir da comparação com gráficos semelhantes disponíveis em Stevens, Lewis e Johnson (2015, p. 92, 96 e 98).

Além disso, também observa-se na Figura 14, o efeito da atuação das principais superfícies de controle para cada direção.

Em cada caso, analisou-se o efeito da variação do principal ângulo aerodinâmico envolvido no cálculo do coeficiente, de acordo com as equações 57, 58 e 59, sendo o ângulo β para C_L e C_N e α para C_M . Não foi considerado o efeito das taxas angulares adimensionais e, para cada caso, também considerou-se somente a atuação da superfície de comando principal, sendo todas as demais nulas.

No caso da rolagem, a principal superfície de controle são os ailerons e, na Figura 14a, observa-se

Figura 14 – Curvas de variação dos coeficientes de momento.

(a) $C_L \times \beta$ - Rolagem.(b) $C_M \times \alpha$ - Arfagem.(c) $C_N \times \beta$ - Guinada.

Fonte: Elaborado pelo autor.

uma entrada simultânea de 10° no aileron direito e -10° no esquerdo, observando-se um aumento no coeficiente de momento de rolagem de 0.0119 unidades, valor considerável levando-se em conta a ordem de grandeza deste coeficiente para a aeronave em questão.

Outro ponto de destaque para este caso está justamente na ordem de grandeza deste coeficiente, 10^{-3} , uma ordem de grandeza menor quando comparado a 10^{-2} no gráfico do mesmo coeficiente da Figura 2.3-5 de Stevens, Lewis e Johnson (2015, p. 92). O motivo mais provável, encontra-se no fato de a análise realizada não levar em conta o efeito das taxas angulares adimensionais, entretanto a investigação não foi mais aprofundada por não se tratar do objetivo principal do projeto.

O mesmo ocorre na Figura 14b, que também encontra-se uma ordem de grandeza abaixo do obtido no gráfico da Figura 2.3-7b de Stevens, Lewis e Johnson (2015, p. 96). Neste caso, a Figura 14b também apresenta o efeito de uma entrada de 10° de profundor no coeficiente de arfagem C_M , apresentando resultado análogo ao do aileron no caso de C_L .

Por fim, também analisou-se o coeficiente de guinada C_N na Figura 14c, com efeito de uma entrada de 10° no leme. Neste caso, não há divergência de ordem de grandeza quando comparado ao gráfico da Figura 2.3-8 de Stevens, Lewis e Johnson (2015, p. 98), apesar de o módulo ser consideravelmente inferior.

Finalizando o estudo inicial do modelo da aeronave, do ponto de vista de Desempenho, também foi gerado a curva de tração requerida para voo estável nivelado, também conhecida como Polar de Velocidades, partindo da equação 60 a seguir (ANDERSON-JR, 2015):

$$T_R = \frac{W}{(C_Z/C_X)_{req}}, \quad (60)$$

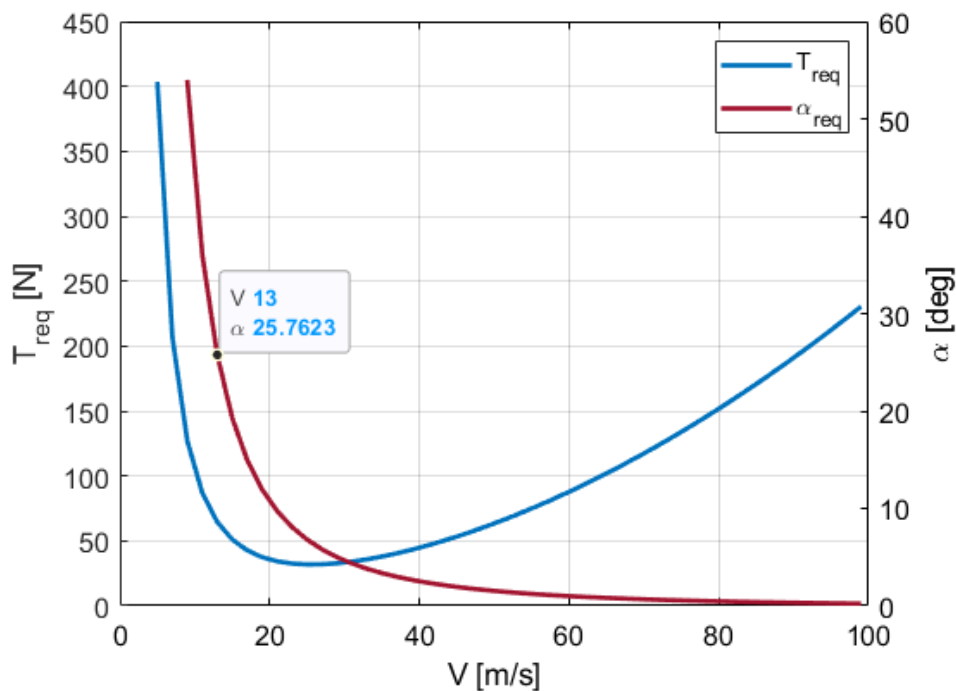
onde, T_R é a tração requerida para voo nivelado em Newtons, W é o peso da aeronave na mesma unidade, e a relação C_Z/C_X obtida a partir do valor de C_Z necessário para se manter voo nivelado e de seu C_X correspondente ao mesmo ângulo de ataque, a partir das seguintes equações:

$$C_{Z_{req}} = \frac{2W}{\rho S V^2} = C_{z_1} + C_{z_2} \alpha \quad (61)$$

$$\alpha_{req} = \frac{\frac{2W}{\rho S V^2} - C_{z_1}}{C_{z_2}}. \quad (62)$$

Com isso, foi obtida a polar de velocidades mostrada na Figura 15, onde pode-se observar não só a tração requerida para voo nivelado como também o ângulo de ataque correspondente, sendo possível se estimar, com base no comportamento de curvas polares de sustentação tradicionais, uma velocidade de estol próxima a 13 m/s, velocidade na qual o ângulo de ataque requerido já é maior que 25°. Ressalta-se que essa constatação é ilustrativa porém útil uma vez que o modelo de sustentação utilizado não prevê a ocorrência de estol.

Figura 15 – Polar de velocidades.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como não se considerou um modelo propulsivo, não é possível obter uma curva de tração disponível para a aeronave.

3.6 ALGORITMO DE SIMULAÇÃO DE TEMPO CONTÍNUO

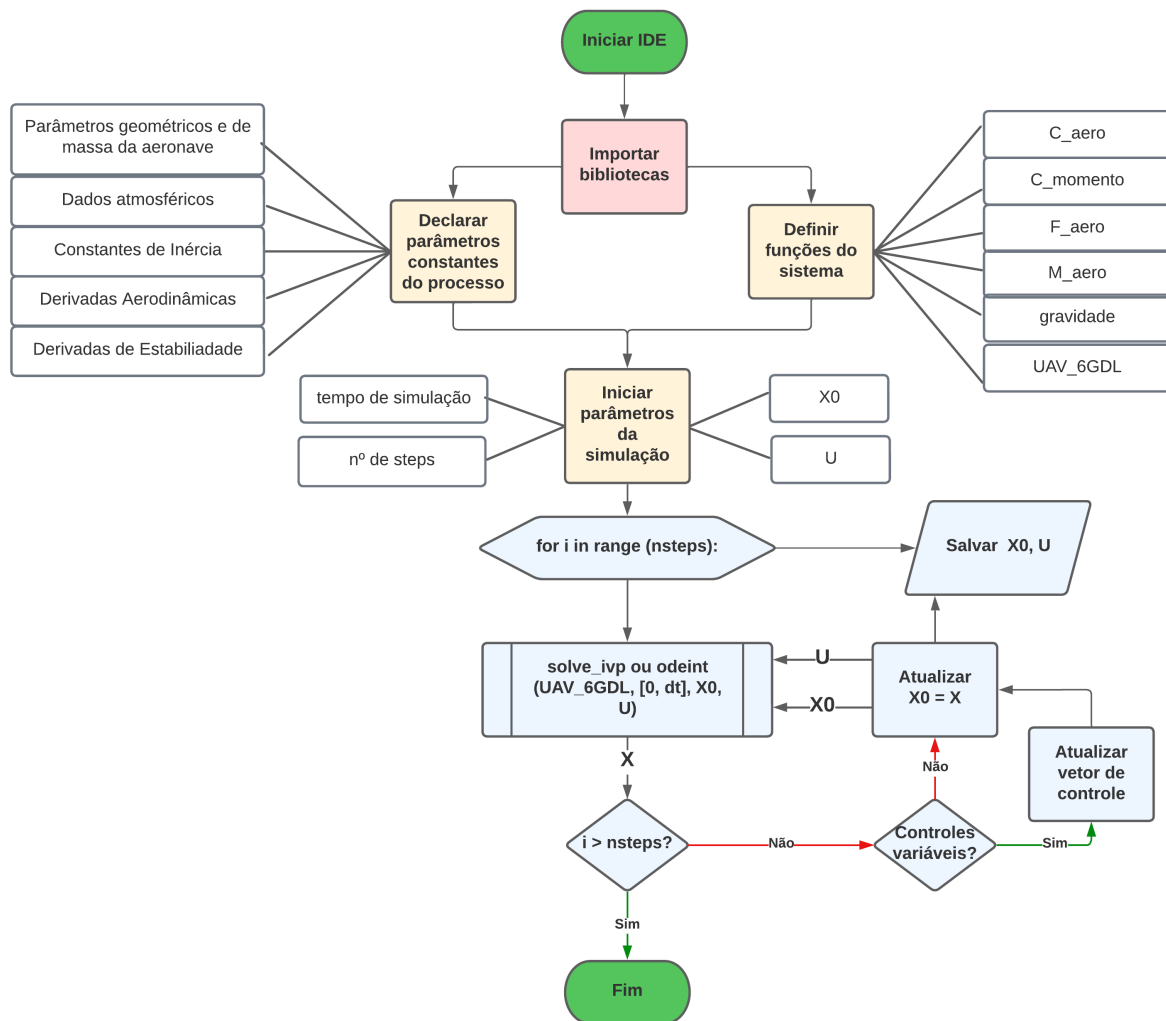
O algoritmo de simulação em tempo contínuo em Python, foi implementado seguindo a lógica de programação apresentada no fluxograma da Figura 16 e é apresentado no Anexo A.

O principal ponto do algoritmo encontra-se na função de integração numérica que pode ser escolhida entre a função *solve_ivp*, baseada no método Runge-Kutta de 4ª ordem e 5 estágios, e a função *odeint*, baseada no método LSODA.

Ambas as funções são capazes de integrar o modelo de 6 GDL automaticamente dentro de um intervalo de tempo desejado, sendo possível realizar a integração de $t_0 = 0s$ até o tempo final de simulação desejado (t_s). Porém, na Figura 16, observa-se que ao invés de uma integração direta de t_0 até t_s foi utilizado uma estrutura de loop *for*.

Nessa estrutura, ao invés de realizar a integração no intervalo de simulação completo, divide-se o intervalo em n subintervalos iguais de módulo dt , integrando a cada iteração de 0 até dt , até que se atinja o tempo total t_s desejado. Dessa forma, é possível aplicar entradas de controle diferentes em qualquer iteração da simulação, não apenas no início como seria na integração comum.

Figura 16 – Algoritmo de simulação em tempo contínuo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, para facilitar a compreensão e melhorar a organização, o algoritmo foi estruturado utilizando um conjunto de funções, que calculam coeficientes, forças e momentos aerodinâmicos, decomposição do vetor gravidade e as equações do modelo de 6 GDL em si. Uma descrição destas funções, com explicações a respeito de inputs e outputs de cada uma delas é apresentada no Anexo B.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após as primeiras análises envolvendo o estudo das características aerodinâmicas e de performance do VANT, foi realizado um estudo do modelo de 6 GDL, através da análise de diferentes condições iniciais. Antes disso, porém, é interessante analisar as limitações intrínsecas a este modelo, sejam elas decorrentes das hipóteses adotadas no desenvolvimento das equações ou por questões matemáticas.

- Longas distâncias: Devido à hipótese de Terra Plana adotada no desenvolvimento deste modelo, o mesmo não é adequado para simulação de voos longos, como o de aeronaves comerciais de voos internacionais pois, neste caso, a curvatura da Terra teria efeitos extras desprezados no modelo. Para este tipo de simulação, um modelo baseado em *Quarterions* seria mais adequado (STEVENSON; LEWIS; JOHNSON, 2015). Além disso, nesse caso também seria necessário levar em conta a variação de massa da aeronave.
- Pequenos ângulos: Devido à forma como as forças e momentos aerodinâmicos foram modelados, não prevendo ocorrência de estol e comportamento não linear que costuma ocorrer em ângulos elevados, o modelo não é adequado para ângulos de ataque maiores que aproximadamente 20° .
- Condição de decolagem: Nessa etapa de voo, que costuma demandar interesse nas análises de desempenho, a aeronave tem como uma de suas condições iniciais $V_T(0) = 0$, ou seja, a aeronave sai do repouso. Ao se analisar as equações de força 19, percebe-se que há uma divisão pelo termo V_T , impedindo que o mesmo seja nulo pois geraria uma indefinição matemática. Para contornar este problema, é necessário que as equações de força sejam modeladas considerando o eixo fixo no corpo, alterando as variáveis de estado para U , V e W , sendo estas as componentes de velocidade em cada direção (STEVENSON; LEWIS; JOHNSON, 2015, p. 111). Além disso, o modelo também não prevê a interação da aeronave com o solo através de atrito e efeito solo.
- Condição de subida vertical: Apesar de tratar-se de uma situação pouco comum para aeronaves ou VANT's convencionais, uma subida com ângulo de 90° , ou seja, $\theta = 90^\circ$, resultaria novamente em uma indefinição matemática, tanto nos termos de cosseno quanto de tangente, presentes nas equações 47.
- $\beta = 90^\circ$: O ângulo de derrapagem β , representa o ângulo entre a linha de simetria da fuselagem e a linha paralela ao vento relativo percebido pela aeronave. Caso essas duas direções sejam perpendiculares causariam, novamente, uma indefinição devido à divisão por zero na equação 50b.

Apesar de algumas das situações não serem realistas no modelo físico real, podem ocorrer dentro do ambiente de simulação (em especial as indefinições matemáticas), por esse motivo, deve-se utilizar ferramentas de programação para identificar e prevenir estes problemas no algoritmo através de restrições de causa.

4.1 ESTUDO DE CONDIÇÕES INICIAIS

Foram escolhidas 3 situações distintas de condições iniciais para simulação: Descida não tracionada, Curva não nivelada e Voo nivelado com aplicação de comandos de controle.

4.1.1 Descida não tracionada - Planeio

Para a situação de descida não tracionada, foram considerados os vetores de condições iniciais e de entradas de controle mostrados a seguir, onde o sinal negativo na variável de estado h_E se deve ao sentido do eixo Z e as deflexões das superfícies de comando são dadas em graus (posteriormente convertidas para radianos dentro do algoritmo).

- Variáveis de estado:

$$\mathbf{X}_0 = [V_T \quad \alpha \quad \beta \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_E \quad y_E \quad h_E]^T$$

$$\mathbf{X}_0 = [30 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -500]^T$$

- Vetor de controle fixo:

$$\mathbf{U} = [\delta_{a1} \quad \delta_{a2} \quad \delta_{e1} \quad \delta_{e2} \quad \delta_r \quad F_T]^T$$

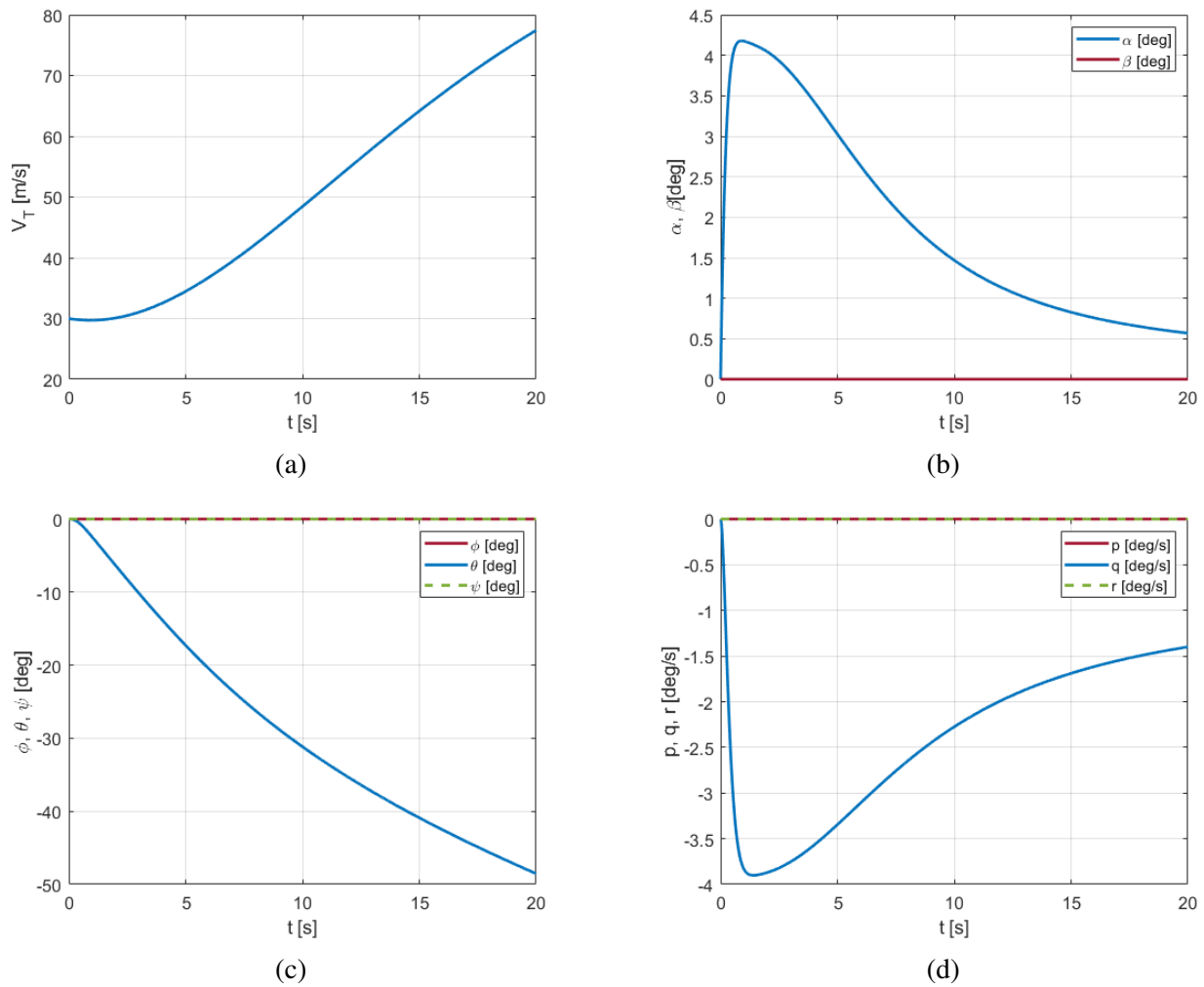
$$\mathbf{U} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Na Figura 17, observa-se o comportamento das variáveis de estado ao longo da simulação em função do tempo, enquanto na Figura 18 é apresentada a trajetória do VANT no espaço tridimensional, para o mesmo intervalo de tempo.

Analisando os resultados obtidos e comparando-os com o comportamento esperado para este tipo de manobra em uma situação real, pode-se concluir que o algoritmo de fato é condizente com a realidade, visto que:

1. Na Figura 17a, observa-se um aumento da velocidade, que ocorre devido à aceleração gravitacional;
2. Nas Figuras 17b a 17d, nota-se que apenas as variáveis relativas ao movimento longitudinal sofrem variação, condizente com o fato de não haver entradas ou perturbações latero-direcionais;
3. Os ângulos α e θ e a velocidade angular q , também apresentam comportamento válido.
 - O ângulo de arfagem θ está relacionado com a medida entre a trajetória da aeronave e uma linha horizontal paralela a superfície da Terra, logo, o valor negativo de módulo crescente obtido, indica que o VANT apresenta uma trajetória descendente, condizente com a situação de planeio.

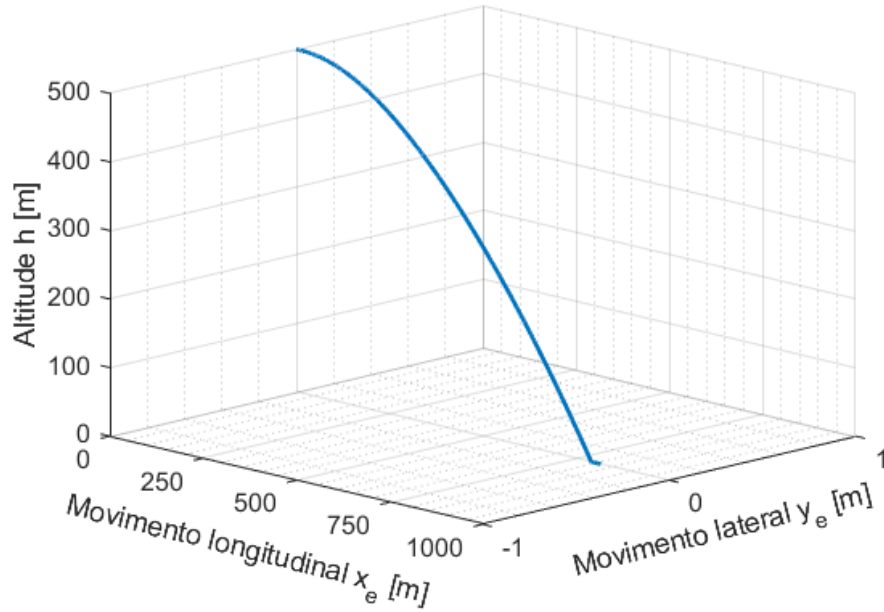
Figura 17 – Resposta do sistema a uma situação de planeio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

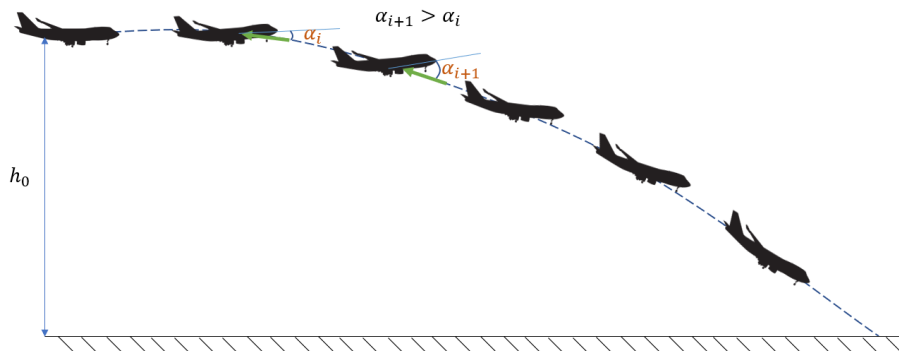
- A velocidade angular q , também conhecida como taxa de arfagem, representa a velocidade com que a aeronave está variando o ângulo de sua trajetória, portanto seu pico inicial está relacionado com a maior redução de θ no início do movimento, reduzindo a velocidade de rotação ao longo do tempo.
 - Por fim, o ângulo de ataque α é medido com base na corda da asa e a direção do vento relativo, no caso, como considera-se vento estacionário, essa direção coincide com a trajetória de voo. Portanto, o valor positivo, contrário a θ e q , e o pico no início do movimento, ocorre devido às propriedades de inércia da aeronave, que não permitem um alinhamento instantâneo da linha de centro da fuselagem, nesse caso, paralela à corda da asa, com a trajetória de voo, conforme esquematizado na Figura 19.
4. Por fim, as variáveis relacionadas à posição do VANT no espaço 3D, também se comportam dentro do esperado, com um movimento descendente ao longo do eixo $x - z$, apresentando um gráfico em forma de uma semi-parábola, sendo a trajetória análoga ao esperado para um lançamento horizontal, como visto na Figura 18.

Figura 18 – Trajetória da aeronave no espaço - Condição de planeio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Representação do aumento inicial de α em planeio, apesar do aumento de θ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.1.2 Curva não nivelada

Já para a situação de curva não nivelada, foram adotados os seguintes vetores de variáveis de estado e de controle iniciais:

- Variáveis de estado:

$$\mathbf{X}_0 = [V_T \quad \alpha \quad \beta \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_E \quad y_E \quad h_E]^T$$

$$\mathbf{X}_0 = [30 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -500]^T$$

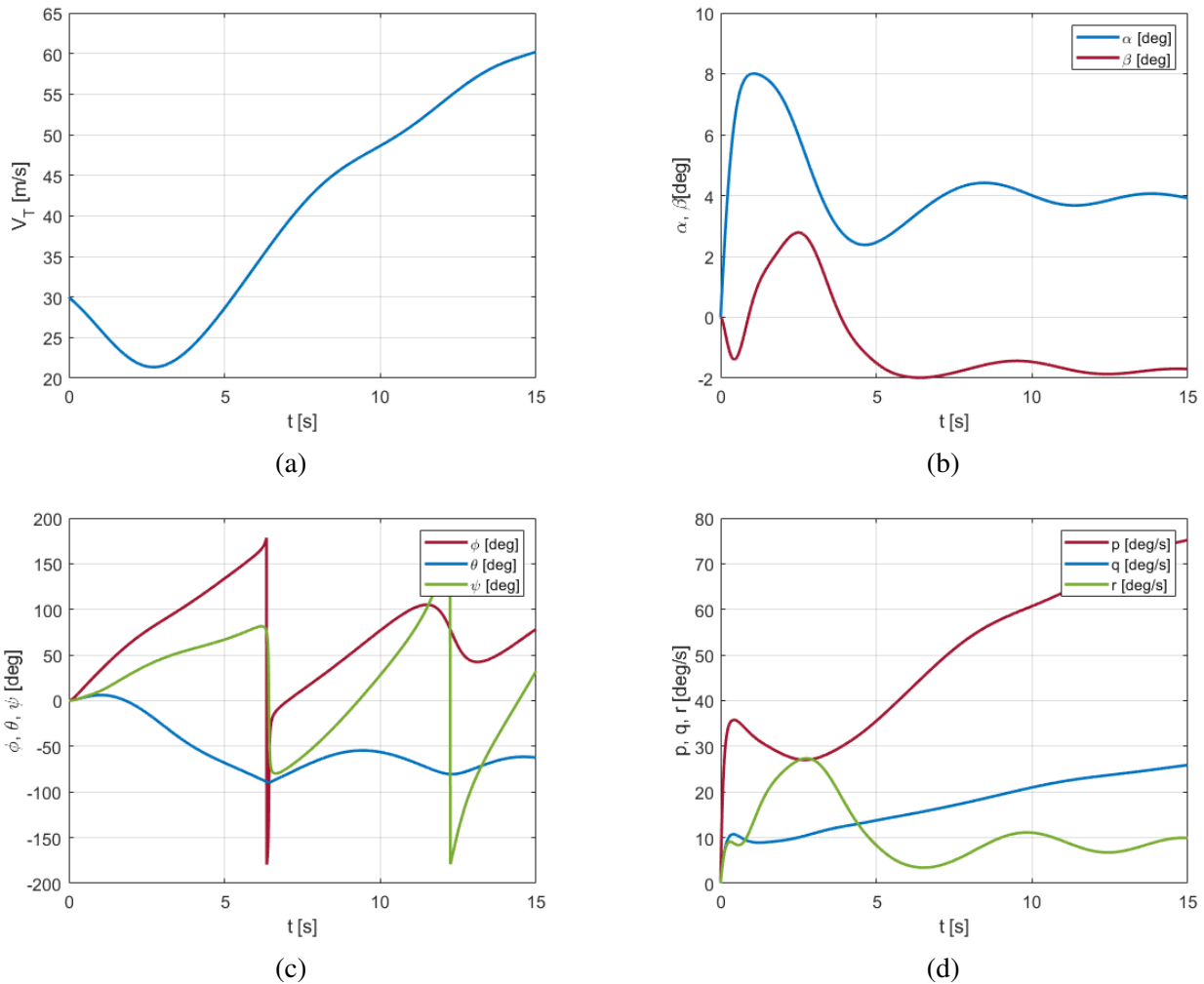
- Vetor de controle fixo:

$$\mathbf{U} = [\delta_{a1} \quad \delta_{a2} \quad \delta_{e1} \quad \delta_{e2} \quad \delta_r \quad F_T]^T$$

$$\mathbf{U} = [5 \quad -5 \quad 20 \quad 20 \quad 10 \quad 85]^T.$$

Dessa forma, foram obtidos os resultados apresentados na Figura 20 e Figura 21.

Figura 20 – Resposta do sistema a uma situação de curva não nivelada.

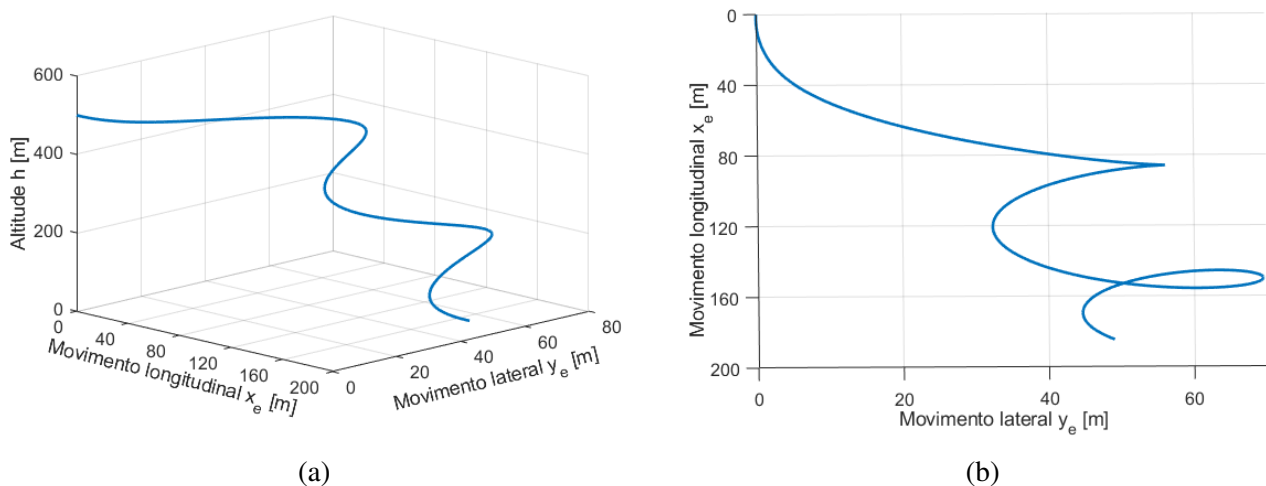


Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse caso, foram aplicadas entradas de controle que foram mantidas constantes ao longo de toda a simulação, sendo elas:

- Aplicação de comando de aileron direito para cima e esquerdo para baixo, gerando uma tendência de rotação ao redor do eixo x (rolagem) levantando a ponta da asa esquerda e abaixando a direita.
- Aplicação de comando simultâneo causando deflexão para cima em ambos os profundores, gerando uma tendência de levantar o nariz do VANT (arfagem).
- Comando de leme para a direita, gerando uma tendência de rotação levando o nariz do VANT a apontar na mesma direção da asa direita (guinada).
- Acionamento da manete de potência, gerando uma tração de 85N.

Figura 21 – Trajetória da aeronave no espaço - Condição de curva.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa combinação de comandos, tende a manter o VANT em uma descida em espiral, pois o aumento do ângulo de rolagem diminui a componente vertical de sustentação, causando o movimento de descida no eixo z , e os comandos de leme combinados aos de aileron fazem a rotação entorno do mesmo eixo.

As respostas do modelo se mostram condizentes com o movimento esperado do VANT para esta manobra, como se observa na Figura 21, que apresenta a trajetória tridimensional em 21a e a vista do movimento ao longo do plano $x - y$ em 21b.

Porém, alguns pontos chamam a atenção ao se analisar as variáveis de estado do sistema. O comportamento do ângulo de rolagem ϕ e do ângulo de guinada ψ , na Figura 20c, apresenta uma descontinuidade nas curvas dessas variáveis. Isso ocorre devido às restrições de intervalo desses ângulos e às funções de modulação utilizadas definidas de acordo com Stevens, Lewis e Johnson (2015, p. 12), conforme apresentado na seção 2.2.2.

Outro ponto que chama atenção diz respeito ao comportamento da taxa de rolagem p , que apresenta valores muito mais elevados do que as demais taxas. Isso pode estar relacionado a seguinte dinâmica: ao se aplicar comando de aileron por um breve período de tempo, gera-se uma tendência de movimento de rolagem, fazendo com que uma das asas se eleve enquanto a outra abaixa, retornando ao equilíbrio após o fim da entrada. Porém, quando se aplica esse comando constantemente sem cessar, essa tendência continua, fazendo com que em dado momento a aeronave possa inverter todo seu eixo, ficando com o intradorso voltado para cima, manobra comum em caças de combate, porém em uma aeronave convencional ou um VANT provavelmente levará a falhas estruturais por estarem fora do envelope de voo do modelo.

4.1.3 Simulação de voo nivelado com aplicação de comandos de controle

Por fim, foi realizada uma tentativa de controle de altitude manual, no qual foram estipuladas algumas entradas de comandos de controle em diferentes instantes de tempo, com a finalidade de se manter a altitude do VANT aproximadamente constante, em uma simulação de voo de cruzeiro.

Para isso, foram considerados as seguintes condições iniciais e entradas de controle:

- Variáveis de estado:

$$\mathbf{X}_0 = [V_T \quad \alpha \quad \beta \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_E \quad y_E \quad h_E]^T$$

$$\mathbf{X}_0 = [30 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -500]^T$$

- Vetor de controle variável:

$$\mathbf{U} = [\delta_{a1} \quad \delta_{a2} \quad \delta_{e1} \quad \delta_{e2} \quad \delta_r \quad F_T]^T$$

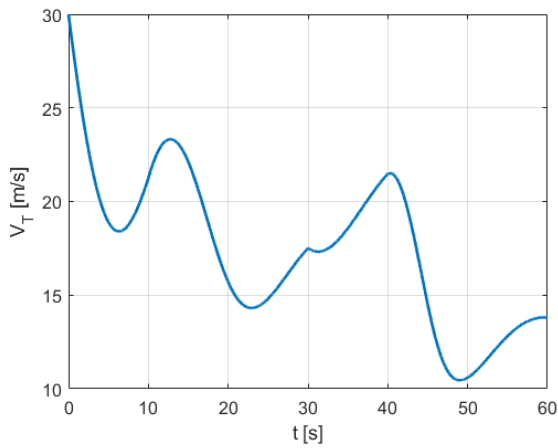
$$0 \leq t \leq 10\text{s}: \mathbf{U} = [0 \quad 0 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 80]^T$$

$$10 < t \leq 30\text{s}: \mathbf{U} = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 15 \quad 0 \quad 80]^T$$

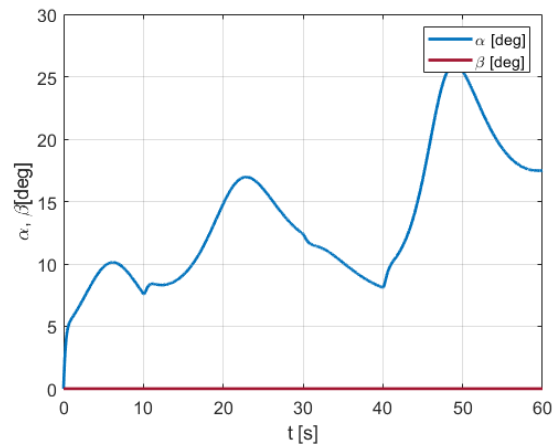
$$30 < t \leq 40\text{s}: \mathbf{U} = [0 \quad 0 \quad 10 \quad 10 \quad 0 \quad 100]^T$$

$$t > 40\text{s}: \mathbf{U} = [2 \quad 2 \quad 10 \quad 10 \quad 0 \quad 110]^T.$$

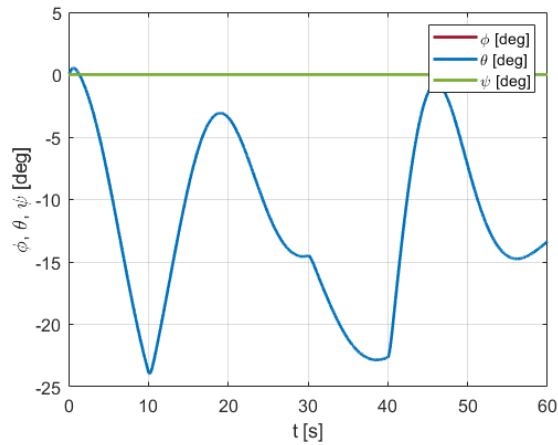
Figura 22 – Resposta do sistema a uma situação de cruzeiro.



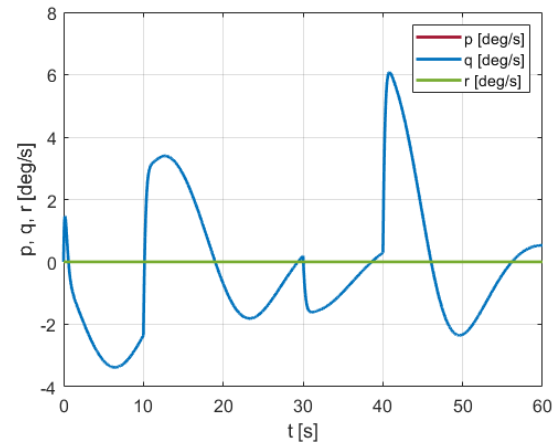
(a)



(b)



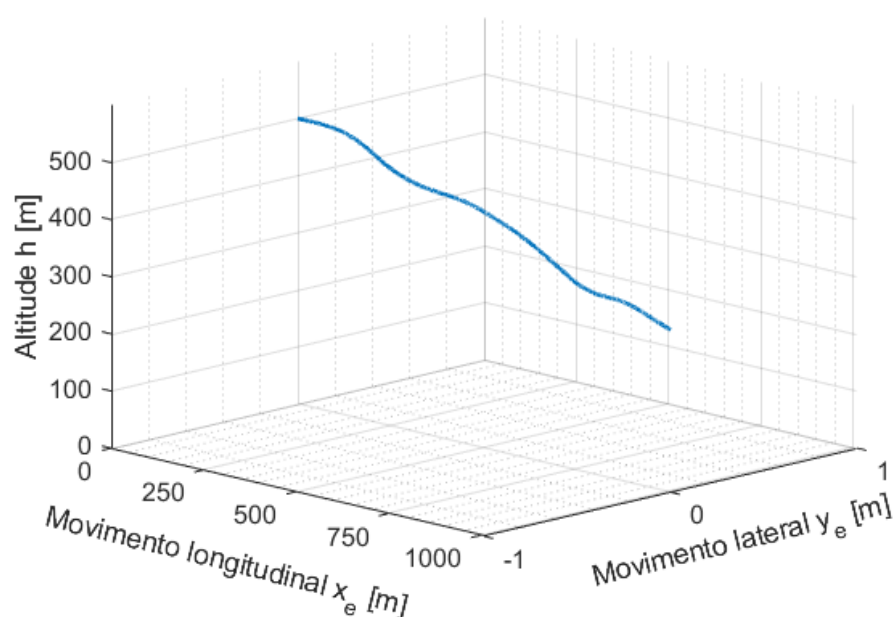
(c)



(d)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Trajetória da aeronave no espaço - Condição de cruzeiro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa situação observa-se que, apesar de se tratar de uma maneira manual baseada apenas em tentativas empíricas, houve relativo sucesso ao se controlar a aeronave com as entradas de controle apresentadas, dentro de um intervalo de 1 min, sendo utilizado para isso principalmente comandos de profundor síncronos e de manete de potência, além de uma breve utilização de comando de aileron simultâneo, atuando como uma espécie de flap improvisado, gerando um aumento extra no momento de arfagem do VANT.

A partir do uso do aileron com a finalidade acima, também foi possível se fazer constatações a respeito da oposição do CG da aeronave, ainda que não haja nenhuma informação direta sobre o assunto nas referências. Uma vez que, para gerar um aumento no momento de arfagem foi necessário se aplicar aileron para cima (positivo), percebe-se que a posição do CG é dianteiro, de forma que uma força negativa atuando sobre o centro aerodinâmico da asa leva a uma tendência de arfagem positiva.

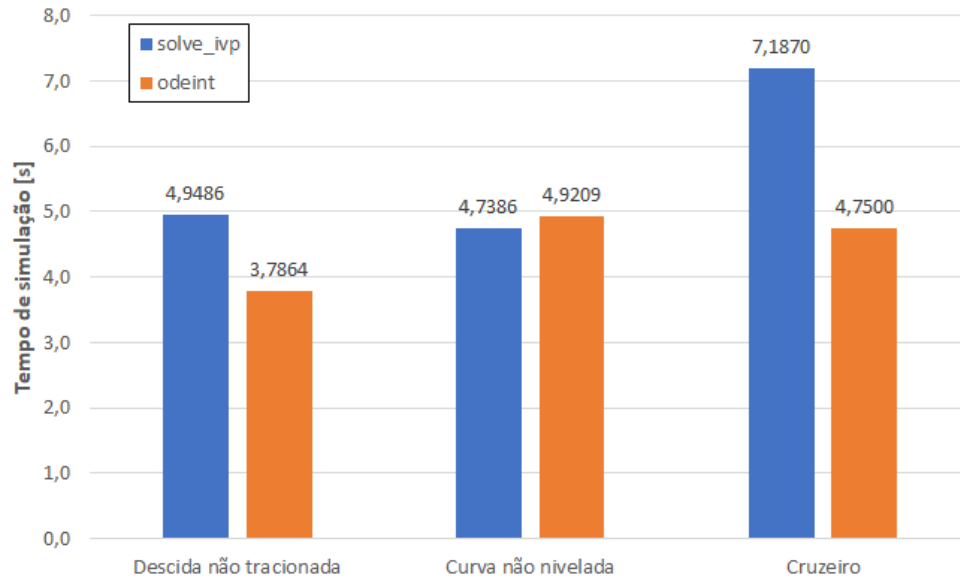
4.2 ESTUDO COMPARATIVO DE ROTINAS DE RESOLUÇÃO DE EDO'S

A fim de se obter uma métrica para a comparação entre os diferentes métodos de simulação foi realizado uma medição do tempo total necessário para a integração em cada caso abordado neste trabalho.

Na Figura 24, observa-se uma comparação entre o método *solve_ivp* e o *odeint*. As medições foram obtidas executando o algoritmo 3 vezes consecutivas para cada método, reiniciando o ambiente de execução (apagando as variáveis da memória) antes de cada rodada, e gravando o tempo necessário em cada uma delas. Em seguida, foi feita a média das 3 medidas se obtendo os resultados mostrados na Figura 24.

É possível observar que, em geral, o método *odeint* se mostrou mais rápido nas simulações, sendo

Figura 24 – Comparação de tempo de execução entre os diferentes métodos de integração numérica.

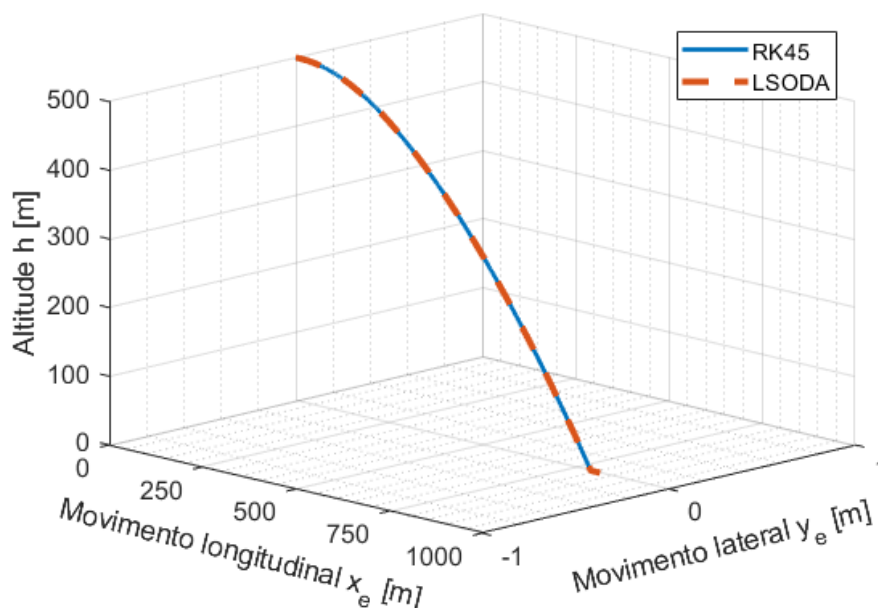


Fonte: Elaborado pelo autor.

24% e 34% mais eficiente nas situações de descida não tracionada e cruzeiro, respectivamente, sendo inferior apenas na situação de curva não nivelada, onde o método *solve_ivp* foi 4% mais rápido. Entretanto, mesmo nessa situação, a diferença entre os métodos foi pequena, tornando a rotina *odeint* mais interessantes nesses casos.

Destaca-se que, além das diferenças de tempo de execução, não houve diferença significativa nos resultados obtidos, ao ponto que em uma inspeção visual, não foi possível notar qualquer diferença nos gráficos de resultados de cada simulação, como pode-se observar na Figura 25.

Figura 25 – Comparação de trajetórias obtidas para os diferentes métodos de integração numérica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar disso, a rotina *solve_ivp* se mostrou mais adequada do que a *odeint* para lidar com erros numéricos. Enquanto o primeiro método consegue identificar erros numéricos causados por indeterminação não ficando preso por longos períodos dentro de um loop, retornando a mensagem de erro de forma rápida, o segundo não tem uma ferramenta similar, sendo necessário se reiniciar o ambiente de execução quando o erro ocorre.

Por fim, ressalta-se que o intuito desta comparação não é apontar o melhor método de forma definitiva, mas sim, apresentar diferentes ferramentas e como elas se comportaram dentro das situações aqui estudadas, para que possam ser exploradas em trabalhos futuros.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta a implementação de um modelo dinâmico de 6 GDL, utilizando para isso a linguagem de programação Python, visando não só o desenvolvimento do algoritmo como também o estudo de seu funcionamento e limitações, utilizando como laboratório didático uma aeronave VANT desenvolvida pelo instituto ETH de Zurich.

Ao longo do desenvolvimento, foi apresentado, de forma detalhada, todo o raciocínio utilizado para permitir a melhor compreensão do modelo, incluindo a descrição clara dos sentidos positivos das variáveis de estado e de controle, que costumam variar dependendo da referência utilizada, causando confusão na interpretação de resultados.

Além disso, também foram apresentadas e comparadas, com finalidade expositiva, duas diferentes rotinas de integração numérica: *solve_ivp* e *odeint*, baseadas nos métodos Runge-Kutta de 4ª ordem e 5 etapas e no método LSODA, respectivamente, sendo relatadas as principais experiências obtidas com cada uma durante a execução do projeto.

Diferentes condições iniciais e respostas a atuação das superfícies de controle foram analisadas, sendo elas: Planeio, Curva não nivelada e Cruzeiro controlado por entradas manuais. Os resultados obtidos mostraram-se condizentes com respostas físicas esperadas para uma aeronave real em cada uma das condições.

Alguns pontos de melhoria no modelo foram encontrados, em especial os modelos de forças e momentos aerodinâmicos utilizados, que não levam em conta diversos fatores de influência.

Conclui-se que os objetivos iniciais foram atingidos com sucesso, sendo apresentados resultados de simulações além de comparações de diferentes métodos de integração numérica presentes na linguagem Python, possibilitando que trabalhos futuros tenham neste TCC uma referência adequada para expandir os resultados aqui apresentados além de referências de diferentes ferramentas para explorar o problema do modelo dinâmico não linear de aeronaves.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão de trabalhos futuros, propõe-se:

1. A primeira sugestão concentra-se em melhorias do modelo implementado, a fim de torná-lo ainda mais exato e permitir sua adaptação para um simulador de voo através de uma interface gráfica integrada ao Python. Como pontos de melhoria do modelo lista-se: Modelagem mais exata das forças e momentos aerodinâmicos; Modelagem de um modelo propulsivo; Modelagem de um modelo atmosférico padrão ISA; Adequação do modelo para situações de pouso e decolagem, incluindo efeito solo.
2. Como segunda sugestão, propõe-se a implementação de um método numérico para se calcular a condição de voo trimado do VANT utilizado neste projeto. Isso pode ser feito utilizando metodologias apresentadas em Stevens, Lewis e Johnson (2015) e Etkin (2012). Através dessa

condição, é possível se avaliar melhor o comportamento da aeronave partindo de uma condição de equilíbrio.

3. Por fim, como última sugestão, propõe-se o desenvolvimento de métodos de controle aplicados ao modelo estudado, como o método de controle adaptativo com realimentação e estimador baseado em variedades invariantes proposto por Zhang et al. (2013).

REFERÊNCIAS

- ANDERSON-JR, J. D. **Fundamentos de engenharia aeronáutica**. [S.l.]: AMGH Editora, 2015.
- ARAUJO, L. A. et al. Desafios da defesa e segurança frente à nova ameaça do uso ilícito de vants. In: **Trabalho elaborado para ser apresentado no XII CADN (Congresso Acadêmico sobre Defesa Nacional) realizado na AFA (Academia da Força Aérea) em Pirassununga, SP, em**. [S.l.: s.n.], 2015. v. 14.
- BOEING. **Família 777**. 2023. Disponível em: <<https://www.boeing.com.br/produtos-e-servicos/avioes-comerciais/777.page>>. Acesso em: 15 de janeiro 2023.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Elementary differential equations and boundary value problems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021.
- CALHOUN, S. M. **Six Degree-of-Freedom Modeling of an Uninhabited Aerial Vehicle**. Tese (Doutorado) — Ohio University, 2006.
- COOK, M. V. **Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2012.
- CORPORATION, N. G. **Global Hawk: Vigilance for a Changing World**. 2022. Acessado em 30 de outubro de 2022. Disponível em: <<https://www.northropgrumman.com/what-we-do/air/global-hawk/>>.
- CRAES, P. J. H. Fw lanchester and the great divide. **Journal of Aeronautical History Paper No**, v. 2, 2014.
- DUCARD, G.; GEERING, H. P. Efficient nonlinear actuator fault detection and isolation system for unmanned aerial vehicles. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 31, n. 1, p. 225–237, 2008.
- ETKIN, B. **Dynamics of atmospheric flight**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- FAHLSTROM, P. G.; GLEASON, T. J.; SADRAEY, M. H. **Introduction to UAV systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2022.
- FAN, B. et al. Review on the technological development and application of uav systems. **Chinese Journal of Electronics**, Wiley Online Library, v. 29, n. 2, p. 199–207, 2020.
- FILHO, I. J. de C. Alberto santos dumont: A história da invenção do avião. 2005.
- GRANDE, J. G. de V. **Imóveis de Vargem já foram todos georreferenciados**. 2021. Acessado em 30 de outubro de 2022. Disponível em: <<https://www.gazetavg.com.br/2021/03/01/imoveis-de-vargem-ja-foram-todos-georreferenciados/>>.
- HINDMARSH, A. **ODEPACK. A collection of ODE system solvers**. [S.l.], 1992.
- HINDMARSH, A.; PETZOLD, L. Lsoda, ordinary differential equation solver for stiff or non-stiff system. 2005.
- HODGKINSON, D.; JOHNSTON, R. **Aviation law and drones: Unmanned aircraft and the future of aviation**. [S.l.]: Routledge, 2018.

- HOUPIS, C. H.; SHELDON, S. N. **Linear Control System Analysis and Design with MATLAB®**. [S.l.]: CRC Press, 2013.
- JORGE, L. d. C.; INAMASU, R. Y. Uso de veículos aéreos não tripulados (vant) na agricultura de precisão. Embrapa, 2014.
- MATHWORKS. **6DOF - MatLab**. 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/aeroblks/6dof-1.html>>. Acesso em: 05 de janeiro 2023.
- NAPOLITANO, M. **Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- OLIVEIRA, R. M. d. Desenvolvimento de um simulador de voo em 6 graus de liberdade para aeronaves rígidas. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2022.
- ROBERTO, A. J. **Extração de Informação Geográfica a partir de Fotografias Aéreas obtidas com VANTs para apoio a um SIG Municipal**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Porto - Portugal, 2013. Tese de Mestrado em Sistemas de Informação Geográfica.
- ROMA, A. M.; NÓS, R. L. **Tratamento Numérico de Equações Diferenciais**. [S.l.]: São Paulo: USP, 2012.
- ROSKAM, J. **Airplane flight dynamics and automatic flight controls - Part I**. [S.l.]: DARcorporation, 2018.
- SCIPY. **About us - SciPy**. 2023. Disponível em: <<https://scipy.org/about/>>. Acesso em: 10 de janeiro 2023.
- SCIPY. **scipy.integrate.odeint**. 2023. Disponível em: <<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>>. Acesso em: 15 de janeiro 2023.
- SCIPY. **scipy.integrate.solve_ivp**. 2023. Disponível em: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html>. Acesso em: 15 de janeiro 2023.
- SEAMAX. **Seamax M-22**. 2023. Disponível em: <<https://www.seamaxaircraft.com/pt/specifications>>. Acesso em: 15 de janeiro 2023.
- STACKOVERFLOW. **2022 Developer Survey**. 2023. Disponível em: <<https://survey.stackoverflow.co/2022/#employment-employment-prof>>. Acesso em: 10 de janeiro 2023.
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- TECMUNDO.COM.BR, C. P. **Drones autônomos podem manter pássaros longe de aeroportos**. 2018. Acessado em 30 de outubro de 2022. Disponível em: <<https://www.tecmundo.com.br/produto/133017-drones-autonomos-manter-passaros-aeroportos.htm>>.
- ZHANG, J. et al. Non-linear flight control for unmanned aerial vehicles using adaptive backstepping based on invariant manifolds. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 227, n. 1, p. 33–44, 2013.
- ZIPFEL, P. H. **Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics**. [S.l.]: Aiaa, 2000.

ANEXO A – ALGORITMO DO MODELO DINÂMICO NÃO LINEAR DE 6GDL

In [5]:

```
##### Importação de Bibliotecas #####
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp, odeint
import time

##### Funções Auxiliares #####
def sin(x):
    return np.sin(x)

def cos(x):
    return np.cos(x)

def tan(x):
    return np.tan(x)

def C_aero(C, alp, bet):
    # Função para o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos
    # C = Derivadas aerodinâmicas adimensionais
    # alp = ângulo de ataque (alpha) [rad]
    # bet = ângulo de glissada (betha) [rad]

    Cx1, Cx2, Cx3, Cx4, Cy1, Cz1, Cz2 = C

    # Coeficiente aerodinâmico na direção x (Arrasto)
    Cx = Cx1 + Cx2*alp + Cx3*alp**2 + Cx4*bet**2

    # Coeficiente aerodinâmico na direção y (Força Lateral)
    Cy = Cy1*bet

    # Coeficiente aerodinâmico na direção z (Sustentação)
    Cz = Cz1 + Cz2*alp

    out = np.array([Cx, Cy, Cz])
    return out

def C_momento(C, U, alp, bet, til):
    # Função para o cálculo dos coeficientes de momento aerodinâmico
    # C = Derivadas de estabilidade adimensionais
    # U = vetor de controle [rad, N]
    # alp = ângulo de ataque (alpha) [rad]
    # bet = ângulo de glissada (betha) [rad]
    # til = taxas angulares adimensionais (ptil, qtil, rtil)

    Cl1, Cl2, Cl3, Cl4, Clp, Clr, Clbeta, Cm1, Cm2, Cm3, Cm4, Cmalfa, \
    Cmq, Cnr, Cnbeta, Cndr = C

    ptil, qtil, rtil = til

    da1, da2, de1, de2, dr, Ft = U

    # Coeficiente de momento de rolagem
    CmL = Cl1*da1 + Cl2*da2 + Cl3*de1 + Cl4*de2 + Clbeta*bet + Clp*ptil + Clr*rtil

    # Coeficiente de momento de arfagem
    CmM = Cm1*da1 + Cm2*da2 + Cm3*de1 + Cm4*de2 + Cmq*qtil + Cmalfa*alp
```

```

# Coeficiente de momento de guinada
CmN = Cndr*dr + Cnr*rtil + Cnbeta*bet

out = np.array([CmL, CmM, CmN])
return out

def F_aero(alp, bet, V, rho, S, C):
    # Função para o cálculo das forças aerodinâmicas
    # alp = ângulo de ataque (alpha) [rad]
    # bet = ângulo de glissada (betha) [rad]
    # V = Velocidade relativa do ar Vt [m/s]
    # rho = densidade [kg/m³]
    # S = Área da asa [m²]
    # C = Derivadas aerodinâmicas adimensionais

    Cx, Cy, Cz = C_aero(C, alp, bet)

    # Pressão dinâmica
    qb = 0.5 * rho * V**2

    # Forças aerodinâmicas ao longo dos eixos x, y e z
    X = qb * S * Cx
    Y = qb * S * Cy
    Z = qb * S * Cz

    out = np.array([X, Y, Z])
    return out

def M_aero(alp, bet, V, rho, S, b, mac, C, U, til):
    # Função para o cálculo dos momentos aerodinâmico
    # alp = ângulo de ataque (alpha) [rad]
    # bet = ângulo de glissada (betha) [rad]
    # V = Velocidade relativa do ar Vt [m/s]
    # rho = densidade [kg/m³]
    # S = Área da asa [m²]
    # b = envergadura da asa [m]
    # mac = corda média aerodinâmica [m]
    # C = Derivadas de estabilidade adimensionais
    # U = vetor de controle
    # til = taxas angulares adimensionais (ptil, qtil, rtil)

    CmL, CmM, CmN = C_momento(C, U, alp, bet, til)

    # Pressão dinâmica
    qb = 0.5 * rho * V**2

    # Momentos aerodinâmicos de rolagem, arfagem e guinada
    L = qb * S * b * CmL
    M = qb * S * mac * CmM
    N = qb * S * b * CmN

    out = np.array([L, M, N])
    return out

def gravidade(a, b, t, p):
    # a = Ângulo de arfagem alpha [rad]
    # b = Ângulo de deriva beta [rad]
    # t = Ângulo de trajetória de arfagem theta [rad]
    # p = Ângulo de rolagem phi [rad]

```

```

g = 9.81

# componentes gravitacionais wind-axes
g1 = g * (-cos(a)*cos(b)*sin(t) + sin(b)*sin(p)*cos(t) + \
          sin(a)*cos(b)*cos(p)*cos(t))
g2 = g * (cos(a)*sin(b)*sin(t) + cos(b)*sin(p)*cos(t) - \
          sin(a)*sin(b)*cos(p)*cos(t))
g3 = g * (sin(a)*sin(t) + cos(a)*cos(p)*cos(t))

out = np.array([g1, g2, g3])
return out

##### Parâmetros Constantes do Modelo #####

#### Dados Atmosféricos
rho = 1.225      # Densidade do ar MSL [kg/m³]
g = 9.81        # Aceleração gravitacional

#### Dados geométricos da aeronave
m = 28          # Massa [kg]
mac = 0.58      # Corda média aerodinâmica [m]
b = 3.1         # Envergadura da asa [m]
S = 1.80        # Área da asa [m²]

#### Momentos de inércia
Ixx = 2.56      # Momento de inércia Ixx [kgm²]
Iyy = 10.9      # Momento de inércia Iyy [kgm²]
Izz = 11.3      # Momento de inércia Izz [kgm²]
Ixz = 0.5       # Momento de inércia Ixz [kgm²]

#### Derivadas aerodinâmicas
Cx1 = -2.12 * 10**(-2)      # C_aero[0] Coeficiente adimensional Cx1
Cx2 = -2.66 * 10**(-2)      # C_aero[1] Coeficiente adimensional Cxalpha
Cx3 = -1.55                 # C_aero[2] Coeficiente adimensional Cxalpha2
Cx4 = -4.01 * 10**(-1)      # C_aero[3] Coeficiente adimensional Cxbeta

Cy1 = -3.79 * 10**(-2)      # C_aero[4] Coeficiente adimensional Cybeta

Cz1 = 1.29 * 10**(-2)       # C_aero[5] Coeficiente adimensional Cz1
Cz2 = -3.25                 # C_aero[6] Coeficiente adimensional Czalpha

C_a = np.array([Cx1, Cx2, Cx3, Cx4, Cy1, Cz1, Cz2])

### Derivadas de estabilidade
Cl1 = 3.395 * 10**(-2)      # C_estab[0]
Cl2 = -3.395 * 10**(-2)     # C_estab[1]
Cl3 = 4.850 * 10**(-3)      # C_estab[2]
Cl4 = -4.850 * 10**(-3)     # C_estab[3]
Clp = -1.92 * 10**(-1)      # C_estab[4]
Clr = 3.61 * 10**(-2)       # C_estab[5]
Clbeta = -1.30 * 10**(-2)   # C_estab[6]

Cm1 = 2.275 * 10**(-1)      # C_estab[7]
Cm2 = 2.275 * 10**(-1)      # C_estab[8]
Cm3 = 3.890 * 10**(-2)      # C_estab[9]

```

```

Cm4 = 3.890 * 10**(-2)      # C_estab[10]
Cmalfa = -9.03 * 10**(-2)   # C_estab[11]
Cmq = -9.83                  # C_estab[12]

Cnr = -2.14 * 10**(-1)      # C_estab[13]
Cnbeta = 8.67 * 10**(-2)    # C_estab[14]
Cndr = 2.25 * 10**(-2)      # C_estab[15]

C_e = np.array([Cl1, Cl2, Cl3, Cl4, Clp, Clr, Clbeta, Cm1, Cm2, Cm3, Cm4, \
                Cmalfa, Cmq, Cnr, Cnbeta, Cndr])

### Constantes de inércia
Gamma = Ixx*Izz - Ixz**2

c1 = ((Iyy - Izz)*Izz - Ixz**2)/Gamma
c2 = ((Ixx - Iyy + Izz)*Ixz)/Gamma
c3 = Izz/Gamma
c4 = Ixz/Gamma
c5 = (Izz - Ixx)/Iyy
c6 = Ixz/Iyy
c7 = 1/Iyy
c8 = (Ixx*(Ixx - Iyy) + Ixz**2)/Gamma
c9 = Ixx/Gamma

ci = np.array([c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9])

##### Modelo de 6 GDL #####
def UAV_model1(t, x, U, Ca, Ce, ci):
    # Função com o sistema de equações diferenciais do modelo de 6 GDL,
    # considerando equações de força no sistema de eixos do ventos (wind-axes) e
    # as demais equações no sistema de eixos fixos no corpo (body-axes).
    # Hipóteses adotadas: 1. Terra plana; 2. Corpo rígido de massa constante
    #
    # t é o vetor de tempo
    # x o vetor de estados
    # U o vetor de controle
    # Ca o vetor de derivadas aerodinâmicas
    # Ce o vetor de derivadas de estabilidade
    # ci o vetor de constantes de inércia
    #
    # O modelo possui limitações devido a inconsistências matemáticas quando
    #  $V_t = 0$ ,  $\theta = \pm 90^\circ$  e  $\beta = \pm 90^\circ$  (divisões por zero ou  $\tan(90)$ )

    Vt, alpha, beta, phi, theta, psi, p, q, r, n, e, h = x # Variáveis de estado
    da1, da2, de1, de2, dr, Ft = U # Entradas de controle
    Cx1, Cx2, Cx3, Cx4, Cy1, Cz1, Cz2 = Ca # Derivadas aerodinâmicas
    Cl1, Cl2, Cl3, Cl4, Clp, Clr, Clbeta, Cm1, Cm2, Cm3, Cm4, Cmalfa, \
    Cmq, Cnr, Cnbeta, Cndr = Ce # Derivadas de estabilidade
    c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9 = ci # Constantes de inércia

    # Cálculo das componentes gravitacionais
    g1, g2, g3 = gravidade(alpha, beta, theta, phi)

    # Cálculo das forças aerodinâmicas
    X, Y, Z = F_aero(alpha, beta, Vt, rho, S, Ca)

    # Cálculo das componentes de momento
    ptil = b*p/(2*Vt)
    qtil = mac*q/(2*Vt)
    rtil = b*r/(2*Vt)

```

```

til = np.array([ptil, qtil, rtil])

L, M, N = M_aero(alpha, beta, Vt, rho, S, b, mac, Ce, U, til)

# EDO's
# Condição de existência:
costheta = cos(theta)
if abs(cos(theta)) <= 0.0001:
    costheta = 0.0001*np.sign(costheta)
tantheta = sin(theta)/costheta

cosbeta = cos(beta)
if abs(cos(beta)) <= 0.0001:
    cosbeta = 0.0001*np.sign(cosbeta)
tanbeta = sin(beta)/cosbeta

if Vt <= 0.99:
    Vt = 1

# Equações de Força
dVt = (1/m)*(X - Ft*cos(alpha)*cosbeta + m*g1)
dalphi = q - (p*cos(alpha) + r*sin(alpha))*tanbeta + (1/(m*Vt*cosbeta))*\
(Z - Ft*sin(alpha) + m*g3)
dbeta = p*sin(alpha) - r*cos(alpha) + (1/(m*Vt))*\
(Y - Ft*cos(alpha)*sin(beta) + m*g2)

# Equações Cinemáticas
dphi = p + tantheta*(q*sin(phi) + r*cos(phi))
dtheta = q*cos(phi) - r*sin(phi)
dpsi = (q*sin(phi) + r*cos(phi))/costheta

# Equações de Momento
dp = (c1*r + c2*p)*q + c3*L + c4*N
dq = c5*p*r - c6*(p**2 - r**2) + c7*M
dr = (c8*p - c2*r)*q + c4*L + c9*N

# Equações de posição

dn = Vt*cos(theta)*cos(psi)
de = Vt*cos(theta)*sin(psi)
dh = -Vt*sin(theta)

dxdt = np.array([dVt, dalphi, dbeta, dphi, dtheta, dpsi, dp, dq, dr, dn, \
de, dh])

return dxdt

##### Parâmetros de Simulação #####
metodo = 2 # Método de integração 1 = solve_ivp; 2 = odeint

tf = 40 # tempo de simulação ##### Importante
nsteps = 4000 # numero de incrementos de tempo
delta_t = tf/(nsteps-1) # valor do incremento
ts = np.linspace(0,tf,nsteps-1) # vetor de tempo

# Vetor de armazenamento de variáveis de estado de força
Vts = np.zeros(nsteps-1)
alphas = np.zeros(nsteps-1)
betas = np.zeros(nsteps-1)

```

```

# Vetor de armazenamento de variáveis de estado cinemáticas
phis = np.zeros(nsteps-1)
thetas = np.zeros(nsteps-1)
psis = np.zeros(nsteps-1)

# Vetor de armazenamento de variáveis de estado de momento
ps = np.zeros(nsteps-1)
qs = np.zeros(nsteps-1)
rs = np.zeros(nsteps-1)

# Vetor de armazenamento de variáveis de posição
ns = np.zeros(nsteps-1)
es = np.zeros(nsteps-1)
hs = np.zeros(nsteps-1)

##### Condições iniciais #####
Vt0 = 30 # Velocidade inicial
alpha0 = np.radians(0) # Ângulo de ataque inicial
beta0 = np.radians(0) # Ângulo de sideslip inicial

phi0 = np.radians(0) # Ângulo de guinada inicial
theta0 = np.radians(0) # Ângulo de arfagem inicial
psi0 = np.radians(0) # Ângulo de rolagem inicial

p0 = 0 # Velocidade angular de guinada inicial
q0 = 0 # Velocidade angular de arfagem inicial
r0 = 0 # Velocidade angular de rolagem inicial

n0 = 0 # Deslocamento no sentido Norte-Sul
e0 = 0 # Deslocamento no sentido Leste-Oeste
h0 = -500 # Altitude de voo

x0 = np.array([Vt0, alpha0, beta0, phi0, theta0, psi0, p0, q0, r0, n0, e0, h0])

# Iniciação do Vetor de controle

da1 = np.radians(0) # Deflexão do aileron1 [rad] - Positivo = Deflexão para cima
da2 = np.radians(0) # Deflexão do aileron2 [rad] - Positivo = Deflexão para cima
de1 = np.radians(0) # Deflexão do prof.1 [rad] - Positivo = Deflexão para cima
de2 = np.radians(0) # Deflexão do prof.2 [rad] - Positivo = Deflexão para cima
dr = np.radians(0) # Deflexão do Leme [rad] - Positivo = Deflexão para direita
Ft = 0 # Força propulsiva [N]

U = np.array([da1, da2, de1, de2, dr, Ft])

##### Simulação #####

if metodo == 1:
    inicio = time.time()

    for i in range(nsteps-1):
        # Armazena os valores das variáveis de estado
        Vts[i] = x0[0]
        alphas[i] = x0[1]
        betas[i] = x0[2]
        # x0[3] - Condição para  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ 
        phis[i] = np.arctan2(sin(x0[3])*cos(x0[4]), cos(x0[3])*cos(x0[4]))
        # x0[4] - Condição para  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ 
        thetas[i] = np.arcsin(sin(x0[4]))

```

```

# x0[5] - Condição para  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ 
psis[i] = np.arctan2(sin(x0[5])*cos(x0[4]), cos(x0[5])*cos(x0[4]))
ps[i] = x0[6]
qs[i] = x0[7]
rs[i] = x0[8]
ns[i] = x0[9]
es[i] = x0[10]
hs[i] = x0[11]
if hs[i] > 0: # Parar simulação quando atinge o solo
    hs[i] = 0

# Integração numérica do modelo dinâmico do UAV - método solve_ivp (RK45)
y1 = solve_ivp(UAV_model1, (0,delta_t), x0, args=(U, C_a, C_e, ci))

# Atualiza o valor do vetor de estados pegando o último valor da simulação
y1 = y1.y
x0 = y1[:,-1]
fim = time.time()
print(fim - inicio)

if metodo == 2:
    inicio = time.time()

    for i in range(nsteps-1):
        # Armazena os valores das variáveis de estado
        Vts[i] = x0[0]
        alphas[i] = x0[1]
        betas[i] = x0[2]
        # x0[3] - Condição para  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ 
        phis[i] = np.arctan2(sin(x0[3])*cos(x0[4]), cos(x0[3])*cos(x0[4]))
        # x0[4] - Condição para  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ 
        thetas[i] = np.arcsin(sin(x0[4]))
        # x0[5] - Condição para  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ 
        psis[i] = np.arctan2(sin(x0[5])*cos(x0[4]), cos(x0[5])*cos(x0[4]))
        ps[i] = x0[6]
        qs[i] = x0[7]
        rs[i] = x0[8]
        ns[i] = x0[9]
        es[i] = x0[10]
        hs[i] = x0[11]
        if -hs[i] < 0:
            hs[i] = 0

        # Integração numérica do modelo dinâmico do UAV - método LSODA (odeint)
        y1 = odeint(UAV_model1, x0, [0, delta_t], args=(U, C_a, C_e, ci), \
                    tfirst=True)
        # Atualiza o valor do vetor de estados pegando o último valor da simulação
        x0 = y1[-1]

    fim = time.time()
    print(fim - inicio)

## Para plotar os resultados, utilize as funções plt.pyplot() ou exporte os
## arquivos para txt e plote em seu software de preferência.

##### Exemplo pyplot #####
fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(25, 6))
axs[0].plot(ts, Vts, label='Vt [m/s]')
axs[0].set_title('Vt [m/s]')
axs[0].legend(loc='best')
axs[0].grid()

```



```
axs[1].plot(ts, -np.degrees(alphas), label = r'$\alpha$ [deg]')
axs[1].plot(ts, np.degrees(betas), label = r'$\beta$ [deg]')
axs[1].set_title(r'$\alpha$, $\beta$')
axs[1].legend(loc='best')
axs[1].grid()
axs[2].plot(ts, np.degrees(phis), label = r'$\phi$ [deg]')
axs[2].plot(ts, np.degrees(thetas), label = r'$\theta$ [deg]')
axs[2].plot(ts, np.degrees(psis), label = r'$\psi$ [deg]')
axs[2].set_title(r'$\phi$, $\theta$, $\psi$')
axs[2].legend(loc='best')
axs[2].grid()
fig.tight_layout()
plt.show()
```

```
#
#
#
#
#
#
#
```

ANEXO B – DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES UTILIZADAS

1. $C_{aero}(C, \alpha, \beta)$:

- Entradas:

- C - Vetor *numpy* de derivadas aerodinâmicas ($C = \text{np.numpy}([C1, C2, C3....])$);
- α - Ângulo de ataque [rad];
- β - Ângulo de derrapagem [rad];

- Saídas:

- $out = [Cx, Cy, Cz]$ - Vetor com os coeficientes aerodinâmicos ($C = \text{np.array}([Cx, Cy, Cz])$)

2. $C_{momento}(C, U, alp, bet, til)$:

- Entradas:

- C - Vetor *numpy* de derivadas de estabilidade ($C = \text{np.numpy}([C1, C2, C3....])$);
- U - Vetor de entradas de controle ($U = \text{np.array}([da1, da2, de1, de2, dr, df])$);
- α - Ângulo de ataque [rad];
- β - Ângulo de derrapagem [rad];
- til - Vetor de taxas adimensionais de momento ($til = \text{np.array}([\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}])$);

- Saídas:

- $out = [CmL, CmM, CmN]$ - Vetor com os coeficientes de momento
($Cm = \text{np.array}([CL, CM, CN])$)

3. $F_{aero}(alp, bet, V, rho, S, C)$:

- Entradas:

- α - Ângulo de ataque [rad];
- β - Ângulo de derrapagem [rad];
- V - Velocidade relativa V_T [m/s];
- ρ - Densidade do ar [kg/m^3];
- S - Área da asa;
- C - Vetor com os coeficientes aerodinâmicos; ($C = \text{np.array}([Cx, Cy, Cz])$) - Saída da função C_{aero});

- Saídas:

- $out = [X, Y, Z]$ - Vetor com os Forças aerodinâmicas ($F = \text{np.array}([X, Y, Z])$)

4. $M_{aero}(alp, bet, V, rho, b, mac, C, U, til:$

- Entradas:

- α - Ângulo de ataque [rad];
- β - Ângulo de derrapagem [rad];
- V - Velocidade relativa V_T [m/s];
- ρ - Densidade do ar [kg/m³];
- S - Área da asa [m²];
- b - Envergadura da asa [m];
- mac - Corda média aerodinâmica [m];
- C - Vetor *numpy* de derivadas de estabilidade ($C = np.numpy([C1, C2, C3....])$);
- U - Vetor de entradas de controle ($U = np.array([da1, da2, de1, de2, dr, df])$);
- til - Vetor de taxas adimensionais de momento ($til = np.array([\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}])$);

- Saídas:

- $out = [L, M, N]$ - Vetor com os Momentos aerodinâmicas ($M = np.array([L, M, N])$)

5. $gravidade(a, b, t, p):$

- Entradas:

- $a = \alpha$ - Ângulo de ataque [rad];
- $b = \beta$ - Ângulo de derrapagem [rad];
- $t = \theta$ - Ângulo de arfagem [rad];
- $p = \phi$ - Ângulo de rolagem [rad];

- Saídas:

- $out = [g1, g2, g3]$ - Vetor com as componentes gravitacionais ($g = np.array([g1, g2, g3])$)

6. $UAV_{model1}(t, x, U, Ca, Ce, ci):$

7. Entradas:

- t - Vetor tempo de integração (necessário para a integração numérica *solve_ivp* ou *odeint*);
- x - Vetor *numpy* com as variáveis de estado $x = np.array([Vt, alpha, beta...])$;
- U - Vetor de entradas de controle ($U = np.array([da1, da2, de1, de2, dr, df])$);
- Ca - Vetor *numpy* de derivadas aerodinâmicas ($C = np.numpy([C1, C2, C3....])$);
- Ce - Vetor *numpy* de derivadas de estabilidade ($C = np.numpy([C1, C2, C3....])$);
- ci - Vetor *numpy* com as constantes de inércia $ci = np.array([c1, c2, c3...])$;

8. Saídas:

- $dxdxdt = [dVt, dalpha, dbeta....]$ - Vetor com as derivadas das variáveis de estado