Filipe Batista Ribeiro

Dinâmica de Rotação de Exoplanetas tipo Terrestre com Perturbação de Terceiro Corpo

Rio Claro
2012

Filipe Batista Ribeiro

Dinâmica de Rotação de Exoplanetas tipo Terrestre com Perturbação de Terceiro Corpo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Nelson Callegari Jr.
Banca: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama
Prof. Dr. Roberto E. Lagos Monaco
Prof. Dr. Julien Frouard.

Rio Claro
9 de novembro de 2012

520 Ribeiro, Filipe Batista
R484d Dinâmica de rotação de exoplanetas tipo terrestre com perturbação de terceiro corpo / Filipe Batista Ribeiro. - Rio Claro : [s.n.], 2012
60 f. : il., figs., gráfs., forms., tabs. + 1 CD-ROM

Trabalho de conclusão de curso (licenciatura e bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Nelson Callegari Júnior.

1. Astronomia. 2. Mecânica Celeste. 3. Exoplanetas. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Versão Final

Aluno
Filipe Batista Ribeiro

Orientador
Prof. Dr. Nelson Callegari Jr.

Rio Claro
9 de novembro de 2012

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que tem guiado meus passos, à minha família em quem eu encontro forças para seguir em frente sabendo que em qualquer momento estarão por perto.

Ao meu orientador e amigo Nelson pelas discussões e conselhos ao longo destes anos, ao Prof. Tadashi por coordenar o Laboratório de Astronômia Dinâmica, lugar onde tenho aprendido a ser um pesquisador.

À todos do grupo Astronômia Dinâmica que de uma forma ou de outra me auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho, não podendo deixar de citar Pedrão, Rogério e Diogo que muito me guiaram ao longo da formação "astronômica".

À Fapesp e CNPq que liberaram verbas para minhas pesquisas e me manteram nos anos da graduação e espero que me mantenham ao longo de minha carreira acadêmica.

Aos meus amigos de turma, obrigado por todos os momentos em que fomos estudiosos, cozinheiros, músicos, atletas, enfim esse caminho não seria o mesmo sem vocês.

Aos amigos da República *Toka do Shrek* e do grupo *Los Sombreros* que me acolheram e já fazem parte de minha história.

E aos muitos outros que contribuíram para que eu chegasse onde estou hoje.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso estudaremos tópicos de Mecânica Celeste visando aplicações no problema de rotação de corpos rígidos e ressonâncias "spin-órbita". Será dada ênfase na formulação do problema e em aplicações a alguns exoplanetas com parâmetros físicos (e.g. raio e massa) compatíveis com uma constituição do tipo terrestre (e.g. rochosos) e que pertencem a sistemas planetários múltiplos.

A abordagem do problema será realizada analítica e numericamente. A parte analítica consiste em: i) dedução da equação de movimento do problema de rotação de um corpo não esférico com simetria, perturbado por um corpo central pontual; ii) modelagem do mesmo problema através da inclusão de terceiro corpo no sistema estrela-planeta; iii) formulação do conceito de ressonância "spin-órbita", nas quais o período orbital do planeta é um múltiplo inteiro do seu período de rotação. Tópicos de sistemas dinâmicos (e.g. pontos de equilíbrio, caos, superfícies de seção) serão iniciados nesta etapa. Na parte numérica, serão realizadas simulações numéricas com os modelos desenvolvidos na parte analítica.

Numa primeira etapa consideraremos a órbita do planeta não perturbada por um terceiro corpo no sistema estrela-planeta. Nesse caso a excentricidade orbital e o semi-eixo maior do planeta em que se estuda a rotação são constantes. Nesta etapa a técnica de superfície de seção, amplamente usada em sistemas dinâmicos, será aplicada ao nosso problema. Em seguida, os elementos sofrerão variações devido à ação de um terceiro corpo. Assim, neste trabalho estamos desenvolvendo um modelo mais realístico e original de rotação planetária que aqueles escritos no domínio de dois corpos. Os resultados em ambos os casos serão comparados. Como no caso perturbado a técnica de superfície de seção não é mais aplicável, avaliaremos quantitativamente a evolução dos ângulos característicos de rotação (e.g. libração física), através da evolução individual de órbitas em regiões dinamicamente importantes do espaço de fase obtidos no caso não perturbado.

Palavras-chave: Rotação, Exoplanetas, Mecânica Celeste

Abstract

In this work we study some topics of Celestial Mechanics, namely the problem of rigid body rotation and "spin-orbit" resonances. Emphasis is placed on the problem formulation and applications to some exoplanets with physical parameters (e.g. mass and radius) compatible with a terrestrial type constitution (e.g. rock) belonging to multiple planetary systems.

The approach is both analytical and numerical. The analytical part consists of: i) the deduction of the equation of motion for the rotation problem of a spherical body with no symmetry, disturbed by a central body; ii) modeling the same problem by including a third-body in the planet-star system; iii) formulation of the concept of "spin-orbit" resonance in which the orbital period of the planet is an integer multiple of the rotation's period. Topics of dynamical systems (e.g. equilibrium points, chaos, surface sections, etc.) will be included at this stage. In the numerical part simulations are performed with numerical models developed in the previous analytical section.

As a first step we consider the orbit of the planet not perturbed by a third-body in the star-planet system. In this case the eccentricity and orbital semi-major axis of the planet are constants. Here the technique of surface sections, widely used in dynamical systems are applied. Next, we consider the action of a third body, developing a more realistic model for planetary rotation. The results in both cases are compared. Since the technique of disturbed surface sections is no longer applicable, we quantitatively evaluate the evolution of the characteristic angles of rotation (e.g. physical libration) by studying the evolution of individual orbits in the dynamically important regions of phase space, the latter obtained in the undisturbed case.

Keywords: Rotation, Exoplanets, Celestial Mechanics

Lista de Figuras

2.1 Rotação de um planeta com o eixo de rotação normal ao plano órbital. ψ é o ângulo entre a linha estrela-planeta, r, e o eixo principal $\mathcal{A}$ associado com o mínimo momento de inércia do planeta. O ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço. 15
2.2 Sistema de coordenadas com a origem localizada no centro de massa O de um planeta, com os eixos alinhados com os principais momentos de inércia. Um elemento de massa δm no ponto Q a uma distância R de O, e a linha $\overline{OQ}$ faz um ângulo θ com a linha $\overline{OP}$. 16
2.3 Superfície de Seção. Figura adptada de (Arfken, 2007). 18

4.1 Modelo de Rotação com dois corpos. 21
4.2 Variação de ψ com o tempo para o planeta fictício. No gráfico $\gamma \equiv \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$. 23
4.3 Variação de ψ com o tempo para o planeta fictício. No gráfico $\gamma \equiv \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$. 24
4.4 Variação de ψ com o tempo para o planeta fictício. No gráfico $\gamma \equiv \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$. 25
4.5 Variação de θ, f com o tempo para o planeta *Kepler 11b*. 26
4.6 Variação de ψ com o tempo para o planeta *Kepler 11b*. 26
4.7 Variação de θ, f com o tempo para o planeta *55 Cnc e*. 27
4.8 Variação de ψ com o tempo para o planeta *55 Cnc e*. 28
4.9 $\gamma(t)$ para *55 Cnc e* e $p = +1$ (ressonância spin-órbita 1:1). 31
4.10 $\theta(t)$ para *55 Cnc e* numa ressonância spin-órbita 1:1, com $\theta_0 = -2°$. . . . 33
4.11 *55 Cnc e* numa ressonância spin-órbita 1:1, com $\theta_0 = -2°$. 34
4.12 Superfície de seção para o planeta *55 Cnc e*. A excentricidade do planeta é 0.057. 35

5.1 Modelo de Rotação três corpos. 39
5.2 Variação de ψ com o tempo para o planeta *Kepler 11b*. 40
5.3 Variação da excentricidade com o tempo para o planeta *Kepler 11b*. . . . 40
5.5 Variação de ψ com o tempo para o planeta *55 Cnc e*. 42

A.1 Localização de um elemento de massa δm no ponto P. $\overline{OL}$ é uma linha arbitrária desde a origem O do sistema de coordenadas. $\overline{PQ}$ é a linha perpendicular desde P até Q. Um ponto arbitrário R esta ao longo da linha $\overline{OL}$. 55

A.2 Sistema de coordenadas com a origem localizada no centro de massa O de um planeta, com os eixos alinhados com os principais momentos de inércia. Um elemento de massa δm no ponto Q a uma distância R de O, e a linha $\overline{OQ}$ faz um ângulo θ com a linha $\overline{OP}$. 57
A.3 Rotação de um planeta com o eixo de rotação normal ao plano órbital. ψ é o ângulo entre a linha estrela-satélite, r, e o eixo principal $\mathcal{A}$ associado com o mínimo momento de inércia do planeta. O ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço. 60

Lista de Tabelas

1.1 Elementos Orbitais do sistema *55 Cnc*, como visto em http://exoplanet.eu. O valor de $(\mathcal{B}-\mathcal{A})/\mathcal{C}$ foi calculado por Callegari and Rodriguez (2012). 13
1.2 Elementos Orbitais do sistema *Kepler 11*, como visto em http://exoplanet.eu. O valor de $(\mathcal{B}-\mathcal{A})/\mathcal{C}$ foi calculado por Callegari and Rodriguez (2012). 14

3.1 Tabela que relaciona a massa com o raio limite para uma composição sólida (Valencia, 2011). 19

4.1 Elementos Orbitais do sistema fictício. 22

Sumário

1 Introdução **12**
1.1 Elementos Orbitais dos Exoplanetas estudados 13

2 Modelo de Rotação **15**
2.1 Desenvolvimento do Modelo de Rotação 15
2.2 Tópicos de Sistemas Dinâmicos 17
2.2.1 Superfície de Seção 17

3 Relação Massa-Raio **19**

4 Caso Dois Corpos **21**
4.1 Metodologia 21
4.2 Resultados 22
4.2.1 Fictício 22
4.2.2 Kepler 11b 25
4.2.3 55 Cnc e 25
4.3 Análise Analítica do Modelo de Rotação 27
4.3.1 Resultados 31
4.3.2 Libração Forçada 32
4.4 Superfície de Seção 34
4.4.1 55 Cnc e 34
4.4.2 Kepler 11b 35

5 Caso Três Corpos **38**
5.1 Metodologia 38
5.2 Resultados 39
5.2.1 Sistema Kepler 11 39
5.2.2 Sistema 55 Cnc 41

6 Conclusões **44**

Referências Bibliográficas **46**

APÊNDICES **47**

A Desenvolvimento detalhado do Modelo de Rotação **47**
A.1 Rotação de um corpo rígido e as equações de Euler 47
A.2 Momento Permanente de Quadrupolo 54

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos foram descobertos cerca de 850 planetas orbitando outras estrelas (http://exoplanet.eu/catalog.php). Cerca de 70 desses planetas são classificados como tipo terrestre, com possível composição sólida, pois possuem massas menores que 10 m_T (massas terrestres) (Valencia et al., 2007). Alguns desses possíveis planetas terrestres estão localizados em órbitas compactas com período orbital da ordem de 10 dias e são chamados de Super-Terras. No caso de órbitas muito compactas, as forças de maré podem ter sincronizado os movimentos de rotação e translação desses planetas, similar ao caso da Lua terrestre, e.g. (Rodríguez et al., 2012).

A rotação de um corpo não esférico (secundário) é perturbada pelo torque do corpo central (primário). As principais características de dinâmica de rotação são dadas pelo modelo de ressonância spin-órbita, o qual fornece a amplitude da libração física (i.e., ângulo sinódico dado pela diferença entre anomalia verdadeira e o ângulo de rotação) em função do tempo, e.g. (Goldreich and Peale, 1966). Classicamente o modelo é aplicado em dinâmica de rotação dos planetas terrestres, dos satélites regulares do sistema Solar, da Lua e outros satélites (Murray and Dermott, 1999). Por exemplo Wisdom et al. (1984) e Wisdom (2004) estudam, respectivamente, a rotação de Hyperion e Enceladus, satélites de Saturno.

O modelo de Goldreich and Peale (1966), além de considerar o caso planar (satélite em órbita equatorial) e obliquidade do eixo de rotação nula, supõe, num primeiro momento, que a órbita do secundário não seja perturbada por nenhum efeito externo (e.g. achatamento do corpo central, perturbação de terceiro corpo). Na seção V do artigo os autores abordam o efeito da perturbação de terceiro corpo no caso particular do estudo de rotação de Vênus perturbada pela Terra. No entanto, tal estudo não mostra simulações numéricas e os efeitos de perturbação de terceiro corpo são discutidos analiticamente. Exceto por essa referência clássica, o material na literatura sobre perturbação de terceiro corpo em problemas de rotação não é amplo.

Neste trabalho inicialmente consideraremos o caso "clássico", i.e., elementos do secundário (excentricidade orbital e o semi-eixo maior) serão constantes. Aplicaremos as metodologias do trabalho de Wisdom et al. (1984) para o caso de Super-Terras quentes, *55 Cnc e* e *Kepler 11b* estudados em Callegari and Rodriguez (2012). Super-Terras

quentes são exoplanetas com massa menor que 10 m_T (massas terrestres) e períodos orbitais da ordem de dias, por exemplo, menores que 30 dias. Tal metodologia consiste na construção de superfícies de seção de um sistema dinâmico de rotação de 1,5 graus de liberdade que representa a rotação do planeta sendo perturbada pelo torque da estrela central devido ao formato não esférico do planeta.

Uma questão chave nessa primeira etapa é realizar uma revisão bibliográfica para estudarmos a relação massa-raio dada por teorias de formação planetária, e.g. (Valencia et al., 2007). Com isso poderemos ter informação sobre a constituição física dos planetas estudados e tratarmos do caso de exoplanetas tipo terrestre, e.g. (Valencia, 2011). Isso é fundamental uma vez que o modelo pressupõe uma estrutura sólida permanente do corpo que está sendo estudada a rotação. Após o estudo do caso não perturbado consideraremos a perturbação de um segundo planeta uma vez que os planetas acima pertencem a sistemas planetários múltiplos. O companheiro que será considerado aqui será em geral um Hot-Júpiter ou Hot-Netuno (i.e. planetas gigantes com períodos orbitais da ordem de dias), de tal forma que a sua perturbação na órbita do planeta menor (terrestre) pode ser importante. Assim, os efeitos indiretos de tais perturbações na rotação da Super-Terra serão avaliados.

Os dados dos sistemas planetários estudados neste trabalho estão na seção 1.1.

1.1 Elementos Orbitais dos Exoplanetas estudados

	55 Cnc (estrela)	**55 Cnc e**	**55 Cnc b**
Massa	$0.905 \pm 0.015\, M_{Sol}$	$8.5 \pm 0.6\, M_{\text{Terra}}$	$260.6 \pm 2.2\, M_{\text{Terra}}$
Semi-Eixo Maior (UA)	-	0.0156 ± 0.00011	0.1148 ± 0.0008
Excentricidade	-	< 0.060	0.0159 ± 0.008
Período Orbital (dias)	-	$0.7365449 \pm 5 \times 10^{-6}$	14.651262 ± 0.0007
Raio (km)	-	$13\,869 \pm 643$	-
$\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$	-	2.63×10^{-2}	-

Tabela 1.1: Elementos Orbitais do sistema *55 Cnc*, como visto em http://exoplanet.eu. O valor de $(\mathcal{B}-\mathcal{A})/\mathcal{C}$ foi calculado por Callegari and Rodriguez (2012).

	Kepler 11 (estrela)	**Kepler 11 b**	**Kepler 11 c**
Massa	$0.95 \pm 0.10\, M_{Sol}$	$4.3 \pm 2.2\, M_{\text{Terra}}$	$13.4 \pm 6.4\, M_{\text{Terra}}$
Semi-Eixo Maior (UA)	-	0.091 ± 0.003	0.106 ± 0.004
Excentricidade	-	0	0
Período Orbital (dias)	-	10.30375 ± 0.00016	$13.02502 \pm 8 \times 10^{-5}$
Raio (km)	-	$12\,597 \pm 1\,215$	$20\,142 \pm 1\,916$
$\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$	-	2.18×10^{-4}	-

Tabela 1.2: Elementos Orbitais do sistema *Kepler 11*, como visto em http://exoplanet.eu. O valor de $(\mathcal{B}-\mathcal{A})/\mathcal{C}$ foi calculado por Callegari and Rodriguez (2012).

Capítulo 2

Modelo de Rotação

Neste capítulo iremos desenvolver o modelo para estudo da rotação de exoplanetas. Maiores detalhes sobre os cálculos apresentados podem ser encontrados no Apêndice A. Também apresentaremos ferramentas para a análise da dinâmica do sistema.

2.1 Desenvolvimento do Modelo de Rotação

No modelo apresentado para o estudo da rotação de exoplanetas, o planeta tem a forma de um elipsóide de inércia. Definiremos o sistema de coordenadas x, y e z de tal modo que suas direções estão ao longo dos eixos principais de inércia do planeta e a origem O seja o centro de massa, Fig. (2.1), temos também que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são os principais momentos de inércia do planeta em relação aos eixos.

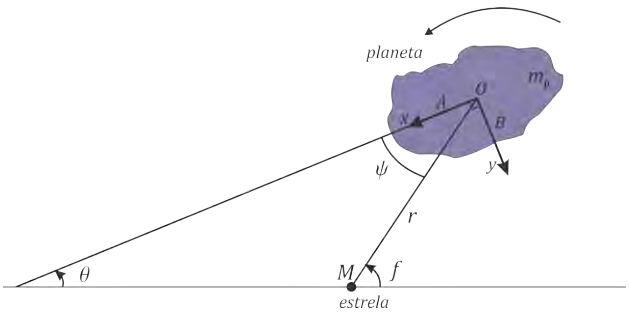


Figura 2.1: Rotação de um planeta com o eixo de rotação normal ao plano órbital. ψ é o ângulo entre a linha estrela-planeta, r, e o eixo principal $\mathcal{A}$ associado com o mínimo momento de inércia do planeta. O ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço.

O potencial por unidade de massa gerado por um corpo não esférico em um ponto P localizado a uma distância r do seu centro de massa, com $r \gg R$, onde R é o raio do

planeta, é dado por (para maiores detalhes veja Apêndice A.2):

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_p}{r} - \frac{\mathcal{G}(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}-3I)}{2r^3}, \tag{2.1}$$

onde m_p é a massa do planeta e I é o momento de inércia do corpo em relação à linha $\overline{OP}$, Fig. (2.2). Esta é a *fórmula de MacCullagh*.

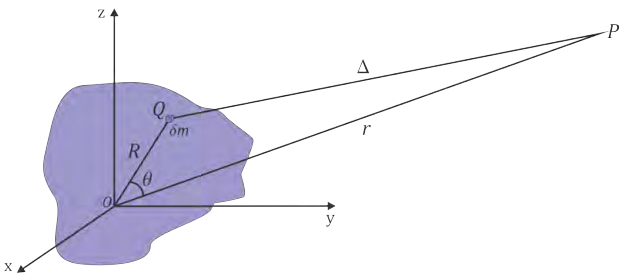


Figura 2.2: Sistema de coordenadas com a origem localizada no centro de massa O de um planeta, com os eixos alinhados com os principais momentos de inércia. Um elemento de massa δm no ponto Q a uma distância R de O, e a linha $\overline{OQ}$ faz um ângulo θ com a linha $\overline{OP}$.

A partir da Eq. (2.1) podemos obter o torque no planeta. Também pode-se calcular o torque através das Equações de Euler para o movimento do corpo rígido, elas são (detalhes no Apêndice A.1)

$$\mathcal{A}\dot{\omega}_x - (\mathcal{B}-\mathcal{C})\omega_y\omega_z = N_x, \tag{2.2a}$$
$$\mathcal{B}\dot{\omega}_y - (\mathcal{C}-\mathcal{A})\omega_z\omega_x = N_y, \tag{2.2b}$$
$$\mathcal{C}\dot{\omega}_z - (\mathcal{A}-\mathcal{B})\omega_x\omega_y = N_z. \tag{2.2c}$$

onde ω_x, ω_y e ω_z são as projeções do vetor de rotação nos eixos principais.

No nosso problema, desejamos calcular o movimento rotacional de um planeta sob o torque externo exercido pelo momento de quadrupolo devido uma estrela distante. Para isso igualamos as equações obtidas para o torque através da Eq. (2.1) e das Eqs. (2.2). Assumiremos que o eixo de rotação é normal ao plano orbital e que, ω_x e ω_y são zero e $\omega_z = \dot{\theta}$. Tomaremos agora os cossenos diretores do planeta com respeito aos eixos x e y dados por $x/r = \cos\psi$ e $y/r = \sin\psi$, respectivamente, onde $\psi = f - \theta$, Fig. (2.1).

Desta maneira chegamos a uma equação para o movimento de rotação. Detalhes dessa dedução podem ser vistos no Ap. A.

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)\frac{\mathcal{G}M}{r(t)^3}\sin 2\psi(t) \tag{2.3}$$

onde o ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço e M é a massa da estrela. Detalhes deste cálculo podem ser encontrados no Ap. A.2.

A Eq. (2.3) é uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea, não linear e acoplada, pois f varia com o tempo.Ela pode ser usada para investigar diferentes problemas, por exemplo o estudo do efeito do achatamento na evolução de um satélite artificial sobre a Terra, ou para incorporar o efeito do achatamento planetário na evolução das órbitas dos satélites naturais, como a Lua, ou os satélites Galileanos de Júpiter. Neste trabalho a principal aplicação será investigar a dinâmica rotacional de planetas tipo terrestre.

Podemos dar uma interpretação física da Eq. (2.3). Assumimos que a taxa de variação do momento angular é igual ao torque aplicado. O torque sobre o corpo surge porque o corpo é achatado e a força gravitacional varia como o inverso do quadrado da distância. Assim, a força por unidade de massa, no lado mais próximo do corpo é mais forte do que a aceleração gravitacional, e a força por unidade de massa, no lado mais distante é um pouco menor do que a aceleração gravitacional. Assim, em relação à aceleração do corpo como um todo, o lado mais distante é forçado para fora, enquanto o lado mais próximo é forçado para dentro. O efeito líquido é um torque, o qual tenta alinhar o eixo x do corpo com o corpo central.

Se θ é um pouco maior do que f, então há um torque negativo, e se θ é um pouco menor que f, então há um torque positivo, sendo que ambos tendem a alinhar o eixo x com o corpo central. O torque surge pois a força através do corpo é proporcional a r^{-2}, de modo que o torque é proporcional a r^{-3}. O torque só aparece com achatamento do corpo. Isso se reflete no fator $\mathcal{B}-\mathcal{A}$, que aparece na Eq. (2.3). O potencial só depende do momento de inércia, assim o corpo tem a mesma dinâmica se for rodado em 180°. O fator 2 no argumento do seno reflete essa simetria.

2.2 Tópicos de Sistemas Dinâmicos

Nesta seção apresentaremos as ferramentas que serão utilizadas para o estudo modelo de rotação.

2.2.1 Superfície de Seção

O lugar natural da Física para a ocorrência de caos, são as equações diferenciais não-lineares, EDNs. Temos que mapas e soluções de EDNs guardam uma estreita relação entre si. As soluções de EDNs podem ser analizadas em termos de mapas discretos. Uma maneira de se fazer isto é denominada **seção de Poincaré** de um sistema de EDN. Coloca-se um plano transversal em uma órbita (de uma solução de uma EDN), ela intercepta o plano em uma série de pontos em tempos discretos crescentes, por exemplo, na Fig. (2.3) $(x(t_1),y(t_1)) = (x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots$, que são registrados e analisados por meios gráficos ou numéricos em busca de pontos fixos, bifurcações de duplicação de período, etc. Esse método é útil quando soluções de EDNs são obtidas por meios numéricos em simulações por computador, de modo que podemos gerar seções de Poincaré em várias localizações e com orientações diferentes, sendo que análise ulterior leva

a mapas bidimensionais iterados

$$x_{n+1} = F_1(x_n,y_n),\ y_{n+1} = F_2(x_n,y_n). \tag{2.4}$$

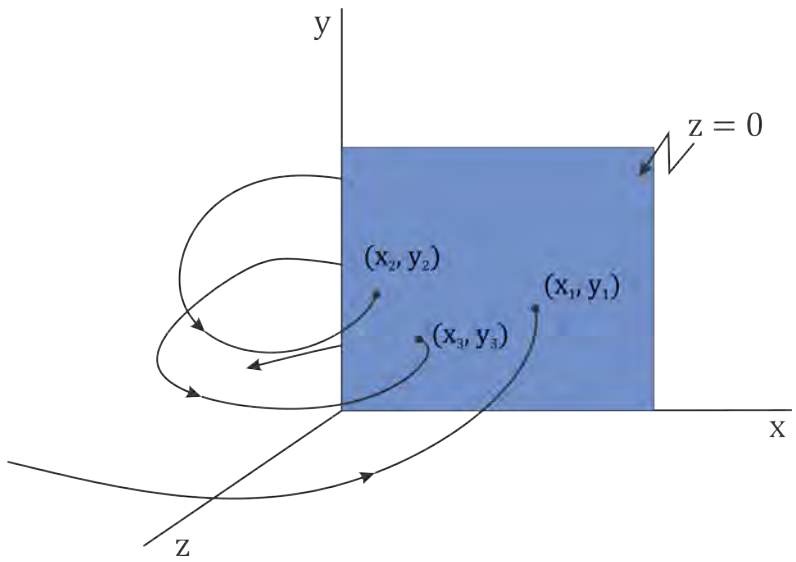


Figura 2.3: Superfície de Seção. Figura adptada de (Arfken, 2007).

s

Capítulo 3

Relação Massa-Raio

Baseado em (Valencia, 2011) e (Valencia et al., 2007).

A era das Super-Terras foi formalmente iniciada com a detecção por trânsito de exoplanetas com baixa massa, *CoRoT-7b* e *GJ 1214b*. Para maiores informações sobre exoplanetas veja *http://exoplanet.eu*.

Para um dado planeta, existe um limite de raio tal que valores maiores implicam que o planeta possa ser tipo-oceano: tem uma quantidade substancial de água e gelo e não pode ser completamente rochoso. O limite de raio para se admitir composição sólida é dado na Tab. (3.1).

Massa (M_{Terra})	Raio limite (km)
1	6 600
2.5	8 600
5	10 400
7.5	11 600
10	12 200

Tabela 3.1: Tabela que relaciona a massa com o raio limite para uma composição sólida (Valencia, 2011).

Com o intuito de caracterizar Super-Terras, o primeiro passo é inferir a sua composição.

Os dados de descoberta de *CoRoT-7b* sugeriram de que se tratava de um planeta rochoso, mas os novos valores de massa propostos alargaram as possibilidades.

A variedade de massas (1 - $10M_{\text{Terra}}$) permitem que estes planetas tenham uma composição tipo-Terra ou Super-Mercúrio.

Em contraste, o raio de *GJ 1214b* é demasiadamente grande para admitir uma composição sólida, assim é possível que *GJ 1214b* tenha um camada substancial de gás.

Estes dois planetas são os primeiros de muitos exoplanetas de baixa massa que foram descobertos por trânsito e eles exemplificam as limitações enfrentadas quando inferimos a sua composição, devido o caráter degenerado do problema, isto é, para uma mesma

relação Massa-Raio, podem ser inferidas diferentes composições, por causa das grandes barras de erro nos dados.

Desta maneira os corpos estudados, seção 1.1, estão dentro da relação massa-raio plausível (considerando o erro nas medidas) para uma composição sólida, onde o modelo de rotação é aplicável.

Capítulo 4

Caso Dois Corpos

A equação que mostra a evolução da anomalia verdadeira (f) de um corpo qualquer é dada por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sqrt{\mathcal{G}(M + m_p)a(1 - e^2)}}{r^2}, \tag{4.1}$$

onde $\mathcal{G}$ é a constante de gravitação, a é o semi-eixo maior da órbita, e é a excentricidade e f é a anomalia verdadeira. Estamos assumindo que a órbita é uma elipse fixa, que não muda ou precessiona.

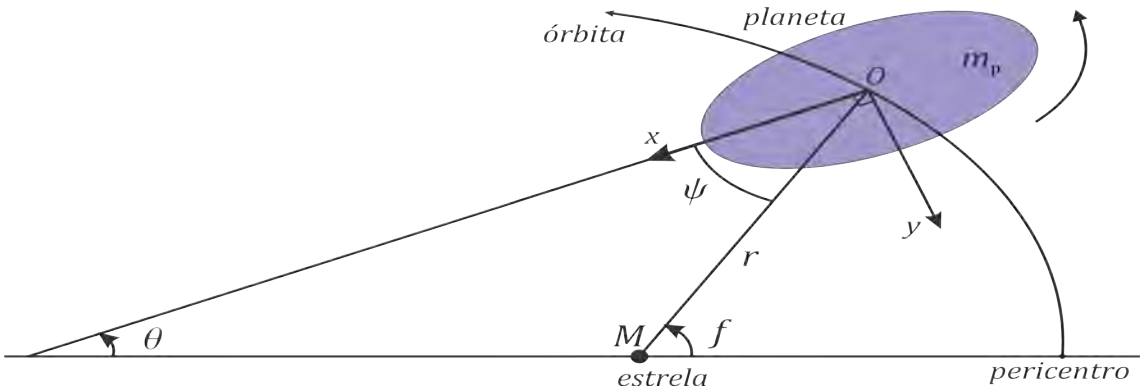


Figura 4.1: Modelo de Rotação com dois corpos.

4.1 Metodologia

A Eq. (4.1) será integrada numericamente juntamente com a equação do modelo de rotação, Eq. (2.3), Fig. (4.1).

Para integrá-las usaremos o código RA15, (Everhart, 1985), desenvolvido em linguagem Fortran 90.

Em nossas simulações as unidades adotadas para massa, distância e tempo foram:

massa solar, unidade astronômica e dia. Sempre começaremos as integrações do pericentro, isto é, o valor inicial de f é zero.

4.2 Resultados

4.2.1 Fictício

Inicialmente foram feitas algumas simulações em um sistema fictício para averiguar como o modelo se comporta. Os dados desses corpos estão dados na na Tab. (4.1), e os resultados são discutidos abaixo.

	Estrela	**Planeta**
Massa	$1.0\,M_{Sol}$	$1.0\,M_{\text{Terra}}$
Semi-Eixo Maior (UA)	-	0.05
Período Orbital (T) (dias)	-	4.08362

Tabela 4.1: Elementos Orbitais do sistema fictício.

Na Fig. (4.2) mostramos três curvas sobrepostas todas feitas com a condição inicial de $\dot{\theta} = n = 2\pi/T$, onde n é a frequência orbital (também chamada de movimento médio), e $\theta = 0$, a diferença está na excentricidade da órbita e no achatamento desse corpo. A curva vermelha tem $e = 0.002$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0$, a curva verde tem $e = 0$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.002$ e a curva azul tem tanto $e = 0.002$ como $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.002$.

A curva verde da Fig. (4.2) mostra que quando θ está próximo do ponto de equilíbrio ($\theta = 0$), o período de rotação e o período de translação são comensuráveis, ou seja, estão numa proporção de números inteiros e temos uma ressonância spin-órbita do tipo 1:1. A Lua está nesta configuração, onde uma face do corpo se mantém voltada para o corpo central devido à ressonância spin-órbita 1:1.

Podemos notar uma oscilação na curva vermelha da Fig. (4.2), essa oscilação com o período igual ao período orbital chama-se ***libração ótica***, ela nos permite ver um pouco mais que a metade da superfície deste planeta (de um referencial na estrela), ela é causada devido ao movimento não uniforme do planeta em sua órbita elíptica.

Na curva azul da Fig. (4.2) além da libração ótica outra libração acontece, essa libração é chamada de ***libração forçada*** que é causada quando combinados os efeitos da libração ótica e do achatamento do corpo, isto produz um torque periódico sobre o corpo, que pouco acelera e desacelera o mesmo em cada órbita. A libração forçada acontece se, e somente se, $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \neq 0$ e $e \neq 0$. Mas ela tem uma amplitude pequena e o mesmo período da libração ótica, por isso não é possível distingui-la no gráfico (Sussman and Wisdom, 2001).

No gráfico da Fig. (4.3) começamos com $\theta = 2°$, $\dot{\theta} = n$ e a curva vermelha tem $e = 0.006$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0$, a curva verde tem $e = 0$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.006$ e a curva azul tem tanto $e = 0.006$ como $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.006$. Verificamos neste gráfico que as amplitudes aumentaram em relação ao caso anterior, isto acontece pois a excentricidade e o achatamento são maiores. Na curva verde vemos uma oscilação periódica que foi induzida devido ao

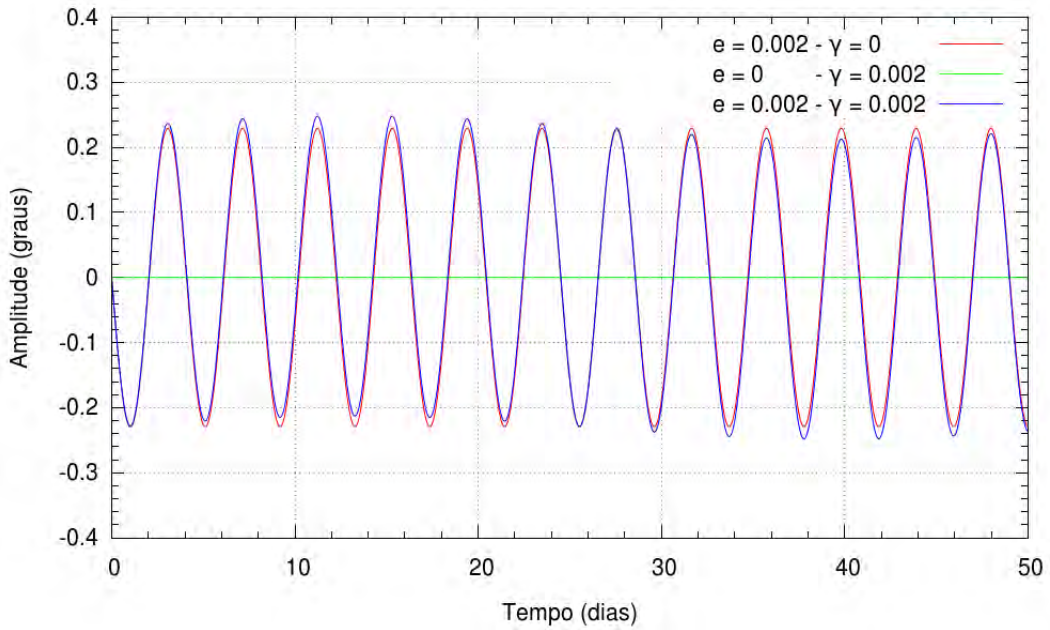


Figura 4.2: Variação de ψ com o tempo para o planeta fictício. No gráfico $\gamma \equiv \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$.

valor inicial de θ, ela é chamada de ***libração livre***, "livre" pois temos a liberdade para excitá-la, escolhendo adequadas condições iniciais de θ ou $\dot{\theta}$ e ocorre devido à forma não esférica do planeta, isto é, $\mathcal{B} - \mathcal{A} \neq 0$. No caso anterior, $e = 0$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.002$, não tínhamos a libração livre pois o valor inicial de θ era zero e este é um ponto de equilíbrio, como discutiremos na seção 4.4.

O período da libração livre é fácil de ser calculado. Podemos ver que a excentricidade da órbita não muda substancialmente esse período, então vamos considerar o caso especial de excentricidade zero, órbita circular. Neste caso temos que $r(t) = a$, uma constante, e $f(t) = nt$. Pela terceira Lei de Kepler temos que $n^2a^3 = \mathcal{G}(M + m_p)$, ou aproximadamente $n^2a^3 = \mathcal{G}M$ para $M \gg m_p$. A Eq. (2.3) se torna

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)n^2 \sin 2\psi(t). \tag{4.2}$$

Fazendo uma mudança de variável, $u = nt - \theta$, consequentemente $\ddot{u} = -\ddot{\theta}$ e substituindo na Eq. (4.2) temos

$$\ddot{u} = -\frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)n^2 \sin 2u(t). \tag{4.3}$$

Para pequenos desvios da rotação síncrona (pequeno u) temos

$$\ddot{u} = -3\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)n^2 u(t), \tag{4.4}$$

então vemos que para pequenas amplitudes a frequência livre tem a forma

$$\omega_0 = n\sqrt{3\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)}. \tag{4.5}$$

E utilizando a Eq. (4.5) para os valores da Fig. (4.3), encontramos que o período da libração livre é cerca de 30.4 dias, que coincide com o gráfico.

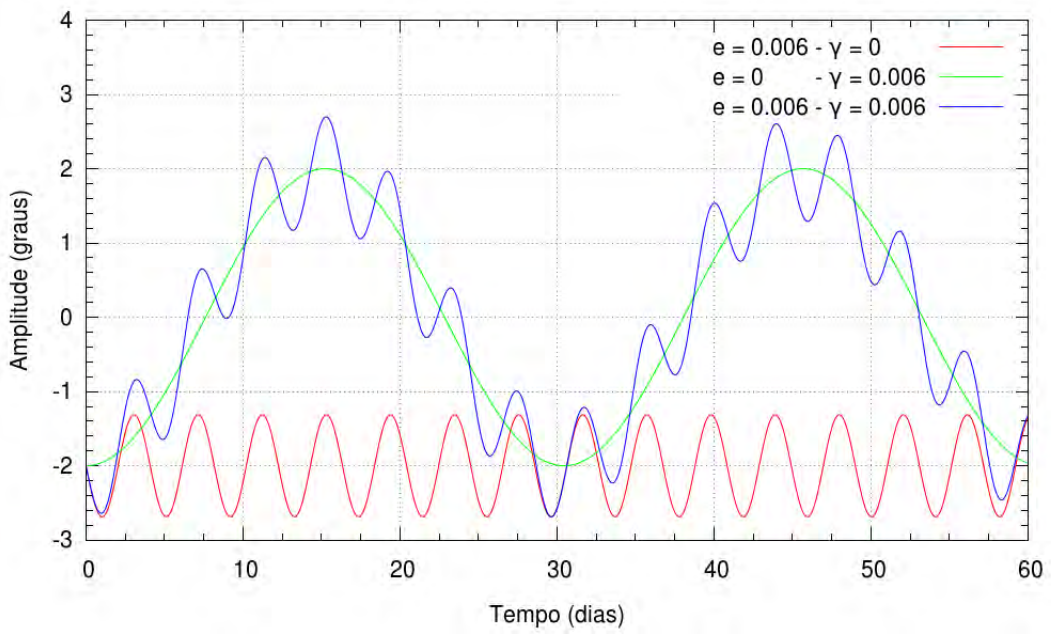


Figura 4.3: Variação de ψ com o tempo para o planeta fictício. No gráfico $\gamma \equiv \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$.

Aumentando a excentricidade e o achatamento a rotação do planeta se torna instável, mostramos isso na Fig. (4.4). Neste gráfico a curva vermelha tem $e = 0.010$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0$, a curva verde tem $e = 0$ e $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.010$ e a curva azul tem tanto $e = 0.010$ como $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0.010$, os valores iniciais são $\theta = 2°$, $\dot{\theta} = n$. Podemos notar que a amplitude de ψ aumenta, e os efeitos da libração forçada fazem com que o planeta ora oscila de frente para estrela, ora oscila com a outra face voltada para a estrela, e por vezes gira em qualquer direção.

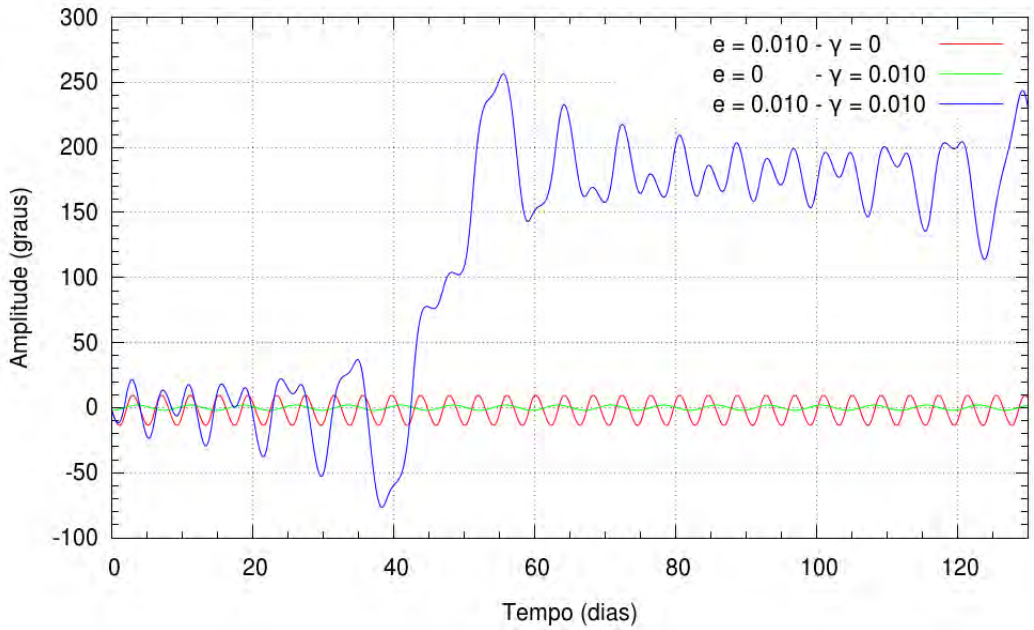


Figura 4.4: Variação de ψ com o tempo para o planeta fictício. No gráfico $\gamma \equiv \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$.

4.2.2 Kepler 11b

Usando a metodologia citada na seção (4.1), integraremos o sistema *Kepler 11* com as condições da Tab. (1.2), que se encontra na seção. 1.1.

Os resultados são mostrados na Fig. (4.5) e Fig. (4.6).

No gráfico da Fig. (4.5) mostramos a variação da anomalia verdadeira (f) e do ângulo de rotação (θ) com o tempo para o planeta *Kepler 11b*, as condições iniciais tomadas são: $\theta = 2°$e $\dot{\theta} = n$. Note que os valores de θ e f são quase coincidentes. Mas de acordo com a seção 4.2.1 quando temos $e = 0$, $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \neq 0$ e não estamos na posição de equilíbrio, isto é, $\theta \neq 0$, ocorre a libração física, ela pode ser vista na Fig. (4.6) e ter seu período calculado usando a Eq. (4.5). O período da libração física do planeta *Kepler 11b* é cerca de 402.9 dias.

Vemos também que o período da libração física aumenta conforme aumenta a esfericidade do corpo, ou seja, quando $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}$ tende a zero. Se $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 0$, temos que $\ddot{\theta} = 0$ e nenhum torque age sobre o corpo.

4.2.3 55 Cnc e

Usando a metodologia citada na seção 4.1, integraremos o sistema *55 Cnc* com as condições da Tab. (1.1), que se encontra na seção 1.1.

Os resultados são mostrados na Fig. (4.7) e Fig. (4.8).

No gráfico da Fig. (4.7) mostramos a variação da anomalia verdadeira (f) e do ângulo de rotação (θ) com o tempo para o planeta *55 Cnc e*, as condições iniciais

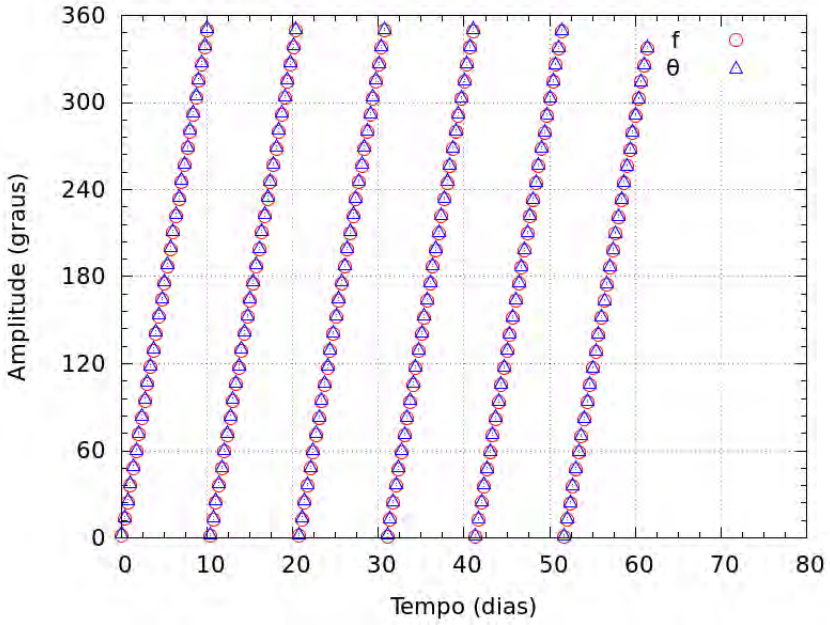


Figura 4.5: Variação de θ, f com o tempo para o planeta *Kepler 11b*.

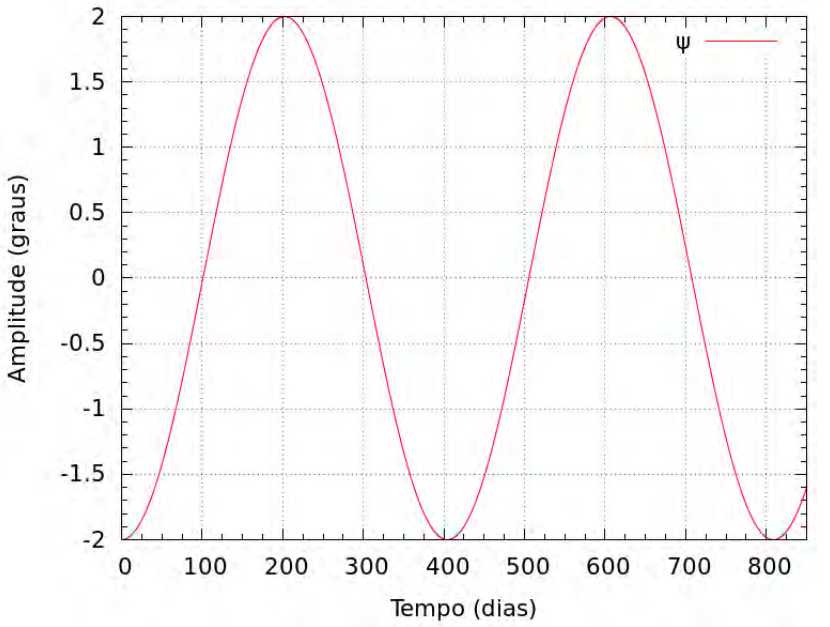


Figura 4.6: Variação de ψ com o tempo para o planeta *Kepler 11b*.

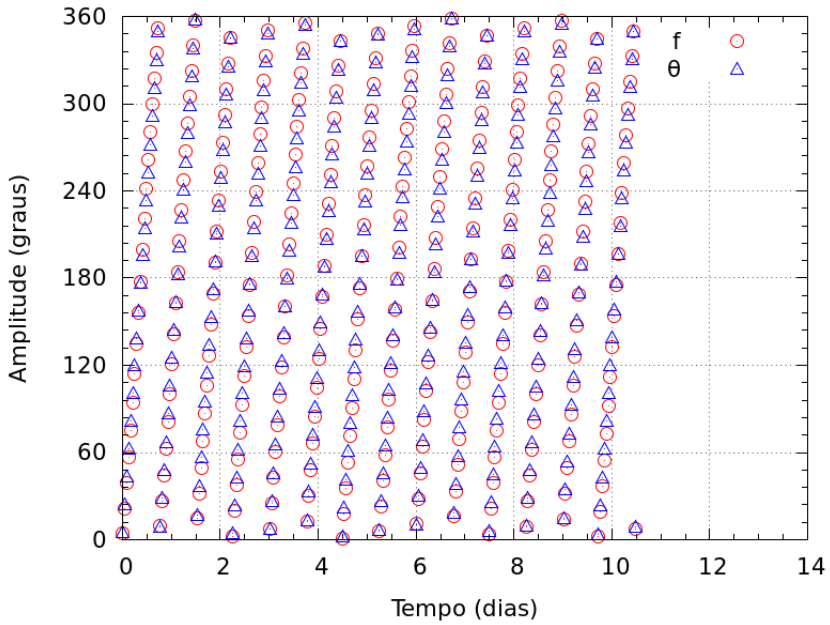


Figura 4.7: Variação de θ, f com o tempo para o planeta *55 Cnc e*.

tomadas são: $\theta = 2$ °e $\dot{\theta} = n$. Note que os valores de θ e f não coincidem sempre, isto devido ao caráter não linear da Eq. (4.1).

Na Fig. (4.8) vemos o efeito da libração física, onde podemos identificar a composição de dois períodos. Um deles é o período orbital mostrado na Tab. (1.1) e o outro é o período da libração livre que tem cerca de 2.6 dias.

4.3 Análise Analítica do Modelo de Rotação

Porque r e ψ variam com f, o qual é uma função não linear do tempo, a Eq. (2.3) é não-integrável.

Em alguns casos de interesse, nos quais $\dot{\theta}$ é comensurável com o movimento médio n, podemos obter uma equação do movimento que, após algumas aproximações, é integrável.

Introduzimos uma nova variável pois estamos interessados nos casos em que $\dot{\theta}$ é um múltiplo racional do movimento médio, ela é:

$$\gamma = \theta - pM, \tag{4.6}$$

onde p é um número racional e M é a anomalia média. Como n é constante, $\ddot{\theta} = \ddot{\gamma}$ e a equação do movimento para γ é

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = 0. \tag{4.7}$$

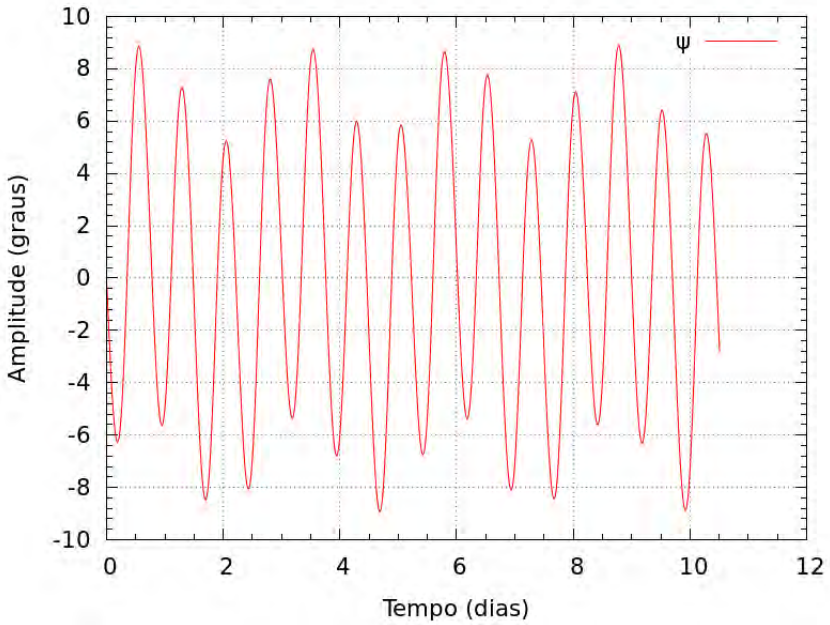


Figura 4.8: Variação de ψ com o tempo para o planeta *55 Cnc e*.

Esta equação pode ser expandida em uma série de Poisson em termos de e e M usando expansões para $(a/r)^3$, $\sin f$ e $\cos f$ dadas na seção 2.5 do livro (Murray and Dermott, 1999).

Para segunda ordem em excentricidade as expansões são

$$\sin f = \left(1 - \frac{7}{8}e^2\right)\sin M + e\sin 2M + \frac{9}{8}e^2 \sin 3M + O(e^3), \tag{4.8}$$

$$\cos f = \left(1 - \frac{9}{8}e^2\right)\cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9}{8}e^2 \cos 3M + O(e^3), \tag{4.9}$$

e

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + 3e\cos M + \frac{3}{2}e^2(1 + 3\cos 2M) + O(e^3). \tag{4.10}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) &= \sin 2\gamma(\cos 2pM \cos 2f + \sin 2pM \sin 2f) \\ &+ \cos 2\gamma(\sin 2pM \cos 2f - \cos 2pM \sin 2f). \end{aligned} \tag{4.11a}$$

Então

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(2\gamma + 2pM - 2f) = [S_1 + S_2]\sin 2\gamma + [S_3 - S_4]\cos 2\gamma, \tag{4.12}$$

onde

$$S_1 = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2pM \cos 2f, \tag{4.13a}$$

$$S_2 = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2pM \sin 2f, \tag{4.13b}$$

$$S_3 = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2pM \cos 2f, \tag{4.13c}$$

$$S_3 = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2pM \sin 2f. \tag{4.13d}$$

Para segunda ordem em excentricidade e usando as expansões dadas pela Eq. (4.8), Eq. (4.9) e Eq. (4.10), temos

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}[\cos 2(1-p)M + \cos 2(1+p)M] \\ &+ \frac{1}{4}e[7\cos(3+2p)M + 7\cos(3-2p)M \\ &\quad - \cos(1+2p)M - \cos(1-2p)M] \\ &+ \frac{1}{4}e^2[-5\cos 2(1+p)M - 5\cos 2(1-p)M] \\ &\quad +17\cos 2(2+p)M + 17\cos 2(2-p)M] + O(e^3), \end{aligned} \tag{4.14a}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}[\cos 2(1-p)M - \cos 2(1+p)M] \\ &+ \frac{1}{4}e[-7\cos(3+2p)M + 7\cos(3-2p)M \\ &\quad - \cos(1-2p)M + \cos(1+2p)M] \\ &+ \frac{1}{4}e^2[5\cos 2(1+p)M - 5\cos 2(1-p)M] \\ &\quad -17\cos 2(2+p)M + 17\cos 2(2-p)M] + O(e^3), \end{aligned} \tag{4.15a}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M - \sin 2(1-p)M] \\ &+ \frac{1}{4}e[7\sin(3+2p)M - 7\sin(3-2p)M \\ &\quad + \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\ &+ \frac{1}{4}e^2[-5\sin 2(1+p)M + 5\sin 2(1-p)M] \\ &\quad +17\sin 2(2+p)M - 17\sin 2(2-p)M] + O(e^3), \end{aligned} \tag{4.16a}$$

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{2}[\sin 2(1+p)M + \sin 2(1-p)M] \\
&+ \frac{1}{4}e[7\sin(3+2p)M - 7\sin(3-2p)M \\
&\quad - \sin(1-2p)M - \sin(1+2p)M] \\
&+ \frac{1}{4}e^2[-5\sin 2(1+p)M - 5\sin 2(1-p)M] \\
&\quad +17\sin 2(2+p)M + 17\sin 2(2-p)M] + O(e^3). \qquad (4.17a)
\end{aligned}
$$

Portanto a equação do movimento para γ, Eq. (4.7), pode ser escrita como

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)\Big([S_1+S_2]\sin 2\gamma + [S_3-S_4]\cos 2\gamma\Big) = 0. \qquad (4.18)$$

Veja que S_1 e S_2 somente contém cossenos, enquanto S_3 e S_4 só possui senos. Esta equação é exata, mas os S_i são séries infinitas em termos de e e M e portanto ela continua não integrável. Para continuar, faremos algumas aproximações. Se a velocidade de rotação do planeta esta perto de uma ressonância spin-órbita, então $\dot{\theta} \approx pn$ e γ varia pouco, isto é, $\dot{\gamma} \ll n$ e podemos simplificar a equação do movimento tomando a média de todos os termos da Eq. (4.18) sobre um período enquanto mantemos γ fixo. Então obtemos

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)\Big([\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle]\sin 2\gamma + [\langle S_3\rangle - \langle S_4\rangle]\cos 2\gamma\Big) = 0, \qquad (4.19)$$

onde

$$\langle S_i\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_i\,\mathrm{d}M,\ \ i = 1,2,3,4 \qquad (4.20)$$

S_i deve ser calculado para um valor particular de p, correspondente a ressonância spin-órbita em consideração. Somente cossenos com argumento igual a zero contribuem para a equação do movimento, devido aos argumentos do seno e cosseno serem multiplos inteiros de M. Por exemplo, no caso síncrono, $p = 1$, os termos que contribuem para a equação do movimento são os termos em cosseno nos quais o argumento contém $1-p$. Para $O(e^2)$ temos

$$\Big([\langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle]\sin 2\gamma + [\langle S_3\rangle - \langle S_4\rangle]\cos 2\gamma\Big)_{p=1} = \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right)\sin 2\gamma. \qquad (4.21)$$

Podemos fazer o mesmo procedimento para outros valores de p e percebemos que a equação do movimento média pode ser escrita como

$$\ddot{\gamma} + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)H(p,e)\sin 2\gamma = 0, \qquad (4.22)$$

onde, para $O(e)$,

$H(0,e) = 0$
$H(+1/2,e) = -1/2\, e$
$H(+1,e) = 1$
$H(+3/2,e) = 7/2\, e$

Portanto, introduzindo essas aproximações, reduzimos a equação do movimento, Eq. (2.3), para uma equação análoga ao pêndulo, a qual pode ser escrita como

$$\ddot{\gamma} + \frac{1}{2}\omega_0^2 \sin 2\gamma = 0, \tag{4.23}$$

onde ω_0 é a frequência de libração livre, dada por

$$\omega_0 = n\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)|H(p,e)|}. \tag{4.24}$$

4.3.1 Resultados

Integrando numericamente a Eq. (4.23) com $p = +1$ para o planeta *55 Cnc e* temos como resultado a Fig. (4.9).

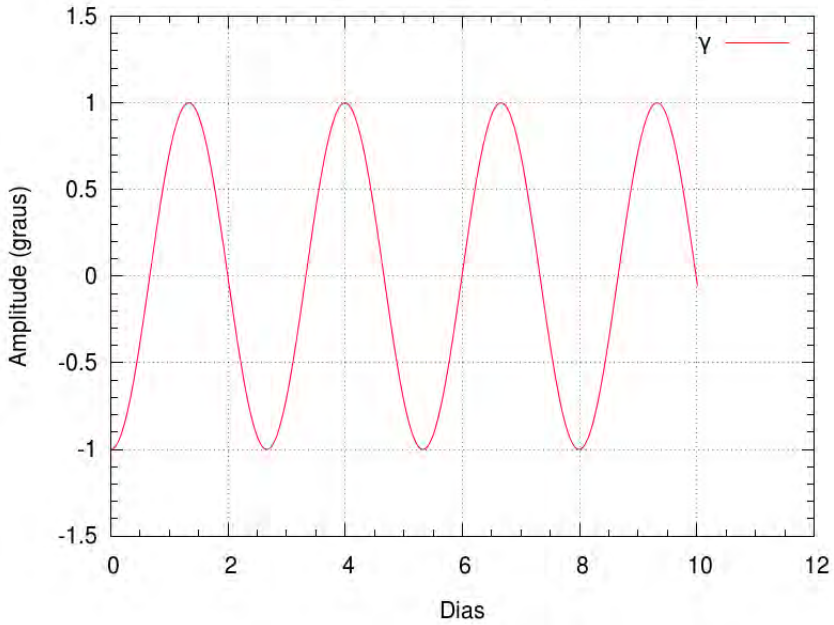


Figura 4.9: $\gamma(t)$ para *55 Cnc e* e $p = +1$ (ressonância spin-órbita 1:1).

Da Fig. (4.9) podemos perceber que temos apenas a libração livre, a libração ótica e consequentemente a libração forçada desaparecem. As equações médias desconsideram

os efeitos de curto período e assim não há contribuição dessas librações.

4.3.2 Libração Forçada

Considere a rotação de um planeta em um referencial centrado no mesmo e girando na configuração síncrona. O torque no planeta causado pela estrela é determinado pelo ângulo ψ, o qual (no caso considerado) é dado por

$$\psi = \phi - \theta \approx 2e \sin nt - \theta \tag{4.25}$$

para $O(e)$, e a Eq. (2.3) pode ser escrita como

$$\mathcal{C}\ddot{\theta} - \frac{3}{2}(\mathcal{B} - \mathcal{A})n^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin(4e \sin nt - 2\theta) = 0. \tag{4.26}$$

Para pequenos desvios da configuração de equilíbrio, podemos aproximar a Eq. (4.10) por

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \approx 1 + 3e \cos nt, \tag{4.27}$$

então a Eq. (4.26) se reduz à

$$\mathcal{C}\ddot{\theta} = \frac{3}{2}(\mathcal{B} - \mathcal{A})n^2(4e \sin nt - 2\theta) \tag{4.28}$$

ou

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + 2\omega_0^2 e \sin nt, \tag{4.29}$$

onde ω_0 é a frequência de libração livre, Eq. (4.24).

Pela teoria das Equações Diferenciais sabemos que a solução da Eq. (4.29) é a soma da solução homogênea e particular $\theta(t) = \theta_p + \theta_h$. A solução da equação homogênea será:

$$\theta_h(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \tag{4.30}$$

Aplicando as condições iniciais,

$$\begin{aligned} \theta_h(0) = \theta_0 \quad &\rightarrow \quad A = \theta_0 \\ \dot{\theta}_h(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad B = 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Portanto,

$$\theta_h(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t. \tag{4.32}$$

A solução particular será

$$\theta_p(t) = \frac{2\omega_0^2 e}{\omega_0^2 - n^2} \sin nt. \tag{4.33}$$

A solução geral portanto é

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t + \frac{2\omega_0^2 e}{\omega_0^2 - n^2} \sin nt. \tag{4.34}$$

Note que a libração forçada, Eq. (4.33), depende de e e ω_0, isto significa que somente haverá libração forçada se o planeta for achatado e se mover numa órbita excentrica. Discutimos isso na seção 4.2.1. Se n é menor que ω_0 então as librações estão em fase com a força. Entretanto, se n é maior que ω_0, então as librações estão defasadas com a força em 180°.

Para o planeta *55 Cnc e* numa ressonância spin-órbita 1:1 com a condição inicial $\theta_0 = -2°$, a Eq. (4.34) fornece a Fig. (4.10). Na Fig. (4.11) temos o resultado da equação geral do movimento, Eq. (2.3), juntamente com a equação analítica, Eq. (4.34).

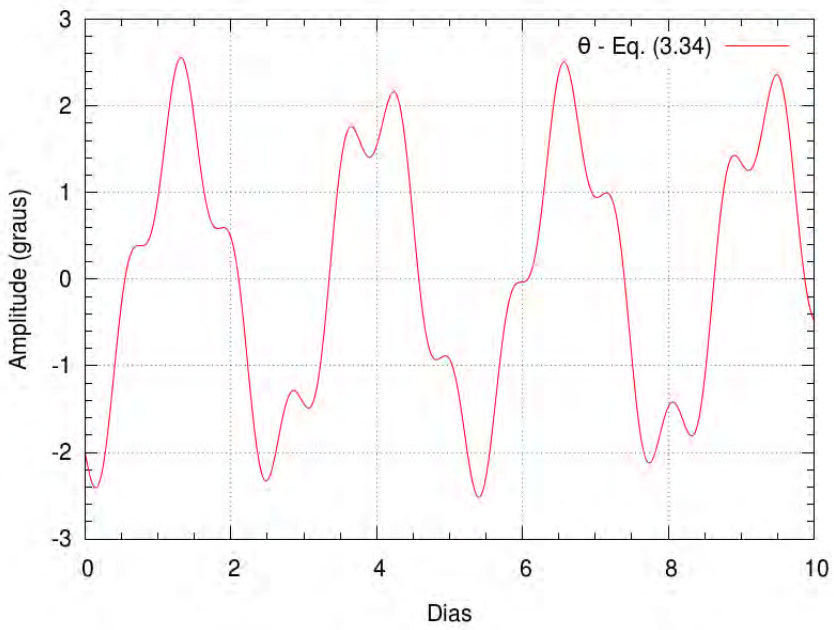


Figura 4.10: $\theta(t)$ para *55 Cnc e* numa ressonância spin-órbita 1:1, com $\theta_0 = -2°$.

Destes gráficos percebemos que a libração ótica não aparece no modelo médio, e a libração forçada tem uma pequena amplitude, podendo ser estimada através da Eq. (4.33). Para pequenos desvios das configurações de equilíbrio, isto é, no entorno das ressonâncias spin-órbita e para pequenos valores de θ_0, o modelo médio pode representar o sistema, mostrando as librações livre e forçada. Mas o modelo analitico perde a informação da libração ótica.

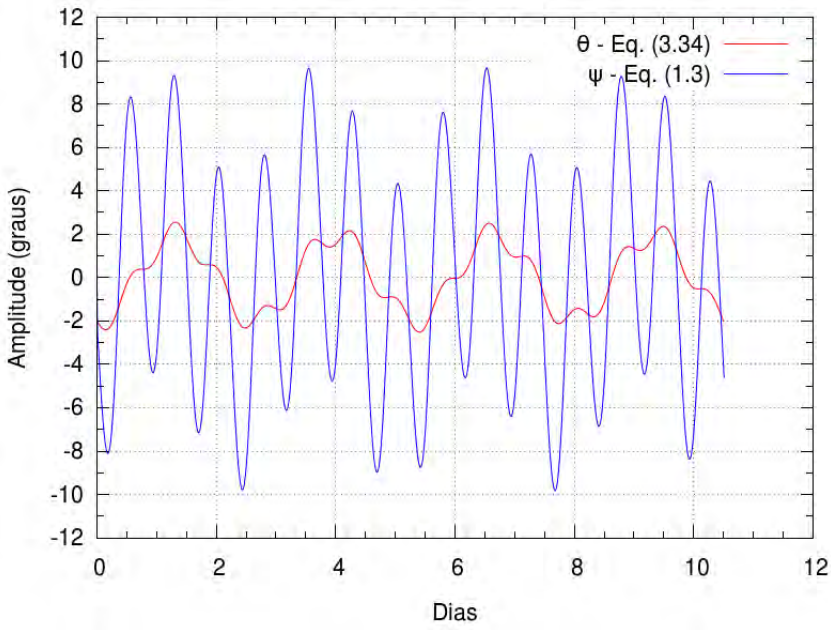


Figura 4.11: *55 Cnc e* numa ressonância spin-órbita 1:1, com $\theta_0 = -2°$.

4.4 Superfície de Seção

Nesta seção analizaremos a dinâmica de rotação através da técnica de *Superfície de Seção*, discutida na seção 2.2. A superfície de seção da Fig. (4.12) foi construída tomando os valores de θ e $\dot{\theta}$ sempre que $f = 0$.

4.4.1 55 Cnc e

Na Fig. (4.12) temos marcado em vermelho as ressonâncias spin-órbita para uma excentricidade de 0.057.

Na região 1 da Fig. (4.12): podemos notar que as órbitas são fechadas, isto indica que ocorre uma libração, o que podemos de imediato identificar como um movimento periódico.

Na região 2 da Fig. (4.12): estas órbitas correspondem a circulação, e também são periódicas, embora a imagem não o sugira imediatamente (temos de pensar a superfície de seção como tendo o lado esquerdo "colado" ao lado direito).

Na região 3 da Fig. (4.12): temos um regime de fronteira, é a *separatriz* entre a libração e a circulação.

Na região 4 da Fig. (4.12): temos que em torno do ponto de sela o movimento é caótico, são órbitas instáveis.

O próximo passo foi construir diversas superfícies de seção variando a excentricidade de *55 Cnc e* dentro do erro na medida, os resultados são mostrados nas Figs. (4.13).

Podemos notar que ao aumentarmos a excentricidade os domínios das zonas caóticas

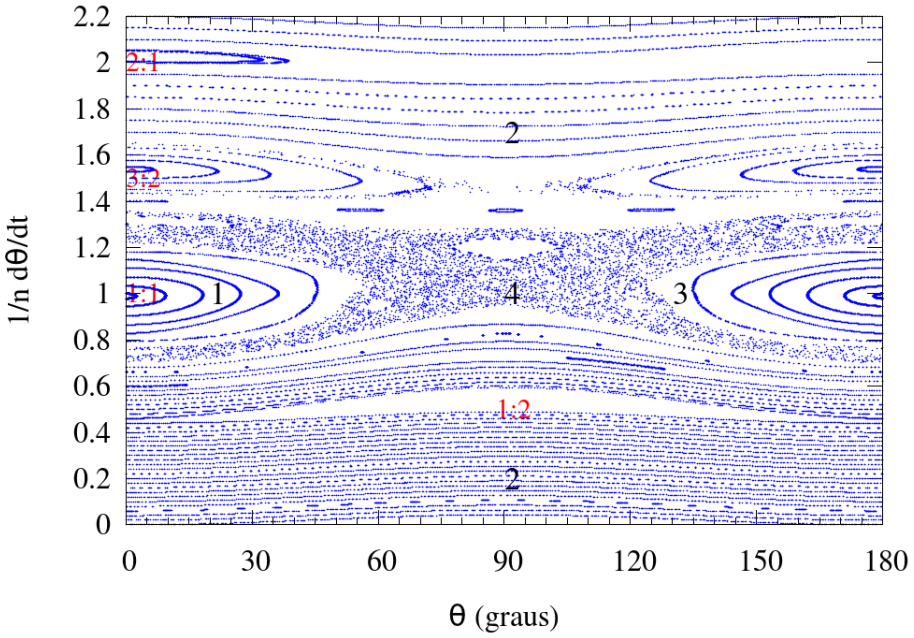


Figura 4.12: Superfície de seção para o planeta *55 Cnc e*. A excentricidade do planeta é 0.057.

aumentam e outras ressonâncias spin-órbita aparecem. A excentricidade tem papel fundamental na dinâmica do sistema.

Na Fig. (4.13a) a superfície de seção se assemelha ao pêndulo simples. Podemos notar regiões estáveis e pela superfície de seção vemos que só é possível a ressonância spin-órbita 1:1.

4.4.2 Kepler 11b

Nesta seção construímos diversas superfícies de seção variando a excentricidade de *Kepler 11b*, elas são mostradas na Fig. (4.14).

Podemos notar que ao variarmos a excentricidade a superfície de seção não muda significantemente, isto porque o achatamento de *Kepler 11b* é pequeno, $\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}} = 2.18 \times 10^{-4}$. Assim a superfície de seção, para as excentricidades consideradas, apresenta na maior parte regiões estáveis.

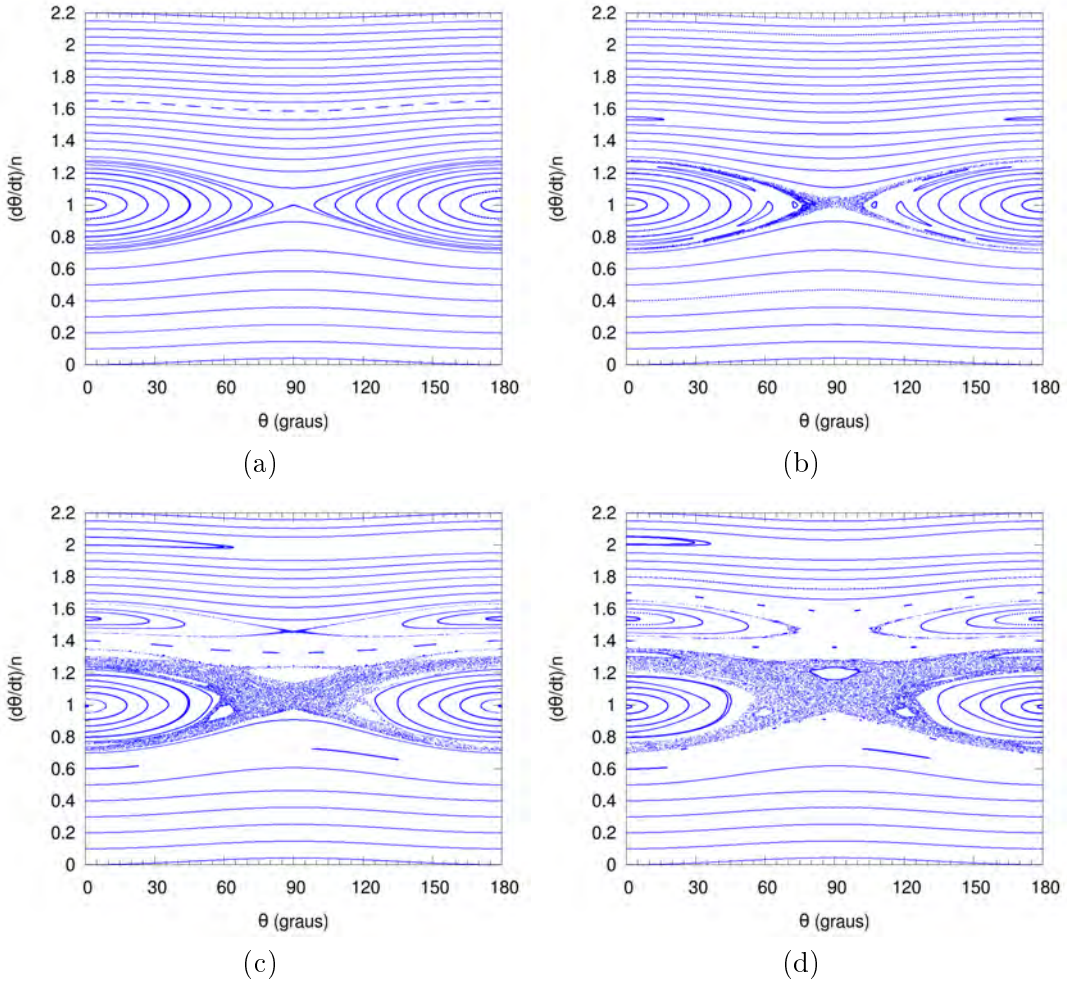


Figura 4.13: Superfícies de Seção para *55 Cnc* e com: (a) $e = 0$, (b) $e = 0.006$, (c) $e = 0.036$, (d) $e = 0.060$.

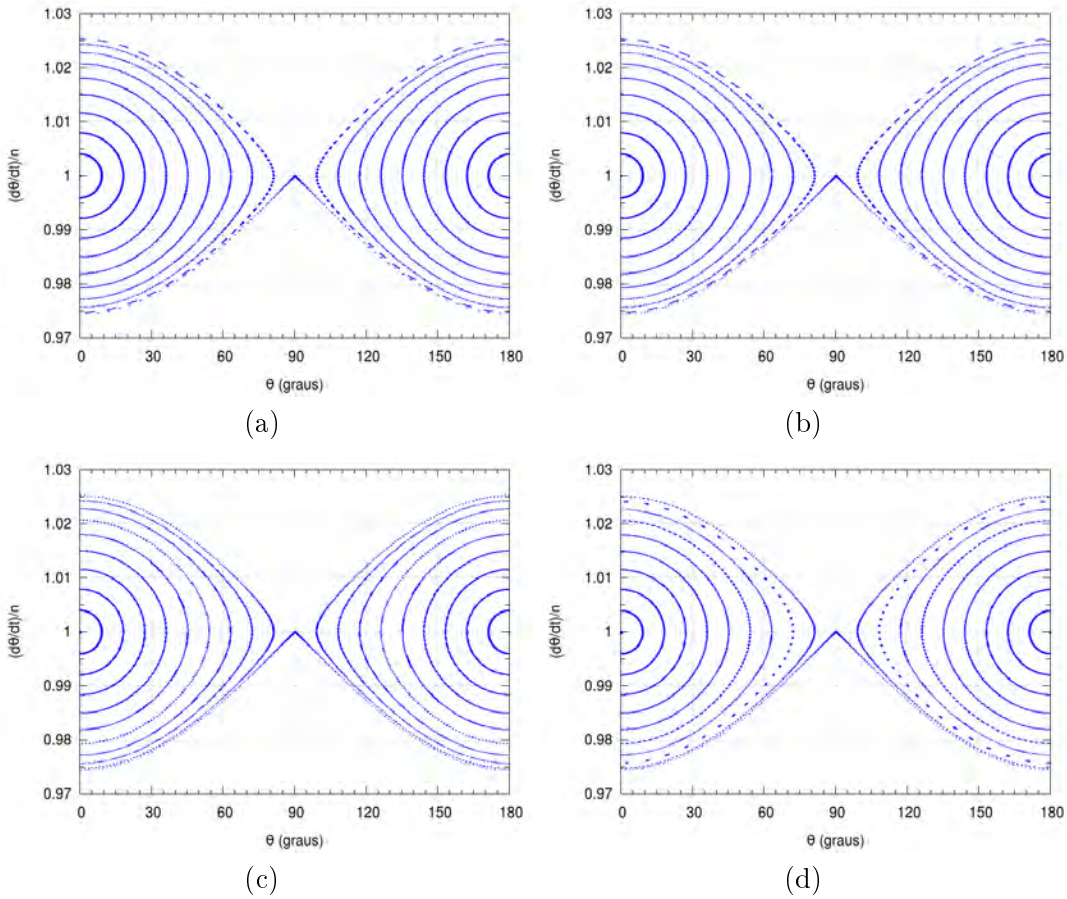


Figura 4.14: Superfícies de Seção para *Kepler 11b* com: (a) $e = 0$, (b) $e = 0.006$, (c) $e = 0.036$, (d) $e = 0.060$.

Capítulo 5

Caso Três Corpos

Neste capítulo faremos o estudo da rotação de um exoplaneta perturbado por um corpo externo. Assim temos três corpos que interagem gravitacionalmente entre si.

Seja xyz um sistema de referência inercial e três corpos de massas M, m_p e m'_p em interação gravitacional mútua regida pela Lei da Gravitação de Newton. As equações de movimento dos corpos m_p e m'_p em relação ao corpo M são:

$$\frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}(M+m_p)}{r_{12}^2}\hat{u}_{12} + \mathcal{G}m'_p\left(\frac{1}{r_{23}^2}\hat{u}_{23} - \frac{1}{r_{13}^2}\hat{u}_{13}\right), \tag{5.1a}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{13}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}(M+m'_p)}{r_{13}^2}\hat{u}_{13} - \mathcal{G}m_p\left(\frac{1}{r_{23}^2}\hat{u}_{23} + \frac{1}{r_{12}^2}\hat{u}_{12}\right), \tag{5.1b}$$

onde G é constante de gravitação, $\vec{r}_{ij}$ são as distâncias mútuas, $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, $\vec{r}_j$ são os vetores dos três corpos e $\hat{u}_{ij}$ são os versores de $\vec{r}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.

5.1 Metodologia

As equações de movimento do problema de três corpos, Eqs. (5.1), serão integradas numericamente juntamente com a equação do modelo de rotação, Eq. (2.3), e a Eq. (4.1), que mostra a evolução do planeta em sua órbita, Fig. (5.1).

Para integrá-las usaremos o código RA15, (Everhart, 1985), desenvolvido em linguagem Fortran 90.

Em nossas simulações as unidades adotadas para massa, distância e tempo foram: massa solar, unidade astronômica e dia. As condições iniciais usadas, assim como outros dados dos corpos em estudo estão na seção 1.1. Sempre começaremos as integrações do pericentro, isto é, a condição inicial de f é zero.

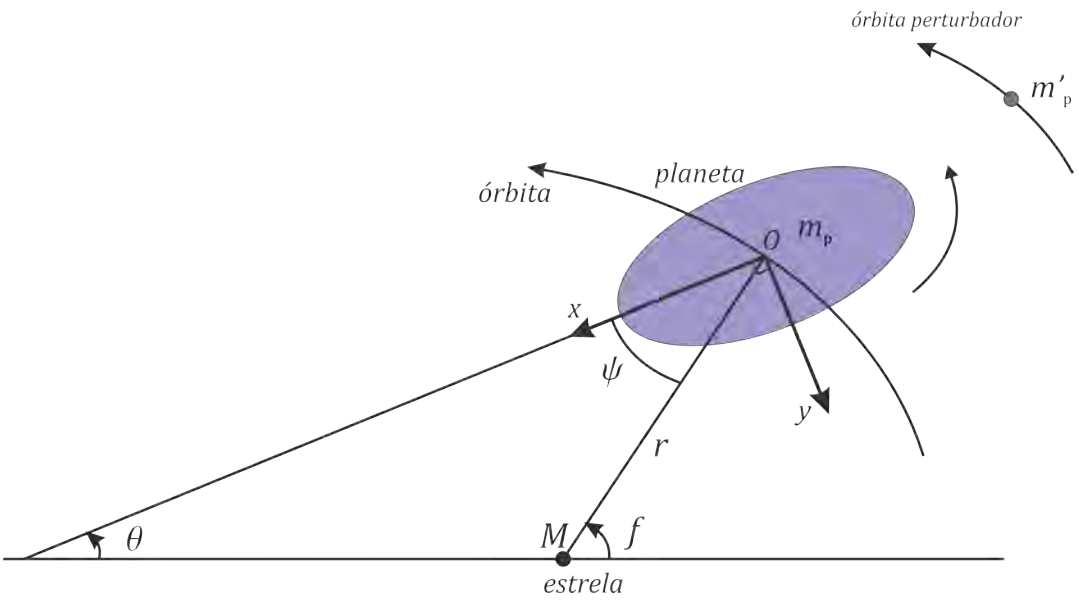


Figura 5.1: Modelo de Rotação três corpos.

5.2 Resultados

5.2.1 Sistema Kepler 11

Na Fig. (5.2) mostramos uma ressonância spin-órbita do tipo 1:1 para θ inicial igual a 2°. Temos também a libração livre e a libração ótica de ψ.

A libração física acontece devido a perturbação que *Kepler 11b* sofre por causa da presença de *Kepler 11c*. Essa perturbação faz com que a excentricidade de *Kepler 11b* varie ao longo do tempo, como mostrado na Fig. (5.3). Comparando a variação de ψ na Fig. (4.6) e na Fig. (5.2) notamos que a inclusão de *Kepler 11c* no problema muda sua dinâmica de rotação. Portanto faz-se necessário o prévio estudo da estabilidade e perturbação em um sistema múltiplo, para então investigarmos sua dinâmica de rotação.

Ressônancia 5:4

Analisando os dados da Tab. (1.2) podemos ver que *Kepler 11b* e *Kepler 11c* estão próximos à uma ressonância orbital 5:4 também chamada de ressonância de movimentos médios, significando que a cada cinco órbitas de *Kepler 11b*, *Kepler 11c* completa quatro órbitas.

O período dessa comensurabilidade pode ser obtido através de

$$4n_{11b} - 5n_{11c} = \omega_R, \tag{5.2}$$

onde ω_R é a frequência da ressonância de movimentos médios. Podemos reescrever a

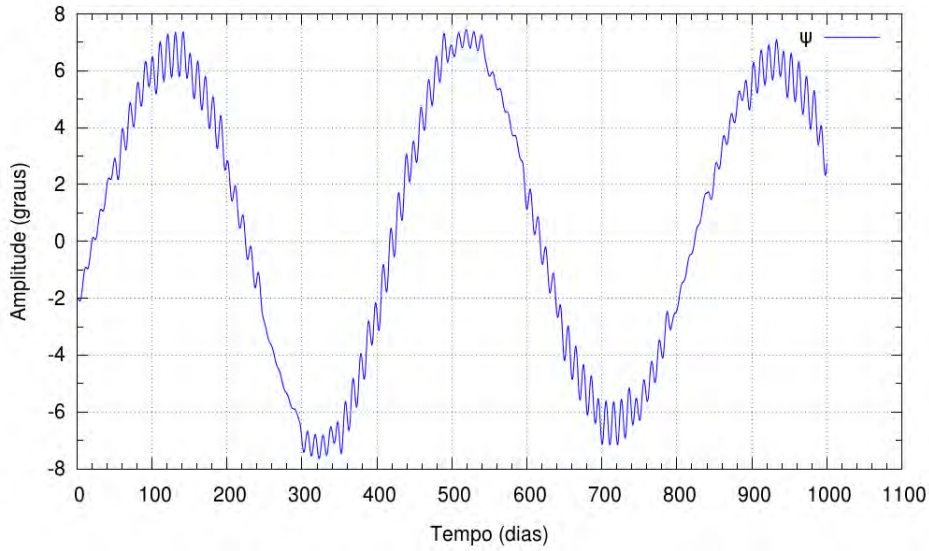


Figura 5.2: Variação de ψ com o tempo para o planeta *Kepler 11b*.

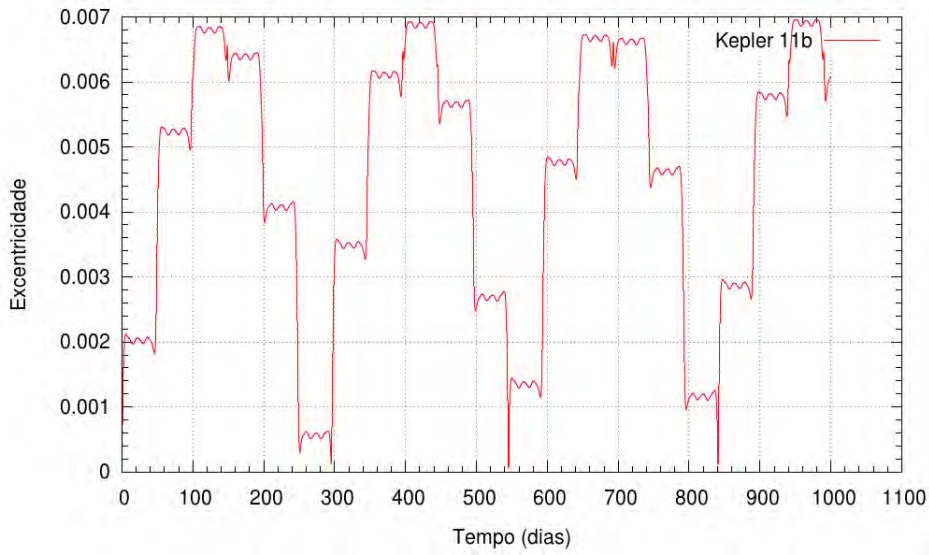


Figura 5.3: Variação da excentricidade com o tempo para o planeta *Kepler 11b*.

Eq. (5.2) como:

$$2\pi\left(\frac{4}{T_{11b}} - \frac{5}{T_{11c}}\right) = \frac{2\pi}{T_R}, \tag{5.3}$$

onde T_{11b}, T_{11c} e T_R são os períodos de *Kepler 11b*, *Kepler 11c* e o período da ressonância de movimentos médios, respectivamente. Da Eq. (5.3) tiramos que

$$\frac{1}{T_R} = \frac{4}{T_{11b}} - \frac{5}{T_{11c}}. \tag{5.4}$$

Desta maneira, substituindo os períodos dados na Tab. (1.2), encontramos que o período da ressonância orbital é cerca de 230.9 dias, que coincide com o período em que a excentricidade tem uma oscilação, Fig. (5.3).

Agora iremos investigar o efeito na rotação quando temos o período da ressonância de movimentos médios igual ao período da libração física. Para isso vamos ajustar o semi-eixo de *Kepler 11b* a fim de que esses períodos sejam iguais.

Substituindo $T_R = 402.9$ dias (período da libração livre) na Eq. (5.4) e resolvendo para T_{11b} encontramos o valor de 10.353 dias, muito próximo do valor atual.

Usando a Terceira Lei de Kepler ($n^2a^3 = \mathcal{G}M$) encontramos que o semi-eixo para este período tem valor de 0.09138 UA. Da Tab. (1.2) vemos que o erro para o semi-eixo é ± 0.003 UA, portanto é plausível que *Kepler 11b* esteja no semi-eixo calculado.

Dos gráficos da Fig. (5.4) notamos que ao aproximar o valor do semi-eixo de *Kepler 11b* ao valor calculado para ressonância de movimentos médios ocorre um fenômeno conhecido como batimento, isto porque temos dois períodos com valores próximos.

5.2.2 Sistema 55 Cnc

Na Fig. (5.5) mostramos uma ressonância spin-órbita do tipo 1:1 para θ inicial igual a 2°. Temos também a libração livre e a libração ótica de ψ.

Vemos que *55 Cnc b* perturba fracamente *55 Cnc e*, e a variação de ψ com o tempo é semelhante à obtida no caso de dois corpos.

A fraca perturbação pode ser vista nas Figs. (5.6), que mostram a pequena variação no tempo dos elementos orbitais, neste caso são mostradas a variação da excentricidade, Fig. (5.6a), e a variação do semi eixo, Fig. (5.6b).

Então para o caso do sitema *55 Cnc* é plausível tratar o sistema no âmbito do problema de dois corpos.

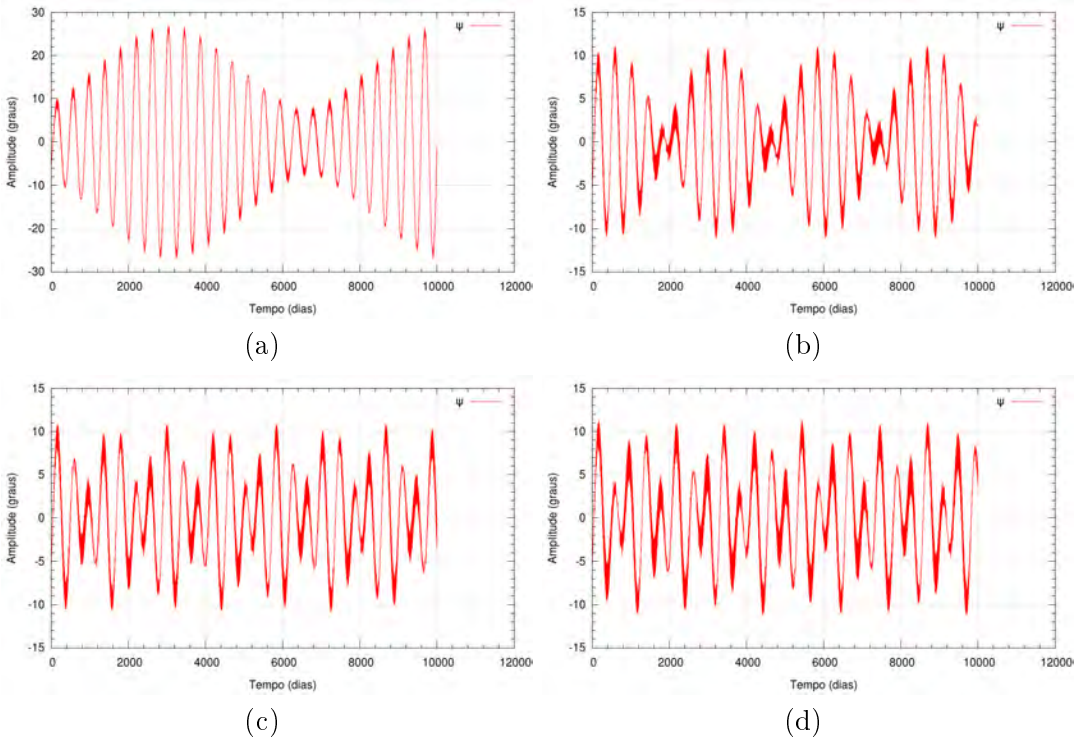


Figura 5.4: Gráficos da evolução de ψ no tempo para *Kepler 11b* com um semi-eixo: (a) $a = 0.0912$ UA, (b) $a = 0.0913$ UA, (c) $a = 0.0914$ UA, (d) $a = 0.0915$ UA.

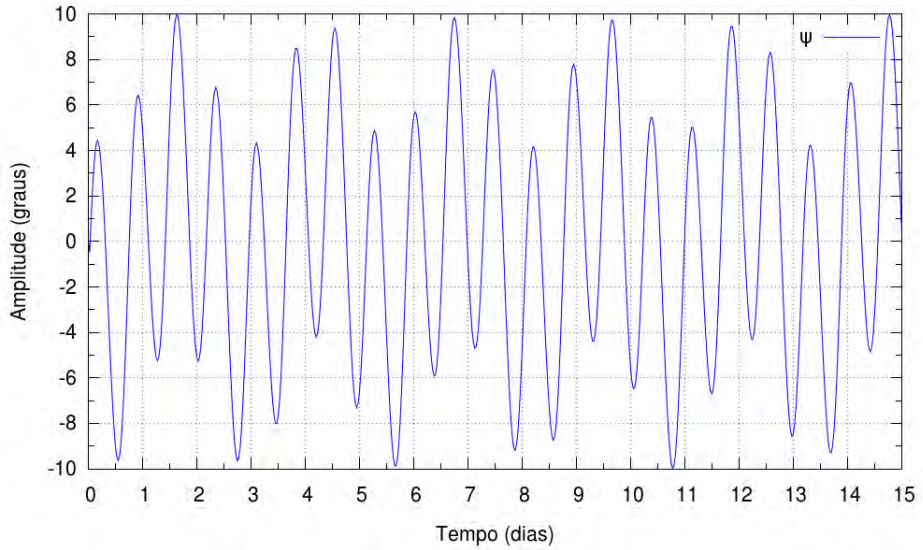
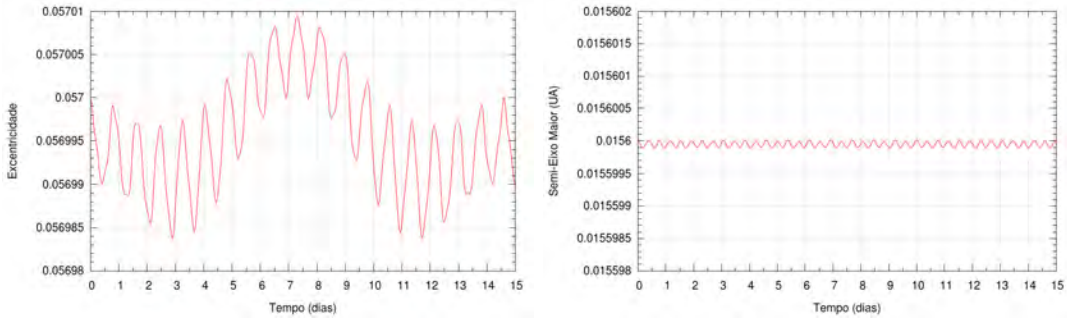


Figura 5.5: Variação de ψ com o tempo para o planeta *55 Cnc e*.



(a) (b)

Figura 5.6: Planeta *55 Cnc e*: (a) Variação de e com o tempo, (b) Variação de a com o tempo.

Capítulo 6

Conclusões

Tendo em vista os resultados apresentados, temos que os aspectos da rotação de exoplanetas podem ser estudados com o modelo proposto (modelo de rotação mais perturbação de terceiro corpo). O modelo se mostrou eficiente tendo em vista os seguintes resultados:

- Conseguimos reproduzir ressonâncias spin-órbita.
- Boa ferramenta para a análise da perturbação de terceiro corpo.
- Mostramos numericamente a libração ótica, a libração livre e a libração física.

A Fig. (5.2) mostra claramente os efeitos da perturbação na rotação de *Kepler-11b*, isto devido à proximidade de *Kepler-11c* com *Kepler-11b*. Temos que os efeitos de libração física são acentuados devido o perturbador.

Concluímos que sistemas que possuem o período da libração física próximo ao período da ressonância de movimento médios apresentam um batimento, e a amplitude de ψ associada a esse batimento aumenta devido às variações na excentricidade.

Mostramos também uma análise da dinâmica através da técnica de superfície de seção, Fig. (4.12). Nesta figura mostramos os pontos de equilíbrio (ressonância spin-órbita), pontos de sela, separatriz e regiões caóticas. Em virtude do que foi exposto concluímos que o achatamento faz com que o sistema tenha a possibilidade de apresentar caos, e a excentricidade amplifica o caos do sistema.

A superfície de seção de *55 Cnc e* sugere que ele possui uma rica dinâmica de rotação podendo apresentar caos, instabilidades e ressonâncias. O fato de haver uma região do espaço de fase onde a rotação é instável e, portanto não periódica, pode ter tido grandes implicações na história do planeta *55 Cnc e*.

Explorando o espaço de parâmetros concluímos que a excentricidade tem um caráter fundamental na dinâmica de rotação do sistema, devido à libração física.

A equação analítica, deduzida a partir de aproximações, mostra que são desconsiderados os efeitos das librações de curto período e a libração livre (longo período) fica mais evidente. A libração forçada, obtida de forma analítica, tem uma pequena ampli-

tude e período igual ao período orbital, isto significa que não podemos distingui-la nas equação gerais do movimento de rotação.

Referências Bibliográficas

Arfken, G. B. (2007). *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física.* Campus.

Callegari, N. J. and Rodriguez, A. (2012). Dynamics of equilibrium rotation of Super-Earths. *Submetido Celestial Mechanics.*

Everhart, E. (1985). An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. *IAU Coloquium*, 83:185–200.

Goldreich, P. and Peale, S. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. *The Astronomical Journal*, 71:425.

Murray, C. and Dermott, S. F. (1999). *Solar System Dynamics.* Cambridge University Press.

Rodríguez, A., Callegari Jr, N., Michtchenko, T., and Hussmann, H. (2012). Spin-orbit coupling for tidally evolving super-earths. *arXiv preprint arXiv:1209.1580.*

Sussman, G. and Wisdom, J. (2001). *Structure and interpretation of classical mechanics.* MIT Press.

Symon, K. R. (1982). *Mecânica.* Campus.

Valencia, D. (2011). Characterising Super-Earths. *EPJ Web of Conferences*, 11(03001).

Valencia, D., Sasselov, D. D., and O'Connell, R. J. (2007). Detailed Models of Super-Earths: How Well Can We Infer Bulk Properties? *The Astrophysical Journal*, 665:1413–1420.

Wisdom, J. (2004). Spin-orbit secondary resonance dynamics of enceladus. *The Astronomical Journal*, 128(1):484.

Wisdom, J., Peale, S., and Mignard, F. (1984). The chaotic rotation of hyperion. *Icarus*, 58(2):137–152.

Apêndice A

Desenvolvimento detalhado do Modelo de Rotação

A.1 Rotação de um corpo rígido e as equações de Euler

A dedução a seguir é baseada em (Symon, 1982).

As componentes u_x, u_y e u_z de um vetor $\vec{u}$ podem ser escritas em termos de produtos escalares entre $\vec{u}$ e os versores da base $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, isto é,

$$u_x = \hat{x} \cdot \vec{u}, \tag{A.1a}$$

$$u_y = \hat{y} \cdot \vec{u}, \tag{A.1b}$$

$$u_z = \hat{z} \cdot \vec{u}. \tag{A.1c}$$

Como $\mathbf{u} = \hat{x}u_x + \hat{y}u_y + \hat{z}u_z$, podemos escrever o vetor $\mathbf{u}$ assim:

$$\mathbf{u} = (\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}) \cdot \vec{u} \tag{A.2}$$

e definir o produto diádico entre dois vetores quaisquer $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como a justaposição $\vec{A}\vec{B}$, com a ressalva de que deverá ser tomado o produto escalar com um terceiro vetor para que essa quantidade faça sentido. Dessa forma definimos a díade identidade como

$$\overleftrightarrow{i} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \tag{A.3}$$

e, portanto,

$$\mathbf{u} = \overleftrightarrow{i} \cdot \vec{u}. \tag{A.4}$$

Uma díade pode ser pensada como outra maneira de representar um tensor.

Para a rotação de um corpo rígido, o torque $\vec{N}$ é igual à derivada temporal do momentum angular $\vec{L}$, isto é,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}. \tag{A.5}$$

Assim para N partículas pontuais, temos

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k), \tag{A.6}$$

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular e a velocidade da k-énesima partícula é dada por

$$\dot{\vec{r}}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k. \tag{A.7}$$

A Eq. (A.6) pode ser escrita como

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \cdot \vec{r}_k \vec{\omega} - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \vec{r}_k \cdot \vec{\omega}, \tag{A.8}$$

isto é,

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \cdot \vec{r}_k \overleftrightarrow{i} \cdot \vec{\omega} - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \vec{r}_k \cdot \vec{\omega}, \tag{A.9}$$

ou seja,

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k \overleftrightarrow{i} - \vec{r}_k \vec{r}_k \right) \cdot \vec{\omega}. \tag{A.10}$$

ou ainda,

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(r_k^2 \overleftrightarrow{i} - \vec{r}_k \vec{r}_k \right) \cdot \vec{\omega}. \tag{A.11}$$

Na Eq. (A.11) reconhecemos o tensor de inércia dado por

$$\overleftrightarrow{I} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(r_k^2 \overleftrightarrow{i} - \vec{r}_k \vec{r}_k \right), \tag{A.12}$$

assim podemos escrever a Eq. (A.11) como

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}. \tag{A.13}$$

No caso de um corpo rígido composto de um contínuo de matéria, com densidade

de massa ρ, podemos reescrever a Eq. (A.12) como

$$\overleftrightarrow{I} = \int d^3r\rho\left(r^2\overleftrightarrow{i} - \vec{r}\,\vec{r}\right), \tag{A.14}$$

a integral é feita sobre todos os pontos onde ρ é diferente de zero.

Temos que $\overleftrightarrow{I}$, na Eq. (A.14), varia no tempo pois $\vec{r}_k$ varia no tempo. No entanto, em um sistema de coordenadas que gira junto com o corpo, em torno do eixo instantâneo $\vec{\omega}$, $\overleftrightarrow{I}$ é constante. Mudaremos então o sistema de coordenadas para S^*, que gira com o corpo rígido. Dessa forma, temos

$$\frac{d^*\vec{L}}{dt} = \vec{N} - \vec{\omega} \times \vec{L}. \tag{A.15}$$

Substituindo a Eq. (A.13) na Eq. (A.15), temos

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d^*\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} - \vec{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right), \tag{A.16}$$

onde usei o fato de que $\overleftrightarrow{I}$ é constante no sistema de coordenadas S^*. Também sabemos que,

$$\frac{d^*\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{A.17}$$

então a Eq. (A.16) fica

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} - \vec{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right). \tag{A.18}$$

É interessante notar que o tensor de inércia é simétrico. Mostraremos isso escrevendo o tensor de inércia na forma matricial. Da Eq. (A.14), temos

$$\overleftrightarrow{I} = \int d^3r\rho\Big[r^2(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}) - (\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z)(\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z)\Big], \tag{A.19}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{I} &= \int d^3r\rho\Big[\hat{x}\hat{x}(y^2+z^2) + \hat{y}\hat{y}(x^2+z^2) + \hat{z}\hat{z}(x^2+y^2)\Big] \\ &- \int d^3r\rho(\hat{x}\hat{y}\,xy + \hat{x}\hat{z}\,xz + \hat{y}\hat{x}\,yx + \hat{y}\hat{z}\,yz + \hat{z}\hat{x}\,zx + \hat{z}\hat{y}\,zy).\end{aligned} \tag{A.20}$$

Podemos agora montar uma matriz assim:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{x} & \hat{x}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{y} & \hat{x}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{z} \\ \hat{y}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{x} & \hat{y}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{y} & \hat{y}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{z} \\ \hat{z}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{x} & \hat{z}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{y} & \hat{z}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{z} \end{bmatrix},$$

que, usando a Eq. (A.20) resulta em

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int d^3r\rho(y^2+z^2) & -\int d^3r\rho\, xy & -\int d^3r\rho\, xz \\ -\int d^3r\rho\, xy & \int d^3r\rho(x^2+z^2) & -\int d^3r\rho\, yz \\ -\int d^3r\rho\, xz & -\int d^3r\rho\, yz & \int d^3r\rho(x^2+y^2) \end{bmatrix},$$

Da Eq. (A.1), temos que

$$I_{xy} = I_{yx}, \tag{A.21a}$$

$$I_{xz} = I_{zx}, \tag{A.21b}$$

$$I_{yz} = I_{zy}, \tag{A.21c}$$

mostrando que o tensor de inércia é simétrico e porque é simétrico existe um sistema de coordenadas que diagonaliza-o. Assim podemos escrevê-lo

$$\overleftrightarrow{I} = \hat{e}_1\hat{e}_1 I_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2 I_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3 I_3, \tag{A.22}$$

onde os versores $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$ são eixos principais do corpo rígido, ou auto-vetores de $\overleftrightarrow{I}$, são escolhidos ortogonais, mesmo quando há degenerescência, isto é, quando pelo menos dois dos auto-valores de I_1, I_2 e I_3 são iguais. Note que os eixos principais do corpo rígido são fixados a ele e, portanto, giram juntamente com o corpo rígido.

Substituindo a Eq. (A.22) na Eq. (A.18), chegamos à

$$(\hat{e}_1\hat{e}_1 I_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2 I_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3 I_3)\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} - \vec{\omega}\times\Big[(\hat{e}_1\hat{e}_1 I_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2 I_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3 I_3)\cdot\vec{\omega}\Big], \tag{A.23}$$

isto é,

$$\hat{e}_1 I_1\frac{d\omega_1}{dt} + \hat{e}_2 I_2\frac{d\omega_2}{dt} + \hat{e}_3 I_3\frac{d\omega_3}{dt} = \vec{N} - \vec{\omega}\times(\hat{e}_1 I_1\omega_1 + \hat{e}_2 I_2\omega_2 + \hat{e}_3 I_3\omega_3), \tag{A.24}$$

onde escrevemos $\vec{\omega}$ em componentes ao longo dos eixos principais, isto é,

$$\vec{\omega} = \hat{e}_1\omega_1 + \hat{e}_2\omega_2 + \hat{e}_3\omega_3 \tag{A.25}$$

e, como os versores do longo dos eixos principais são escolhidos ortogonais entre si, também são numerados convencionalmente de modo a termos

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \tag{A.26}$$

e suas permutações cíclicas. Usando a Eq. (A.25), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 + \hat{e}_2 I_2 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_3) &= (\hat{e}_1 \omega_1 + \hat{e}_2 \omega_2 + \hat{e}_3 \omega_3) \\ &\times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 + \hat{e}_2 I_2 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_3), \end{aligned} \tag{A.27}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 + \hat{e}_2 I_2 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_3) &= \hat{e}_1 \times (\hat{e}_2 I_2 \omega_1 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_1 \omega_3) \\ &+ \hat{e}_2 \times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_2 \omega_3) \\ &+ \hat{e}_3 \times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 \omega_3 + \hat{e}_2 I_2 \omega_2 \omega_3), \end{aligned} \tag{A.28}$$

ou seja, com a Eq. (A.26) e suas permutações cíclicas, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 + \hat{e}_2 I_2 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_3) &= \hat{e}_3 I_2 \omega_1 \omega_2 - \hat{e}_2 I_3 \omega_1 \omega_3 \\ &- \hat{e}_3 I_1 \omega_1 \omega_2 + \hat{e}_1 I_3 \omega_2 \omega_3 \\ &+ \hat{e}_2 I_1 \omega_1 \omega_3 - \hat{e}_1 I_2 \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \tag{A.29}$$

assim temos,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\hat{e}_1 I_1 \omega_1 + \hat{e}_2 I_2 \omega_2 + \hat{e}_3 I_3 \omega_3) &= \hat{e}_1 (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ &+ \hat{e}_2 (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ &+ \hat{e}_3 (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \tag{A.30}$$

Substituindo a Eq. (A.30) na Eq. (A.24) e tomando suas componentes ao longo dos eixos principais do corpo rígido, obtemos

$$N_1 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3, \tag{A.31a}$$

$$N_2 = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3, \tag{A.31b}$$

$$N_3 = I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2. \tag{A.31c}$$

As Eqs. (A.31) são conhecidas como as *Equações de Euler do Movimento de um corpo rígido*. Se um ponto permanece fixo durante o movimento, então a origem dos eixos principais é escolhida como aquele ponto. Quando não há um ponto fixo, o centro de massa do corpo rígido é escolhido como a origem dos eixos principais. Os momentos de inércia e os torques são todos calculados com relação à origem dos eixos principais.

Na ausência de torques externos, a Eq. (A.18) mostra que

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\vec{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right). \tag{A.32}$$

Assim para que possamos ter um movimento com $\vec{\omega}$ constante, é necessário que

$$\vec{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{0}, \tag{A.33}$$

isto é, que $\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$ seja paralelo a $\vec{\omega}$:

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}, \tag{A.34}$$

para λ uma constante real. Note que a Eq. (A.34) é uma equação de auto-valores e auto-vetores, mostrando que λ deve ser um dos autovalores de $\overleftrightarrow{I}$ e $\vec{\omega}$, um de seus auto-vetores. Logo, $\vec{\omega}$ deve estar ao longo de um dos eixos principais do corpo rígido, para que possa girar com $\vec{\omega}$ constante.

A energia cinética do corpo rígido é dada por

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \dot{\vec{r}}_k^2. \tag{A.35}$$

Substituindo a Eq. (A.7) na Eq. (A.35), temos

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^2. \tag{A.36}$$

isto é

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k). \tag{A.37}$$

ou seja,

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \vec{\omega} \cdot \left[\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)\right], \tag{A.38}$$

usando a Eq. (A.6), temos ainda

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \right] \right\} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}. \tag{A.39}$$

Substituindo a Eq. (A.13) na Eq. (A.39), obtemos

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}. \tag{A.40}$$

No sistema de coordenadas S^*, $\overleftrightarrow{I}$ é constante e, portanto,

$$\frac{d^*}{dt}\left(\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right) = \left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right). \tag{A.41}$$

Como $\overleftrightarrow{I}$ é simétrico, decorre que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{d^*\omega_m}{dt} I_{m,n}\omega_n = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{d^*\omega_m}{dt} I_{n,m}\omega_n \\ &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \omega_n I_{n,m} \frac{d^*\omega_m}{dt}, \end{aligned} \tag{A.42}$$

isto é,

$$\left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right). \tag{A.43}$$

Substituindo então a Eq. (A.43) na Eq. (A.41), obtemos

$$\left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = 2\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \left(\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\right). \tag{A.44}$$

Derivando no tempo a Eq. (A.40) e substituindo a Eq. (A.44), temos

$$\frac{d^*T}{dt} = \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d^*\vec{\omega}}{dt}. \tag{A.45}$$

Usando a Eq. (A.17) e sabendo

$$\frac{d^*T}{dt} = \frac{dT}{dt}, \tag{A.46}$$

pois a energia cinética é um escalar.

Assim a Eq. (A.45) pode ser reescrita como

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \tag{A.47}$$

substituindo a Eq. (A.18) na Eq. (A.47), obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} - \vec{\omega} \cdot \left[\vec{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right)\right], \tag{A.48}$$

como

$$\vec{\omega} \cdot \left[\vec{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right)\right] = 0, \tag{A.49}$$

chegamos à

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N}. \tag{A.50}$$

A.2 Momento Permanente de Quadrupolo

Para calcular o campo gravitacional de um planeta permanentemente deformado a qualquer distância do centro de massa, é necessário uma descrição da distribuição de massa do interior do planeta.

Para grandes distâncias, o campo é bem representado por uma massa pontual. Para menores distâncias, mas ainda grandes, a informação da distribuição de massa, dadas pelos principais de momento de inércia é sufuciente.

A dedução que se segue é baseada em (Murray and Dermott, 1999).

Considerando um elemento de massa no centro P interno ao corpo e seja o vetor posição deste elemento de massa com respeito a uma origem O, $\vec{p} = (x,y,z)$, Fig. (A.1). Nós definimos os seguintes momentos de inércia, com respeito aos eixos de coordenadas:

$$\mathcal{A} = \sum \delta m (y^2 + z^2), \tag{A.51a}$$

$$\mathcal{B} = \sum \delta m (z^2 + x^2), \tag{A.51b}$$

$$\mathcal{C} = \sum \delta m (x^2 + y^2) \tag{A.51c}$$

e os seguintes produtos de inércia

$$\mathcal{D} = \sum \delta m \, yz, \tag{A.52a}$$

$$\mathcal{E} = \sum \delta m \, zx, \tag{A.52b}$$

$$\mathcal{F} = \sum \delta m \, xy. \tag{A.52c}$$

O momento de inércia I_L sobre a linha $\overline{OL}$ pode ser expresso em termos de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ e os cossenos diretores l, m e n da linha $\overline{OL}$ com respeito aos eixos x, y e z.

Seja $\overline{PQ}$ perpendicular desde o ponto $P(x,y,z)$ até a linha $\overline{OL}$, onde o vetor posição de Q é dado por $\vec{q} = (x',y',z')$. Consequentemente $\overline{OP} = p$ e $\overline{OQ} = q$, o módulo dos vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$. Porque $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{OL}$, temos

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = q^2. \tag{A.53}$$

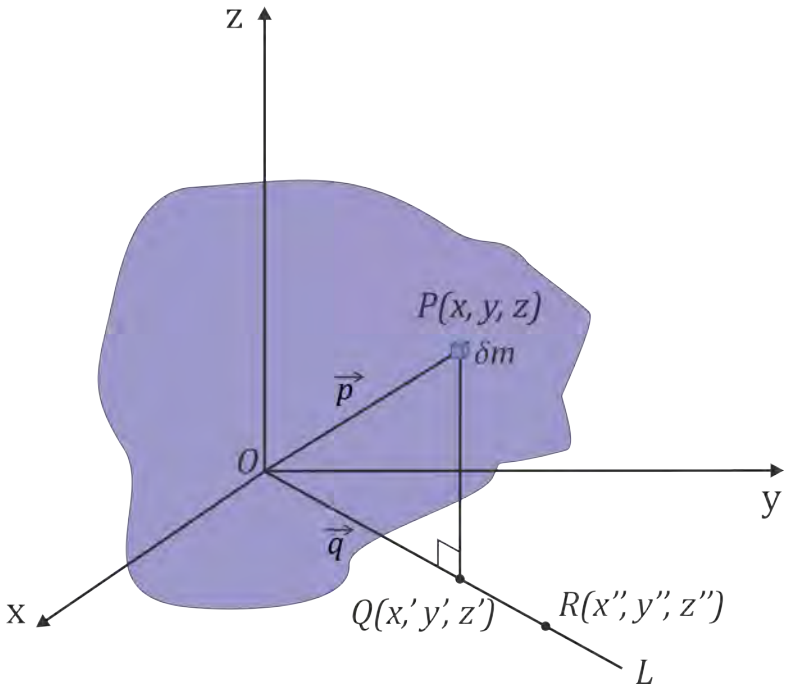


Figura A.1: Localização de um elemento de massa δm no ponto P. $\overline{OL}$ é uma linha arbitrária desde a origem O do sistema de coordenadas. $\overline{PQ}$ é a linha perpendicular desde P até Q. Um ponto arbitrário R esta ao longo da linha $\overline{OL}$.

Entretanto

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = xx' + yy' + zz' = x(lq) + y(mq) + z(nq) = q(lx + my + nz) \tag{A.54}$$

e por isso

$$q = lx + my + nz. \tag{A.55}$$

O momento de inércia I_L é dado por

$$I_L = \sum \delta m (PQ)^2 = \sum \delta m \Big[x^2 + y^2 + z^2 - (lx + my + nz)^2 \Big]. \tag{A.56}$$

Como $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, podemos escrever

$$I_L = \sum \delta m \Big[(x^2 + y^2 + z^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (lx + my + nz)^2 \Big], \tag{A.57}$$

que expandindo e arrumando os termos, temos

$$\begin{aligned} I_L &= l^2 \sum \delta m (y^2 + z^2) + m^2 \sum \delta m (z^2 + x^2) + n^2 \sum \delta m (x^2 + y^2) \\ &\quad -2mn \sum \delta m\, yz - 2nl \sum \delta m\, zx - 2lm \sum \delta m\, xy. \end{aligned} \tag{A.58}$$

Combinando a Eq. (A.58), com a Eq. (A.51) e (A.52), temos

$$I_L = \mathcal{A} l^2 + \mathcal{B} m^2 + \mathcal{C} n^2 - 2\mathcal{D} mn - 2\mathcal{E} nl - 2\mathcal{F} lm. \tag{A.59}$$

Se nós considerarmos um ponto arbitrário $R(x'', y'', z'')$ a uma distância r de O sobre a linha $\overline{OL}$ e escrevermos

$$I_L = \frac{m_p \lambda^4}{r^2}. \tag{A.60}$$

onde $m_p = \sum \delta m$ é a massa total de um corpo deformado e λ é uma unidade arbitrária, então, dado que $x'' = lr$, $y'' = mr$ e $z'' = nr$, a Eq. (A.59) se torna

$$m_p \lambda^4 = \mathcal{A} x''^2 + \mathcal{B} y''^2 + \mathcal{C} z''^2 - 2\mathcal{D} y'' z'' - 2\mathcal{E} z'' x'' - 2\mathcal{F} x'' y'', \tag{A.61}$$

que é a equação geral de um elipsóide triaxial. Se os eixos das coordenadas são escolhidos de forma que coincidam com os eixos de simetria do elipsóide, então os produtos de inércia $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, com respeito aos novos eixos somem, e a Eq. (A.61) se reduz a

$$m_p \lambda^4 = \mathcal{A} x''^2 + \mathcal{B} y''^2 + \mathcal{C} z''^2. \tag{A.62}$$

Estes são os principais eixos de inércia definidos com respeito ao ponto O. A Eq. (A.62) define o *elipsóide de inércia*. Eles são invariantes do corpo; e não dependem da orientação dos eixos, mas variam com a posição da origem O. Se O é o centro de massa, então o elipsóide é chamado de *elipsóide central de inércia*. Isto segue das propriedades deste elipsóide que cada corpo, independentemente da sua forma, possui

três eixos mutuamente perperdiculares, tais que o momento de inércia sobre um desses eixos é um máximo, enquanto que o outro é um mínimo e o terceiro é ou intermediário ou igual a um dos outros dois.

Agora vamos deduzir a expressão para o campo gravitacional de um planeta permanentemente deformado em termos dos principais momentos de inércia, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ definidos com respeito ao centro de massa. Em nosso sistema, tomamos o ponto O como sendo o centro de massa do planeta e seja P um ponto a uma distância r de O. Assumiremos que r é muito maior do que o raio médio do planeta. Definiremos o sistema de coordenadas x, y e z de tal modo que suas direções estão ao longo dos eixos principais de inércia do planeta, Fig. (A.2).

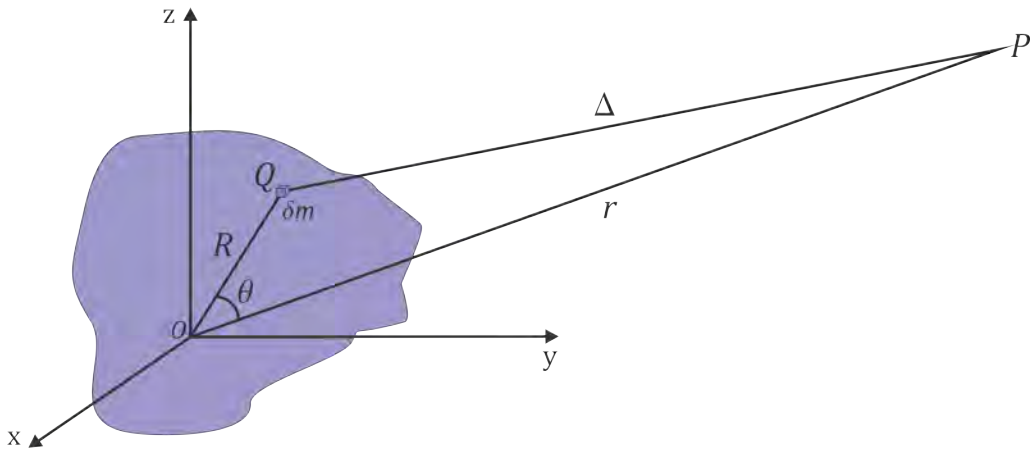


Figura A.2: Sistema de coordenadas com a origem localizada no centro de massa O de um planeta, com os eixos alinhados com os principais momentos de inércia. Um elemento de massa δm no ponto Q a uma distância R de O, e a linha $\overline{OQ}$ faz um ângulo θ com a linha $\overline{OP}$.

Se δm é um elemento de massa no ponto Q, a uma distância R de O, então o potencial do planeta em P é dado por

$$V = -\sum \frac{\mathcal{G}\delta m}{\Delta}, \tag{A.63}$$

onde, pela lei dos cossenos, $\Delta = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$ e θ é o ângulo entre $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ e a soma é tomada sobre todos os elementos de massa. Expandindo binomialmente a Eq. (A.63) e negligenciando os termos de alta ordem ($r \gg R$, para todo Q), obtemos

$$V \approx -\frac{\mathcal{G}m_p}{r} - \frac{\sum \delta m R\cos\theta}{r^2} - \frac{2\sum \delta m R^2 - 3\sum \delta m R^2 \sin^2\theta}{2r^3}, \tag{A.64}$$

onde $m_p = \sum \delta m$ é a massa do planeta. Como O está no centro de massa do planeta,

$$\sum \delta m R \cos\theta = 0. \tag{A.65}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} 2\sum \delta m R^2 &= 2\sum \delta m (x^2+y^2+z^2) \\ &= \sum \delta m (y^2+z^2) + \sum \delta m (z^2+x^2) + \sum \delta m (x^2+y^2) \\ &= \mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}. \end{aligned} \tag{A.66}$$

Se nós denotarmos por I o momento de inércia do corpo sobre a linha $\overline{OP}$, então

$$I = \sum \delta m r^2 \sin^2\theta \tag{A.67}$$

e, como a Eq. (A.64) é uma boa aproximação, temos então

$$V = -\frac{\mathcal{G} m_p}{r} - \frac{\mathcal{G}(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}-3I)}{2r^3}. \tag{A.68}$$

Esta é a *fórmula de MacCullagh*.

Seja agora x, y e z as coordenadas do ponto P, então x/r, y/r e z/r são os cossenos diretores de P com respeito aos principais eixos de inércia e, da Eq. (A.59), temos

$$I = \frac{(\mathcal{A}x^2+\mathcal{B}y^2+\mathcal{C}z^2)}{r^2}. \tag{A.69}$$

Substituindo a Eq. (A.69) na Eq. (A.68), obtemos

$$V = -\frac{\mathcal{G} m_p}{r} - \frac{\mathcal{G}}{2r^5} f(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},x,y,z), \tag{A.70}$$

onde

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},x,y,z) &= (\mathcal{B}+\mathcal{C}-2\mathcal{A})x^2 + (\mathcal{C}+\mathcal{A}-2\mathcal{B})y^2 \\ &+ (\mathcal{A}+\mathcal{B}-2\mathcal{C})z^2. \end{aligned} \tag{A.71}$$

Sabendo que $\vec{F} = -\nabla V$, temos que a força gravitacional por unidade de massa em P é

$$F_x = -\frac{\mathcal{G}m_p x}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(\mathcal{B}+\mathcal{C}-2\mathcal{A})x}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}x}{2r^7} f(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},x,y,z), \tag{A.72a}$$

$$F_y = -\frac{\mathcal{G}m_p y}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(\mathcal{C}+\mathcal{A}-2\mathcal{B})y}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}y}{2r^7} f(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},x,y,z), \tag{A.72b}$$

$$F_z = -\frac{\mathcal{G}m_p z}{r^3} + \frac{\mathcal{G}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-2\mathcal{C})z}{r^5} - \frac{5\mathcal{G}z}{2r^7} f(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},x,y,z). \tag{A.72c}$$

Essas forças atuam em uma unidade de massa em P e uma força igual e oposta atua sobre o corpo deformado no centro de massa. As componentes do torque são

$$N_x = zF_y - yF_z = \frac{3\mathcal{G}(\mathcal{C}-\mathcal{B})yz}{r^5}, \tag{A.73a}$$

$$N_y = xF_z - zF_x = \frac{3\mathcal{G}(\mathcal{A}-\mathcal{C})zx}{r^5}, \tag{A.73b}$$

$$N_z = yF_x - xF_y = \frac{3\mathcal{G}(\mathcal{B}-\mathcal{A})xy}{r^5}. \tag{A.73c}$$

As equações de Euler do movimento do corpo rígido, Eqs. (A.31) mostradas na seção (A.1) são

$$\mathcal{A}\dot{\omega}_x - (\mathcal{B}-\mathcal{C})\omega_y\omega_z = N_x, \tag{A.74a}$$

$$\mathcal{B}\dot{\omega}_y - (\mathcal{C}-\mathcal{A})\omega_z\omega_x = N_y, \tag{A.74b}$$

$$\mathcal{C}\dot{\omega}_z - (\mathcal{A}-\mathcal{B})\omega_x\omega_y = N_z. \tag{A.74c}$$

com $I_1 = \mathcal{A}$, $I_2 = \mathcal{B}$ e $I_3 = \mathcal{C}$ e ω_x, ω_y e ω_z são as projeções do vetor de rotação nos eixos principais.

No nosso problema, desejamos calcular o movimento rotacional de um planeta sob o torque externo exercido pelo momento de quadrupolo devido uma estrela distante. Assumiremos que o eixo de rotação é normal ao plano orbital e que, ω_x e ω_y são zero e $\omega_z = \dot{\theta}$. Tomaremos agora os cossenos diretores do planeta com respeito aos eixos x e y dados por $x/r = \cos\psi$ e $y/r = \sin\psi$, respectivamente, onde $\psi = f - \theta$, Fig. (A.3). Neste caso, as Eqs. (A.74) se reduzem para a Eq. (A.74c), a qual pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{C}}\right)\frac{\mathcal{G}M}{r^3}\sin 2\psi \tag{A.75}$$

onde o ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço.

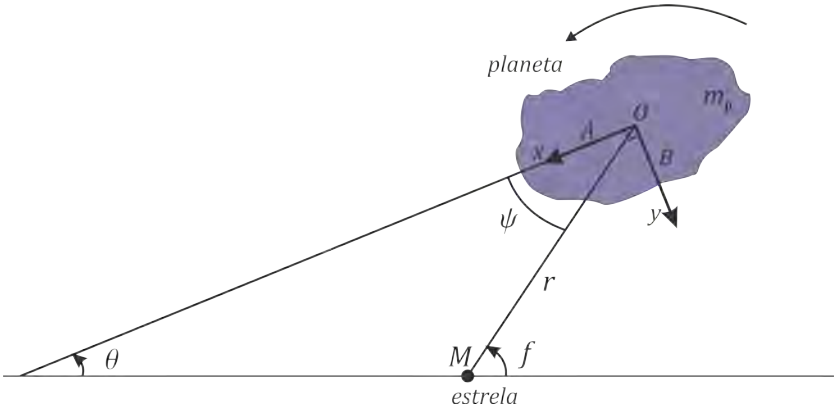


Figura A.3: Rotação de um planeta com o eixo de rotação normal ao plano órbital. ψ é o ângulo entre a linha estrela-satélite, r, e o eixo principal $\mathcal{A}$ associado com o mínimo momento de inércia do planeta. O ângulo θ é medido com respeito a uma direção fixa no espaço.