

Akira Sérgio Fugii

**Sobre Equações Diferenciais
Parciais Hiperbólicas**



1910000808



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Sobre Equações Diferenciais Parciais Hiperbólicas

Akira Sérgio Fugii

Orientador

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos



808/98

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática/IBILCE/UNESP como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas - Área de Concentração: Matemática

São José do Rio Preto - SP

Dezembro - 1997



Agradecimentos

Na certeza de que este trabalho não é um produto meramente pessoal, deixo registrado meus agradecimentos a todos aqueles, que de uma forma ou de outra, tornaram possível sua realização.

Em especial, agradeço:

Ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, por ter concedido o privilégio de trabalhar sob sua orientação e acima de tudo pela paciência e dedicação, fatores fundamentais para que esse trabalho fosse concluído.

**A minha família,
dedico**

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP - S. J. R. Preto pelo carinho e atenção que sempre dedicaram.

Aos amigos de Pós-Graduação pelos ótimos momentos que passamos juntos.

A todos colegas do Banco do Brasil. Em especial, aos amigos do CESEC - Ribeirão Preto - SP / Funcionalismo pelo senso de companheirismo, que tornaram possíveis muitas licenças.

Ao Daniel, Luciano, Marcos, Beliza, Iara e Mariângela, pela amizade mantida desde o nosso ingresso na universidade.

À Erica pela valiosa colaboração durante todo esse tempo.

À Vânia pelo trabalho de digitação.

A Deus por tudo.

Agradecimentos

Na certeza de que este trabalho não é um produto meramente pessoal, deixo registrado meus agradecimentos a todos aqueles, que de uma forma ou de outra, tornaram possível sua realização.

Em especial , agradeço:

Ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, por ter concedido o privilégio de trabalhar sob sua orientação e acima de tudo pela paciência e dedicação, fatores fundamentais para que esse trabalho fosse concluído.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP - S. J. R. Preto, pelo carinho e atenção que sempre dedicaram.

Aos amigos de Pós-Graduação pelos ótimos momentos que passamos juntos.

A todos colegas do Banco do Brasil. Em especial, aos amigos do CESEC - Ribeirão Preto - SP / Funcionalismo pelo senso de companheirismo, que tornaram possíveis minhas licenças.

Ao Daniel, Luciano, Marcos, Beleza, Iara e Mariângela, pela amizade mantida desde o nosso ingresso na universidade.

À Erica pela valiosa colaboração durante todo esse tempo.

À Vânia pelo trabalho de digitação.

A Deus por tudo.



RESUMO

Neste trabalho provamos existência e unicidade de solução do problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + a(x, t) u_t + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

para dados iniciais infinitamente deriváveis e com suporte compacto. Assumimos que os coeficientes e o termo forçante são infinitamente deriváveis e se anulam fora de algum cilindro em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Índice

Introdução	1
------------	---

Capítulo 1 - Equação da Onda	1
------------------------------	---

1.1 - Problema de Cauchy	1
--------------------------	---

1.2 - Problema de Cauchy para a Equação Homogênea	2
---	---

ABSTRACT

In this work we prove existence and uniqueness of solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x, t) u_t + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

for initial data infinitely differentiable with compact support.

We assume that the coefficients and the forcing term are infinitely differentiable and vanish outside some cylinder in $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.3 - Unicidade de Solução	22
----------------------------	----

Capítulo 3 - Existência de Solução	23
------------------------------------	----

3.1 - Uma estimativa para Derivadas de $N[u]$	26
---	----

3.2 - Existência de Solução de $\Delta u = f$ na faixa $0 \leq t \leq T$	27
--	----

3.3 - Existência de Solução de $\Delta u = f$ no Semi-espaço $t \geq 0$	33
---	----

Apêndice	34
----------	----

Bibliografia	37
--------------	----

Índice

Introdução.....	i
Capítulo 1 - Equação da Onda.....	1
1.1 - Problema de Cauchy.....	1
1.2 - Problema de Cauchy para a Equação Homogênea.....	2
1.3 - Problema de Cauchy para a Equação Não Homogênea.....	6
1.4 - O Método da Energia.....	7
Capítulo 2 - Unicidade de Solução para Perturbação da Equação da Onda.....	16
2.1 - Notações e Hipóteses.....	16
2.2 - Estimativa de Energia.....	18
2.3 - Unicidade de Solução.....	22
Capítulo 3 - Existência de Solução.....	25
3.1 - Uma estimativa para Derivadas de $N[u]$	26
3.2 - Existência de Solução de $\mathcal{L}u = f$ na faixa $0 \leq t \leq T$	27
3.3 - Existência de Solução de $\mathcal{L}u = f$ no Semi-espaco $t \geq 0$	33
Apêndice.....	34
Bibliografia.....	37

INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem a coeficientes constantes é uma equação diferencial da forma

$$\sum_{i,j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + \gamma u = \delta \quad (1)$$

onde os coeficientes α_{ij} , β_i e γ são escalares (reais ou complexos), $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ e o termo forçante δ é uma função das variáveis independentes $\xi_1, \dots, \xi_{\nu}$.

Tais equações são classificadas de acordo com o comportamento da matriz $[\alpha_{ij}]$ dos coeficientes da parte principal. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu}$ os auto-valores da matriz $[\alpha_{ij}]$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu}$ são não nulos e todos, exceto um deles, possuem o mesmo sinal, dizemos que a equação é hiperbólica. Neste caso existe uma transformação linear invertível de coordenadas

$$(\xi_1, \dots, \xi_{\nu}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, t), \quad n = \nu - 1$$

tal que nas coordenadas $(x_1, \dots, x_n, t)$ a equação (1) tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d \quad (2)$$

onde a, c e $b_i, i = 1, \dots, n$ são constantes e d uma nova função das variáveis $(x_1, \dots, x_n, t)$.

O exemplo mais conhecido de equação hiperbólica a coeficientes constantes é aquela em que $a = c = 0, b_i = 0, i = 1, \dots, n$. Neste caso a equação (2) se reduz à equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = d \quad (3)$$

Assim toda equação diferencial parcial linear hiperbólica a coeficientes constantes pode ser vista como uma perturbação da equação da onda.

O problema de Cauchy para equação (2) consiste em determinar a solução da equação (2) no semi-espaco $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$, satisfazendo um par de condições iniciais. Mais precisamente, dadas as funções $u_0 = u_0(x), u_1 = u_1(x)$ e $d = d(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, determinar $u = u(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ tal que u satisfaça

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (*)$$

O estudo do problema de Cauchy (*) consiste em determinar se o mesmo é bem posto, isto é, se para os dados u_0 , u_1 e d existe a solução u , se ela é única e se depende continuamente dos dados. Um tal estudo é feito em [BJS] e [J] utilizando-se como ferramenta a Transformada de Fourier.

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy para uma equação similar à equação (2) porém, com coeficientes variáveis. Assumimos que os coeficientes a , c , b_i , $i = 1, \dots, n$, e o termo forçante d são funções reais de x e t , suficientemente diferenciáveis e se anulam fora de um cilindro de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Verificamos que dadas as funções u_0 e u_1 suficientemente diferenciáveis e anulando-se fora de um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) u = d, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (**)$$

possui solução única.

O estudo do problema (**) via Transformada de Fourier nos levaria à Teoria dos Operadores Pseudodiferenciais. No entanto pelo fato da equação ser uma perturbação da equação da onda, o estudo de (**) pode ser feito sem o conhecimento de tais operadores.

No estudo que fazemos aqui utilizamos resultados básicos da teoria clássica da equação da onda, uma estimativa de Sobolev e um método iterativo introduzido por Schauder [S], [KS] no início deste século.

No capítulo 1 fazemos um resumo, sem demonstrações, dos resultados sobre a equação da onda que serão utilizados nos capítulos posteriores. Deduzimos neste capítulo algumas estimativas de energia para soluções da equação de onda.

No capítulo 2 estudamos unicidade de solução do problema de Cauchy (**) bem como obtemos algumas estimativas de energia necessárias na demonstração da existência de solução.

No capítulo 3 provamos existência de solução pelo método iterativo de Schauder seguindo o estudo do caso em que $n = 3$ feito em [BJS]. Neste capítulo fazemos uso da desigualdade de Sobolev, que demonstramos de forma elementar no Apêndice, seguindo [K].



Capítulo 1

A Equação da Onda

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos sobre a equação da onda que serão utilizados no restante do trabalho.

Discutiremos o problema de Cauchy para a equação da onda homogênea apresentando as fórmulas explícitas para a solução. Em seguida estudaremos o princípio de Duhamel para resolver o problema não homogêneo e finalizaremos estudando o método da energia.

1.1 O Problema de Cauchy

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano das n -uplas de números reais $x = (x_1, \dots, x_n)$ e seja $u = u(x, t)$ uma função de $n + 1$ variáveis, $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Denotaremos $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e Δu o Laplaceano de u na variável x , isto é, $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Denotaremos $\mathbb{R}_+^{n+1}$ o semi-espaço de $\mathbb{R}^{n+1}$ onde $t > 0$.

O problema de Cauchy para a equação da onda consiste em determinar uma função real u definida no fecho $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ do semi-espaço $\mathbb{R}_+^{n+1}$, satisfazendo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.2.1)$$

onde f , u_0 e u_1 são funções conhecidas. O par de funções u_0 e u_1 são chamados dados iniciais do problema.

Tal problema surge de uma situação física onde se tem ondas propagando num meio elástico (infinito) com velocidade constante igual a um. A função $u = u(x, t)$ descreve a posição da partícula x no instante t e u_0 e u_1 descrevem respectivamente a posição

e a velocidade da partícula x no instante inicial $t = 0$. O termo forçante $f(x, t)$ é a intensidade de uma perturbação externa.

A noção de solução estudada neste trabalho é a de solução clássica, isto é, procuramos uma função u que seja suficientemente derivável e que satisfaça a equação bem como as condições iniciais.

A regularidade da função u dependerá da regularidade dos dados iniciais e do termo forçante f .

1.2 O Problema de Cauchy para a Equação Homogênea

Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Seja m um inteiro positivo. Denotaremos $C^m(\Omega)$ o conjunto das funções definidas em Ω que possuem derivadas contínuas até a ordem m . Denotaremos $C^m(\bar{\Omega})$ o conjunto das restrições à $\bar{\Omega}$ das funções de $C^m(\Omega_\delta)$, onde Ω_δ é uma vizinhança de $\bar{\Omega}$.

Passemos à discussão do problema de Cauchy para a equação da onda homogênea: $u_{tt} - \Delta u = 0$. As demonstrações dos teoremas abaixo podem ser vistas em [F].

Iniciemos com a equação da onda unidimensional.

Teorema 1.2.1 *Se $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases}$$

é a função $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds. \quad (1.2.1)$$

□

A fórmula (1.2.1) é chamada fórmula de D'Alembert e fornece algumas informações importantes a respeito da função u . Se os dados iniciais são $u_0 \in C^m(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ então $u \in C^m(\mathbb{R}^2)$, $m \geq 2$. Se os dados iniciais são ambos nulos fora de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ então a solução se anulará fora da região do plano coberta por todas as retas com inclinação ± 1 passando pelos pontos de K (figura 1).

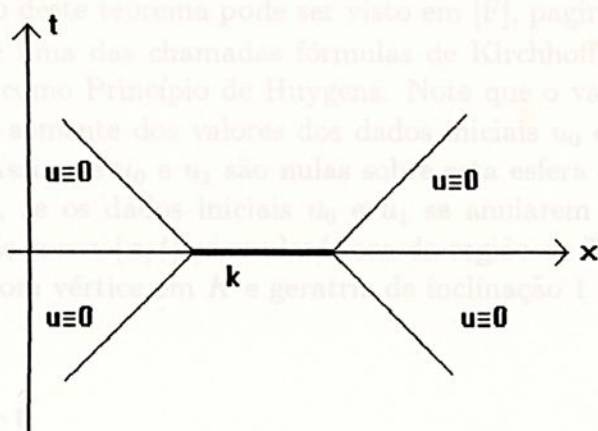


Figura 1

A fórmula de D'Alembert é usada na dedução da fórmula explícita da solução do problema de Cauchy em dimensões superiores. Neste caso usa-se a noção de média esférica de função para reduzir o problema de Cauchy em dimensões ímpares, $n \geq 3$, a um problema unidimensional. Para dimensões pares, $n \geq 2$ usa-se o Princípio da Descida de Hadarmard, para reduzir a um problema em dimensão ímpar [J], [F].

Seja $S_1(0)$ a esfera de raio unitário e centro na origem de $\mathbb{R}^n$. Seja w_n a área de $S_1(0)$.

Teorema 1.2.2 Suponhamos que n seja ímpar e $n \geq 3$. Se $u_0 \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ então a função dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{1.3.5. \dots (n-2) w_n} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{S_1(0)} u_0(x + ty) d\sigma(y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{S_1(0)} u_1(x + ty) d\sigma(y) \right] \quad (1.2.2)$$

está em $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ e satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

□

Uma demonstração deste teorema pode ser visto em [F], páginas 218 - 225.

A fórmula (1.2.2) é uma das chamadas fórmulas de Kirchhoff e mostra claramente o fenômeno conhecido como Princípio de Huygens. Note que o valor de u em um dado ponto (x, t) dependerá somente dos valores dos dados iniciais u_0 e u_1 sobre a esfera de centro em x e raio t . Assim se u_0 e u_1 são nulas sobre esta esfera o valor de u em (x, t) também o será. Logo, se os dados iniciais u_0 e u_1 se anularem fora de um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ então a solução $u = u(x, t)$ se anulará fora da região de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ gerada por todas as superfícies cônicas com vértice em K e geratriz de inclinação 1 (figura 2).

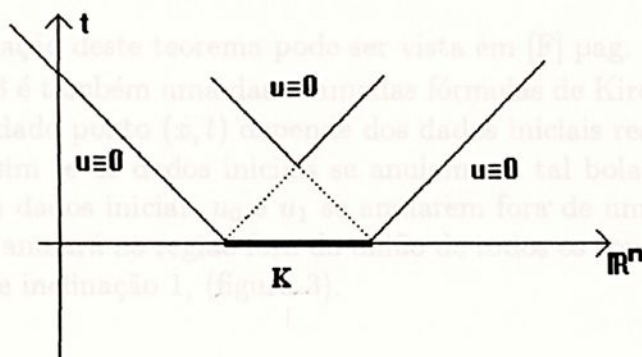


Figura 2

Se $x \in K$ e t é suficientemente grande então $u(x, t) = 0$. Este fenômeno, conhecido como o princípio de Huygens, não ocorre quando n é par. Neste caso, temos o seguinte:

Teorema 1.2.3 Suponhamos que n seja par, $n \geq 2$. Se $u_0 \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$, então a função

$$u(x, t) = \frac{2}{1.3.5 \dots (n-1)w_{n+1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1} \int_{B_1(0)} \frac{u_0(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} t^{n-1} \int_{B_1(0)} \frac{u_1(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \right] \quad (1.2.3)$$

está em $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ e satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Aqui $B_1(0)$ denota a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ com centro na origem e $|y|$ denota a norma euclidiana de $y \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Uma demonstração deste teorema pode ser vista em [F] pag. 225 - 227.

A fórmula 1.2.3 é também uma das chamadas fórmulas de Kirchhoff. Note que agora, o valor de u num dado ponto (x, t) depende dos dados iniciais restritos à bola de centro em x e raio t . Assim se os dados iniciais se anulam em tal bola então u se anulará no ponto (x, t) . Se os dados iniciais u_0 e u_1 se anularem fora de um conjunto K , $K \subset \mathbb{R}^n$, então a solução se anulará na região fora da união de todos os cones (sólidos) com vértice em K e geratriz de inclinação 1, (figura 3).

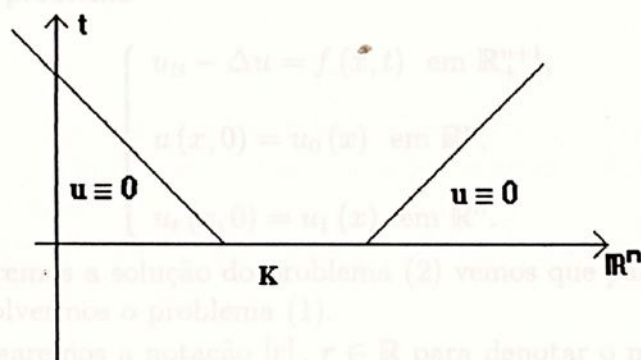


Figura 3

Note que ao contrário do que ocorre quando n é ímpar, se $x \in K$ e $t > 0$ o valor de u em (x, t) pode não ser nulo, mostrando que o princípio de Huygens não é válido quando n é par.

Nos Teorema 1.2.2 e 1.2.3 a regularidade exigida dos dados iniciais é a mínima para fornecer uma solução em $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Se os dados iniciais tiverem mais regularidade que aquela exigida nos teoremas acima, teremos soluções mais suaves. Se eles forem infinitamente deriváveis a solução também o será.

1.3 O Problema de Cauchy para a Equação Não-Homogênea

Sejam v e w soluções dos problemas

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = f(x, t) & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ v(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ v_t(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

e

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ w(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ w_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2)$$

respectivamente. Usando-se a linearidade da equação da onda vemos que a função $u = v + w$ é solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3)$$

Como já conhecemos a solução do problema (2) vemos que para resolver o problema (3) é suficiente resolvermos o problema (1).

No que segue usaremos a notação $[r]$, $r \in \mathbb{R}$ para denotar o maior inteiro menor ou igual a r .

Teorema 1.3.1 *Suponhamos que $f \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^{n+1})$. Para cada $s > 0$ seja $z(x, t; s)$ a solução do problema:*

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ z(x, 0; s) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ z_t(x, 0; s) = f(x, s) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Então a função

$$v(x, t) = \int_0^t z(x, t-s; s) ds \quad (1.3.1)$$

está em $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ e resolve o problema de Cauchy (1). $\square$

Este teorema é conhecido como Princípio de Duhamel e sua demonstração pode ser vista em [F], pag. 229 - 230. Utilizando a fórmula explícita de z dada pelas fórmulas de Kirchhoff (1.2.2) e (1.2.3) obtém-se explicitamente a solução de (1) e conseqüentemente do problema (3).

Suponhamos que exista um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u_0(x) = u_1(x) = 0$ para todo $x \notin K$ e $f(x, t) = 0$ para todo $x \notin K$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso a solução u do problema (3) se anulará na região indicada na figura 3. De fato, isto se verifica para w , pois w é solução do problema de Cauchy para a equação homogênea. Da mesma forma isto se verifica para cada $z(\cdot, \cdot; s)$. Para ver que v se anula em tal região basta observar que lá, o integrando em (1.3.1) é identicamente nulo.

Resumindo a discussão deste e dos parágrafos anteriores podemos enunciar o seguinte

Teorema 1.3.2 *Dados $f \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^{n+1})$, u_0 e u_1 com regularidade estabelecida nos Teoremas 1.2.2 e 1.2.3 conforme n seja ímpar ou par respectivamente, então o problema de Cauchy (3) tem solução $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ dado por $u = v + w$ onde v e w são as soluções dos problemas (1) e (2) respectivamente.* $\square$

Se os dados u_0 , u_1 e f possuírem mais regularidade que aquelas estabelecidas no Teorema 1.3.2 a solução será mais regular. Se os dados forem infinitamente diferenciáveis a solução u também será.

No próximo parágrafo discutiremos unicidade de solução dos problemas de Cauchy homogêneo e não homogêneo.

1.4 O Método da Energia

Neste parágrafo estudaremos a unicidade de solução do problema de Cauchy para a equação da onda utilizando o método da energia. Tal método consiste na obtenção de identidades e desigualdades integrais que permitem comparar a energia dos dados iniciais com a energia da solução num instante posterior.

Seja $u = u(x, t)$ uma solução clássica da equação

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4.1)$$

onde f é suficientemente derivável. Multiplicando ambos os lados de (1.4.1) por u_t obtemos

$$u_t u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_t u_{x_i x_i} = u_t f(x, t). \quad (1.4.2)$$

Observando as identidades $u_t u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2$, $u_t u_{x_i x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_t u_{x_i}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_{x_i})^2$ e levando-as em (1.4.2) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u_t u_{x_i}) = u_t f(x, t). \quad (1.4.3)$$

Seja $\vec{F} = \vec{F}(x, t)$ o campo vetorial em $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\vec{F}(x, t) = \left(-u_t u_{x_1}, \dots, -u_t u_{x_n}, \frac{1}{2} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] \right)$$

e $\text{div } \vec{F}(x, t)$ o seu divergente. Então a equação (1.4.3) pode ser escrita na forma

$$\text{div } \vec{F}(x, t) = u_t f(x, t). \quad (1.4.4)$$

No que segue nós referiremos à equação (1.4.4) como forma divergente da equação da onda não homogênea (1.4.1).

Consideremos agora o problema de Cauchy não homogêneo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Em todo este parágrafo assumiremos que os dados u_0 , u_1 e f possuem regularidade mínima para garantir a existência de solução clássica, isto é, os dados deverão ter pelo menos a regularidade mencionada no Teorema 1.3.2. Assumiremos também, que existe uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que;

$$u_0(x) = u_1(x) = 0 \text{ se } x \notin \Omega, \quad (1.4.5)$$

$$f(x, t) = 0 \text{ se } x \notin \Omega \text{ e } t > 0. \quad (1.4.6)$$

Considerando que a solução será nula fora da região formada pela união de todos os cones (sólidos) com vértice em Ω vemos que para cada $T > 0$ existe uma região limitada $R \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega \subset R$ e $u(x, t) = 0$ para todo x na fronteira ∂R de R e todo t , $0 \leq t \leq T$ (figura 4). Podemos, sem perda de generalidade, assumir que ∂R é suave.

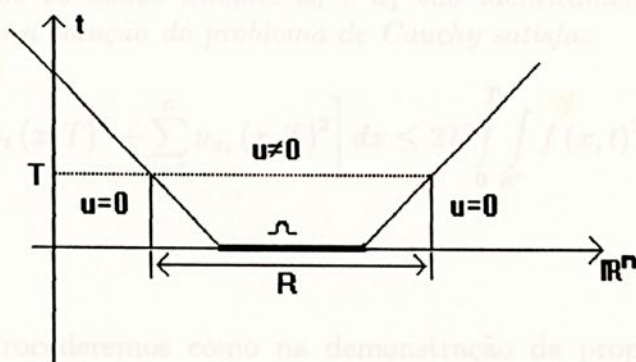


Figura 4

Proposição 1.4.1 (Conservação da Energia) Sob a hipótese (1.4.5), a solução do problema de Cauchy para a equação homogênea satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_1(x)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)^2 \right] dx$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Dado $T > 0$ seja $R \subset \mathbb{R}^n$ a região onde $u(x, t) = 0$ para $x \in \partial R$ e $0 < t < T$. Integrando-se (1.4.4) no cilindro $R \times [0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e observando que $f \equiv 0$ obtemos

$$\int_0^T \int_R \operatorname{div} \vec{F}(x, t) dx dt = 0.$$

Usando o Teorema da Divergência no cilindro $R \times [0, T]$ e observando que $u \equiv 0$ em $\partial R \times [0, T]$ obtemos

$$\frac{1}{2} \int_R \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_R \left[u_t(x, 0)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, 0)^2 \right] dx = 0.$$

Agora observando que $u_t(x, 0) = u_1(x)$ e $u_{x_i}(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)$ e que os integrandos da última igualdade são nulos em $\mathbb{R}^n \setminus R$ concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.4.2 Se os dados iniciais u_0 e u_1 são identicamente nulos em $\mathbb{R}^n$ e f satisfaz (1.4.6) então a solução do problema de Cauchy satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx \leq 2T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Procederemos como na demonstração da proposição anterior integrando (1.4.4) em $R \times [0, T]$, de onde obtemos

$$\frac{1}{2} \int_R \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx = \int_0^T \int_R u_t(x, t) f(x, t) dx dt, \quad (1.4.8)$$

pois $u_0 = u_1 = 0$ em $\mathbb{R}^n$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na última integral obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_R \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx &\leq \left(\int_0^T \int_R u_t(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^T \int_R \left[u_t(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, t)^2 \right] dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_0^T \int_R \left[u_t(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, t)^2 \right] dx dt \right)^{-1/2} \int_R \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx &\leq \\ &\leq \left(\int_0^T \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

A última desigualdade permanece válida se em vez de T tomássemos qualquer s com $0 < s < T$, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_0^s \int_R \left[u_t(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, t)^2 \right] dx dt \right)^{-1/2} \int_R \left[u_t(x, s)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, s)^2 \right] dx &\leq \\ &\leq \left(\int_0^s \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora observando que a última desigualdade pode ser reescrita como



$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^s \int_R \left[u_t(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, t)^2 \right] dx dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^s \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2},$$

que integrado em relação a s , no intervalo $0 < s < T$ fornece

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \int_R \left[u_t(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, t)^2 \right] dx dt \right)^{1/2} &\leq \int_0^T \left(\int_0^s \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2} ds \\ &\leq T \left(\int_0^T \int_R f(x, t)^2 dx dt \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Usando (1.4.8) em (1.4.7) obtemos

$$\frac{1}{2} \int_R \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx \leq T \left(\int_0^T \int_R f(x, t)^2 dx dt \right),$$

concluindo a demonstração. $\square$

Agora combinando as Proposições 1.4.1 e 1.4.2 podemos estabelecer o seguinte

Teorema 1.4.1 *Sejam u_0 , u_1 e f funções suficientemente diferenciáveis satisfazendo (1.4.5) e (1.4.6). Então a solução u do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_1(x)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)^2 \right] dx + \\ &\quad + 4T \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt \right) \end{aligned}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Seja v a solução da equação não homogênea com dados iniciais nulos e seja w a solução da equação homogênea com dados iniciais u_0 e u_1 . Então u é escrita como $u = v + w$ e valem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[v_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}(x, T)^2 \right] dx \leq 2T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[w_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n w_{x_i}(x, T)^2 \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_1(x)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)^2 \right] dx.$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx &= \int_{\mathbb{R}^n} [(v_t(x, T) + w_t(x, T))^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (v_{x_i}(x, T) + w_{x_i}(x, T))^2] dx \end{aligned}$$

$$\leq 2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[v_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}(x, T)^2 \right] dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left[w_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n w_{x_i}(x, T)^2 \right] dx \right\}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_1(x)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)^2 \right] dx + \\ &\quad + 4T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt \end{aligned}$$

como desejado. □

Vejamos agora como a unicidade de solução segue da Proposição 1.4.1. Suponhamos que o problema de Cauchy para a equação não homogênea com dados iniciais u_0 e u_1 tenha duas soluções; u e v . Seja w a diferença $u - v$. Logo w satisfaz o problema

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ w(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ w_t(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Da Proposição 1.4.1 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[w_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n w_{x_i}(x, T)^2 \right] dx = 0$$

Logo, para cada $T > 0$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$w_t(x, T) = w_{x_i}(x, T) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim w é constante. Como $w(x, 0) = 0$ segue que $w \equiv 0$.

Logo $u = v$, isto é, a solução é única.

Nosso objetivo agora é explorar a desigualdade da Proposição 1.4.2 e obter outras desigualdades que nos serão úteis no resto do trabalho. Suponhamos que u_0 , u_1 e f satisfaçam as condições da Proposição 1.4.2 e u seja a solução do Problema de Cauchy correspondente.

Do Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, T)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^T u_t(x, t) dt \right]^2 dx$$

pois $u(x, 0) = u_0(x) = 0$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Proposição 1.4.2 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, T)^2 dx &\leq T \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T u_t(x, t)^2 dt dx = T \int_0^T \left[\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x, t)^2 dx \right] dt \\ &\leq T \int_0^T \left[2t \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x, s)^2 dx ds \right] dt \leq T \int_0^T \left[2t \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, s)^2 dx ds \right] dt \\ &= T^3 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, s)^2 dx ds. \end{aligned}$$

Trocando s por t na última integral podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, T)^2 dx \leq T^3 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt.$$

Assim da Proposição 1.4.2 e da última desigualdade segue:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[u(x, T)^2 + u_t(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x, T)^2 \right] dx \leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt. \quad (1.4.9)$$

Suponhamos que f seja suficientemente regular para que possamos derivar em relação a x_j a equação $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$. Logo a função u_{x_j} satisfaz

$$\begin{cases} (u_{x_j})_{tt} - \Delta u_{x_j} = f_{x_j} & \text{em } \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ u_{x_j}(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u_{x_j,t}(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Logo a estimativa (1.4.9) aplicada a u_{x_j} fornece

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[u_{x_j}(x, T)^2 + u_{x_j,t}(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_j x_i}(x, T)^2 \right] dx \leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_{x_j}(x, t)^2 dx dt$$

$j = 1, \dots, n$.

De onde segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^n u_{x_j}(x, T)^2 + \sum_{j=1}^n u_{x_j,t}(x, T)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}(x, T)^2 \right] dx \\ \leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n f_{x_j}(x, t)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

De (1.4.9) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[u(x, T)^2 + u_t(x, T)^2 \right] dx \leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t)^2 dx dt,$$

que somado a (1.4.10) fornece

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ u^2 + u_t^2 + \sum_{j=1}^n u_{x_j}^2 + \sum_{j=1}^n u_{x_j,t}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right\} (x, T) dx \leq \\ \leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x, t)^2 + \sum_{j=1}^n f_{x_j}(x, t)^2 \right] dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Um multi-índice α é uma n -upla de números naturais $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Denotaremos $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e por ∂^α a derivada parcial de ordem $|\alpha|$ dada por

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}.$$

Observando que

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_1^{\alpha_1}} \right)^2 \leq u^2 + \sum_{j=1}^n u_{x_j}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{x_i x_j}^2,$$

$$\sum_{|\beta| \leq 1} \left(\frac{\partial^{|\beta|} u_t}{\partial x_n^{\beta_n} \dots \partial x_1^{\beta_1}} \right)^2 = u_t^2 + \sum_{j=1}^n u_{x_j t}^2,$$

obtemos, a partir de (1.4.11) a seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{|\alpha| \leq 2} (\partial^\alpha u(x, T))^2 + \sum_{|\beta| \leq 1} (\partial^\beta u_t(x, T))^2 \right] dx \leq \quad (1.4.12)$$

$$\leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\beta| \leq 1} (\partial^\beta f(x, t))^2 dx dt.$$

Repetindo-se o raciocínio, isto é, derivando-se a equação sucessivamente e obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u(x, T))^2 + \sum_{|\beta| \leq m-1} (\partial^\beta u_t(x, T))^2 \right] dx \leq \quad (1.4.13)$$

$$\leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\beta| \leq m-1} (\partial^\beta f(x, t))^2 dx dt.$$

Observe que as integrais acima poderiam ser tomadas numa região R onde u se anule em $\partial R \times [0, T]$. Mais ainda, podemos trocar T por qualquer t , $0 \leq t \leq T$ no lado esquerdo de (1.4.13) obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u(x, t))^2 + \sum_{|\beta| \leq m-1} (\partial^\beta u_t(x, t))^2 \right] dx \leq \quad (1.4.14)$$

$$\leq (2T + T^3) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\beta| \leq m-1} (\partial^\beta f(x, t))^2 dx dt.$$

Esta estimativa é de fundamental importância no capítulo 3 e é válida sempre que f for uma função suficientemente derivável.

Capítulo 2

Unicidade de Solução para Perturbação da Equação da Onda

Sejam $a = a(x, t)$, $b_i = b_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$ e $c = c(x, t)$ funções infinitamente deriváveis das variáveis $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{L}u$ o operador diferencial definido por

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - \Delta u + au_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu.$$

Denotemos $u_{x_{n+1}} = u_t$ e $b_{n+1} = a$. Então o operador $\mathcal{L}u$ pode ser escrito como

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} + cu.$$

Neste capítulo estudaremos unicidade de solução clássica do problema de Cauchy para a equação $\mathcal{L}u = f$. Seguiremos o estudo feito em [L], capítulo 4.

2.1 Notações e Hipóteses

Seja $T > 0$ e $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $t_0 > T$. Denotaremos $\mathcal{D}_T$ o tronco de cone dado por

$$\mathcal{D}_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; 0 \leq t \leq T, \|x - x_0\| \leq |t - t_0|\}.$$

Assim $\mathcal{D}_T$ é a parte do cone $\|x - x_0\| \leq |t - t_0|$ compreendida entre os planos $t = 0$ e $t = T$.

Para cada t , $0 < t \leq T$, denotaremos $\mathcal{D}_t$ a região

$$\mathcal{D}_t = \{(x, \xi) \in \mathcal{D}_T; 0 \leq \xi \leq t\}$$



e para cada par t_1, t_2 com $0 < t_1 < t_2 \leq T$. Denotaremos por $\mathfrak{D}_{t_1 t_2}$ a região

$$\mathfrak{D}_{t_1 t_2} = \mathfrak{D}_{t_2} - \mathfrak{D}_{t_1} = \{(x, \xi) \in \mathfrak{D}_T; t_1 \leq \xi \leq t_2\}.$$

Assim, se $t_0, \dots, t_k$ é uma coleção de números reais tal que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = T$

$$\mathfrak{D}_T = \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{D}_{t_{i-1} t_i} \quad (2.1.1)$$

Denotaremos por S a fronteira lateral de $\mathfrak{D}_T$, $\mathfrak{D}_t$ e $\mathfrak{D}_{t_1 t_2}$ para quaisquer t, t_1, t_2 e T . Para cada t , $0 \leq t \leq T$, denotaremos Ω_t a região plana

$$\Omega_t = \{(x, \xi) \in \mathfrak{D}_T; \xi = t\}.$$

Desta forma Ω_0 e Ω_t são respectivamente a base e o topo de todo $\mathfrak{D}_t$ com $0 < t \leq T$.

Denotaremos $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_t)$ o vetor unitário normal à fronteira de $\mathfrak{D}_t$, $0 < t \leq T$.

Observemos que $\nu_t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em S e $\nu_t = 1$ em Ω_t e $\nu_t = -1$ em Ω_0 .

Assumiremos que os coeficientes c e b_i , $i = 1, \dots, n+1$ do operador $\mathcal{L}$ são limitados em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, existe uma constante positiva μ tal que

$$|b_i(x, t)|, |c(x, t)| \leq \mu, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

para todo $i = 1, \dots, n+1$

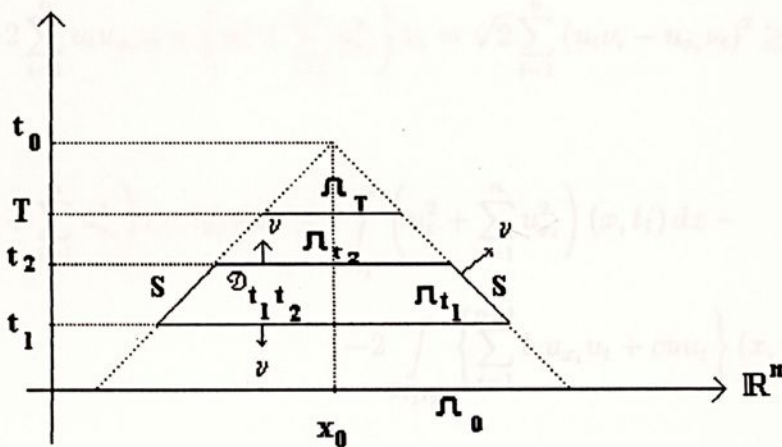


Figura 5

2.2 Estimativa de Energia

Consideremos a equação diferencial homogênea $\mathfrak{L}u = 0$. Multiplicando-se ambos lados da equação por u_t e usando a forma divergente da equação da onda obtemos

$$u_t \mathfrak{L}u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{x_i} u_t) + \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t + c u u_t = 0,$$

ou seja

$$\operatorname{div} \left(-2u_t u_{x_1}, \dots, -2u_t u_{x_n}, u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t + 2c u u_t = 0.$$

Sejam t_1 e t_2 tais que $0 < t_1 < t_2 < T$. Integrando-se a última igualdade em $\mathfrak{D}_{t_1 t_2}$ e usando o Teorema do Divergente obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} + 2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t + c u u_t \right\} (x, \tau) dx d\tau + \\ + \int_S \left[-2 \sum_{i=1}^n u_t u_{x_i} \nu_i + \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \nu_t \right] ds = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Agora observando que

$$-2 \sum_{i=1}^n u_t u_{x_i} \nu_i + \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \nu_t = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n (u_t \nu_i - u_{x_i} \nu_t)^2 \geq 0$$

concluimos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_2}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_2) dx \leq \int_{\Omega_{t_1}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_1) dx - \\ - 2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t + c u u_t \right\} (x, \tau) dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Usando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$ temos

$$-2b_i u_{x_i} u_t \leq (-b_i u_{x_i})^2 + (u_t)^2 \leq c (u_{x_i}^2 + u_t^2), \quad i = 1, \dots, n+1$$

onde c é uma constante que depende apenas de μ , logo

$$-2 \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t \leq c \sum_{i=1}^{n+1} (u_{x_i}^2 + u_t^2) = c \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + (n+2) u_t^2 \right)$$

e portanto

$$-2 \sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t \leq c_1 \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)$$

onde $c_1 = (n+3)c$.

Assim

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i u_{x_i} u_t \right) (x, \tau) dx d\tau &\leq c_1 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx d\tau \\ &= c_1 \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_\tau} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \right] d\tau \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Temos também

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} (c u u_t) (x, \tau) dx d\tau &\leq c_2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} (u^2 + u_t^2) (x, \tau) dx d\tau \\ &\leq c_2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} u(x, \tau)^2 dx d\tau + \\ &\quad + c_2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} (c u u_t) (x, \tau) dx d\tau &\leq c_2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} u(x, \tau)^2 dx d\tau + \\ &\quad + c_2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_\tau} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \right] d\tau \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Levando (2.2.2) e (2.2.3) em (2.2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_2}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_2) dx &\leq \int_{\Omega_{t_1}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_1) dx + \\ &+ (c_1 + c_2) \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_\tau} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \right] d\tau \\ &+ c_2 \int_{\mathfrak{D}_{t_1 t_2}} u(x, \tau)^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t_2}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_2) dx &\leq \int_{\Omega_{t_1}} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_1) dx + \\ &+ (c_1 + c_2) \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_\tau} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \right] d\tau \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Agora observe que $u(x, t_2) = u(x, t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_t(x, \tau) d\tau$, logo

$$u(x, t_2)^2 \leq 2 \left[u(x, t_1)^2 + \left(\int_{t_1}^{t_2} u_t(x, \tau) d\tau \right)^2 \right].$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na integral obtemos

$$u(x, t_2)^2 \leq 2 \left[u(x, t_1)^2 + (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} u_t(x, \tau)^2 d\tau \right].$$

Integrando-se em x a última desigualdade temos

$$\int_{\Omega_{t_2}} u(x, t_2)^2 dx \leq 2 \int_{\Omega_{t_1}} u(x, t_1)^2 dx + 2(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega_\tau} u_t(x, \tau)^2 dx \right) d\tau. \quad (2.2.5)$$

Combinando-se (2.2.5) com (2.2.4) obtemos

$$\int_{\Omega_{t_2}} \left[u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] (x, t_2) dx \leq 2 \int_{\Omega_{t_1}} \left[u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] (x, t_1) dx + \quad (2.2.8)$$

$$+ (c_1 + c_2 + 2(t_2 - t_1)) \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_\tau} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \right] d\tau$$

Seja $y(\tau) = \left[\int_{\Omega_\tau} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \tau) dx \right]$. Então a última desigualdade pode ser vista como

$$y(t_2) \leq 2y(t_1) + (c_1 + c_2 + 2(t_2 - t_1)) \int_{t_1}^{t_2} y(\tau) d\tau. \quad (2.2.6)$$

Fixemos t_1 e deixemos t_2 variar em $t_1 \leq t_2 \leq t$. Seja $z(t) = \max_{t_1 \leq t_2 \leq t} y(t_2)$ então

$$z(t) \leq 2y(t_1) + (c_1 + c_2 + 2(t - t_1)) \int_{t_1}^t z(\tau) d\tau$$

ou seja

$$z(t) \leq 2y(t_1) + (c_1 + c_2 + 2(t - t_1))(t - t_1)z(t).$$

Para todo t tal que $[c_1 + c_2 + 2(t - t_1)](t - t_1) \leq \frac{1}{2}$ temos

$$z(t) \leq 2y(t_1) + \frac{1}{2}z(t) \quad (2.2.9)$$

de onde segue $\frac{1}{2}z(t) \leq 2y(t_1)$. Como $y(t) \leq z(t)$ temos $y(t) \leq 4y(t_1)$.

Seja $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ se tem $[c_1 + c_2 + 2(t - t_1)](t - t_1) \leq \frac{1}{2}$.

Então,

$$\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq 4 \int_{\Omega_{t_1}} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t_1) dx \quad (2.2.7)$$

para todo $t \in [t_1, t_1 + \delta]$.

Agora observamos que δ não depende de t_1 que foi tomado arbitrariamente em $[0, T[$. Logo tomando $t_1 = 0$ temos

2.3 Unicidade de Solução

$$\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq 4 \int_{\Omega_0} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, 0) dx \quad (2.2.8)$$

para todo $t \in [0, \delta]$.

Agora fazendo $t_1 = \delta$ em (2.2.8) obtemos

$$\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq 4 \int_{\Omega_\delta} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, \delta) dx$$

para todo $t \in [\delta, 2\delta]$. Combinando a última desigualdade com (2.2.8) obtemos

$$\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq 4^2 \int_{\Omega_0} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, 0) dx$$

para todo $t \in [0, 2\delta]$.

Dado $T > 0$, seja k o maior inteiro tal que $k\delta < T$. Após repetir o raciocínio acima k vezes obtemos

$$\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq 4^k \int_{\Omega_0} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, 0) dx,$$

para todo $t \in [0, T]$. Como k depende de T e de δ , e δ depende de c_1 e c_2 , que por sua vez dependem apenas de μ concluímos que dado $T > 0$ existe uma constante $C = C(T, \mu, n) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_t} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq C \int_{\Omega_0} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, 0) dx \quad (2.2.9)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Agora notando que quando t_0 tende para infinito a coleção Ω_t cobre todo o espaço $\mathbb{R}^n$ concluímos a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, t) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) (x, 0) dx \quad (2.2.10)$$

para todo $t \in [0, T]$, desde que a integral do lado esquerdo (2.2.10) exista.

2.3 Unicidade de Solução

Sejam $a = a(x, t)$, $b_i = b_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$ e $c = c(x, t)$ funções infinitamente deriváveis em $\mathbb{R}^{n+1}$ tais que

$$|a(x, t)|, |b_i(x, t)|, |c(x, t)| \leq \mu$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e todo $i = 1, \dots, n$.

Sejam $u_0 = u_0(x)$, $u_1 = u_1(x)$ e $f = f(x, t)$ funções suficientemente deriváveis e $u = u(x, t)$ uma solução clássica de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Segue da estimativa (2.2.10) que o problema de Cauchy acima tem no máximo uma solução u . De fato, se $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ são duas soluções então a função $w = u - v$ é solução de

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = 0 & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n, \\ w_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Agora observe que $w(x, 0) = w_t(x, 0) = w_{x_i}(x, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, de (2.2.10) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x, t)^2 dx \leq C(T) \int_{\mathbb{R}^n} \left(w^2 + w_t^2 + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2 \right)(x, 0) dx = 0$$

para todo $t \in [0, T]$. Como w é contínua, concluímos que $w(x, t) = 0$ em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. Uma vez que T foi escolhido arbitrariamente, segue que $w \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$.

Assim $u(x, t) - v(x, t) = 0$, isto é, $u \equiv v$ em $\mathbb{R}^n \times [0, T)$.

O que acabamos de mostrar é apenas a unicidade de solução. Faremos uso da unicidade para demonstrarmos a existência de solução. Nesta direção a proposição seguinte, que é consequência imediata da desigualdade (2.2.10), será de grande utilidade.



Proposição 2.3.1 Suponhamos que os dados u_0, u_1 e f são suficientemente diferenciáveis e sejam T e r números reais positivos. Sejam $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ os troncos de cone

$$\mathfrak{D}_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad \|x\| \leq T + r - t, \quad 0 \leq t \leq T\},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad \|x\| \leq (T + 2r) - t, \quad 0 \leq t \leq T\},$$

e sejam B_{T+r} e B_{T+2r} as bases de $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ respectivamente.

Sejam u e v funções tais que

$$\mathcal{L}u = f \text{ em } \mathfrak{D}_2 \text{ e } \mathcal{L}v = f \text{ em } \mathfrak{D}_1$$

com condições iniciais u_0 e u_1 nas bases de $\mathfrak{D}_2$ e $\mathfrak{D}_1$ respectivamente. Então $u|_{\mathfrak{D}_1} = v$. Em outras palavras, u é extensão de v .

Demonstração: Basta verificar que $u|_{\mathfrak{D}_1} - v$ tem dados iniciais nulos na base de $\mathfrak{D}_1$ e termo forçante nulo em $\mathfrak{D}_1$. Da desigualdade (2.2.10) segue que $u|_{\mathfrak{D}_1} - v = 0$ em $\mathfrak{D}_1$.

Logo $u|_{\mathfrak{D}_1} = v$.

□

Capítulo 3

Existência de Solução

Sejam Ω_0 um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e Q o cilindro $\Omega_0 \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sejam $a = a(x, t)$, $c = c(x, t)$ e $b_i = b_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$ funções infinitamente deriváveis das variáveis $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Assumiremos que os coeficientes a , c e b_i , $i = 1, \dots, n$ se anulam fora do cilindro Q , isto é

$$a(x, t) = c(x, t) = b_i(x, t) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

para todo $t > 0$ e todo $x \notin \Omega_0$.

Seja $\mathcal{L}u$ o operador diferencial definido por

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - \Delta u + au_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu,$$

e seja $N[u](x, t)$ o operador definido por

$$N[u](x, t) = au_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu.$$

O objetivo deste capítulo é provar o seguinte

Teorema 3.0.1 *Sejam $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $u_0(x) = u_1(x) = 0$, $x \notin \Omega_0$ e $f = f(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ tal que $f(x, t) = 0$, $(x, t) \notin Q$. Então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

possui uma única solução u que é infinitamente derivável.

□

Observe que a unicidade de solução foi provada no capítulo anterior. O restante deste capítulo é todo dedicado à demonstração do Teorema 3.0.1. As estimativas de energia obtidas nos capítulos anteriores desempenharão um papel importante na demonstração.

No entanto necessitamos ainda de uma estimativa para as derivadas de $N[u](x, t)$ e uma desigualdade do tipo "Desigualdade de Sobolev" que será demonstrada no apêndice. Iniciamos estimando as derivadas de $N[u]$.

3.1 Uma Estimativa para Derivadas de $N[u]$.

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ duas n-uplas de números naturais. Escrevemos $\beta \leq \alpha$ se $\beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n$. Seja ∂^α a derivada parcial de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ dada por

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Um cálculo direto fornece

$$\partial^\alpha N[u] = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} a \partial^\beta u_t + \sum_{i=1}^n \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} b_i \partial^\beta u_{x_i} + \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} c \partial^\beta u,$$

onde $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ e $\binom{\alpha}{\beta}$ é o produto dos números combinatórios $\binom{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

Logo

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha N[u]| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} a| |\partial^\beta u_t| + \sum_{i=1}^n \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} b_i| |\partial^\beta u_{x_i}| \\ &\quad + \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} c| |\partial^\beta u| \end{aligned}$$

Para cada $t > 0$ e cada multi-índice α seja

$$\phi(t, \alpha) = \max\left\{\binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} a(x, t)|, \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} b_i(x, t)|, \binom{\alpha}{\beta} |\partial^{\alpha-\beta} c(x, t)|\right\};$$

$$x \in R^n, \beta \leq \alpha, i = 1, \dots, n\}$$

Logo

$$|\partial^\alpha N[u]| \leq \phi(t, \alpha) \sum_{\beta \leq \alpha} \left[|\partial^\beta u_t| + \sum_{i=1}^n |\partial^\beta u_{x_i}| + |\partial^\beta u| \right] \quad (3.1.1)$$

Se l_α é o número de elementos do conjunto $\{\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ então o número total de termos da soma em (3.1.1) será $\lambda_\alpha = l_\alpha (n+2)$. Agora elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade (3.1.1) e usando a desigualdade $(a_1 + \dots + a_{\lambda_\alpha})^2 \leq \lambda_\alpha (a_1^2 + \dots + a_{\lambda_\alpha}^2)$ obtemos

$$|\partial^\alpha N[u]|^2 \leq \lambda_\alpha \phi(t, \alpha)^2 \sum_{\beta \leq \alpha} \left[|\partial^\beta u_t|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial^\beta u_{x_i}|^2 + |\partial^\beta u|^2 \right] \quad (3.1.2)$$

Dado um inteiro positivo m considere o conjunto de todos os multi-índices α tais que $|\alpha| \leq m$. Sejam

$$K_m = \max \{ \lambda_\alpha; |\alpha| \leq m \} \text{ e } \phi_m(t) = \max \{ \phi(t, \alpha); |\alpha| \leq m \}.$$

De (3.1.2) segue

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha N[u]|^2 \leq K_m \phi_m(t)^2 \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\beta \leq \alpha} \left[|\partial^\beta u_t|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial^\beta u_{x_i}|^2 + |\partial^\beta u|^2 \right],$$

ou ainda

$$\sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha N[u]|^2 \leq 2K_m \phi_m(t)^2 \left[\sum_{|\beta| \leq m} |\partial^\beta u_t|^2 + \sum_{|\beta| \leq m+1} |\partial^\beta u|^2 \right]. \quad (3.1.3)$$

Agora fazendo $\psi_m(t)^2 = 2K_m \phi_m(t)^2$ e integrando se (3.1.3) numa região limitada $R \subset \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_R |\partial^\alpha N[u](x, t)|^2 dx \leq \psi_m(t)^2 \left\{ \sum_{|\beta| \leq m} \int_R |\partial^\beta u_t(x, t)|^2 dx + \sum_{|\beta| \leq m+1} \int_R |\partial^\beta u(x, t)|^2 dx \right\}. \quad (3.1.4)$$

3.2 Existência de Solução de $\mathcal{L}u = f$ na Faixa

$$0 \leq t \leq T.$$

Neste parágrafo usaremos um método iterativo, introduzido por Schauder [S] no início deste século, para construir a solução de $\mathcal{L}u = f$ numa faixa $0 \leq t \leq T$.

Sejam Ω_0 , u_0 , u_1 e f satisfazendo as condições do Teorema 3.0.1. Definiremos indutivamente uma seqüência $\{u^k\}$ que convergirá para a solução procurada.

Seja $u^0(x, t) = u_0(x) + tu_1(x)$. Para cada $k > 0$ definimos u^k como sendo a solução do P.V.I.

$$\begin{cases} u_{tt}^k - \Delta u^k = -N[u^{k-1}] + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u^k(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t^k(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Note que os coeficientes de $N[u^{k-1}]$ e f se anulam para todo $t > 0$ e $x \notin \Omega_0$. Logo o termo forçante $-N[u^{k-1}] + f$ também se anulará em tal região. Como os dados iniciais u_0 e u_1 se anulam fora de Ω_0 segue da definição de u^k e do Princípio de Duhamel que u^k se anulará fora da região gerada por todos os cones característicos com vértices em Ω_0 .

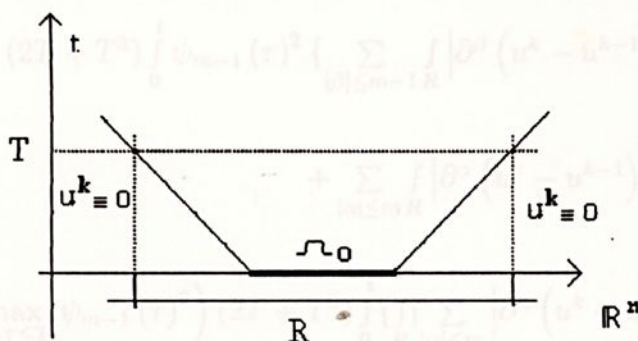


Figura 6

Fixemos $T > 0$ e escolhamos um paralelepípedo R em $\mathbb{R}^n$ tal que $\Omega_0 \subset R$ e $u^k \equiv 0$ em $\partial R \times [0, T]$. Mostraremos que existe uma função u definida em $R \times [0, T]$ tal que todas as seqüências de derivadas parciais de u^k convergem uniformemente em $R \times [0, T]$ para as respectivas derivadas parciais de u . Tal função u satisfará o P.V.I. original na faixa $0 \leq t \leq T$.

Consideremos a diferença $u^{k+1} - u^k$. Claramente $u^{k+1} - u^k$ satisfaz o seguinte P.V.I. para a equação da onda

$$\begin{cases} (u^{k+1} - u^k)_{tt} - \Delta (u^{k+1} - u^k) = -N[u^k - u^{k-1}] & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ (u^{k+1} - u^k)(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ (u^{k+1} - u^k)_t(x, 0) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Seja m um inteiro positivo e t , $0 \leq t \leq T$.

A estimativa (1.4.14) aplicada em $u^{k+1} - u^k$ nos fornece

$$\int_R \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\partial^\alpha (u^{k+1} - u^k)(x, t) \right)^2 + \sum_{|\beta| \leq m-1} \left(\partial^\beta (u^{k+1} - u^k)_t(x, t) \right)^2 \right] dx \leq$$

$$\leq (2t + t^3) \int_0^t \int_R \sum_{|\beta| \leq m-1} \left(\partial^\beta N[u^k - u^{k-1}](x, \tau) \right)^2 dx d\tau$$

Agora utilizando a estimativa (3.1.4) e observando que $2t + t^3$ é crescente em t e $t \leq T$ segue que

$$\int_R \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\partial^\alpha (u^{k+1} - u^k)(x, t) \right)^2 + \sum_{|\beta| \leq m-1} \left(\partial^\beta (u^{k+1} - u^k)_t(x, t) \right)^2 \right] dx \leq$$

$$\leq (2T + T^3) \int_0^t \psi_{m-1}(\tau)^2 \left\{ \sum_{|\beta| \leq m-1} \int_R \left| \partial^\beta (u^k - u^{k-1})_t(x, \tau) \right|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_R \left| \partial^\alpha (u^k - u^{k-1})(x, \tau) \right|^2 dx \right\} d\tau$$

$$\leq \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} \psi_{m-1}(\tau)^2 \right) (2T + T^3) \int_0^t \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_R \left| \partial^\alpha (u^k - u^{k-1})(x, \tau) \right|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\beta| \leq m-1} \int_R \left| \partial^\beta (u^k - u^{k-1})_t(x, \tau) \right|^2 dx \right\} d\tau.$$

Introduzimos agora a notação

$$\Phi_m(u)(t) = \int_R \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x, t)^2 + \sum_{|\beta| \leq m-1} \partial^\beta u_t(x, t)^2 \right] dx \quad (3.2.1)$$

e definimos $\lambda(T) = \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} \psi_{m-1}(\tau)^2 \right) (2T + T^3)$. Logo a última desigualdade se transforma em

$$\Phi_m(u^{k+1} - u^k)(t) \leq \lambda(T) \int_0^t \Phi_m(u^k - u^{k-1})(\tau) d\tau.$$

Para $k = 1$ e 2 temos

$$\Phi_m(u^2 - u^1)(t) \leq \lambda(T) \int_0^t \Phi_m(u^1 - u^0)(\tau) d\tau$$

$$\Phi_m(u^3 - u^2)(t) \leq \lambda(T) \int_0^t \Phi_m(u^2 - u^1)(\tau) d\tau \quad (3.2.3)$$

respectivamente. Logo

$$\Phi_m(u^3 - u^2)(t) \leq \lambda(T) \int_0^t \left(\lambda(T) \int_0^s \Phi_m(u^1 - u^0)(\tau) d\tau \right) ds.$$

Trocando-se a ordem de integração na integral iterada obtemos

$$\Phi_m(u^3 - u^2)(t) \leq \lambda(T)^2 \int_0^t \Phi_m(u^1 - u^0)(\tau) (t - \tau) d\tau.$$

Usando-se o mesmo raciocínio prova-se facilmente por indução

$$\Phi_m(u^{k+1} - u^k)(t) \leq \lambda(T)^k \int_0^t \frac{(t - \tau)^{k-1}}{(k-1)!} \Phi_m(u^1 - u^0)(\tau) d\tau, \quad (3.2.4)$$

de onde segue

$$\Phi_m(u^{k+1} - u^k)(t) \leq \lambda(T)^k \left(\max_{0 \leq t \leq T} \Phi_m(u^1 - u^0)(t) \right) \int_0^t \frac{(t - \tau)^{k-1}}{(k-1)!} d\tau. \quad (3.2.5)$$

Agora fazendo $C(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \Phi_m(u^1 - u^0)(t)$ e calculando-se a integral acima obtemos

$$\Phi_m(u^{k+1} - u^k)(t) \leq C(T) \lambda(T)^k \frac{T^k}{k!} \quad (3.2.2)$$

Observemos que da definição de Φ_m em (3.2.1) segue que para cada t , $\sqrt{\Phi_m(u)(t)}$ define uma norma no espaço das funções $C^m(R)$, logo da desigualdade triangular e de (3.2.2) segue que

$$\sqrt{\Phi_m(u^{k+j} - u^k)(t)} \leq \sum_{i=1}^j \sqrt{\Phi_m(u^{k+i} - u^{k+i-1})(t)} \leq \sum_{i=1}^j \sqrt{C(T) \lambda(T)^{k+i-1} \frac{T^{k+i-1}}{(k+i-1)!}}$$

para todo inteiro j .

Observando que o último somatório acima é a diferença das reduzidas de ordem $(k-1) + j$ e $k-1$ da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C(T)} \sqrt{\frac{(\lambda(T) T)^n}{n!}},$$



que é absolutamente convergente, concluímos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{\Phi_m(u^{k+j} - u^k)(t)} = 0 \quad (3.2.3)$$

para todo k e todo $t \in [0, T]$. Assim a sequência $\{u^k\}$ é de Cauchy na norma $\sqrt{\Phi_m(u)(t)}$ uniformemente em $t \in [0, T]$.

Passemos agora à convergência uniforme das seqüências das derivadas de $\{u^k\}$. Neste ponto usaremos a desigualdade de Sobolev (A.2) demonstrada no apêndice. Para cada função v de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$ vale

$$|\partial^\beta v(x)|^2 \leq C(R) \int_R \sum_{|\gamma| \leq l+n} (\partial^\gamma v(z))^2 dz, \quad |\beta| \leq l$$

onde $C(R)$ é uma constante que depende de R e de n .

Seja l um inteiro positivo e $m = l + n$. Então para todo $x \in R$ e todo $t \in [0, T]$ temos

$$|\partial^\alpha u(x, t)|^2 \leq C(R) \int_R \sum_{|\gamma| \leq m} (\partial^\gamma u(z, t))^2 dz \quad (3.2.4)$$

para todo α ; $|\alpha| \leq l$ e

$$|\partial^\beta u_t(x, t)|^2 \leq C(R) \int_R \sum_{|\gamma| \leq m-1} (\partial^\gamma u_t(z, t))^2 dz \quad (3.2.5)$$

para todo β ; $|\beta| \leq l - 1$.

Segue-se de (3.2.4), (3.2.5) e da definição de Φ_m em (3.2.1) que

$$\max \left\{ |\partial^\alpha u(x, t)|, |\partial^\beta u_t(x, t)|, (x, t) \in R \times [0, T], |\alpha| \leq l, |\beta| \leq l - 1 \right\} \leq \sqrt{C(R)} \max_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\Phi_m(u)(t)} \quad (3.2.6)$$

Agora aplicando (3.2.6) à diferença $u^{k+j} - u^k$ obtemos

$$|\partial^\alpha u^{k+j}(x, t) - \partial^\alpha u^k(x, t)| \leq \sqrt{C(R)} \max_{0 \leq \tau \leq T} \sqrt{\Phi_m(u^{k+j} - u^k)(\tau)}$$

para todo α ; $|\alpha| \leq l$ e todo $(x, t) \in R \times [0, T]$,

$$|\partial^\beta u_t^{k+j}(x, t) - \partial^\beta u_t^k(x, t)| \leq \sqrt{C(R)} \max_{0 \leq \tau \leq T} \sqrt{\Phi_m(u^{k+j} - u^k)(\tau)}$$

para todo β ; $|\beta| \leq l-1$ e todo $(x, t) \in R \times [0, T]$. Segue daqui e de (3.2.3) que $\partial^\gamma u^k$ e $\partial^\gamma u_t^k$ são seqüências de Cauchy na convergência uniforme em $R \times [0, T]$ para todo γ : $|\gamma| \leq l-1$.

Logo existe uma função u definida em $R \times [0, T]$ suficientemente diferenciável com derivadas contínuas tal que

$$\partial^\gamma u^k \longrightarrow \partial^\gamma u$$

$$\partial^\gamma u_t^k \longrightarrow \partial^\gamma u_t$$

uniformemente em $R \times [0, T]$ para todo γ tal que $|\gamma| \leq l-1$.

Suponhamos que l seja maior ou igual a 3. Então u e u_t possuem todas as derivadas parciais nas variáveis espaciais até a ordem 2. Para concluirmos que u é de classe C^2 em $R \times [0, T]$ precisamos verificar apenas que u_{tt} existe e é contínua. Para tanto lembremos que

$$u_{tt}^k = \Delta u^k - au_t^{k-1} - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}^{k-1} - cu^{k-1} + f(x, t) \quad (3.2.7)$$

e observemos que o lado direito de (3.2.7) converge uniformemente em $R \times [0, T]$ para $\Delta u - N[u] + f$. Logo u_{tt}^k também convergirá para u_{tt} , provando-se assim que u é de classe C^2 . Aplicando-se o limite com $k \rightarrow \infty$ em (3.2.7) vemos que a função u é solução de $\mathcal{L}u = f$ em $R \times [0, T]$.

Para concluirmos que u é de classe C^l basta verificar que existem e são contínuas em $R \times [0, T]$ as derivadas mistas envolvendo derivadas na variável t com ordem maior que dois. Isto pode ser obtido derivando-se sucessivamente a equação (3.2.7) em relação a t e observando-se que no lado direito de (3.2.7) figuram derivadas de ordem menor, que por sua vez já convergem

Assim concluímos que para cada l existe uma solução u de classe C^l do problema de Cauchy definida em $R \times [0, T]$. A extensão de u para a faixa $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ é feita de forma trivial se observarmos que cada u^k anula-se numa vizinhança da fronteira lateral de $R \times [0, T]$. Assim a solução u do problema de Cauchy em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ terá a propriedade de anulamento de u^k , isto é, u se anulará fora da região gerada pelos cones característicos com vértice em Ω_0 .

Agora utilizando-se da unicidade de solução verificamos que u é de fato de classe C^∞ . Seja u^l a solução do problema de Cauchy na faixa $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ de classe C^l e u^{l+1} a solução de classe C^{l+1} .

Então a diferença $u^{l+1} - u^l$ satisfaz o problema de Cauchy na faixa $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ com dados iniciais e termo forçante nulos. Como $u^{l+1} - u^l$ é suficientemente derivável segue dos resultados de unicidade discutidos no capítulo anterior que $u^{l+1} - u^l = 0$. Assim u^l é de classe C^{l+1} . Prosseguindo com este raciocínio verificamos que a solução de classe C^2 do problema de Cauchy em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ é de fato de classe C^∞ .

3.3 Existência de Solução de $\mathcal{L}u = f$ no Semi-Espaço $t \geq 0$.

A existência de solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é mera consequência do parágrafo anterior e da unicidade de solução.

Seja u_ν a solução do problema de Cauchy na faixa $\mathbb{R}^n \times [0, \nu]$ $\nu = 1, 2, 3, \dots$ e definamos para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

$$u(x, t) = u_\nu(x, t) \text{ se } t \leq \nu.$$

Veamos que u é uma função bem definida. De fato dado $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, seja ν_0 o menor inteiro maior ou igual a t . Então o ponto (x, t) está em todas as faixas $\mathbb{R}^n \times [0, m]$, com m inteiro, $m \geq \nu_0$. No entanto toda solução u_m com $m \geq \nu_0$, quando restrita à faixa $\mathbb{R}^n \times [0, \nu_0]$, coincidirá com u_{ν_0} pois a solução do problema de Cauchy em $\mathbb{R}^n \times [0, \nu_0]$ é única. Assim

$$u_{\nu_0}(x, t) = u_{\nu_0+1}(x, t) = \dots,$$

e conseqüentemente o valor $u(x, t)$ é único e igual a $u_{\nu_0}(x, t)$.

Que u satisfaz as condições iniciais em $t = 0$ e a equação $\mathcal{L}u = f(x, t)$ em $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ segue imediatamente da definição de u .

Isto prova por completo o Teorema 3.0.1.

APÊNDICE

Neste apêndice apresentamos e demonstramos de forma elementar uma desigualdade que poderia ser obtida do clássico Lema de Sobolev [J]. A versão que apresentamos aqui é aquela apresentada em [K].

Lema 3.3.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ e cada função $v \in C^n(\mathbb{R}^n)$ temos

$$|v(x)|^2 \leq C(n, R) \int_R \sum_{|\alpha| \leq n} |\partial^\alpha v(\xi)|^2 d\xi, \quad x \in R \quad (A.1)$$

onde R é qualquer paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ e

$$C(n, R) = \prod_{i=1}^n \left[(b_i - a_i)^{-\frac{1}{2}} + (b_i - a_i)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Demonstração: Demonstraremos por indução. Seja $n = 1$ e v uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Neste caso o paralelepípedo reduz-se ao intervalo $[a, b]$. Sejam x e ξ pontos quaisquer em $[a, b]$. Então

$$v(x) = v(\xi) + \int_{\xi}^x v'(s) ds.$$

Logo

$$|v(x)| \leq |v(\xi)| + \int_{\xi}^x |v'(s)| ds,$$

e então

$$\int_a^b |v(x)| d\xi \leq \int_a^b |v(\xi)| d\xi + \int_a^b \int_{\xi}^x |v'(s)| ds d\xi,$$

$$\begin{aligned} |v(x)| (b-a) &\leq \int_a^b |v(\xi)| d\xi + \int_a^b \int_a^b |v'(s)| ds d\xi, \\ &\leq \int_a^b |v(\xi)| d\xi + (b-a) \int_a^b |v'(s)| ds. \end{aligned}$$

Usando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$|v(x)|(b-a) \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |v(\xi)| d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + (b-a)(b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |v'(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq (b-a)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |v(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |v'(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left((b-a)^{-\frac{1}{2}} + (b-a)^{\frac{1}{2}} \right) \left[\int_a^b (|v(\xi)|^2 + |v'(\xi)|^2) d\xi \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de onde segue (A.1) com $n = 1$.

Suporemos agora que (A.1) é válida para $n = q - 1$ e provaremos para $n = q$, concluindo assim a indução.

Seja $v \in C^q(\mathbb{R}^q)$ e $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_q, b_q] \subset \mathbb{R}^q$ um paralelepípedo. Para cada $x_q \in [a_q, b_q]$ fixo, seja

$$R_{x_q} = \{(x_1, \dots, x_{q-1}, x_q) \in \mathbb{R}^q; a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, q-1\}$$

A função $(x_1, \dots, x_{q-1}) \mapsto v(x_1, \dots, x_{q-1}, x_q)$ é de classe C^q em $\mathbb{R}^{q-1}$, e portanto de classe C^{q-1} em $\mathbb{R}^{q-1}$. Logo por hipótese temos

$$|v(x_1, \dots, x_{q-1}, x_q)|^2 \leq C(q-1, R_{x_q}) \int_{R_{x_q}} \sum_{|\alpha| \leq q-1} |\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}, x_q)|^2 d\xi_1 \dots d\xi_{q-1}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{N}^{q-1}$. Observe que $C(q-1, R_{x_q})$ não depende de x_q pois

$$C(q-1, R_{x_q}) = \prod_{i=1}^{q-1} \left[(b_i - a_i)^{-\frac{1}{2}} + (b_i - a_i)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Agora observando que cada $\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}, x_q)$ é uma função de classe C^1 na variável x_q e usando o caso em que $n = 1$ temos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}, x_q)|^2 &\leq \\ &\left((b_q - a_q)^{-\frac{1}{2}} + (b_q - a_q)^{\frac{1}{2}} \right) \int_{a_q}^{b_q} \left[|\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_q)|^2 + |\partial^{\alpha x_q} v(\xi_1, \dots, \xi_q)|^2 \right] d\xi_q \end{aligned}$$

para todo $x_q \in [a_q, b_q]$.

Logo, combinando as duas últimas desigualdades obtemos

$$|v(x_1, \dots, x_q)|^2 \leq \left((b_q - a_q)^{-\frac{1}{2}} + (b_q - a_q)^{\frac{1}{2}} \right) C(q-1, R_{x_q}).$$

$$\int_{R_{x_q}} \int_{a_q}^{b_q} \sum_{|\alpha| \leq q-1} \left(|\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}, \xi_q)|^2 + |\partial^\alpha v_{x_q}(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}, \xi_q)|^2 \right) d\xi_1 \dots d\xi_q$$

para todo $x \in R$. Majorando o último integrando por $\sum_{|\alpha| \leq q} |\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_q)|^2$ obtemos a desigualdade desejada, isto é,

$$|v(x_1, \dots, x_q)|^2 \leq C(q, R) \int_R \sum_{|\alpha| \leq q} |\partial^\alpha v(\xi_1, \dots, \xi_q)|^2 d\xi_1, \dots, d\xi_q$$

para todo $x \in R$. □

Suponhamos que a função v do lema anterior seja de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e l seja um inteiro positivo. Então para cada multi-índice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ com $|\beta| \leq l$ a derivada parcial $\partial^\beta v$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e portanto

$$|\partial^\beta v(x)|^2 \leq C(n, R) \int_R \sum_{|\alpha| \leq n} |\partial^{\alpha+\beta} v(\xi)|^2 d\xi, \quad x \in R$$

onde R é um paralelepípedo qualquer. Observando que

$$\sum_{|\alpha| \leq n} |\partial^{\alpha+\beta} v(\xi)|^2 \leq \sum_{|\gamma| \leq l+n} |\partial^\gamma v(\xi)|^2$$

concluimos

$$|\partial^\beta v(x)|^2 \leq C(n, R) \int_R \sum_{|\gamma| \leq l+n} |\partial^\gamma v(\xi)|^2 d\xi \quad (\text{A.2})$$

para todo $x \in R$ e todo β ; $|\beta| \leq l$.

- 37

