



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Bauru

Carlos Augusto Vicente Quagliato

Cônicas e Quádricas: Medidas de Superfícies e Volumes

Bauru

2019

Carlos Augusto Vicente Quagliato

Cônicas e Quádricas: Medidas de Superfícies e Volumes

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Bauru.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares

Bauru
2019

Q1c

Quagliato, Carlos Augusto Vicente

Cônicas e quádricas : medidas de superfícies e volumes /
Carlos Augusto Vicente Quagliato. -- Bauru, 2019
95 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Marcelo Reicher Soares

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cônicas e quádricas. 3.
Tecnologia educacional. 4. Educação básica e superior. 5.
Áreas e volumes. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da
Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Carlos Augusto Vicente Quagliato

Cônicas e Quádricas: Medidas de Superfície e Volume

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Bauru.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
UNESP – Câmpus de Bauru
Orientador

Prof. Dr. Valter Locci
UNESP – Câmpus de Bauru

Profa. Dra. Angela Pereira Rodrigues Moreira
UNIVESP – São Paulo

Bauru
18 de março de 2019

Dedico este trabalho aos meus estimados pais João e Luzia, meus amados filhos Gabriel e Valentina e minha companheira e braço direito Selma.

AGRADECIMENTOS

Sou grato a muitas pessoas e instituições por poder concluir essa tarefa de dedicação a pesquisa, aprendizado e crescimento humano. Minha família, amigos e amigas que sempre estiveram do meu lado, me desejando sucesso, mas minha amada Selma foi quem mais dividiu os prazeres e ansiedades dessa jornada.

Devo agradecer muito meu orientador Dr. Marcelo Reicher Soares, que desde o primeiro contato me apoiou e permitiu que eu tivesse toda liberdade de trabalho, me socorrendo, quando necessário. A Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza, que pude contar nos momentos precisos e ela sempre pronta me atendeu.

À UNESP, onde há muito tempo permaneço me aprimorando intelectualmente e culturalmente, ao IMPA pela nobre iniciativa do PROFMAT. Também devo agradecer ao MEC e à CAPES, que desde 2011 abrigaram o PROFMAT. E que todos continuemos a nos desenvolver.

Sonha e serás livre de espírito... luta e serás livre na vida.

Che Guevara

RESUMO

A partir de um estudo de cubagem de tora de eucalipto por semelhança de tronco de cone de base elíptica, efetuando os cálculos de volume por semelhança ao tronco de cone de base circular e comprovação de resultado por cálculo diferencial integral, realiza-se um estudo histórico sobre a área do círculo para se chegar à área da elipse pelo desenvolvimento apresentado por Arquimedes nesse assunto. Com apresentação do teorema da medida da área da elipse, demonstrado pela dupla redução ao absurdo e utilização do método da exaustão de Eudoxo. Na sequência, verificamos que esse desenvolvimento matemático foi inspirador para o desenvolvimento do cálculo diferencial integral e para Cavalieri enunciar dois famosos princípios, um para o cálculo de área e outro para o de volume, estes são usados nos próximos cálculos de área da elipse e volume de sólidos elípticos. Os princípios de Cavalieri são teoremas e apresentamos as demonstrações pelo cálculo diferencial integral, também usado como alternativa aos cálculos de volume dos sólidos elípticos.

Palavras-chave: Cônicas, Quádricas, Esferoides, Conoides, Áreas, Volumes, Ensino de Matemática, Arquimedes.

ABSTRACT

From a study of eucalyptus log cube by the similarity of an elliptical cone trunk, performing the volume calculations by resemblance to the circular base cone trunk and verification of the result by integral differential calculus, a historical study is carried out on the area of the circle and to reach the area of the ellipse by the development presented by Archimedes on this subject. Presentation of the theorem of the measurement of the area of the ellipse, demonstrated by the double reduction to the absurd and use of the Eudoxo exhaustion method. It follows that this mathematical development was inspiring for the development of integral differential calculus and for Cavalieri to enunciate two famous principles, one for area calculation and another for volume, which are used in the next area calculations of the ellipse and volume of elliptical solids. The principles of Cavalieri are theorems and the demonstrations were presented by integral differential calculus, also used as an alternative to volume calculations of elliptical solids.

Keywords: Conic, Quadric, Spheroids, Cenoids, Areas, Volumes, Mathematics Teaching, Archimedes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Tronco de cone	15
Figura 2 - Extremidade Circular.....	16
Figura 3 - Extremidade Elíptica	16
Figura 4 – Tronco de cone elíptico	17
Figura 5 – Prismas de bases retangulares	19
Figura 6 – Prisma de base quadrada	20
Figura 7 – Elipse	22
Figura 8 – Cone circular	24
Figura 9 – Cone elíptico	26
Figura 10 – Cone elíptico em xyz	28
Figura 11 – Lado de polígono inscrito	39
Figura 12 – Polígono inscrito e circunscrito.....	42
Figura 13 - Decomposição da circunferência	45
Figura 14 – Construções de polígonos inscritos.....	47
Figura 15 – Construções de polígonos inscritos.....	48
Figura 16 – Construções de polígonos inscritos.....	48
Figura 17 – Construções de polígonos inscritos e circunscritos.....	49
Figura 18 – Polígonos inscritos na elipse	53
Figura 19 – Elipse e seus elementos	57
Figura 20 – Corda na elipse e circunferência	58
Figura 21 - Quarto de elipse e área do retângulo interno	60
Figura 22 – Elipse e pontos notáveis	64
Figura 23 – Triângulo retângulo, mudança de variável	65
Figura 24 – Regiões no plano xy.....	68
Figura 25 – Cilindro elíptico reto e oblíquo	72
Figura 26 – Cilindro elíptico em xyz	73
Figura 27 – Cone elíptico reto e oblíquo	74
Figura 28 – Seção do cone elíptico	75
Figura 29 – Seção do cone elíptico	76
Figura 30 - Cone elíptico em xyz.....	77
Figura 31 - Cone elíptico em xyz.....	79
Figura 32 - Cone elíptico em xyz.....	79
Figura 33 - Elipsoide em xyz	80
Figura 34 - Semielipsoide em xyz	81
Figura 35 - Semiesfera em xyz.....	83
Figura 36 – Cilindro com cone inscrito e semiesfera.....	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Medida da Tora de Eucalipto	32
Tabela 2 - Volume de Tora de Eucalipto	32
Tabela 3 – Tabela de perímetros inscritos e circunscritos	50

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Volume de Tora de Eucalipto.....	33
--	----

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 CUBAGEM DE TORA.....	14
2.1 Problema motivador	14
2.2 Modelagem para o cálculo do volume de toras.....	21
2.2.1 Excentricidade da elipse	21
2.2.2 Tronco de cone de bases circulares	24
2.2.3 Tronco de cone de bases elípticas	25
2.2.4 Cálculo do volume por integral	27
2.3 Comparação dos resultados	31
3 ÁREA DA ELIPSE	35
3.1 Abordagem histórica	35
3.2 Medidas no círculo	38
3.2.1 Área do círculo.....	38
3.2.2 Comprimento da circunferência	45
3.3 Determinação do π	47
3.4 Área da elipse por Arquimedes.....	51
3.5 Princípios de Cavalieri	56
3.6 Área da elipse pelo cálculo diferencial integral	63
3.7 Demonstração dos Teoremas de Cavalieri	67
3.7.1 Teorema de Cavalieri para áreas.....	68
3.7.2 Teorema de Cavalieri para volumes	69
4 SÓLIDOS ELÍPTICOS	71
4.1 Cilindro elíptico.....	71
4.2 Cone elíptico	74
4.2.1 – Tronco de cone elíptico.....	78
4.3 – Elipsoide	80
4.3.1 Volume da esfera.....	85
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
REFERÊNCIAS.....	94

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa realizada explana possibilidades de medidas de formas geométricas facilmente encontradas na natureza e em situações que podem ser estudadas pelo ser humano para diversas finalidades, como científica, comercial, social ou de aprendizado. Dessa forma, delimitou-se às formas elípticas, circulares e cônicas para estudo, com o desenvolvimento dos cálculos de suas medidas de áreas e volumes. Houve uma especial preocupação de pesquisar e apresentar métodos de medidas rigorosos, do ponto de vista matemático, mas que pudessem ser expressos em linguagem comum no nível da educação básica e maneiras outras de cálculo foram realizadas numa linguagem mais adequada a nível superior, com expectativa de obtenção dos mesmos valores.

A motivação para apresentar estudo sobre corpos e superfícies Conoides e Esferoides, como assim classificados por Arquimedes de Siracusa, foi devido a um estudo realizado previamente na área de modelagem matemática, como parte avaliativa da disciplina de modelagem matemática do curso de mestrado, em “Cubagem de Tora”, o qual tinha o objetivo de calcular a medida do volume de madeira, em metros cúbicos, nas toras de árvores de Eucalipto cortadas e ainda plantadas. Esses estudos foram realizados na região de Bauru, que no seu entorno apresenta grande quantidade de Eucalipto para corte. Foram pesquisados métodos de medidas de volume de toras considerados por organismos, como Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (IBAMA), madeireiras da região e proprietários de glebas com plantio de eucalipto. Verificamos a necessidade de calcular a medida das toras por semelhança a medidas de sólidos geométricos com bases circulares e elípticas.

O estudo de cônicas é parte integrante da grade curricular para alunos do ensino médio na educação básica e realizado na área de geometria analítica, na maioria das vezes, apenas caracterizando as equações das curvas cônicas com pouca abordagem de medidas de comprimento, áreas e volumes de corpos que podem ser construídos nas bases cônicas e que são comuns de serem encontrados no dia-a-dia. O objetivo desse estudo é mostrar a viabilidade de aprendizado desses

corpos, com justificativa suficientemente plausível no nível de educação básica. Atualmente no ensino de matemática da educação básica o conteúdo que é estudado não abrange o aprendizado de cálculo diferencial e integral, sabemos, no entanto, ser o cálculo diferencial integral ferramenta definitiva para a demonstração de importantes resultados utilizados em proposições que nos fornecem possibilidades de medidas e relações na geometria. Como exemplo desses casos serão abordados os princípios de Cavalieri, demonstrados com integrais múltiplas, mas que no ensino básico são adotados como axiomas, devido à capacidade de exposição e compreensão dos mesmos, para justificar medidas de áreas e volumes.

Foi possível encontrar publicações que valorizam o legado de ilustres matemáticos, como Eudoxo, Euclides, Arquimedes, Cavalieri, Euler, e tantos outros, para edificar caminhos viáveis de estudo dos mesmos elementos geométricos apresentados nesse trabalho e de outros mais. Valorizando a história matemática e as ideias correspondentes nos estudos e demonstrações, com possíveis práticas de ensino-aprendizagem na matemática atual. Observa-se nesse estudo um caminho de desenvolvimento histórico do tema, orientando o leitor aos resultados desejáveis.

Por fim, serão apresentados resultados com corpos de bases elípticas, sem muito avanço em elementos de medida que seriam mais complexos, como perímetros e medidas de seções, para não fugir do objetivo do trabalho, possibilitando ainda que esse trabalho se estendesse por mais formas, com os corpos de bases parabólicas e de hiperbólicas, mas que fica como interesse de complementação do trabalho e aprofundamento no tema.

2 CUBAGEM DE TORA

2.1 Problema motivador

Enceto com um breve resumo do trabalho de “Cubagem de Tora”, que serviu de inspiração à ampliação do estudo de sólidos de seções cônicas com a justificativa de conseguir medidas, desses sólidos, de interesse em situações reais como é verificado neste trabalho. O tema escolhido foi o cálculo do volume de toras naturais de árvores, também conhecido como cubagem de madeira ou desdobro. A escolha desse tema está fundamentada na sua aplicação para o ensino-aprendizagem de matemática que pode ser desenvolvido com alunos de cursos da educação básica, superior ou mesmo na formação de professores de matemática.

Não houve a tentativa de chegar numa estratégia ou sistematização para modelar um problema como esse, mas partir do problema, contando com ferramentas conhecidas e de possível acesso - de acordo com o grau de instrução - para desenvolver um modelo de medição do volume de madeira de uma tora, que seja significativo para a realidade desse tipo de necessidade e que seja eficaz como processo de ensino-aprendizagem.

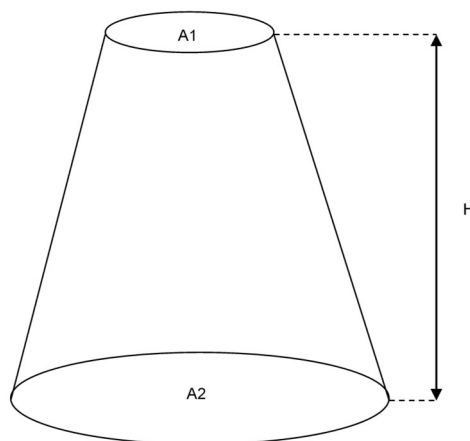
A escolha do problema de medida volumétrica na área madeireira deu-se devido ao contato com o professor Mauro da E.E. Prof. Ayrton Busch de Bauru-SP. Professor de Educação Física e Mediador de Conflitos Escolar apresentou o problema da medição do volume de tora de árvores, pois possui glebas e comercializa madeira. Desejava saber, de forma mais precisa, como realizar o cálculo do volume do tronco de árvore a partir do conhecimento de matemática que nós professores de matemática temos.

A coleta de dados iniciou-se com leituras de trabalhos realizados nessa área, com abordagem educacional, comercial e florestal. Com isso pode-se verificar que apesar de ser um tema bastante explorado do ponto de vista da pesquisa, não há uma unanimidade com relação ao procedimento de medição. Havendo diversas citações das diferenças de métodos usados socialmente nas madeireiras, serrarias e pelos extrativistas.

“Para cada espécie é necessária uma equação de volume devido à natureza variável da árvore, inclusive regional” (STERNADT, 2012), deve ser levado em consideração As irregularidades da tora na qual se realiza a medição e também seu formato. Ele ainda afirma que a única maneira de medir o volume da tora de forma precisa seria a utilização de tanques com água para imersão da tora e calcular seu volume pelo volume da água deslocada. O método adotado pelo IBAMA calcula a medida do volume da tora pelo produto da média aritmética das áreas das extremidades da tora pelo comprimento da tora, este processo é denominado SMALIAN, como vemos a seguir,

$$V = \left(\frac{A_1 + A_2}{2} \right) H \quad (2.1)$$

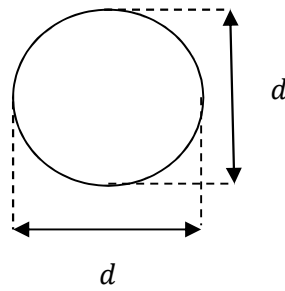
Figura 1 - Tronco de cone



Fonte: Elaborado pelo autor

Tendo em vista as formas de medição para o cálculo de volume dos troncos, realizadas na prática comercial, definiremos as equações do cálculo de volume de troncos, dependendo da medida do diâmetro - quando a seção reta do tronco for circular - e das medidas dos eixos - caso a seção reta seja elíptica. Diferentemente das apresentações da maioria dos livros de matemática, que utilizam a medida do raio para as bases circulares e medidas dos semieixos para as bases elípticas. Assim, a medida de área A da base do tronco será dada, conforme explicitado após as figuras 2 e 3.

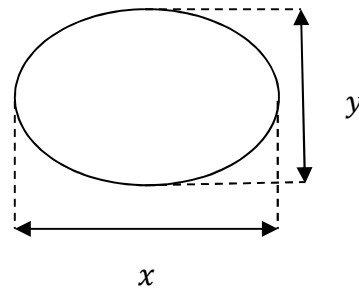
Figura 2 - Extremidade Circular



Fonte: Elaborado pelo autor

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (2.2)$$

Figura 3 - Extremidade Elíptica



Fonte: Elaborado pelo autor

$$A = \pi \frac{x}{2} \frac{y}{2} \quad (2.3)$$

Verificamos, pela pesquisa bibliográfica e pelas entrevistas, métodos diferentes para o cálculo do volume de uma tora de Eucalipto. A serraria adota um cálculo, o extrativista adota outro cálculo e o matemático outro. A prática comercial utiliza medidas dos eixos maiores e menores nas bases dos troncos, dessa forma a Fórmula SMALIAN, utilizada pelo IBAMA, tem seu cálculo dado por substituição de (2.3) em (2.1), considerando X e Y eixos da base maior e x e y eixos da base menor,

$$V = \left(\frac{\pi \frac{x}{2} \frac{y}{2} + \pi \frac{X}{2} \frac{Y}{2}}{2} \right) H$$

$$V = \pi \left(\frac{\frac{xy}{4} + \frac{XY}{4}}{2} \right) H$$

$$V = \left(\frac{xy + XY}{8} \right) \pi H \quad (2.4)$$

Onde x e y correspondem aos eixos da elipse da base menor e X e Y aos eixos da elipse da base maior. Para toras de extremidades circulares, de diâmetro menor d e diâmetro maior D , a equação que verificamos é simplificada pela substituição de (2.2) em (2.1),

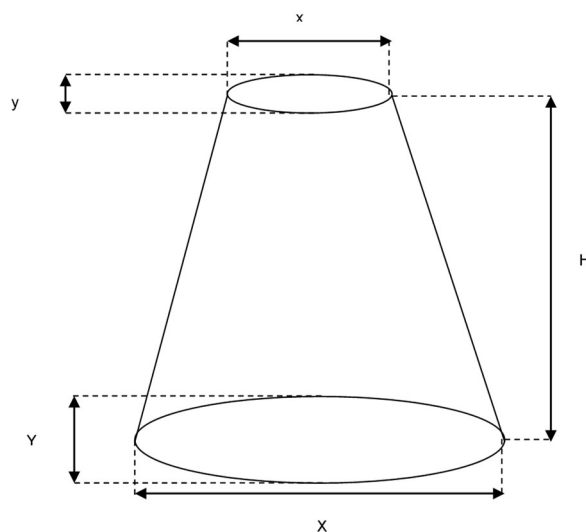
$$V = \left(\frac{xy + XY}{8} \right) \pi H$$

$$V = \left(\frac{dd + DD}{8} \right) \pi H$$

$$V = \left(\frac{d^2 + D^2}{8} \right) \pi H \quad (2.5)$$

Foi realizada uma entrevista com o Sr. Faidiga, proprietário de uma serraria localizada em Bauru-SP e com os responsáveis pelo departamento comercial, a medição do volume da tora para a compra é realizada por uma fórmula da própria empresa, esta calcula os produtos do comprimento da tora, π e de um quarto do quadrado da média aritmética das medidas dos eixos das extremidades da tora.

Figura 4 – Tronco de cone elíptico



Fonte: Elaborado pelo autor

A fórmula informada para a compra de toras de Eucalipto é dada da seguinte maneira,

$$V = \frac{\left(\frac{X + Y + x + y}{4}\right)^2}{4} \pi H \quad (2.6)$$

$$V = \frac{\frac{(X + Y + x + y)^2}{16}}{4} \pi H$$

$$V = \frac{(X + Y + x + y)^2}{64} \pi H \quad (2.7)$$

Para toras de extremidades circulares a equação simplificada será,

$$V = \frac{(D + D + d + d)^2}{64} \pi H \quad (2.8)$$

$$V = \frac{[2(D + d)]^2}{64} \pi H$$

$$V = \frac{4(D + d)^2}{64} \pi H$$

$$V = \frac{(D + d)^2}{16} \pi H \quad (2.9)$$

O Sr. Faidiga informou que em seus quarenta anos de profissão já realizou medições de volumes de diversas maneiras diferentes da usada atualmente, entre elas, a medida de alguns extrativistas, considerados “Caboclos do Mato”, segundo ele, prejuízo certo para a serraria, dada da seguinte forma,

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (2.10)$$

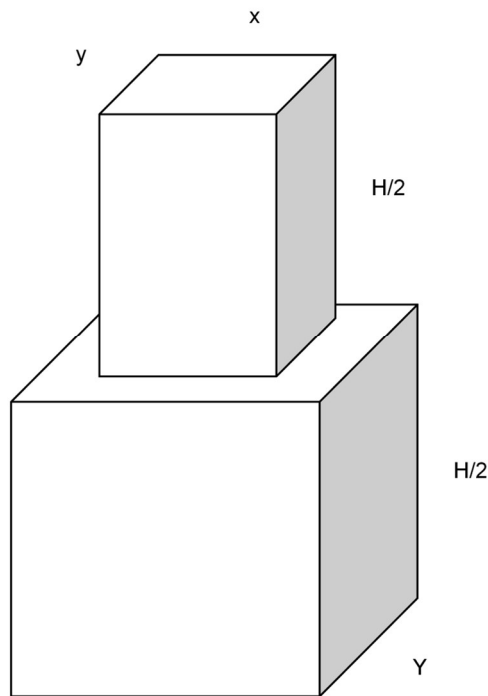
$$V_1 = XYH \quad \text{e} \quad V_2 = xyH$$

$$V = \frac{XYH}{2} + \frac{xyH}{2} \quad (2.11)$$

Isso significa que o volume da tora representaria o volume de dois prismas de bases retangulares com dimensões de medida dos eixos das extremidades da tora e de metade da altura da tora, como representado na figura abaixo, fica evidente a ausência do uso do valor de π para realização do cálculo da área de uma superfície

circular ou elíptica, o que mostra um método mais rudimentar de estimativa, talvez pela falta de conhecimento do valor ou da proporção de unidade de área circular, fato que discutiremos em capítulo adiante.

Figura 5 – Prismas de bases retangulares



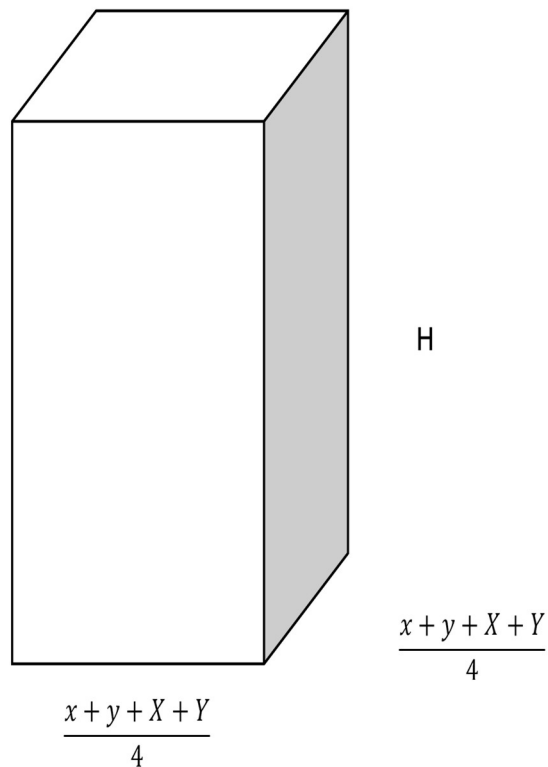
Fonte: Elaborado pelo autor

Um procedimento semelhante foi revelado pelo Prof. Mauro, ao informar que o método para calcular o volume de um tronco de árvore - da maneira que os “caboclos” conhecidos por ele fazem - é o produto do quadrado da média aritmética das medidas dos eixos das extremidades do tronco pelo comprimento do tronco, assim como segue,

$$V = \left(\frac{X + Y + x + y}{4} \right)^2 H \quad (2.12)$$

Esse volume, representa o volume de um prisma de base quadrada, onde o lado é a média aritmética dos eixos das extremidades da tora e de mesma altura da tora.

Figura 6 – Prisma de base quadrada



Fonte: Elaborado pelo autor

Pela verificação da pesquisa bibliográfica e entrevistas com as partes interessadas na compra e venda, os modelos de cálculos de volume de tora estão baseados na adoção da forma da tora de Eucalipto, em formas de sólidos geométricos, que são ideais para cálculo de volume com equações matemáticas desenvolvidas no ensino médio e pelo cálculo de integrais, estudadas nos cursos de graduação em nível superior. Esse tipo de abordagem para o cálculo de volumes de toras é compatível com conteúdo matemático desenvolvido nos níveis citados no ensino da matemática. Com isso a modelagem desse problema se torna uma estratégia de ensino motivadora da aprendizagem, de forma que aplica a teoria matemática em situação real e significativa.

2.2 Modelagem para o cálculo do volume de toras

Uma estratégia na modelagem do cálculo do volume de tora corresponde em considerar a tora como um sólido geométrico. Duas possibilidades verificadas são de as bases dos troncos assumirem formas próximas de serem circulares ou elípticas, neste último caso, tem-se eixos maiores e eixos menores em cada extremidade da tora. Assim, as prováveis formas das toras seriam a aproximação geométrica de um tronco de cone de bases circulares ou de um tronco de cone de bases elípticas. As equações apresentadas pela serraria, pelos extrativistas e pelo IBAMA, dão suporte a entrada de dados, que podem assumir medidas distintas dos eixos perpendiculares em cada base do tronco.

Podemos encontrar nos livros de matemática do ensino médio a dedução de equações de volume de tronco de cone de bases circulares, mas o mesmo geralmente não ocorre para bases elípticas. Faremos aqui um processo análogo ao cálculo do volume de tronco de bases circulares para realizar o cálculo do volume de um tronco de bases elípticas, suportado pelo princípio de Cavalieri, que é tomado como axioma para as deduções de volumes de sólidos geométrico é assim – neste momento – que iremos considerá-lo.

2.2.1 Excentricidade da elipse

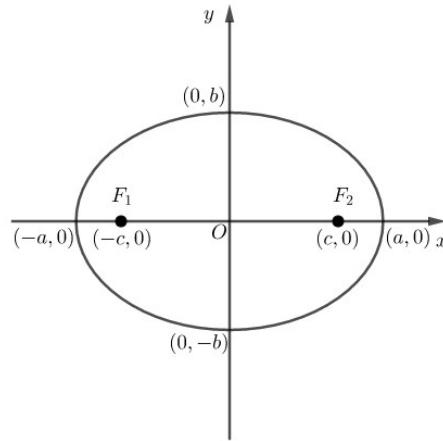
Para a dedução da equação que determina o cálculo do volume do tronco de bases elípticas vamos considerar que as bases elípticas sejam paralelas e correspondem a figuras geométricas semelhantes, conservando constante a excentricidade e em cada base ou seção paralela à base. A excentricidade da elipse é um valor compreendido entre 0 e 1, que traduz a medida do achatamento da elipse, onde o valor 0 significa uma elipse degenerada na forma da circunferência e o valor 1 significa uma elipse degenerada em uma reta. Isto é, quando a excentricidade cresce a elipse se torna mais achatada.

Considerando a elipse centralizada no sistema de coordenadas ortogonais, temos a equação da elipse, correspondente a figura 7, abaixo apresentada,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.13)$$

Devido a definição que a caracteriza, a qual, a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos F_1 e F_2 é igual a $2a$, com $2a > 2c$.

Figura 7 – Elipse



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa maneira,

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad (2.14)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.15)$$

Como o cálculo da excentricidade corresponde a razão entre a semidistância focal e o semieixo maior, então,

$$e = \frac{c}{a} \quad (2.16)$$

Assim substituímos (2.15) em (2.16),

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (2.17)$$

Sendo o semieixo maior de medida a e semieixo menor de medida b e fazendo com que as medidas dos semieixos sejam as mesmas aplicando o limite com a tendendo a b , verificamos que a elipse tende para uma circunferência.

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow b} e &= \lim_{a \rightarrow b} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\ \lim_{a \rightarrow b} e &= \frac{0}{b} \\ \lim_{a \rightarrow b} e &= 0\end{aligned}$$

Dessa forma se $e = 0$ a elipse é degenerada a uma circunferência.

Fazendo c tender a a , temos que b tende a 0. De (2.14) temos.

$$\begin{aligned}c^2 + b^2 &= a^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2\end{aligned}\tag{2.18}$$

Substituindo (2.18) em (2.17),

$$\begin{aligned}e &= \frac{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2)}}{a} \\ e &= \frac{\sqrt{c^2}}{a}\end{aligned}$$

Aplicando o limite de c tendendo a a .

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow a} e &= \lim_{c \rightarrow a} \frac{\sqrt{c^2}}{a} \\ \lim_{c \rightarrow a} e &= 1\end{aligned}$$

Dessa forma se $e = 1$ a elipse é degenerada a uma reta coincidente a abscissa.

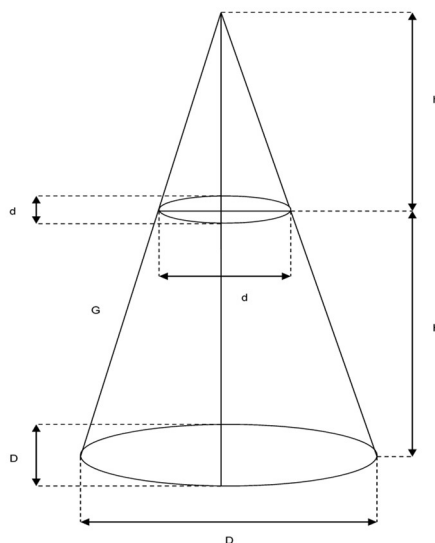
2.2.2 Tronco de cone de bases circulares

Primeiramente verificaremos a dedução do volume do tronco de cone de base circular e altura H , logo após faremos uma dedução análoga para o volume do tronco de cone de bases elípticas, considerando áreas semelhantes das seções dos dois cones para as mesmas alturas. Dessa forma, garante-se a proporção entre os volumes e sustentamos o argumento correspondente ao princípio de Cavalieri.

O volume do tronco de cone de base circular, calculado pela diferença do volume do cone de área da base $\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$ e altura $(H + h)$, com o volume do cone de área de base $\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$ e altura h , conforme se aprende na educação básica, obtemos então,

$$\begin{aligned}
 V &= \left[\frac{1}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (H + h) \right] - \left[\frac{1}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 h \right] \\
 V &= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi D^2 (H + h)}{4} - \frac{\pi d^2 h}{4} \right] \\
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2 H + D^2 h - d^2 h}{4} \right] \\
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2 H + (D^2 - d^2) h}{4} \right] \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

Figura 8 – Cone circular



Fonte: Elaborado pelo autor

A seção triangular de base d e altura h é semelhante a seção triangular de base D e altura $H + h$, portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{h}{d} &= \frac{H + h}{D} \\
 Dh &= dH + dh \\
 Dh - dh &= dH \\
 (D - d)h &= dH \\
 h &= \frac{dH}{D - d}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

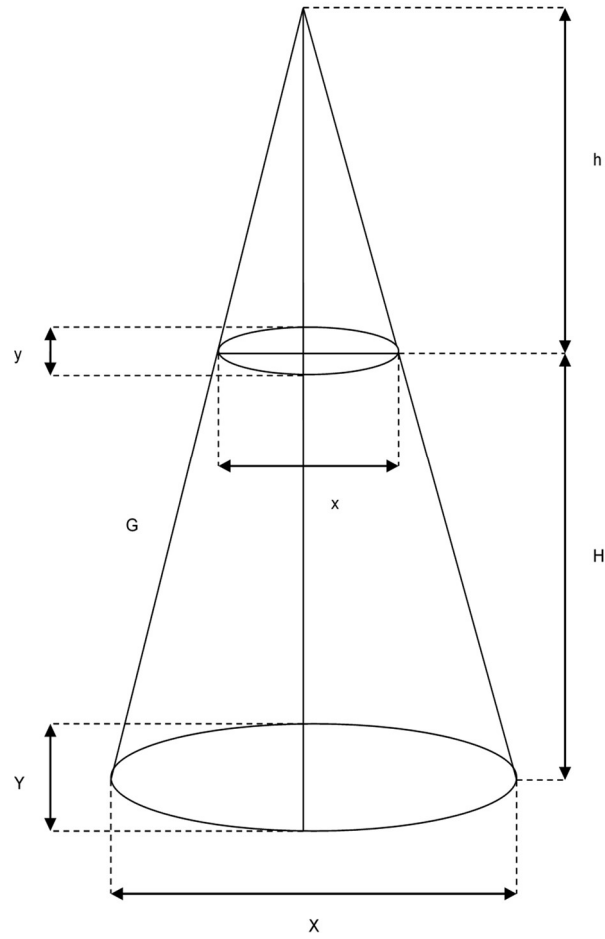
Substituindo (2.20) em (2.19),

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2 H}{4} + \frac{(D^2 - d^2) dH}{4(D - d)} \right] \\
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2 H(D - d) + (D^2 - d^2) dH}{4(D - d)} \right] \\
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2 H(D - d) + (D - d)(D + d)dH}{4(D - d)} \right] \\
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{D^2 H + (D + d)dH}{4} \right] \\
 V &= \frac{\pi H}{3} \left[\frac{D^2 + Dd + d^2}{4} \right]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2.3 Tronco de cone de bases elípticas

Analogamente ao desenvolvimento da equação que calcula o volume em tronco de cone circular dá-se o desenvolvimento da equação do volume do tronco de cone de base elíptica. Considerando um tronco de cone de altura H , o volume desse tronco é a diferença do volume do cone de área da base $\left(\pi \frac{x}{2} \frac{y}{2}\right)$ e altura $(H + h)$, com o volume do cone de área de base $\left(\pi \frac{x}{2} \frac{y}{2}\right)$ e altura h ,

Figura 9 – Cone elíptico



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\begin{aligned}
 V &= \left[\frac{1}{3} \left(\pi \frac{XY}{2} \right) (H + h) \right] - \left[\frac{1}{3} \left(\pi \frac{xy}{2} \right) h \right] \\
 V &= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi XY(H + h)}{4} - \frac{\pi xyh}{4} \right] \\
 V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{XYH + XYh - xyh}{4} \right] \\
 \mathbf{V} &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{\mathbf{XYH} + (\mathbf{XY} - \mathbf{xy})\mathbf{h}}{4} \right]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

A seção triangular de base x e altura h é semelhante a seção triangular de base X e altura $H + h$, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{h}{x} &= \frac{H + h}{X} \\ Xh &= xH + xh \\ Xh - xh &= xH \\ (X - x)h &= xH \\ h &= \frac{xH}{X - x}\end{aligned}\tag{2.23}$$

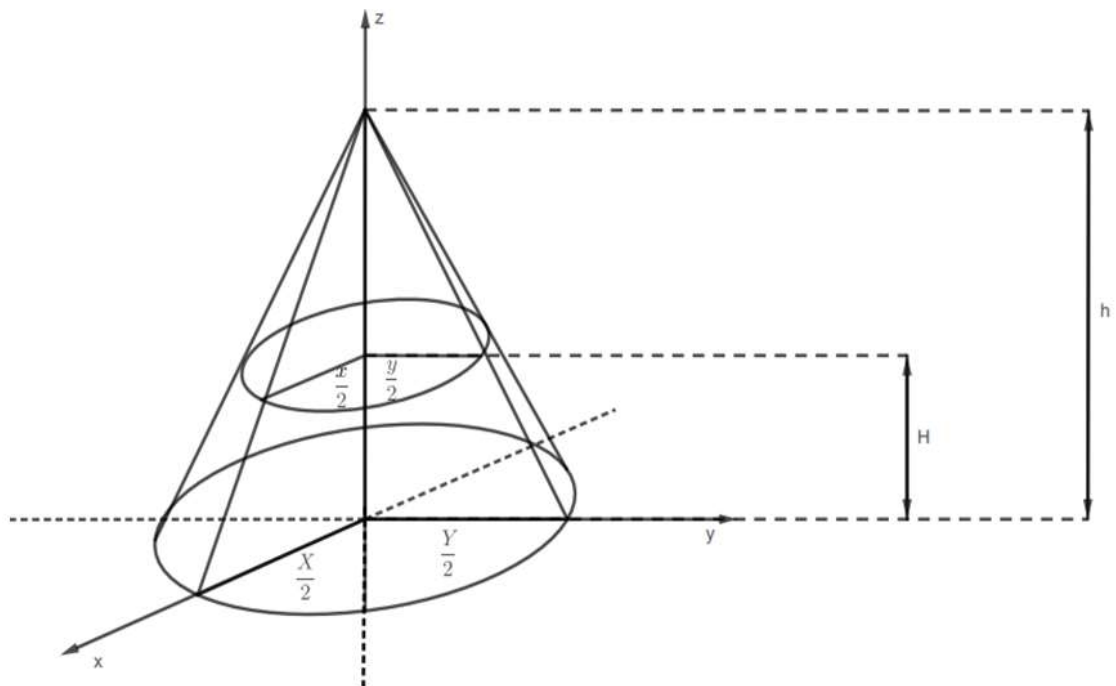
Substituindo (2.23) em (2.22),

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{XYH}{4} + \frac{(XY - xy)xH}{4(X - x)} \right] \\ V &= \frac{\pi H}{3} \left[\frac{X^2Y - xXY + xXY - x^2y}{4(X - x)} \right] \\ V &= \frac{\pi H}{3} \left[\frac{X^2Y - x^2y}{4(X - x)} \right]\end{aligned}\tag{2.24}$$

2.2.4 Cálculo do volume por integral

Para os alunos de graduação do ensino superior, em área de ciências exatas, a modelagem de um problema como esse, passaria por uma abordagem de medição considerada definitiva e eficaz, com o uso do cálculo diferencial e integral. Que parte do princípio de realizar infinitas somas das áreas das superfícies que correspondem as seções paralelas as bases e retas ao eixo que determina a altura do tronco do cone, com espessuras tendendo a zero. Como veremos, os resultados são equivalentes.

Figura 10 – Cone elíptico em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

Parametrização das variáveis, pela semelhança dos triângulos com base no eixo x e altura no eixo z ,

$$\frac{\frac{x}{2}}{h-z} = \frac{\frac{X}{2}}{h} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{X}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (2.25)$$

Parametrização das variáveis, pela semelhança dos triângulos com base no eixo y e altura no eixo z ,

$$\frac{\frac{y}{2}}{h-z} = \frac{\frac{Y}{2}}{h} \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{Y}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (2.26)$$

Medida do volume do tronco de cone, calculado pela integral definida no eixo z da coordenada 0 a H :

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^H \pi \frac{x}{2} \frac{y}{2} dz \\
 V &= \int_0^H \pi \frac{XY}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\
 V &= \frac{\pi XY}{4} \int_0^H \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\
 V &= \frac{\pi XY}{4} \int_0^H 1 - 2\frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^2 dz \\
 V &= \frac{\pi XY}{4} \left[H - \frac{H^2}{h} + \frac{H^3}{3h^2} \right]
 \end{aligned}$$

Equação do volume, dependendo da altura do tronco e da altura do cone,

$$V = \frac{\pi XYH}{3} \left[\frac{3}{4} - \frac{3H}{4h} + \frac{H^2}{4h^2} \right]$$

Realizando certo desenvolvimento algébrico, pretende-se chegar numa equação que dependa da altura do tronco do cone, mas não dependa da altura do cone, primeiramente, multiplicaremos numerador e denominador por $\frac{H}{h}$,

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi XYH}{3} \left[\frac{\frac{H}{4h} \left(3 - \frac{3H}{h} + \frac{H^2}{h^2} \right)}{\frac{H}{h}} \right] \\
 V &= \frac{\pi XYH}{3} \left[\frac{1}{4} \frac{\frac{3H}{h} - \frac{3H^2}{h^2} + \frac{H^3}{h^3}}{\frac{H}{h}} \right]
 \end{aligned}$$

Agora acrescenta-se $(1 - 1)$ no numerador e denominador,

$$V = \frac{\pi XYH}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1 - 1 + \frac{3H}{h} - \frac{3H^2}{h^2} + \frac{H^3}{h^3}}{1 - 1 + \frac{H}{h}} \right] \right\}$$

$$V = \frac{\pi XYH}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1 - \left(1 - \frac{3H}{h} + \frac{3H^2}{h^2} - \frac{H^3}{h^3} \right)}{1 - \left(1 - \frac{H}{h} \right)} \right] \right\}$$

No numerador fatora-se o quadrimônio cúbico, transformando no cubo da diferença,

$$V = \frac{\pi XYH}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1 - \left(1 - \frac{H}{h} \right)^3}{1 - \left(1 - \frac{H}{h} \right)} \right] \right\}$$

No numerador multiplica-se por X^2Y e no denominador por X ,

$$V = \frac{\pi H}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{X^2Y - X^2Y \left(1 - \frac{H}{h} \right)^3}{X - X \left(1 - \frac{H}{h} \right)} \right] \right\}$$

$$V = \frac{\pi H}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{X^2Y - \left[X \left(1 - \frac{H}{h} \right) \right]^2 Y \left(1 - \frac{H}{h} \right)}{X - X \left(1 - \frac{H}{h} \right)} \right] \right\} \quad (2.27)$$

Pela parametrização, (2.25) e (2.26),

$$\frac{x}{2} = \frac{X}{2} \left(1 - \frac{H}{h} \right) \Rightarrow x = X \left(1 - \frac{H}{h} \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{y}{2} = \frac{Y}{2} \left(1 - \frac{H}{h} \right) \Rightarrow y = Y \left(1 - \frac{H}{h} \right) \quad (2.29)$$

Substituindo (2.28) e (2.29) em (2.27), tem-se,

$$V = \frac{\pi H}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{X^2 Y - x^2 y}{X - x} \right] \right\}$$

$$V = \frac{\pi H}{3} \left[\frac{X^2 Y - x^2 y}{4(X - x)} \right] \quad (2.30)$$

2.3 Comparação dos resultados

A equação do volume do tronco de cone de bases elípticas (2.24), desenvolvida de forma análoga a equação do volume de cone de bases circulares (2.21), se mostra precisa, constatado pelo cálculo integral que resultou numa expressão equivalente, que com manipulação algébrica adequada determinou a mesma expressão (2.30). Reciprocamente o cálculo do volume do tronco de cone elíptico, pela integral, nos dá o mesmo valor que é encontrado diretamente por manipulação algébrica, assim como a manipulação que se faz para o cálculo do volume do tronco de cone circular, na forma que se dá a aprendizagem no ensino médio.

Com relação a aplicação prática da cubagem de tora, apesar da possibilidade de modelar por meio do uso da medida do volume de sólidos geométricos com uso do tronco de cone de bases elípticas, devido à forma e espécie de árvore, no desenvolvimento da ferramenta de medição – equação inicialmente deduzida – foi considerado a proporcionalidade das bases, maior e menor, por razão de semelhança, bem como a área de qualquer seção paralela a base, conservando sua excentricidade. Fato que na medição realizada empiricamente no tronco de eucalipto não foi confirmado, apesar de comportamento próximo do esperado.

Esse tipo de experiência nos mostra que o conhecimento empírico serve para constatar a aplicabilidade da pesquisa, pelos exemplos, e para inspirar a ampliação de resultados, generalizações e variáveis consideradas no desenvolvimento da ciência. Com isso, verificamos também a de sofisticação atual dos instrumentos de pesquisa, métodos e medidas.

Para poder chegar a uma conclusão sobre os métodos verificados, fomos até a propriedade rural do Prof. Mauro e medimos uma tora de Eucalipto derrubada a pouco tempo na mata, usaremos aqui as medidas colhidas em campo, afim de comparar os resultados. Para isso tomamos as medidas de eixos em cada extremidade e o comprimento da tora. Representados pela figura 4 e registrados na tabela 1,

Tabela 1- Medida da Tora de Eucalipto

DIMENSÕES	MEDIDAS LINEARES EM METROS
H	15 m
X	0,44 m
Y	0,42 m
X	0,24 m
Y	0,22 m

Fonte: Elaborado pelo autor

Na tabela 2 é registrado o volume da tora de eucalipto com as medidas da tabela 1 e por cálculos de volumes apresentados nesse capítulo.

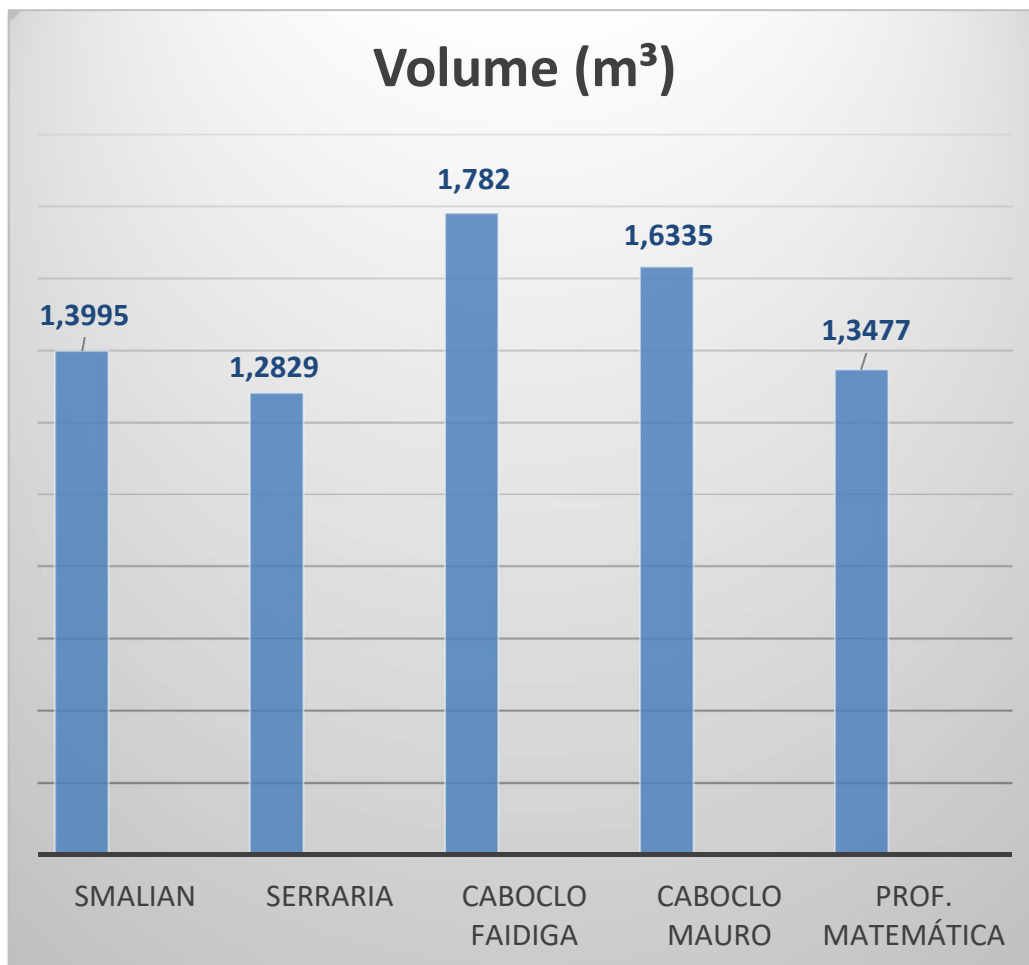
Tabela 2 - Volume de Tora de Eucalipto

FORMAS DE CÁLCULO	NÚMERO DA EQUAÇÃO	VOLUME EM METROS CÚBICOS
Fórmula SMALIAN	(1.1)	1,3995 m ³
Serraria	(1.6)	1,2829 m ³
“Caboclo” pelo Sr. Faidiga	(1.11)	1,782 m ³
“Caboclo” pelo Sr. Mauro	(1.12)	1,6335 m ³
Professor de Matemática	(1.24)	1,3477 m ³

Fonte: Elaborado pelo autor

Resultado também visualizado pelo gráfico 1,

Gráfico 1 - Volume de Tora de Eucalipto



Fonte: Elaborado pelo autor

Acreditamos que a modelagem realizada por nós professores se aproxima mais do volume da tora considerada, pois em todos os casos verificados a tora é comparada a um sólido geométrico, tomamos então esse valor volumétrico como referência. Assim, a fórmula SMALIAN fornece o resultado mais aproximado do valor de referência e os demais métodos correspondem com os interesses comerciais de quem o faz uso, sendo o cálculo da serraria inferior à medida volumétrica de referência e os cálculos dos “Caboclos do Mato” superior à medida de referência. Foi relatado pelo Sr. Faidiga e Sr. Mauro a ausência do uso da constante de proporcionalidade π , nas fórmulas dos “Caboclos do Mato”, fazendo que elas dependam exclusivamente de medidas lineares tomadas empiricamente, sendo o π uma sofisticação para esses produtores, mas a serraria já faz o uso do π , mostrando apropriação da ferramenta de cálculo.

As aproximações quando necessárias foram realizadas na quarta ordem decimal, pois é a mesma ordem trabalhada na serraria nas compras de toras, muitas informações foram relatadas nas entrevistas com o Sr. Faidiga e o Sr. Mauro relativas ao aproveitamento da madeira. Como o rendimento máximo relatado sendo em torno de 75%, rendimento médio por volta de 50%, devido ao manejo, pragas, preservação de áreas nativas, reflorestamento e mais tantas outras informação e experiências que o homem do campo tem a oferecer.

Numa tentativa de estimar o volume de toras sem fazer a derrubada das árvores, foi construído um teodolito com materiais comuns, como copinho de tempero, placa de acrílico, transferidor de acrílico, prumo de ponta, cano de PVC e cabo de vassoura, o aparelho foi aferido ao ponto de fornecer medidas com aproximação na ordem de centímetros e pode-se calcular a altura e os eixos de um Eucalipto até o ponto de aproveitamento para o comércio de tora.

3 ÁREA DA ELIPSE

São raros os livros matemáticos, de geometria, que trazem o cálculo da área de uma elipse e ainda apresentem justificativa para tal cálculo, pautado no desenvolvimento histórico dessa descoberta. Como professor de matemática da educação básica, verifico nas obras dedicadas ao ensino de matemática, nessa modalidade, seção referente ao estudo de cônicas em um capítulo da geometria analítica, dando ênfase a definição, por meio do conceito de lugar geométrico, de elipse, hipérbole e parábola, com dedução de suas respectivas equações gerais, reduzidas e paramétricas; translações e rotações de sistemas; e elementos característicos, como foco, diretriz e excentricidade.

Pode-se destacar que é comum a significação do estudo de curvas cônicas ser realizada com aplicações e conexões nas mais diversas áreas do conhecimento humano, como exemplo temos: as órbitas de planetas e cometas, de acordo com as Leis de Kepler; o estudo de balística; no estudo do movimento de corpos e pontos materiais; na arquitetura e tantos outros. No entanto, medidas de perímetro e área para as curvas cônicas geralmente não são abordados nesse nível de ensino, nem volume de corpos de bases em elipses ou segmentos cônicos. Quais seriam as justificativas para tal ausência?

3.1 Abordagem histórica

Geometria, etimologicamente significa medida da terra. Segundo Heródoto (séc. V a.C.), no Egito a medida da terra era realizada para fins de comércio e cobrança de impostos, sendo necessário refazer cálculos devido as cheias e vazantes do rio Nilo, também era preciso calcular o volume de depósitos de grãos. Matemáticos babilônicos eram mais avançados que os egípcios em álgebra, cálculo numérico e geometria, resolvendo problemas que envolviam a relação de Pitágoras, mil anos

antes dos pitagóricos. Mas os padrões lógicos modernos do desenvolvimento da geometria, com demonstrações, originam-se a partir de Tales de Mileto (sec. VI a.C.) e durante 800 anos os gregos construíram e aperfeiçoaram a geometria dedutivamente, organizada por axiomas, definições e teoremas (LIMA, 1991).

Serão apresentados dois métodos de cálculo de área da elipse, um que necessariamente utiliza resultados da área do círculo e outro por meio do cálculo pela integral. Os primeiros trabalhos para se calcular medidas de circunferências, círculos e esferas são atribuídos a Arquimedes de Siracusa, segundo historiadores, mas as descobertas dos resultados e justificativas destes cálculos são dados por métodos engenhosos e rigorosos que ficaram amplamente conhecidos.

O método de exaustão de Eudoxo, foi a ferramenta matemática utilizada para calcular, com rigor, medidas de figuras limitadas por curvas ou superfícies, em especial áreas de círculos e volume de esferas. Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura (BOYER, 1974). O enunciado do princípio de Eudoxo pode ser encontrado na obra de Euclides, Os Elementos, na Proposição 1, Livro X, cujo enunciado é o seguinte:

Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta (EUCLIDES, 2009, p.354).

Devido a imaginação de Eudoxo, que a história também credita a Arquimedes tal propriedade, a crise gerada por grandezas incomensuráveis foi enfrentada com sucesso e o método da exaustão serviu de instrumento para o cálculo de processos infinitos através de aproximações finitas (CIFUENTES, 2011). Na geometria moderna essa propriedade foi adotada como princípio por Hilbert e dá o sentido intuitivo da noção de “tão pequeno quanto se queira”.

O uso do princípio de Eudoxo e a prova por uma dupla redução ao absurdo, *reduction ad absurdum*, formam a base do método de exaustão. Segundo Boyer, o equivalente grego do cálculo integral.

Essa proposição, que chamaremos de “propriedade de exaustão” equivale à formulação moderna seguinte. Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1 - r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(1 - r)^n = 0$. (BOYER, 1974, p. 67)

Dessa forma, o mecanismo do método de exaustão tem como fundamento gerar uma aproximação por uma série de infinitas etapas, potencialmente possíveis de serem cumpridas e por raciocínio indireto, essas infinitas desigualdades se tornam uma igualdade (GRIMBERG, 2007, p. 67 apud CIFUENTES, 2011), assemelhando muito ao princípio de indução.

Concretamente, para provar $A = B$, onde A e B são grandezas ou magnitudes geométricas como comprimentos, áreas etc., supõe-se $A < B$ e $A > B$ e aplica-se sucessivamente o princípio de Eudoxo a essas desigualdades até chegar a uma dupla contradição, o que eliminaria ambas as possibilidades (BONGIOVANNI, 2005, apud CIFUENTES, 2011).

Embora o método de exaustão de Eudoxo seja rigoroso na demonstração de verdades, ele não atende às expectativas de descoberta de resultados, sendo aplicado apenas quando os resultados já são conhecidos, uma vez descobertos heurísticamente de outra forma.

Arquimedes utilizava um engenhoso método mecânico para as descobertas de proposições matemáticas. Com o uso de alavanca a fim de obter o equilíbrio entre volumes e áreas de superfícies de elementos geométricos, como a esfera e a circunferência, com volumes e áreas conhecidas. Um exemplo é a relação entre o volume de uma esfera e o volume do cone de altura igual ao raio da esfera e base igual ao círculo maior da esfera, posteriormente demonstrado no tratado, *Sobre a Esfera e o Cilindro* (SOARES, 2014).

Tal método se tornou conhecido devido a descoberta pelo filólogo Johan Ludvig Heiberg em 1906 do conteúdo de um palimpsesto, um texto escrito num pergaminho, no século X, e posteriormente, no século XIII, foi raspado para dar lugar a um texto

religioso. Mas foi possível restaurar a maior parte do texto original, que se tratava de uma cópia de um tratado de Arquimedes, *O Método*, que foi enviado em forma de carta para se comunicar com seu amigo Eratóstenes (EVES, 2011).

3.2 Medidas no círculo

Para chegar aos resultados com algumas curvas, como, a área do círculo e perímetro da circunferência, vamos mostrar que esses resultados se fundamentam no método de exaustão de Eudoxo, apesar dos gregos não terem o chamado assim, na história da matemática ficou dessa forma consolidado (BOYER, 1974). Primeiramente será apresentado a proposição 2, do livro XII, de Euclides, *Os Elementos*, que em tradução traz a redação: “Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros” (EUCLIDES, 2009, p. 528).

3.2.1 Área do círculo

Faremos a prova de acordo com notação moderna, como apresentada por EVES (2011).

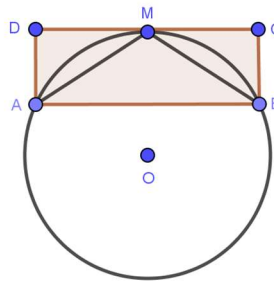
Sejam: A_1 e A_2 as áreas de dois círculos de diâmetro d_1 e d_2 , então:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Mostraremos primeiro, com ajuda da proposição básica, que a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular inscrito pode-se tornar tão pequena quanto se deseje. Seja AB , na figura 11, o lado de um polígono regular inscrito e seja M o ponto médio do arco AB . Note-se que a área do triângulo AMB é metade da área do

retângulo $ABCD$ e por tanto maior que a metade da área do segmento circular AMB . Assim, dobrando-se o número de lados do polígono regular inscrito, a área do polígono aumentará de mais do que a metade da diferença entre a área do círculo e a do polígono. Logo, repetindo-se a operação de dobrar o número de lados um número suficiente de vezes, pode-se fazer com que a diferença entre a área do círculo e a do polígono se torne menor do que qualquer área fixada previamente, por menor que seja.

Figura 11 – Lado de polígono inscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Provaremos de maneira indireta, mostrando que não são verdadeiras as outras duas possibilidades, isto é,

$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

e

$$\frac{A_1}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

suponhamos primeiramente,

$$\frac{A_1}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Podemos, então, inscrever no primeiro círculo um polígono regular cuja área P_1 diferencie tão pouco da de A_1 que,

$$\frac{P_1}{A_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Seja P_2 a área de um polígono regular semelhante ao de área P_1 considerado, mas inscrito no segundo círculo, então,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

segue-se então que,

$$\frac{P_1}{A_2} > \frac{P_1}{P_2}$$

logo,

$$P_2 > A_2$$

O que é um absurdo, pois a área de um polígono regular não pode superar a de seu circuncírculo. De maneira análoga se prova que não pode ocorrer:

$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Donde, por uma dupla *reduction ad absurdum*, o teorema fica demonstrado. Assim, se A é a área e d é o diâmetro de um círculo, $A = kd^2$, onde k é uma constante (na verdade $\frac{\pi}{4}$), que é a mesma para todos os círculos.

Sabemos que o raio de um círculo é a metade da medida de seu diâmetro, então dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios. Como acabamos de demonstrar. Assim, um círculo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1, sendo r a razão de semelhança. Pelo que acabamos de ver, isto implica que a área de um círculo de raio r é r^2 vezes a área do círculo de raio 1.

Como é tradicional, vamos indicar a área do círculo de raio 1, pela letra grega π , que representa a constante de proporcionalidade entre as áreas dos círculos, e que sabemos ser um número irracional, cujo valor aproximado com 6 algarismos decimais exatos é 3,141592. A área de um círculo de raio r é dada por,

$$A(r) = \pi \cdot r^2 \tag{3.1}$$

Essa constante de proporcionalidade do círculo só passou a ser chamada de π a partir de 1737 devido à Leonhard Euler. Foi Arquimedes que provou que essa constante da área do círculo é a mesma constante da razão do comprimento da circunferência e seu diâmetro, conseguindo obter uma boa aproximação de seu valor para a época pelo método que até hoje é denominado de método clássico, que consistia em inscrever um polígono regular de $2n$ lados a partir do de n lados, começando com o hexágono, calculou o lado de um polígono de 96 lados, dando uma boa aproximação, por falta, do comprimento da circunferência e por polígonos

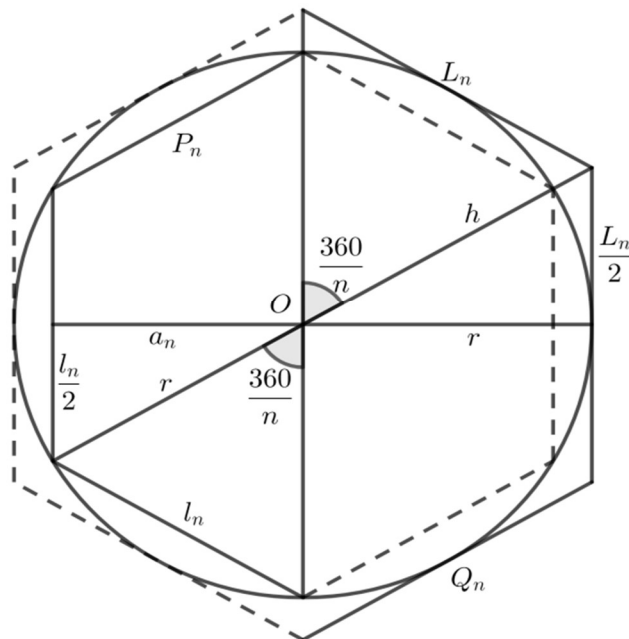
circunscritos obteve aproximação por excesso que levou ao valor de $\pi = 3,14$ com algoritmos exatos até a segunda casa decimal (LIMA, 1991).

Assim, é possível calcular a área de um círculo pelas aproximações de áreas de polígonos inscritos ou circunscritos, como expressa o seguinte teorema.

Teorema da área do círculo: A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos.

Demonstração: Indiquemos com P_n e Q_n aos polígonos regulares de n lados, respectivamente inscrito e circunscrito, ao círculo C de centro O e raio r . Evidentemente, a área de $P_n < \pi r^2 < \text{área de } Q_n$ (LIMA, 1991).

Figura 12 – Polígono inscrito e circunscrito



Fonte: Elaborado pelo autor

Queremos provar que, tomando o número n de lados suficientemente grande, as áreas de P_n e Q_n podem tornar-se tão próximas de πr^2 quanto se deseje. Mais precisamente, se forem dados arbitrariamente os números positivos α e β , tais que $\alpha < \pi r^2 < \beta$, provaremos que é possível achar n tal que

$$\alpha < \text{área de } P_n < \pi r^2 < \text{área de } Q_n < \beta$$

Começamos observando que o lado l_n do polígono P_n pode tornar-se tão pequeno quanto se deseje, bastando que o número n de lados seja suficientemente grande. Com efeito, os vértices de P_n dividem a circunferência em n arcos iguais e cada corda l_n é menor do que um qualquer desses arcos.

O raio r é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $\frac{l_n}{2}$ e o apótema a_n de P_n . Logo,

$$r < a_n + \frac{l_n}{2}$$

Dado o número α tal que $\alpha < \pi r^2$, tomamos $s = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. Então $\pi s^2 = \alpha$ e $s < r$. Portanto, o círculo C_s , de centro O e raio s , tem área α e está contido em C . Podemos tomar n tão grande que $\frac{l_n}{2} < r - s$. Então,

$$r < a_n + \frac{l_n}{2} < a_n + r - s, \quad \text{donde } a_n > s$$

De $s < a_n$ resulta que o círculo C_s está contido no polígono P_n . Logo $\alpha = \text{área de } C_s < \text{área de } P_n$. Isto completa a prova de que as áreas dos polígonos regulares inscritos em C são aproximações por falta da área de C .

Vejamos agora as áreas dos polígonos regulares circunscritos Q_n . Tanto P_n como Q_n acham-se decompostos em triângulos isósceles com vértice no centro O e bases iguais aos lados dos polígonos dados. Tanto para P_n como para Q_n os ângulos dos vértices desses triângulos são iguais a $\frac{360^\circ}{n}$. Logo os triângulos de P_n são semelhantes aos de Q_n , em que a razão de semelhança é $\frac{r}{a_n}$. Portanto, se chamarmos de L_n o lado de Q_n , teremos $L_n = \frac{r}{a_n} l_n$. Assim, $L_n < 2l_n$ resulta que, tomando n suficientemente grande, não apenas l_n como também L_n pode tornar-se tão pequeno quanto se deseje.

Seja dado um número $\beta > \pi r^2$. A fim de achar n tal que área de $Q_n < \beta$, escrevemos $t = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}$. Então, o círculo C_t , de centro O e raio t , tem área β e contém C pois $t > r$. Ora, $\frac{L_n}{2}$ e r são catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa h é a distância do centro O a um vértice de Q_n . Temos então $h < r + \frac{L_n}{2}$. Tomando n suficientemente grande, sabemos que é possível tornar $\frac{L_n}{2} < t - r$. Daí resulta $r + \frac{L_n}{2} < t$, logo $h < t$. Isto significa que área de $Q_n < \text{área de } C_t = \beta$, como queríamos demonstrar.

A partir da medida da área do círculo em função da medida de seu raio,

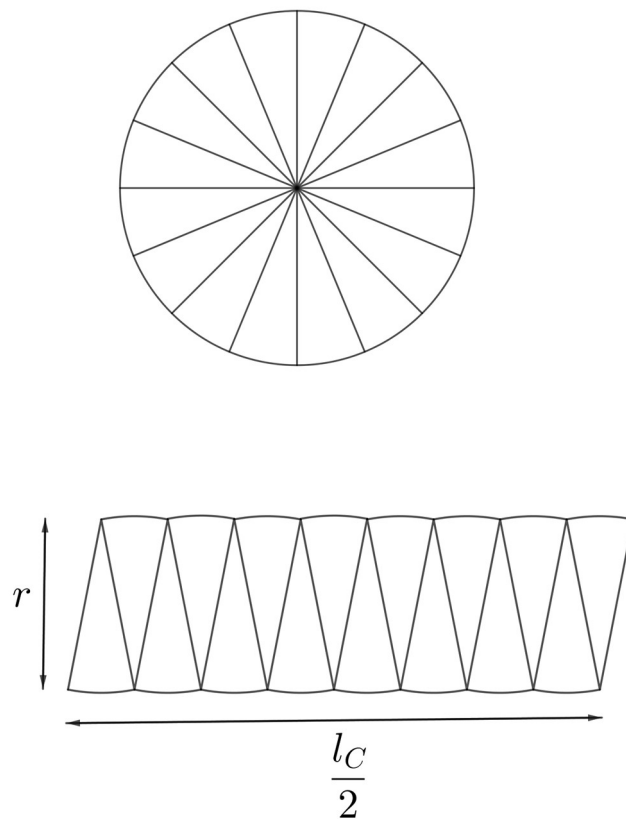
$$A(r) = \pi r^2$$

é possível estabelecer uma correspondência que leve, experimentalmente, ao comprimento da circunferência, também dependendo da medida de seu raio.

3.2.2 Comprimento da circunferência

Decompõe-se o círculo num número par (bastante grande) de setores e rearranjam-se esses setores de forma invertida, como mostrado na figura 13, obtém-se aproximadamente um paralelogramo de medida de área igual a medida da área do círculo, cuja base correspondente à metade do comprimento da circunferência e altura é o raio do círculo.

Figura 13 - Decomposição da circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim:

$$\frac{l_c}{2}r = \pi r^2$$

$$\frac{l_c}{2} = \pi r$$

$$l_c = 2\pi r \quad (3.2)$$

Teorema do Comprimento da Circunferência: O comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.

Demonstração: Provaremos inicialmente que o comprimento da circunferência, denotado por l_c , não pode ser menor do que $2\pi r$. De modo efetivo, supondo, por absurdo, que, $l_c < 2\pi r$, daí resultaria $\frac{l_c}{2}r < \pi r^2$. Como visto no Teorema da Área do Círculo, poderíamos obter um polígono regular P_n , de n lados, inscrito no círculo C , tal que $\frac{l_c}{2}r < \text{área de } P_n$. Como, a área do polígono P_n é a soma das áreas dos triângulos que o compõem, os quais têm o centro O como vértice e os lados de P_n como bases. Logo, essa área é igual ao produto do semiperímetro de P_n pelo apótema de P_n (altura dos triângulos) dada por $\frac{l_{P_n}}{2}a_n$. Assim, $\frac{l_c}{2}r < \frac{l_{P_n}}{2}a_n$ e daí, $l_c < l_{P_n} \frac{a_n}{r}$. Como $\frac{a_n}{r} < 1$, concluímos que $l_c < l_{P_n}$, um absurdo. Portanto, não se pode ter $l_c < 2\pi r$.

Por um raciocínio análogo, com polígonos regulares circunscritos, em vez de inscritos, concluiremos também que não pode ser $l_c > 2\pi r$. Logo, o comprimento da circunferência é igual a $2\pi r$, denotado por $l_c = 2\pi r$.

3.3 Determinação do π

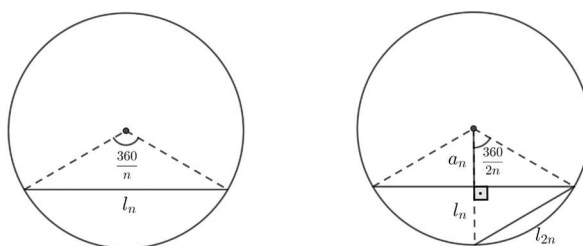
Assim o número π , que foi definido inicialmente como a área de um círculo de raio 1, satisfaz também a igualdade $\pi = \frac{l_c}{2r}$, ou seja, é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

A razão entre o comprimento da circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro foi calculada em diversos momentos da história e se aproximou de valores cada vez mais precisos. Porém pode-se considerar que Arquimedes aplicou método científico matemático para a aproximação de seu valor com o uso do perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos, obtendo assim aproximações superior e inferior da razão.

Agora fazendo uso da notação de π , é simples calcular os perímetros dos hexágonos regulares, inscrito e circunscrito, de um círculo de diâmetro unitário, limitando assim, inferiormente e superiormente π . A partir da medida de um lado de um polígono regular l_n , inscrito numa circunferência de raio r , será mostrado que é possível calcular as medidas dos lados dos polígonos regulares com o dobro de lados, l_{2n} , assim aproximando a medida do perímetro dos polígonos ao comprimento da circunferência por aplicações sucessivas desse processo. Pode-se dessa forma calcular os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de 12, 24, 48, 96, 192 lados e outros tantos, aproximando cada vez mais do valor de π .

Dedução da expressão que dá l_{2n} em função de l_n e do raio r da circunferência circunscrita.

Figura 14 – Construções de polígonos inscritos

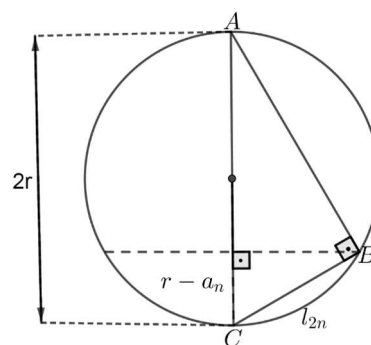


Fonte: Elaborado pelo autor

No triângulo ABC da figura 15, retângulo em B , devido a relação métrica do triângulo retângulo temos:

$$l_{2n}^2 = 2r(r - a_n) \quad (3.3)$$

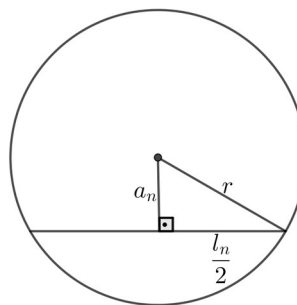
Figura 15 – Construções de polígonos inscritos



Fonte: Elaborado pelo autor

Deduzindo a fórmula geral do apótema a_n , dados r e l_n , temos:

Figura 16 – Construções de polígonos inscritos



Fonte: Elaborado pelo autor

No triângulo retângulo da figura 16,

$$r^2 = a_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$$

$$a_n^2 = r^2 - \frac{l_n^2}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2} \quad (3.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), tem-se,

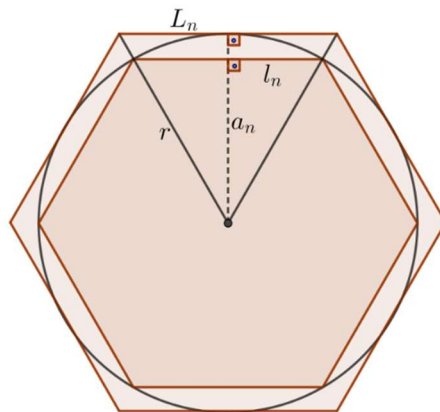
$$l_{2n}^2 = 2r \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2} \right)$$

$$l_{2n}^2 = r \left(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2} \right)$$

$$l_{2n} = \sqrt{r \left(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2} \right)} \quad (3.5)$$

Iremos considerar p_n o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência do círculo de raio r e apótema a_n , e P_n , o perímetro do polígono regular circunscrito na circunferência de raio r e apótema r .

Figura 17 – Construções de polígonos inscritos e circunscritos



Fonte: Elaborado pelo autor

Devido a semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{r}{a_n} \Rightarrow \frac{P_n}{p_n} = \frac{r}{a_n} \quad (3.6)$$

Assim, calculamos P_n , conhecendo p_n , r e a_n .

Agora para se ter uma aproximação de π , basta analisar a tabela montada a partir das fórmulas (33), (34) e (35), desenvolvidas com os resultados aproximados na sétima casa após a vírgula e calculados com o uso de calculadora. Vamos considerar $2r = 1$,

Tabela 3 – Tabela de perímetros inscritos e circunscritos

n	$l_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2})}$	$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$	$\frac{p_n}{2r} = n \cdot l_n$	$\frac{P_n}{2r} = \frac{p_n}{2a_n}$
6	0,5000000	0,4330127	3,0000000	3,4641016
12	0,2588190	0,4829629	3,1058280	3,2153898
24	0,1305262	0,4957224	3,1326288	3,1596603
48	0,0654031	0,4989295	3,1393488	3,1460846
96	0,0327191	0,4997323	3,1410336	3,1427162
192	0,0163617	0,4999331	3,1414464	3,1418668

Fonte: Elaborado pelo autor

É possível observar pela tabela, que quanto maior for o número de lados dos polígonos regulares inscritos e circunscritos no círculo de diâmetro unitário, os valores das razões dos perímetros pelo diâmetro convergem para um valor, que conhecemos por π . Verificamos na tabela que $3,1414464 < \pi < 3,1418668$, conseguindo assim um valor certo até a casa dos milésimos, $\pi = 3,141 \dots$

Arquimedes com sua habilidade nos cálculos chegou ao resultado de $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, que transformando na notação decimal dá o valor de π , exato até a casa dos centésimos, $\pi = 3,14 \dots$, verificado na preposição 3 de seu tratado “*Sobre as medidas do círculo*” (HEATH, 1897).

3.4 Área da elipse por Arquimedes

Os resultados sobre o círculo são de fundamental importância para o cálculo da área da elipse, pois Arquimedes se valeu da proporção entre as duas áreas para determinar a medida da área superficial da elipse. Usando o método da exaustão, demonstrado pela dupla redução ao absurdo, é possível verificar que a área de uma elipse é proporcional a área de um retângulo de dimensões de metade de seus eixos (maior e menor) e a constante de proporcionalidade é a mesma do círculo, já definida por π .

O desenvolvimento da matemática grega por volta de 300 a.C. seguia em 3 linhas distintas, uma referente a geometria, melhor organizada por Euclides, outra de desenvolvimento dos infinitésimos e processos somatórios e a terceira linha respectiva a geometria superior, que correspondia ao estudo de curvas distintas da circunferência e superfícies distintas da esférica, justamente a área de estudo em que se encontram as seções cônicas, área essa impulsionada pelos três famosos problemas de construção por instrumentos euclidianos, régua sem escala e compasso, sendo os seguintes:

1. Duplicação do cubo ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

2. Trissecção do ângulo ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais.
3. Quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual a de um círculo dado (EVES, 2011).

Thomas Little Heath, membro da Royal Society, publicou um livro em 1897 com o título “The Works Of Archimedes”, onde faz estudo de diversas obras sobre o trabalho de Arquimedes e inclusive faz a reconstrução de suas publicações, referente ao trabalho “Conoides e Esferoides”, as proposições 4, 5 e 6 dá o cálculo da área da elipse, conhecendo a dimensão de seus eixos, por semelhança ao cálculo da área do círculo, conhecendo seu diâmetro. Apresento a seguir tais proposições com interesse do cálculo da área da elipse com prova pela dupla redução ao absurdo, assim mostra uma antecipação aos resultados possíveis de se obter com o cálculo diferencial integral.

Proposição 4, da medida da área da elipse calculada pela medida da área de um círculo auxiliar.

A área de qualquer elipse é proporcional a do círculo auxiliar com razão de proporcionalidade do eixo menor para o maior da elipse.

Seja AA' o maior e BB' o menor eixos da elipse, e BB' intersecte o círculo auxiliar em bb' .

Suponha que O seja um círculo tal que

$$\frac{\text{área de } O}{\text{área do círculo } AbA'b'} = \frac{CB}{CA}$$

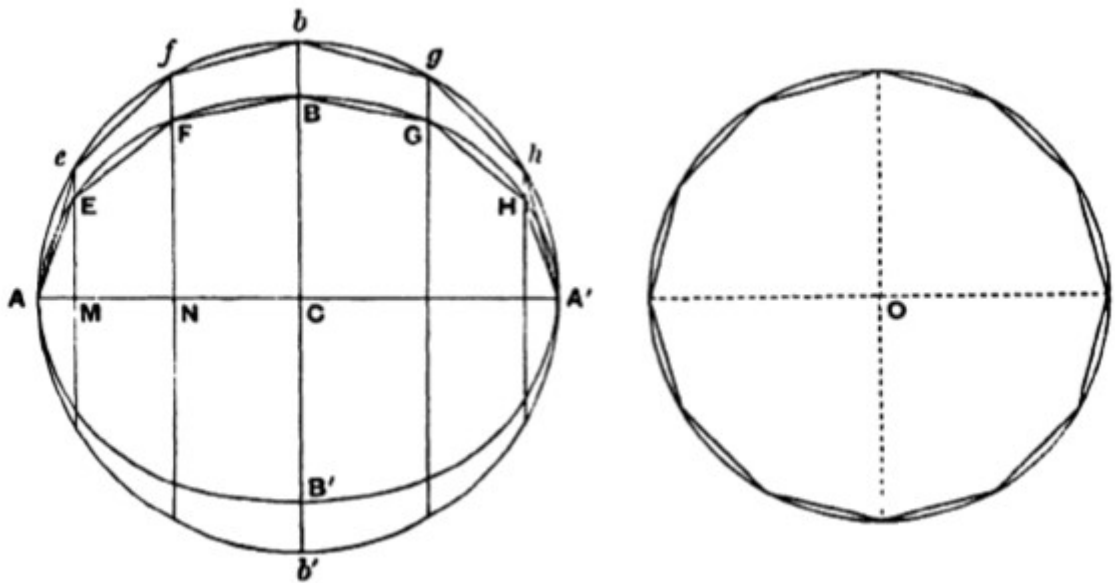
Então a área de O será igual à área da elipse.

Pois, se não, área de O deve ser maior ou menor que a área da elipse.

I. Se possível, seja área de O maior que a área da elipse.

Podemos então inscrever em O um polígono equilátero de $4n$ lados de maneira que sua área é maior que a área da elipse.

Figura 18 – Polígonos inscritos na elipse



Fonte: (HEATH, 1897)

Que isto seja feito, e inscreva-se no círculo auxiliar da elipse o polígono $AefbghA'$... semelhante ao inscrito em O . Seja as perpendiculares $eM, fN, \dots$ em AA' intersectarem a elipse em $E, F, \dots$ respectivamente. Una-se $AE, EF, FB, \dots$

Suponha que P' denote a área do polígono inscrito no círculo auxiliar, e P seja do polígono inscrito na elipse.

Então, uma vez que todas as linhas $eM, fN, \dots$ são cortados na mesma proporções em $E, F, \dots$,

Isto é,

$$\frac{eM}{EM} = \frac{fN}{FN} = \dots = \frac{bC}{BC}$$

os pares de triângulos, como eAM , EAM , e os pares de trapézios, como $eMNf$, $EMNF$, estão todos na mesma proporção um do outro como bC para BC , ou como CA para CB .

Portanto, por adição,

$$\frac{P}{P'} = \frac{CB}{CA}$$

Agora,

$$\frac{\text{área polígono inscrito em } O}{P'} = \frac{\text{área de } O}{\text{área do círculo } AbA'b'} = \frac{CB}{CA}$$

por hipótese.

Portanto, P é igual ao polígono inscrito em O .

Mas isso é impossível, porque o último polígono é por hipótese maior que a elipse e maior que P .

Portanto a área do círculo O não é maior que a área da elipse.

II. Se possível, seja a área do círculo O menor que a área da elipse.

Neste caso inscrevemos na elipse um polígono P com $4n$ lados iguais tais que a área de $P > \text{área de } O$.

Seja as perpendiculares dos pontos angulares no eixo AA' ser produzido para intersectar o círculo auxiliar e seja o polígono correspondente P' no círculo a ser formado.

Inscribe em O um polígono similar a P' .

Então, por hipótese,

$$\frac{P}{P'} = \frac{CB}{CA} = \frac{\text{área de } O}{\text{área do círculo } AbA'b'} = \frac{\text{área do polígono inscrito em } O}{P'}$$

Portanto a área do polígono inscrito em O é igual a área do polígono P ; o que é impossível, porque a $\text{área de } P > \text{área de } O$.

Portanto $\text{área de } O$, não sendo maior nem menor que a elipse, é igual a ela; e o resultado requerido segue.

Proposição 5, da proporcionalidade das áreas da elipse e do círculo em relação aos eixos da elipse e raio do círculo.

Se AA' , BB' seja o eixo maior e menor de uma elipse respectivamente, e se d for o diâmetro de qualquer círculo, então,

$$\frac{\text{área da elipse}}{\text{área do círculo}} = \frac{AA' \cdot BB'}{d^2}$$

Para,

$$\frac{\text{área da elipse}}{\text{área do círculo auxiliar}} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{AA' \cdot BB'}{AA'^2}$$

e

$$\frac{\text{área do círculo auxiliar}}{\text{área do círculo com diam. } d} = \frac{AA'^2}{d^2}$$

Proposição 6, as áreas de elipses são proporcionais como os retângulos sob seus eixos.

Isto segue de uma só vez das duas proposições anteriores.

COROLÁRIO: As áreas de elipses são proporcionais às áreas dos retângulos de lados correspondentes à metade de seus eixos. (3.7)

3.5 Princípios de Cavalieri

Utilizando uma notação atual, vamos verificar a proporcionalidade na medida da área da elipse e a medida da área do círculo com razão de proporcionalidade igual a π , fazendo uso de um dos dois princípios de Cavalieri.

Bonaventura Francesco Cavaliere, nascido em Milão, em 1598, foi aluno de Galileu Galilei aos 15 anos de idade e posteriormente professor da Universidade de Bolonha de 1629 até o ano de sua morte em 1647, sua obra de maior projeção foi o tratado *Geometria Indivisibilibus*, de 1635, que trata do *método dos indivisíveis*, em que o elemento indivisível de uma superfície ou sólido é uma corda ou seção plana, onde uma infinidade desses indivisíveis paralelos fornecem a área da superfície ou volume do sólido, assim como os fios de um tecido ou as folhas de um livro (EVES, 2011).

São princípios intuitivos e de fácil compreensão, usados para o cálculo de áreas e volumes, apesar de na educação básica só ser apresentado o segundo princípio, que justifica os cálculos de volume de sólidos. É bem verdade que o rigor desses

princípios é demonstrável com o uso da teoria de integração, fugindo do contexto da educação básica, mas a aceitação deles, adotada normalmente como postulado na educação básica, permitem o cálculo de medidas de áreas e volumes em diversos problemas sem o uso de técnicas avançadas de cálculo.

São eles:

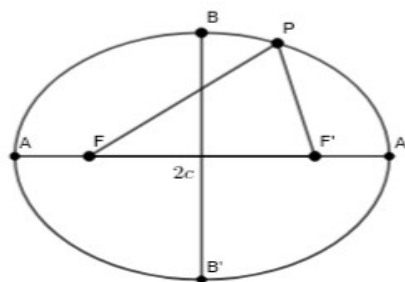
1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas é paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos seções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2011).

Usaremos a definição de elipse dada por Gelson Iezzi (IEZZI, 2010) e na sequência faremos a demonstração do cálculo da área da elipse, segundo o primeiro princípio de Cavalieri.

Definição: Fixados dois pontos F e F' de um plano α tal que a distância entre F e F' é uma constante igual a $2c$, com $c > 0$, chama-se elipse o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias PF e PF' é igual a constante $2a$, com $2a > 2c$.

Veja a representação pela figura 19,

Figura 19 – Elipse e seus elementos

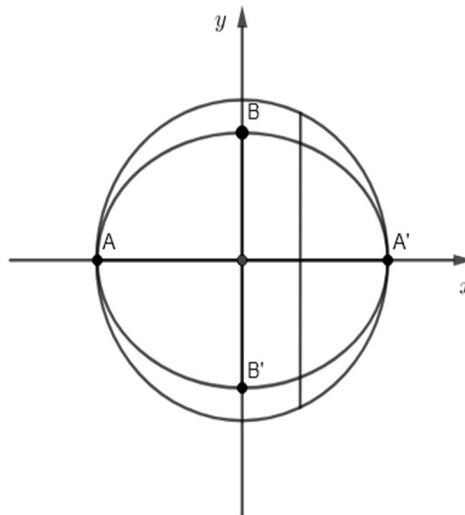


Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando o semieixo maior da elipse de medida igual a $a = \frac{AA'}{2}$ e a medida do semi-eixo menor igual a $b = \frac{BB'}{2}$, concêntrica com uma circunferência de raio de medida igual a $a = \frac{AA'}{2}$, cuja equação é $x^2 + y^2 = a^2$ e a equação da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vamos mostrar que a área da elipse é igual a πab .

Considere a elipse e a circunferência, no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, como representado na figura 20,

Figura 20 – Corda na elipse e circunferência



Fonte: Elaborado pelo autor

Equações da elipse e da circunferência centradas no plano xy ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad e \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Colocando y em função de x em cada uma das equações, e chamando y_e o y da elipse e de y_c o y da circunferência, temos:

$$y_e = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad e \quad y_c = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim verifica-se facilmente,

$$y_e = \frac{b}{a} y_c$$

Considerando a área da elipse a soma de todos os segmentos y_e e a área do círculo a soma de todos os y_c , então:

$$\text{área da elipse} = \frac{b}{a} (\text{área do círculo})$$

$$\text{área da elipse} = \frac{b}{a} (\pi a^2)$$

$$\text{área da elipse} = \pi ab \quad (3.8)$$

Fermat e Pascal baseados nos princípios de Cavalieri desenvolveram o cálculo de área de curvas, com modificação no elemento considerado indivisível, ao invés de usar a ideia de cordas imaginavam uma infinidade de retângulos. Para comparar o desenvolvimento realizado por Cavalieri, vamos calcular a área da elipse pela somatória das áreas dos retângulos sob a curva de um quarto de elipse no primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas. Dada a equação da elipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Isolamos o y na equação,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

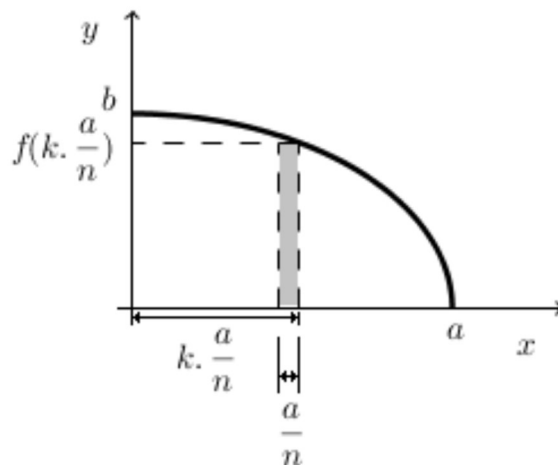
Dividindo o domínio a em n partes iguais, formando, assim, n retângulos de base igual a $\frac{a}{n}$ e altura igual a $f\left(k\frac{a}{n}\right)$ e

$$f\left(k\frac{a}{n}\right) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(k\frac{a}{n}\right)^2}$$

$$f\left(k\frac{a}{n}\right) = b \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$$

Em que k representa o k -ésimo retângulo, ilustrado na figura 21.

Figura 21 - Quarto de elipse e área do retângulo interno



Sendo assim, a área do retângulo k , A_k , é dada por

$$A_k = \frac{a}{n} b \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$$

$$A_k = a b \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

Logo, a área da elipse, A_e , será 4 vezes o somatório de todos os retângulos,

$$A_e = 4 \sum_{k=1}^n A_k$$

$$A_e = 4 \sum_{k=1}^n a b \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

$$A_e = 4 a b \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} \quad (3.9)$$

Considerando um círculo de equação dada abaixo, isolamos y para calcular a área do círculo pela somatória das áreas dos retângulos sob a curva de um quarto do círculo no primeiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas,

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Dividindo o domínio a em n partes iguais, formando, assim, n retângulos de base igual a $\frac{a}{n}$ e altura igual a $g\left(k\frac{a}{n}\right)$ e

$$g\left(k\frac{a}{n}\right) = \sqrt{a^2 - \left(k\frac{a}{n}\right)^2}$$

$$g\left(k\frac{a}{n}\right) = a \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$$

Sendo assim, a área do retângulo k , B_k , é dada por

$$B_k = \frac{a}{n} a \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$$

$$B_k = a^2 \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

Logo, a área do círculo, B_c , será 4 vezes o somatório de todos os retângulos,

$$B_c = 4 \sum_{k=1}^n B_k$$

$$B_c = 4 \sum_{k=1}^n a^2 \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

$$B_c = 4a^2 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

Como sabemos que a área do círculo é dada por

$$B_c = \pi a^2$$

$$4a^2 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} = \pi a^2$$

Assim,

$$\pi = 4 \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} \quad (3.10)$$

Portanto, substituindo (2.10) em (2.9), podemos afirmar que a área da elipse é,

$$A_e = \pi a b \quad (3.11)$$

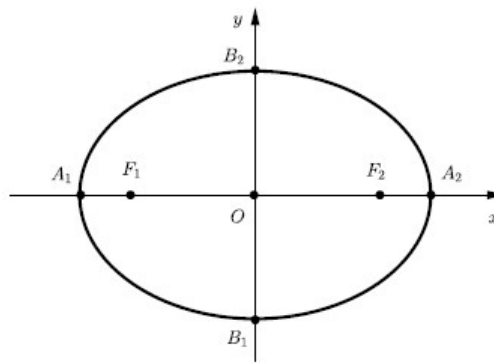
Dessa maneira podemos verificar a possibilidade do cálculo da área da elipse sem recorrer ao cálculo integral, ferramenta de nível superior de ensino e definitiva. No entanto, utilizaremos esse recurso como fator verificador dos resultados, incluindo a demonstração dos princípios de Cavalieri, que também se dá por integrais.

3.6 Área da elipse pelo cálculo diferencial integral

Consideremos uma elipse centrada na origem do plano cartesiano com os focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, centro $O(0, 0)$ e vértices $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ e

$B_2(0, b)$, onde A_1A_2 é o eixo maior de comprimento $2a$ e B_1B_2 é o eixo menor de comprimento $2b$, como ilustra a figura 22.

Figura 22 – Elipse e pontos notáveis



Fonte: Elaborado pelo autor

De equação reduzida dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$$

onde,

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

isolando y , na equação reduzida, temos,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ou

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim, o cálculo da área de um quarto da área da elipse, o que corresponde à região do primeiro quadrante limitada pelo gráfico da função f_1 tal que $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Tal área é o resultado da integral,

$$S_1 = \int_0^a f_1(x) dx$$

$$S_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

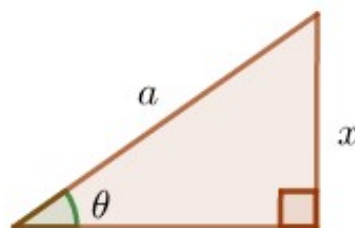
$$S_1 = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Dessa forma, se quadruplicarmos essa medida de área, teremos a medida da área da elipse dada por,

$$S = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Na resolução da integral acima fazemos uma mudança de variável, resolvendo uma integral trigonométrica equivalente e usaremos o triângulo retângulo da figura 23, a fim de facilitar a compreensão.

Figura 23 – Triângulo retângulo, mudança de variável



Fonte: Elaborado pelo autor

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

$$dx = a \cos \theta \, d\theta$$

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Logo substituindo as variáveis na equação da área da elipse, temos,

$$S = 4 \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} \cdot a \cos \theta \, d\theta$$

$$S = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta \, d\theta$$

$$S = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \cos \theta \, d\theta$$

$$S = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta$$

Usando a conhecida identidade trigonométrica, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, então,

$$S = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$S = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$S = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned}
 S &= (2ab\theta)|_0^{\pi/2} + \left(2ab \frac{\sin 2\theta}{2}\right)|_0^{\pi/2} \\
 S &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + 2ab \left(\frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin 2.0}{2}\right) \\
 S &= 2ab \frac{\pi}{2} + 2ab (0 - 0) \\
 S &= \pi ab
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Verificando o mesmo resultado com os demais métodos utilizados em (3.7), (3.8), (3.11) e (3.12).

3.7 Demonstração dos Teoremas de Cavalieri

Agora, retomando os princípios de Cavalieri, vamos realizar suas demonstrações utilizando-se do cálculo diferencial e integral, sendo possível desde que as regiões consideradas não sejam muito complicadas e sejam delimitadas por gráficos de funções ou retas, ou planos adequadamente escolhidos.

Primeiro princípio de Cavalieri,

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas é paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante (EVES, 2011).

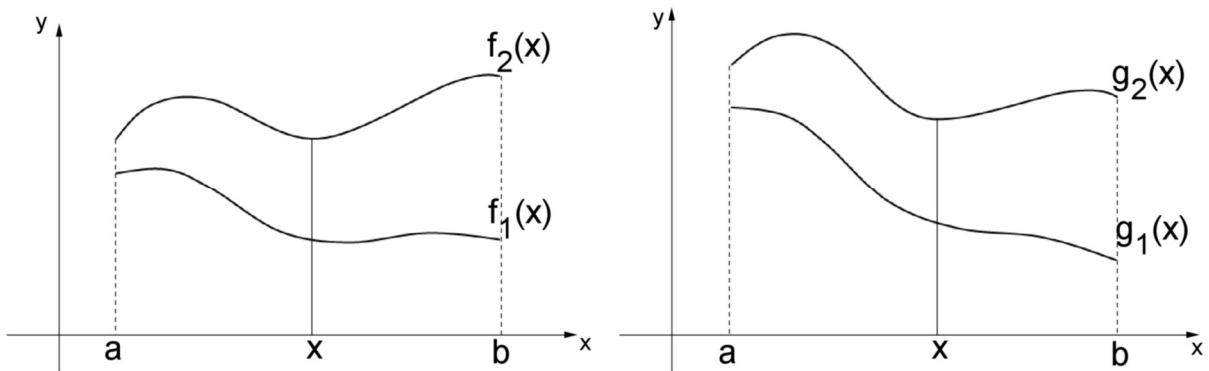
A demonstração se baseia em fatiar as porções planas. Se cada fatia de uma região tiver comprimento sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra porção, então as áreas das duas porções estão na mesma razão. A dificuldade surge quando Cavalieri considera essas fatias como cordas sem espessura, que não possuem área. Assim, para somar essas cordas foi necessário técnicas das teorias

de integração de funções reais, que não estavam desenvolvidas em sua época, e permitem a demonstração desse teorema (PATERLINI, 2010).

3.7.1 Teorema de Cavalieri para áreas

Consideremos no plano cartesiano Oxy , a região R delimitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, com $b > a$ e pelos gráficos das funções contínuas $f_1(x)$ e $f_2(x)$, no intervalo fechado $[a, b]$, com $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo x nesse intervalo e sendo $A(R)$ a área da região R . Seja S a região delimitada por $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $g_1(x)$ e $g_2(x)$, $a \leq x \leq b$, com $g_1(x) \leq g_2(x)$ para todo x nesse intervalo e sendo $A(S)$ a área da região S . Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(x) - f_1(x) = k[g_2(x) - g_1(x)]$ para todo x em $[a, b]$. Então $A(R) = kA(S)$.

Figura 24 – Regiões no plano xy



Fonte: (KUROKAWA, 2015)

Demonstração: Da teoria de integração das funções reais, temos,

$$A(R) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

$$A(R) = \int_a^b k[g_2(x) - g_1(x)]dx$$

$$A(R) = k \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx$$

$$A(R) = kA(S) \tag{3.13}$$

Analogamente faremos o desenvolvimento da demonstração do segundo princípio de Cavalieri, começaremos por lembrar esse princípio.

Segundo princípio de Cavalieri:

2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos seções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante (EVES, 2011).

3.7.2 Teorema de Cavalieri para volumes

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Seja P um sólido delimitado por $z = a$ e $z = b$, com $b > a$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $a \leq t \leq b$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$ e considere $V(P)$ o volume do sólido P . Seja Q outro sólido delimitado por $z = a$, $z = b$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $a \leq t \leq b$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $A(P_t) = kA(Q_t)$ para todo t . Então $V(P) = kV(Q)$.

Demonstração: Da teoria de integração das funções reais, temos,

$$A(P_z) = \iint_{P_z} dx dy$$

e

$$A(Q_z) = \iint_{Q_z} dx dy$$

Logo,

$$V(P) = \int_a^b A(P_t) dt$$

$$V(P) = \int_a^b k A(Q_t) dt$$

$$V(P) = k \int_a^b A(Q_t) dt$$

$$V(P) = kV(Q) \quad (3.14)$$

Verificamos que os princípios de Cavalieri são ferramentas de fácil compreensão e foram rigorosamente demonstrados como teoremas, facilitando o caminho para a solução de problemas de cálculo de áreas e volumes, em situações práticas e em situações diferenciadas e pouco abordadas na educação matemática básica.

4 SÓLIDOS ELÍPTICOS

Até aqui obtivemos a área da elipse, discorreremos sobre a importância dos princípios de Cavalieri para realizar o cálculo de áreas e volumes de elementos geométricos diferenciados em relação a polígonos, poliedros, círculos e esferas. Faremos a seguir o estudo de volumes de alguns sólidos geométricos com bases elípticas, entre eles, o cilindro elíptico, o cone elíptico, tronco de cone elíptico (já verificado na motivação desse trabalho) e o elipsoide.

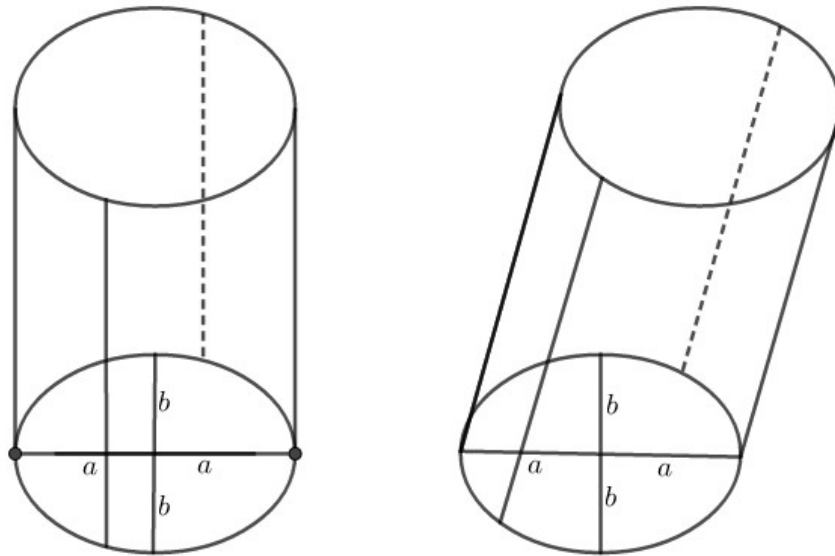
Utilizaremos em particular, o segundo princípio de Cavalieri, para a determinação do volume dos sólidos acima mencionados, como justificativa de ser possível a realização desses cálculos sem a necessidade de uso do cálculo diferencial e integral, o que permite que façamos tais estudos no ensino básico e em diversos momentos.

Mas, com reserva, da importância de método definitivo para o cálculo de medidas de comprimentos, áreas e volumes, a verificação dessas medidas será feita por meio do cálculo das integrais pertinentes em cada caso.

4.1 Cilindro elíptico

No cilindro de base elíptica reto ou oblíquo, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo segundo princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura.

Figura 25 – Cilindro elíptico reto e oblíquo



Fonte: Elaborado pelo

Volumedocilindroeliptico = área da base x altura

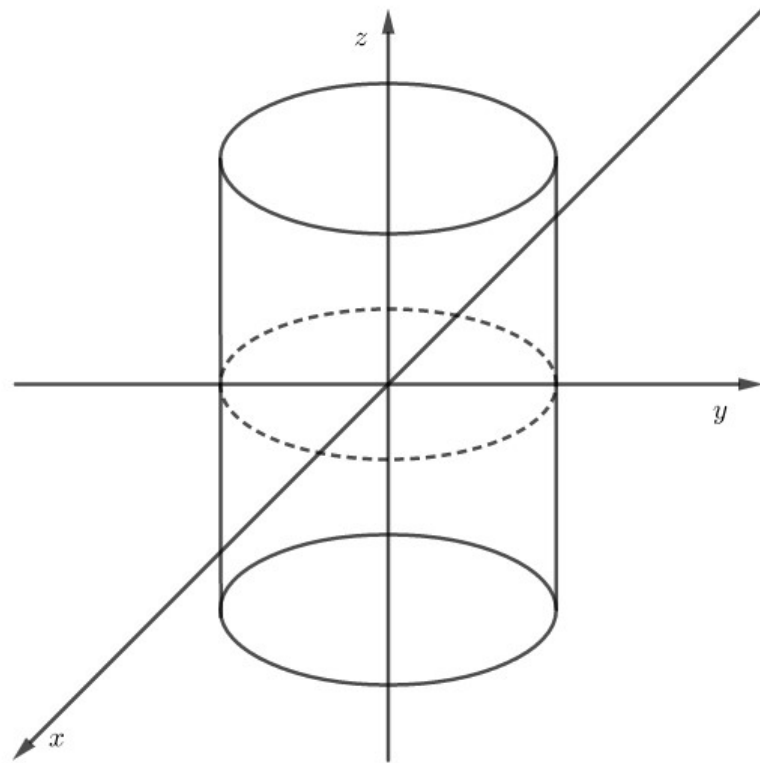
$$V_{ce} = A_e \cdot h$$

$$V_{ce} = \pi \cdot a \cdot b \cdot h \quad (4.1)$$

No espaço tridimensional, podendo este ser representado pelo sistema cartesiano de eixos x , y e z , se nenhum termo z aparece na equação da elipse, temos o cilindro elíptico, formado por retas ortogonais ao plano $z = 0$ que passam pela elipse nesse plano, assim,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Figura 26 – Cilindro elíptico em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

Usando o cálculo diferencial integral para calcular o volume do cilindro elíptico centrado no sistema tridimensional cartesiano $Oxyz$, de altura h relativo a diferença do plano $z = 0$ até um plano paralelo $z = h$,

$$V_{ce} = \int_0^h A_e dz$$

$$V_{ce} = A_e \int_0^h dz$$

$$V_{ce} = A_e \cdot z \Big|_0^h$$

$$V_{ce} = A_e \cdot (h - 0)$$

$$V_{ce} = A_e \cdot h$$

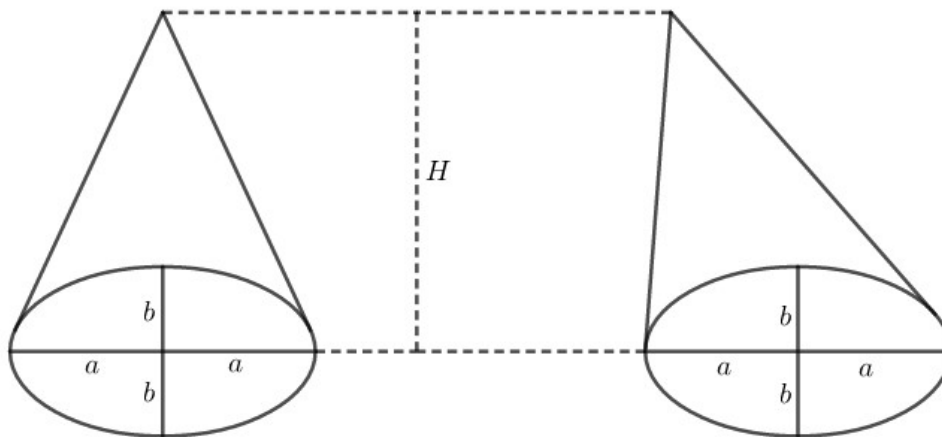
$$V_{ce} = \pi \cdot a \cdot b \cdot h \quad (4.2)$$

Os resultados (4.1) e (4.2) coincidem-se, como esperado.

4.2 Cone elíptico

No cone de base elíptica, reto ou oblíquo, em que toda seção paralela à base é semelhante à essa base, com excentricidade e constante. Esse fato permite concluir, pelo segundo princípio de Cavalieri, que o volume do cone é um terço do produto da área de sua base pela sua altura, assim como nas pirâmides de bases poligonais ou cones circulares.

Figura 27 – Cone elíptico reto e oblíquo



Fonte: Elaborado pelo autor

$$V_{co} = \frac{A_e \cdot H}{3}$$

$$V_{co} = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot H}{3} \quad (4.3)$$

No espaço tridimensional, podendo este ser representado pelo sistema cartesiano de eixos x , y e z , temos o cone elíptico, formado pela base elíptica e tronco de altura H afunilando com eixos maiores e menores tendendo a zero. Assim, a integral definida na altura, correspondente ao eixo z das superfícies elípticas paralelas a base situada no plano xy e centrada na origem, cujo semi-eixo maior mede a e o semi-eixo menor mede b , determina a medida do volume do cone elíptico.

Equação da base elíptica corresponde,

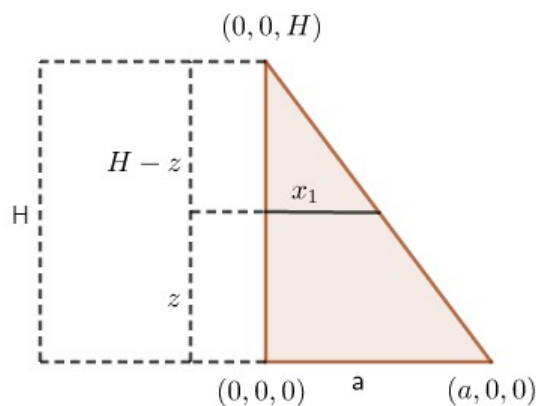
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = 0$$

Assim, como a altura do cone é H , a seção do cone de cota z é uma elipse cujo semieixos ficam definido pela semelhança de triângulos.

Semieixo maior,

Figura 28 – Seção do cone elíptico



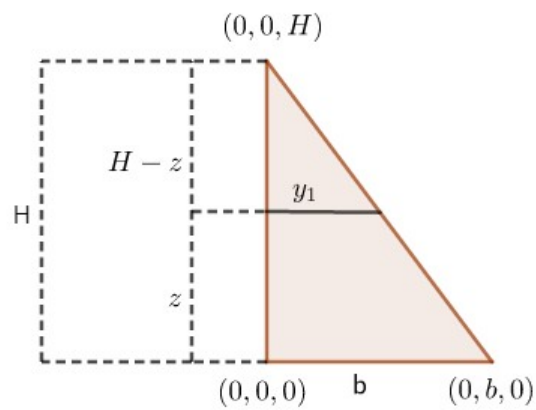
Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{H}{a} = \frac{H - z}{x_1}$$

$$x_1 = a \left(1 - \frac{z}{H} \right)$$

Semieixo menor,

Figura 29 – Seção do cone elíptico



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\frac{H}{b} = \frac{H - z}{y_1}$$

$$y_1 = b \left(1 - \frac{z}{H} \right)$$

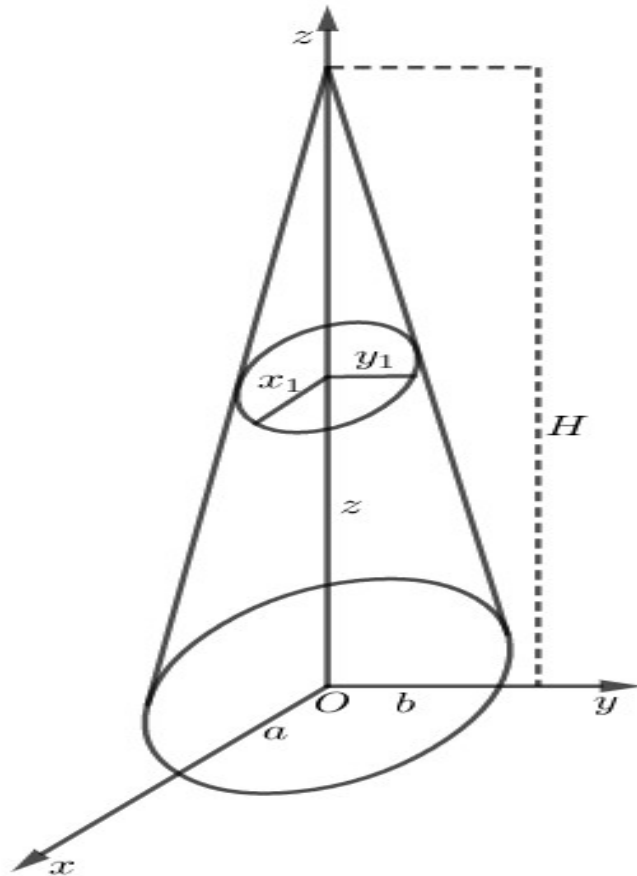
A área dessa seção é portanto,

$$A_z = \pi \cdot x_1 \cdot y_1$$

$$A_z = \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z}{H} \right)^2$$

Assim o volume é a integral da área A_z de $z = 0$ a $z = H$, vejamos

Figura 30 - Cone elíptico em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

$$V_{co} = \int_0^H A_z dz$$

$$V_{co} = \int_0^H \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz$$

$$V_{co} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \int_0^H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz$$

$$V_{co} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \int_0^H \left(1 - 2 \frac{z}{H} + \frac{z^2}{H^2} \right) dz$$

$$V_{co} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(H - H + \frac{H}{3} \right)$$

$$V_{co} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{H}{3}$$

$$V_{co} = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot H}{3} \quad (4.4)$$

4.2.1 – Tronco de cone elíptico

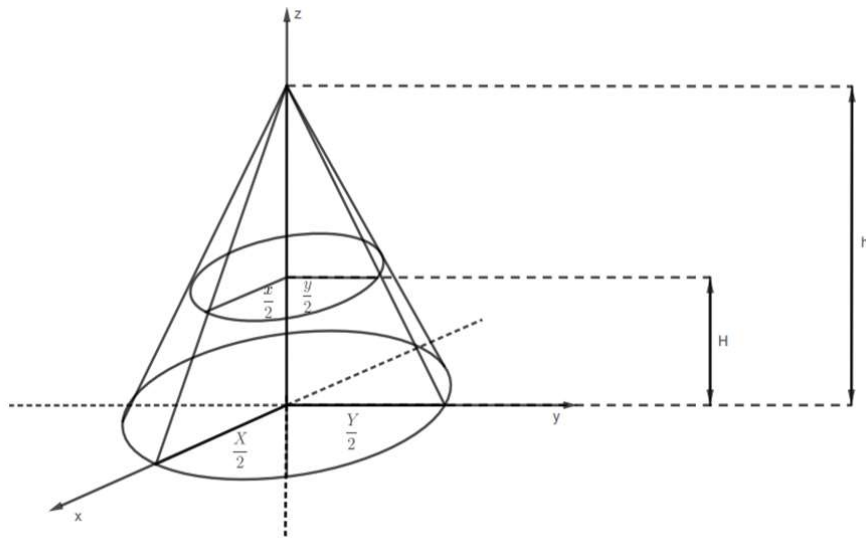
O cálculo do volume do tronco de cone elíptico se desenvolve análogo ao do cone circular, mas com um trabalho algébrico maior que no entanto já foi realizado na segunda seção, justificando o interesse de toda essa pesquisa, portanto, podemos aproveitar o trabalho já realizado e ajustar aos parâmetros deste capítulo.

O resultado obtido para o volume do tronco de cone elíptico em (2.24), e confirmado com o cálculo pela integral de suas seções paralelas à base em (2.30), foi,

$$V = \frac{\pi H}{3} \left[\frac{X^2 Y - x^2 y}{4(X - x)} \right]$$

Mas, as variáveis utilizadas não correspondiam às distâncias dos semieixos maior e menor como estamos usando nesse momento. Isso devido ao interesse de, na segunda seção, realizar os cálculos levando em conta a maneira como se media as seções de troncos de eucaliptos. Para visualizar essas medidas, recordemos a figura 10 que faz essa correspondência.

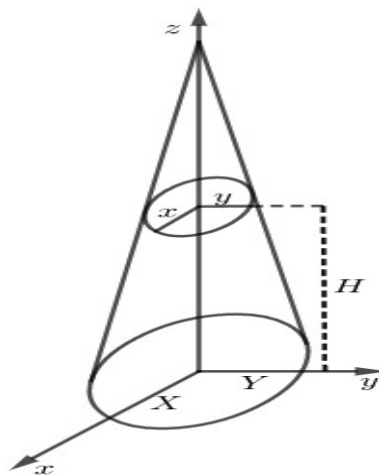
Figura 31 - Cone elíptico em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim faremos um ajuste de variáveis, perfeitamente possível de se realizar no resultado, afim de ficar dentro dos parâmetros deste momento, com medidas correspondentes aos semieixos maior e menor das elipses das bases inferior e superior.

Figura 32 - Cone elíptico em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

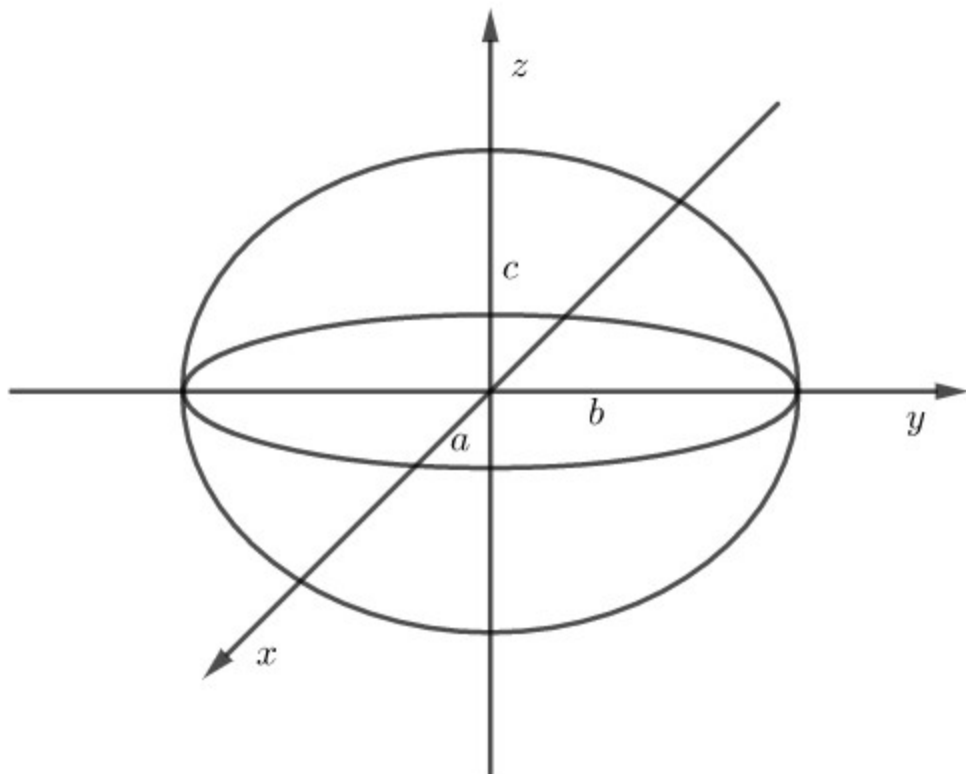
$$V = \frac{\pi H}{3} \left[\frac{X^2 Y - x^2 y}{(X - x)} \right] \quad (4.5)$$

4.3 – Elipsoide

Outro sólido de seção elíptica é o elipsoide, que em alguns casos especiais pode ser obtido rotacionando uma elipse ao redor de um de seus eixos. No dia-dia talvez seja mais comum nos depararmos com corpos no formato aproximado de um elipsoide do que mesmo de uma esfera, suas medidas são amplamente estudadas, até mesmo porque servem de modelo aproximado para geodesias, inclusive terrestre.

É possível calcular o volume do elipsoide com o uso do segundo princípio de Cavalieri, assim vamos mostrar que o volume do elipsoide de semieixos a , b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Figura 33 - Elipsoide em xyz



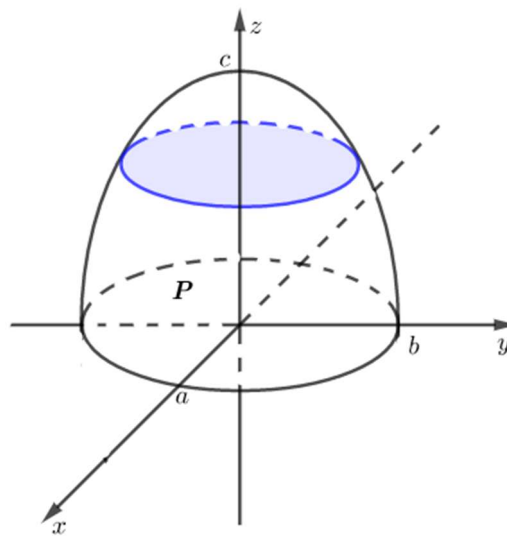
Fonte: Elaborado pelo autor

Suponhamos $c \geq b \geq a > 0$, e consideremos o semi-elipsoide P definido por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$z \geq 0$$

Figura 34 - Semi-elipsoide em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

Esse semi-elipsoide é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = c$, paralelos ao plano xy e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$. Além disso, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a interseção P_t de P com o plano $z = t$ é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \leq 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{c^2 - t^2}{c^2}$$

Vamos considerar,

$$d^2 = \frac{c^2 - t^2}{c^2},$$

$$d = \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{c^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{c}$$

Então P_t é uma região elíptica dada por,

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$$

Dessa forma a área da região P_t será dada por,

$$A_{P_t} = \pi \cdot (ad) \cdot (bd)$$

$$A_{P_t} = \pi abd^2$$

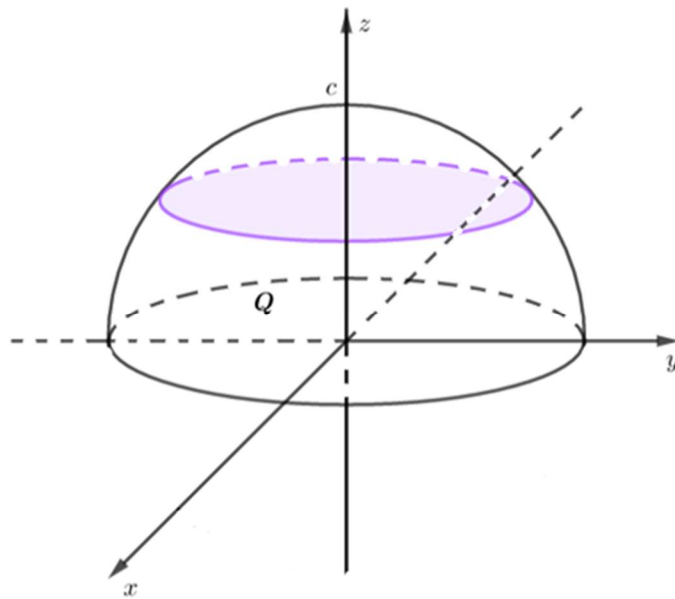
$$A_{P_t} = \pi ab \left(\frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{c} \right)^2$$

$$A_{P_t} = \frac{\pi ab(c^2 - t^2)}{c^2}$$

Vamos considerar a semiesfera Q definida por,

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$$

Figura 35 - Semiesfera em xyz



Fonte: Elaborado pelo autor

Então,

$$x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2$$

Assim, o raio do círculo obtido pela seção Q_t de Q , será,

$$r = \sqrt{c^2 - t^2}$$

Logo Q_t é dado por,

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

E a área de Q_t , então será,

$$A_{Q_t} = \pi r^2$$

$$A_{Q_t} = \pi(c^2 - t^2)$$

Vejamos que, para t tal que $0 \leq t \leq c$,

$$A_{P_t} = \frac{\pi ab(c^2 - t^2)}{c^2}$$

$$A_{P_t} = \frac{ab}{c^2} A_{Q_t}$$

Logo a constante de proporcionalidade das seções paralelas ao plano xy , entre o semi-elipsoide e a semiesfera é k , tal que,

$$k = \frac{ab}{c^2} \quad (4.6)$$

Agora, para aplicar o princípio de Cavalieri para os volumes do semi-elipsoide e da semiesfera, sabendo que as áreas das seções planas que se correspondem tem

razão constante k , e determinar o volume do semielipsoide, devemos conhecer o volume da semiesfera, V_Q , de raio r ,

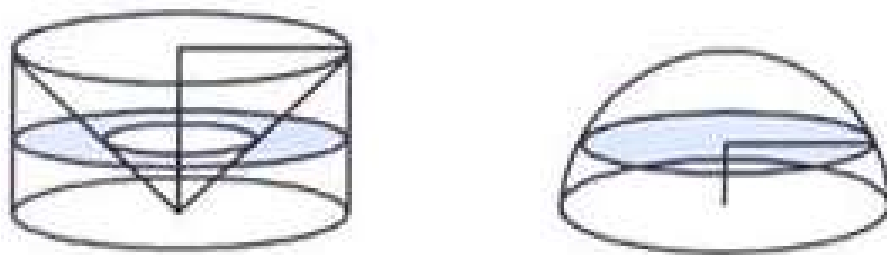
4.3.1 Volume da esfera

Teorema: O volume de uma semiesfera de raio r é $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Demonstração: Consideremos uma semiesfera de raio r e centro O e um cilindro reto cuja base é um círculo de raio r e altura medindo r , ambos os sólidos sobre o mesmo plano horizontal.

Retiramos um cone, conforme figura 36, de raio da base r e altura r , do cilindro e que um plano horizontal, que dista h da base da semiesfera produziu seções nestes sólidos.

Figura 36 – Cilindro com cone inscrito e semiesfera



Fonte: (PATERLINI, 2010)

Assim, a seção da semiesfera é um círculo de raio r_t cuja área é πr_t^2 , e como $r_t^2 = r^2 - h^2$ temos que a área desse círculo é $\pi(r^2 - h^2)$. Já no cilindro a seção do cilindro é uma coroa circular de área $\pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$. Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que os dois sólidos têm o mesmo volume. O volume da

semiesfera de raio r e centro O é igual ao volume de um cilindro de raio da base r e altura r menos o volume de um cone de raio da base r e altura r ,

$$V_{semiesfera} = V_{cilindro} - V_{cone}$$

$$V_{semiesfera} = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r$$

$$V_{semiesfera} = \pi r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi r^3$$

$$V_Q = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad (4.7)$$

Logo o volume da esfera será,

$$2V_Q = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (4.8)$$

temos então, para o volume do semielipsoide V_P ,

$$V_P = k \cdot V_Q \quad (4.9)$$

substituindo (4.6) e (4.7), em (4.9), tem-se,

$$V_P = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3$$

considerando $r = c$

$$V_P = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{2}{3} \pi c^3$$

$$V_P = \frac{2}{3} \pi abc \quad (4.10)$$

Voltando ao cálculo do volume do elipsoide o utilizando (4.6) e (4.10), obtemos finalmente que,

$$V = \frac{4}{3} \pi abc \quad (4.11)$$

Para finalizar, assim como nos demais sólidos, faremos o cálculo do volume do elipsoide utilizando o cálculo diferencial e integral, a fim de conseguir o mesmo resultado obtido pelo princípio de Cavalieri.

Dado o elipsoide G cuja sua superfície é definida pela equação,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Para calcular o volume de G basta resolver a integral tripla,

$$\iiint_G dV$$

Note que o elipsoide está centrado na origem, e como ele é simétrico a todos os planos coordenados em questão, calcularemos o volume do primeiro octante e multiplicaremos por oito,

$$V = \iint_D \left[\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \right] dx dy$$

Para tanto, faça uma mudança de eixos coordenados, de forma que a equação da quádrlica no novo sistema possa facilitar as contas.

$$T: \begin{cases} x = x(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \\ y = y(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{b}{a}\beta \\ z = z(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{c}{a}\gamma \end{cases}$$

$$J_T = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma \end{vmatrix}$$

$$J_T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & c/a \end{vmatrix}$$

$$J_T = \frac{bc}{a^2} \neq 0$$

$$x = \alpha \Rightarrow dx = d\alpha$$

$$y = \frac{b}{a}\beta \Rightarrow dy = \frac{b}{a}d\beta$$

$$z = \frac{c}{a}\gamma \Rightarrow dz = \frac{c}{a}d\gamma$$

Então,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a}\beta\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{c}{a}\gamma\right)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2\beta^2}{a^2b^2} + \frac{c^2\gamma^2}{a^2c^2} = 1$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{a^2} = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2$$

Dessa forma a equação inicial tem o formato de uma “esfera” nas novas coordenadas e o cálculo necessário, então, torna-se,

$$V = \iiint_{G/8} dx dy dz$$

$$V = \iiint_{G'/8} \frac{bc}{a^2} d\gamma d\alpha d\beta$$

$$V = \frac{bc}{a^2} \iint_{D'} \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - \alpha^2 - \beta^2}} d\gamma \right] d\alpha d\beta$$

$$V = \frac{bc}{a^2} \iint_{D'} \sqrt{a^2 - \alpha^2 - \beta^2} d\alpha d\beta$$

Passando para coordenadas polares,

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

$$\begin{cases} \alpha = r \cos \theta \\ \beta = r \sin \theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq a,$$

Então,

$$V = \frac{bc}{a^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} \, r \, dr \, d\theta$$

$$V = \frac{bc}{a^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \, r \, dr \, d\theta$$

$$V = \frac{bc}{a^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

$$V = \frac{bc \pi}{a^2 2} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr$$

$$\begin{cases} u = a^2 - r^2 \\ du = -2r dr \end{cases}$$

$$V = \frac{\pi bc}{2a^2} \int_0^{a^2} \frac{1}{2} u^{1/2} \, du$$

$$V = \frac{\pi bc}{4a^2} \frac{2}{3} (u^{3/2}) \Big|_0^{a^2}$$

$$V = \frac{\pi bc}{4a^2} \frac{2}{3} a^3$$

$$V = \frac{\pi abc}{6}$$

Donde o volume do elipsoide é $8V$,

$$8V = 8 \frac{\pi abc}{6}$$

$$8V = \frac{4}{3} \pi abc$$

Assim como verificado pelo desenvolvimento do princípio de Cavalieri em (4.11).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta da dissertação surgiu na busca de uma experiência de campo para a significação do conhecimento matemático e uso de métodos e modelos de estudo. Essa experiência de campo corresponde ao que muitas vezes, como professor, buscamos ou sugerimos como projeto de aprendizagem aos nossos alunos. De modo que o aprendizado tenha maior significado em sua vida e proporcione experiências úteis para suas escolhas.

Como foi verificado, as formas de calcular o volume de toras de eucalipto são por semelhança de tronco de cones de bases elípticas, foi curioso observar as várias fórmulas de cálculo usadas pelas pessoas e empresas envolvidas na produção e comercialização de eucalipto, mas nenhuma fazia matematicamente a comparação com a forma geométrica citada para buscar os cálculos apropriados, aprendidos quer seja na educação básica ou no ensino superior. Averiguamos uma diversidade de fórmulas, umas com melhor aproximação do que outras, mas que acabava atendendo os interesses comerciais de quem vende cobrar mais e de quem compra pagar menos.

Foi importante verificar que o objeto de estudo se mostrou fecundo para o aprendizado matemático pela modelagem e para propor uma forma de estudar situações semelhantes com formas geométricas de medidas de áreas e volumes calculadas em nível de educação básica e superior. Observamos ser possível realizar os cálculos de medidas de áreas e volumes para a elipse e sólidos elípticos, independentemente do nível de escolaridade.

Conseguir fundamentar a medida da área da elipse, sem necessidade de recorrer ao cálculo diferencial integral, foi um passo importante no estudo realizado, pois pudemos verificar no método de exaustão, de Eudoxo, um direcionamento importante dos resultados futuros na matemática. Apuramos nos métodos usados por Arquimedes grande criatividade para se conseguir os valores previamente as demonstrações, rigor nas demonstrações, pela dupla redução ao absurdo, e engenhosidade nos cálculos. Posteriormente Cavalieri propõem dois princípios que colaboram diretamente para obtenção dos objetivos desse trabalho.

Pôde-se analisar as demonstrações dos princípios de Cavalieri com o cálculo diferencial integral, garantindo assim os resultados encontrados nos cálculos de área e volumes realizados. É conjecturado ser possível de realizar estudos em corpos de bases parabólicas e hiperbólicas, analogamente aos estudos realizados em corpos elípticos, uma vez que a quadratura da parábola é conhecida por processo matemático historicamente desvendado também por Arquimedes. Fica um sentimento de continuidade do trabalho.

Finalizando, verifico que esse trabalho me proporcionou descobertas interessantes do conhecimento matemático e oportunidade de pesquisa em uma área que é de interesse dos matemáticos por milênios. Foi grande o entusiasmo de verificar a perspicácia dos cientistas nos métodos de calcular medidas e obter relações que colaboram no desenvolvimento da sociedade. Espero que essa dissertação possa contribuir no conhecimento da história da matemática, em novos estudos, aplicações e principalmente no aprendizado.

Todo o desenvolvimento desse processo de modelagem foi enriquecedor, desde a pesquisa, entrevista, coleta de dados, construção de materiais, manipulação algébrica, geométrica e aritmética. A aplicação da matemática nessa área é interessante e motivadora, concluímos que a modelagem matemática também é uma eficiente ferramenta do ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, J. L. et.al. *Álgebra Linear*, 3 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- CIFUENTES, J. C. O "*salto arquimediano*": um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático, *Sci, stud*, v. 9, n. 3, ISSN 1678-3166. São Paulo, 2011.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana*, 8 ed. São Paulo: Atual, 2005.
- ESQUEF, P. A.; RIBEIRO, S. A. P. *Elipses e as órbitas dos planetas*. Revista do Professor de Matemática, v. 77. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*, v. 2, 5 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*, v. 1, 5 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2014.
- HEATH, T. L. *The Works of Archimedes*. Londres: Cambridge University, 1897.
- IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*, v. 3, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- KUROKAWA, C.Y. *Áreas e volumes: de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o cálculo diferencial e integral*. Dissertação apresentada para o título de mestre, UNICAMP, Campinas, 2015.
- LEITHOLD, L. *O Cálculo Com Geometria Analítica*, v. 1, 3 ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.
- LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LIMA, F. N. *Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o método de exaustão e o princípio de Cavalieri*. Dissertação apresentada para o título de mestre, UFPB/CCEN, João Pessoa, 2013.
- MACHADO, A. S. *Geometria Analítica e Polinômios*. São Paulo: Atual 1986.

MACHADO, A. S. *Áreas e Volumes*. São Paulo: Atual 1988.

MAGNAGHI, C. P. *Análise e Tradução Comentada da Obra de Arquimedes Intitulada "Método sobre os teoremas Mecânicos"*. Dissertação apresentada para o título de mestre em física, UNICAMP, Campinas, 2011.

NOGUEIRA, L. T. *Aplicação de alguns teoremas na resolução de problemas geométricos*. Dissertação apresentada para o título de mestrado profissional em matemática em rede nacional, UFA, Manaus, 2016.

PATERLINI, R. R. Os "teoremas" de Cavalieri. *Revista do Professor de Matemática*, v. 72. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PONTES, N. A. *O princípio de Cavalieri e suas aplicações par o cálculo de volumes*. Dissertação apresentada para o título de mestre de matemática em rede nacional, UFC, Ceará, 2014.

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. *Gênios da Ciência: Arquimedes Pioneiro da Matemática*. Ediouro, Segmento Duetto Editorial Ltda.

SILVA, J. C. da C. et al. *Calculando Áreas e Volumes: do método de exaustão ao princípio de Cavalieri*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016.

SOARES, N. M. F. *Sobre o conhecimento e a difusão das obras de Arquimedes em Portugal*. Dissertação apresentada para o título de mestre em história e filosofia da ciência, Universidade de Lisboa, 2014.

STERNADT, G. H. *Cubagem de toras de mogno*. < www.mognobrasileiro.com.br/wp-content/uploads/.../cubagem.pdf > Acesso em 26 de Jun. de 2012.

VENTURI, J. J. *Cônicas e Quádricas*, 5 ed. Curitiba, 2003, <<http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>> Acesso em 11/03/2019.