

Jorge Manuel Vieira Capela

Polinômios Associados às Distribuições
Log – Normais



**POLINÔMIOS ASSOCIADOS ÀS DISTRIBUIÇÕES
LOG-NORMAIS**

Jorge Manuel Vieira Capela

orientador: Prof. Dr. A. Sri Ranga

**Dissertação apresentada ao IBILCE - UNESP como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.**



689/95

São José do Rio Preto - 1995



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. A. Sri Ranga, pela amizade e pela orientação segura e valiosa durante a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Eliana K. L. de Andrade e à Profa. Cleonice F. Benicelli, pelo ótimo convívio, por todas as vezes que prontamente atenderam às minhas dúvidas e pelas inúmeras discussões muito importantes para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, à D. Odette e ao Sr. Euclides pelo carinho e confiança.

A Marisa, pelo carinho, companheirismo e confiança dedicados a mim desde que nos conhecemos.

Aos professores, funcionários e amigos do DCCE - IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto - SP pelo estímulo e apoio.

Aos colegas e funcionários das FACULDADES INTEGRADAS RIOPRETENSE - FIRP - São José do Rio Preto - SP, em especial ao Prof. Dr. Hygino H. Domingues, pela amizade e confiança em mim depositada.

À Marisa

e aos meus pais.

À Direção das FIRP pelo incentivo e apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. A. Sri Ranga, pela amizade e pela orientação segura e valiosa durante a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Eliana X. L. de Andrade e à Profa. Cleonice F. Bracciali, pelo ótimo convívio, por todas as vezes que prontamente atenderam às minhas dúvidas e pelas inúmeras discussões muito importantes para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, à D. Odette e ao Sr. Euclydes pelo carinho e confiança.

À Marisa, pelo carinho, companheirismo e confiança dedicados a mim desde que nos conhecemos.

Aos professores, funcionários e amigos do **DCCE - IBILCE - UNESP - São José do Rio Preto - SP** pelo estímulo e apoio.

Aos colegas e funcionários das **FACULDADES INTEGRADAS RIOPRETENSE - FIRP - São José do Rio Preto - SP**, em especial ao Prof. Dr. Hygino H. Domingues, pela amizade e confiança em mim depositada.

À Direção das **FIRP** pelo incentivo e apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.



RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo de três quaisquer distribuições fortes de Stieltjes relacionadas por

$$\frac{t+\beta}{t}d\psi_1(t) = d\bar{\psi}_0(t) = \frac{1}{t+\beta}d\psi_2(t),$$

onde $d\psi_1(t)$ e $d\psi_2(t)$ pertencem a uma classe de distribuições denotada por $ScS(a,b)$ e $d\bar{\psi}_0(t)$ pertence a uma classe denotada por $S\bar{c}S(a,b)$.

Estudamos também a relação que existe entre os coeficientes das relações de recorrência de certos polinômios similares aos ortogonais associados a essas distribuições.

Apresentamos, ainda, aplicações desses resultados para obter algumas interessantes variações da distribuição log-normal.

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO	01
--------------	----

2 POLINÔMIOS ORTOGONAIS E SIMILARES	04
-------------------------------------	----

2.1 Polinômios Ortogonais	04
---------------------------	----

2.2 Polinômios Similares	09
--------------------------	----

2.3 Polinômios $B_n(\lambda, z)$	17
----------------------------------	----

ABSTRACT

The objective of this work is to present a study of any three strong Stieltjes distributions defined on (a, b) and related to each other by

$$\frac{t+\beta}{t}d\psi_1(t) = d\bar{\psi}_0(t) = \frac{1}{t+\beta}d\psi_2(t),$$

where $d\psi_1(t)$ and $d\psi_2(t)$ belong to a class of distributions denoted by $ScS(a, b)$ and $d\bar{\psi}_0(t)$ belong to a class denoted by $S\bar{c}S(a, b)$.

We look at also the relation that exist between the coefficients of the recurrence relation of certain polynomials similar to orthogonal polynomials associated with these distributions.

We give some application of these results by obtaining some interesting variations of the log-normal distribution.

4 CONCLUSÃO	80
-------------	----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
----------------------------	----

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO.....	01
2 POLINÔMIOS ORTOGONAIS E SIMILARES	04
2.1 Polinômios Ortogonais	04
2.2 Polinômios Similares	09
2.3 Polinômios $B_n(\lambda, z)$	17
3 A FUNÇÃO q-GAMA E OS POLINÔMIOS ORTOGONAIS.....	20
3.1 Função Gama e Função Beta.....	20
3.2 Função q-Gama.....	21
3.3 O Teorema q-Binomial.....	25
3.4 Polinômios q-Laguerre	28
4 DUAS CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES FORTES.....	32
4.1 Distribuições $ScS(c/b, b)$ e $S\bar{c}S(c/b, b)$	32
4.2 Relações entre os coeficientes α_n e β_n	42
5 POLINÔMIOS ASSOCIADOS ÀS DISTRIBUIÇÕES LOG-NORMAIS.....	49
5.1 Polinômios Ortogonais de Laurent.....	49
5.2 Distribuição Log-Normal Deslocada.....	53
5.3 Distribuições Associadas à Log-Normal Deslocada.....	57
6 CONCLUSÃO.....	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	61



CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Consideremos $\psi(t)$ uma função real definida no intervalo (a,b) , limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a,b) e tal que os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

existem e são finitos. Nestas condições, $d\psi(t)$ é uma distribuição em (a,b) . Se os momentos μ_m existem para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a distribuição é denominada distribuição forte. Quando $d\psi(t)$ é uma distribuição forte em $(a,b) \subseteq (0, \infty)$, dizemos que $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes e denotamos por distribuição $SS(a,b)$. O nome Stieltjes é usado especificamente para indicar que $(a,b) \subseteq (0, \infty)$, numa referência ao problema clássico de momento de Stieltjes definido no capítulo 2.

Dada uma distribuição $SS(a,b)$, $d\psi(t)$, os polinômios similares $B_n(z)$, $n \geq 0$, (Sri Ranga [16]), são definidos por:

$$(i) \ B_n(z) \text{ é mônico de grau } n, \ n \geq 0; \quad (1.2)$$

$$(ii) \ \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \ n \geq 1.$$

Os polinômios $B_n(\lambda, z)$, dados por:

$$B_n(\lambda, z) = B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z), \quad (1.3)$$



onde λ é um parâmetro real, são considerados em Sri Ranga, Andrade & McCabe [19].

O objetivo deste trabalho é estudar os polinômios acima quando definidos com relação a duas classes especiais de distribuições fortes, encontradas em Sri Ranga [16] e em Sri Ranga, Andrade & McCabe [19], para as quais os coeficientes das relações de recorrência de três termos dos polinômios definidos em (1.2) são dados explicitamente.

Em particular, consideraremos a distribuição log-normal, definida por:

$$d\varphi(t) = \frac{q^{1/2}}{2k\sqrt{\pi}} e^{-(\ln t/2k)^2} dt, \quad 0 < q < 1, q = e^{-2k^2}, t \in (0, \infty). \quad (1.4)$$

e a distribuição log-normal deslocada, dada por:

$$d\psi(t) = \frac{q^{1/2}}{2k\sqrt{\pi}} t^{-1} e^{-(\ln t/2k)^2} dt, \quad 0 < q < 1, q = e^{-2k^2}, t \in (0, \infty). \quad (1.5)$$

Uma das razões que nos levou a estudar as distribuições log-normais acima foi a obtenção de expressões explícitas, relativamente simples, para polinômios associados a essas distribuições. Por exemplo, em Szegő [22] encontramos uma representação elegante dada por Wigert, para polinômios ortogonais associados a (1.4) e em Pastro [14] encontramos fórmulas análogas para os polinômios ortogonais de Laurent.

Assim, o trabalho encontra-se dividido em seis capítulos:

No capítulo 2 - *Polinômios Ortogonais e Similares* - fazemos um estudo sobre os polinômios ortogonais e similares definidos em (1.2). Ressaltamos propriedades importantes sobre eles e ainda, nesse capítulo, definimos os polinômios $B_n(\lambda, z)$ a partir dos polinômios similares $B_n(z)$.



No capítulo 3 - *A Função q -Gama e os Polinômios Ortogonais* - apresentamos uma função definida por Jackson [9], q -análoga à função gama e resultados que sugerem a analogia entre essas duas funções. Um exemplo de polinômios ortogonais envolvendo essas funções também é apresentado. Consideramos o teorema q -binomial, muito importante para provar a ortogonalidade dos polinômios ortogonais de Laurent [14].

No capítulo 4 - *Dois Classes de Distribuições Fortes* - mostramos alguns resultados sobre os polinômios $B_n(z)$ e $B_n(\lambda, z)$ associados a duas classes de distribuições fortes. Consideramos, também, os coeficientes da relação de recorrência de três termos associada a essas duas classes de distribuições fortes e apresentamos relações entre os coeficientes.

No capítulo 5 - *Polinômios Associados às Distribuições Log-Normais* - definimos as distribuições log-normais, que pertencem às classes especiais de distribuições fortes estudadas no capítulo 4. Ainda nesse capítulo, damos alguns exemplos de polinômios associados às distribuições log-normais cuja representação pode ser dada de maneira explícita.

No capítulo 6 - *Conclusão* - apresentamos as observações e conclusões finais sobre o trabalho.

Por último, nas *Referências Bibliográficas* relacionamos os livros e artigos por nós consultados ou citados.



CAPÍTULO 2

POLINÔMIOS ORTOGONAIS E SIMILARES

2.1 Polinômios Ortogonais

Dada uma distribuição $d\psi(t)$, a ortogonalidade entre $f(t)$ e $g(t)$ com relação à $d\psi(t)$ é dada por:

$$\int_a^b f(t)g(t)d\psi(t) = 0.$$

Dizemos, neste caso, que $f(t)$ é ortogonal a $g(t)$.

De modo geral, uma família de funções $\{f_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ é ortogonal, com relação à distribuição $d\psi(t)$, quando:

$$\int_a^b f_i(t)f_j(t)d\psi(t) = 0, \text{ se } i \neq j. \quad (2.1.1)$$

A seguir, daremos a definição de polinômios ortogonais, que constituem uma família de funções ortogonais muito conhecida na matemática devido a suas importantes aplicações à Análise Aplicada, como por exemplo, os problemas envolvendo aproximações.

Seja $d\psi(t)$ uma distribuição no intervalo (a,b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, para a qual os momentos definidos por

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.2)$$

existem e são finitos.



Uma sequência $\{P_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ de polinômios ortogonais mônicos é definida por:

(i) $P_n(x)$ é mônico de grau n ,

(2.1.3)

$$(ii) \int_a^b P_n(t)P_m(t)d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ c_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Seja $\{P_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ uma sequência de polinômios ortogonais em relação a uma dada distribuição $d\psi(t)$. Então, os polinômios $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ são linearmente independentes e formam uma base para o espaço dos polinômios P_n , de grau menor ou igual a n .

Uma definição equivalente à (2.1.3) é a seguinte:

(i) $P_n(x)$ é mônico de grau n ,

(2.1.4)

$$(ii) \int_a^b t^m P_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ v_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Dependendo do intervalo utilizado e da função distribuição, várias famílias de polinômios ortogonais podem ser construídas.

Facilmente pode-se provar (Chihara [5]) que a existência e unicidade da sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ depende da condição:

$$H_{n+1}^{(0)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.5)$$

onde $H_n^{(m)}$ são os determinantes de Hankel dados por:



$$H_{-1}^{(m)} = 0, \quad H_0^{(m)} = 1$$

e

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix} \quad (2.1.6)$$

para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $n = 1, 2, \dots$

Teorema 2.1 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, para todo polinômio $Q(x)$ de grau menor que n , tem-se:*

$$\int_a^b P_n(t)Q(t)d\psi(t) = 0$$

Demonstração:

Suponhamos $Q(x)$ de grau $m < n$.

Então,

$$Q(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j P_j(x).$$

Portanto,

$$\int_a^b P_n(t)Q(t)d\psi(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \int_a^b P_n(t)P_j(t)d\psi(t) = 0,$$

pois $j < n$. ■

A seguir, provaremos duas importantes propriedades dos polinômios ortogonais. Uma refere-se à relação de recorrência de três termos que auxilia na geração de sequências de polinômios ortogonais e a outra a seus zeros, a qual é muito útil na construção de fórmulas de quadratura.

Teorema 2.2 Os polinômios ortogonais $P_n(x)$, $n \geq 0$, definidos por (2.1.3), satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$P_{n+1}(x) = (x - b_{n+1})P_n(x) - a_{n+1}P_{n-1}(x) \quad (2.1.7)$$

com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$. Os coeficientes a_{n+1} e b_{n+1} são dados por:

$$a_{n+1} = \frac{\int_a^b P_n(t)P_n(t)d\psi(t)}{\int_a^b P_{n-1}(t)P_{n-1}(t)d\psi(t)}, \quad n \geq 1 \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \frac{\int_a^b t P_n(t)P_n(t)d\psi(t)}{\int_a^b P_n(t)P_n(t)d\psi(t)}, \quad n \geq 0. \quad (2.1.8)$$

Demonstração:

Seja $P_n(x)$ o polinômio ortogonal de grau n , associado à distribuição $d\psi(t)$.

Então, $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$. Logo, pode ser escrito como

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x), \quad \text{com} \quad c_{n+1} = 1.$$

De (2.1.3),

$$c_j = \frac{\int_a^b t P_n(t)P_j(t)d\psi(t)}{\int_a^b P_j(t)P_j(t)d\psi(t)}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Mas,

$$\int_a^b t P_n(t)P_j(t)d\psi(t) = \int_a^b P_n(t)tP_j(t)d\psi(t),$$

o que, pelo teorema anterior, é igual a zero para $j = 0, 1, \dots, n-2$.

Portanto,

$$c_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2.$$



Temos, então,

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_n P_n(x) + c_{n-1} P_{n-1}(x).$$

Fazendo $b_{n+1} = c_n$ e $a_{n+1} = c_{n-1}$, chegamos à relação desejada. ■

Teorema 2.3 Os zeros de $P_n(x)$ são reais, distintos e estão no interior de (a, b) .

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que não existam zeros de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) . Então, $P_n(x)$ não troca de sinal nesse intervalo e, portanto

$$\int_a^b P_n(t) d\psi(t) \neq 0,$$

o que, por (2.1.3), é uma contradição, pois

$$\int_a^b P_n(t) d\psi(t) = \int_a^b P_n(t) P_0(t) d\psi(t).$$

Sejam $z_1, z_2, \dots, z_m$, $m < n$, os zeros de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b) .

Seja $Q_m(x) = (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_m)$. Assim, $Q_m(x) P_n(x)$ não muda de sinal em (a, b) e, então

$$\int_a^b Q_m(t) P_n(t) d\psi(t) \neq 0.$$

Mas, pelo teorema 2.1, isso é um absurdo, pois $m < n$.

Portanto, $m \geq n$. Como $P_n(x)$ é um polinômio de grau n , segue imediatamente o resultado do teorema. ■



Os polinômios ortogonais possuem muitas outras propriedades interessantes e um estudo mais detalhado pode ser encontrado em Chihara[5] e Szegö [21].

2.2 Polinômios Similares

O problema clássico de momento de Stieltjes, definido por Stieltjes em 1894, consiste em, dada uma sequência de números reais $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, encontrar condições sob as quais existe uma distribuição não negativa $d\psi(t)$, $t \in (a,b)$, $0 \leq a < b \leq \infty$, tal que

$$\mu_n = \int_a^b t^n d\psi(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Stieltjes encontrou condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de tal distribuição.

Em Jones, Thron e Waadeland [11] o problema acima é resolvido para o caso de $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, denominado problema forte de momento, onde aparecem pela primeira vez polinômios que exibem propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais.

A distribuição $d\psi(t)$, que satisfaz ao problema forte de momento, será chamada distribuição forte de Stieltjes e denotada por $SS(a,b)$.

Sri Ranga [20], com a finalidade de estudar o problema forte de momento para $(a,b) \subseteq (-\infty, +\infty)$, denominado problema forte de momento de Hamburger, introduziu uma sequência de polinômios mônicos, $B_n^{(k)}(z)$, com propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. Tais polinômios são definidos por:

$$\int_a^b t^{k-n+s} B_n^{(k)}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1 \\ v_n^{(k)}, & \text{se } s = n, \end{cases}$$



onde $n \geq 1$, k são inteiros positivos ou negativos, $(a, b) \subseteq (-\infty, +\infty)$ e $d\psi(t)$ é uma distribuição para a qual os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2.1)$$

existem e são finitos.

Neste trabalho, consideraremos somente os polinômios $B_n^{(k)}(z)$, com $k = 0$ e $d\psi(t)$ uma distribuição forte de Stieltjes. Denotaremos tais polinômios por $B_n(z)$ e os chamaremos, simplesmente, de polinômios similares.

Portanto, os polinômios similares $B_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, de grau n , são polinômios mônicos definidos por:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1 \\ v_n, & \text{se } s = n \end{cases}, \quad n \geq 1. \quad (2.2.2)$$

Os polinômios similares definidos acima podem ser encontrados em Sri Ranga [16] e são equivalentes aos polinômios que aparecem em Jones, Thron & Waadeland [11].

A seguir, discutiremos uma condição necessária e suficiente para a existência dos polinômios similares $B_n(z)$.

Suponhamos $B_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Podemos, então, escrever (2.2.2) como o seguinte sistema linear, $n \geq 0$:



$$\begin{pmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

Resolvendo (2.2.3) pela regra de Cramer, como $a_n = 1$, obtemos:

$$v_n = \frac{H_{n+1}^{(-n)}}{H_n^{(-n)}}, \quad n \geq 0, \quad (2.2.4)$$

onde $H_n^{(m)}$ são os determinantes de Hankel definidos em (2.1.6).

Para determinar o polinômio $B_n(z)$, precisamos calcular os valores de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Para isso, consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_0 \\ -\mu_1 \\ \vdots \\ -\mu_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.2.5)$$

cujas soluções serão únicas se o determinante da matriz dos coeficientes, $H_n^{(-n)}$, for diferente de zero. Esta condição é provada no próximo teorema.

Teorema 2.4 *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $SS(a,b)$ para a qual os momentos μ_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definidos em (2.2.1), existem e são finitos. Então, os determinantes de Hankel, $H_n^{(m)}$, dados em (2.1.6), satisfazem:*

$$H_n^{(m)} > 0, \quad m, n \in \mathbf{Z}, \quad n \geq 0. \quad (2.2.6)$$

Demonstração:

Consideremos $\mathbf{T}: R^n \rightarrow R^n$ o operador linear associado à matriz



$$\mathcal{H}_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

cujo determinante é $H_n^{(m)}$.

Seja $v = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ um vetor do R^n . Então, a i -ésima componente de $T(v)$ é dada por:

$$(T(v))_i = (\mu_{m+i} \quad \mu_{m+i+1} \quad \cdots \quad \mu_{m+n+i-1}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix},$$

isto é,

$$(T(v))_i = \sum_{s=0}^{n-1} \int_a^b t^m t^{s+i} x_s d\psi(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Com isso, tem-se

$$\langle T(v), v \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} (T(v))_i x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \int_a^b t^m t^{s+i} x_s d\psi(t) \right) x_i$$

$$= \int_a^b t^m \left[\sum_{s=0}^{n-1} x_s t^s \right]^2 d\psi(t).$$

Como $0 \leq a < b \leq \infty$ temos $\langle T(v), v \rangle > 0$. Portanto, $\mathcal{H}_n^{(m)}$ é uma matriz positiva definida e $\det(\mathcal{H}_n^{(m)}) = H_n^{(m)} > 0$, m, n inteiros, $n \geq 1$. ■

Então, o sistema linear (2.2.5) é determinado e, pela regra de Cramer, obtemos:

$$B_n(z) = \frac{1}{H_n^{(-n)}} \begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (2.2.7)$$

Fazendo $z = 0$ em (2.2.7), encontramos:

$$B_n(0) = \frac{(-1)^n}{H_n^{(-n)}} H_n^{(-n+1)} = a_0.$$

Portanto, pelo teorema 2.3, os polinômios mônicos similares $B_n(z)$ definidos em (2.2.2) existem, são únicos e com $a_0 \neq 0$.

Usando a igualdade

$$\int_a^b t^{-(n+1)} B_n(t) d\psi(t) = \mu_{-n-1} a_0 + \mu_{-n} a_1 + \cdots + \mu_{-1}$$

em (2.2.5), tem-se:

$$\rho_n = \int_a^b t^{-(n+1)} B_n(t) d\psi(t) = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n-1)}}{H_n^{(-n)}}, \quad n \geq 0, \quad (2.2.8)$$

que é diferente de zero.

Os polinômios similares $B_n(z)$ exibem muitas propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. A mais importante e útil delas é a relação de recorrência de três termos, que daremos a seguir.



Teorema 2.5 Os polinômios similares $B_n(z)$ definidos em (2.2.2) satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z) \quad (2.2.9)$$

onde $B_0(z) = 1$, $B_1(z) = z - \beta_1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{v_n}{v_{n-1}} > 0, \quad n \geq 1,$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \text{ e } \beta_{n+1} = -\frac{\alpha_{n+1}\rho_{n-1}}{\rho_n}, \quad n \geq 1,$$

com v_n e ρ_n definidos em (2.2.4) e (2.2.8), respectivamente.

Demonstração:

Como $B_n(z)$ é um polinômio mônico de grau n , o polinômio:

$$B_{n+1}(z) - zB_n(z)$$

é mônico e de grau no máximo n . Então, é possível escolher-se (de maneira não única) α_{n+1} e β_{n+1} de modo que

$$B_{n+1}(z) - zB_n(z) = -\beta_{n+1}B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z) + P_{n-1}(z), \quad (2.2.10)$$

onde $P_{n-1}(z)$ é um polinômio de grau no máximo $n-1$.

Fazendo

$$P_{n-1}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i z^i.$$

Multiplicando (2.2.10) por z^{-n+s} e integrando obtemos:



$$\int_a^b t^{-n+s} B_{n+1}(t) d\psi(t) - \int_a^b t^{-n+s+1} B_n(t) d\psi(t) \quad (2.2.11)$$

$$= -\beta_{n+1} \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) - \alpha_{n+1} \int_a^b t^{-(n-1)+s} B_{n-1}(t) d\psi(t) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \int_a^b t^{-n+i+s} d\psi(t).$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n-1$ na equação (2.2.11) e escolhendo $\alpha_{n+1} = \frac{v_n}{v_{n-1}}$ obtemos um sistema linear homogêneo cujas incógnitas são os coeficientes do polinômio $P_{n-1}(z)$. O determinante da matriz do sistema é $H_n^{(-n)}$ que, conforme vimos no teorema 2.3, é diferente de zero. Assim, a única solução do sistema é

$$p_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

e, portanto, $P_{n-1}(z) \equiv 0$. Logo, de (2.2.10), a relação de recorrência (2.2.9) está provada.

Se, em (2.2.11) fizermos, $s = -1$ encontramos:

$$0 = -\beta_{n+1} \rho_n - \alpha_{n+1} \rho_{n-1}$$

de onde segue, imediatamente, que

$$\beta_{n+1} = -\frac{\alpha_{n+1} \rho_{n-1}}{\rho_n}, \quad n \geq 1.$$

Em (2.2.7) calcula-se diretamente que $B_1(z) = z - \beta_1$, onde $\beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}$. Temos, também

$B_0(z) = 1$, pois, trata-se de um polinômio mônico de grau zero.

Portanto, o teorema está provado. ■



Para os zeros dos polinômios similares também vale um resultado semelhante ao teorema 2.3 para os polinômios ortogonais:

Teorema 2.6 *Os zeros dos polinômios similares $B_n(z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração:

Como $0 \leq a < b \leq \infty$, z^{-n} não muda de sinal em (a, b) . Entretanto, por (2.2.2),

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) d\psi(t) = 0,$$

e, portanto, $B_n(z)$ deve mudar de sinal em (a, b) , isto é, deverá ter pelo menos um zero de multiplicidade ímpar nesse intervalo.

Sejam $z_1, z_2, \dots, z_r$, $0 < r < n$, zeros distintos de multiplicidade ímpar de $B_n(z)$ em (a, b) e consideremos o polinômio $z^{-n}(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_r) B_n(z)$. Esse polinômio não muda de sinal no intervalo (a, b) . Então,

$$\int_a^b t^{-n} (t - z_1)(t - z_2) \dots (t - z_r) B_n(t) d\psi(t) \neq 0.$$

Como $r < n$, usando (2.2.2), tem-se que este resultado é uma contradição. Logo, existem n zeros distintos de $B_n(z)$ em (a, b) e o teorema está provado. ■



2.3 Polinômios $B_n(\lambda, z)$

Sri Ranga, Andrade & McCabe [19] definiram os polinômios $B_n(\lambda, z)$ por:

$$B_n(\lambda, z) = B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z), \quad \lambda \in R, \quad n \geq 1. \quad (2.3.1)$$

Esses polinômios, definidos a partir dos polinômios $B_n(z)$ do mesmo modo que os polinômios quase-ortogonais, são definidos a partir dos polinômios ortogonais (ver, por exemplo, Chihara [5]), são mônicos de grau n e dependem de um parâmetro real λ , que pode depender de n .

A seguir, apresentamos algumas propriedades dos polinômios $B_n(\lambda, z)$, (para mais detalhes, ver Sri Ranga, Andrade & McCabe [19]).

Como consequência de (2.2.2) e de (2.3.1) tem-se que os polinômios $B_n(\lambda, z)$ associados a uma dada distribuição forte $d\psi(t)$, satisfazem à seguinte propriedade:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\lambda, t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2. \quad (2.3.2)$$

Um resultado mais geral é o seguinte:

Teorema 2.7 *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição forte qualquer e $Q_n(z)$ um polinômio mônico de grau $n \geq 2$ que satisfaz*

$$\int_a^b t^{-n+s} Q_n(t) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2,$$

então, existe $\lambda \in R$ tal que $Q_n(z) = B_n(\lambda, z)$.



Demonstração:

Considerando a combinação linear $Q_n(t) = \sum_{r=0}^n a_r B_r(t)$, utilizando a condição dada no teorema e a definição (2.2.2), obtemos um sistema triangular superior nas incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$. Portanto, de (2.2.8), concluímos que $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 0$. Assim, o teorema está provado para $\lambda = -a_{n-1}$. ■

De (2.3.2) demonstra-se que os zeros de $B_n(\lambda, z)$ são reais, distintos e que pelo menos $n-1$ deles pertencem ao intervalo (a, b) . Sejam $z_{n,1}^{(\lambda)}, z_{n,2}^{(\lambda)}, \dots, z_{n,n}^{(\lambda)}$ os n zeros de $B_n(\lambda, z)$, dispostos em ordem crescente.

Da definição (2.3.1) e da relação de recorrência de três termos (2.2.9), obtemos:

$$B_n(\lambda, 0) = (-1)^n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-1} (\beta_n + \lambda).$$

Por outro lado, $B_n(\lambda, 0) = (-1)^n z_{n,1}^{(\lambda)} z_{n,2}^{(\lambda)} \dots z_{n,n}^{(\lambda)}$.

Então,

$$\frac{\beta_n + \lambda}{z_{n,1}^{(\lambda)}} > 0.$$

Dáí, conclui-se que, se $\lambda > -\beta_n$, então $z_{n,1}^{(\lambda)}$ é positivo, enquanto que, se $\lambda < -\beta_n$, $z_{n,1}^{(\lambda)}$ é negativo.

No próximo teorema são apresentadas condições sobre λ que garantem a existência de todos os zeros de $B_n(\lambda, z)$ em (a, b) .

Teorema 2.8 Se $0 \leq \lambda \leq \alpha_{n+1}$, então todos os zeros de $B_n(\lambda, z)$ estão em (a, b) .



Demonstração:

Para $\lambda = 0$, $B_n(0, z) = B_n(z)$ e o teorema segue imediatamente do teorema 2.6.

Quando $\lambda = \alpha_{n+1}$, temos:

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(\alpha_{n+1}, z) d\psi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n,$$

e a prova do teorema é análoga à prova do teorema 2.6.

Para $0 < \lambda < \alpha_{n+1}$, tem-se:

$$B_n(0, b) > 0, \quad (-1)^n B_n(0, a) > 0,$$

$$B_n(\alpha_{n+1}, b) > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^n B_n(\alpha_{n+1}, a) > 0.$$

Dessas condições e da equação

$$B_n(\lambda, z) = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}}\right) B_n(0, z) + \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}} B_n(\alpha_{n+1}, z), \quad 0 < \lambda < \alpha_{n+1},$$

obtemos:

$$(-1)^n B_n(\lambda, a) > 0 \quad \text{e} \quad B_n(\lambda, b) > 0. \quad (2.3.3)$$

Se $z_{n,n}^{(\lambda)} > b$ então, $B_n(\lambda, b) < 0$ e, se $z_{n,1}^{(\lambda)} < a$ então, $(-1)^n B_n(\lambda, a) < 0$. Em qualquer uma destas situações temos uma contradição em (2.3.3) e, portanto, todos os zeros de $B_n(\lambda, z)$ estão em (a, b) . ■

CAPÍTULO 3

A FUNÇÃO q-GAMA E OS POLINÔMIOS ORTOGONAIS

3.1 Função Gama e Função Beta

As definições e resultados que apresentaremos a seguir podem ser encontrados em Askey [1]. A função gama, denotada por $\Gamma(x)$, é definida por :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0, \quad (3.1.1)$$

e satisfaz à igualdade

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (3.1.2)$$

onde $\Gamma(1) = 1$.

De (3.1.2) temos que $\Gamma(x)$ pode ser determinada para todo $x > 0$, quando se conhecem, por exemplo, seus valores para $1 \leq x < 2$. Em particular, se $x = n$ é um inteiro positivo, então,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.3)$$

Por essa razão, algumas vezes $\Gamma(x)$ recebe o nome de função fatorial.

Pode-se mostrar, também, que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1. \quad (3.1.4)$$



A função beta, representada por $B(x, y)$, é definida por:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0. \quad (3.1.5)$$

As funções beta e gama estão relacionadas da seguinte forma:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (3.1.6)$$

Bohr & Mollerup [4] provaram que a convexidade de $\log \Gamma(x)$, para $x > 0$, junto com (3.1.2) determinam a função gama de modo único.

3.2 Função q-Gama

Seja $(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$, $0 < q < 1$.

Para um número complexo z arbitrário, definimos

$$(a; q)_z = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^z; q)_\infty}, \quad 0 < q < 1. \quad (3.2.1)$$

Quando $z = n$ é um inteiro positivo, temos:

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), \quad 0 < q < 1, \quad (3.2.2)$$

e, se $z = -n$ é um inteiro negativo,

$$(a; q)_{-n} = \frac{1}{(aq^{-n}; q)_n} = \frac{q^{n(n+1)/2} (-1)^n}{a^n (q/a; q)_n}, \quad 0 < q < 1. \quad (3.2.3)$$



Jackson [9] definiu a função q -gama por:

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^x; q)_\infty} (1-q)^{1-x}, \quad 0 < q < 1. \quad (3.2.4)$$

A função q -gama satisfaz à equação funcional

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{q^x - 1}{q - 1} \Gamma_q(x), \quad 0 < q < 1, \quad (3.2.5)$$

análoga à equação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para a função gama.

Define-se o q -fatorial de n por

$$n_q! = 1(1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}).$$

Se $x = n$ for um inteiro positivo, a equação (3.2.5) resulta em

$$\Gamma_q(n+1) = n_q!.$$

A função q -gama é semelhante à função gama em muitas outras situações. Askey [1] mostra vários resultados que sugerem fortemente a analogia entre essas duas funções. Dentre eles destacamos o resultado análogo ao teorema de Bohr-Mollerup para a função gama e aquele que estabelece a relação entre $\Gamma_q(x)$ e $\Gamma(x)$.

A derivada segunda de $\log \Gamma_q(x)$ é positiva e, portanto, $\log \Gamma_q(x)$ é convexa. Este fato sugere a seguinte caracterização da função q -gama:



Teorema 3.1 Se $f(x)$ é uma função tal que

$$f(x+1) = \frac{1-q^x}{1-q} f(x), \quad 0 < q < 1, \quad (3.2.6)$$

$f(1) = 1$ e $\log f(x)$ é convexa para $x > 0$, então $f(x) = \Gamma_q(x)$.

Demonstração:

Seja $0 < x < 1$. A convexidade de $\log f(x)$ implica em

$$\log f(x+n) \leq \log f(n) + x[\log f(n+1) - \log f(n)] = \log f(n) \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)^x,$$

isto é,

$$f(x+n) \leq f(n) \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)^x.$$

Desde que

$$f(x+n) = \frac{(q^x; q)_n}{(1-q)^n} f(x) \quad \text{e} \quad f(n) = \frac{(q; q)_{n-1}}{(1-q)^{n-1}},$$

a desigualdade anterior se escreve como

$$f(x) \leq \frac{(q; q)_{n-1}}{(q^x; q)_n} (1-q)^{1-x} (1-q^n)^x, \quad 0 < q < 1, \quad 0 < x < 1. \quad (3.2.7)$$

Aplicando a convexidade de $\log f(x)$ em $n+1$, $n+x$, e $n+x+1$, tem-se a desigualdade:

$$f(x) \geq \frac{(q; q)_n (1-q)^{1-x}}{(q^x; q)_n (1-q^{n+x})^{1-x}}, \quad 0 < q < 1, \quad 0 < x < 1. \quad (3.2.8)$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$, (3.2.7) e (3.2.8) resultam em :

$$f(x) = \Gamma_q(x), \quad 0 < q < 1, \quad \text{e} \quad 0 < x < 1.$$

O resultado para $x > 0$ segue de (3.2.6). ■



O resultado que estabelece a relação entre as funções q -gama e gama é o seguinte:

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \Gamma_q(x) = \Gamma(x) \quad (3.2.9)$$

A seguir calcularemos o valor da integral $\int_0^\infty t^{x-1} \frac{dt}{(-t; q)_\infty}$ que será de extrema

importância na prova da relação de ortogonalidade dos polinômios q -Laguerre definidos na seção 3.4.

Seja

$$f(a) = \int_0^\infty t^{x-1} \frac{(-at; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} dt, \quad 0 < q < 1, \quad x > 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^\infty t^{x-1} \frac{(-aqt; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} (1 + a(t+1) - a) dt = \\ &= (1-a) \int_0^\infty t^{x-1} \frac{(-aqt; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} dt + aq^{-x} \int_0^\infty t^{x-1} \frac{(-at; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(a) = (1-a)f(aq) + aq^{-x}f(a).$$

A segunda parte desse resultado é obtido com a substituição de t por qt .

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{(1-a)f(aq)}{(1-aq^{-x})} \\ &= \frac{(1-a)(1-aq)f(aq^2)}{(1-aq^{-x})(1-aq^{-x+1})} = \dots = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^{-x}; q)_\infty} f(0). \end{aligned}$$

Fazendo $a = q$ na igualdade anterior, obtemos:



$$f(0) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(1-x)} (1-q)^x,$$

pois $f(q)$ coincide com a função beta (3.1.5).

Assim,

$$\int_0^\infty t^{x-1} \frac{dt}{(-t; q)_\infty} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(1-x)} (1-q)^x, \quad 0 < q < 1, \quad x > 0. \quad (3.2.10)$$

3.3 O Teorema q-Binomial

Um importante e conhecido resultado, é o teorema binomial

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k = (1-x)^{-a}, \quad |x| < 1,$$

onde:

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Abordaremos, a seguir, um importante resultado análogo ao teorema binomial, o teorema q -binomial:

Teorema 3.2

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} x^k = \frac{(ax; q)_\infty}{(x; q)_\infty}, \quad 0 < q < 1, \quad |x| < 1.$$

Demonstração:

Consideremos a função

$$h_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} x^k.$$



Então,

$$\begin{aligned} h_a(x) - h_a(qx) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} (1 - q^k) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_{k-1}} x^k \\ &= (1-a)x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq; q)_{k-1}}{(q; q)_{k-1}} x^{k-1}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$h_a(x) - h_a(qx) = (1-a)xh_{aq}(x).$$

Por outro lado:

$$h_{aq}(x) = \frac{h_a(x)}{(1-ax)}.$$

Então,

$$h_a(x) = \left(\frac{1-ax}{1-x} \right) h_a(qx) = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}} h_a(0) = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}}. \blacksquare$$

Uma generalização do teorema binomial é o resultado a seguir, conhecido como soma de Ramanujan:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(b; q)_k} x^k = \frac{(ax; q)_{\infty} (q/ax; q)_{\infty} (q; q)_{\infty} (b/a; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty} (b/ax; q)_{\infty} (b; q)_{\infty} (q/a; q)_{\infty}}, \quad 0 < q < 1, \quad (3.3.1)$$

$$|ba^{-1}| < |x| < 1.$$

Para provar este resultado, consideremos:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(b; q)_k} x^k = \frac{(a; q)_{\infty}}{(b; q)_{\infty}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(bq^k; q)_{\infty}}{(aq^k; q)_{\infty}} x^k. \quad (3.3.2)$$

Seja

$$f(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(bq^k; q)_{\infty}}{(aq^k; q)_{\infty}} x^k,$$

então,

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(bq^{n+1}; q)_{\infty}}{(aq^n; q)_{\infty}} x^n (1 - b(q^n - a^{-1}) - ba^{-1}) \\ &= (1 - b/a) f(bq) + \frac{b}{ax} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(bq^{n+1}; q)_{\infty}}{(aq^{n+1}; q)_{\infty}} x^{n+1}. \end{aligned}$$

E, assim, obtemos a seguinte igualdade:

$$f(b) = (1 - b/a) f(bq) + \frac{b}{ax} f(b),$$

ou, ainda

$$f(b) = \frac{(1 - b/a)}{(1 - b/ax)} f(bq),$$

que resulta em:

$$f(b) = \frac{(b/a; q)_{\infty}}{(b/ax; q)_{\infty}} f(0). \quad (3.3.3)$$

Como $\frac{1}{(q; q)_k} = \frac{(q^{k+1}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} = 0$, para $k = -1, -2, \dots$, a série $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(b; q)_k} x^k$ em

(3.3.2), quando $b = q$, é facilmente calculada pelo teorema q -binomial. Portanto,

$$f(q) = \frac{(ax, q)_{\infty} (q, q)_{\infty}}{(x, q)_{\infty} (a, q)_{\infty}}.$$

Fazendo $b = q$ em (3.3.3) e utilizando a relação anterior, calculamos $f(0)$ sem dificuldade. Portanto,

$$f(b) = \frac{(b/a; q)_{\infty} (q/ax; q)_{\infty} (ax, q)_{\infty} (q, q)_{\infty}}{(b/ax; q)_{\infty} (q/a; q)_{\infty} (x, q)_{\infty} (a, q)_{\infty}}$$

Substituindo $f(b)$ em (3.3.2), obtemos a soma de Ramanujan.

A seguir, apresentaremos uma família de polinômios ortogonais definida com relação à distribuição

$$\frac{t^\alpha}{(-1-q)t; q)_\infty} dt, \quad t \in (0, \infty).$$

3.4 Polinômios q-Laguerre

Os polinômios de Laguerre definidos por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (3.4.1)$$

onde $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$, constituem um conjunto de polinômios ortogonais em relação à função distribuição $t^\alpha e^{-t} dt$, $t \in (0, \infty)$.

Para esses polinômios é válida a seguinte propriedade:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(t) L_m^{(\alpha)}(t) t^\alpha e^{-t} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}, & m = n. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Moak [13], definiu os polinômios q-Laguerre da seguinte forma:

$$L_n^{(\alpha)}(x; q) = \frac{(q^{\alpha+1}; q)_n}{(q; q)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k q^{\binom{k}{2}} (1-q)^k (q^{n+\alpha+1} x)^k}{(q^{\alpha+1}; q)_k (q; q)_k}, \quad 0 < q < 1 \quad (3.4.3)$$

Esses polinômios, análogos aos polinômios de Laguerre, formam um conjunto de polinômios ortogonais em relação à função distribuição



$$\frac{t^\alpha}{(-(1-q)t; q)_\infty} dt, \quad t \in (0, \infty).$$

A relação de ortogonalidade é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.3 Para $\alpha > -1$, temos

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(t; q) L_n^{(\alpha)}(t; q) \frac{t^\alpha}{(-(1-q)t; q)_\infty} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(-\alpha) (q^{\alpha+1}; q)_n}{\Gamma_q(-\alpha) (q; q)_n q^n}, & m = n. \end{cases}$$

Demonstração:

Da definição dos q-polinômios de Laguerre e da integral (3.2.10), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(t; q) t^m \frac{t^\alpha}{(-(1-q)t; q)_\infty} dt \\ &= \frac{(q^{\alpha+1}; q)_n}{(q; q)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k q^{\binom{k}{2}} (q^{n+\alpha+1})^k \Gamma(-k-\alpha-m) \Gamma(1+k+\alpha+m)}{(1-q)^{-k} (q^{\alpha+1}; q)_k (q; q)_k \Gamma_q(-k-\alpha-m)} \\ &= \frac{(q^{\alpha+1}; q)_n \Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha+1) (q^{-\alpha-m}; q)_m (-1)^m}{(q; q)_n (1-q)^m \Gamma_q(-\alpha)} \\ & \quad \times \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k (q^{\alpha+m+1}; q)_k q^{(n-m)k}}{(q^{\alpha+1}; q)_k (q; q)_k}, \end{aligned}$$



de onde obtemos a segunda igualdade utilizando a fórmula $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ e a

equação funcional (3.2.5).

Em Bailey [3] encontramos a seguinte soma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha; q)_k (b; q)_k}{(c; q)_k (q; q)_k} \left(\frac{c}{ab} \right)^k = \frac{(c/\alpha; q)_{\infty} (c/b; q)_{\infty}}{(c; q)_{\infty} (c/ab; q)_{\infty}}.$$

Fazendo $a = q^{-n}$, $b = q^{\alpha+m+1}$ e $c = q^{\alpha+1}$ podemos finalmente calcular a integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t; q) \frac{t^{\alpha+m}}{(- (1-q)t; q)_{\infty}} dt &= \frac{(q^{\alpha+1}; q)_{\infty} \Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha+1) (q^{\alpha+1}; q)_m (q^{-m}; q)_n}{(q; q)_n \Gamma_q(-\alpha) (1-q)^m q^{\alpha m + \binom{m+1}{2}} (q^{\alpha+1}; q)_n} \\ &= \begin{cases} 0, & m < n \\ \frac{\Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha+1) (q^{\alpha+1}; q)_n (-1)^n}{\Gamma_q(-\alpha) (1-q)^n q^{\alpha n + n^2 + n}}, & m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Considerando que $L_n^{(\alpha)}(x; q) = \frac{(-1)^n q^{n^2 + n\alpha} (1-q)^n}{(q; q)_n} x^n + \dots$, segue o resultado do

teorema. ■

Fazendo $\alpha = 0$ no teorema q -binomial e utilizando (3.2.9), temos

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1}{(- (1-q)t; q)_{\infty}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} = e^{-t}.$$



Portanto, do teorema 3.2, a função distribuição, $\frac{t^\alpha}{(-1-q)t;q)_\infty} dt, t \in (0, \infty)$, resulta na função distribuição $t^\alpha e^{-t} dt, t \in (0, \infty)$ de (3.4.2). É interessante observar que, da definição (3.4.3) e de (3.2.9), tem-se:

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} L_n^{(\alpha)}(x;q) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $SS(c/b, b)$, onde $0 < -\sqrt{c} < b < \infty$. Em Sn Ranga [10], foram investigados os polinômios similares $B_n(x)$ para uma classe de distribuições $SS(c/b, b)$, denotadas por distribuições $SS(c/b, b)$, que satisfazem a propriedade de simetria (inversa)

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(c/t)}{\sqrt{c/t}}, \quad t \in (c/b, b) \tag{4.1.1}$$

Em Sn Ranga, Andrade & McCabe [19] foram consideradas distribuições $SS(c/b, b)$, denotadas por $S(c/b, b)$, que possuem a propriedade de simetria (inversa)

$$d\psi(t) = -d\psi(c/t), \quad t \in (c/b, b) \tag{4.1.2}$$

Neste capítulo, denotaremos os polinômios similares definidos em (2.2.2) em relação a uma dada distribuição $d\psi(t)$ por $B_n^\psi(x)$.

Assim,

$$\int_{c/b}^b t^{n-1} B_n^\psi(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq n \leq 1, \quad n \geq 1 \tag{4.1.3}$$



CAPÍTULO 4

DUAS CLASSES DE DISTRIBUIÇÕES FORTES

4.1 Distribuições $ScS(c/b, b)$ e $S\bar{c}S(c/b, b)$

Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $SS(c/b, b)$, onde $0 < \sqrt{c} < b \leq \infty$. Em Sri Ranga [16], foram investigados os polinômios similares $B_n(z)$ para uma classe de distribuições $SS(c/b, b)$, denotadas por distribuições $ScS(c/b, b)$, que satisfazem à propriedade de simetria (inversa) :

$$\frac{d\psi(t)}{\sqrt{t}} = -\frac{d\psi(c/t)}{\sqrt{c/t}}, \quad t \in (c/b, b). \quad (4.1.1)$$

Em Sri Ranga, Andrade & McCabe [19] foram consideradas distribuições $SS(c/b, b)$, denotadas por $S\bar{c}S(c/b, b)$, que possuem a propriedade de simetria (inversa):

$$d\bar{\psi}(t) = -d\bar{\psi}(c/t), \quad t \in (c/b, b). \quad (4.1.2)$$

Neste capítulo, denotaremos os polinômios similares definidos em (2.2.2) em relação a uma dada distribuição $d\psi(t)$ por $B_n^\psi(z)$.

Assim,

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} B_n^\psi(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1. \quad (4.1.3)$$



Então, para esses polinômios, a relação de recorrência de três termos (2.2.9) é escrita da seguinte forma:

$$B_n^\psi(z) = (z - \beta_n)B_{n-1}^\psi(z) - \alpha_n z B_{n-2}^\psi(z), \quad n \geq 1, \quad (4.1.4)$$

com: $B_{-1}^\psi(z) = 0, \quad B_0^\psi(z) = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}} = \frac{\nu_0}{\rho_0},$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}, \quad n \geq 1,$$

onde:

$$\nu_n = \int_{c/b}^b B_n^\psi(t) d\psi(t) \quad \text{e} \quad \rho_n = \int_{c/b}^b t^{-n-1} B_n^\psi(t) d\psi(t), \quad n \geq 0.$$

Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $ScS(c/b, b)$ qualquer. Sri Ranga [16] demonstrou várias propriedades envolvendo esta classe de distribuições. Da definição (4.1.1) prova-se facilmente a seguinte relação para os momentos:

$$\mu_s = c^{(2s+1)/2} \mu_{-s-1}, \quad s \geq 0, \quad (4.1.5)$$

e, para qualquer polinômio $Q_n(z)$ de grau no máximo n , temos:

$$\int_{c/b}^b t^m Q_n(t) d\psi(t) = c^{(2m+1)/2} \int_{c/b}^b t^{-m-1} Q_n(c/t) d\psi(t) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.1.6)$$

Usando os resultados acima, demonstra-se o seguinte teorema:



Teorema 4.1 *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição $ScS(c/b, b)$. Então, os polinômios similares $B_n^\psi(z)$, associados a esta distribuição, satisfazem:*

$$B_n^\psi(z) = \frac{z^n B_n^\psi(c/z)}{B_n^\psi(0)}, \quad n \geq 0. \quad (4.1.7)$$

Demonstração:

Substituindo $z = 0$ na relação de recorrência (4.1.4), temos

Demonstração:

O teorema é imediato para $n = 0$. Para $n \geq 1$ tem-se, como consequência imediata de (4.1.6), que:

$$\int_{c/b}^b t^{-n+m} B_n^\psi(t) d\psi(t) = c^{(-2n+2m+1)/2} \int_{c/b}^b t^{n-m-1} B_n^\psi(c/t) d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De (4.1.3), para a distribuição $d\psi(t)$, obtemos:

$$\int_{c/b}^b t^{-m-1} t^n B_n^\psi(c/t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq m \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Então,

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} \frac{t^n B_n^\psi(c/t)}{B_n^\psi(0)} d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Devido à unicidade dos polinômios mônicos $B_n^\psi(z)$, o resultado do teorema é obtido. ■

Consideremos, agora, $d\psi(t)$ uma distribuição $ScS(c/b, b)$ e $B_n^\psi(z)$ os polinômios

similares. Uma consequência do teorema 4.1 é que os zeros de $B_n^\psi(z)$ satisfazem à seguinte igualdade:

$$z_{n,s}^\psi = \frac{c}{z_{n,n+1-s}^\psi}, \quad s = 1, 2, \dots, [(n+1)/2], \quad n \geq 1.$$



Teorema 4.2 Para qualquer distribuição $ScS(c/b, b)$ os coeficientes β_n da relação de recorrência de três termos (4.1.4) satisfazem:

$$\beta_n = \sqrt{c}, \quad n \geq 1.$$

Demonstração:

Substituindo $z = 0$ na relação de recorrência (4.1.4), temos

$$B_n^\psi(0) = (-1)^n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n, \quad n \geq 1. \quad (4.1.8)$$

Além disso, trocando z por cz na mesma relação de recorrência, utilizando (4.1.8) e o teorema 4.1, encontramos

$$B_n^\psi(z) = \left(z - \frac{c}{\beta_n} \right) B_{n-1}^\psi(z) - \frac{\alpha_n c}{\beta_n \beta_{n-1}} z B_{n-2}^\psi(z), \quad n \geq 1,$$

com $B_0^\psi(z) = 1$ e $B_1^\psi(z) = z - \frac{c}{\beta_1}$. Então, fazendo $z = 0$, obtemos

$$B_n^\psi(0) = -\frac{c}{\beta_n} B_{n-1}^\psi(0), \quad n \geq 1.$$

Comparando com (4.1.8), chegamos a:

$$\beta_n = \sqrt{c}. \quad \blacksquare$$

Consideremos, agora, $d\bar{\psi}(t)$ uma distribuição $S\bar{c}S(c/b, b)$ e $B_n^{\bar{\psi}}(z)$ os polinômios similares associados a esta distribuição, isto é,

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} B_n^{\bar{\psi}}(t) d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1. \quad (4.1.9)$$



Propriedades das distribuições $S\bar{C}S(c/b, b)$ foram consideradas em Sri Ranga, Andrade & McCabe [19].

Se em (4.1.9) substituirmos t por c/u , usarmos a propriedade (4.1.2) das distribuições $S\bar{C}S(c/b, b)$ e o fato de $B_n^{\bar{\psi}}(0) \neq 0$, encontramos:

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} \frac{t^n B_n^{\bar{\psi}}(c/t)}{B_n^{\bar{\psi}}(0)} d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (4.1.10)$$

Por outro lado, sabendo-se que $\alpha_{n+1} = \frac{v_n}{v_{n-1}}$, onde $v_n = \int_{c/b}^b B_n^{\bar{\psi}}(t) d\bar{\psi}(t)$, prova-se facilmente que

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} (B_n^{\bar{\psi}}(t) - \alpha_{n+1} B_{n-1}^{\bar{\psi}}(t)) d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (4.1.11)$$

Então, de (4.1.10) e (4.1.11), temos:

$$\begin{aligned} \frac{z^n B_n^{\bar{\psi}}(c/z)}{B_n^{\bar{\psi}}(0)} &= B_n^{\bar{\psi}}(z) - \alpha_{n+1} B_{n-1}^{\bar{\psi}}(z) \\ &= \frac{B_{n+1}^{\bar{\psi}}(z) + \beta_{n+1} B_n^{\bar{\psi}}(z)}{z}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Substituindo z por c/z na relação de recorrência (4.1.4) para $d\bar{\psi}(t)$, dividindo por $B_n^{\bar{\psi}}(0)$ e utilizando convenientemente (4.1.8) e (4.1.12) obtém-se, para qualquer distribuição $S\bar{C}S(c/b, b)$, o seguinte resultado:

$$\frac{(\alpha_{n+2} + \beta_{n+1})}{(\alpha_{n+1} + \beta_n)} = \frac{c}{\beta_n \beta_{n+1}}, \quad n \geq 1.$$



Fazendo $\gamma_n = \beta_n + \alpha_{n+1}$, com $\gamma_1 = c / \beta_1$, temos:

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{c}{\beta_n \beta_{n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (4.1.13)$$

Para uma dada distribuição $S\bar{c}S(c/b, b)$, os momentos estão relacionados por:

$$\mu_s = c^s \mu_{-s}, \quad s \geq 0. \quad (4.1.14)$$

Sri Ranga [17] encontrou uma interessante relação entre as distribuições $ScS(c/b, b)$ e $S\bar{c}S(c/b, b)$. Apresentamos tal relação no próximo teorema cuja demonstração é consequência imediata das definições (4.1.1) e (4.1.2).

Teorema 4.3 *Sejam $d\bar{\psi}_0(t)$, $d\psi_1(t)$ e $d\psi_2(t)$, três distribuições fortes em $(c/b, b)$ relacionadas por*

$$\frac{t+\beta}{t} d\psi_1(t) = d\bar{\psi}_0(t) = \frac{1}{t+\beta} d\psi_2(t) \quad (4.1.15)$$

onde $c = \beta^2$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

$d\psi_1(t)$ é uma distribuição $ScS(c/b, b)$;

$d\bar{\psi}_0(t)$ é uma distribuição $S\bar{c}S(c/b, b)$;

$d\psi_2(t)$ é uma distribuição $ScS(c/b, b)$.

O resultado envolvendo o lado direito da igualdade (4.1.15) foi considerado, inicialmente, em Sri Ranga & McCabe [18].

Se $d\bar{\psi}(t)$ é uma distribuição $S\bar{c}S(c/b, b)$ e $B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0) \neq 0$, então, de (2.3.2) para $d\bar{\psi}(t)$, tem-se:



$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} \frac{t^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/t)}{B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)} d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2.$$

De acordo com o teorema 2.7 existe $\eta \in R$ tal que

$$\frac{z^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/z)}{B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)} = B_n^{\bar{\psi}}(\eta, z), \quad n \geq 1. \quad (4.1.16)$$

Na expressão anterior, o caso $n = 1$ pode ser provado diretamente.

Teorema 4.4 Para $n \geq 1$, se $\eta = \frac{\beta_n(\alpha_{n+1} - \lambda)}{\beta_n + \lambda}$ então os polinômios $B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z)$ e $B_n^{\bar{\psi}}(\eta, z)$ estão relacionados por

$$\frac{z^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/z)}{B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)} = B_n^{\bar{\psi}}(\eta, z).$$

Demonstração:

De (4.1.12) e de (2.3.1) temos

$$z^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/z) = (B_n^{\bar{\psi}}(0, 0) - \lambda B_{n-1}^{\bar{\psi}}(0, 0)) B_n^{\bar{\psi}}(0, z)$$

$$- (\alpha_{n+1} B_n^{\bar{\psi}}(0, 0) + \lambda \beta_n B_{n-1}^{\bar{\psi}}(0, 0)) B_{n-1}^{\bar{\psi}}(0, z), \quad n \geq 1.$$

Se

$$\eta = \frac{\alpha_{n+1} B_n^{\bar{\psi}}(0, 0) + \lambda \beta_n B_{n-1}^{\bar{\psi}}(0, 0)}{B_n^{\bar{\psi}}(0, 0) - \lambda B_{n-1}^{\bar{\psi}}(0, 0)} = \frac{\beta_n(\alpha_{n+1} - \lambda)}{\beta_n + \lambda}, \quad n \geq 1,$$

então,

$$\frac{z^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/z)}{B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)} = B_n^{\bar{\psi}}(0, z) - \eta B_{n-1}^{\bar{\psi}}(0, z) = B_n^{\bar{\psi}}(\eta, z), \quad n \geq 1. \quad \blacksquare$$

Como consequência do teorema 4.4 tem-se que os zeros dos polinômios $B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z)$ e $B_n^{\bar{\psi}}(\eta, z)$ estão relacionados por:

$$z_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{c}{z_{n,n-r+1}^{(\eta)}} , \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad \text{se } \lambda, \eta > -\beta_n,$$

e,

$$z_{n,1}^{(\lambda)} = \frac{c}{z_{n,1}^{(\eta)}} , \quad z_{n,r}^{(\lambda)} = \frac{c}{z_{n,n-r+2}^{(\eta)}} , \quad r = 2, 3, \dots, n, \quad \text{se } \lambda, \eta < -\beta_n.$$

Fazendo $\eta = \lambda$ no teorema 4.4 resulta a equação quadrática $\lambda^2 + 2\beta_n\lambda - \beta_n\alpha_{n+1} = 0$ cujas raízes são

$$\hat{\lambda}_n = \sqrt{\beta_n}(\sqrt{\gamma_n} - \sqrt{\beta_n}) \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_n = \sqrt{\beta_n}(-\sqrt{\gamma_n} - \sqrt{\beta_n}) , \quad (4.1.17)$$

Com isto, tem-se o seguinte teorema:

Teorema 4.5 Para $n \geq 1$, se λ é igual a $\hat{\lambda}_n$ ou $\tilde{\lambda}_n$, então:

$$\frac{z^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/z)}{B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)} = B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z) . \quad (4.1.18)$$

Além disso, são válidas as seguintes relações para os zeros:

$$z_{n,r}^{(\hat{\lambda}_n)} = \frac{c}{z_{n,n-r+1}^{(\hat{\lambda}_n)}} , \quad r = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad (4.1.19)$$

$$z_{n,1}^{(\tilde{\lambda}_n)} = -\sqrt{c} , \quad z_{n,r}^{(\tilde{\lambda}_n)} = \frac{c}{z_{n,n-r+2}^{(\tilde{\lambda}_n)}} , \quad r = 2, 3, \dots, n. \quad (4.1.20)$$

Estes resultados podem ser encontrados em Sri Ranga, Andrade & McCabe [19].

A seguir, consideramos resultados que relacionam os coeficientes das relações de recorrência de três termos de polinômios associados às distribuições especiais $ScS(c/b, b)$ e $S\bar{c}S(c/b, b)$. Tais resultados foram obtidos por Sri Ranga [17] e Sri Ranga & McCabe [18].

Sejam $d\bar{\psi}(t)$ uma distribuição $S\bar{c}S(c/b, b)$ e $d\psi(t)$ uma distribuição $ScS(c/b, b)$ relacionadas pela equação:

$$d\psi(t) = (t + \beta)d\bar{\psi}(t), \quad t \in (c/b, b), \quad 0 < \beta < b \leq \infty, \text{ com } c = \beta^2. \quad (4.1.21)$$

De acordo com o teorema 4.3, temos que $d\psi(t)$ é uma distribuição $ScS(c/b, b)$. De (2.3.2), encontramos:

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} \frac{t^{n+1} B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\lambda, c/t)}{B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)} d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Quando $\lambda = \bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} = \sqrt{\beta_n^{\bar{\psi}}} \left(-\sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}}} - \sqrt{\beta_n^{\bar{\psi}}} \right)$, $n \geq 1$ temos, de acordo com o teorema 4.5,

que:

$$B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, z) = z^{n+1} \frac{B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, c/z)}{B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, 0)},$$

o único zero de $B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_n, z)$ fora do intervalo $(c/b, b)$ é $-\beta$. Utilizando (4.1.21), obtemos:

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} \frac{B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, t)}{t + \beta} d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Devido à unicidade dos polinômios mônicos $B_{n+1}^{\psi}(t)$, definidos por (4.1.3), em relação à distribuição $d\psi(t)$, temos:



$$B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, z) = (z + \beta) B_n^{\psi}(z), \quad n \geq 0. \quad (4.1.22)$$

Consideremos, agora, uma outra distribuição $d\varphi(t)$, $t \in (c/b, b)$, relacionada com $d\bar{\psi}(t)$ por

$$\frac{t + \beta}{t} d\varphi(t) = d\bar{\psi}(t), \quad 0 < \beta < b \leq \infty. \quad (4.1.23)$$

A seguir, obteremos uma relação análoga à (4.1.22) entre os polinômios envolvidos com essas duas distribuições. A distribuição $d\varphi(t)$ é $ScS(c/b, b)$ com $c = \beta^2$ e então, do teorema 4.2, tem-se que $B_n^{\varphi}(0) = (-\beta)^n$. Substituindo t por c/u na definição (4.1.3), com a distribuição $d\varphi(t)$, obtemos:

$$\int_{c/b}^b u^{n-s} B_n^{\varphi}(c/u) \frac{\beta}{u} d\varphi(u) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Dividindo o integrando por $B_n^{\varphi}(0) = (-\beta)^n$, e aplicando o teorema 4.1, a integral anterior resulta em

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} B_n^{\varphi}(t) (\beta/t) d\varphi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad n \geq 1.$$

Mas, $(\beta/t) d\varphi(t) = d\bar{\psi}(t) - d\varphi(t)$ e, então, podemos escrever a integral anterior da seguinte maneira:

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} B_n^{\varphi}(t) d\bar{\psi}(t) - \int_{c/b}^b t^{-n+s} B_n^{\varphi}(t) d\varphi(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad n \geq 1.$$

Na identidade anterior, a segunda integral é nula para $1 \leq s \leq n-1$. Portanto, obtemos:

$$\int_{c/b}^b t^{-n+s} B_n^{\varphi}(t) d\bar{\psi}(t) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 2$$



Nessas condições, o teorema 2.7 garante a existência de $\lambda \in R$ tal que $B_n^\varphi(z) = B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z)$, $n \geq 2$. Esse fato, junto com (4.1.7), fornece:

$$B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z) = \frac{z^n B_n^\varphi(c/z)}{B_n^\varphi(0)} = \frac{z^n B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, c/z)}{B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, 0)}. \quad (4.1.24)$$

No teorema 4.5 observa-se que a expressão (4.1.24) é verdadeira quando λ é igual a $\hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}}$ ou $\tilde{\lambda}_n^{\bar{\psi}}$. Como $B_n^\varphi(z) = B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z)$, os zeros são todos positivos e, então, tem-se o resultado:

$$B_n^{\bar{\psi}}(\hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}}, z) = B_n^\varphi(z), \quad n \geq 2. \quad (4.1.25)$$

4.2 Relações entre os coeficientes α_n e β_n

Suponhamos $d\psi(t)$ e $d\bar{\psi}(t)$ duas distribuições relacionadas por (4.1.21), onde $d\bar{\psi}(t)$ é $S\bar{C}S(c/b, b)$. Apresentamos, a seguir, a relação entre os coeficientes associados às relações de recorrência de três termos correspondentes a essas duas distribuições.

A equação

$$B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z) = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}}\right) B_n^{\bar{\psi}}(z) + \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}} (B_n^{\bar{\psi}}(z) - \alpha_{n+1}^{\bar{\psi}} B_{n-1}^{\bar{\psi}}(z)), \quad n \geq 1,$$

é equivalente a:

$$B_n^{\bar{\psi}}(\lambda, z) = \left(\frac{\lambda}{\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}} z}\right) B_{n+1}^{\bar{\psi}}(z) + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}} z} + \frac{\lambda \beta_{n+1}^{\bar{\psi}}}{\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}}\right) B_n^{\bar{\psi}}(z), \quad n \geq 1. \quad (4.2.1)$$

Considerando a relação de recorrência (4.1.4) com a distribuição $d\psi(t)$ e, juntamente com (4.1.22), tem-se:

$$B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, z) = (z - \beta) B_n^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}}, z) - \alpha_n^{\psi} z B_{n-1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}}, z), \quad n \geq 2, \quad (4.2.2)$$

de onde, de acordo com o teorema 4.2, obtemos:

$$\beta_n^{\psi} = \sqrt{c} = \sqrt{\beta^2} = \beta. \quad (4.2.3)$$

Usando a definição (2.3.1) e a equação (4.2.1) em (4.2.2), tem-se:

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{\bar{\psi}}(z) &= \left(z - \beta + \bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}} - \frac{\alpha_n^{\psi} \bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \right) B_n^{\bar{\psi}}(z) \\ &\quad - \left(\bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} + \alpha_n^{\psi} \left(1 - \frac{\bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \right) \right) z B_{n-1}^{\bar{\psi}}(z) \\ &\quad + \left(\beta \bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} - \frac{\alpha_n^{\psi} \bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}} \beta_n^{\bar{\psi}}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \right) B_{n-1}^{\bar{\psi}}(z), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Como a integral

$$\int_{c/b}^b t^{-n} B_{n+1}^{\bar{\psi}}(t) d\bar{\psi}(t) = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.2.5)$$

(4.2.4) torna-se:

$$\int_{c/b}^b t^{-n} B_{n-1}^{\bar{\psi}}(t) d\bar{\psi}(t) \left(\beta \bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} - \frac{\alpha_n^{\psi} \bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}} \beta_n^{\bar{\psi}}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \right) = 0, \quad n \geq 2.$$



Desde que a integral acima é diferente de zero, obtemos:

$$\beta \bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} - \frac{\alpha_n^{\psi} \bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}} \beta_n^{\bar{\psi}}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} = 0, \quad n \geq 2.$$

Dai,

$$\alpha_n^{\psi} = \frac{\beta \alpha_n^{\bar{\psi}} \bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}}}{\beta_n^{\bar{\psi}} \bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}}}, \quad n \geq 2.$$

Substituindo $\bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} = \sqrt{\beta_n^{\bar{\psi}}} \left(-\sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}}} - \sqrt{\beta_n^{\bar{\psi}}} \right)$ e fazendo $\ell_n = \sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}} / \beta_n^{\bar{\psi}}}$, obtém-se:

$$\alpha_n^{\psi} = \beta (\ell_{n-1} - 1)(\ell_n + 1), \quad n \geq 2. \quad (4.2.5)$$

Reunimos estes resultados no seguinte teorema:

Teorema 4.6 Sejam $d\bar{\psi}(t)$ uma distribuição $S\bar{C}S(c/b, b)$ e $d\psi(t)$ uma outra distribuição relacionada com $d\bar{\psi}(t)$ por

$$d\psi(t) = (t + \beta) d\bar{\psi}(t), \quad t \in (c/b, b), \quad 0 < \beta < b \leq \infty, \quad c = \beta^2.$$

Então, os respectivos coeficientes associados às relações de recorrência de três termos satisfazem

$$\alpha_{n+1}^{\psi} = \beta (\ell_{n+1} + 1)(\ell_n - 1) \quad e \quad \beta_n^{\psi} = \beta, \quad n \geq 1 \quad (4.2.6)$$

com

$$\ell_n = \sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}} / \beta_n^{\bar{\psi}}}, \quad n \geq 1.$$

Em (4.2.6) vemos que se os coeficientes $\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}$ e $\beta_n^{\bar{\psi}}$, $n \geq 1$, são conhecidos então os coeficientes α_{n+1}^{ψ} , $n \geq 1$, também o são. Além disso, de (4.2.6) segue que

$$\ell_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}^{\psi}}{\beta(\ell_n - 1)} - 1, \quad n \geq 1. \quad (4.2.7)$$

Usando (4.1.13) encontramos

$$\bar{\beta}_n^{\psi} = \beta \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n}, \quad n \geq 1 \quad (4.2.8)$$

e

$$\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}} = \beta \ell_{n-1} \ell_n - \bar{\beta}_n^{\psi}, \quad n \geq 1 \quad \text{com} \quad \ell_0 = 1. \quad (4.2.9)$$

Então, se forem conhecidos os valores de $\alpha_{n+1}^{\psi}, n \geq 1$, podemos calcular recursivamente os valores de $\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}$ e $\bar{\beta}_{n+1}^{\psi}$, usando (4.2.8) e (4.2.9), desde que $\bar{\beta}_1^{\psi}$ seja conhecido.

Suponhamos, agora, $d\varphi(t), t \in (c/b, b)$ uma distribuição $ScS(c/b, b)$ relacionada com a distribuição $d\bar{\psi}(t)$ dada por (4.1.23). De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, também é possível relacionar os coeficientes associados às relações de recorrência de três termos com respeito a essas distribuições.

Na equação (4.1.4) utilizamos (4.1.25) para obter

$$B_{n+1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}}, z) = (z - \beta) B_n^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}}, z) - \alpha_{n+1}^{\varphi} z B_{n-1}^{\bar{\psi}}(\bar{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}}, z), \quad n \geq 2, \quad (4.2.10)$$

onde $\bar{\lambda}_n^{\bar{\psi}} = \sqrt{\bar{\beta}_n^{\psi}} \left(\sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}}} - \sqrt{\bar{\beta}_n^{\psi}} \right).$

Em (4.2.10) se for utilizada a definição (2.3.1) e a equação (4.2.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
 B_{n+1}^{\bar{\psi}}(z) = & \left(z - \beta - \frac{\alpha_{n+1}^{\varphi}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \hat{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}} + \hat{\lambda}_{n+1}^{\bar{\psi}} \right) B_n^{\bar{\psi}}(z) \\
 & - \left(\hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}} + \alpha_{n+1}^{\varphi} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \right) \right) z B_{n-1}^{\bar{\psi}}(z) \\
 & + \left(\beta \hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}} - \frac{\alpha_{n+1}^{\varphi}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \hat{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}} \beta_n^{\bar{\psi}} \right) B_{n-1}^{\bar{\psi}}(z), \quad n \geq 2.
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Integrando (4.2.11) e levando em consideração que

$$\int_{c/b}^b t^{-n} B_{n+1}^{\bar{\psi}} d\bar{\psi}(t) = 0, \quad n \geq 1,$$

temos:

$$\beta \hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}} - \frac{\alpha_{n+1}^{\varphi}}{\alpha_n^{\bar{\psi}}} \hat{\lambda}_{n-1}^{\bar{\psi}} \beta_n^{\bar{\psi}} = 0, \quad n \geq 2.$$

Substituindo $\hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}} = \sqrt{\beta_n^{\bar{\psi}}} \left(\sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}}} - \sqrt{\beta_n^{\bar{\psi}}} \right)$ e fazendo $\ell_n = \sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}} / \beta_n^{\bar{\psi}}}$, tem-se

$$\alpha_{n+1}^{\varphi} = \beta(\ell_n - 1)(\ell_{n-1} + 1), \quad n \geq 2. \tag{4.2.12}$$

A equação (4.2.12) também é válida para $n = 1$. De fato:

$$B_2^{\bar{\psi}}(\hat{\lambda}_2^{\bar{\psi}}, z) = (z - \beta) B_1^{\bar{\psi}}(\hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}}, z) - \alpha_2^{\varphi} z$$

e, então:

$$B_2^{\bar{\psi}}(z) = (z - \beta + \hat{\lambda}_2^{\bar{\psi}}) B_1^{\bar{\psi}}(z) - (\alpha_2^{\varphi} + \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}}) z B_0^{\bar{\psi}}(z) + \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}} \beta. \tag{4.2.13}$$

Como

$$\frac{z - B_1^{\bar{\psi}}(z)}{\beta_1^{\bar{\psi}}} = 1,$$

a equação anterior pode ser escrita como

$$B_2^{\bar{\psi}}(z) = (z - \beta + \hat{\lambda}_2^{\bar{\psi}})B_1^{\bar{\psi}}(z) - (\alpha_2^{\varphi} + \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}})zB_0^{\bar{\psi}}(z) + \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}}\beta \frac{(z - B_1^{\bar{\psi}}(z))}{\beta_1^{\bar{\psi}}}.$$

Então,

$$B_2^{\bar{\psi}}(z) = \left(z - \beta + \hat{\lambda}_2^{\bar{\psi}} - \frac{\beta \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}}}{\beta_1^{\bar{\psi}}} \right) B_1^{\bar{\psi}}(z) - \left(\alpha_2^{\varphi} + \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}} - \frac{\beta \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}}}{\beta_1^{\bar{\psi}}} \right) z B_0^{\bar{\psi}}(z).$$

Assim,

$$\alpha_2^{\varphi} = \alpha_2^{\bar{\psi}} - \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}} + \frac{\beta \hat{\lambda}_1^{\bar{\psi}}}{\beta_1^{\bar{\psi}}}.$$

Lembrando que $\alpha_2^{\bar{\psi}} = \gamma_1^{\bar{\psi}} - \beta_1^{\bar{\psi}}$ tem-se

$$\alpha_2^{\varphi} = \beta(\ell_1 - 1)(\ell_0 + 1) \text{ com } \ell_0 = 1$$

e

$$\ell_1 = \sqrt{\gamma_1^{\bar{\psi}} / \beta_1^{\bar{\psi}}}.$$

Teorema 4.7 *Sejam $d\bar{\psi}(t)$ uma distribuição $S\bar{C}S(c/b, b)$ e $d\varphi(t)$ uma distribuição forte relacionada com $d\bar{\psi}(t)$ da seguinte forma*

$$d\bar{\psi}(t) = \frac{t + \beta}{t} d\varphi(t), \quad t \in (c/a, b), \quad 0 < \beta < b \leq \infty, \quad c = \beta^2.$$

Então os coeficientes associados às relações de recorrência de três termos relativos a essas distribuições satisfazem:

$$\alpha_{n+1}^{\varphi} = \beta(\ell_n - 1)(\ell_{n-1} + 1), \quad n \geq 1 \quad (4.2.13)$$



com

$$\ell_n = \sqrt{\gamma_n^{\bar{\psi}} / \beta_n^{\bar{\psi}}} \text{ e } \ell_0 = 1.$$

Portanto, se os coeficientes $\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}$ e $\beta_n^{\bar{\psi}}$, $n \geq 1$, são conhecidos temos imediatamente os coeficientes α_{n+1}^{φ} , $n \geq 1$.

Além disso,

$$\beta_n^{\bar{\psi}} = \beta \frac{\ell_{n-1}}{\ell_n} \text{ e } \alpha_{n+1}^{\bar{\psi}} = \beta \ell_{n-1} \ell_n - \beta_n^{\bar{\psi}}, \quad n \geq 1. \quad (4.2.14)$$

Então, se forem conhecidos os valores de α_{n+1}^{φ} , $n \geq 1$, podemos calcular recursivamente os valores de $\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}}$ e $\beta_n^{\bar{\psi}}$, $n \geq 1$, usando (4.2.13) e (4.2.14).

CAPÍTULO 5

POLINÔMIOS ASSOCIADOS ÀS DISTRIBUIÇÕES LOG-NORMAIS

5.1 Polinômios Ortogonais de Laurent.

Consideremos a distribuição log-normal

$$d\varphi(t) = \frac{q^{1/2}}{2k\sqrt{\pi}} e^{-(\ln t/2k)^2}, \quad q = e^{-2k^2}, \quad t \in (0, \infty). \quad (5.1.1)$$

Para essa distribuição os momentos de ordem n existem e são finitos para qualquer inteiro n . De fato:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{q^{1/2}}{2k\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^n e^{-(\ln t/2k)^2} dt = \frac{q^{1/2}}{2k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{x(n+1) - (x^2/4k^2)} dx \\ &= q^{1/2} e^{k^2(n+1)^2} = q^{-(n^2/2) - n}. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Polinômios ortogonais associados à essa distribuição foram introduzidos por Stieltjes e Wigert. Em Szegő [22] encontramos uma elegante representação para esses polinômios, obtida por Wigert:

$$P_n(x) = (-1)^n q^{n/2+1/4} \{(q; q)_n\}^{-1/2} \sum_{r=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_q q^{r^2} (-q^{1/2}x)^r,$$

onde

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_r (q; q)_{n-r}}, \quad q = e^{-2k^2}, \quad k > 0.$$

Um exemplo interessante de polinômios ortogonais relacionados à função distribuição log-normal são os polinômios de Laurent, isto é, polinômios onde potências negativas e



positivas podem ocorrer. Esses polinômios foram introduzidos por Jones & Thron [10], porém nenhum exemplo explícito deles foi apresentado em [10]. Pastro [14], no caso particular da distribuição log-normal, encontrou uma representação explícita de tais polinômios.

Para isso, considerou os seguintes polinômios

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} (q^{k/2} t)^k \quad e, \quad (5.1.3)$$

$$P_n(t) = Q_n(q^2 t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Os polinômios (5.1.3) satisfazem à seguinte relação de biortogonalidade:

$$\int_0^\infty P_m(t) Q_n(t^{-1}) d\varphi(t) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ (q^{-n}; q)_n q^n, & m = n \end{cases}, \quad (5.1.4)$$

onde $d\varphi(t)$ é a distribuição log-normal. Provemos este resultado:

O teorema q -binomial, (teorema 3.1), com $a = q^{-n}$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{r=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_r}{(q; q)_r} (q^n u)^r = (u; q)_n, \quad (5.1.5)$$

pois $(q^{-n}; q)_r = 0$, para $r > n$.

De (5.1.2) e (5.1.3) temos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty t^m Q_n(t^{-1}) d\varphi(t) \\
&= \int_0^\infty t^m \sum_{s=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_s}{(q; q)_s} (q^{s/2} t^{-1})^s d\varphi(t) \\
&= \sum_{s=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_s}{(q; q)_s} q^{s^2/2} \mu_{m-s} \\
&= q^{(-m^2/2)-m} \sum_{s=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_s}{(q; q)_s} q^{ms+s}.
\end{aligned}$$

Usando o teorema q -binomial (5.1.5), obtemos :

$$\int_0^\infty t^m Q_n(t^{-1}) d\varphi(t) = q^{(-m^2/2)-m} (q^{-n+m+1}; q)_n.$$

Então,

$$\int_0^\infty t^m Q_n(t^{-1}) d\varphi(t) = \begin{cases} 0, & m < n \\ q^{(-n^2/2)-n} (q; q)_n, & m = n. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Como $P_m(x) = \frac{(q^{-m}; q)_m}{(q; q)_m} q^{(m^2/2)+2m} x^n + \dots$, o resultado (5.1.4) segue imediatamente.

Teorema 5.1 As funções

$$R_n(t) = t^{[n/2]} Q_n(t^{-1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.1.7)$$

são os polinômios ortogonais de Laurent em relação à distribuição log-normal (5.1.1).



Demonstração:

No caso de $n = 2m$ temos

$$R_{2m}(z) = z^{[2m/2]} Q_{2m}(z^{-1}) = z^m Q_{2m}(z^{-1}).$$

Se $s = -m, \dots, m-1$ então, $m+s < 2m$ e, portanto, devido à relação (5.1.6), temos:

$$\int_0^\infty R_{2m}(t) t^s d\varphi(t) = \int_0^\infty t^{m+s} Q_{2m}(t^{-1}) d\varphi(t) = 0.$$

Dai, $R_{2m}(z)$ é ortogonal a qualquer $R_i(z)$, $0 \leq i < 2m$, pois $R_{2m}(z)$ é ortogonal aos monômios $t^{-m}, \dots, t^{m-1}$ de cada $R_i(z)$.

No caso de $n = 2m+1$, temos:

$$R_{2m+1}(z) = z^{[2m+1/2]} Q_{2m+1}(z^{-1}) = z^m Q_{2m+1}(z^{-1}).$$

Se $s = -m, \dots, m$ então, $m+s < 2m+1$ e, portanto, devido a relação (5.1.6), temos

$$\int_0^\infty R_{2m+1}(t) t^s d\varphi(t) = \int_0^\infty t^{m+s} Q_{2m+1}(t^{-1}) d\varphi(t) = 0.$$

Assim, $R_{2m+1}(z)$ é ortogonal a qualquer $R_i(z)$, $0 \leq i < 2m+1$. Concluimos, então, que $R_n(z)$ é ortogonal a qualquer $R_m(z)$, se $m < n$.

Para completar a prova precisamos calcular a integral

$$\int_0^\infty [R_n(t)]^2 d\varphi(t).$$

Devido à ortogonalidade de $R_n(z)$ a integral anterior é equivalente à integral



$$\int_0^{\infty} R_{2m}(t) t^m d\varphi(t) = \int_0^{\infty} t^{2m} Q_{2m}(t^{-1}) d\varphi(t) = q^{(-(2m)^2/2) - 2m} (q; q)_{2m}$$

quando n é par, e é equivalente à integral

$$\int_0^{\infty} R_{2m+1}(t) t^{m+1} d\varphi(t) = \int_0^{\infty} t^{2m+1} Q_{2m+1}(t^{-1}) d\varphi(t) = q^{(-(2m+1)^2/2) - (2m+1)} (q; q)_{2m+1}$$

quando n é ímpar. ■

Utilizando (5.1.3) e (5.1.7) verificamos facilmente as seguintes relações de recorrência de três termos :

$$R_{2n}(z) = (z - q^{-1/2}) R_{2n-1}(z) - q^{1/2} q^{-2n} (1 - q^{2n-1}) R_{2n-2}(z),$$

$$R_{2n+1}(z) = (1 - q^{-1/2} z^{-1}) R_{2n}(z) - q^{1/2} q^{-2n-1} (1 - q^{2n}) R_{2n-1}(z),$$

onde,

$$R_0(z) = 1; \quad R_1(z) = -q^{-1/2} z^{-1} + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

5.2 Distribuição Log-Normal Deslocada

Em Sri Ranga, Andrade, McCabe [19] encontramos uma representação explícita para os polinômios similares $B_n^\psi(z)$ e para os polinômios $B_n^\psi(\lambda, z)$ quando a distribuição é a log-normal deslocada

$$d\psi(t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} t^{-1} e^{-(\ln t/2k)^2} dt, \quad t \in (0, \infty). \quad (5.2.1)$$



Com o objetivo de obter tais polinômios, consideremos $B_n^\varphi(z)$ os polinômios similares associados à distribuição log-normal (5.1.1) e $B_n^\psi(z)$ os polinômios similares associados à distribuição log-normal deslocada (5.2.1). Da definição (2.2.2), quando a distribuição é a log-normal deslocada $d\psi(t)$, sabemos que:

$$\int_0^\infty t^{-n+s} B_n^\psi(t) d\psi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.2.2)$$

Fazendo $t = 1/u$ temos que (5.2.2) é equivalente a:

$$\int_0^\infty u^{-n+s} \frac{u^n B_n^\psi(1/u)}{B_n^\psi(0)} d\varphi(u) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.2.3)$$

Devido à unicidade dos polinômios similares, de (5.2.3) segue que:

$$B_n^\varphi(z) = \frac{z^n B_n^\psi(1/z)}{B_n^\psi(0)}$$

e,

$$B_n^\psi(z) = \frac{z^n B_n^\varphi(1/z)}{B_n^\varphi(0)}. \quad (5.2.4)$$

No teorema 5.1, vimos que a sequência de funções $R_n(z)$ definida por

$$R_n(z) = z^{[n/2]} Q_n(1/z),$$

onde

$$Q_n(z) = \sum_{r=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_r}{(q, q)_r} (q^{r/2} z)^r,$$

é ortogonal, com relação à distribuição log-normal (5.1.1). Portanto, concluímos que:

$$\int_0^{\infty} t^{-n+s} t^n Q_n(1/t) d\varphi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Então,

$$B_n^{\varphi}(z) = z^n Q_n(1/z). \quad (5.2.5)$$

Substituindo a equação (5.2.5) em (5.2.4), obtemos:

$$B_n^{\psi}(z) = \frac{Q_n(z)}{B_n^{\varphi}(0)}. \quad (5.2.6)$$

Considerando (3.2.3) e fazendo $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_r (q; q)_{n-r}}$, podemos escrever $Q_n(z)$ da seguinte forma:

$$Q_n(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{r^2 - rn - r/2} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\}_q z^r. \quad (5.2.7)$$

A expressão (5.2.7), com $r = n-s$, é equivalente a

$$Q_n(z) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n+s} q^{-s(n-s)} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ s \end{smallmatrix} \right\}_q q^{s/2} q^{-n/2} z^{n-s}. \quad (5.2.8)$$

Como $B_n^{\varphi}(0)$ é o termo independente do polinômio $B_n^{\varphi}(z) = z^n Q_n(1/z)$, tem-se:

$$B_n^{\varphi}(0) = (-1)^n q^{-n/2}.$$

Logo, em (5.2.6), obtemos:

$$B_n^{\psi}(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\}_q q^{r/2} z^{n-r}, \quad n \geq 1. \quad (5.2.9)$$

Os polinômios dados por (5.2.9) satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$B_n^\psi(z) = (z - \beta_n^\psi) B_{n-1}^\psi(z) - \alpha_n^\psi z B_{n-2}^\psi(z), \quad n \geq 2, \quad (5.2.10)$$

com $B_{-1}^\psi(z) = 0$ e $B_0^\psi(z) = 1$. Os coeficientes α_n^ψ e β_n^ψ são facilmente calculados. De fato:

$$\beta_n^\psi = -\frac{B_n^\psi(0)}{B_{n-1}^\psi(0)} = q^{1/2}, \quad n \geq 1. \quad (5.2.11)$$

Substituindo $\beta_n^\psi = q^{1/2}$, na relação (5.2.10), encontramos:

$$\alpha_{n+1}^\psi = q^{1/2}(q^{-n} - 1), \quad n \geq 1. \quad (5.2.12)$$

Da definição (2.3.1) para os polinômios $B_n^\psi(\lambda, z)$ e de (5.2.9), temos:

$$B_n^\psi(\lambda, z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_q \left[1 + \lambda q^{n-r-1/2} \frac{(1-q^r)}{(1-q^n)} \right] q^{r/2} z^{n-r}. \quad (5.2.13)$$

Se, particularmente, fizermos λ igual a $\hat{\lambda}_n^\psi = q^{1/2}(q^{-n/2} - 1)$ e igual a $\tilde{\lambda}_n^\psi = q^{1/2}(-q^{-n/2} - 1)$ temos, respectivamente, os polinômios:

$$B_n^\psi(\hat{\lambda}_n^\psi, z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_q \left[\frac{q^{r/2} + q^{(n-r)/2}}{1 + q^{n/2}} \right] z^{n-r}, \quad (5.2.14)$$

$$B_n^\psi(\tilde{\lambda}_n^\psi, z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_q \left[\frac{q^{r/2} - q^{(n-r)/2}}{1 - q^{n/2}} \right] z^{n-r}. \quad (5.2.15)$$

A partir da simetria dos coeficientes de $B_n^\psi(\tilde{\lambda}_n^\psi, z)$ e $B_n^\psi(\tilde{\lambda}_n^\psi, z)$, vemos que os polinômios (5.2.14) e (5.2.15) satisfazem à equação (4.1.18).

5.3 Distribuições Associadas à Log-Normal Deslocada

A distribuição log-normal deslocada (5.2.1) é um exemplo de distribuição $S\bar{c}S(0, \infty)$ com $c = 1$. Também é interessante observar que esta distribuição é uma distribuição $ScS(0, \infty)$ com $c = q = e^{-2k^2}$.

A distribuição log-normal deslocada (5.2.1), enquanto distribuição $S\bar{c}S(0, \infty)$, $c = 1$, será denotada por $d\bar{\psi}_0(t)$. Portanto, a distribuição

$$d\bar{\psi}_0(t) = d\psi(t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} t^{-1} e^{-(\ln t/2k)^2} dt, \quad t \in (0, \infty) \quad (5.3.1)$$

é uma distribuição $S\bar{c}S(0, \infty)$ com $c = 1$.

Seja $d\psi_2(t)$ uma distribuição definida por

$$d\psi_2(t) = (t+1)d\bar{\psi}_0(t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} (1+t^{-1}) e^{-(\ln t/2k)^2} dt. \quad (5.3.2)$$

Como $d\bar{\psi}_0(t)$ é uma distribuição $S\bar{c}S(0, \infty)$ com $c = 1$, segue, pelo teorema 4.3, que $d\psi_2(t)$ é uma distribuição $ScS(0, \infty)$ e, de (4.1.22), tem-se:

$$B_{n-1}^{\psi_2}(z) = \frac{1}{z+1} B_n^\psi(\tilde{\lambda}_n^\psi, z), \quad n \geq 1, \quad (5.3.3)$$

onde o polinômio $B_n^\psi(\tilde{\lambda}_n^\psi, z)$ é dado por (5.2.15). Então,



$$B_{n-1}^{\psi_2}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^k (-1)^{n+k+1} q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_q \left[\frac{q^{r/2} - q^{(n-r)/2}}{1 - q^{n/2}} \right] \right) z^k. \quad (5.3.4)$$

Em (5.2.11) e (5.2.12) calculamos os coeficientes $\beta_n^{\bar{\psi}_0} = q^{1/2}$ e $\alpha_{n+1}^{\bar{\psi}_0} = q^{1/2}(q^{-n} - 1)$, $n \geq 1$, da relação de recorrência de três termos (5.2.10) para a distribuição log-normal deslocada $d\bar{\psi}_0(t)$. Consequentemente, $\gamma_n^{\bar{\psi}_0} = q^{1/2}q^{-n}$ e $\ell_r = q^{-n/2}$, $n \geq 1$. Das equações (4.2.6) obtemos os coeficientes da relação de recorrência para a distribuição $d\psi_2(t)$:

$$\beta_n^{\psi_2} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{\psi_2} = (q^{-(n+1)/2} + 1)(q^{-n/2} - 1), \quad n \geq 1. \quad (5.3.5)$$

Consideremos, agora, a distribuição $d\psi_1(t)$ definida por:

$$d\psi_1(t) = \frac{t}{t+1} d\bar{\psi}_0(t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} \frac{e^{-(\ln t/2k)^2}}{t+1} dt, \quad t \in (0, \infty). \quad (5.3.6)$$

Pelo teorema 4.3, $d\psi_1(t)$ é uma distribuição $ScS(0, \infty)$, com $c = 1$. De acordo com (4.1.25) e (5.2.15), obtemos:

$$B_n^{\psi_1}(z) = B_n^{\bar{\psi}_0}(\hat{\lambda}_n^{\bar{\psi}_0}, z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{-r(n-r)} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}_q \left[\frac{q^{r/2} - q^{(n-r)/2}}{1 - q^{n/2}} \right] z^{n-r}, \quad n \geq 1. \quad (5.3.7)$$

De (4.2.13) obtemos os coeficientes da relação de recorrência (5.2.10) para a distribuição $d\psi_1(t)$:

$$\beta_n^{\psi_1} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{\psi_1} = (q^{-n/2} - 1)(q^{-(n-1)/2} + 1), \quad n \geq 1. \quad (5.3.8)$$

Consideremos

$$d\varphi_1(t) = d\psi(t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} t^{-1} e^{-(\ln t/2k)^2} dt, \quad t \in (0, \infty),$$

a distribuição log-normal deslocada, (5.2.1), vista como uma distribuição $ScS(0, \infty)$, $c = q = e^{2k^2}$.

Seja

$$d\bar{\varphi}_0(t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{q^{1/2}}{t}\right) t^{-1} e^{-(\ln t/2k)^2} dt, \quad t \in (0, \infty), \quad (5.3.9)$$

uma distribuição tal que $d\bar{\varphi}_0(t) = \frac{t}{t+q^{1/2}} d\varphi_1(t)$. Então, de acordo com o teorema 4.3,

temos que $d\bar{\varphi}_0(t)$ é uma distribuição $ScS(0, \infty)$ com $c = q = e^{2k^2}$.

Da equação (4.2.13), temos:

$$\ell_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\varphi_1}}{\beta(\ell_{n-1} + 1)} + 1, \quad \ell_0 = 1, \quad n \geq 1,$$

onde $\alpha_{n+1}^{\varphi_1} = q^{1/2}(q^{-n} - 1)$ e $\beta_n = \beta = q^{1/2}$ são os coeficientes dados por (5.2.11) e (5.2.12). Portanto, de (4.2.14),

$$\beta_n^{\bar{\varphi}_0} = \frac{q^{1/2} \ell_{n-1} (\ell_{n-1} + 1)}{\ell_{n-1} + q^{-n}}, \quad \alpha_{n+1}^{\bar{\varphi}_0} = q^{1/2} \ell_{n-1} \ell_n - \beta_n^{\bar{\varphi}_0}, \quad n \geq 1, \quad (5.3.10)$$

onde,

$$\ell_n = \frac{\ell_{n-1} + q^{-n}}{\ell_{n-1} + 1}, \quad n \geq 1, \quad \ell_0 = 1.$$



CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

No capítulo 2, estudamos os polinômios ortogonais e os polinômios similares $B_n(z)$, $n \geq 1$. Os polinômios similares possuem propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais, como por exemplo, a relação de recorrência de três termos (2.2.9). Estudamos, também, os polinômios

$$B_n(\lambda, z) = B_n(z) - \lambda B_{n-1}(z), \quad \lambda \in R, \quad n \geq 1.$$

Esses polinômios, bem como as distribuições $ScS(c/b, b)$ e $S\bar{c}S(c/b, b)$, definidas no capítulo 4, foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Um resultado importante é o teorema q -binomial, pois foi a ferramenta utilizada no capítulo 5 para provar a ortogonalidade dos polinômios de Laurent definidos com relação à distribuição log-normal. Entretanto, não podemos deixar de destacar a função q -gama e a sua conexão com certos polinômios ortogonais, como por exemplo, os polinômios q -Laguerre. Pretendemos continuar investigando esses polinômios em trabalhos futuros.

As distribuições $ScS(c/b, b)$ e $S\bar{c}S(c/b, b)$, consideradas no capítulo 4, apresentam propriedades que nos permitem obter relações entre os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios similares associados. Com isso podemos, por exemplo, determinar os coeficientes de um polinômio associado a uma dada distribuição, se já forem conhecidos os coeficientes com relação a uma outra distribuição.

Exemplos interessantes que ilustram os resultados anteriores foram obtidos quando consideramos a distribuição log-normal deslocada.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ASKEY, R., The q-Gamma and q-Beta Functions, *Applicable Analysis*, **8**, 125-141, (1978).
- [2] ASKEY, R., Ramanujan's Extension of the Gamma e Beta Functions, *Amer. Math. Monthly*, **86**, 346-359, (1980).
- [3] BAILEY, W. N., *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Univ. Press, 1935, reprinted, Hafner Publ. Co., New York, (1972).
- [4] BOHR, H., MOLLERUP, J., *Laerebog i Matematisk Analyse*, Copenhagen, **III**, 149-164, (1922).
- [5] CHIHARA, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [6] COOPER, S. C., JONES, W. B., THRON, W. J., Orthogonal Laurent-Polynomials and Continued Fractions Associated with Log-Normal Distributions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **32**, 39-46, (1990).
- [7] GAUTSCHI, W., On Generating Orthogonal Polynomials, *SIAM Journal of Sci. Stat. Comput.*, **3**, 289-317, (1982).
- [8] GAUTSCHI, W., Orthogonal Polynomials-Constructive Theory and Applications, *Journal of Comput. and Applied Mathematics*, **12 e 13**, 61-76, (1985).



- [9] JACKSON, F. H., On q -definite Integrals, *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, **41**, 193-203, (1910).
- [10] JONES, W. B., THRON, W. J., Survey of Continued Fraction Methods of Solving Moment Problems and Related Topics. *Lecture Notes in Math.*, **932**, 4-37, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, (1982).
- [11] JONES, W.B., THRON, W.J., WAADELAND, H., A Strong Stieltjes Moment Problem, *Transaction Amer. Math. Society*, **261**, 503-528, (1980).
- [12] KRYLOV, V. I., *Approximate Calculation of Integrals*, Macmillan, New York, (1962).
- [13] MOAK, D. S., The q -Analogue of the Laguerre Polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **81**, 20-47, (1981).
- [14] PASTRO, P. I., Orthogonal Polynomials and Some q -Beta Integrals of Ramanujan, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **112**, 517-540, (1985).
- [15] SRI RANGA, A., Symmetric Orthogonal Polynomials and the Associated Orthogonal L -Polynomials, *Proc. Amer. Math. Society*. (aceito)
- [16] SRI RANGA, A., Another Quadrature Rule of Highest Algebraic Degree of Precision. *Numerische Mathematik*, **68**, 283-294, (1994).
- [17] SRI RANGA, A. , Companion Orthogonal Polynomials. (Submetido)



[18] SRI RANGA, A., McCABE, J. H., On Pairwise Related Strong Stieltjes Distributions.
(Submetido)

[19] SRI RANGA, A. , ANDRADE, E. X. L., McCABE, J. H., Some Consequences of a
Symmetry in Strong Distributions, *Journal Math. Anal. and Appl.* (aceito)

[20] SRI RANGA, A., Continued Fractions which Correspond to Two Series Expansions,
and the Strong Hamburger Moment Problem. Tese de Doutorado, Univ of St. Andrews,
St. Andrews, Escócia (1984).

[21] SZEGÖ, G., *Orthogonal Polynomials*, American Math Society, Colloq. Pubbl. ,New
York, 23, (1939).

[22] SZEGÖ, G., *Collected Papers*, Birkhäuser, Boston, (1982).



