

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA**

**LEONARDO TORRES MONTERO**

**Propriedades dinâmicas em mapeamentos bidimensionais :** aplicações em um guia de ondas periodicamente corrugado

São João da Boa Vista

2019

**Leonardo Torres Montero**

**Propriedades dinâmicas em mapeamentos bidimensionais :** aplicações em um guia de ondas periodicamente corrugado

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia de Telecomunicações .

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Juliano Antonio de Oliveira

São João da Boa Vista

2019

Montero, Leonardo Torres

Propriedades dinâmicas em mapeamentos bidimensionais: aplicações em um guia de ondas periodicamente corrugado / Leonardo Torres Montero. -- São João da Boa Vista, 2019.  
37 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso – Câmpus Experimental de São João da Boa Vista – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Bibliografia

1. Comportamento caótico nos sistemas 2. Guias de ondas 3. Sistemas dinâmicos diferenciais 4. Telecomunicações

CDD 23. ed. – 621.382

Ficha catalográfica elaborada pela [Biblioteca-BJB](#)

Bibliotecário responsável: João Pedro Alves Cardoso – CRB-8/9717

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**CÂMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA**  
**GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**PROPRIEDADES DINÂMICAS EM MAPEAMENTOS BIDIMENSIONAIS:  
APLICAÇÕES EM UM GUIA DE ONDAS PERIODICAMENTE CORRUGADO**

Aluno: Leonardo Torres Montero

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antonio de Oliveira

Banca Examinadora:

- Juliano Antonio de Oliveira (Orientador)
- Rafael Abrantes Penchel (Examinador)
- Rui Marcos Grombone de Vasconcellos (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Expediente nº 32/2018)

São João da Boa Vista, 16 de maio de 2019

## **DADOS CURRICULARES**

### **LEONARDO TORRES MONTERO**

**NASCIMENTO** 08/09/1994 - Americana / SP

**FILIAÇÃO** Daniel Torres Montero Neto  
Daniele Ferraz Miente

**2012 / 2013** Técnico em Mecatrônica  
Colégio Salesiano Dom Bosco

Dedico este trabalho a minha família, amigos, namorada e tutores que me apoiaram nessa jornada.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todo apoio fornecido pela minha família, amigos e namorada, agradeço também ao meu orientador Prof. Dr. Juliano A. de Oliveira por ter me ensinado e auxiliado em tantas coisas, e à Diogo R. da Costa, J. A. Méndez-Bermúdez, Rene O. Medrano-T e Edson D. Leonel pelas discussões científica. Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Pró-Reitoria de Pesquisa da UNESP (PROPE) pelo apoio financeiro através de bolsas de iniciação científica, realizadas nos processos: (2015/34060 , 2016/39215, 2017/42487, 2018/47984), ao CNPq (303242/2018-3, 421254/2016-5, 311105/2015-7) e a FAPESP(2018/14685-9, 2014/18672-8).

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

PROPE - Pró-Reitoria de Pesquisa da UNESP

## RESUMO

Motivados pelo crescente interesse do estudo de dinâmica não linear e modelos caóticos, neste trabalho consideramos uma família de mapeamentos não lineares bidimensionais, que ilustram o comportamento da dinâmica que recupera inúmeros problemas conhecidos em diferentes áreas, como química, física, astronomia, matemática e engenharia. Quando descrevemos o mapeamento nas variáveis momento e ângulo podemos recuperar o modelo conhecido como guia de ondas corrugado, de acordo com a escolha das variáveis e parâmetros de controle que descreve um feixe de luz refletido entre dois espelhos, sendo um deles liso e o outro corrugado. Definido o modelo, construímos o espaço de fases que ilustra a dinâmica do sistema, investigamos analiticamente a posição da primeira curva invariante spanning na transição de caos global para caos local, utilizando uma conexão com o mapa padrão. Introduzimos dissipação no sistema e utilizamos os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos. A partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov construímos o espaço de parâmetros e investigamos as janelas de periodicidade com o intuito de analisar o comportamento das estruturas periódicas conhecidas como camarões.

**PALAVRAS-CHAVE:** Guia de Ondas Corrugado. Espaço de fases. Expoente de Lyapunov.

## **ABSTRACT**

Motivated by the growing interest in the study of nonlinear dynamics and chaotic models, in this work we will consider a family of two-dimensional nonlinear mappings that illustrate the dynamics behavior that recovers numerous known problems in different areas such as chemistry, physics, astronomy, mathematics and engineering. When we describe the mapping in the moment and angle variables we can retrieve the model known as corrugated waveguide that describe a beam of light reflected between two mirrors, one of which is smooth and the other is corrugated. Having defined the model, we construct the phase space that illustrates the dynamics of the system, we investigate analytically the position of the first invariant spanning curve in the transition from global chaos to local chaos, using a connection to the standard map. We introduce dissipation into the system and use the Lyapunov exponents to characterize the chaos. From the calculation of the Lyapunov exponents we construct the space of parameters and investigate the periodicity windows in order to analyze the behavior of the periodic structures known as shrimp.

**KEYWORDS:** Corrugated Waveguide. Phases Space. Lyapunov Exponent.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1	Sistema Conservativo . . . . .	15
<b>2.1.1</b>	<b>Métodos de iteração de mapeamentos</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.1.2</b>	<b>O modelo</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1.2.1	Aproximação analítica para a primeira curva invariante <i>spanning</i> . . . . .	17
2.1.2.2	Expoente de Lyapunov . . . . .	18
2.2	Sistema Dissipativo . . . . .	22
<b>2.2.1</b>	<b>O Modelo</b> . . . . .	<b>22</b>
2.2.1.1	Espaço de Parâmetros . . . . .	25
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>28</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>29</b>
	<b>ANEXO A – ARTIGO PUBLICADO</b> . . . . .	<b>31</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas não lineares vem despertando o interesse de muitos cientistas ao longo das últimas décadas (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992), (PALACIOS, 2002), muito por conta da existência de sistemas caóticos. A teoria do caos consegue prever o comportamento de sistemas não lineares a partir de condições iniciais bem estabelecidas, uma vez que qualquer pequena variação nestas, fará com que o sistema evolua para algo totalmente diferente, porém, isso não deve ser confundido com aleatoriedade, o comportamento é sensível às condições iniciais e altamente instável, mas ainda assim é determinístico. A teoria do caos pode ser definida como “o estudo quantitativo do comportamento instável e não periódico em sistemas dinâmicos determinísticos” (KELLERT, 1993). Para entender o que isso significa, precisamos entender o conceito do que são sistemas dinâmicos e o que significa um sistema ser determinístico.

A dinâmica é um ramo da física que estuda “O movimento de um corpo e as causas desse movimento” (RESNICK; HALLIDAY; WALKER, 1996). Os princípios da dinâmica foram formulados por Isaac Newton por volta de 1600. Posteriormente, Poincaré ao tentar resolver o problema da dinâmica de três corpos, enxergou a possibilidade da existência de um sistema caótico (STROGATZ, 2007). Um sistema dinâmico, pode ser dividido em basicamente duas categorias, lineares e não lineares. Um sistema é classificado como linear se uma entrada  $x$ , possui uma saída  $f(x)$ , e uma entrada  $y$ , que tem como saída  $f(y)$ , atendem o seguinte requisito:  $f(c_1x + c_2y) = c_1f(x) + c_2f(y)$  (KAILATH, 1980), onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias, condição conhecida como homogeneidade e aditividade. Um sistema não linear são todos aqueles que não satisfazem o requisito supracitado. Sistemas dinâmicos podem ser entendidos como sistemas fora de equilíbrio, que mudam conforme o tempo (TESCHL, 2012). Um sistema determinístico por sua vez é aquele que ao evoluir um conjunto de valores iniciais sempre resultará a mesma saída, ou seja, um sistema não aleatório (CATTANI et al., 2017).

Um sistema caótico apresenta sensibilidade às condições iniciais, de modo que pequenas alterações fazem o sistema se comportar de forma totalmente diferente ao longo do tempo. A ideia de um sistema caótico foi proposta pela primeira vez por Edward Lorenz (GLEICK, 1989) quando em 1961 estudava modelos climáticos e ao recriar uma simulação obtida anteriormente, só que dessa vez truncando as condições iniciais, Lorenz obteve um resultado totalmente divergente do anterior, chamando assim esse efeito de “efeito borboleta”, pois em suas palavras “O bater de asas de uma borboleta no Brasil poderia provocar um furacão no Texas”. O estudo de Lorenz e seus “atratores estranhos” serviu como uma das bases para a formulação da teoria do caos (HILBORN, 2004).

Em 1949 o físico Enrico Fermi introduziu um modelo para explicar a aceleração de raios cósmicos na presença de campos magnéticos dependentes do tempo, denominado acelerador de Fermi (FERMI, 1949). Desde então o modelo foi estudado por diferentes autores em diversos contextos.

Um protótipo que descreve o acelerador de Fermi é o modelo Fermi-Ulam. Este modelo consiste basicamente em uma partícula confinada entre uma parede rígida sendo que uma delas está fixa e a outra se move periodicamente no tempo. Deste modo após a partícula colidir com a parede ela pode

ganhar ou perder energia. Para altas energias, existem praticamente curvas invariantes que o caracteriza de região localmente estocástica. A presença da primeira curva invariante no espaço de fase e que garante que a partícula não tem ganho de energia ilimitado (LIVORATI et al., 2018).

Outro modelo muito importante estudado na literatura é um guia de ondas periodicamente corrugado (SILVA; COSTA; LEONEL, 2012), onde um laser com uma dada intensidade é guiado entre uma superfície lisa, paralela ao plano  $y = 0$ , e outra corrugada, paralela ao plano descrito por  $y = a + d \cos(kx)$ , conforme pode ser observado na Figura 1, onde  $a$  é a distância entre as superfícies,  $d$  é o fator de corrugação e  $k$  é o número de onda. A posição de um feixe de luz colidindo entre as duas superfícies pode ser determinada através do mapeamento bidimensional nas variáveis posição  $X_{n+1}$  e ângulo  $\theta_{n+1}$ . (RABELO; LEONEL, 2008)

As aplicações da teoria do caos para modelar sistemas no mundo real são inúmeras, tornando o estudo de dinâmica não linear como uma área central e multidisciplinar. Dentre as principais aplicações destacamos a grande importância que o estudo tem principalmente em áreas de engenharia, que tentam prever o comportamento de sistemas complexos e altamente sensíveis as condições iniciais, dentre os quais podemos destacar alguns problemas em engenharia elétrica, como comunicação criptografada, sistemas de potência, antenas e radares, robótica e eletrônica de potência (UMOH; WUDIL, 2016). Destacamos também, problemas de química, como o estudo de plasmas (ESCANDE; ELSKENS, 2003), e em física, como o mapa de Kepler, para uma nuvem de cometas em ressonância com Júpiter (PETROSKY, 1986).

Geralmente, os sistemas dinâmicos são descritos por mapeamentos que dependem de um ou mais parâmetros de controle. Os parâmetros de controle desempenham o papel fundamental de controlar a dinâmica. Assim, um sistema dinâmico pode ser interpretado como uma função de parâmetros de controle, de modo que ele pode apresentar comportamentos bem diferentes se os parâmetros forem alterados, sendo necessário uma análise detalhada de como os parâmetros de controle interagem e modificam o comportamento do sistema.

Para analisar a dinâmica pode-se construir o espaço de fases, no qual são representados todos os estados possíveis de um sistema, de modo que órbitas caóticas, periódicas e quase periódicas podem ser observadas. Uma órbita, por sua vez, é definida como a coleção de pontos obtidos a partir da evolução de um sistema (KATOK; HASSELBLATT, 1995).

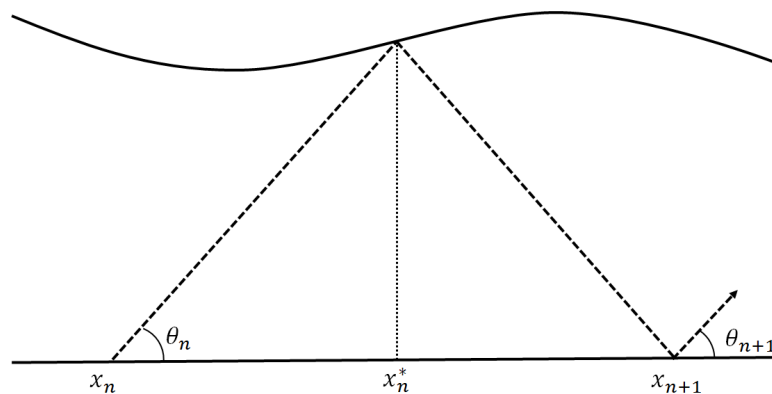


Figura 1 – Reflexão de um feixe de luz em um guia de ondas periodicamente corrugado.

Introduzindo dissipação no sistema, ocorre uma contração no espaço de fases do sistema e atratores

aparecem. Um atrator é um conjunto de valores numéricos para os quais um sistema tende a evoluir, considerando uma ampla variedade de condições iniciais em um sistema. Existem basicamente três tipos de atratores, fixo, periódico e estranho (BOEING, 2016).

Um atrator de ponto fixo é aquele em que a trajetória de uma órbita tende a convergir para um ponto fixo, como por exemplo, um bola girando dentro de um pote, conforme perde energia cinética tende a se aproximar do fundo do pote. Um atrator periódico, quando a trajetória se repete ciclicamente, como no caso de um pêndulo, ou como no caso anterior se não houver dissipação de energia. Finalmente, o atrator estranho normalmente é designado para nomear atratores caóticos, ou seja, atratores em que suas órbitas não assumem um caráter aleatório nem periódico, flutuando entre vários estados de modo contínuo e caótico, porém devemos ressaltar que nem todos os atratores estranhos são caóticos, pode-se definir um atrator estranho se "o conjunto de atração é fractal em sua natureza"(TAYLOR, 2018). O efeito borboleta gera um atrator estranho quando plotado (LORENZ, 1963).

Neste trabalho iniciamos com uma revisão de uma família de mapeamentos Hamiltonianos bi-dimensionais descrito nas variáveis momento e ângulo e por parâmetros de controle. Uma escolha específica dos parâmetros de controle e determinando a variável momento como sendo velocidade e a variável ângulo como fase de uma parede móvel recuperamos o modelo Fermi-Ulam. Considerando a variável ângulo como o ângulo de colisão do feixe de luz e a variável momento como a posição de colisão do laser, recuperamos o modelo de um guia de ondas periodicamente corrugado.

Construímos o espaço de fase e uma rica estrutura mista, composta por um grande mar de caos envolta de ilhas periódicas limitado por curvas invariantes *spanning*, foi observado e sua posição determinada de forma analítica e numericamente. Para caracterizar o caos, utilizamos os expoentes de Lyapunov, que quantifica a divergência entre duas trajetórias vizinhas ao decorrer do número de iterações do sistema, além disso, verificamos como se comportam os expoentes de Lyapunov em relação ao parâmetro que controla a intensidade de não linearidade do sistema.

Estendemos o nosso estudo introduzindo dissipação no sistema, construímos o espaço de fase e mostramos que para uma escolha específica dos parâmetros de controle a estrutura mista apresentada no sistema conservativo converge para um grande atrator caótico dependendo da escolha dos parâmetros de controle, para caracterizar o atrator caótico utilizamos os expoentes de Lyapunov.

Avançamos os nossos estudos na construção do espaço de parâmetros, um espaço rico que mostra como o sistema se comporta, ilustrando a dinâmica dependendo da escolha de determinados parâmetros de controle, mostrando para qual escolha dos parâmetros de controle de intensidade da não linearidade e do parâmetro de dissipação, tornam o sistema caótico ou periódico, analisando o valor do expoente de Lyapunov médio para esse par de parâmetros. No espaço de parâmetros estruturas periódicas, chamadas de camarões, foram observadas.

Para um melhor entendimento deste trabalho, o seu desenvolvimento foi dividido em duas partes, sendo a primeira, apresentada na seção 2.1, destinada a análise de um sistema conservativo, onde na sub-seção 2.1.1 foi realizado uma breve revisão dos métodos de iteração de mapeamentos e na 2.1.2 o modelo conservativo utilizado é introduzido e analisado o espaço de fases, a aproximação para a primeira curva invariante e o expoente de Lyapunov. Na segunda parte deste trabalho, apresentada na seção 2.2, estendemos os estudos para o problema dissipativo, onde na sub-seção 2.2.1 o modelo

utilizado no caso dissipativo é apresentado e analisado o seu espaço de fases, expoente de Lyapunov e o espaço de parâmetros. Finalmente no capítulo 3 a conclusão e comentários sobre o trabalho desenvolvido são realizados.

## 2 DESENVOLVIMENTO

### 2.1 SISTEMA CONSERVATIVO

#### 2.1.1 Métodos de iteração de mapeamentos

Os métodos de iterações em suma buscam encontrar soluções para equações, sistemas e modelos. Não possuímos soluções gerais para mapas discretos, nem para modelos não lineares, portanto precisamos usar métodos de iterações sucessivas para encontrar as soluções (KELLEY, 1995).

Partimos de uma condição inicial  $x_0$  para obter  $x_t$ , ou seja, dado qualquer tempo  $t$  podemos saber qual será o valor de  $x_t$ , sendo que, esse valor pode convergir para um ponto fixo, para um equilíbrio nem estável nem instável, ou para o infinito.

Como não existe uma solução geral para um mapeamento não linear, precisamos utilizar iteradas sucessivas para encontrar tal valor, a partir de uma condição inicial como no exemplo abaixo:

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0) \\x_2 &= f(x_1) \\x_3 &= f(x_2) \\&\vdots \\x_t &= f(x_{t-1}).\end{aligned}$$

Para um mapeamento com mais de uma variável, podemos reescrever a forma mais geral considerando duas variáveis  $x_t$  e  $y_t$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_t &= f(x_{t-1}, y_{t-1}), \\y_t &= g(x_{t-1}, y_{t-1}).\end{aligned}$$

Na seção a seguir, estudamos algumas propriedades dinâmicas para a família de mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais.

#### 2.1.2 O modelo

Nesta seção consideramos uma família de mapeamentos Hamiltonianos bidimensionais e investigamos algumas propriedades tanto analiticamente, quanto numericamente.

Assumindo um sistema bidimensional perturbado, a hamiltoniana é dada por:

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2), \quad (1)$$

onde  $H_0$  é a energia cinética,  $H_1$  a energia potencial,  $\epsilon$  o parâmetro que controla a não linearidade do sistema e as variáveis  $J$  e  $\theta$  correspondem respectivamente a momento e ângulo. Considerando uma seção de Poincaré definida pelo plano  $J_1 \times \theta_1$  e assumindo  $\theta_2$  como uma constante, reescrevemos a

equação (1) na forma de um mapeamento bidimensional, escrito como:

$$T : \begin{cases} J_{n+1} = J_n + \epsilon h(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + F(J_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, J_{n+1})] \end{cases},$$

tomando  $h(\theta_n) = \sin(\theta_n)$ ,  $p(\theta_n, J_{n+1}) = 0$  e definindo a função  $F = \frac{1}{J_{n+1}^\gamma}$ , escrevemos o seguinte mapeamento:

$$T_A : \begin{cases} J_{n+1} = |J_n - \epsilon \sin(\theta_n)| \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{J_{n+1}^\gamma} \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (2)$$

onde  $\epsilon$  e  $\gamma$  são parâmetros de controle. Podemos recuperar a partir do mapeamento (2) o modelo de um guia de ondas periodicamente corrugado (LEONEL, 2007), fazendo a escolha de  $\gamma = 1$ , da variável  $J_n$  como sendo a posição ( $X_n$ ) de colisão de um feixe de luz confinado entre uma superfície corruga de uma outra lisa de um guia de ondas e  $\theta_n$  como sendo o ângulo ( $\theta_n$ ) de colisão da partícula, conforme mostrado na Figura 1.

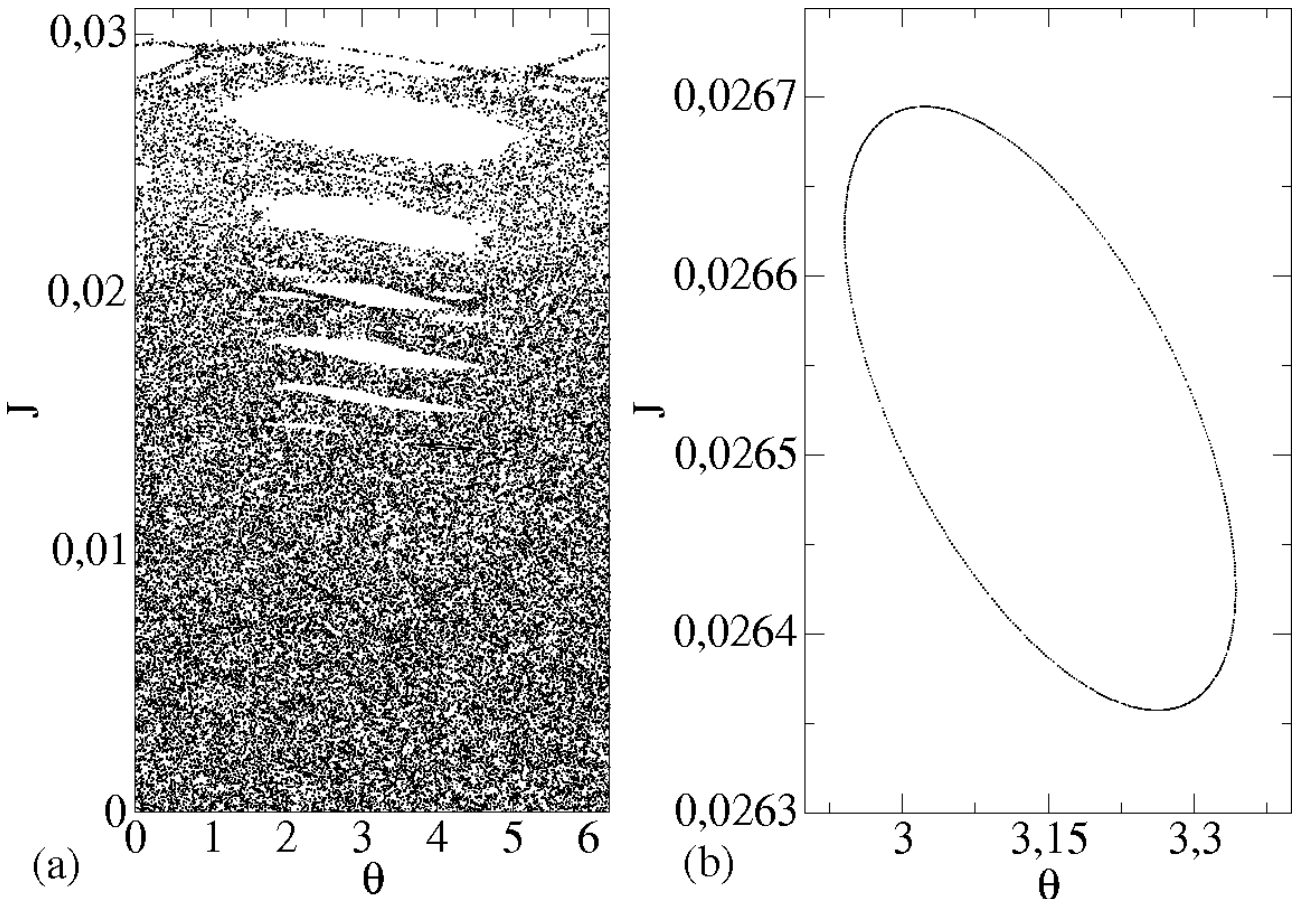


Figura 2 – Órbitas considerando  $\epsilon = 10^{-3}$  e diferentes condições iniciais (a)  $\theta_0 = 0,01$  e  $J_0 = 0,01$  (caótica) e (b)  $\theta_0 = 3$  e  $J_0 = 0,0265$  (periódica).

A Figura 2 mostra a evolução de duas órbitas considerando o mapeamento (2) e os parâmetros de controle  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 1$  e duas condições iniciais diferentes. A Figura 2(a) mostra uma órbita caótica considerando  $\theta_0 = 0,01$  e  $J_0 = 0,01$ , enquanto a Figura 2(b) mostra uma órbita periódica para as condições iniciais  $\theta_0 = 3$  e  $J_0 = 0,0265$ .

O espaço de fase é mostrado na Figura 3 para a iteração do mapeamento (2) para valores diferentes dos parâmetros de controle. Foram evoluídas condições iniciais diferentes para mostrar os tipos de orbitas do sistema.

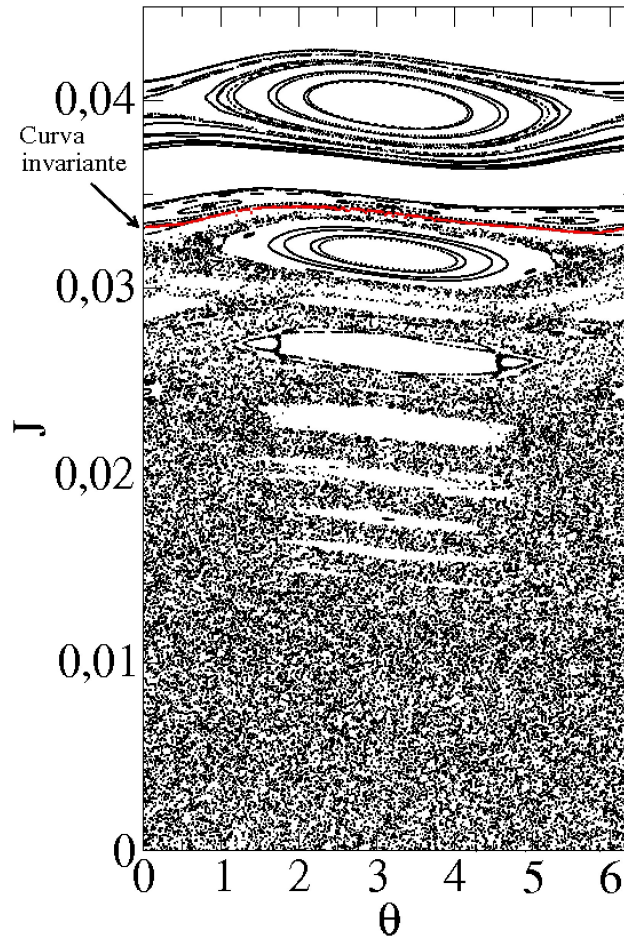


Figura 3 – Espaço de fase considerando  $\gamma = 1$  e  $\epsilon = 10^{-3}$

Podemos observar na Figura 3 que o espaço de fase é composto por pequenas ilhas periódicas cercado por um grande mar caótico, até a primeira curva invariante que limita o tamanho do mar caótico. Os parâmetros de controle usados foram  $\gamma = 1$  e  $\epsilon = 10^{-3}$ .

#### 2.1.2.1 Aproximação analítica para a primeira curva invariante *spanning*

A primeira curva invariante limita o tamanho do mar caótico, supondo um valor de  $J$  próximo à curva. Podemos escrevê-lo como  $J_{n+1} \cong J^* + \Delta J_{n+1}$  onde  $J^*$  é um valor ao longo da curva invariante e  $\Delta J_{n+1}$  é uma pequena perturbação. Reescrevendo a equação do mapeamento (2) como:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + F(J^* + \Delta J_{n+1}), \quad (3)$$

expandindo na série de Taylor:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{J^{*\gamma}} \left[ 1 - \gamma \frac{\Delta J_{n+1}}{J^*} + \theta \left( \gamma \frac{\Delta J_{n+1}}{J^*} \right)^2 \right], \quad (4)$$

e considerando até o termo de primeira ordem da série, temos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{J^{*\gamma}} - \frac{\gamma \Delta J_{n+1}}{J^{*\gamma+1}}. \quad (5)$$

Multiplicando ambos os lados por  $-\frac{1\gamma}{J^{*\gamma+1}}$  temos:

$$J^* \left( \frac{-\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) + \Delta J_{n+1} \left( \frac{-\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) = J^* \left( \frac{-\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) + \Delta J_n \left( \frac{-\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) - \left( \frac{-\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) \epsilon \sin(\theta_n). \quad (6)$$

Somando  $\frac{1}{J^{*\gamma}}$  de ambos os lados, obtemos:

$$\Delta J_{n+1} \left( -\frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) + \frac{1}{J^{*\gamma+1}} = \Delta J_n \left( -\frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) + \frac{1}{J^{*\gamma}} + \frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}} \epsilon \sin(\theta_n).$$

Considerando  $I_{n+1} = \Delta J_{n+1} \left( -\frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) + \frac{1}{J^{*\gamma+1}}$  e  $I_n = \Delta J_n \left( -\frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}} \right) + \frac{1}{J^{*\gamma}}$ , chegamos no seguinte mapeamento:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}} \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \text{ mod } 2\pi \end{cases}, \quad (7)$$

onde  $K_{eff} = \frac{\gamma}{J^{*\gamma+1}}$  de modo que podemos escrever uma equação para a primeira curva invariante *spanning* da seguinte forma:

$$J^* = \left( \frac{\gamma}{K_{eff}} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \quad (8)$$

Usando diferentes tipos de parâmetros de controle, podemos gerar diversos espaços de fases para o mapeamento e assim obter valores numéricos para a primeira curva invariante. Usando os valores de  $J_{max}^*$  e  $J_{min}^*$ , da curva apresentada na Figura 3, na equação (8), podemos obter o intervalo de  $K_{eff}$ . Assim, podemos esperar que os valores do  $K_{eff}$  seja aproximadamente  $K \cong 0,9716$ , podendo concluir que o tamanho da região caótica será proporcional à  $(\gamma\epsilon)^{1/\gamma+1}$ .

### 2.1.2.2 Exponente de Lyapunov

Como visto, no modelo estudado existe uma forte dependência às condições iniciais, essa é uma das características mais marcantes de sistemas caóticos (SANTOS, 2015). Para caracterizar o caos utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov. Medindo a taxa de divergência das trajetórias é possível observar a dependência das condições iniciais, uma vez que somente a sensibilidade as condições iniciais não são provas suficientes para caracterizar um sistema como caótico (SOUZA, 2008).

O método consiste em observar a taxa de divergência de duas trajetórias vizinhas infinitesimalmente próximas, ao longo de um grande período de tempo, assim, qualquer pequena perturbação pode fazer com que as trajetórias, inicialmente muito próximas, convirjam para pontos consideravelmente afastados.

Os expoentes de Lyapunov são uma maneira de quantificar a divergência dessas trajetórias, monitorando a divergência média exponencial em duas trajetórias vizinhas que se afastam.

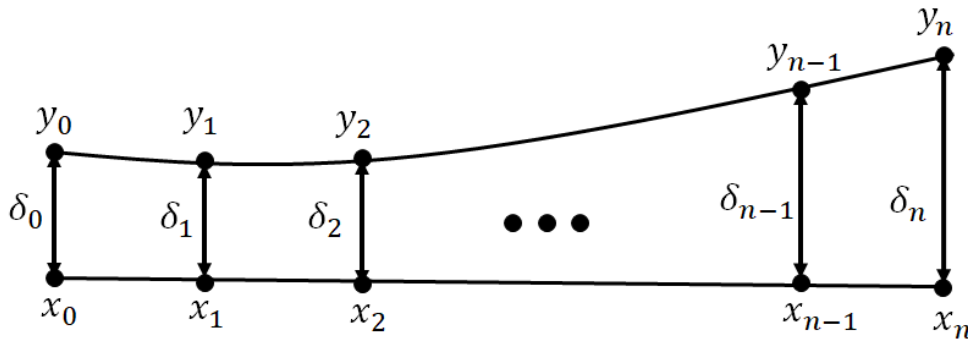


Figura 4 – Ilustração da divergência de duas trajetórias para a definição do expoente de Lyapunov

Na Figura 4 é ilustrado de maneira simplificada esse comportamento.  $x_0$  e  $y_0$  são condições iniciais vizinhas, separadas por uma distância infinitesimal  $\delta_0$ , após  $n$  interações, em que  $n \rightarrow \infty$ , cada trajetória converge para  $x_n$  e  $y_n$  respectivamente. Sabemos que o modelo estudado é caótico então, cada trajetória se afasta exponencialmente de sua condição inicial, e isso pode ser parametrizado pela equação (9), onde  $\lambda_n$  é o expoente de Lyapunov.

$$|\delta_n| = |\delta_0|e^{\lambda_n} \quad (9)$$

A partir disso, podemos observar que para valores de  $\lambda_n$  positivos as trajetórias irão se afastar, caracterizando o sistema como caótico. Para valores negativos de  $\lambda_n$ , as trajetórias irão convergir (se aproximando), caracterizando o sistema como periódico.

Aplicando o logaritmo natural dos dois lados da equação e realizando algumas operações matemáticas, que não cabe ao escopo desse projeto discutir, recuperamos para um mapeamento bidimensional, os expoentes de Lyapunov que são dados por (ECKMAN; RUELLE, 1992):

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |\Lambda_j^{(n)}|, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

onde  $\Lambda_j^{(n)}$  indica os autovalores da matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

cujos termos equivalem à:

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} = -\epsilon \cos(\theta_n), \quad (12)$$

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} = 1, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \gamma J_{n+1}^{-(\gamma+1)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} = -\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \gamma J_{n+1}^{-(\gamma+1)}. \quad (15)$$

com estes valores evoluímos a equação (10) numericamente, e obtivemos os resultados apresentados

na Figura 5.

A Figura 5 mostra os expoente de Lyapunov como uma função do número de iterações do mapeamento. Para construir as figuras foram consideradas condições iniciais diferentes, a fim de caracterizar o comportamento caótico do mapeamento. Consideramos as condições iniciais (a)  $\theta_0 = 10^{-2}$  e  $J_0 = 10^{-2}, J_0 = 10^{-3}, J_0 = 10^{-4}$  e  $J_0 = 10^{-5}$ . Podemos observar que os expoentes de Lyapunov convergem para um valor positivo, o que caracteriza as órbitas como sendo caóticas. A média dos expoentes de Lyapunov fornece  $\bar{\lambda} = 0,02130(6)$  na Figura 5 (a), enquanto a Figura 5 (b) considera as seguintes condições iniciais  $\theta_0 = 10^{-3}$  e  $J_0 = 10^{-2}, J_0 = 3 \times 10^{-2}, J_0 = 5 \times 10^{-2}$  e  $J_0 = 10^{-4}$ . A convergência das órbitas para os expoentes de Lyapunov positivos pode ser observada e a médias dos expoentes fornece  $\bar{\lambda} = 0,0071(1)$ . O fato dos expoentes de Lyapunov serem positivos, é suficiente para caracterizar as órbitas caóticas.

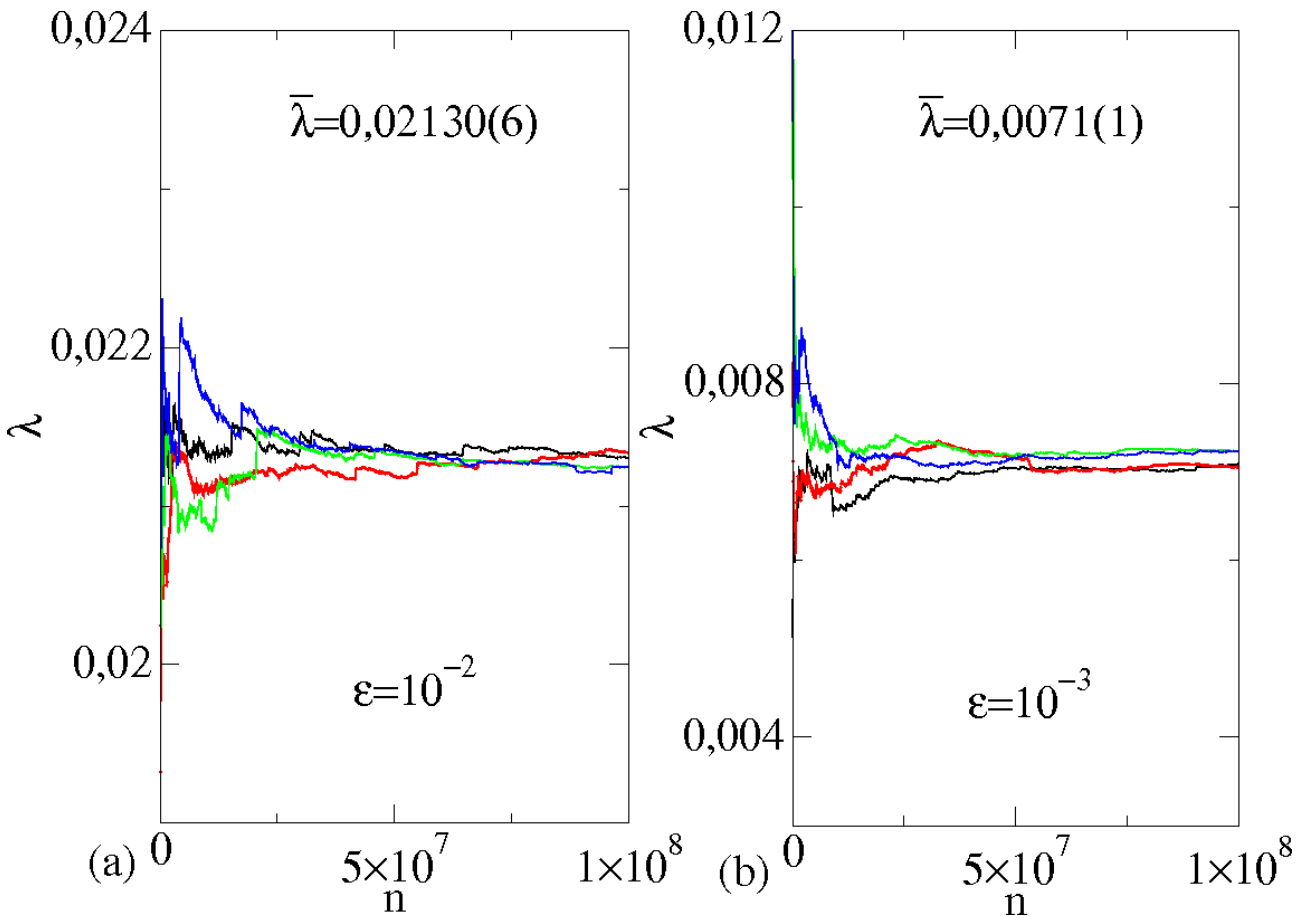


Figura 5 – Expoente de Lyapunov considerando  $\gamma = 1$ : (a)  $\epsilon = 10^{-3}$  e (b)  $\epsilon = 10^{-2}$

Podemos observar pela equação (11) que o expoente de Lyapunov depende dos parâmetros de controle do mapeamento. Dentre estes, podemos destacar o parâmetro  $\epsilon$  que controla a intensidade da não linearidade do sistema. A fim de analisar as características desta relação, foi considerado uma gama de valores para  $\epsilon$ , então, o expoente de Lyapunov foi calculado considerando cinco condições iniciais distintas, semelhante ao método utilizado para a obtenção da Figura 5, porém variando o parâmetro  $\epsilon$  (OLIVEIRA; LEONEL, 2012).

Na Figura 6 podemos observar o resultado obtido para a média dos expoentes de Lyapunov positivos como uma função de  $\epsilon$ , considerando três décadas em escala logarítmica, no eixo das ordenadas. Em

cor vermelha mostra o ajuste para a média dos expoentes de Lyapunov que pode ser representado por  $\bar{\lambda} = a\epsilon^b$  onde  $a = 2,6886 \times 10^{-7}$  e  $b = 0.048806$ . Podemos observar que a curva em vermelho, aproxima-se muito da curva experimental, ficando dentro dos limites impostos pelo desvio padrão em todo o intervalo, caracterizando a curva obtida pela equação (16) como uma excelente aproximação.

$$\bar{\lambda} = 2,6886 \times 10^{-7} \epsilon^{0.048806} \quad (16)$$

Na Figura 6 é notável que a média dos expoentes de Lyapunov aumentem à medida que o parâmetro  $\epsilon$  também aumenta, esse efeito mostra que quando o parâmetro de controle da intensidade de não linearidade aumenta o tamanho do mar de caos (OLIVEIRA; BIZAO; LEONEL, 2010).

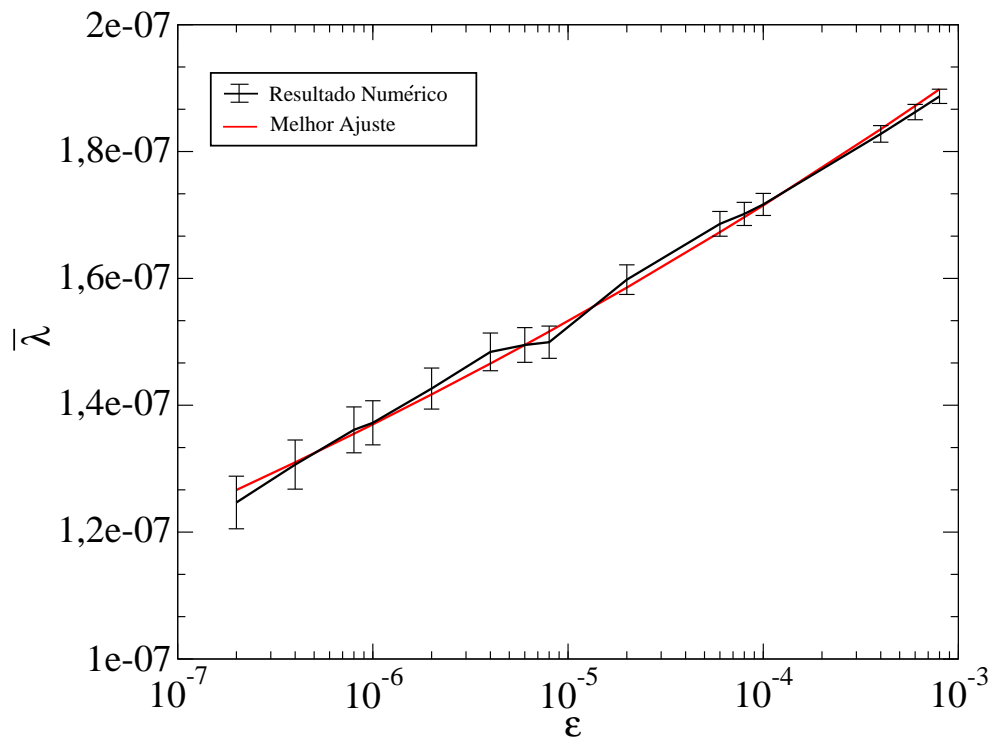


Figura 6 – Valor médio do expoente de Lyapunov em função do parâmetro  $\epsilon$

Podemos estender a análise mudando o parâmetro de controle  $\gamma$ , para compreender como o mesmo afeta o comportamento do sistema, na Figura 7 foi considerado  $\gamma = 2$ , que recupera alguns conhecidos problemas na literatura, como, em física de plasmas que descreve um modelo de um átomo de hidrogênio altamente excitado em sistemas de microondas. (ZASLAVSKY et al., 1991; OLIVEIRA; D.LEONEL, 2013). Podemos observar na Figura 7 que o resultado foi muito próximo ao obtido para  $\gamma = 1$ . A curva de melhor ajuste, representada na cor vermelha pode ser aproximada por  $\bar{\lambda} = a\epsilon^b$  onde  $a = 2,7081 \times 10^{-7}$  e  $b = 0,04658$ , mostrando a sutil diferença entre as duas figuras.

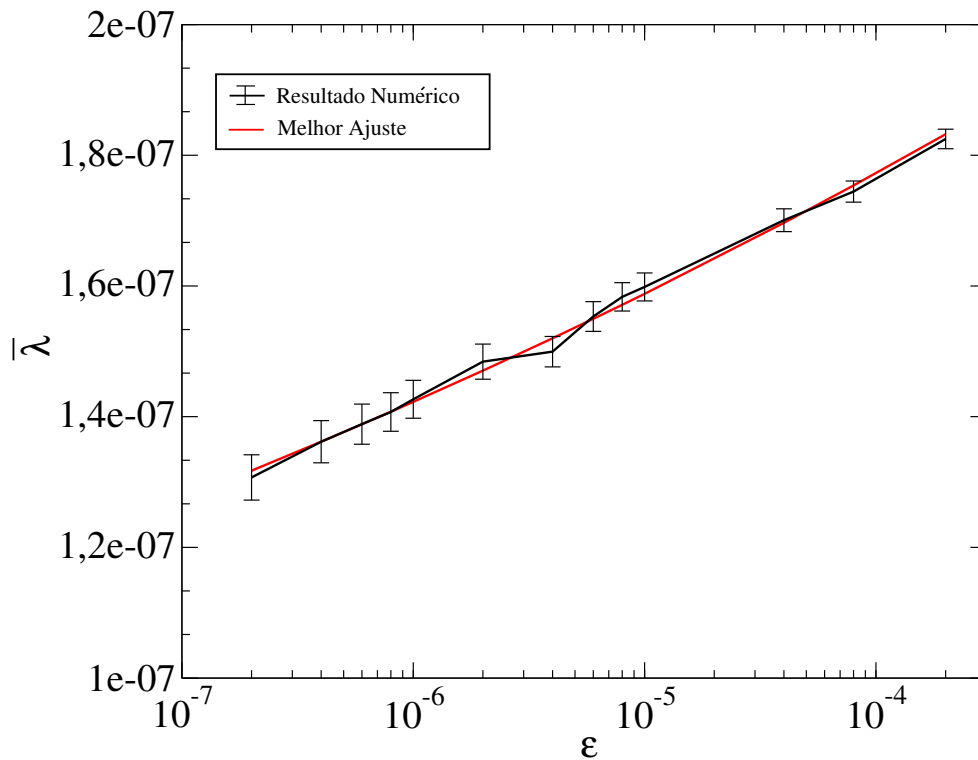


Figura 7 – Valor médio do expoente de Lyapunov em função do parâmetro  $\epsilon$ , considerando  $\gamma = 2$

## 2.2 SISTEMA DISSIPATIVO

### 2.2.1 O Modelo

Nesta seção introduzimos dissipação no mapeamento descrito na equação (2) de modo que: (KUWANA; OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

$$T_2 : \begin{cases} J_{n+1} = |\delta J_n - (1 + \delta)\epsilon \sin(2\pi\theta_n)| \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{J_{n+1}} \quad \text{mod}(1) \end{cases}, \quad (17)$$

onde parâmetro  $\delta$  controla a intensidade da dissipação ao sistema. Para  $\delta = 1$  o mapeamento conservativo é recuperado.

Podemos de forma similar ao estudo realizado na seção 2.1, recuperar o modelo de um guia de ondas periodicamente corrugado a partir da escolha correta dos parâmetros do mapeamento (17),  $J_N \rightarrow X_n$  e  $\theta_n \rightarrow \theta_n$  conforme podemos observar na Figura 1. Neste caso, o parâmetro de dissipação  $\delta$  dependerá do tipo de guia de ondas em questão, levando em conta a perda relacionada a não reflexão total na casca do guia e da perda no dielétrico do núcleo (POZAR, 2004).

Quando  $\delta < 1$  a área do espaço de fase é contraída e atratores aparecem. A Figura 8 mostra o espaço de fases, onde podemos observar um grande atrator caótico considerando os seguintes parâmetros de controle  $\epsilon = 110$  e  $\delta = 0,988$ .

Recorremos ao estudo do cálculo dos expoentes de Lyapunov discutido no Seção 2.1 para caracterizar o atrator caótico. O procedimento adotado para determinar o expoente de Lyapunov no problema dissipativo é o mesmo utilizado para o sistema conservativo, visto na seção 2.1.2.2. Sendo assim,

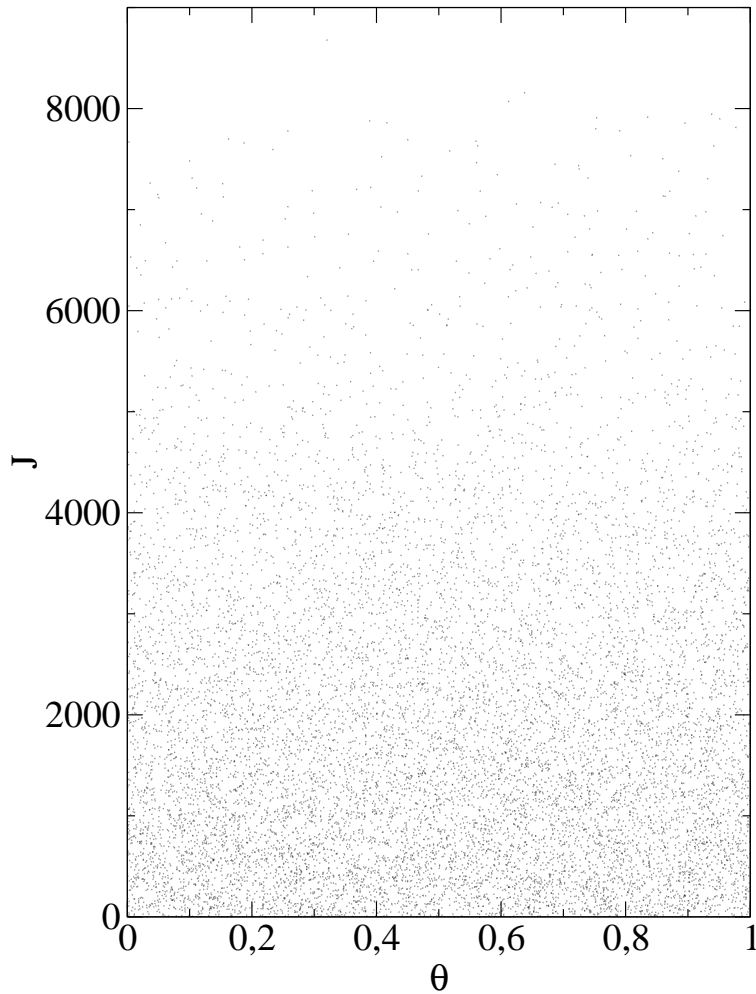


Figura 8 – Espaço de fase para o sistema dissipativo

definimos a matriz Jacobiana definida na equação (11).

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

e os elementos da matriz Jacobiana são dados por:

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} = -2\pi\epsilon(1 + \delta) \cos(2\pi\theta_n) \quad (19)$$

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} = \delta \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{1}{J_{n+1}^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} = -\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \frac{1}{J_{n+1}^2}. \quad (22)$$

Podemos calcular o determinante ( $D$ ) da matriz Jacobiana 18 para verificar se o sistema preserva a área do espaço de fase, quando  $D \neq 1$  podemos verificar que o sistema não preserva a área do espaço de fases, ocorrendo uma contração e atratores caóticos podem ser observados. Na equação 23 o calculo

do determinante ( $D$ ) da matriz Jacobiana do mapeamento 17 foi realizado.

$$D = \left( \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \times \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} \right) - \left( \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \times \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \right) = \delta \quad (23)$$

Podemos verificar pela equação (17) que  $D = \delta$ . Portanto, para casos diferentes do caso conservativo, onde  $\delta = 1$ , (mostrado na seção 2.1) ocorrerá uma contração no espaço de fases e atratores caóticos poderão ser observados, como vemos na Figura 8, onde  $D = \delta = 0,998$ .

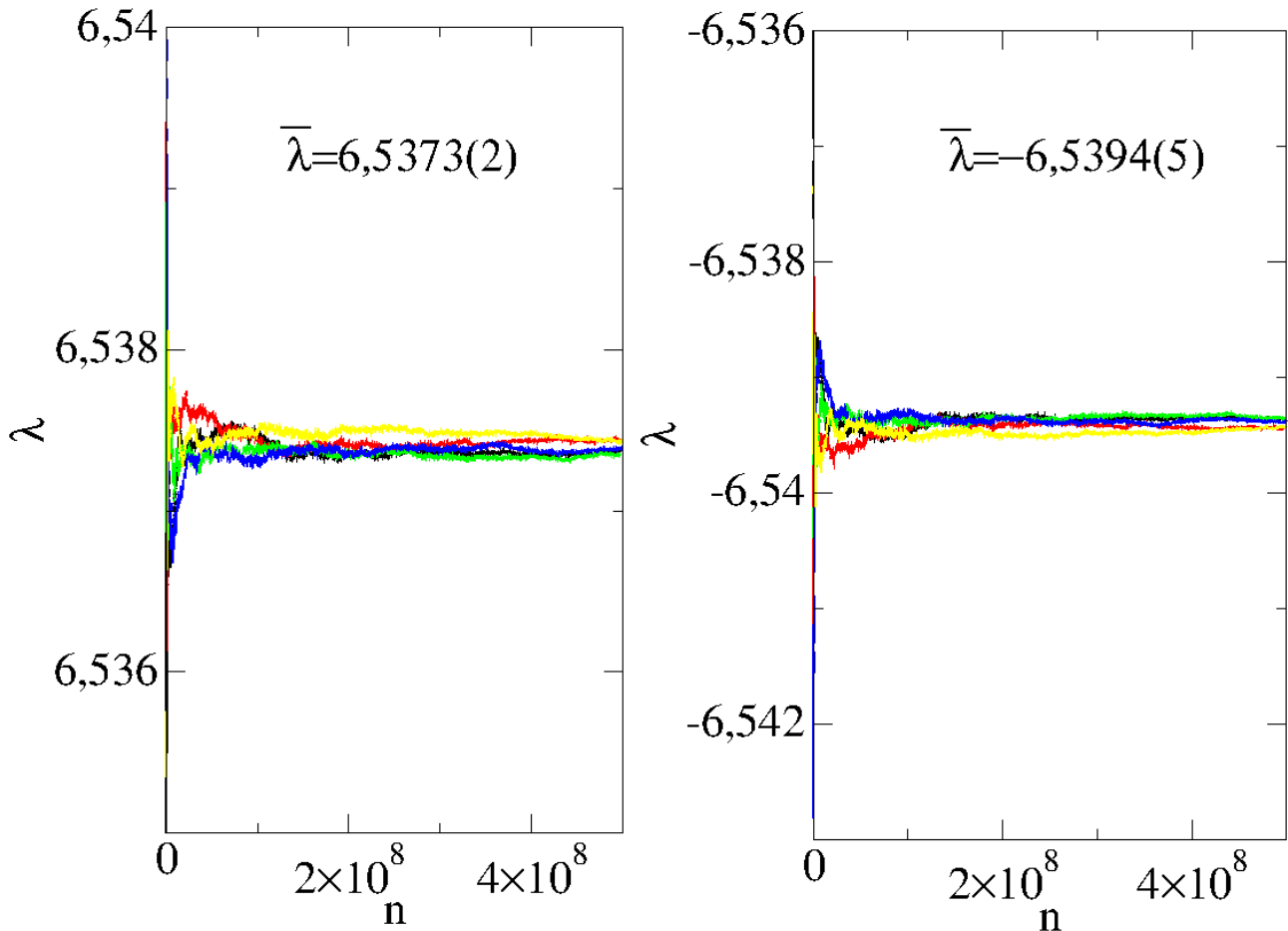


Figura 9 – Expoente de Lyapunov em função do número de iterações para o sistema dissipativo. Utilizamos os parâmetros de controle  $\delta = 0,998$ ,  $\epsilon = 110$  e cinco condições iniciais diferentes. (a) mostra os expoentes positivos enquanto (b) mostra os negativos.

A Figura 9 mostra os expoentes de Lyapunov para o mapa (17). A Figura 9 (a) mostra os expoentes de Lyapunov positivos, enquanto a Figura 9 (b) mostra os expoentes de Lyapunov negativo. Para ambos os casos consideramos os parâmetros de controle  $\delta = 0,998$ ,  $\epsilon = 110$  e cinco condições iniciais diferentes. Podemos observar na Figura 9 (a) que os expoentes de Lyapunov convergem para um valor positivo, o que caracteriza as órbitas como sendo caóticas, uma vez que existe pelo menos um expoente positivo. A média dos expoentes positivos fornece  $\bar{\lambda} = 6,5373(2)$ . A Figura 9 (b) mostra os expoentes de Lyapunov convergindo para um valor negativo, o que caracteriza as órbitas como sendo periódicas. A média dos expoentes positivos fornece  $\bar{\lambda} = -6,5394(5)$ . É notável observar que em módulo a soma dos expoentes de Lyapunov positivos e negativos é na ordem de  $0,0021$ , mostrando o efeito da dissipação no sistema.

### 2.2.1.1 Espaço de Parâmetros

Nesta seção discutimos a construção do espaço de parâmetros  $\delta$  em função de  $\epsilon$  determinados a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Consideramos uma grade de  $1000 \times 1000$  parâmetros e executando  $10^6$  iterações, consumindo excessivos recursos computacionais.

A Figura 10 mostra uma visão panorâmica do espaço de parâmetros considerando as condições iniciais  $J_0 = 0,4$ ,  $\theta_0 = 0,4$ , os parâmetros de controle  $\delta \in [0, 1]$  e  $\epsilon \in [0, 30]$ . Os valores negativos apresentados na escala de cores na legenda daquela figura representam os expoentes de Lyapunov negativos caracterizando os comportamentos periódicos, enquanto os valores positivos representam os expoentes de Lyapunov positivos caracterizando os comportamentos caóticos (OLIVEIRA et al., 2018). Podemos observar estruturas camarões ilustrando os expoentes de Lyapunov negativos. Em ciano são mostradas as curvas de retorno. Podemos observar que existe uma grande quantidade de domínios complexos de periodicidade seguindo um determinado padrão de distribuição. As figuras a seguir mostram ampliações em regiões de interesse da Figura 10.

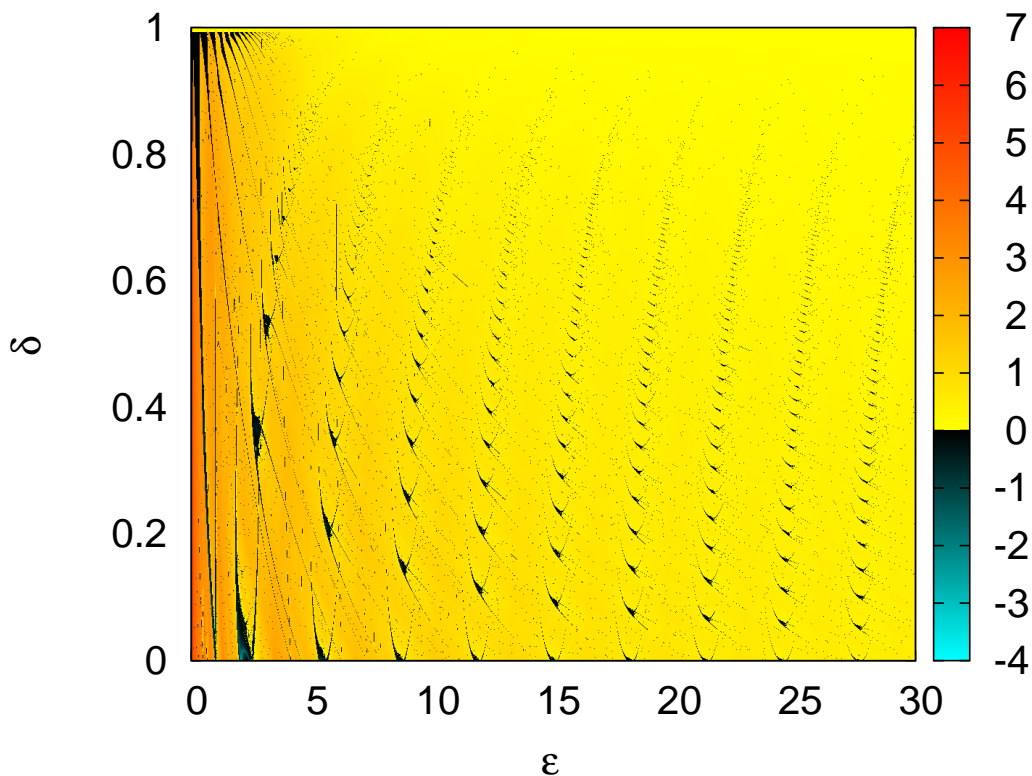


Figura 10 – Espaço de Parâmetros para  $\delta \in [0, 1]$  e  $\epsilon \in [0, 30]$ .

A Figura 11 foi obtida considerando o intervalo  $\delta \in [0, 0,6]$  e  $\epsilon \in [5, 7]$  para os parâmetros de controle. Podemos observar uma sequência de estruturas camarões, conforme supracitado, note que as estruturas obedecem uma certa periodicidade, diminuindo de tamanho conforme  $\delta$  e  $\epsilon$  aumentam. Uma dessas figuras é retratada na janela de ampliação representada na Figura 12

Na Figura 12 foi considerada a janela  $\delta \in [0, 08, 0, 25]$  e  $\epsilon \in [8, 10]$  para investigar melhor uma estrutura camarão. Podemos observar na escala de cores na legenda da figura, que o camarão possui valores negativos caracterizando a periodicidade. No centro da figura, podemos observar em ciano um curva denominada curva de retorno. As curvas de retorno são regiões de alta estabilidade, isso significa

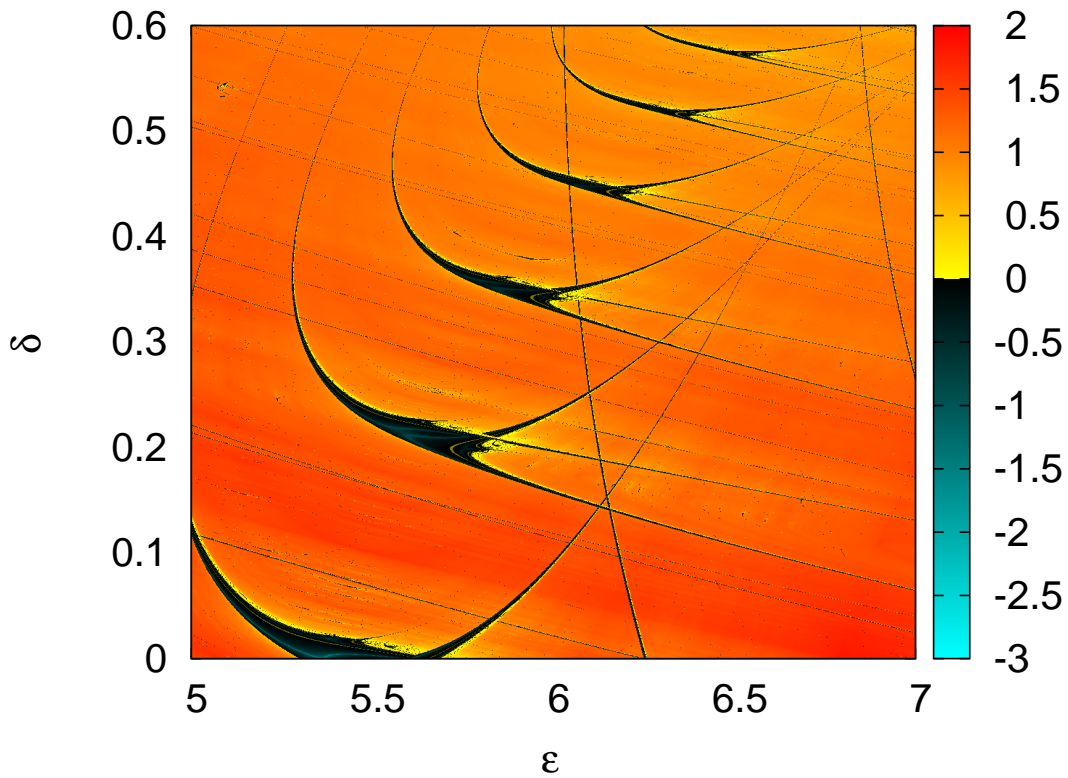


Figura 11 – Espaço de Parâmetros para  $\delta \in [0, 0, 6]$  e  $\epsilon \in [5, 7]$ .

que o sistema converge rapidamente para atratores periódicos quando são considerados os parâmetros  $\delta$  e  $\epsilon$  ao longo dessa curva.

Na Figura 13 podemos observar uma nova estrutura representada no espaço de parâmetros, essas estruturas são chamadas de estruturas baratas e são similares às estruturas camarões mostradas na Figura 11, porém, houve uma quebra, fazendo com que a curva de retorno não seja tão definida como nas estruturas camarões. A figura foi obtida considerando o intervalo  $\delta \in [0, 7, 0, 84]$  e  $\epsilon \in [4, 4, 6]$

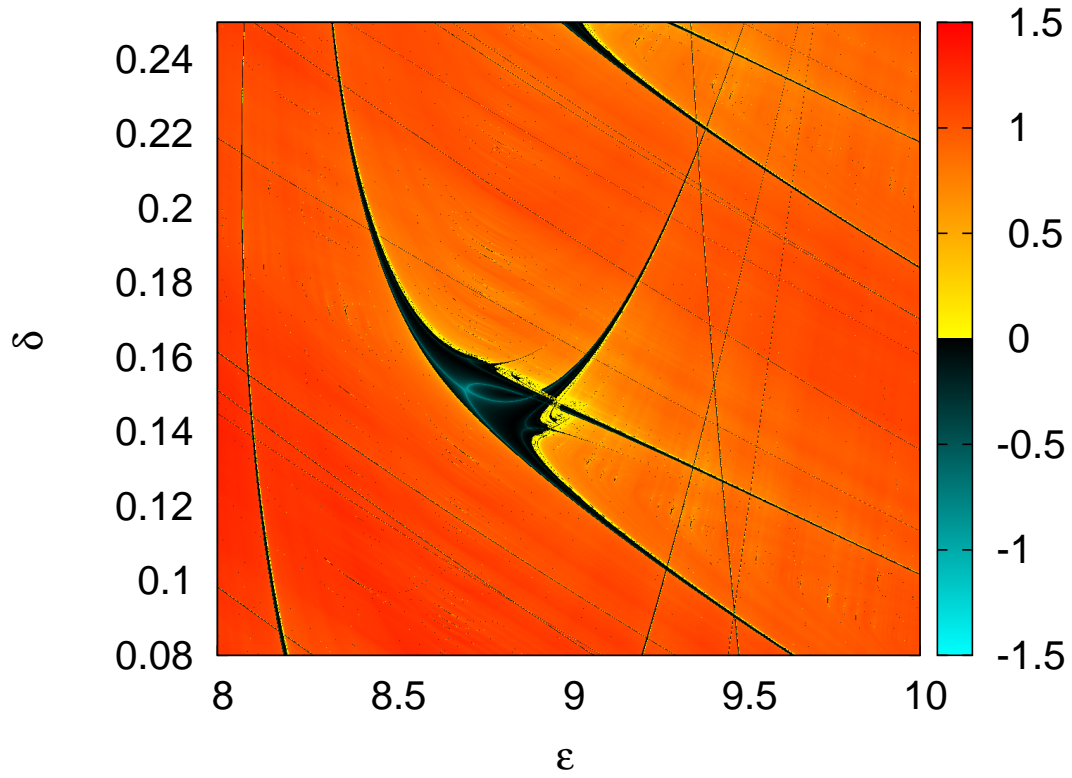


Figura 12 – Espaço de Parâmetros para  $\delta \in [0,08, 0,25]$  e  $\epsilon \in [8, 10]$ .

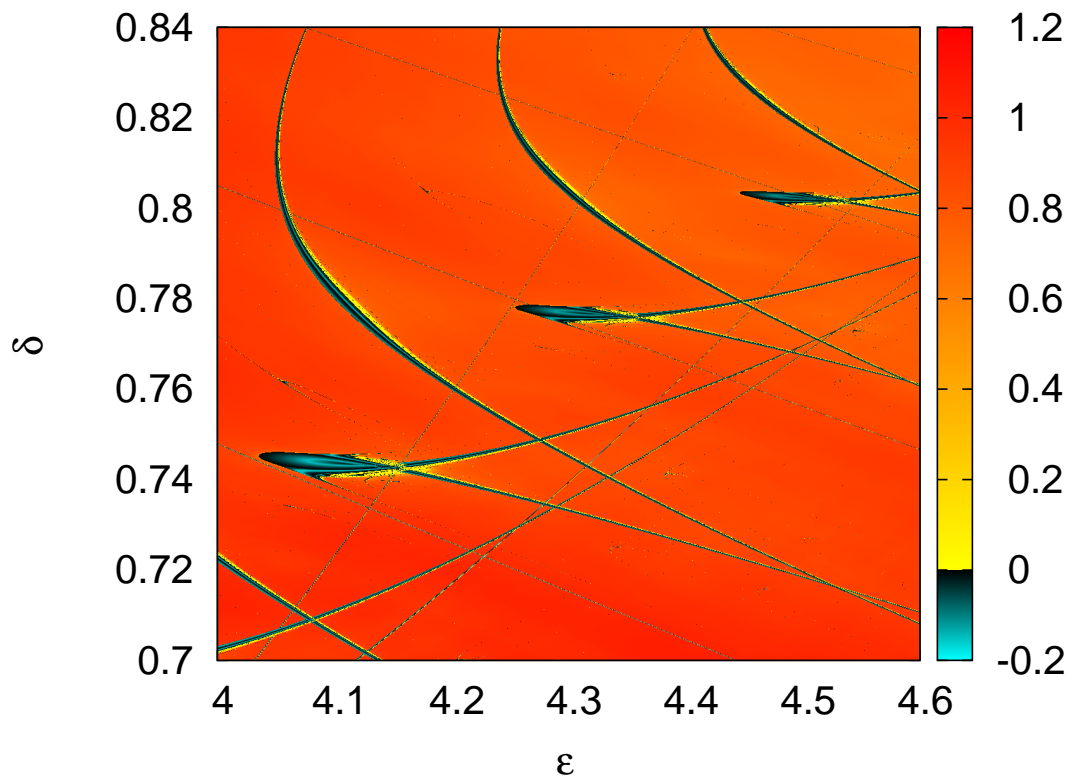


Figura 13 – Espaço de Parâmetros para  $\delta \in [0,7, 0,84]$  e  $\epsilon \in [4, 4,6]$ .

### 3 CONCLUSÃO

Neste trabalho começamos por revisar algumas propriedades dinâmicas em uma família de mapeamentos hamiltonianos bidimensionais descrito nas variáveis momento e ângulo e por parâmetros de controle. Vimos que a escolha dos parâmetros podem recuperar o guia de ondas periodicamente corrugado. Definimos o modelo, desenvolvemos programas computacionais para mostrar a evolução de órbitas e construir um espaço de fase. Observamos que o espaço de fase é composto por ilhas periódicas, um grande mar de caos e curvas invariantes *spanning*, analisamos os expoentes de Lyapunov a fim de caracterizar o comportamento caótico do sistema, e mostramos que o valor do expoente converge para uma valor positivo, mostrando que de fato à caos no sistema. Quando analisamos o comportamento do valor do expoente de Lyapunov, variando o parâmetro  $\epsilon$ , percebemos que o expoente de Lyapunov aumenta com o valor de  $\epsilon$ , indicando um aumento do tamanho do mar de caos.

Introduzimos dissipação no sistema, construímos o espaço de fase e verificamos que para um parâmetro de dissipação  $\delta < 1$  ocorre uma contração no espaço de fase e atratores caóticos são observados. Calculamos os expoentes de Lyapunov e obtivemos um valor positivo e outro negativo para as médias, com uma certa simetria, sendo que o valor negativo em módulo é maior que o positivo, mostrando o efeito da dissipação e caracterizando o caos, uma vez que existe pelo menos um expoente positivo. Construímos os espaços de parâmetros e observamos as estruturas camarões que são estruturas periódicas cercadas por regiões caóticas.

Este trabalho gerou resultados originais em colaboração com os pesquisadores: Diogo R. da Costa, J. A. Méndez-Bermúdez, Rene O. Medrano-T, Edson D. Leone e Juliano A. de Oliveira. Nossos resultados foram publicados na forma de um artigo científico no respeitado periódico “*Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*” intitulado “*An investigation of the parameter space for a family of dissipative mappings*”, mostrado no anexo A.

## REFERÊNCIAS

- BOEING, G. Visual analysis of nonlinear dynamical systems: Chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction. **Systems**, MDPI AG, v. 4, n. 4, p. 37, Nov 2016. ISSN 2079-8954.
- CATTANI, M. et al. Deterministic chaos theory: Basic concepts. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, 2017.
- ECKMAN, J. P.; RUELLE, D. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems. **Physica D**, v. 56, p. 185–187, 1992.
- ESCANDE, D. F.; ELSKENS, Y. Microscopic dynamics of plasmas and chaos: the wave–particle interaction paradigm. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, v. 45, n. 12A, p. A115, 2003.
- FERMI, E. On the origin of the cosmic radiation. **Physical Review**, v. 8, p. 1169, 1949.
- GLEICK, J. **Caos**. [S.l.]: Rizzoli, 1989. (Osservatorio straniero). ISBN 9788817852487.
- HILBORN, R. C. Sea gulls, butterflies, and grasshoppers: A brief history of the butterfly effect in nonlinear dynamics. **American Association of Physics Teachers**, 2004.
- KAILATH, T. **Linear Systems**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1980. (Information and System Sciences Series). ISBN 9780135369616.
- KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). ISBN 9780521575577.
- KELLERT, S. **In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1993. (In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems). ISBN 9780226429748.
- KELLEY, C. **Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. (Frontiers in Applied Mathematics). ISBN 9780898713527.
- KUWANA, C.; OLIVEIRA, J. A. D.; LEONEL, E. D. A family of dissipative two-dimensional mappings: Chaotic, regular and steady state dynamics investigation. **Physica A**, v. 395, p. 458–465, 2014.
- LEONEL, E. D. Corrugated waveguide under scaling investigation. **Physical Review**, v. 98, p. 114102, 2007.
- LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. Regular and chaotic dynamics. **Appl. Math. Sci**, v. 38, 1992.
- LIVORATI, A. L. et al. Investigation of stickiness influence in the anomalous transport and diffusion for a non-dissipative fermi–ulam model. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, v. 55, p. 225–236, 2018.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of The Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130 – 141, 1963.
- OLIVEIRA, J. A. de; BIZAO, R. A.; LEONEL, E. D. Finding critical exponents for two-dimensional hamiltonian maps. **PHYSICAL REVIEW E**, v. 81, n. 046212, p. 046212, 2010.

- OLIVEIRA, J. A. de; D.LEONEL, E. A rescaling of the phase space for hamiltonian map: Applications on the kepler map and mappings with diverging angles in the limit of vanishing action. **Applied. Mathematics and Computation**, v. 221, p. 32 – 39, 2013.
- OLIVEIRA, J. A. de; LEONEL, E. D. Dissipation and its consequences in the scaling exponents for a family of two-dimensional mappings. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 45, n. 165101, p. 11, 2012.
- OLIVEIRA, J. A. de et al. An investigation of the parameter space for a family of dissipative mappings. **Chaos - Submetido para a Publicação**, 2018.
- PALACIOS, A. Inter. j. bifur. and chaos. **Appl. Math. Sci**, v. 12, p. 1859, 2002.
- PETROSKY, T. Chaos and cometary clouds in the solar system. **Physics Letters A**, v. 117, n. 7, p. 328 – 332, 1986. ISSN 0375-9601.
- POZAR, D. **Microwave Engineering**. [S.l.]: Wiley, 2004. ISBN 9780471448785.
- RABELO, A. F.; LEONEL, E. D. Finding invariant tori in the problem of a periodically corrugated waveguide. **Brazilian Journal of Physics**, v. 38, n. 1, 2008.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. **Fundamentos De Física - Volume 1 - Mecânica**. [S.l.]: LTC, 1996.
- SANTOS, O. V. dos. **Avaliação da estabilidade do sincronismo entre sistemas dinâmicos não-lineares: aspectos teóricos e aplicações**. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2015.
- SILVA, M. R.; COSTA, D. R. da; LEONEL, E. D. Characterization of multiple reflections and phase space properties for a periodically corrugated waveguide. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 45, n. 26, p. 265101, 2012.
- SOUZA, E. G. **Caracterização de sistemas dinâmicos através de gráficos de recorrência**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2008.
- STROGATZ, S. **Nonlinear Dynamics And Chaos**. [S.l.]: Sarat Book House, 2007. (Studies in nonlinearity). ISBN 9788187169857.
- TAYLOR, R. L. V. **Attractors: Nonstrange to chaotic**. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 2018.
- TESCHL, G. **Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2012. ISBN 978-0-8218-8328-0.
- UMOH, E. A.; WUDIL, T. S. Engineering applications of chaos. In: ICPT. **12th International Conference and Exhibitions on Power and Telecommunications**. [S.l.], 2016.
- ZASLAVSKY, G. M. et al. Weak chaos and quasi-regular patterns. **Cambridge University Press**, v. 12, p. 253, 1991.