UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO ORIGAMI E CALEIDOSCÓPIO

Neirelise Buske

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

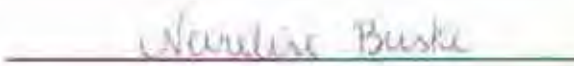
Rio Claro (SP)
2007

Comissão Examinadora

Ruy Madsen Barbosa

Miriam Godoy Penteado

Claudemir Murari (orientador)



Neirelise Buske

Rio Claro, 16 de abril de 2007.

Resultado: Aprovada

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Lori, afinal todas as minhas conquistas são suas vitórias, pois não teria chegado onde estou sem seu carinho e esforço.

Aos meus irmãos, Régis, Graci e Guto, pela ajuda com os pequenos detalhes que são tão importantes na execução de um trabalho como esse.

Ao meu amor, Onoél, pela paciência e confiança, por seu apoio incondicional e ajuda com aquelas fotos tão difíceis.

A minha tia Marlene, tio Robson e primas Fernanda e Joana, pelo carinho com que me receberam e acolheram em sua casa, no momento em que mais precisei.

Aos amigos que fiz por este caminho, Tati, Tiago, Lívia, Leila, Vi, Camila, Frã e Karen.

Àqueles amigos especiais, Mariana, Rosa e Luis, que me acolheram em sua casa como se eu fosse da família.

A amiga de todas as horas, Sabrina, que me acompanhou nesta solidão que é escrever uma dissertação longe da família e em uma cidade estranha.

Ao Maurílio, professor do tempo de faculdade, que muito incentivou e sempre acreditou que eu conseguiria.

Ao Ronei, coordenador do curso de Matemática da URI e alunos que tão bem me receberam para que realizasse minha coleta de dados.

Aos professores e funcionários da UNESP que de uma maneira ou de outra estiveram presentes e colaboraram com meu êxito.

Aos professores da banca, Mirian e Ruy por suas valiosas sugestões e incentivo para que esse trabalho continue.

Ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, Claudemir, por acreditar em meu trabalho.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi analisar como o *origami* e o caleidoscópio podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de alguns conceitos da Geometria. Este trabalho foi desenvolvido seguindo a proposta metodológica de Romberg, tem abordagem do tipo qualitativa e a coleta de dados se deu, essencialmente, por observação-participante em sala de aula, com a utilização de questionários, gravações de áudio, fotos, anotações e análise documental. Elaboramos uma proposta de ensino com a finalidade de levar os alunos a trabalharem com os problemas utilizando as construções feitas com *origami* e caleidoscópio. Foram desenvolvidas atividades, via resolução de problemas, com alunos do segundo semestre de um curso de licenciatura em Matemática, e os conteúdos estudados estavam relacionados às construções fundamentais, polígonos e poliedros. No encadeamento dos assuntos são apresentadas as explicações de como se realizar as construções com *origami* e como se confeccionar o *caleidoscópio generalizado*, juntamente com os preceitos matemáticos necessários para justificá-los. A execução prática da proposta de ensino por nós sugerida permitiu-nos fazer o levantamento e a análise de diversas possibilidades e limitações do uso do *origami* e caleidoscópio no estudo de conceitos relacionados à Geometria, mas circunscritos às proposições já citadas. Assim, trazemos sugestões para aperfeiçoar o trabalho e também de como ele pode ser mais bem aproveitado, cônscios de que o assunto aqui não se esgota, podendo surgir novas aplicações aos olhos de um educador interessado em utilizar esses recursos.

Palavras-chave: Geometria, *Origami*, Caleidoscópio, Poliedros, Educação Matemática

ABSTRACT

The purpose of this research was to analyze how Origami and kaleidoscope may contribute on the teaching and learning process over some Geometry concepts. This work has been developed according to Romberg's methodological proposal, it has a qualitative-type approach and the data collecting was essentially carried out by practical class observation, utilizing questionnaires, audio recordings, pictures, drafts and document analysis. We've elaborated a teaching proposal aiming to lead students to work with problems by utilizing the constructions made with the Origami and Kaleidoscope. Activities have been developed, via problem solving, with the first-year students in a bachelor math's graduation course, and the researched subjects were related to the fundamental constructions, polygon and polyhedron. Explanations are shown within the subject sequences on how to do the constructions by using the Origami and how to build an average kaleidoscope, according to the mathematical precepts needed to justify them. The practical execution of the teaching proposal suggested by us, allowed ourselves to make the research and analyzes of many kaleidoscope and Origami possibility and limitation use on the Geometry related concepts research, besides circumscription to the already mentioned proposals. Thus, we bring along suggestions to improve the work and also how it could be more developed, aware that the subject here is not over, since applications may appear before an educator's eyes interested in using those resources.

Key-words: Geometry, Origami, Kaleidoscope, Polyhedron, Mathematics Education.

SUMÁRIO

Introdução	10
Capítulo 1 – Metodologia da Pesquisa	18
Capítulo 2 - Os Materiais: *origami* e caleidoscópio	27
Capítulo 3 - A Construção dos Materiais	56
Capítulo 4 - A Proposta e seu Contexto de Estudo	98
Capítulo 5 – Descrição dos Dados	109
Capítulo 6 – Possibilidades e Limitações	137
Considerações Finais	145
Referências Bibliográficas	149
Anexos	154

ÍNDICE

Página

Introdução 10

Capítulo 1 - METODOLOGIA DA PESQUISA 18
1.1 Modelo de Romberg 20
1.1.1 Identificando o fenômeno de interesse 21
1.1.2 Elaborando o modelo preliminar 21
1.1.3 Relacionando com idéias de outros 22
1.1.4 Estabelecendo conjecturas 22
1.1.5 Selecionando a estratégia geral da pesquisa 23
1.1.6 Selecionando procedimentos específicos da pesquisa 24
1.1.7 Coletando informações 25
1.1.7.1 Observação participante 25
1.1.7.2 Registro das informações 25
1.1.8 Interpretando as informações 26

Capítulo 2 - OS MATERIAIS: ORIGAMI E CALEIDOSCÓPIO 27
2.1 Origami e a Educação Matemática 28
2.1.1 Origami 28
2.1.2 Na Educação Matemática 29
2.1.3 Construções por dobraduras 30
2.1.3.1 Axiomas e construções fundamentais 31
2.1.3.2 Axiomas de Huzita 32
2.1.3.3 Procedimentos geométricos fundamentais Origami 34
2.1.3.4 Procedimentos geométricos fundamentais das construções com régua não graduada compasso 37
2.1.3.5 Descrevendo os procedimentos do origami 38
2.2 O Caleidoscópio e a Educação Matemática 39
2.2.1 Caleidoscópio 43
2.2.1.1 Caleidoscópio plano 43
2.2.1.1.1 Caleidoscópio com dois espelhos 43
2.2.1.1.2 Caleidoscópio com três espelhos 44
2.2.1.1.2.1 Caleidoscópio educacional individual com três espelhos 44
2.2.1.1.2.2 Caleidoscópio educacional modificado com três espelhos 44
2.2.1.1.3 Caleidoscópio com quatro espelhos planos articulados, formando uma superfície prismática de base retangular 45

2.2.2 Caleidoscópio generalizado 46
2.2.2.1 Caleidoscópio de ângulos (90°,60°,60°) 48
2.2.2.2 Caleidoscópio de ângulos (90°,60°,45°) 48
2.2.2.3 Caleidoscópio de ângulos (90°,60°,36°) 49
2.2.2.4 Caleidoscópio de ângulos (90°,90°,n) 50
2.3 Considerações sobre o Software Cabri-Géomètre II 52
2.3.1 Menus e ferramentas 52

Capítulo 3 - A CONSTRUÇÃO DOS MATERIAIS 56
3.1 Polígonos 57
3.1.1 Construção de polígonos por dobraduras (ou origami) 57
3.1.1.1 Retângulo 58
3.1.1.2 Quadrado 59
3.1.1.3 Retângulo áureo 59
3.1.1.4 Triângulo eqüilátero 61
3.1.1.5 Hexágono regular 62
3.1.1.6 Pentágono regular 63
3.1.1.7 Octógono regular 64
3.2 Poliedros 64
3.2.1 Poliedros regulares ou poliedros de Platão 65
3.2.2 Poliedros semi-regulares ou poliedros de Arquimedes 68
3.2.3 Construção dos poliedros por dobraduras 68
3.2.3.1 Proporções dos quadrados utilizados na confecção dos módulos 69
3.2.3.2 Construção dos módulos 70
3.2.3.2.1 Módulo triangular 70
3.2.3.2.2 Módulo quadrangular 71
3.2.3.2.3 Módulo pentagonal 71
3.2.3.2.4 Módulo hexagonal 73
3.2.3.2.5 Módulo octogonal 75
3.2.3.2.6 Módulo decagonal 76
3.2.3.2.7 Peça de conexão 77
3.2.3.3 Poliedros construídos com origami modular 78
3.2.3.3.1 Poliedros regulares 78
3.2.3.3.2 Poliedros semi-regulares 79
3.2.4 Construção das dobraduras para a visualização dos poliedros em caleidoscópio generalizado 81
3.2.4.1 Poliedros regulares ou poliedros de Platão 82
Tetraedro
Hexaedro ou Cubo
Octaedro
Dodecaedro
Icosaedro
3.2.4.2 Poliedros semi-regulares ou poliedros de Arquimedes 89
Tetraedro truncado
Cubo truncado
Octaedro truncado
Cuboctaedro
Rombicuboctaedro
Cuboctaedro truncado

Cubo achatado
Dodecaedro truncado
Icosaedro truncado
Icosidodecaedro
Rombicosidodecaedro
Icosidodecaedro truncado
Dodecaedro achatado

Capítulo 4 - A PROPOSTA E SEU CONTEXTO DE ESTUDO 98
4.1 A Proposta de Pesquisa 99
4.1.1 Resolução de problemas 100
4.1.2 Descrição das atividades e conteúdos 101
4.2 Os Sujeitos e o Ambiente da Pesquisa 104
4.2.1 A Universidade e o curso 104
4.2.2 Os sujeitos 107

Capítulo 5 - DESCRIÇÃO DOS DADOS 109
5.1 As Construções Fundamentais - 1° momento 111
5.1.1 Construções com régua e compasso 111
5.1.2 Construções com dobraduras 112
5.2 A Construção de Polígonos – 2° momento 117
5.2.1 O quadrado 117
5.2.2 O retângulo áureo 122
5.2.3 O pentágono 123
5.2.4 A simetria 124
5.3 Construindo Poliedros – 3° momento 125
5.3.1 Os módulos 125
5.3.2 Os poliedros 128
5.3.3 Os caleidoscópios 134

Capítulo 6 – POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES 137
6.1 Possibilidades 138
6.1.1 Construções fundamentais 139
6.1.2 Polígonos 140
6.1.3 Poliedros 140
6.2 Limitações 142

CONSIDERAÇÕES FINAIS 145

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 149

ANEXOS
Anexo 1 – Capítulo da dissertação de Mattos 155
Anexo 2 – Descrição da construção dos caleidoscópios 163
Anexo 3 – Questionário 165
Anexo 4 – Primeira parte da apostila 167
Anexo 5 – Segunda parte da apostila 188

INTRODUÇÃO

Neste estudo apresento alguns resultados de uma pesquisa, que tem como foco de interesse o ensino da Geometria por meio do *origami* e do caleidoscópio.

Antes de discorrer sobre o tema desenvolvido nesta dissertação faço um breve relato de meu envolvimento com a Educação, iniciado anteriormente ao ingresso no mestrado em Educação Matemática, da UNESP – Rio Claro.

Minha relação com a Educação vem desde o ensino médio, no qual cursei Magistério, o que me habilitava a dar aulas para alunos de 1ª a 4ª séries do ensino fundamental. Após isso, ingressei no curso de licenciatura em Matemática, da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, campus Santo Ângelo - RS. Quando cursava o final do segundo ano de faculdade, comecei a trabalhar em uma escola particular que tinha turmas de educação infantil e séries iniciais do ensino fundamental.

Nesta escola trabalhei como monitora e professora, o que me permitiu interagir com todas as séries, desde a primeira até a quarta, tendo contato com crianças de seis a dez anos. Foi nessa ocasião que tive a oportunidade de já utilizar o *origami* em sala de aula.

Desde criança sentia-me atraída pelo *origami*. O primeiro contato com esta arte ocorreu quando tinha uns nove anos de idade. Numa visita à biblioteca que freqüentava, encontrei um livro que trazia gráficos para a construção de animais. Desse dia em diante passei a procurar mais livros com diferentes construções.

Quando comecei a lecionar, tive a oportunidade de ensinar meus alunos a confeccionarem figuras com o *origami*. Percebi que esta atividade despertava muito interesse nos alunos, então, por curiosidade, comecei a pesquisar sobre sua utilização no ensino da Matemática e a aplicar as atividades que encontrava nos livros didáticos aos meus alunos. Sendo a única professora da turma (quarta série), ministrava todas as disciplinas, e aproveitando o caráter integrador do *origami*, trabalhava a interdisciplinaridade.

Quando terminei a graduação ingressei em um curso a distância, de especialização em Psicologia Escolar, oferecido pela Pontifícia Universidade Católica, EADPUC – Porto

Alegre, ocasião em que tive contato, pela primeira vez, com a pesquisa em Educação, quando busquei trabalhar com um assunto que fosse relacionado à Matemática. À época, com pouca experiência, mas muita curiosidade, fui investigar as causas que levavam os alunos a não gostarem de Matemática.

O contato com atividades investigativas despertou meu interesse por continuar os estudos, e a proximidade com pesquisadores e centros de pesquisa possibilitou-me saber da existência do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro. Assim, resolvi me inscrever como aluna especial, quando cursei a disciplina de Fundamentos de Geometria, que foi ministrada pelo professor Claudemir Murari. Minha inserção nesse programa veio a ratificar meu objetivo, que era poder contribuir para o ensino e aprendizagem da Geometria, realizando uma pesquisa que utilizasse o *origami* no estudo de alguns conceitos e propriedades fundamentais dessa área do saber.

Ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, tive como orientador o professor Claudemir que, analisando meu projeto inicial, no qual me propunha a estudar o *origami,* intuiu ser plausível integrar este estudo com o trabalho que ele vinha desenvolvendo com caleidoscópios. Assim, surgiu a idéia de desenvolvermos um experimento de ensino que contemplasse a utilização desses dois recursos.

Ao iniciar as pesquisas sobre dobradura (ou *origami*), foi possível perceber que por utilizar materiais de baixo custo e apresentar formas e cores que chamam a atenção devido a sua beleza, esse recurso poderia ser muito útil no ensino da matemática, ainda mais se associado ao caleidoscópio, que também reproduz belos padrões visuais. Além disso, deve-se ressaltar que o resultado final da construção da dobradura é um material manipulável, que permite ao aluno tocar o objeto em estudo, para analisar suas propriedades e características. Também o caleidoscópio, afora esse caráter de apresentar o belo, é um instrumento que desperta o interesse dos alunos e permite a observação dos modelos geométricos estudados.

Em busca, na literatura, de um embasamento para justificar a relevância do estudo de novos recursos no ensino da Geometria, vi ressaltadas a importância e a contribuição desta no desenvolvimento do pensamento lógico e na compreensão do ambiente em que o aluno vive.

Lorenzato (1995) afirma que é importante a presença da Geometria em nossas escolas, por estar relacionada a problemas do cotidiano e também por auxiliar na compreensão e solução de questões de outras áreas do conhecimento.

Na procura de conhecer a situação do ensino da Geometria num passado mais recente, encontrei o trabalho de Gazire (2000), no qual são apresentados alguns fatores que podem influenciar negativamente esse ensino: a dificuldade que os professores têm de romper com os procedimentos tradicionais da aula expositiva; a falta de informações sobre as várias perspectivas de cada conteúdo das Geometrias, que geram dificuldade de encontrar alternativas para a mudança de seu ensino; o uso inadequado dos materiais concretos, entre outros.

Com relação a este último fator, tem-se a perspectiva de Moysés (2003): "...vale dizer que o professor esteja alerta ao uso de material figurativo-concreto. Auxiliar importante, sua utilização deve ser seguida de processos que levem a abstrações e a amplas generalizações." (p. 45).

Acrescentem-se, ainda, as preocupações de Berman (1982), Fiorentini e Miorim (1996), Pais (1996), Nacarato (2005) e Passos (2006) que alertam sobre os aspectos positivos e negativos do uso de materiais manipuláveis para o ensino, trazendo reflexões sobre a importância da utilização desses materiais e ressaltando que os mesmos, por si só, não são capazes de promover a aprendizagem.

Foi pensando em se contrapor, e ao mesmo tempo auxiliar, aos professores que tem a concepção de que o objetivo do uso de materiais manipulativos em sala de aula é apenas o de conquistar os alunos, é que desenvolvi esta pesquisa. Além de mostrar a elaboração dos materiais e aplicação em algumas situações-problema, a contribuição desta pesquisa centra-se no fato de apresentar todo um embasamento teórico matemático, que visa contribuir para a mudança do quadro apontado por Andrade e Nacarato (2004), quando em investigação sobre os Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs), constataram que "... ao menos na esfera da produção, houve um resgate do Ensino de Geometria. No entanto, pesquisas continuam apontando para o fato de que a Geometria ainda está bastante ausente das salas de aula..." (ANDRADE e NACARATO, p.15).

Nos capítulos que se seguem comento a respeito de algumas pesquisas realizadas sobre a utilização do *origami* na Educação Matemática, de sua tendência a facilitar a visualização e o entendimento dos objetos geométricos, ressaltando que todo o trabalho com *origami* está fundamentado em uma *Geometria do Origami*[1].

[1] Trabalho desenvolvido pelo matemático Humiaki Huzita, ver capítulo 2.

Como uma continuação de alguns estudos já iniciados por Murari (1999) e (2004) sobre o uso do caleidoscópio no ensino de Matemática, o trabalho aqui apresentado mostra as dobraduras possíveis de serem construídas para a visualização dos poliedros em caleidoscópio generalizado, dobraduras estas, confeccionadas no software geométrico *Cabri-Géomètre II*[2].

Para utilizar conjuntamente o *origam*i e o caleidoscópio foi elaborada uma seqüência didática seguindo a metodologia de ensino resolução de problemas, que oferece a oportunidade de aprendizado de conceitos importantes, relacionados à Geometria. As atividades foram aplicadas a alunos do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática, de uma Universidade do interior do Rio Grande do Sul, durante os meses de agosto e setembro do ano de 2006.

A seqüência didática elaborada consistiu, essencialmente, na utilização de régua e compasso e dobraduras no estudo das *construções fundamentais* e de *alguns polígonos* e suas construções. Com relação a *alguns poliedros de Platão e Arquimedes*, mostramos sua construção com *origami modular* e efetuamos sua dobradura para a visualização em caleidoscópio generalizado. Como não era de nosso interesse, na fase experiencial da pesquisa, não confeccionamos com os alunos todos os dezoito sólidos, mas foram expostas as noções fundamentais para sua construção. Porém, neste trabalho, apresento, detalhadamente, a construção com *origami* de todos esses sólidos, bem como a elaboração das dobraduras que geram o visual de alguns poliedros em caleidoscópio, pois isso não é possível para todos [3].

Como em todo trabalho que envolve pesquisa, houve dificuldades. A primeira delas foi à de acesso à literatura sobre poliedros e o *origami*, pois a maioria das publicações é feita no exterior e não é encontrada em livrarias brasileiras. Algumas das referências foram retiradas de *sites* da *internet* pertencentes a associações de *origamistas* e de *sites* pessoais dos autores de livros e teses sobre o *origami*. A falta de publicações em português também é um fator que justifica a importância desta investigação.

Os meus conhecimentos referentes ao *origami* foram aprofundados com base, principalmente, nas obras de autores como Imenes (1988), Franco (1999), Mattos (2001), Alperin (2004) e Kasahara (2005), nas quais encontrei subsídios para realizar todas as construções pretendidas, assim como o embasamento matemático necessário para justificá-las. Relativamente aos *caleidoscópios generalizados*, a bibliografia foi mais acessível, pois tinha à

[2] O detalhamento destas construções encontra-se no capítulo 3.
[3] Não é possível gerar em caleidoscópio o visual de todos os poliedros, conforme explicito no capítulo 3.

disposição os estudos de Ball & Coxeter (1987), Murari (2004), Batistela (2005) e Reis (2006), bem como os estudos sobre Geometria de O'Daffer & Clemens (1977).

Assim, além do levantamento feito sobre as necessidades percebidas de se realizar pesquisas sobre novos materiais para o ensino e aprendizagem da Geometria, e dar subsídios matemáticos para que os professores possam utilizá-los, outros elementos foram emergindo no decorrer desta investigação, que remeteram a uma pergunta diretriz, a qual exprime os seus objetivos:

Como o *origami* e o caleidoscópio podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Geometria?

Na análise dos dados, que foram coletados na pesquisa de campo, procuro respostas para essa pergunta. Esta pesquisa, conforme Bogdan & Biklen (1994), Goldemberg (1999), Alves-Mazzotti & Gewandsznajder (2001), Araújo e Borba (orgs.) (2004) tem o caráter de uma investigação qualitativa, pois além de outros fatores que assim a classificam, houve contato do pesquisador com o ambiente e a situação a ser investigada. Para haver uma melhor organização do estudo aqui apresentado, ordenei as informações de acordo com a proposta metodológica de Romberg (1992)[4].

Em síntese, na organização da dissertação dividi o trabalho em 6 capítulos, além da introdução, considerações, referências e anexos.

A primeira parte consiste na *Introdução*, na qual faço um breve relato da trajetória desta pesquisa (como e por que surgiu). Há menção de literatura relacionada ao ensino de Geometria, na busca por explicitar os motivos que me levaram a realizar o trabalho, assim como referências sobre o uso do *origami* e do caleidoscópio no ensino, que deram consistência e relevância a esta investigação. Finalizando essa etapa tem-se a apresentação da pergunta norteadora da pesquisa e a descrição da organização de cada parte da dissertação.

Em seguida, apresento no **capítulo 1** a *Metodologia da Pesquisa*, quando discuto alguns dos elementos referentes à proposta metodológica de Romberg (1992), que explicita um processo para o desenvolvimento de uma pesquisa em Educação Matemática. Neste capítulo encontram-se, de forma detalhada, os passos seguidos para o desenvolvimento da

[4] A explicação sobre esta proposta está no capítulo 1, referente à metodologia da pesquisa.

investigação, assim como os procedimentos adotados para a coleta, registro e análise dos dados.

No **capítulo 2,** que trata sobre *Os Materiais: origami e caleidoscópio,* apresento suas principais características e comento a respeito de alguns estudos já desenvolvidos sobre os mesmos, dando uma noção geral de sua importância e utilidade no ensino de Geometria. Também apresento as fundamentações matemáticas que justificam e corroboram seu uso, além de fazer uma breve descrição do software *Cabri-Géomètre II*.

A seguir, no **capítulo 3**, tem-se *A Construção dos Materiais*. Nesse capítulo são definidos os conceitos estudados referentes a polígonos e poliedros, e são apresentados os passos para a construção dos poliedros por meio do *origami modular*, assim como a confecção das dobraduras que geram o visual desses sólidos em caleidoscópio generalizado. Tais dobraduras tiveram sua construção realizada de duas maneiras: no software *Cabri-Géomètre II* e através de régua e compasso.

No **capítulo 4**, intitulado *A Proposta e seu Contexto de Estudo*, descrevo a proposta de ensino que foi elaborada, para ser aplicada aos alunos da graduação. Também, explicito a metodologia de ensino utilizada, justificando essa escolha. Na seqüência, apresento as informações referentes ao perfil da turma que participou da pesquisa, bem como dados da Universidade em que os mesmos estavam inseridos.

O **capítulo 5** tratou da *Descrição dos Dados*. Foi destinado à apresentação, de maneira descritiva, dos dados coletados durante o desenvolvimento das atividades com os sujeitos pesquisados. Os materiais analisados nesta etapa se constituíam de gravações de áudio, anotações feitas pelo pesquisador, apostilas e relatórios elaborados pelos alunos.

O capítulo foi dividido em três partes, referentes aos momentos de aplicação dos problemas: *1º momento* – construções fundamentais feitas com régua e compasso e dobraduras; *2° momento* – construção de polígonos com régua e compasso e dobraduras; e *3° momento* – construção dos poliedros com *origami modular* e visual dos poliedros em caleidoscópio. Nestas três etapas procurou-se observar a maneira como os alunos lidavam com os materiais e os problemas propostos.

No **capítulo 6**, denominado *Possibilidades e Limitações*, desenvolvi uma análise crítica do trabalho realizado, ou seja, da utilização do *origami* e do caleidoscópio, no ensino de Geometria via resolução de problemas, discutindo pontos considerados positivos e negativos,

trazendo sugestões para uma melhor utilização das fichas de atividades, bem como de outros conteúdos que podem ser trabalhados com os materiais construídos.

Com as *Considerações Finais* aprofundo as análises desenvolvidas no capítulo anterior, além de retomar a pergunta de pesquisa, a fim de sintetizar as compreensões e discorrer sobre algumas conclusões que foram sendo construídas no desenvolvimento da investigação, orientadas pela pergunta diretriz.

Capítulo 1

METODOLOGIA DA PESQUISA

Conforme já dissemos, procuramos desenvolver neste trabalho uma investigação sobre as possibilidades de uso do *origami* e do caleidoscópio no ensino e aprendizagem da Geometria. Para isso fizemos, inicialmente, um levantamento de pesquisas realizadas sobre estes materiais e apresentamos a fundamentação matemática e pedagógica que possibilita o seu uso, para esse fim.

Feito este levantamento, partimos para a elaboração das situações problema envolvendo o *origami* e o caleidoscópio, que formam o corpo das atividades desenvolvidas na pesquisa.

No momento em que se decide elaborar atividades e aplicá-las aos sujeitos, para coletar informações sobre suas potencialidades, entra em cena a metodologia de pesquisa que norteia o estudo. Consideramos o trabalho aqui desenvolvido como uma investigação qualitativa por abranger as características descritas por Bogdan e Biklen (1994): 1) a fonte de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal; 2) é descritivo; 3) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados; 4) a análise de dados tende a ser indutiva; e 5) o significado é de importância vital nessa abordagem.

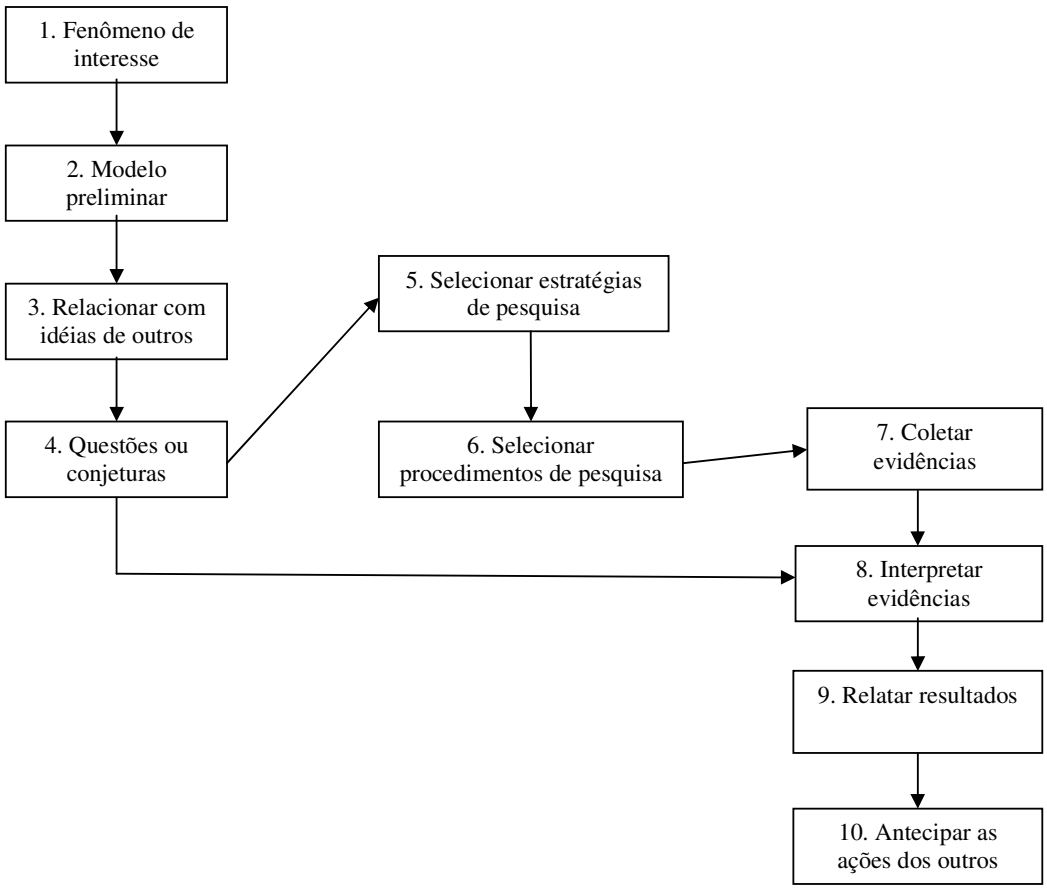
Ao desenvolver a pesquisa proposta torna-se necessário atuar diretamente no ambiente de investigação, envolvendo-se com a situação por meio do trabalho de campo, buscando compreender melhor o processo mediante o qual as pessoas constroem os significados, para descrever em que consistem estes mesmos significados, pois "o objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento e não o de dar opiniões sobre determinado contexto." (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 67)

Os dados obtidos na pesquisa de campo são puramente descritivos, recolhidos por meio de questionários, observações, fotografias, gravações de áudio e anotações. Por haver uma preocupação com o contexto em que ocorrem e, para se ter uma boa compreensão, as ações são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência, em situações de contato direto.

Para melhor descrever a investigação, utilizamos a proposta metodológica de Romberg[5], que indica dez passos a serem seguidos no desenvolvimento de uma pesquisa em Educação Matemática.

1.1 Modelo de Romberg

Romberg (1992) destaca dez procedimentos essenciais ao desenvolvimento de uma pesquisa, ressaltando que não se realizam, necessariamente, nesta ordem e, na prática, não se separam tão nitidamente.



(ROMBERG, 1992, p. 51)

Em seguida, apresentamos a relação das atividades do Modelo de Romberg, com as ações que nortearam esta pesquisa.

[5] Orientações de Thomas A. Romberg, apresentadas no trabalho intitulado *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa), publicado no *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 1992*.

1.1.1 *Identificando o fenômeno de interesse*

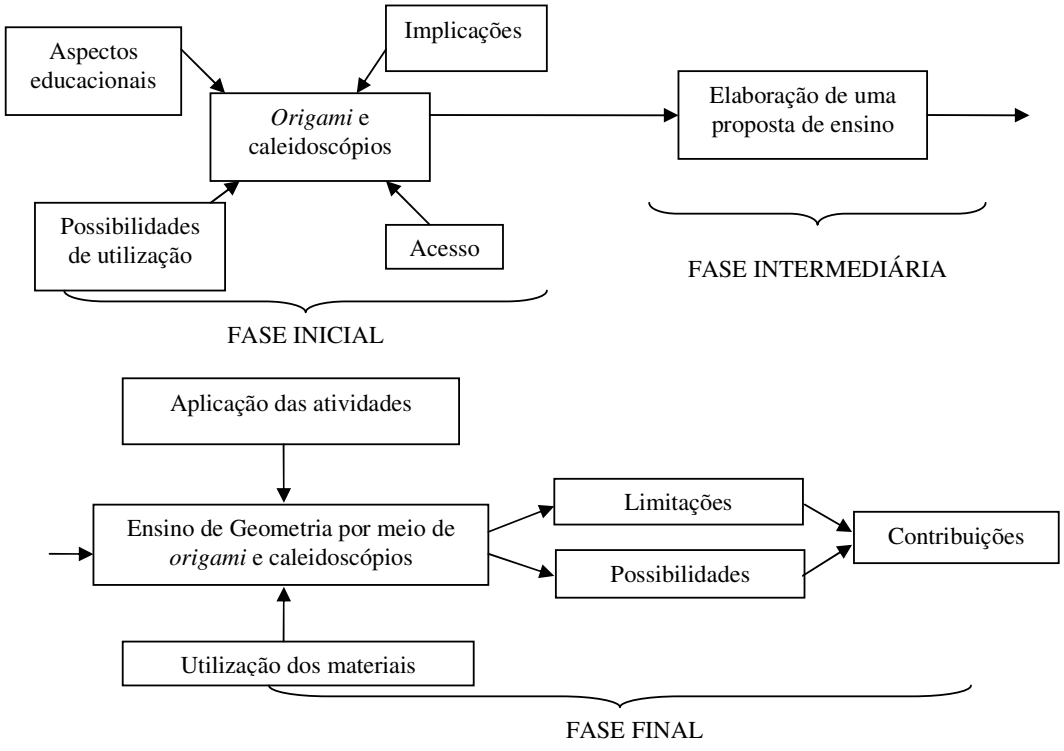
O *fenômeno de interesse* é o ponto de partida para o trabalho de pesquisa. Sua origem está na curiosidade do pesquisador, em relação às questões do campo de estudos da Educação Matemática. Em nossa pesquisa o fenômeno de interesse é:

O ensino da Geometria por meio de *origami* e caleidoscópio.

Como se pode verificar, na introdução do presente trabalho já foi justificado o interesse e a relevância deste fenômeno.

1.1.2 *Elaborando o modelo preliminar*

O *modelo preliminar* ajuda a esclarecer um fenômeno complexo, e serve como ponto de partida e orientação para o desenvolvimento do processo de pesquisa. Consiste em um esquema composto por variáveis do fenômeno e suas relações. Essas variáveis são os elementos que compõem e interferem no fenômeno de interesse. Abaixo, apresentamos o modelo preliminar por nós elaborado:



1.1.3 *Relacionando com idéias de outros*

Neste momento procuramos conhecer as pesquisas já desenvolvidas, relacionadas ao tema em questão, e fazemos um levantamento daquelas que servirão como referência ao trabalho em desenvolvimento.

A pesquisa apresentada nesta dissertação centrou-se, principalmente, na utilização do o*rigami* e do caleidoscópio no ensino de Geometria. Assim, os trabalhos envolvendo estes materiais são referências importantes.

Com relação ao *origami*, tivemos relativa dificuldade em encontrar literatura disponível, pois existem poucos livros que tratam do assunto. O material encontrado referia-se a atividades de iniciação à Geometria, principalmente sobre o uso da dobradura para ensinar noções de Geometria Euclidiana Plana.

Como nosso trabalho vai além dessas noções iniciais, foi necessário procurar bibliografia que tratasse das construções de polígonos e poliedros, e conferisse fundamentação matemática para esses procedimentos. Os livros nos quais encontramos estas referências precisaram ser importados, pois as livrarias brasileiras não dispunham de tais títulos.

Outra fonte de pesquisa foi à *internet*, na qual encontramos artigos e trabalhos completos de pesquisadores sobre o *origami.* Temos como fonte de busca *sites* pessoais ou de associações de *origamistas*.

A bibliografia referente aos caleidoscópios era mais acessível por se tratar de produção de nosso pesquisador e seus orientados do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, além de outros materiais aos quais já tínhamos acesso.

A descrição e análise dos trabalhos sobre *origami* e caleidoscópio, utilizados como referências nesta dissertação, encontram-se no capítulo 2.

1.1.4 *Estabelecendo conjecturas*

As conjecturas são questões de pesquisa, elaboradas tendo como base o fenômeno de interesse. Para o nosso caso, elaboramos a seguinte conjectura:

O uso da técnica do *origami* associada ao caleidoscópio possibilita-nos o ensino de conteúdos matemáticos, principalmente os relacionados à Geometria, ainda mais quando trabalhados seguindo a metodologia de ensino resolução de problemas.

Procurando formular uma pergunta de pesquisa que estivesse de acordo com a conjectura elaborada, chegamos a uma primeira versão da questão que deveria nortear nosso trabalho:

Como a dobradura pode auxiliar alunos de 2ª série do Ensino Médio num estudo de polígonos e poliedros, que envolve conceitos básicos da Geometria Euclidiana e algumas noções de Geometria Esférica?

Porém, em razão de dificuldades impostas pelos professores das turmas de ensino médio (que seria o grau de ensino a que pertenceriam os sujeitos desta investigação) e, também, durante o processo de desenvolvimento da pesquisa, o estudo e envolvimento com os materiais pesquisados promoveram o amadurecimento de idéias, e levaram-nos a repensar sobre a questão norteadora do trabalho.

Inicialmente o trabalho seria desenvolvido com uma turma de terceiro ano do ensino médio. Entretanto, fomos desencorajados, pois nos meses previstos para a execução da experiência os alunos e professores estariam muito preocupados com o vestibular, e o trabalho poderia não ter o retorno pretendido. Tentamos, então, trabalhar com uma turma de segunda série do ensino médio, mas a falta de apoio e dificuldades impostas pela professora da turma levou-nos a desistir, também, dessa possibilidade.

Após momentos de reflexão, uma nova redação para a questão de pesquisa foi elaborada, tendo como público alvo alunos de graduação do curso de licenciatura em Matemática. Pareceu-nos apropriado principiar o trabalho com *origami* e caleidoscópio na formação inicial de professores, pois esses deveriam ser os primeiros a terem contato com estes materiais e dominarem as técnicas para seu uso, para que, então, possam trabalhar com seus alunos. Desse modo, reformulamos a questão norteadora, que ficou assim:

Como o *origami* e o caleidoscópio podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Geometria?

1.1.5 *Selecionando a estratégia geral da pesquisa*

A seleção da estratégia geral está intimamente ligada às questões escolhidas, ao modelo preliminar elaborado e as conjecturas levantadas.

Neste experimento, a estratégia geral definida foi fazer um levantamento sobre as potencialidades de uso do *origami* e do caleidoscópio, além de elaborar e aplicar uma proposta de ensino de Geometria no estudo de polígonos e poliedros, com auxílio destes materiais, utilizando a metodologia de ensino resolução de problemas.

Para o desenvolvimento de tal proposta foi escolhida uma turma que cursava o segundo semestre de Licenciatura em Matemática, da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, localizada na cidade de Santo Ângelo, interior do Rio Grande do Sul. Nesse local tínhamos facilidade de acesso e não tivemos dificuldades ou obstáculos por conhecer o coordenador do curso, pois foi nessa instituição que fizemos a graduação.

1.1.6 *Selecionando procedimentos específicos da pesquisa*

Para desenvolver a estratégia geral e a fim de esclarecer a questão de pesquisa, foram selecionados procedimentos de coleta e organização das evidências.

Ao retomarmos o modelo preliminar apresentado na seção 1.1.2, considerando-o por partes, temos na fase inicial a exploração e pesquisa sobre os materiais selecionados, que no nosso caso são o o*rigami* e o caleidoscópio. Por meio de revisão bibliográfica é que foi verificada a potencialidade de sua utilização em sala de aula e feito o levantamento de suas possibilidades matemáticas, além da elaboração das atividades que poderiam ser desenvolvidas para o estudo das construções fundamentais, polígonos e poliedros.

Na fase intermediária, que corresponde à idealização, ocorreu a escolha das atividades que se adequariam ao desenvolvimento de problemas geradores de novos conteúdos, que seriam aplicados aos alunos. Esses problemas foram criados pelo pesquisador ou adaptados das atividades encontradas, com a finalidade de introduzir e orientar a compreensão e formação de conceitos como: simetria, isometria, ângulo, fórmula de Euler, elementos e características de polígonos e poliedros, e assim por diante, conforme a possibilidade de exploração de cada atividade.

No momento que corresponde à primeira parte da fase final do modelo preliminar, ou seja, a realização, no qual se recolhem às informações, foi utilizado o método de observação e o registro das informações se deu por meio de gravações de áudio, anotações e documental.

1.1.7 *Coletando informações*

A coleta de informações consistiu na observação dos sujeitos pelo próprio pesquisador, durante a aplicação dos problemas em sala de aula, que ocorreu no segundo semestre do ano de 2006.

1.1.7.1 *Observação participante*

O coordenador do curso de Matemática cedeu as aulas das disciplinas daquele semestre para a realização da pesquisa e, por ser o pesquisador o agente que iria aplicar as atividades, ficou assim definido que adotaria a observação participante.

De acordo com Alves-Mazzotti & Gewandsznajder (2001) na observação participante o pesquisador, por sua permanência prolongada no campo interagindo com os sujeitos, acaba por se tornar parte da situação observada.

Para o estudo em questão, o pesquisador tornou-se o professor da turma, orientando os alunos, que estavam dispostos em grupos para a resolução dos problemas propostos, os quais estavam organizados em uma apostila disponibilizada a eles. Enquanto os grupos discutiam, eram feitas as observações e anotações sobre as impressões das situações que nos eram significativas.

1.1.7.2 *Registro das informações*

O registro das informações fez-se por meio dos seguintes recursos: questionário, fotos, gravações de áudio, anotações e documentos elaborados pelos alunos.

Antes de iniciarmos as atividades, entregamos aos alunos um questionário com o objetivo de fazermos um levantamento geral sobre seu perfil. Tal questionário continha perguntas relacionadas à sua vida escolar, sua experiência com recursos didáticos em geral e sua visão sobre o estudo da Geometria.

Durante as aulas foram feitas gravações de áudio com o auxílio de um gravador digital, que permaneceu de posse do pesquisador enquanto este circulava entre os grupos, gravando os diálogos ocorridos. Alguns desses diálogos foram transcritos para posterior análise.

Anotações foram feitas durante as aulas e, também, após o término delas. Esses apontamentos correspondiam a um relato escrito daquilo que o investigador ouvia, via e experienciava no decorrer das atividades.

Para finalizar, foram analisados os documentos elaborados pelos alunos, ou seja, apostilas e relatórios. Esses relatórios eram feitos ao final de cada módulo estudado, e continham o resumo da aula e as impressões dos alunos sobre as atividades desenvolvidas.

1.1.8 *Interpretando as informações*

Este momento se caracteriza pela segunda parte da fase final, no qual se selecionam, se categorizam e se organizam as informações recolhidas, com a finalidade de responder as questões da pesquisa, levantadas na fase inicial do projeto.

Para facilitar este processo de organização dos dados, as atividades aplicadas foram divididas em três momentos: o primeiro referente às construções geométricas fundamentais, o segundo ao estudo de polígonos e o terceiro ao estudo dos poliedros. Inicialmente analisamos os dados recolhidos em cada etapa, separadamente.

A análise e a interpretação das informações (ou análise de dados) iniciaram-se juntamente com a coleta, e foram tomando forma à medida que eram redigidas as anotações e transcritas as gravações, pois "a análise e interpretação dos dados vão sendo feitas de forma interativa com a coleta, acompanhando todo o processo de investigação." (ALVES-MAZZOTTI & GEWANDSZNAJDER, 2001, p.162).

Nesta análise observamos as atitudes dos alunos frente às atividades, como a familiaridade com os objetos de estudo, as dificuldades que emergiam, se havia boa aceitação e as limitações de uso dos materiais.

A interpretação das evidências foi feita por triangulação, que "em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados" (ARAÚJO e BORBA, 2004, p.35) fundamentada no inter-relacionamento dos métodos utilizados na recolha dos dados e norteando-se pelos objetivos e pela pergunta da pesquisa.

A triangulação se deu no instante em que refletíamos sobre as anotações, as gravações de áudio e os relatórios feitos pelos alunos, procurando encontrar nos dados coletados, momentos significativos que complementassem as impressões observadas pelo pesquisador em sala de aula.

A descrição dos dados que foram recolhidos, que se encontram no capítulo 5, nos levaram ao levantamento e análise de possibilidades e limitações no uso do *origami* e do caleidoscópio no contexto deste estudo, assunto esse que está descrito no capítulo 6.

Capítulo 2

OS MATERIAIS: *ORIGAMI* E CALEIDOSCÓPIO

O *origami* e o caleidoscópio são materiais manipuláveis que, neste contexto de estudo, consideramos como objetos concretos que ao serem manipulados pelo aluno podem fornecer oportunidade para alcançar certos objetivos. Caracterizam-se por seu apelo aos sentidos e envolvimento físico numa situação ativa de aprendizagem.

Aqui a arte do *origami* será utilizada para realizar construções como as de polígonos e sólidos e os caleidoscópios têm como função fornecer o visual de alguns poliedros. Por isso, cabe realizar um estudo mais detalhado deste material, revelando sua relação com a Educação Matemática.

2.1 O Origami e a Educação Matemática

2.1.1 *Origami*

figura 2.1

O *origami* é a tradicional arte japonesa de confeccionar figuras fazendo dobras no papel. Sua escrita é composta por dois caracteres japoneses: o primeiro deriva do desenho de uma mão e significa dobrar (ori), e o segundo deriva do desenho da seda e significa papel (kami) (fig. 2.1).

A construção de um *origami*, na sua forma mais tradicional, não envolve o uso de cortes nem colagem, partindo, na maioria das vezes, de um pedaço de papel quadrado com uma de suas faces colorida. O resultado final depende do corte do papel utilizado e da confecção de dobras perfeitas, exigindo paciência e concentração do executor ao seguir os passos indicados para cada figura.

De acordo com a finalidade, o *origami* divide-se em artístico (construção de figuras da natureza para ornamento) e educativo (que tem por finalidade a construção de figuras para o estudo de propriedades, como as geométricas, por exemplo).

Caracteriza-se, também, pela quantia de peças de papel utilizadas em sua confecção. O tradicional, que utiliza apenas uma peça de papel, e o modular, se baseia na construção de módulos ou unidades (quase sempre iguais) formando figuras ao serem encaixadas. poliedros são a principal fonte de inspiração do *origami modular*[6].

2.1.2 *Na Educação Matemática*

Historicamente, no Japão, o *origami* teve seu valor reconhecido como recurso didático na Era Meiji[7], mais especificamente no ano de 1876 (ano 9 da Era Meiji), mas somente na disciplina de Educação Artística do jardim de infância e séries iniciais.

O interesse por essa arte é crescente na área da Educação. Hoje estão sendo desenvolvidas várias pesquisas, dentre as quais destacamos algumas relacionadas à Matemática.

Prieto (2005) em seu trabalho Matemáticas y Papiroflexia, fala sobre a relação entre o *origami* e a Matemática:

> La mejor manera de darse cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado inicial: aparece ante nuestros ojos un complejo de cicatrices que no es sino un grafo que cumple unas ciertas propiedades.
> Intuitivamente, hay unas "matemáticas del origami" funcionando cuando plegamos un modelo. (p.04)

Também encontramos o estudo de aspectos matemáticos do *origami* nos trabalhos sobre o sistema axiomático, desenvolvido por Humiaki Huzita (MATTOS, 2001), que apresenta uma fundamentação para a possibilidade de se realizar construções geométricas por meio de dobraduras.

Franco (1999), Kasahara (2005) e Fusè (2005) em seus livros desenvolvem atividades com o *origami* para o estudo de polígonos e de poliedros e suas transformações, estes trabalhos diferem-se pela maneira de apresentação das construções.

Franco (1999) desenvolve um trabalho bem detalhado com fichas de atividades para uso direto em sala de aula, no ensino de Geometria e Álgebra, essas fichas contêm orientações para o professor, detalhamento das construções e questões para os alunos explorarem os modelos confeccionados. Inicia com uma introdução histórica sobre o *origami*, traz problemas

[6] A construção de poliedros por *origami modular* está descrita no capítulo 3.
[7] Era Meiji: Denominação da Era sob o governo do Imperador Meiji de setembro de 1868 a julho de 1912. De acordo com Koda (1986).

que oferecem a oportunidade de trabalho em grupo e de discussão, além de oferecer ao professor explicações detalhadas de como o livro pode ser utilizado.

Alguns conteúdos matemáticos estudados no livro: visualização espacial, polígonos regulares, congruência e semelhança, frações e raios, seqüências, ângulos e poliedros.

Já nos estudos de Fusè (2005) não vemos esta preocupação com o ensino, o livro é constituído de modelos para a confecção de módulos com os quais se constroem os mais diversos poliedros. Essas construções são mais elaboradas, o que exige maior habilidade com o *origami* e não há referências ao estudo de Matemática.

Os livros de Kasahara (1997) e (2005), são bem detalhados em relação às construções. Trazem algumas provas matemáticas que justificam a exatidão das peças confeccionadas, estuda os significados das dobras no papel e as possibilidades de trabalhá-los no ensino de Matemática, mas sem esquecer seu caráter artístico e criativo, apresentando também figuras diversas de animais, máscaras e outras construções.

Além desses três autores, que nos serviram de base para o estudo da Matemática implícita no trabalho com *origami*, podemos destacar ainda os estudos desenvolvidos por Imenes (1988), Rêgo et al (2003), Novaes (2005) e Hull (2005), que trouxeram contribuições importantes para o desenvolvimento desta pesquisa.

Nos estudos de Imenes (1988) têm-se o uso das dobraduras para introduzir noções de retas paralelas e perpendiculares, bissetrizes e construção de polígonos. Estuda os elementos matemáticos presentes na confecção de aviões e figuras de animais (ângulos, frações...), além de trabalhar com as características matemáticas de alguns poliedros que podem ser feitos a partir da união de peças construídas, com *origami,* em forma de triângulos eqüiláteros e quadrados.

Este livro traz apenas noções iniciais sem um aprofundamento dos conteúdos apresentados, sua utilização é mais indicada para o trabalho com introdução da Geometria no ensino fundamental.

Rêgo et al (2003) menciona o caráter interdisciplinar desta arte e ressalta vários aspectos matemáticos que podem ser estudados fazendo seu uso. Encontramos valiosa contribuição no que se refere à utilização do *origami* em sala de aula, mostrando atividades relacionadas ao estudo de frações, ângulos, polígono, poliedros e funções.

As atividades desenvolvidas são sugeridas no trabalho com alunos do ensino fundamental, desde a primeira série.

No estudo realizado por Novaes (2005) encontramos a busca de uma proposta que leve os alunos a fazerem conjecturas para determinados resultados e posteriormente as demonstrem, desenvolve isto fazendo uso do *origami*.

Primeiramente trabalha com a congruência de ângulos opostos pelo vértice e com o sistema formado por duas retas paralelas e uma transversal, num segundo momento desenvolve o estudo de frações (adição e multiplicação), para finalizar estuda os números irracionais, passando pelo segmento áureo e razão áurea.

O trabalho desenvolvido por este autor é bem profundo no que se refere à Matemática, todas as construções têm, junto ao seu desenvolvimento, as justificativas matemáticas para se chegar a conclusão de que a construção está realmente correta.

Na *home page* do matemático Tom Hull, é possível encontrar referências à Matemática do *origami*, incluindo diagramas de modelos, tutoriais, uma vasta bibliografia sobre o assunto e *links* para *sites* relacionados, sendo um auxiliar importante no levantamento de material de pesquisa.

O interesse em utilizar o *origami* em sala de aula está ligado ao fato de sua construção trabalhar com materiais e ferramentas baratas e de fácil aquisição, proporcionar um meio para a manipulação de objetos geométricos e ter processos de construção lógicos.

> Na realização das dobraduras, os estudantes familiarizam-se com formas geométricas, movimentos de transformação e múltiplas linhas de simetria dentro de uma mesma figura. Noções de retas perpendiculares, retas paralelas, figuras planas e sólidas, congruência, bissetrizes de ângulos, relações entre áreas e proporcionalidade poderão ser introduzidas de maneira igualmente eficaz. As dobraduras possibilitam ainda o desenvolvimento de atividades relacionadas ao estudo de frações, aritmética, álgebra e funções dentre outros. (RÊGO et al, 2003, p. 18)

Neste contexto, o estudo aqui realizado procura desenvolver, com o uso do *origami* e caleidoscópio, alternativas para o ensino de Geometria em sala de aula.

2.1.3 *Construções por dobraduras*

2.1.3.1 Axiomas e construções fundamentais

As construções geométricas fundamentais são realizadas com o uso de régua não graduada e compasso, sendo possíveis pelo desenvolvimento de uma seqüência de passos que obedecem a um conjunto de axiomas sistematizados por Euclides e expostos em seu mais

importante trabalho: **Os Elementos**[8]**.**

Contudo, essas construções fundamentais também podem ser feitas por meio de dobraduras no papel. Isso se torna possível devido a um conjunto estruturado de axiomas, que constituem o método de construção geométrica por dobraduras no papel, ou método *origami*. O método *origami* consiste em um conjunto de axiomas formulado pelo matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita. Dentre as possíveis construções realizadas por esse método estão a trisseção de um ângulo qualquer e a duplicação do volume de um cubo, construções estas que não podem ser realizadas utilizando-se apenas régua não graduada e compasso.

Para apresentar esse conjunto de axiomas tomamos como base os estudos realizados por Mattos (2001), onde inicialmente parte-se de um conjunto de axiomas ao qual são adicionados novos axiomas, implicando em novas construções geométricas que estão relacionadas com o corpo algébrico envolvido, possibilitando, assim, estender o corpo anterior. Essas construções são realizadas a partir do novo conjunto de números construtíveis[9] formado pelo conjunto estendido.

Os processos de construção *origami* são fundamentados pela álgebra dos números construtíveis e os axiomas estão colocados obedecendo a uma seqüência que começa com o corpo dos números Thalianos (a estrutura deste corpo é determinada pelos axiomas 1, 2 e 3), seguido do corpo dos números Pitagóricos (que se tem ao introduzir o axioma 4), Euclideanos (o axioma 5 torna possível as construções Euclideanas), até se chegar a construção do corpo dos números *origami* (com a introdução do axioma 6). "Assim, cada conjunto de números é obtido através dos axiomas que são acrescidos ao conjunto de axiomas já existentes. Procuramos, assim, descrever a relação existente entre a teoria algébrica que envolve a extensão de corpos e a geometria elementar". (MATTOS, 2001, p. 68)

2.1.3.2 Axiomas de Huzita (conforme MATTOS, 2001, p.68)

O conjunto de axiomas necessários para realizar construções geométricas por meio de dobraduras no papel é dado por[10]:

[8] **Os Elementos:** Trabalho composto de 465 proposições distribuídas em treze livros, que versam sobre Geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. Primeiro sistema de idéias desenvolvido pelo homem de forma rigorosa. Considerada modelo de raciocínio dedutivo e descrição do espaço.

[9] De acordo com Mattos (2001) um "número α é dito construtível se, através de procedimentos baseados em uma geometria, podemos construir um segmento de reta de comprimento α. Se temos as construções Euclideanas tradicionais, α será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de régua e compasso. Se temos a geometria Origami, α será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de dobraduras no papel". p. 67

[10] Os pontos, retas e ângulos construtíveis a que o autor se refere são construtíveis por dobraduras.

Axioma 1 *A reta unindo dois pontos construtíveis por dobradura é uma reta construtível.*

Axioma 2 *O ponto de interseção entre duas retas construtíveis é um ponto construtível.*

Axioma 3 *O bissetor perpendicular do segmento que une dois pontos construtíveis é uma reta construtível (mediatriz).*

Axioma 4 *A reta bissetriz de qualquer ângulo construtível dado pode ser construída.*

Axioma 5 *Dada uma reta construída* l*, e os pontos construídos* ***P*** *e* ***Q****, a reta que passa através de* ***Q****, refletindo* ***P*** *sobre* l**,** *se existir, poderá ser construída.*

Axioma 6 *Dadas as retas construídas* l *e* m*, e os pontos construídos* ***P*** *e* ***Q****, então a reta que reflete simultaneamente* ***P*** *sobre* l *e* ***Q*** *sobre* m*, se existir, poderá ser construída.*

O axioma 6 permite as construções de raízes cúbicas, resolvendo o problema da duplicação do cubo, usando para tal a interseção de parábolas. Ele ainda admite a construção de tangentes a duas parábolas como uma construção nova.

Esse conjunto de axiomas dá forma abstrata às construções de retas, realizadas pela formação de vincos no papel e, pela interseção desses vincos, constroem-se pontos que são chamados de números *origami*. Por meio dos procedimentos que levam às construções de retas e pontos é que se estabelecem os passos para as construções realizadas no plano *origami.* Vale ressaltar que, sobre uma reta construída, existirão pontos que não são necessariamente construtíveis.

No plano *origami* as retas são os elementos fundamentais, ou seja, para realizar qualquer construção sempre começaremos por construir uma dobra, que determina uma reta. Assim, as retas e a interseção delas são consideradas os elementos fundamentais de todas as construções por dobraduras no papel.

A seguir, procuramos estabelecer, de acordo com Mattos (2001), os procedimentos necessários para implementação do conjunto de axiomas que permite formar o corpo dos números *origami*, $\mathcal{O}$. Este conjunto de axiomas é descrito de maneira a relacioná-los com as construções Euclideanas por régua e compasso.

2.1.3.3 Procedimentos geométricos fundamentais do *origami*

Os procedimentos geométricos fundamentais do *origami* são enumerados de (O1) a (O7*) e estão aqui descritos literalmente, como no trabalho de Mattos (2001, p.113-120)[11].

Observação: Em Mattos encontramos algumas notações que não condizem com a terminologia correta, então citaremos aqui a maneira considerada, por nós, adequada de escrever cada termo.

Quando escreve $\mathbf{P} = l_1 \cap l_2$, o mais adequado seria $\{\mathbf{P}\} = l_1 \cap l_2$.

Ao se referir a $c = \{\mathbf{M}; r\}$ quer dizer, *circunferência c de centro M e raio r.*

O *ângulo bissetor* a que o autor faz referência é a *reta bissetriz.*

Ao invés de *reta bissetora* o correto é *mediatriz.*

No lugar de *segmento ortogonal* a terminologia adequada seria *segmento perpendicular.*

(O1) Dadas duas retas não paralelas l_1 e l_2, pode-se determinar um único ponto de interseção $\mathbf{P} = \boldsymbol{l_1} \cap \boldsymbol{l_2}$.

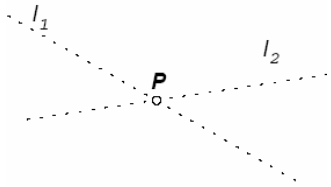


figura 2.2

(O2) Dadas duas retas paralelas l_1 e l_2 podemos determinar uma reta m, paralela e eqüidistante às retas dadas, fazendo coincidir l_1 com l_2 através de uma dobra que reflita l_1 sobre l_2 (paralela média).

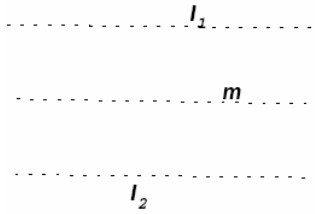


figura 2.3

[11] A figuras 2.2 a 2.10 foram retiradas de Mattos (2001).

(O3) Dadas duas retas l_1 e l_2, que possuem interseção num ponto **P**, podemos determinar seu ângulo bissetor (bissetriz) dobrando l_1 sobre l_2. A reta bissetriz reflete l_1 sobre l_2.

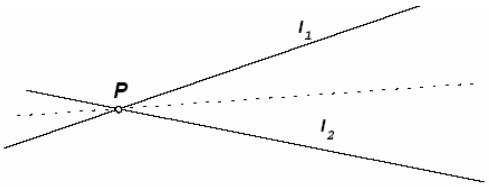


figura 2.4

(O4) Dados dois pontos distintos **P** e **Q**, podemos encontrar por dobradura uma única reta $\overleftrightarrow{PQ}$ ligando esses dois pontos.

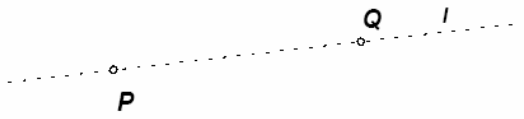


figura 2.5

(O5) Dados dois pontos distintos **P** e **Q**, podemos dobrar uma única perpendicular *b*, bissetora do segmento de reta $\overleftrightarrow{PQ}$, dobrando de modo que se faça coincidir **P** e **Q**. Esta reta é a mediatriz *b* do segmento $\overleftrightarrow{PQ}$.

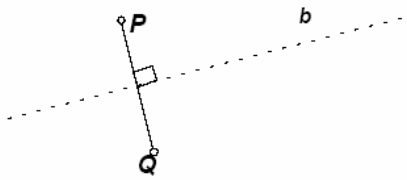


figura 2.6

(O6) Dados um ponto **P** e uma reta *l*, podemos dobrar *l* sobre si mesma, encontrando uma única reta *l'* perpendicular a *l* que possui **P**.

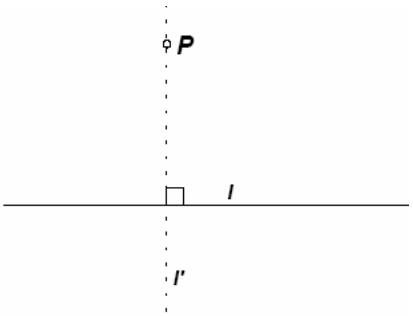


figura 2.7

(O7) Dados um ponto **P** e uma reta *l*, podemos encontrar qualquer tangente à parábola com foco **P** e diretriz *l*. Especificamente, dado um ponto **Q** qualquer, externo ou sobre a parábola, podemos encontrar, por dobraduras, as tangentes à parábola que possuem **Q**.

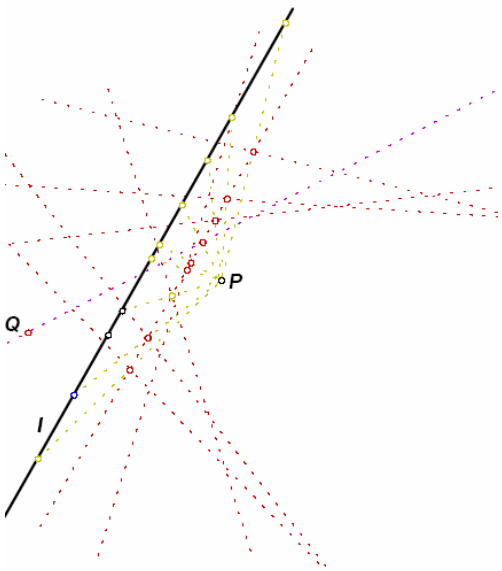


figura 2.8

(O7*) Dados os pontos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$, que podem eventualmente ser idênticos, $\mathbf{P = P_1 = P_2}$ (fig. 2.9) e as retas l_1 e l_2, que podem eventualmente ser idênticas, $l = l_1 = l_2$ (fig. 2.10), podemos encontrar as tangentes comuns às parábolas p_1 e p_2, com focos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ e diretrizes l_1 e l_2, respectivamente, realizando uma única dobra que leva **P** ao mesmo tempo em l_1 e l_2, fazendo **P** coincidente com $l_1 \cap l_2$, para o caso da figura 2.9. Todavia, a figura 2.10 mostra o caso em que os focos distintos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ são levados na diretriz comum. As retas formadas pelas dobras possuem interseção pertencente à reta *l*.

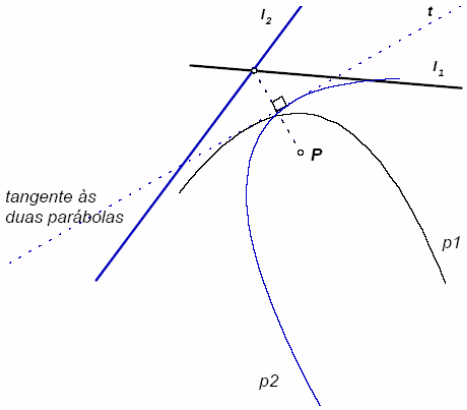


figura 2.9

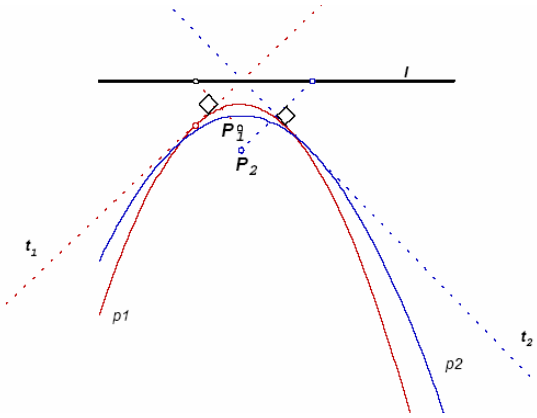


figura 2.10

O procedimento ($\mathcal{O}7^*$) é o que faz a Geometria do *origami* ser, fundamentalmente, diferente das construções Euclideanas que utilizam apenas régua não graduada e compasso. Estes últimos instrumentos podem realizar apenas os procedimentos ($\mathcal{O}1$) a ($\mathcal{O}7$) do *origami*, enquanto que o procedimento ($\mathcal{O}7^*$) não é possível, pois ($\mathcal{O}7^*$) depende de pontos obtidos a partir das interseções de cônicas.

2.1.3.4 Procedimentos geométricos fundamentais das construções com régua não graduada e compasso

Um problema envolvendo construções geométricas poderá ser resolvido com a régua não graduada e compasso se efetuado através dos procedimentos ($\mathcal{E}1$) a ($\mathcal{E}5$), descritos a seguir exatamente como está em Mattos (2001, p.121-124)[12].

($\mathcal{E}1$) Dados dois pontos distintos **A** e **B**, usando uma régua, pode-se traçar uma única reta $\overline{AB}$ contendo ambos os pontos.

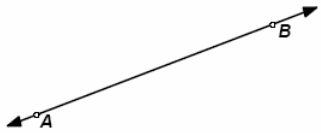


figura 2.11

($\mathcal{E}2$) Dados um ponto **M** e um segmento de reta de comprimento $r > 0$, usando o compasso, pode-se traçar um único círculo $c = \{\mathbf{M}; r\}$, tendo **M** como centro e r como raio.

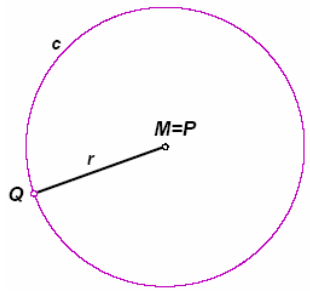


figura 2.12

O raio será dado por um segmento de reta ligando dois pontos conhecidos **P** e **Q**, um dos quais pode ser o ponto **M,** com o outro ponto pertencendo ao círculo c.

($\mathcal{E}3$) Dadas duas retas não paralelas l_1 e l_2, pode-se determinar o único ponto de interseção entre elas, o qual denomina-se: $\mathbf{P} = l_1 \cap l_2$.

[12] As figuras 2.11 a 2.14 foram retiradas de Mattos (2001).

(&4) Se são dados um círculo $c = \{\mathbf{M}; r\}$ e uma reta l, tal que o segmento ortogonal à reta l, com extremidade no ponto **M**, possui medida menor que r, então se pode determinar o(s) ponto(s) de interseção entre c e l.

(&5) Dados dois círculos $c_1 = \{\mathbf{M}_1; r_1\}$ e $c_2 = \{\mathbf{M}_2; r_2\}$ tais que:

i) nenhum contém o centro do outro em seu interior e a medida do segmento $\overline{M_1M_2}$ não é maior que a soma de seus raios;

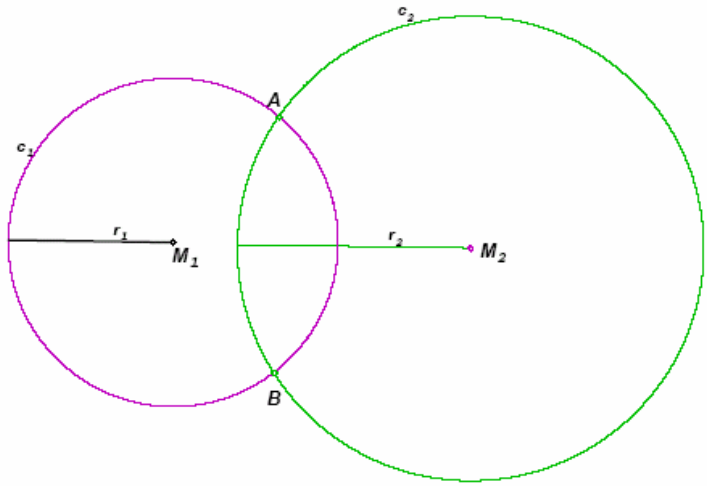


figura 2.13

ou

ii) um círculo contém o centro do outro em seu interior, e a medida do segmento $\overline{M_1M_2}$ não é menor que a diferença entre os seus raios. Então, é possível determinar os pontos de interseção entre c_1 e c_2, como nas figuras 2.13 e 2.14.

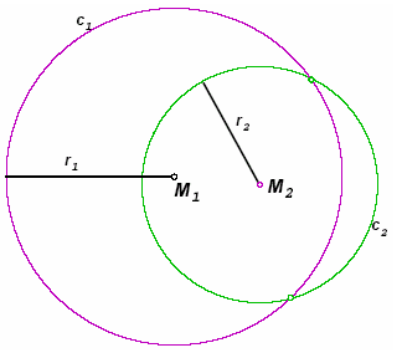


figura 2.14

2.1.3.5 Descrevendo os procedimentos do *origami*

A seguir, estão descritos os procedimentos do *origami* sobre a folha de papel, que é considerada como o plano *origami* e estão colocados aqui exatamente como Mattos (2001,

p.124-132) os descreve[13]. Este detalhamento tem por objetivo verificar que se podem utilizar os procedimentos ($\mathcal{O}1$) a ($\mathcal{O}7$*) como ferramentas básicas para construções no plano *origami*.

Em ($\mathcal{O}1$), são utilizados os vincos originados pela dobradura de duas retas não paralelas, e a interseção entre ambas determina o ponto sobre o plano *origami.*

Para realizar ($\mathcal{O}2$) parte-se de duas retas paralelas, construídas através da dobradura de uma das duas sobre a outra, sendo possível determinar, através deste vinco formado, uma terceira reta, paralela e eqüidistante às duas retas dadas.

Havendo interseção entre as retas dadas, quando se realiza a dobradura de uma das retas sobre a outra, como na figura 2.15, temos a determinação da bissetriz do ângulo formado por estas retas, o que determina o ângulo bissetor entre elas. Desta forma, realizamos o procedimento ($\mathcal{O}3$).

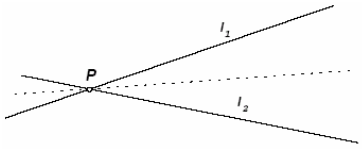


figura 2.15

Da maneira como descrito acima, o procedimento ($\mathcal{O}2$) realiza uma translação de uma reta, e o procedimento ($\mathcal{O}3$) realiza uma rotação em torno do ponto de interseção entre as retas dadas.

É de fácil verificação o procedimento ($\mathcal{O}4$). Uma vez estabelecidos dois pontos distintos sobre o plano do papel, conseguimos realizar um único vinco, por meio de uma dobradura que contenha esses dois pontos, assim determinando a reta que passa por esses dois pontos.

Para ($\mathcal{O}5$) temos que, uma vez definido o segmento $\overline{PQ}$, podemos realizar uma dobra para obter um dos pontos, que pode ser **Q**, coincidente com outro ponto denominado **Q'**. Teremos, assim, gerado uma reta bissetora *b* (mediatriz) desse segmento, determinado pelos pontos **Q** e **Q'.** Se **P** pertence a um segmento $\overline{PQ}$**,** ao realizar esse procedimento reflete-se o segmento $\overline{PQ}$ em outro segmento $\overline{P'Q'}$, em relação à reta *b*, como pode ser visto na figura 2.16.

[13] As figuras 2.15 a 2.22 foram retiradas de Matttos (2001).

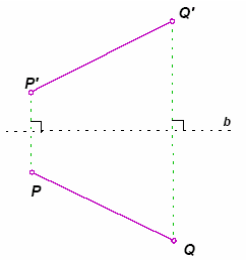


figura 2.16

Na verificação de (O6), consideramos uma reta *l* e um dado ponto **P**. Ao dobrar a reta *l* sobre si própria, a dobradura que contém **P** será única. Assim, para (O6) podemos ter **P** pertencendo à reta *l* ou não.

O procedimento (O7) pode ser realizado, como na figura 2.17, desde que sejam dados um ponto **P** e uma reta *l*, com **P** necessariamente fora desta reta. Podemos dobrar **P** sobre qualquer ponto pertencente à reta *l*. Dessas dobraduras, resultam, por (O5) e (O6), uma infinidade de retas bissetoras formadas de cada segmento determinado por $\overline{PP^i}$, onde $\mathbf{P^i}$ é um ponto qualquer da reta *l*.

O conjunto das retas bissetoras formadas será precisamente o conjunto das tangentes à parábola que possui **P** como foco e *l* como diretriz. Essas retas bissetoras formam a envoltória que dá forma à parábola, como se pode observar na figura 2.18. Para completar (O7), ao tomarmos um ponto **Q** diferente de **P**, tal que não pertença ao interior de qualquer parábola que tenha **P** como foco, será possível, por (O6), realizar uma dobradura de **P** sobre *l*, de modo que **Q** pertença a uma das retas bissetoras, que é tangente à parábola formada pela referida envoltória, como na figura 2.18.

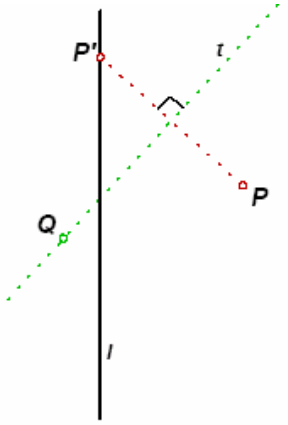


figura 2.17

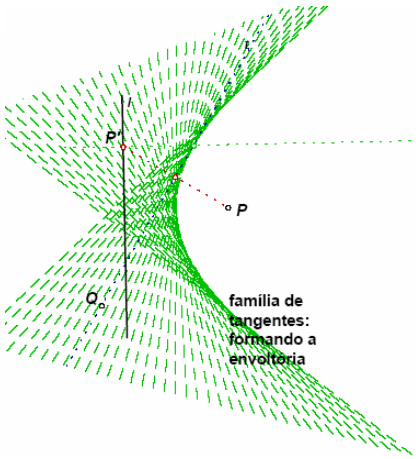


figura 2.18

Para (O7*), dados dois pontos $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ e duas retas l_1 e l_2, é possível realizar uma dobradura que leve $\mathbf{P}_1$ sobre l_1, e $\mathbf{P}_2$ sobre l_2, através de um único vinco, realizado na folha de papel. A reta bissetora formada pelo único vinco comum será tangente às duas parábolas com focos $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, e cujas retas diretrizes são dadas por l_1 e l_2, quando esta tangente existe, como se pode observar nas figuras 2.19 e 2.20.

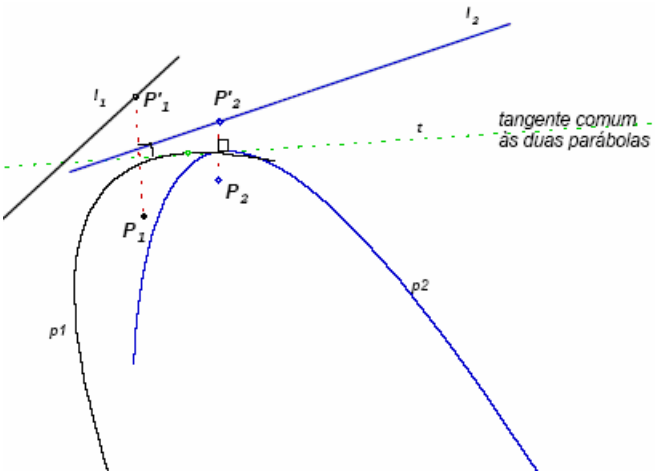


figura 2.19

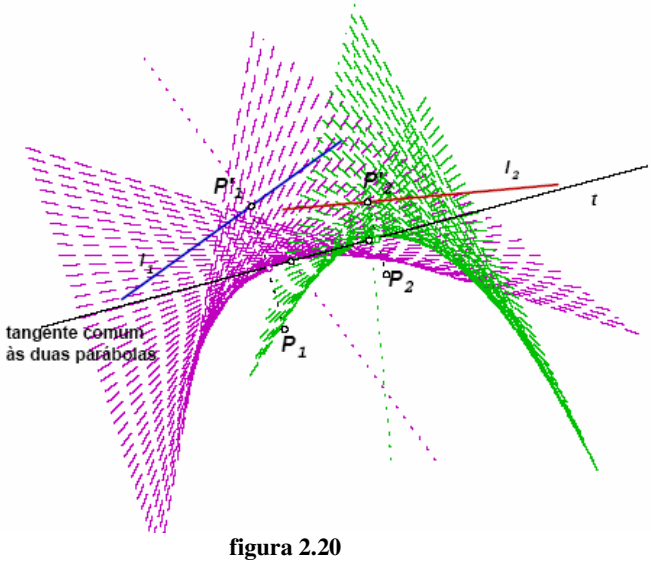


figura 2.20

Se $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ forem idênticos, ao realizar o processo acima (ver figura 2.21), encontramos uma única reta tangente, pela dobradura de $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ sobre o ponto de interseção **P'**, entre l_1 e l_2.

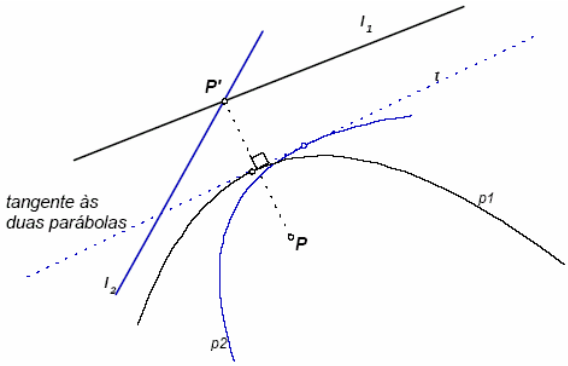


figura 2.21

Para o caso de as diretrizes serem iguais, $l = l_1 = l_2$, existem duas tangentes comuns a serem determinadas. Na verdade, essas serão as retas que formam os ângulos bissetores entre a diretriz comum e a reta unindo os dois focos. Portanto, nesse caso particular, encontram-se as tangentes comuns utilizando os métodos Euclideanos por régua e compasso, dado que o problema torna-se linear ou quadrático, figura 2.22.

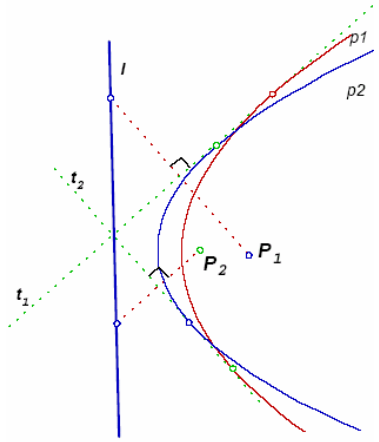


figura 2.22

Em Mattos (2001, cap. 6) é possível ver como as construções Euclideanas com régua e compasso podem ser realizadas pelas construções por dobraduras (Anexo 1).

Para finalizar, ao realizar as construções geométricas fundamentais com dobraduras criamos um modelo para a Geometria descrita nesse conjunto de axiomas, tendo assim uma outra maneira de representar esses conceitos sem ser por meio do uso de régua não graduada e compasso.

Utilizando o modelo criado para representar os axiomas podemos realizar construções geométricas como as dos polígonos, por exemplo, que darão fundamentação para a construção dos poliedros.

2.2 O Caleidoscópio e a Educação Matemática

2.2.1 *Caleidoscópio*

O caleidoscópio é um instrumento formado pela articulação de dois ou mais espelhos, devidamente ajustados, de modo a fornecer imagens repetidas e perfeitas. Com a combinação de espelhos se produz o efeito da multiplicação da imagem, cujo número de imagens formadas está diretamente ligado ao ângulo entre dois espelhos.

Nas obras de Jacobs (1974), O'Daffer & Clemens (1977) e Ball e Coxeter (1987) é possível encontrar referências ao uso de caleidoscópio em atividades educacionais, assim como em Barbosa (1993) e Murari (1999), que em seus trabalhos desenvolvem atividades para serem aplicadas a alunos de qualquer série e aos professores em formação ou atualização, que possibilitam o desenvolvimento da percepção espacial, de habilidades gráficas e da criatividade. Mais recentemente temos os trabalhos de Almeida (2003), Martins (2003), Murari (2004), Batistela (2005), Gouvêa (2005), Reis (2006) e Santos (2006) também relacionados ao uso do caleidoscópio em sala de aula.

Os conjuntos formados de dois, três ou quatro espelhos articulados, perpendiculares a um plano são chamados de *caleidoscópios planos*[14] e o conjunto de três espelhos articulados na forma de uma pirâmide invertida, que possibilita a visualização de pontos sobre uma esfera, é chamado de *caleidoscópio generalizado*.

2.2.1.1 *Caleidoscópio Plano*

2.2.1.1.1 Caleidoscópio com dois espelhos

Quando se articulam dois espelhos planos (fig.2.23), tem-se a repetição perfeita de imagens, dependendo do ângulo entre os espelhos.

figura 2.23

[14] A construção detalhada e maiores explicações sobre esses caleidoscópios podem ser encontradas em Murari (1999), Martins (2003), Almeida (2003) e Batistela (2005)

O número de imagens, conforme Barbosa (1993), é obtido pela fórmula:

$$n = \frac{2\pi - R}{\hat{z}} + n'$$

onde $\hat{z}$ é o ângulo entre os espelhos e n'= -1,0,1,2 se R for respectivamente

$$0,\ 0 < R \leq 2x,\ 2x < R \leq 2y \text{ ou } 2y < R < 2z,$$

onde R é o resto da divisão de 360° por $2\hat{z}$. A figura 2.24 mostra como obter imagens de um ponto.

Observações:

1. O ponto objeto P e todas as suas imagens produzidas pelos dois espelhos pertencem a uma circunferência de centro O.

2. $AB = \hat{z}$, $PA = \hat{x}$ e $PB = \hat{y}$. P fornece em E_1 a imagem P_1, e em E_2 a imagem Q_1. P_1 fornece em E_2 a imagem P_2 e Q_1, fornece em E_1 a imagem Q_2. Temos que $Q_1 P_2 = 2x$ e $P_1 Q_2 = 2y$.

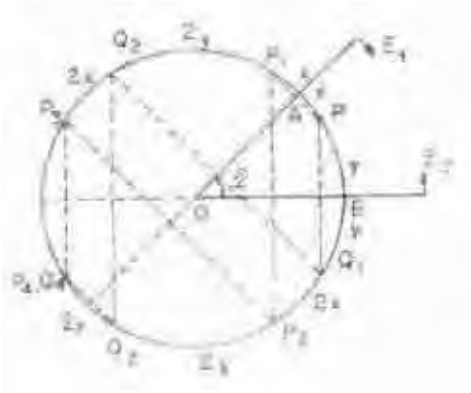


figura 2. 24

Por meio destes caleidoscópios podem-se apresentar noções de polígonos regulares, simetria e reflexão.

2.2.1.1.2 Caleidoscópio com três espelhos

2.2.1.1.2.1 Caleidoscópio educacional individual com três espelhos

Nesse caleidoscópio os espelhos formam uma superfície lateral de um prisma triangular, onde são formadas imagens múltiplas. As imagens obtidas em um dos espelhos produzem novas imagens nos outros dois, estendendo-se sucessivamente por todo o plano.

Como acontece com os dois espelhos, para que se tenham imagens coincidentes e repetição perfeita das figuras obtidas, cada ângulo deve satisfazer a condição de o dobro ser divisor de 360°, portanto, sendo $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ os ângulos dos espelhos, devemos ter:

$$\frac{2\pi}{2\hat{a}} = \frac{\pi}{\hat{a}} = n_1; \frac{\pi}{\hat{b}} = n_2 \text{ e } \frac{\pi}{\hat{c}} = n_3$$

Segue de $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c} = \pi$, que a condição para n_1, n_2 e n_3 é $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1$, cujas soluções inteiras podem ser deduzidas, e são: (3,3,3), (2,4,4) e (2,3,6), o que corresponde a ter-se os valores de $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ iguais a (60°,60°,60°), (90°,45°,45°) e (90°,60°,30°). Caleidoscópios com tais ângulos recebem os nomes: *eqüilátero* (fig. 2.25), *isósceles* (fig. 2.26) e *escaleno* (fig. 2.27).

Podem ser utilizados no estudo das pavimentações do plano por polígonos.

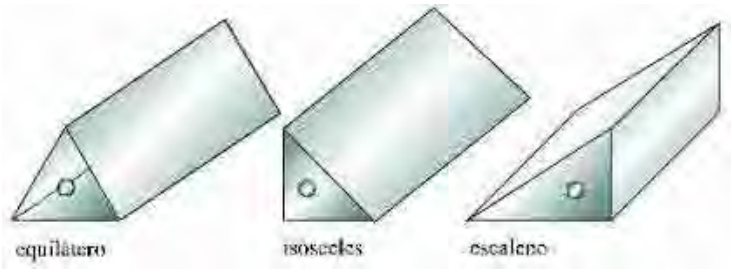


figura 2.25 **figura 2.26** **figura 2.27**

2.2.1.1.2.2 Caleidoscópio educacional modificado com três espelhos

Para a formação desse instrumento utilizamos um caleidoscópio de dois espelhos articulados, ao qual um terceiro espelho é encostado verticalmente, formando ângulos não fixos (fig. 2.28). Murari (1999) sugere que o uso deste caleidoscópio é mais adequado para o trabalho em grupo, além de que, por meio deste tipo de caleidoscópio obtêm-se os três tipos de caleidoscópios existentes (eqüilátero, isósceles e escaleno).

figura 2.28

2.2.1.1.3 Caleidoscópio com quatro espelhos planos articulados, formando uma superfície prismática de base retangular

Esse material pode ser obtido pela união de dois caleidoscópios formados por dois espelhos articulados ou conforme mostrado na figura 2.29. Só existem dois tipos de caleidoscópios com quatro espelhos que produzem repetição perfeita das figuras obtidas por reflexões: o quadrado e o retangular (ver Murari, 1999).

figura 2.29

2.2.2 *Caleidoscópio generalizado*

Como o trabalho aqui desenvolvido utiliza o caleidoscópio generalizado para visualizar os poliedros, apresentamos abaixo sua construção detalhada.

Caleidoscópio generalizado é a denominação dada por Ball e Coxeter (1987) ao conjunto formado por três espelhos, que possibilitam a visualização de pontos-objeto numa esfera. Nestes caleidoscópios o terceiro espelho é colocado horizontalmente ao invés de verticalmente, determinando, analogamente aos caleidoscópios planos, a formação de três ângulos entre eles (fig. 2.30). Estes espelhos formam uma pirâmide triangular (aberta na base), constituindo um triedro de espelhos. Assim, temos três ângulos diedrais que são $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$, (onde *l, m* e *n* são divisores inteiros de 180°) e que determinarão a posição de cada espelho para formar o caleidoscópio especial ou generalizado.

figura 2.30

Desde que, para espelhos planos, um objeto e imagem são eqüidistantes do plano do espelho, pode-se concluir que todas as imagens de um ponto no caleidoscópio generalizado pertencem a uma esfera, cujo centro é o ponto de intersecção dos planos dos três espelhos. Sobre a esfera, estes planos cortam-se formando um triângulo esférico, de ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$, sendo a sua área um divisor inteiro da área total da esfera a ser visualizada.

Desse modo, tomando o raio da esfera como unitário, a área desta será 4π, enquanto que a área de cada triângulo formado pelos ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$ sobre essa esfera é $\left(\frac{\pi}{l}\right)+\left(\frac{\pi}{m}\right)+\left(\frac{\pi}{n}\right)-\pi$ (resultado da Geometria esférica). Então, temos que a área da esfera dividida pela área de cada triângulo é um número inteiro positivo. Assim,

$$\frac{4\pi}{\pi/l+\pi/m+\pi/n-\pi}>0 \Rightarrow \frac{4\pi}{\pi\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1\right)}>0 .$$

Dividindo os membros dessa inequação por π e observando que o denominador deve ser maior que zero, obtém-se a inequação:

$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > 1$, para que se tenham ângulos que possibilitem a repetição perfeita de imagens desse triângulo tesselando a esfera.

O conjunto solução da inequação anterior são as ternas (2,2,*n*), (2,3,3), (2,3,4) e (2,3,5), ou seja, para cada terna de solução correspondem os caleidoscópios cujos ângulos são o resultado da divisão de 180° por esta terna. Obtemos assim os caleidoscópios de ângulos (90°, 90°, *n*), (90°, 60°, 60°), (90°, 60°, 45°) e (90°, 60°, 36°) respectivamente.

Nesse caso, temos quatro tipos de caleidoscópios (três bem definidos e um que pode variar dependendo do valor dado a *n*, com $n \in$ N), suas construções devem ser feitas observando que os ângulos são as medidas dos lados de triângulos esféricos, de ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$.

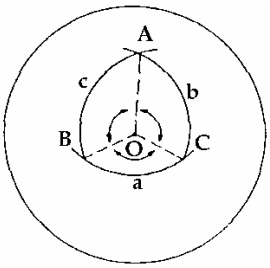


figura 2.31

Temos, então, os ângulos que irão determinar a maneira como os espelhos deverão ser cortados para formação dos caleidoscópios generalizados, os quais são utilizados para visualização de pavimentações esféricas e, também, de poliedros. Esses ângulos são determinados pela lei dos cossenos (Geometria esférica); então, para um melhor entendimento, mostramos na figura 2.31 um triângulo esférico, através do qual explicamos como chegar ao valor do ângulo do espelho a ser utilizado para construção do caleidoscópio.

Se sobre uma esfera temos três pontos distintos (aqui nomeados de *A*, *B*, *C*), não pertencentes a um mesmo círculo máximo, e unem-se esses pontos dois a dois, obtemos um *triângulo esférico*. Assim, no triângulo *ABC*, temos que: *AB*, *BC* e *AC* são os lados do triângulo, no qual $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$.

Os ângulos esféricos $\hat{A}, \hat{B} \text{ e } \hat{C}$ são, também, medidos pelos ângulos diedrais. Por exemplo, $\hat{A}$ é medido pelo ângulo diedral *B-OA-C*. As medidas dos lados *a*, *b* e *c* são dadas pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera. Por exemplo, $a = B\hat{O}C; \quad b = A\hat{O}C; \quad c = A\hat{O}B$

Em qualquer triângulo esférico vale a lei dos cossenos para os lados. Conforme Nielsen (1966) temos:

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + sen\, \hat{B}\, sen\, \hat{C} \cos a$$

$$\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cos \hat{C} + sen\, \hat{A}\, sen\, \hat{C} \cos b$$

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + sen\, \hat{A}\, sen\, \hat{B} \cos c$$

Calculando o ângulo central dos setores circulares, para os caleidoscópios descritos anteriormente, temos:

2.2.2.1 *Caleidoscópio de ângulos (90°, 60°,60°)*

Para este caleidoscópio: $\hat{A} = 90°$ e $\hat{B} = \hat{C} = 60°$.

Calculando o valor de *a* temos:

► $\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + sen\, \hat{B}\, sen\, \hat{C} \cos a$

cos 90° = - cos 60°. cos 60° + sen 60°. sen 60°. cos *a*,

$$0 = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\cos a \Rightarrow \cos a = \frac{1}{3}$$

Então, ***a*** **≅ 70,53°** ou ***a*** **≅ 70°32'.**

Calculando o valor de *b* temos:

► $\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cos \hat{C} + sen\, \hat{A}\, sen\, \hat{C} \cos b$

cos 60° = - cos 90° cos 60° + sen 90° sen 60° cos *b*

$$\frac{1}{2} = -0.\frac{1}{2} + 1.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos b \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos b \Rightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então, ***b*** **≅ 54,73°** ou ***b*** **≅ 54°44'**, consequentemente, este também é o valor de ***c***.

Assim, a terna (2,3,3) gera caleidoscópio com ângulos diedrais (90º, 60º, 60º) e terá ângulos centrais conforme a terna: (70.53°, 54.73°, 54.73°).

2.2.2.2 *Caleidoscópio de ângulos (90°, 60°,45°)*

Para este caleidoscópio: $\hat{A}$= 90°, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 45°$.

Calculando o valor de *a* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + sen\,\hat{B}\,sen\,\hat{C}\cos a$$

cos 90° = - cos 60°. cos 45° + sen 60°. sen 45°. cos *a*,

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\cos a \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então, ***a*** ≅ **54,73**° ou ***a*** ≅ ***54°44'.***

Calculando o valor de *b* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{B} = -\cos\hat{A}\cos\hat{C} + sen\,\hat{A}\,sen\,\hat{C}\cos b$$

cos 60° = - cos 90°. cos 45° + sen 90°. sen 45° cos *b* ,

$$\frac{1}{2} = -0.\frac{\sqrt{2}}{2} + 1.\frac{\sqrt{2}}{2}\cos b \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos b \Rightarrow \cos b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então, ***b* = 45°.**

Calculando o valor de *c* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{C} = -\cos\hat{A}\cos\hat{B} + sen\,\hat{A}\,sen\,\hat{B}\cos c$$

cos 45° = - cos 90°. cos 60° + sen 90°. sen 60°. cos *c*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.\frac{1}{2} + 1.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos c \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos c \Rightarrow \cos c = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Então, ***c*** ≅ **35,26**° ou ***c*** ≅ ***35°16'.***

Assim, a terna (2,3,4) gera caleidoscópio com ângulos diedrais (90º, 60º, 45º) e terá ângulos centrais conforme a terna: (35,26°, 45°, 54,73°).

2.2.2.3 *Caleidoscópio de ângulos (90°, 60°,36°)*

Para este caleidoscópio: $\hat{A}$= 90°, $\hat{B}$ = 60° e $\hat{C}$ = 36°.

Calculando o valor de *a* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + sen\,\hat{B}\,sen\,\hat{C}\cos a$$

cos 90° = - cos 60°. cos 36° + sen 60°. sen 36°. cos *a*,

$$0 = -\frac{1}{2}.\cos 36° + \frac{\sqrt{3}}{2}.sen36°.\cos a \Rightarrow \cos a = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\cos 36°}{sen36°} \Rightarrow \cos a \cong 0{,}795$$

Então, $a \cong$ **37,38**° ou $a \cong$ ***37°23'.***

Calculando o valor de *b* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{B} = -\cos\hat{A}\cos\hat{C} + sen\,\hat{A}\,sen\,\hat{C}\cos b$$

$$\cos 60° = -\cos 90° \cos 36° + \text{sen } 90° \text{ sen } 36° \cos b$$

$$\frac{1}{2} = -0.\cos 36 + 1.sen36°.\cos b \Rightarrow \frac{1}{2} = sen36°.\cos b \Rightarrow \cos b = \frac{1}{2.sen36°} \cong 0{,}8506$$

Então, $b \cong$ **31,72**° ou $b \cong$ ***31°43'.***

Calculando o valor de *c* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{C} = -\cos\hat{A}\cos\hat{B} + sen\,\hat{A}\,sen\,\hat{B}\cos c$$

$$\cos 36° = -\cos 90°.\ \cos 60° + \text{sen } 90°.\ \text{sen } 60°.\ \cos c,$$

$$\cos 36° = -0.\left(\frac{1}{2}\right) + 1.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos c \Rightarrow \cos 36° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos c \Rightarrow \cos c = \left(2.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cos 36° \cong 0{,}934$$

Então, $c \cong$ **20,90**° ou $c \cong$ **20°54.**

Assim, a terna (2,3,5) gera caleidoscópio com ângulos diedrais (90º, 60º, 36º) e terá ângulos centrais conforme a terna: (20.90°, 31.72°, 37.38°).

2.2.2.4 *Caleidoscópio de ângulos (90°,90°,n)*

Para o caleidoscópio de ângulos (90°,90°,*n*) existem muitas possibilidades de ângulos que satisfazem essa construção. Apresentamos a seguir a descrição dos que foram utilizados neste trabalho.

O caleidoscópio (90°,90°,180°) tem A= B = 90° e C = 180°.

Calculando o valor de *a* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{A} = -\cos\hat{B}\cos\hat{C} + sen\,\hat{B}\,sen\,\hat{C}\cos a$$

$$\cos 90° = -\cos 90°.\ \cos 180° + \text{sen } 90°.\ \text{sen } 180°.\ \cos a,$$

Então a **= 90**°.

Calculando o valor de *b* temos:

$$\blacktriangleright \cos\hat{B} = -\cos\hat{A}\cos\hat{C} + sen\,\hat{A}\,sen\,\hat{C}\cos b$$

$$\cos 90° = - \cos 90°. \cos 180° + \text{sen } 90°. \text{sen } 180°. \cos b$$

Então ***b* = 90°**.

Calculando o valor de *c* temos:

$$\blacktriangleright \cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + sen\ \hat{A}\, sen\, \hat{B} \cos c$$

$$\cos 180° = - \cos 90°. \cos 90° + \text{sen } 90°. \text{sen } 90°. \cos c$$

$$-1 = -0.0 + 1.1. \cos a \Rightarrow -1 = 1. \cos c \Rightarrow \cos c = -1$$

Então, ***c* = 180°.**

Assim, a terna (2,2,1) gera caleidoscópio com ângulos diedrais (90º, 90º, 180º) e terá, também, ângulos centrais conforme a terna: (90°,90°,180°).

O caleidoscópio (90°,90°,90°) tem $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 90°$.

Calculando o valor de *a* temos:

$$\blacktriangleright \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + sen\ \hat{B}\, sen\, \hat{C} \cos a$$

$$\cos 90° = - \cos 90°. \cos 90° + \text{sen } 90°. \text{sen } 90°. \cos a,$$

$$0 = -0.0 + 1.1 \cos a \Rightarrow 0 = 1 \cos a \Rightarrow \cos a = 0$$

Então, ***a* = 90°,** consequentemente este também é o valor de ***b*** e ***c***.

Assim, a terna (2,2,2) gera caleidoscópio com ângulos diedrais (90º, 90º, 90º) e terá, também, ângulos centrais conforme a terna: (90°,90°,90°).

Os espelhos utilizados na confecção destes caleidoscópios podem ser cortados na forma de setores circulares. No Anexo 2 apresentamos uma descrição mais detalhada desse procedimento e respectiva construção dos caleidoscópios.

Como um dos objetivos deste trabalho é a visualização dos poliedros regulares e semi-regulares em caleidoscópio generalizado, apresentamos a construção de dobraduras que, quando colocadas entre o ângulo sólido formado pelos três espelhos, geram o visual desses sólidos geométricos.

A construção dessas dobraduras pode ser efetuada através de régua e compasso ou por meio do computador, o qual efetua o trabalho com maior rapidez. No próximo capítulo temos, detalhados, os procedimentos para obtenção das diversas dobraduras. Abaixo, apresentamos o software *Cabri-Géomètre II* escolhido para a confecção das dobraduras no computador.

2.3 Considerações sobre o Software *Cabri-Géomètre II*

O *software Cabri-Géomètre II* é um programa interativo, desenvolvido por Jean M. Laborde e Franck Bellemain, no Institut d'Informatique e Mathématiques Appliqées de Grenoble, da Université Joseph Fourier de Grenoble na França. Este software apresenta características que permitem utilizar o computador como uma ferramenta auxiliar no trabalho de construção das dobraduras para visualização dos poliedros em caleidoscópio generalizado.

Esse software permite, por exemplo, construir um conjunto de objetos elementares (ponto, reta, etc.) e efetuar ações sobre eles (traçar uma reta paralela a uma reta dada, determinar o ponto médio de um segmento, etc.). Torna possível certa interatividade do aluno com o meio e possibilita fazer, por comandos bem definidos em linguagem geométrica, as construções que se fazem com lápis e papel.

2.3.1 *Menus e ferramentas*

Janela de desenho: onde se fazem construções geométricas.

Barra de menu: contém menus de interface gráfica comuns ao usuário, para o gerenciamento e edição de arquivos, em conjunto com as opções do *Cabri-Géomètre II*. Os menus são: ícones de atributos, barra de menu, barra de ferramentas, janela da ajuda, janela de desenho, ponteiro de seleção, paleta de atributos e mensagem do ponteiro.

Barra de ferramentas: onze caixas de ferramenta são residentes nessa barra. Para acessar uma caixa de ferramenta, devemos pressionar, e manter pressionado o botão do mouse sobre o ícone.

Ícones de atributos: eles somente serão exibidos se selecionado o comando *Mostrar Atributos*, no menu *Opções* da barra de menu. Estes permitem modificar a aparência de objetos. Pode-se criar uma paleta de atributo (menu de divisão) arrastando um ícone dos *Ícones* de atributos para a janela de desenho.

Opção do menu Ajuda: clicar na opção do menu *Ajuda* e selecionar *Ajuda* ou pressionar a tecla F1 para alternar a janela de ajuda entre ATIVADA e DESATIVADA.

Ponteiro de seleção: é a ferramenta primária para selecionar menus e para construir figuras geométricas. A forma do ponteiro se modificará de acordo com a operação e a localização do momento.

Caixa fechar: fecha a janela e cria a caixa de diálogo que permite salvar o trabalho.

Caixa de zoom: alterna o tamanho da janela entre o atual e a tela cheia. Arrastando a caixa tamanho para um novo local, redimensiona-se a janela de desenho.

Barras de rolagem: ao clicar nas barras de rolagem e nas setas de rolagem move-se, verticalmente ou horizontalmente, o conteúdo da janela de desenho.

Nos **menus** e **caixas de ferramentas** encontramos os elementos que permitem fazer construções geométricas. Esse software trabalha a partir de objetos básicos da Geometria Euclidiana como ponto, reta, segmentos e círculos e podem-se estudar relações geométricas como interseção, paralelismos, perpendicularismos, lugar geométrico, etc.

Na parte superior da tela encontramos a barra de menus que contém as seguintes opções, devidamente expostas com seus comandos:

Arquivo: com os comandos *Novo, Abrir, Salvar, Salvar como*, *Recuperar*, *Mostrar página , Formato da impressão, Imprimir* e *Sair.*

Editar: com os comandos *Desfazer, Recortar, Copiar, Colar, Apagar, Selecionar tudo, Rever construção* e *Redesenhar.*

Opções: com os comandos *Ocultar/Mostrar atributos, Preferências* e *Configurações*.

Ajuda: com os comandos *Ajuda* e *Acerca do Cabri II.*

Logo abaixo da *barra de menus* tem-se a *caixa de ferramentas*, representada na figura 2.32, com seus respectivos nomes.

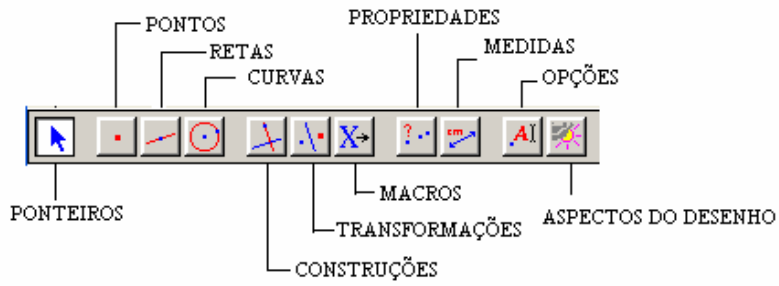


figura 2.32

Cada um desses *ícones* aciona um *sub-menu*, que permite escolher a ferramenta desejada. As opções podem ser observadas a seguir.

Ponteiros:

- Ponteiro

- Giro

- Rodar e dilatar

- Dilatar/Reduzir

Pontos:

- Ponto

- Ponto sobre objeto

- Ponto de interseção

Curvas:

- Circunferência

- Arco

- Cônica

Retas:

- Reta

- Segmento

- Semi-reta

- Vetor

- Triângulo

- Polígono

- Polígono regular

Construções:

- Reta perpendicular

- Reta paralela

- Ponto médio

- Mediatriz

- Bissetriz

- Soma de vetores

- Compasso

- Transferência de medidas

- Lugar geométrico

- Redefinir objeto

Transformações:

- Simetria axial

- Simetria

- Translação

- Rotação

- Homotetia

- Inversão

Macros:

- Objetos iniciais

- Objetos finais

- Definir macro

Propriedades:

- Alinhado

- Paralelo

- Perpendicular

- Eqüidistante

- Pertencente

Medidas:

- Distância e Comprimento

- Área

- Declive

- Medida de ângulo

- Coordenada e equação

- Calculadora

- Tabela

Opções:

- Nomear

- Comentários

- Edição numérica

- Marcar ângulo

- Bloquear/Desbloquear

- Traço de um objeto

- Animação

- Animação múltilpla

Aspectos do desenho:

- Ocultar/Mostrar

- Colorir

-Preencher

- Espessura de traço

-Pontilhar

- Modificar aparência

- Sistema de eixos

- Novos eixos

- Grade

Tendo os subsídios teóricos mais importantes podemos partir para a construção dos materiais utilizados no desenvolvimento das atividades que foram aplicadas aos alunos pesquisados. No capítulo seguinte fazemos o detalhamento dos passos para a construção dos sólidos por meio do *origami*, e das dobraduras que fornecem o visual desses sólidos em caleidoscópio generalizado.

Capítulo 3

A CONSTRUÇÃO DOS MATERIAIS

Este capítulo é dedicado ao detalhamento da construção das representações, por meio do *origami* e caleidoscópio, dos polígonos e poliedros e, também, às definições por nós adotadas para esses conceitos.

3.1 Polígonos

Definição para um polígono convexo, segundo O'Daffer & Clemens (1977):

Os pontos $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ são um conjunto de n pontos distintos em um plano onde $n>2$. Ao ligarmos os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_n P_1$, teremos um polígono somente se eles intersectarem-se unicamente nos pontos finais, e dois segmentos com um ponto final em comum não forem colineares.

Os pontos $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ são chamados de *vértices* do polígono e os segmentos $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_n P_1$ são designados de *lados*. Um segmento (outro, não sendo o lado) que liga dois vértices do polígono é denominado de *diagonal* do polígono. *Ângulo* é a ligação de dois lados consecutivos do polígono.

Um polígono é regular quando tem todos os lados e ângulos congruentes[15].

3.1.1 *Construção de polígonos por dobraduras (ou origami)*

Apresentamos aqui a construção de polígonos por *origami*. Essas construções têm os passos descritos e representados por figuras. Para a confecção do *origami* utilizamos *papel espelho*, facilmente encontrado em papelarias.

Para facilitar o entendimento dos gráficos das dobraduras apresentamos uma lista com os símbolos utilizados na sua construção.

[15] Congruente: tem a mesma medida, mas estão em lugares diferentes do plano.

_ _ _ _ _ _ linha de dobra para frente (vale)

linha de dobra para trás (montanha)

mover o papel nesta direção

virar

dobrar e desdobrar

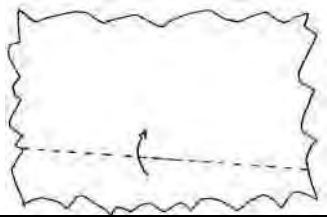
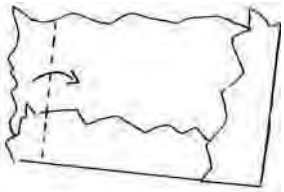
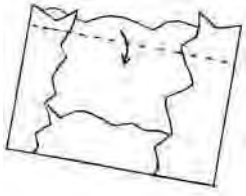
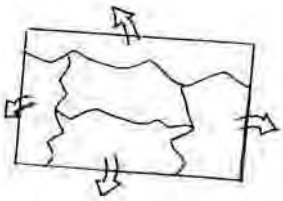
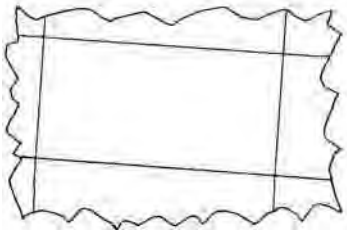
..... raio X

puxar ou abrir

vinco

3.1.1.1 *Retângulo*

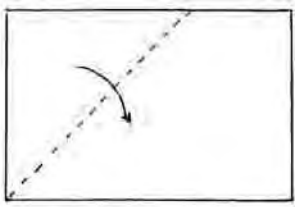
Tomando como base inicial um pedaço de papel qualquer, podemos construir um retângulo utilizando os axiomas apresentados no capítulo 2, construindo retas paralelas e perpendiculares. Construção feita por Imenes (1988, p. 08-11):

1. Dobrar. 	2. Dobrar uma perpendicular a dobra anterior.
3. Dobrar outra perpendicular à primeira dobra. 	4. Dobrar uma paralela a primeira dobra. 
4. Desdobrar o papel. 	5. Retângulo pronto. 

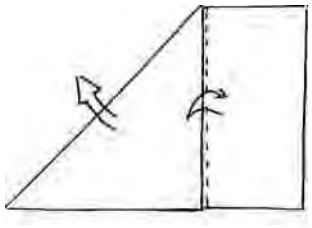
3.1.1.2 *Quadrado*

Obtemos o quadrado a partir do retângulo. Construção apresentada por Imenes (1988, p.12-13):

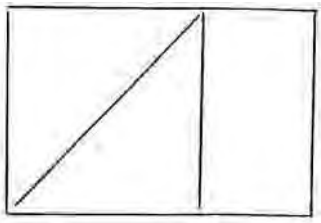
1. Dobrar fazendo o lado menor coincidir com o lado maior.



2. Dobrar e desdobrar a aba restante e abrir o papel.



3. Quadrado pronto.

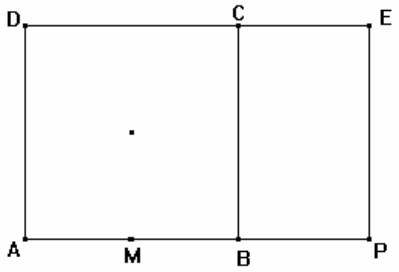


O quadrado servirá de base para a maioria das dobraduras a serem realizadas na seqüência.

3.1.1.3 *Retângulo áureo*

O retângulo áureo é um retângulo onde há certa razão (quociente) entre o seu comprimento e sua largura. Essa razão é chamada de razão áurea ou razão de ouro. Podemos encontrar exemplos dessa razão na natureza e também nas construções feitas pelo homem.

O retângulo áureo é construído tomando como base um segmento qualquer $\overline{AB}$. A partir dele constrói-se um quadrado de lado $\overline{AB}$, tendo *M* como seu ponto médio. Prolonga-se o segmento $\overline{AB}$ no sentido de *A* para *B* para determinar o ponto *P* sobre esse prolongamento, tal que a medida de $\overline{MP}$ seja igual a medida de $\overline{MC}$. O retângulo de comprimento $\overline{AP}$ e largura $\overline{AB}$ recebe o nome de retângulo áureo.



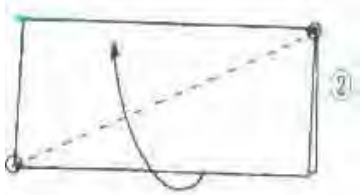
A propriedade fundamental dos retângulos áureos é dada por:

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$ essas razões têm um valor constante de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618033989... para qualquer retângulo áureo.

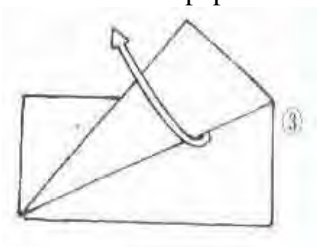
Para realizar a construção do retângulo áureo é necessário seguir estes passos, partindo de um pedaço de papel quadrado. Construção feita por Kasahara (2005, p. 72):

1. Dobrar.

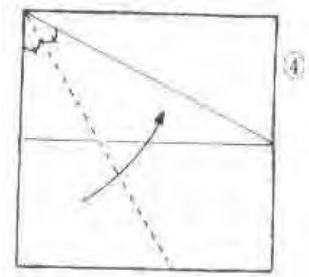
2. Dobrar para frente marcando a diagonal deste retângulo.



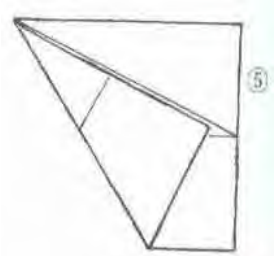
3. Abrir o papel.



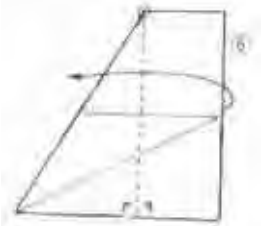
4. Dobrar a bissetriz do ângulo mostrado na figura.



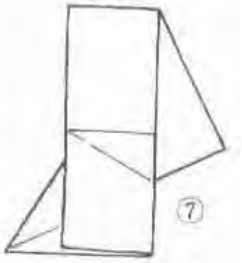
5. Virar completamente a figura para que fique como mostra o passo seguinte.



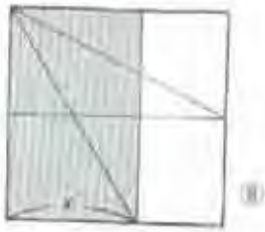
6. Dobrar esta parte para frente marcando uma dobra perpendicular à base da figura



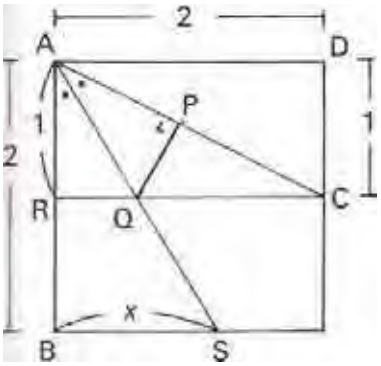
7. Figura formada depois de feita a dobra.



8. A parte escura é o retângulo procurado



Para provar que o retângulo encontrado é áureo, precisamos calcular o valor de *x*.



Uma vertical é dobrada do ponto Q no passo 8 da construção.

Prova:

De acordo com o teorema de Pitágoras, se o lado do quadrado é 2, então

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{AC}\right)^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow$$
$$\left(\overline{AC}\right)^2 = 4 + 1 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{5}.$$

Conseqüentemente, $\overline{PC} = \sqrt{5} - 1$.

Temos $\Delta ADC \sim \Delta CPQ$, assim:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{\overline{PQ}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \overline{QR}.$$

Como $\Delta ARQ \sim \Delta ABS$.

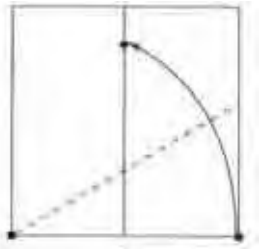
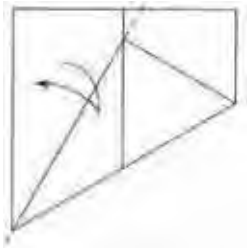
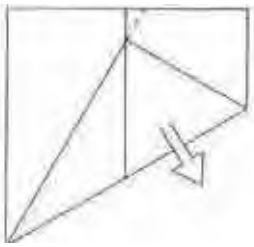
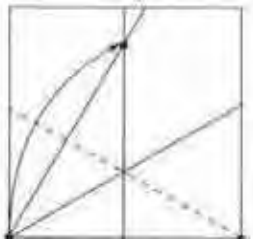
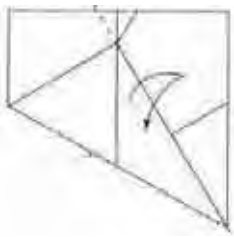
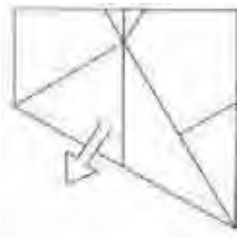
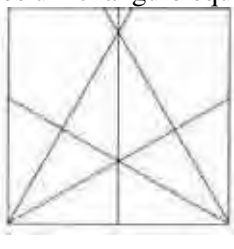
Temos $\frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BS}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{x} \Rightarrow x = \sqrt{5}-1.$

Calculando a razão áurea deste retângulo temos: $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1.618...$

Essa prova foi feita por Hisashi Abe e retirada de Kasahara (2005, p. 73).

3.1.1.4 *Triângulo eqüilátero*

Para a construção de um triângulo eqüilátero por dobraduras, partimos de um papel quadrado.

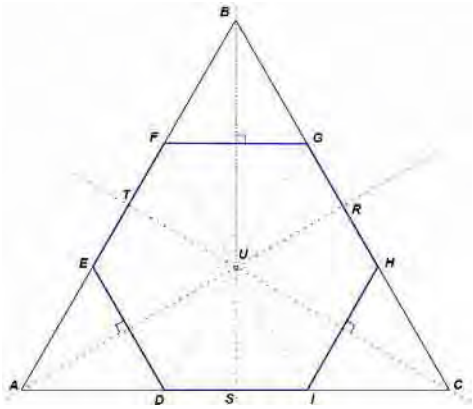
<table>
<tr><td>1. Dobrar e desdobrar
 </td><td>2. Dobrar um ponto sobre o outro. Esta dobra mostra que o lado tem o mesmo tamanho da base.
  </td><td>3. Dobrar e desdobrar.
  </td></tr>
<tr><td>4. Abrir.
  </td><td>5. Dobrar fazendo os dois pontos coincidirem.
  </td><td>6. Dobrar e desdobrar.
  </td></tr>
<tr><td>7. Abrir.
  </td><td>8. Temos um triângulo eqüilátero.
  </td><td>Construção retirada de Franco (1999, p. 42).</td></tr>
</table>

Para provar que este triângulo é eqüilátero, primeiramente, nomeamos os seus vértices como *ABC*. Dobramos o ângulo bissetor de $\angle ABC$, tendo o ponto **A** coincidindo com o ponto **C**. Fazendo o mesmo para o ângulo $\angle BAC$, tendo o ponto **B** coincidente com o ponto **C**, e dobrando o ângulo bissetor para $\angle BCA$, tendo o ponto **B** levado no ponto **A**. Desse modo faz-se qualquer lado do triângulo ΔABC coincidente com qualquer um dos outros dois.

Com as coincidências de pontos estabelecidas pelas reflexões do item anterior, fica determinado o triângulo eqüilátero ΔABC.

3.1.1.5 *Hexágono regular*

Partimos de um triângulo eqüilátero. Construção feita por Mattos (2001, p. 168-170).



(1) Construir as alturas relativas do triângulo ΔABC, dobrando as bissetrizes para cada um dos seguintes ângulos: $\angle ABC$, $\angle ACB$, $\angle BAC$. Deste modo, determinam-se, através das dobras, as retas $\overleftrightarrow{AR}$, $\overleftrightarrow{BS}$ e $\overleftrightarrow{CT}$. O ponto **U** resulta da interseção dessas retas.

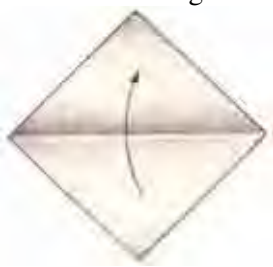
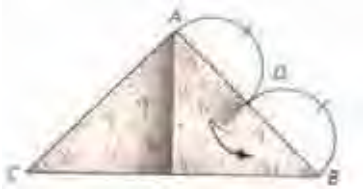
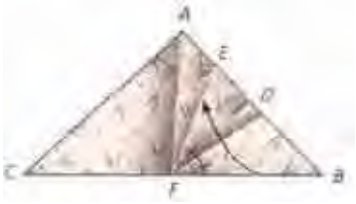
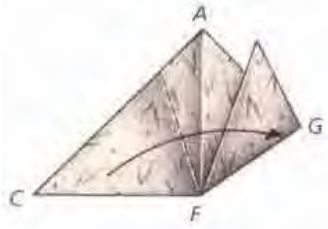
(2) Dobrar **B** para que coincida com o ponto **U**, construindo-se, assim, a mediatriz do segmento $\overline{BU}$. Dobrar o ponto **C** para que coincida com o ponto **U**. Deste modo constrói-se a mediatriz do segmento $\overline{CU}$. Fazer o mesmo para o ponto **A**. Assim, construímos a mediatriz do segmento $\overline{AU}$.

(3) Para cada dobra do item anterior determinam-se as retas construídas $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{ED}$, $\overleftrightarrow{IH}$. Essas retas terão interseção com os segmentos que determinam os lados do triângulo nos pontos F, G, H, I, D, E, todos construídos, sendo possível a construção dos segmentos $\overline{FG}$, $\overline{HI}$, $\overline{DE}$.

Para provar que este hexágono é regular basta refletir o ponto **F** em relação à reta $\overleftrightarrow{CT}$. Para isso, dobrar o segmento $\overline{EF}$, de modo que o ponto **F** coincida com o ponto construído **E**. Fazendo o mesmo para o ponto **G,** em relação à reta $\overleftrightarrow{AR}$, obtém-se **G** coincidente com **H**. Da mesma forma, obtém-se **I** coincidente com **D**, ao refletirmos **I** em relação à reta $\overleftrightarrow{BS}$.

3.1.1.6 *Pentágono regular*

Para a construção de um pentágono regular por dobraduras, partimos de um papel quadrado. Construção apresentada por Franco (1999, p. 46).

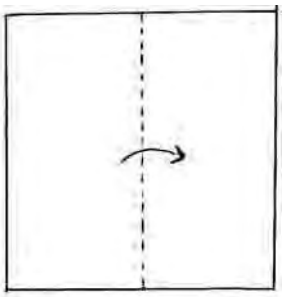
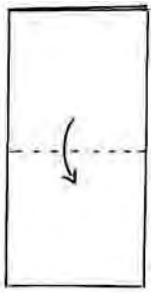
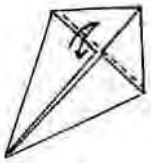
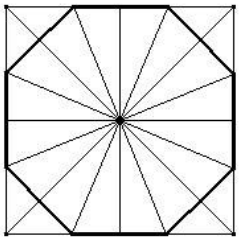
1. Dobrar a diagonal. 	2. Dobrar ao meio e desdobrar.	3. Marcar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, dobrando e desdobrando. Chamar esse ponto médio de *D*. 
4. Marcar o ponto médio do segmento $\overline{AD}$ dobrando e desdobrando. Chamar esse ponto médio de *E*.	5. Dobrar e desdobrar para marcar a reta que une os pontos *E* e *F*.	6. Dobrar a bissetriz do ângulo $E\hat{F}B$. 
7. Dobrar para frente e marcar a bissetriz do ângulo $C\hat{F}G$. 	8. Dobrar a ponta produzida pela dobra anterior ao longo do segmento $\overline{FE}$.	9. Dobrar para trás todo o lado direito do segmento $\overline{FE}$.
10. Dobre todas as camadas. Essa dobra deve passar pelo ponto *G* e ser perpendicular ao lado esquerdo da figura.	11. Desdobrar o papel.	

Para provar que este pentágono é regular, fazemos dobras com os pontos construídos para que passem por cada vértice e façam refletir um ponto no outro.

Pelas simetrias verificadas no item anterior, temos a congruência entre cada um dos segmentos que determinam os lados do pentágono, pois cada um dos lados pode ser refletido sobre o outro por alguma dobradura. Portanto, o pentágono construído é regular.

3.1.1.7 *Octógono regular*

Para construir um octógono com dobraduras, fazemos a bisseção de um quadrado. Construção apresentada por Imenes (1988, p.14):

1. Dobrar ao meio	2. Dobrar ao meio	3. Dobrar a diagonal
		
Dobrar a bissetriz dos ângulos formados de cada lado da diagonal	5. Dobrar e desdobrar a aba formada	6. Desdobrar o papel.
		

Provamos que este é um octógono regular fazendo dobras que passem por cada vértice, de modo que um ponto seja refletido no outro.

Pelas simetrias verificadas no item anterior, temos a congruência entre cada um dos segmentos que determinam os lados do octógono, pois cada um dos lados pode ser refletido sobre o outro por alguma dobradura. Portanto, o octógono construído é regular.

Por meio da construção dos polígonos é possível analisar suas características, fazer o estudo de simetrias e isometrias do plano, além de preparar o aluno para a confecção dos módulos que dão origem aos poliedros.

3.2 Poliedros

Poliedro[16] pode ser definido como um conjunto finito de polígonos planos que cercam uma parte do espaço, com as seguintes características descritas por Colli (2006):

1. Dois polígonos se intersectam apenas em seus lados ou vértices, e a interseção é exatamente um lado ou exatamente um *vértice*; os lados dos polígonos são as *arestas* do poliedro, e os polígonos são suas *faces*.

[16] Etimologicamente, a palavra poliedro deriva dos termos gregos *poli*=muitos e *edro*=faces.

2. Toda aresta é lado de exatamente dois polígonos.

3. O conjunto é *convexo,* isto é, pode-se ir de um polígono a qualquer outro por um caminho inteiramente contido no poliedro.

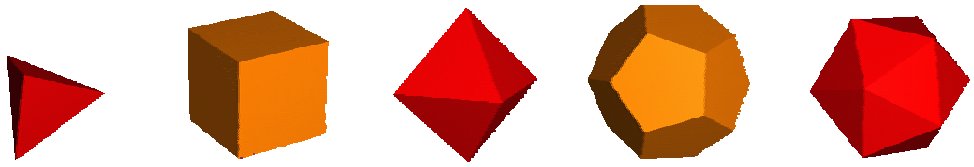
4. Fixado um vértice qualquer V e os polígonos $P_1,\ldots, P_n$ que o tocam, pode-se ir de P_j a P_k, quaisquer que sejam j e k entre 1 e n, passando apenas pelos polígonos P_i, $i=1,\ldots,n$, e sem passar pelo vértice V.

Um poliedro convexo[17] é dito uniforme quando tem faces regulares, e cada vértice apresenta o mesmo número de arestas convergentes e de polígonos ao seu redor, dispostos na mesma ordem. Temos, então, os poliedros regulares e semi-regulares.

3.2.1 *Poliedros regulares ou poliedros de Platão*

Um poliedro regular é aquele que possui como faces polígonos regulares congruentes, e todos os vértices unem a mesma quantia de polígonos. Isto significa que existe uma simetria do poliedro que transforma cada face, cada aresta e cada vértice numa outra face, aresta ou vértice.

Existem apenas cinco poliedros que satisfazem a essas condições e são conhecidos como poliedros de Platão: o *tetraedro*, o *hexaedro* ou *cubo*, o *octaedro,* o *dodecaedro* e o *icosaedro*.



Tetraedro **Hexaedro** **Octaedro** **Dodecaedro** **Icosaedro**

Para demonstrar a existência de apenas cinco poliedros regulares, utilizamos os resultados apresentados por O'Daffer e Clemens (1977).

Primeiro consideramos o poliedro regular com faces formadas por triângulos eqüiláteros. Ao se colocar seis triângulos em torno do mesmo vértice percebemos que se tem uma figura plana (fig. 3.1), ou seja, a soma dos ângulos ao redor do vértice é igual a 360°. Assim, para se ter o vértice de um poliedro essa soma deve ser menor que esse valor.

figura 3.1

[17] Um poliedro é dito convexo se toda reta que contém um ponto de seu interior intersecta o poliedro em exatamente dois pontos, ou seja, se nenhum de seus ângulos diedrais (formados pela interseção de duas faces) é maior que 180°.

Considerando cinco triângulos eqüiláteros ao redor de um vértice, como na figura 3.2. Juntando *A* e *B* obtemos um "telhado" tridimensional (fig. 3.3), que representa um dos vértices de um poliedro regular de vinte faces, o icosaedro. A soma dos ângulos ao redor desse vértice é $5.60° = 300° < 360°$.

figura 3.2

figura 3.3

Agora, tomando quatro triângulos, como mostra a figura 3.4, e unindo os vértices *A* e *B* temos um "telhado" (fig. 3.5), que ao ser ligado a mais um desses telhados dá origem ao poliedro regular de oito faces, o octaedro. A soma dos ângulos ao redor desse vértice é $4.60° = 240° < 360°$.

figura 3.4

figura 3.5

No caso em que temos três triângulos ao redor do vértice (fig. 3.6) ao unir *A* e *B* temos um "telhado", que é vértice do poliedro regular de quatro faces, o tetraedro. A soma dos ângulos ao redor desse vértice é $3.60° = 180° < 360°$.

figura 3.6

figura 3.7

De maneira análoga, ao colocarmos quatro quadrados ao redor de um vértice temos, $4.90° = 360°$, encontrando assim uma figura plana (fig. 3.8). Por isso, usamos apenas três quadrados (fig. 3.9), que formam um "telhado" ao unir os pontos *A* e *B*, figura 3.10, e representa o vértice de um poliedro regular de seis faces, o cubo ou hexaedro.

figura 3.8

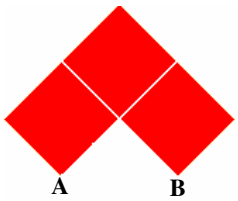


figura 3.9

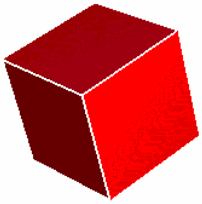


figura 3.10

Não é possível colocar mais de três pentágonos em torno de um vértice, como podemos ver na figura 3.11. Ao colocar três pentágonos regulares em torno de um vértice (fig. 3.12), encontramos um "telhado" tridimensional quando ligamos os pontos *A* e *B* (fig. 3.13), que representa um dos vértices do poliedro de doze faces, o dodecaedro.

figura 3.11

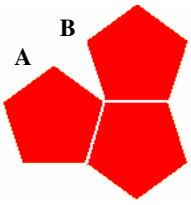


figura 3.12

figura 3.13

Apresentamos, abaixo, uma prova mais formal do que foi descrito acima.

Por que não há outros poliedros regulares além dos cinco mencionados?

Seja *p* o número de lados dos polígonos que formam as faces, pois todas as faces são iguais e regulares. Evidentemente $p \geq 3$. Seja *q* o número de polígonos ao redor de cada vértice. Tem-se $q \geq 3$, pois para formar um telhado são necessários no mínimo três polígonos em torno de um vértice.

Os ângulos internos de um polígono de *p* lados valem $i = \frac{180°(p-2)}{p}$. Como são *q* polígonos de *p* lados incidentes no mesmo vértice, e *assume-se convexidade* então:

$$q\left[180\frac{(p-2)}{p}\right] < 360 \Leftrightarrow q\frac{(p-2)}{p} < 2 \Leftrightarrow q(p-2) < 2p \Leftrightarrow qp - 2q < 2p \Leftrightarrow qp - 2q - 2p < 0$$

$$\Leftrightarrow qp - 2q - 2p + 4 < 4 \Leftrightarrow (p-2)(q-2) < 4$$

Se $q \geq 6$, então $p < 3$, contradizendo $p \geq 3$. Logo *q* deve ser igual a 3, 4 ou 5. Se $p = 5$, então, na equação anterior, $q = 3$, que é o caso do dodecaedro. Se $p = 4$, então, $q = 3$, que é o caso do cubo. Se $p = 3$, então, a equação permite que q seja 3, 4 ou 5, que são os casos, respectivamente, do tetraedro, do octaedro e do icosaedro.

Sendo *V* o número de vértices, *A* o de arestas e *F* o de faces, então,

{p,q}	***V***	***A***	***F***	**Poliedros**
{3,3}	4	6	4	Tetraedro
{4,3}	8	12	6	Cubo
{3,4}	6	12	8	Octaedro
{5,3}	20	30	12	Dodecaedro
{3,5}	12	30	20	Icosaedro

3.2.2 *Poliedros semi-regulares ou poliedros de Arquimedes*

Os poliedros semi-regulares são poliedros convexos, que tem como faces polígonos regulares de mais de um tipo, com todos os vértices congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em sua volta, além de todo vértice poder ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro.

Esses poliedros são obtidos por meio de uma sucessão de cortes, chamados de truncamento, a partir dos sólidos platônicos. Esses truncamentos são obtidos fazendo-se cortes por planos perpendiculares aos eixos de simetria de rotação que passam em cada vértice obtendo assim novas faces, que são, também polígonos regulares.

À distância do vértice em que se faz o truncamento é que determina o poliedro que será obtido. Um exemplo pode ser visto na figura 3.14.

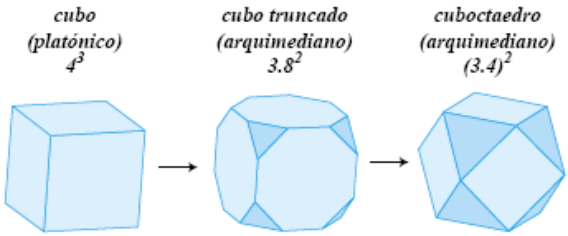


figura 3.14

Mostramos, a seguir, os gráficos para a confecção dos módulos que dão origem aos poliedros feitos com dobraduras. No curso aplicado aos alunos foram construídos apenas o módulo triangular, o quadrangular e o pentagonal. Contudo, além desses apresentamos aqui a construção de outros, visando contribuir com aqueles que tiverem interesse em fazê-las.

3.2.3 *Construção dos poliedros por dobraduras*

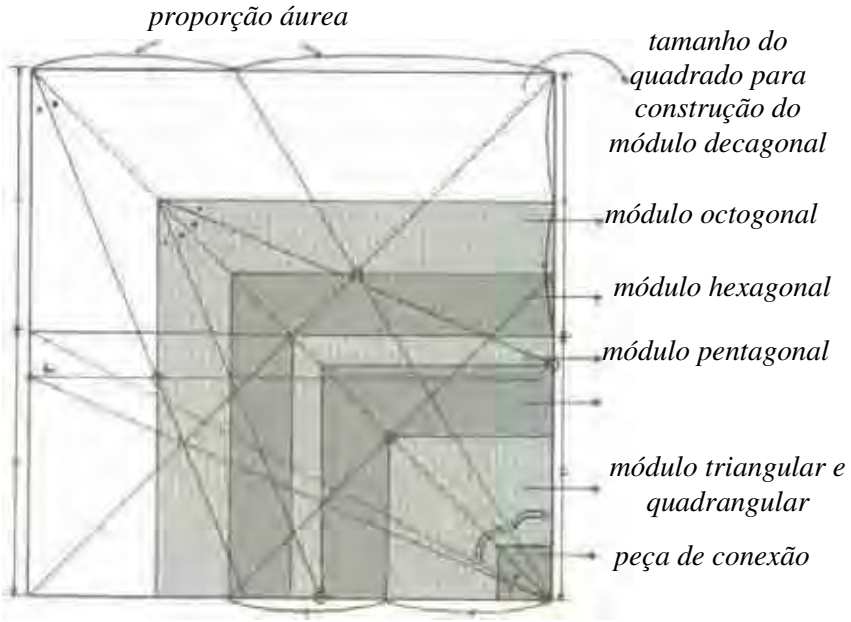
Os diagramas para a construção foram retirados de livros de *origami*, aos quais fazemos referência em cada um. Fizemos algumas adaptações a fim de facilitar o entendimento. A técnica utilizada é a do *origami modular*.

O *origami modular* se baseia na construção de módulos ou unidades (quase sempre iguais) que, ao se encaixarem, formam figuras.

3.2.3.1 *Proporções dos quadrados utilizados na confecção dos módulos*

Para que se obtenham módulos poligonais de lados congruentes, que possam ser encaixados uns aos outros, é necessário o uso de diferentes tamanhos de papéis. Quanto mais ângulos a figura tiver, maior deve ser o tamanho do quadrado de papel utilizado.

Os passos para obtenção dos tamanhos dos quadrados utilizados na confecção de cada módulo seguem a seqüência da construção do retângulo áureo, visto anteriormente, e são encontrados em Kasahara (2005, p.222-223).



Sugerimos aqui alguns valores para os lados dos quadrados. Eles são aproximações e podem ser substituídos desde que se mantenham as proporções indicadas. Essas proporções são válidas somente para os módulos descritos neste trabalho.

Para a construção dos módulos podemos partir de quadrados com lados medindo:

Módulo decagonal = 20 cm		Módulo decagonal = 30 cm
Módulo octogonal = 15 cm		Módulo octogonal = 22,5 cm
Módulo hexagonal = 12 cm		Módulo hexagonal = 18 cm
	OU	
Módulo pentagonal = 10 cm		Módulo pentagonal = 15 cm
Módulo quadrangular = 6 cm		Módulo quadrangular = 9 cm
Módulo triangular = 6 cm		Módulo triangular = 9 cm
Peça de conexão = 3 cm		Peça de conexão = 4,5 cm

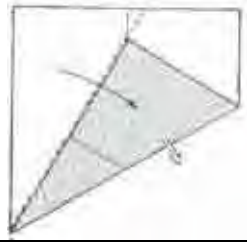
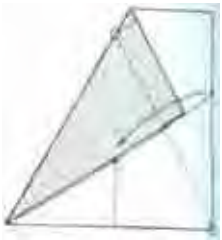
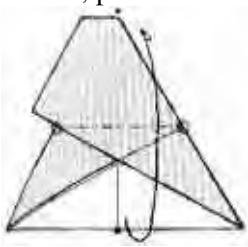
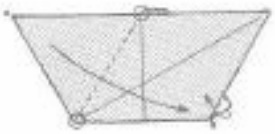
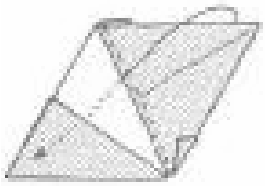
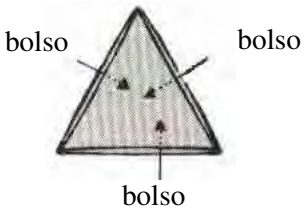
3.2.3.2 *Construção dos módulos*

Para se chegar ao módulo partimos de um papel quadrado que, após ser dobrado, de acordo com os passos indicados para cada tipo de módulo (triangular, quadrangular, pentagonal...), resulta em um polígono com bolsos de encaixe.

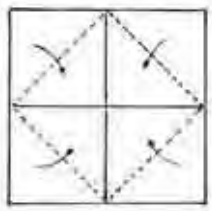
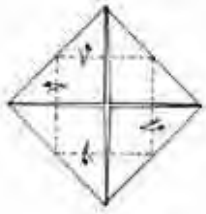
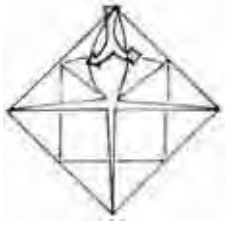
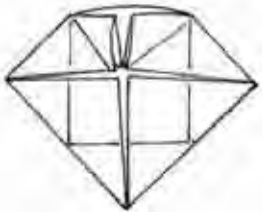
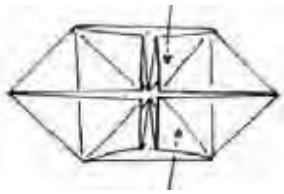
Para unir um módulo a outro é necessário construir peças de conexão. Estas são abas que, ao serem introduzidas nos bolsos, fazem a união dos módulos. Com a interligação dos módulos constroem-se os sólidos.

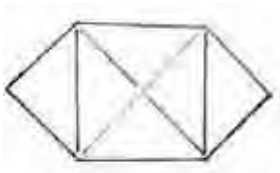
As peças modulares são construídas utilizando papéis de diferentes cores e partindo-se sempre de um pedaço de papel quadrado. Esses módulos, depois de prontos, terão bolsos nas laterais, que servem para o encaixe das peças de conexão (que serão construídas logo a seguir).

3.2.3.2.1 Módulo triangular (triângulo eqüilátero)

<table>
<tr><td>1. Dobrar e desdobrar
 </td><td>2. Dobrar um ponto sobre o outro.
 </td><td>3. Dobrar a aba superior e desdobrar a inferior.
  </td></tr>
<tr><td>4. Dobrar um ponto sobre o outro, tendo atenção com os pontos maiores circulados.
  </td><td>5. Dobrar um ponto sobre o outro, para frente.
  </td><td>6. Dobrar um ponto sobre o outro, seguindo a seta, e dobrar a abinha para frente.
  </td></tr>
<tr><td>7. Dobrar a aba para dentro do bolso formado.
  </td><td>8. Dobradura completa.
  </td><td>Construção realizada por Kasahara (1997, p. 284-285).</td></tr>
</table>

3.2.3.2.2 Módulo quadrangular (quadrado)

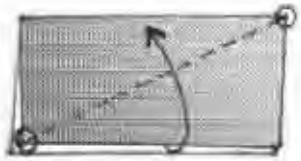
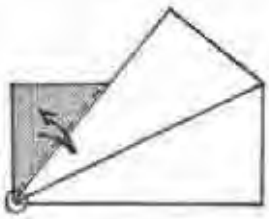
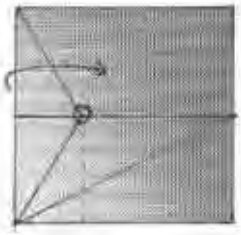
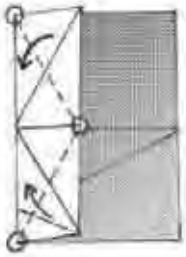
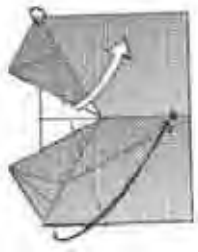
1. Dobrar e desdobrar marcando o vinco	2. Dobrar as pontas até o centro	3. Dobrar e desdobrar marcando o vinco
		
4. Abrir	**5. Dobrar para dentro**	**6. Fazer o mesmo do outro lado.**
		



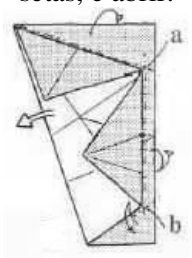
7. A face está pronta. Neste caso os encaixes já estão ligados às faces.

Construção realizada por Kasahara (1997, p.254).

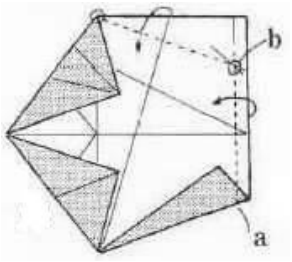
3.2.3.2.3 Módulo pentagonal (pentágono regular)

1. Dobrar.	2. Dobrar para frente marcando a diagonal deste retângulo.	3. Dobrar e desdobrar a aba superior.
		
4. Abrir a figura. Dobrar uma perpendicular à base, passando pelo ponto circulado.	**5. Dobrar seguindo a seta.**	**6. Dobrar puxando para frente.**
		

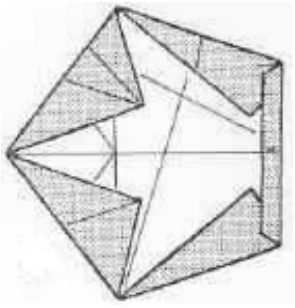
7. O lado marcado pelos pontos *a* e *b* deve estar paralelo ao lado maior. Dobrar para trás e desdobrar de acordo com as setas, e abrir.

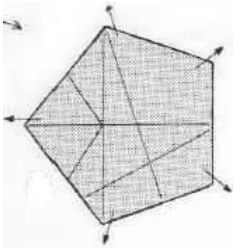


8. Dobrar pelo vértice superior e pelos pontos *a* e *b,* marcados anteriormente.



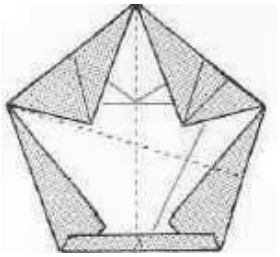
9. Figura pronta.



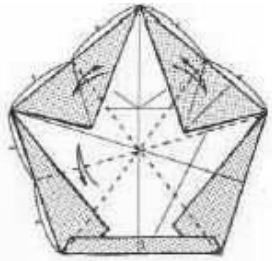


Seguindo os passos 1 a 10 encontramos o pentágono. A partir deste pentágono construímos o módulo pentagonal.

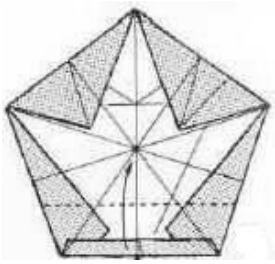
1. Colocar a peça nessa posição.



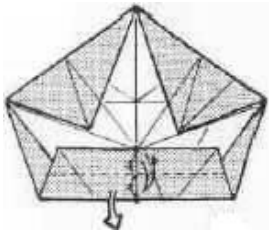
2. Dobrar e desdobrar nos eixos de simetria do pentágono.



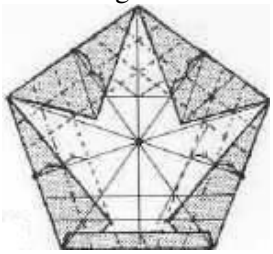
3. Dobrar o lado do pentágono até o centro da figura.



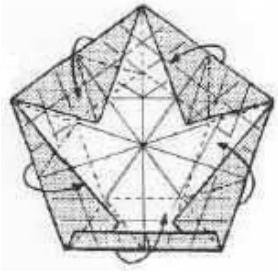
4. Dobrar ao meio a aba encontrada pela dobra anterior. Abrir.

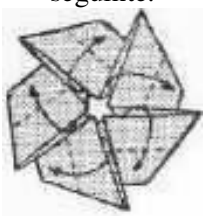
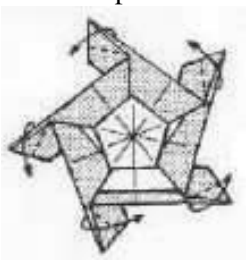
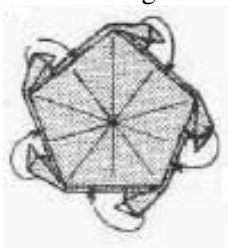


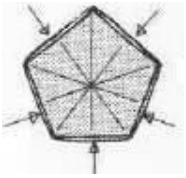
5. Repetir os passos 3 e 4, dobrando todos os lados da figura.



6. Dobrar os lados sobre a linha da dobra feita no passo 3, para encontrar a figura mostrada a seguir.

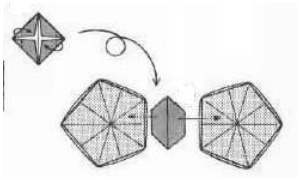


7. Dobrar para frente, pelas dobras feitas no passo 4, para encontrar a figura da etapa seguinte.	8. Dobrar as abinhas formadas para frente.	9. Introduzir as abas nos bolsos formados em cada lado da figura.
		



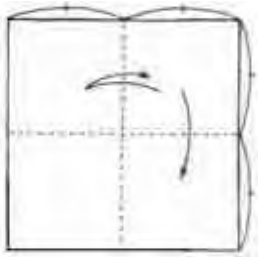
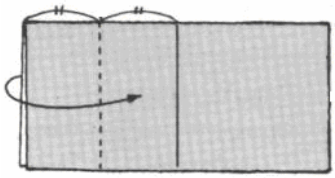
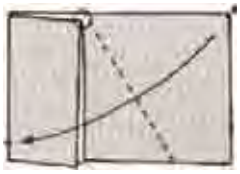
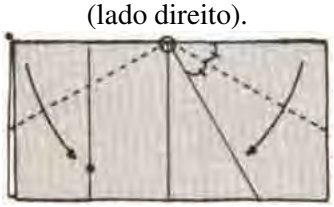
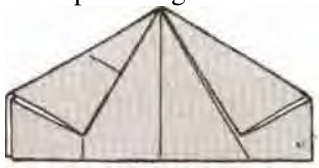
Módulo pronto, com bolsos de encaixe em todos os lados.

Construção retirada de Kasahara (1997, p. 280-284)



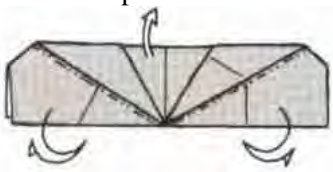
A peça de conexão no encaixe dos módulos pentagonais deve ter uma dobra em dois dos seus vértices.

3.2.3.2.4 Módulo hexagonal (hexágono regular)

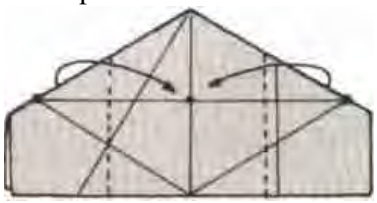
1. Dobrar e desdobrar para marcar o vinco vertical e dobrar na horizontal.	2. Dobrar levando o lado até o centro.	3. Dobrar seguindo a seta. Observar o ponto marcado.
		
4. Abrir as dobras dos passos 2 e 3.	**5. Dobrar seguindo as setas. Primeiro levar um ponto sobre o outro (lado esquerdo), depois dobrar a bissetriz do ângulo marcado (lado direito).**	**6. Resultado da dobra anterior. Vire a figura completamente para que fique como está no passo seguinte.**
		

7. Dobrar.

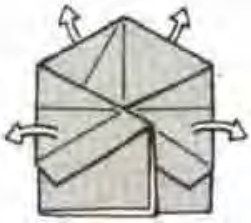
8. Primeiro dobrar para trás sobre o pontilhado e desdobrar. Abrir a dobra do passo 7.



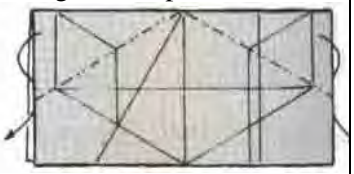
9. Dobrar sobrepondo os pontos marcados.



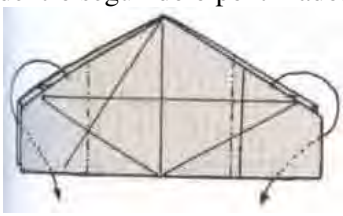
10. Abrir as dobras dos passos 6 e 9.



11. Dobrar por dentro seguindo o pontilhado.



12. Dobrar as abas para dentro seguindo o pontilhado.



13. Detalhe da dobra anterior. Dobrar a parte de trás primeiro, depois ajustar a de cima.

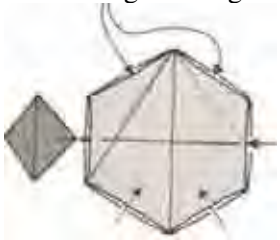
14. Dobrar para frente e desdobrar.

15. Dobrar a aba de cima para dentro, apenas do lado direito.

16. Dobrar a aba superior por dentro da aba de trás.

17. Inserir esta aba por dentro do bolso.

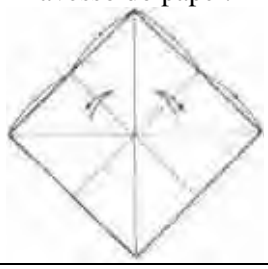
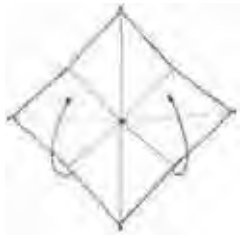
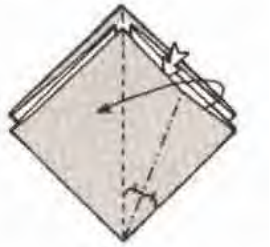
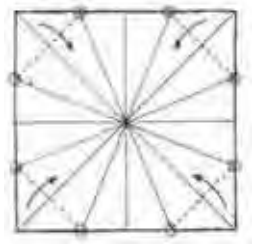
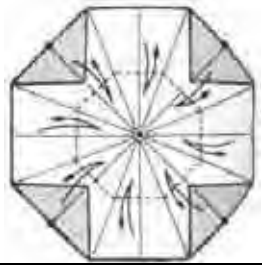
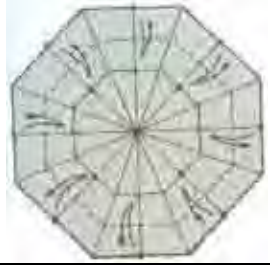
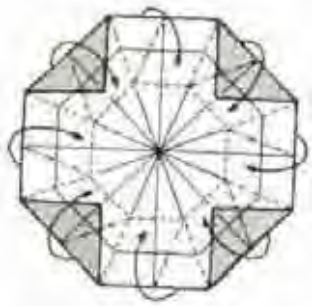
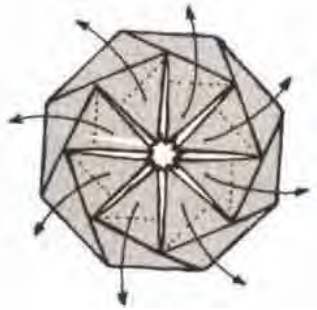
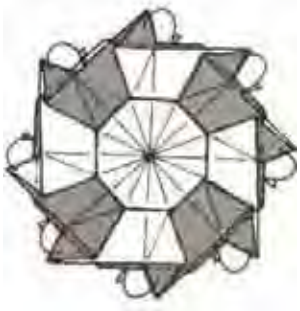
18. Peça pronta. Os bolsos superiores necessitam de peças de conexão ajustadas, como mostra a figura a seguir.



19. Dobrar a bissetriz de um dos ângulos formados pela diagonal marcada na peça de conexão.

Construção realizada por Kasahara (2005, p.224-225).

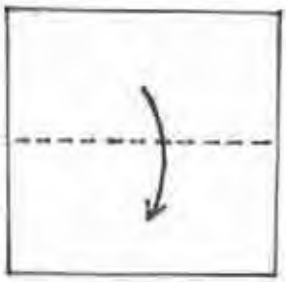
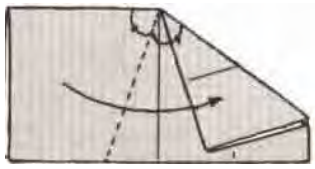
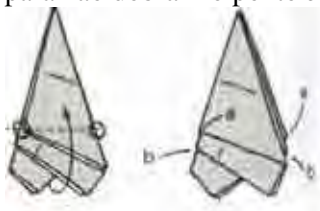
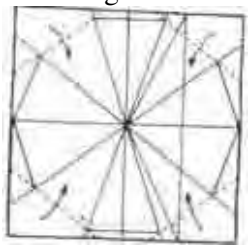
3.2.3.2.5 Módulo octogonal (octógono regular)

1. Dobrar e desdobrar, marcando as diagonais. 	2. Dobrar e desdobrar marcando o vinco do lado avesso do papel. 	3. Dobrar puxando para dentro e unindo todos os vértices. 
4. Dobrar a bissetriz do ângulo marcado puxando somente a parte da frente para o lado. 	5. Repetir o mesmo procedimento com todos os lados. 	6. Resultado final depois das dobras do passo 5.
7. Desdobrar completamente o papel e dobrar os vértices conforme a figura. 	8. Dobrar todos os lados até o centro da figura e desdobrar. 	9. Virar a figura e dobrar o lado do octógono até a marca da dobra anterior. 
10. Dobrar de acordo com os pontilhados marcados na figura. 	11. Dobrar para frente pelas dobras feitas no passo 9. 	12. Dobrar as abas para dentro dos bolsos formados. 

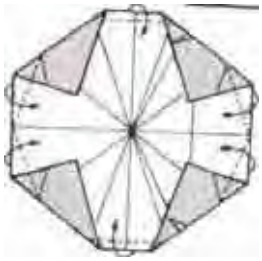
Módulo pronto, com bolsos de encaixe em todos os lados.

Construção realizada por Kasahara (2005, p.226-227).

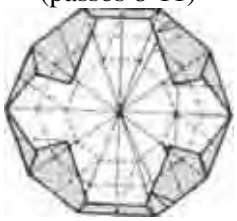
3.2.3.2.6 Módulo decagonal (decágono regular)

1. Dobrar. 	2. Dobrar e desdobrar. 	3. Dobrar e desdobrar conforme indicação das setas.
4. Dobrar a diagonal da primeira parte conforme indica a seta. Abrir, levando a aba de trás para frente. 	5. Dobrar conforme indica a seta, observando os pontos fixados na figura. 	6. Segurar o papel no lado direito e puxar o lado esquerdo para abrir.
7. Dobrar a bissetriz do ângulo formado pelo vértice superior. 	8. Dobrar a bissetriz, levando somente a parte superior do papel. 	9. Unir as pontas dobrando para trás.
10. Dobrar para conectar os pontos *a* marcados. Atenção para não dobrar no ponto *b*. 	11. Vincar bem as dobras. 	12. Desdobrar completamente o papel e dobrar os vértices do quadrado conforme mostra a figura. 

13. Dobrar as bordas.



14. Dobrar conforme método utilizado no módulo octogonal (passos 8-11)



15. Introduzir as abas nos bolsos formados em cada lado.

Módulo pronto, com bolsos de encaixe em todos os lados.

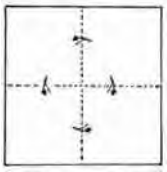
Construção realizada por Kasahara (2005, p.228-229).

3.2.3.2.7 Peça de conexão

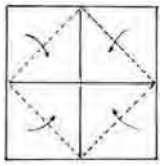
Esta peça serve para unir um módulo ao outro, pois a construção do *origami* não pode envolver o uso de cola.

A área do quadrado usado na construção desta peça corresponde a ¼ da área do papel utilizado para construir as faces do módulo triangular.

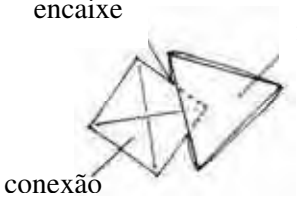
1. Dobrar o papel em quatro partes e desdobrar.



2. Dobrar as pontas até o centro do papel.



Peça pronta para o encaixe.



Sugestão: para haver uma maior estabilidade nas construções pode-se colocar um pedaço de fita adesiva na peça de conexão, antes de introduzi-la no módulo.

Fazendo o encaixe das peças encontramos os poliedros de Platão e os poliedros de Arquimedes, cujo estudo incorpora conceitos de simetria e isometria.

Seqüência para o encaixe dos módulos (construção do tetraedro)

Passo 1 – Separar quatro módulos triangulares e seis peças de conexão. (fig. 3.15)

Passo 2 - Unir os módulos triangulares introduzindo a peça de conexão nos bolsos de encaixe. (fig. 3.16)

Passo 3 – Com todos os módulos ligados pelas peças de conexão, deixar 3 peças de conexão nas extremidades (triângulos vermelhos nos extremos), que servem como abas para fechar o poliedro. (fig. 3.17)

Passo 4 - Tetraedro pronto. (fig. 3.18)

figura 3.15

figura 3.16

figura 3.17

figura 3.18

3.2.3.3 *Poliedros construídos com origami modular*

3.2.3.3.1 Poliedros regulares

Tetraedro (fig. 3.19)
4 módulos triangulares
6 peças de conexão

figura 3.19

Hexaedro (fig. 3.20)
6 módulos quadrangulares

figura 3.20

Octaedro (fig. 3.21)
8 módulos triangulares
12 peças de conexão

figura 3.21

Dodecaedro (fig. 3.22)
12 módulos pentagonais
18 peças de conexão

figura 3.22

Icosaedro (fig. 3.23)
20 módulos triangulares
30 peças de conexão

figura 3.23

3.2.3.3.2 Poliedros semi-regulares

Tetraedro truncado (fig. 3.24)
4 módulos triangulares
4 módulos hexagonais
18 peças de conexão

figura 3.24

Cubo truncado (fig. 3.25)
8 módulos triangulares
6 módulos octogonais
36 peças de conexão

figura 3.25

Octaedro truncado
(fig.3.26)
6 módulos quadrangulares
8 módulos hexagonais
24 peças de conexão

figura 3.26

Cuboctaedro (fig. 3.27)
8 módulos triangulares
6 módulos quadrangulares
12 peças de conexão

figura 3.27

Rombicuboctaedro
(fig. 3.28)
8 módulos triangulares
18 módulos quadrangulares
12 peças de conexão

figura 3.28

Cuboctaedro truncado
(fig. 3.29)
12 módulos quadrangulares
8 módulos hexagonais
6 módulos octogonais
48 peças de conexão

figura 3.29

Cubo achatado (fig. 3.30)
32 módulos triangulares
6 módulos quadrangulares
48 peças de conexão

figura 3.30

Dodecaedro truncado
(fig. 3.31)
20 módulos triangulares
12 módulos decagonais
90 peças de conexão

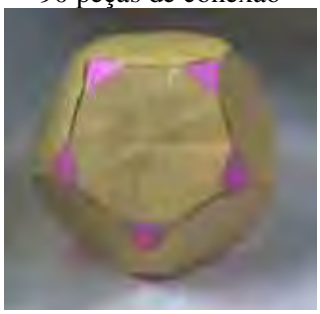


figura 3.31

Icosaedro truncado
(fig. 3.32)
12 módulos pentagonais
20 módulos hexagonais
90 peças de conexão

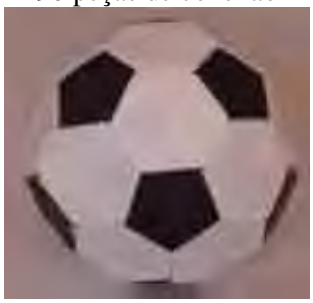


figura 3.32

Icosidodecaedro (fig. 3.33)
20 módulos triangulares
12 módulos pentagonais
60 peças de conexão

figura 3.33

Rombicosidodecaedro
(fig. 3.34)
20 módulos triangulares
30 módulos quadrangulares
12 módulos pentagonais
60 peças de conexão

figura 3.34

Icosidodecaedro truncado
(fig. 3.35)
30 módulos quadrangulares
20 módulos hexagonais
12 módulos decagonais
120 peças de conexão

figura 3.35

Dodecaedro achatado
(fig. 3.36)
80 módulos triangulares
12 módulos pentagonais
150 peças de conexão

figura 3.36

No estudo dos conceitos de simetria e isometria dos poliedros é possível construirmos dobraduras que representam porções desses sólidos, que se devidamente confeccionadas transformam-se em bases caleidoscópicas, e podem ser colocadas no interior de caleidoscópios generalizados, para fornecerem o visual de alguns dos poliedros de Platão e Arquimedes. As características e especificidades desse tipo de caleidoscópio são mostradas no capítulo 2.

3.2.4 *Construção das dobraduras para a visualização dos poliedros em caleidoscópio generalizado*

O primeiro passo, após ter escolhido o poliedro a ser visualizado, é traçar as linhas de simetria das suas faces, obtendo-se determinadas porções da superfície. As dobraduras para a visualização dos poliedros são construídas para que apenas os pontos vértices dos poliedros estejam sobre a esfera (visual formado entre os três espelhos). Algumas dessas porções, se adequadamente construídas, possibilitam a visualização dos poliedros em caleidoscópio generalizado.

Para realizar essa construção devemos estar atentos aos polígonos que compõem o sólido em questão. Tais polígonos fazem parte da dobradura planificada, que passará por dobras e recortes para um ajuste perpendicular dos lados da mesma aos espelhos, e, conseqüentemente, gerar o visual do poliedro.

É importante ressaltar que, para haver a possibilidade de visualização dos poliedros em caleidoscópio, é necessário que as tesselações esféricas formadas ao se inflar esses poliedros apresentem linhas de simetria e que exista um caleidoscópio com os ângulos correspondentes aos das porções encontradas. Assim observamos a impossibilidade de construir as dobraduras para a visualização de todos os poliedros aqui referenciados.

Para referenciar cada poliedro utilizamos seu nome e uma notação numérica, que corresponde ao número de lados de cada polígono que o constitui, e que se ajusta ao redor de um vértice. Todos os vértices do poliedro contêm, sempre, os mesmos polígonos, combinados na mesma ordem. Então, a notação (3,6,6) significa que, em cada vértice do poliedro, encontram-se um triângulo e dois hexágonos (todos regulares), sempre nessa ordem.

Apresentamos, a seguir, a construção gráfica feita com o software *Cabri-Géomètre II* das dobraduras que possibilitam a visualização dos poliedros regulares e semi-regulares. Algumas dessas construções são descritas passo a passo, outras são apenas mostradas. Aproveitamos também este momento para enfatizar a utilização combinada do *origami* e do caleidoscópio apresentando algumas dessas dobraduras que também podem ser confeccionadas com *origami tradicional* e o *modular*.

3.2.4.1 *Poliedros regulares ou poliedros de Platão*

Tetraedro

O tetraedro possui linhas de simetria, mas não existe um caleidoscópio que tenha os ângulos formados pelas porções que podem vir a gerar seu visual.

figura 3.37

Cubo

Para a visualização do cubo apresentamos três dobraduras distintas.

Dobradura 1 - para a visualização do cubo com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=2, cujos ângulos são: (90°, 90°, 90°).

1. Construir um quadrado (polígono regular). Nomear seus pontos *ABCD* (rótulo).

2. Construir os simétricos do quadrado em relação aos lados *AB* e *BD* (simetria axial), e marcar os pontos *E*, *F*, *G* e *H*, respectivamente.

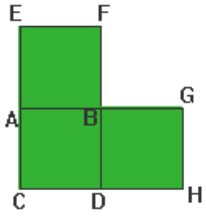


figura 3.38

A figura geométrica formada pelos três quadrados (*ABCD*, *ABEF*, e *BGDH*) é a planificação da dobradura (fig. 3.38). Depois de recortada e dobrada (em relação aos lados *AB* e *BD*), deve-se unir *F* a *G*, para que a dobradura se ajuste perfeitamente aos espelhos do caleidoscópio. Nas figuras abaixo se vê, primeiro, a dobradura já pronta (fig.3.39) e, depois, ela colocada no interior do caleidoscópio fornecendo o visual do cubo (fig.3.40).

figura 3.39

figura 3.40

Esta dobradura também pode ser construída fazendo a conexão de três módulos quadrangulares[18] combinados de forma a obter a base acima referenciada.

[18] A construção deste módulo encontra-se na página 70.

Dobradura 2 - para a visualização do cubo com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=2, cujos ângulos são: (90°, 90°, 90°).

1. Construir um quadrado (polígono regular). Nomear seus pontos por *ABCD* (rótulo).

2. Construir o simétrico do quadrado em relação ao lado *AB* (simetria axial), marcar os pontos *E* e *F*.

3. Obter os pontos médios dos lados AC e *BD* (ponto médio), e marcar os pontos *C'* e *D'*, respectivamente. Unir os pontos *A*, *B*, *C'* e *D'* (polígono) para obter o retângulo *ABC'D'*.

4. Traçar as diagonais do quadrado *ABEF* (segmento), e marcar o ponto *O*, na intersecção das diagonais. Unir os pontos *A*, *B* e *O* (polígono), para obter o triângulo *ABO*.

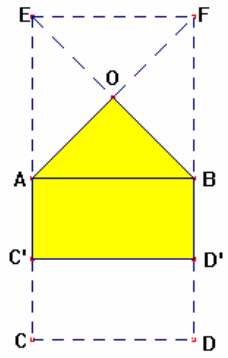


figura 3.41

A figura geométrica formada pelo retângulo *ABC'D'* e pelo triângulo *ABO* (fig.3.41) é a planificação da dobradura que, depois de dobrada, deve ficar como mostra a figura 3.42. Quando colocada no caleidoscópio, essa dobradura fornece o visual do cubo, conforme mostra a figura 3.43.

figura 3.42

figura 3.43

Construção da dobradura do cubo (fig. 3.42) com o uso de régua e compasso.

1. Traçar um segmento *AB*.

2. Traçar as retas *s* e *t* perpendiculares a *AB,* por *A* e por *B*.

3. Fazer 2 circunferências de raio *AB*, com centros em *A* e em *B*, obtendo os pontos *C* e *D* sobre *s* e *t*, respectivamente. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os vértices do quadrado, o qual deverá ser traçado com a régua.

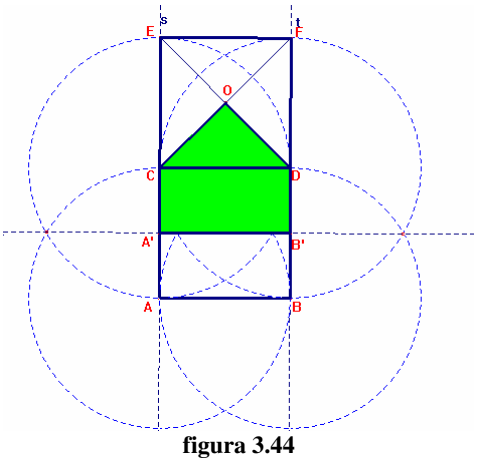


figura 3.44

4. Fazer 2 circunferências de raio *AB*, com centros em *C* e em *D*, obtendo os pontos *E* e *F* sobre *s* e *t*, respectivamente. Os pontos *C*, *D*, *E* e *F* são os vértices de outro quadrado.

5. Traçar a mediatriz do lado *AC*, marcar o ponto *A*' na intersecção da mediatriz com o lado *AC*, e o ponto *B*' na intersecção da mediatriz com o lado *BD*. Unir *A*' e *B*'.

6. Traçar as diagonais do quadrado *CDEF*, unindo *CF* e *ED*. Marcar o ponto *O* na intersecção das diagonais, obtendo o triângulo *CDO*.

A figura geométrica formada pelos pontos *A'CODB'A'* é a dobradura procurada (fig. 3.44).

Dobradura 3 - para a visualização do cubo com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=1, cujos ângulos são: (90°, 90°, 180°).

1. Construir um quadrado (polígono regular). Nomear seus pontos *ABCD* (rótulo).

2. Construir os simétricos do quadrado em relação aos lados *BD* e *AB* (simetria axial), e marcar os pontos *E*, *F*, *G* e *H*, respectivamente.

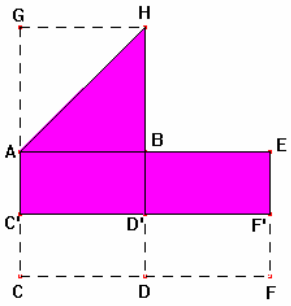


figura 3.45

3. Obter os pontos médios dos lados *AC*, *BD* e *EF* (ponto médio), e marcar os pontos *C*', *D*' e *F*', respectivamente. Unir *A*, *B*, *C*' e *D*' e *B*, *D*', *F*' e *E* (polígono), obtendo os retângulos *ABC'D'* e *BD'F'E*.

4. Traçar a diagonal *AH* do quadrado *ABGH* (segmento). Unir os pontos *A*, *B* e *H* (polígono) para obter o triângulo *ABH*.

A figura geométrica formada pelos polígonos *ABC'D'*, *BD'F'E* e *ABH* é a planificação da dobradura (fig. 3.45). Depois de recortada, deve-se dobrar (*AB*) e (*BD*'), e unir *H* e *E*, ficando semelhante à figura 3.46, para que se ajuste perfeitamente aos espelhos do caleidoscópio, conforme mostra a figura 3.47. A figura 3.48 representa o cubo.

figura 3.46

figura 3.47

figura 3.48

Octaedro

Para a visualização do octaedro mostramos duas dobraduras distintas.

Dobradura 1: para a visualização do octaedro com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=2, cujos ângulos são: (90°, 90°,90°).

1. Construir um triângulo eqüilátero (polígono regular). Nomear seus pontos A, B e C (rótulo).

2. Construir o simétrico do triângulo em relação ao lado AB (simetria axial) e marcar o ponto D (rótulo).

3. Marcar o ponto médio dos segmentos CB e BD (ponto médio) e assinalar os pontos E e F, respectivamente (rótulo).

4. Unir os pontos ABE e ABF (polígono).

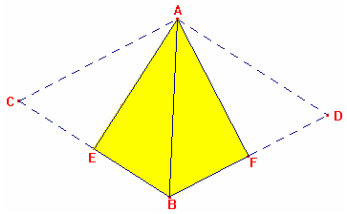


figura 3.49

A figura geométrica formada pelos dois triângulos (ABE e ABF) (fig.3.49) é a planificação da dobradura que, depois de dobrada em relação ao lado AB (fig. 3.50) e encaixada no caleidoscópio, fornece o visual da figura 3.51.

figura 3.50

figura 3.51

Dobradura 2: para a visualização do octaedro com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=1, cujos ângulos são: (90°, 90°,180°).

1. Construir um triângulo eqüilátero (polígono regular). Nomear seus pontos A, B e C (rótulo).

2. Construir o simétrico do triângulo em relação ao lado AB (simetria axial) e marcar o ponto D (rótulo).

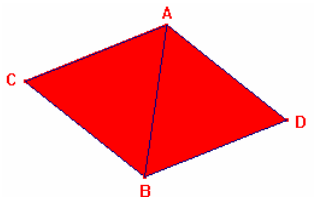


figura 3.52

A figura geométrica formada pelos dois triângulos ΔABC e ΔABD (fig. 3.52) é a planificação da dobradura, que depois de dobrada em relação ao lado AB (fig. 3.53) e encaixada no caleidoscópio, fica como mostra a figura 3.54. A figura 3.55 representa um octaedro.

figura 3.53

figura 3.54

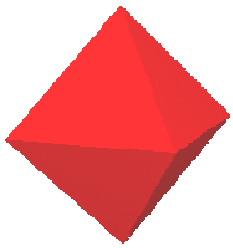


figura 3.55

Esta dobradura também pode ser obtida fazendo a conexão de dois módulos triangulares[19] combinados de forma a obter a dobradura acima referenciada.

Dodecaedro

Para a visualização do dodecaedro apresentamos duas dobraduras distintas.

Dobradura 1: para a visualização do dodecaedro com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=2, cujos ângulos são: (90°, 90°,90°).

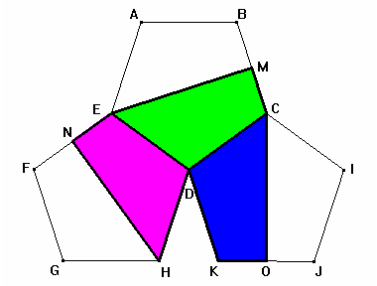


figura 3.56

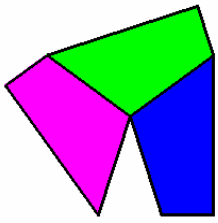


figura 3.57

figura 3.58

A figura geométrica formada pelos polígonos *EMCD, EDHN e CDKO* (fig.3.56) é a planificação da dobradura. Depois de recortada (fig.3.57), devem-se dobrar os segmentos $\overline{ED}$ e $\overline{CD}$, e unir *H* e *K* para que fique semelhante à figura 3.58 e se ajuste perfeitamente aos espelhos do caleidoscópio, conforme mostram as figuras 3.59 e 3.60. A figura 3.61 representa um dodecaedro.

figura 3.59

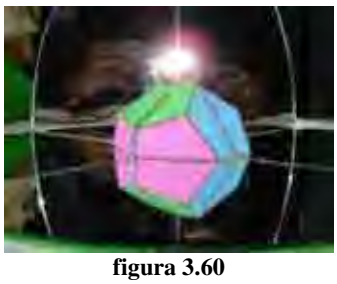


figura 3.60

figura 3.61

[19] A construção deste módulo está descrita na página 69.

Dobradura 2: para a visualização do dodecaedro com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=1, cujos ângulos são: (90°, 90°,180°).

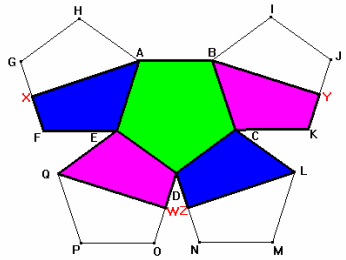


figura 3.62

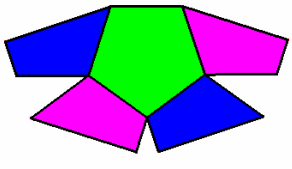


figura 3.63

A figura geométrica formada pelo pentágono *ABCDE* e pelos polígonos *BCKY, CLZD, EDWQ* e *EFXA* (fig.3.62) é a planificação da dobradura que deve ser recortada (fig.3.63) e dobrada em relação aos lados *AE*, *ED, CD* e *BC*. Ao unirem-se os vértices *W* e *Z*, *F* e *Q*, *K* e *L,* a dobradura ficará conforme mostra a figura 3.64, ajustando-se perfeitamente ao caleidoscópio, como se vê na figura 3.65.

figura 3.64

figura 3.65

Icosaedro

Para a visualização do icosaedro mostramos duas dobraduras distintas.

Dobradura 1: para a visualização do icosaedro com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=2, cujos ângulos são: (90°, 90°,90°).

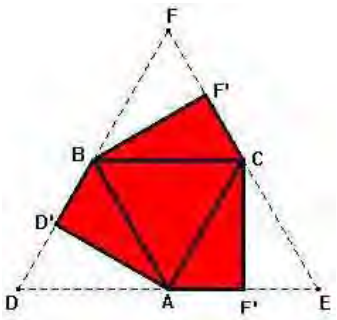


figura 3.66

figura 3.67

figura 3.68

figura 3.69

figura 3.70

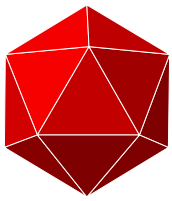


figura 3.71

A figura geométrica formada pelos triângulos ΔABC, ΔABD', ΔACF', ΔBCF' (fig. 3.66) é a planificação da dobradura. Depois de recortada (fig. 3.67), devemos dobrar os segmentos $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ para que ela fique semelhante à figura 3.68 e se ajuste perfeitamente aos espelhos (fig. 3.69 e 3.70). A figura 3.71 representa um icosaedro.

Dobradura 2: para a visualização do icosaedro com esta dobradura utilizamos o caleidoscópio em que n=1, cujos ângulos são: (90°, 90°,180°).

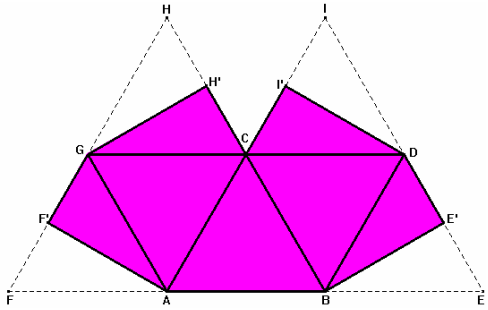


figura 3.72

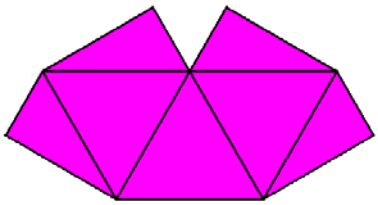


figura 3.73

figura 3.74

figura 3.75

A figura geométrica formada pelos triângulos ΔABC, ΔACG, ΔAGF', ΔCGH', ΔBCD, ΔBDE' e ΔCDI' (fig. 3.72) é a planificação da dobradura. Depois de recortada a dobradura(fig. 3.73), devemos dobrar os segmentos $\overline{AG}, \overline{GC}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}$ e unir os pontos H' e I', para que ela fique semelhante à figura 3.74 e se ajuste perfeitamente aos espelhos (fig. 3.75).

3.2.4.2 *Poliedros semi-regulares ou poliedros de Arquimedes*

Nesta seção apresentamos dobraduras para visualização de alguns poliedros semi-regulares em caleidoscópios generalizados. Mostramos algumas peças que foram confeccionadas no software *Cabri-Géometrè II*, e para que essa exposição não se torne muito extensa, serão indicados apenas os traços básicos necessários para a confecção de outras dobraduras.

Tetraedro truncado (3,6,6)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 60°).

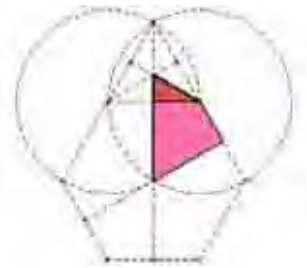


figura 3.76

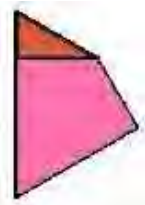


figura 3.77

figura 3.78

figura 3.79

figura 3.80

figura 3.81

Essa dobradura também pode ser construída utilizando o *origami tradicional* para isso construímos um hexágono regular, que é encontrado a partir de um triângulo eqüilátero (conforme indicado na p.60) como mostra a figura 3.82. Recortamos esse triângulo e confeccionamos um hexágono fazendo dobras que levam os vértices ao centro do triângulo (construção na p.61). Assim, temos um hexágono regular com três triângulos eqüiláteros ligados (fig. 3.83).

Fazendo dobras nas linhas de simetria de um dos triângulos menores, temos a representação da dobradura igual à figura 3.76 que foi construída no software (fig. 3.84).

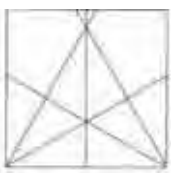


figura 3. 82

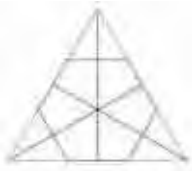


figura 3. 83

figura 3. 84

Cubo truncado (3,8,8)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 60°).

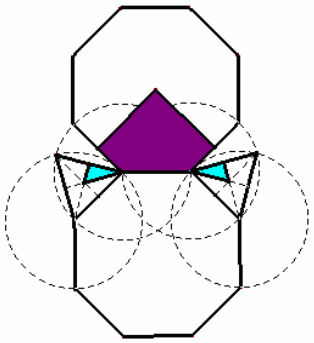


figura 3.85

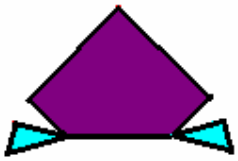


figura 3.86

figura 3.87

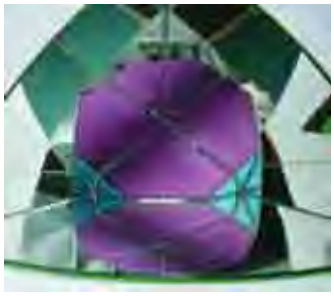


figura 3.88

figura 3.89

figura 3.90

Octaedro truncado (4,6,6)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 60°).

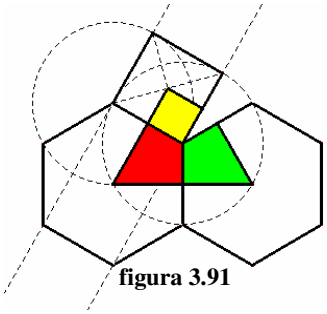


figura 3.91

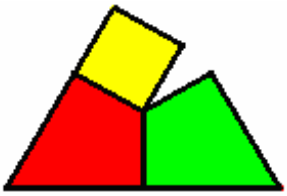


figura 3.92

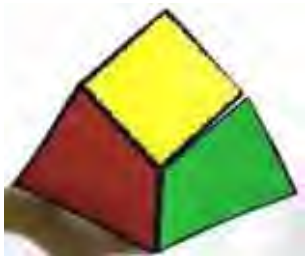


figura 3.93

figura 3.94

figura 3.95

figura 3.96

Cuboctaedro (3,4,3,4)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 60°).

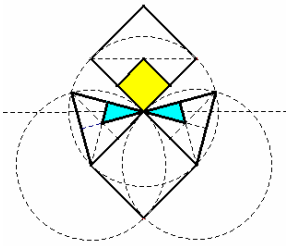


figura 3.97

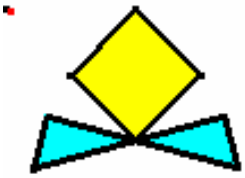


figura 3.98

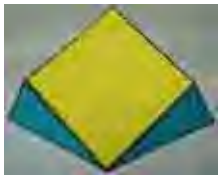


figura 3.99

figura 3.100

figura 3.101

figura 3.102

Rombicuboctaedro (3,4,4,4)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°,90°,90°).

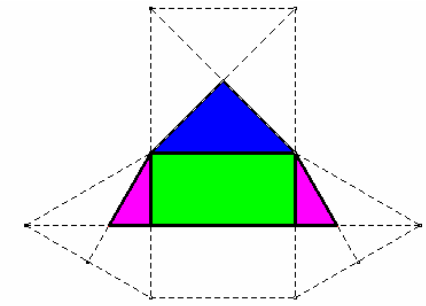


figura 3.103

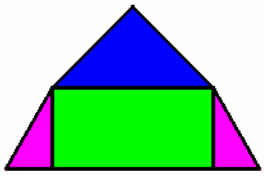


figura 3.104

figura 3.105

figura 3.106

figura 3.107

figura 3.108

Cuboctaedro truncado (4,6,8)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 60°).

1) Construir um octógono regular (polígono regular). Nomear o ponto central como *O"* (rótulo).

2) A partir da base do octógono, indicada por *AB*, desenhar um quadrado. Para isso traçar a reta *s* perpendicular ao lado *AB* por *A*, e a reta *t*, perpendicular a *AB* por *B* (reta perpendicular). Fazer duas circunferências de raio *AB*: uma com centro em *A* e outra com centro em *B* (circunferência). Determinar os pontos *D* e *C*, respectivamente, sobre as retas *s* e *t.* Unir os pontos *A, B, C* e *D* (polígono), para obter o quadrado *ABCD.*

3) Construir duas circunferências com raio *AB* e centros em *B* e *C* (circunferência), para obter o ponto fora do quadrado, na interseção das duas circunferências, que deve ser rotulado por *O'* (rótulo). Fazer uma circunferência de centro *O'* e raio *O'B*, para obter os pontos *L* e *P* (rótulo). Construir outras duas circunferências com centros, agora em *L* e *P* e raio *AB=O'L=O'P*, para obter os pontos *M* e *N,* que são também vértices do hexágono regular de centro *O'*. Unir os pontos *B, L, M, N, P e C* com a ferramenta polígono, para obter o hexágono.

4) Obter o ponto médio do lado *AB* do quadrado (ponto médio). Construir a reta *u* passando pelo ponto *O"* do octógono e pelo ponto médio encontrado (reta). Construir o simétrico do hexágono em relação à reta *u* (simetria axial). Rotular como *O* o ponto simétrico do centro do hexágono.

5) Unir *O* a *O'* (segmento) e a partir de *O*, *O'* e *O"* ; baixar as perpendiculares aos lados dos polígonos, contendo os vértices *A* e *B* (reta perpendicular), obtendo os pontos *E, F, G* e *H.* (construção descrita em Batistela, 2005).

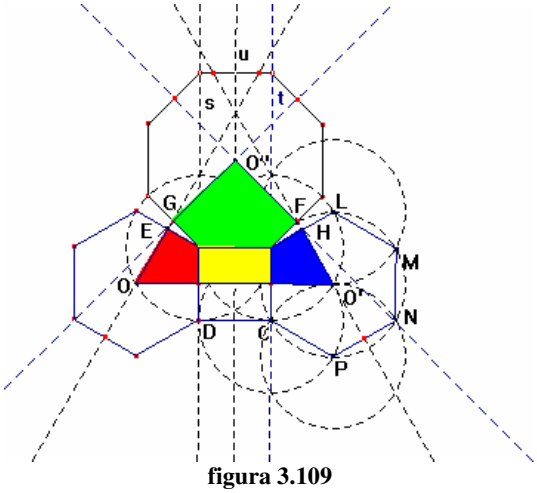


figura 3.109

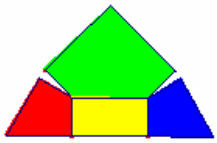


figura 3.110

figura 3.111

A figura geométrica formada pelos polígonos *BAGO"HB* e *OO"FBAEO* (fig.3.109) é a planificação da dobradura. Depois de recortada (fig.3.110) unem-se *G* a *E* e *H* a *F*, para que a dobradura se ajuste perfeitamente aos espelhos (fig.3.111).

As figuras 3.112 e 3.113 mostram o visual fornecido por essa dobradura quando colocada no caleidoscópio. A figura 3.114 representa o cuboctaedro truncado

figura 3.112

figura 3.113

figura 3.114

Cubo achatado (3,3,3,4)

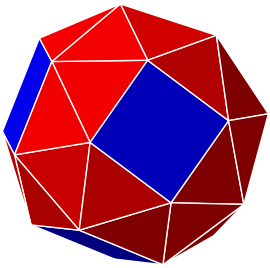


figura 3.115

O cubo achatado pode até possuir linhas de simetria, mas não temos um caleidoscópio que possua os ângulos formados pelas porções que poderiam gerar seu visual.

Dodecaedro truncado (3,10,10)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 36°).

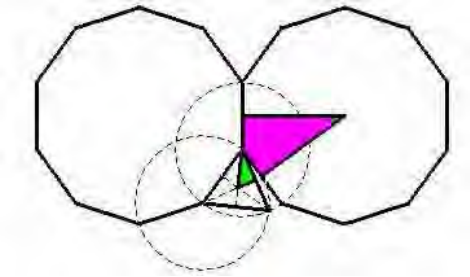


figura 3.116

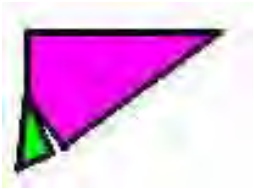


figura 3.117

figura 3.118

figura 3.119

figura 3.120

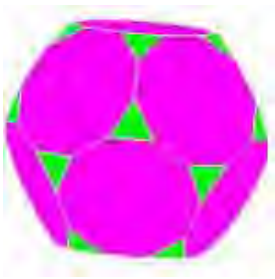


figura 3.121

Icosaedro truncado (5,6,6)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 36°).

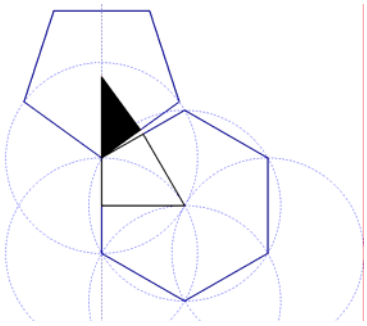


figura 3.122

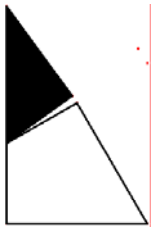


figura 3.123

figura 3.124

figura 3.125

figura 3.126

figura 3.127

Icosidodecaedro (3,5,3,5)

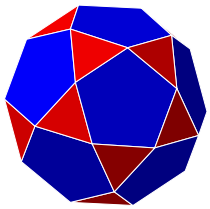


figura 3.128

O icosidodecaedro pode até possuir linhas de simetria, mas não temos um caleidoscópio que possua os ângulos formados pelas porções que poderiam gerar seu visual.

Rombicosidodecaedro (3,4,5,4)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio generalizado de ângulos (90°, 60°, 36°).

1) Construir um pentágono regular *ABCDE* (polígono regular), e nomear o centro deste por *Q* (rótulo).

2) A partir dos lados *AB* e *AE* do pentágono, construir dois quadrados. Traçar as retas *s, t, u* e *v* perpendiculares aos respectivos lados pelos pontos *A, B* e *E* (reta perpendicular). Fazer duas circunferências com raio *AB* e centros em *A* e *B* para determinar os pontos nomeados por *F, I* e *G* (ponto e rótulo) sobre as retas *u, v* e *t*, respectivamente. Com raio *AE* e centro em *E*, fazer uma circunferência para obter *H* (ponto e rótulo) sobre a reta *s*. Unir os pontos *A, B, I, F* e *A*; e depois *A, G, H, E* e *A* (polígono) para obter os quadrados de centro *P* e *O* (ponto e rótulo). Os centros dos quadrados são obtidos pela interseção de suas diagonais.

3) A partir do vértice *A* e do lado *AG* do quadrado de centro *O,* construir o triangulo eqüilátero ΔAGR de centro *T*; onde o ponto *R* é determinado pela interseção das circunferências de raio *AG* com centro em *A* e em *G* (circunferência, ponto e polígono); e o centro *T* é obtido pela interseção das bissetrizes do ΔAGR (bissetriz, ponto e rótulo).

4) Encontrar os pontos médios de *AF* e de *AR*, rotulando-os como *M e N* (ponto médio e rótulo).

5) Com a ferramenta (polígono) unir os pontos *A,M, P, Q, A e A, T, N, A,* para traçar a dobradura procurada.

6) Usando a ferramenta (preencher) podem-se colorir as partes dos polígonos que formam a dobradura. (construção feita por Batistela, 2005).

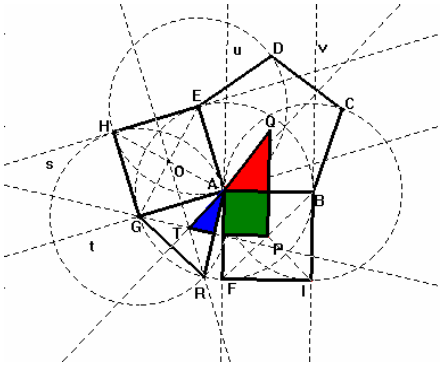


figura 3.129

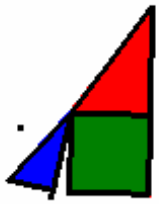


figura 3.130

figura 3.131

Recortar a figura 3.129 para a dobradura ficar como mostra a figura 3.130. Colar e dobrar a construção feita para que todos os seus lados fiquem perpendiculares a todos os espelhos (fig. 3.131).

As figuras 3.132 e 3.133 mostram o visual do poliedro, obtido ao se colocar a dobradura no interior do caleidoscópio. A figura 3.134 representa o sólido.

figura 3.132

figura 3.133

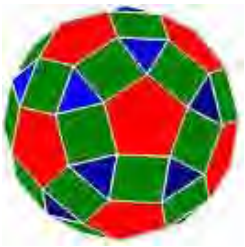


figura 3.134

Icosidodecaedro truncado (4,6,10)

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 36°).

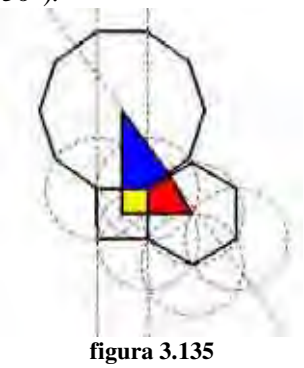


figura 3.135

figura 3.136

figura 3.137

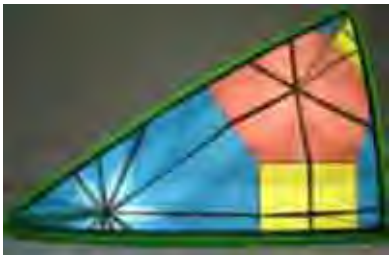


figura 3.138

figura 3.139

figura 3.140

Dodecaedro achatado (3,3,3,3,5)

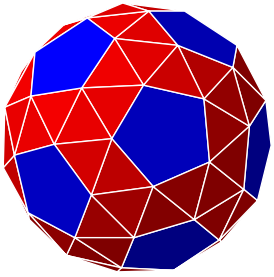


figura 3.141

O dodecaedro achatado pode até possuir linhas de simetria, mas não temos um caleidoscópio que possua os ângulos formados pelas porções que poderiam gerar seu visual.

Depois de realizada a explanação dos conceitos e materiais envolvidos no estudo dos polígonos e poliedros partimos para a descrição da proposta de ensino, elaborada para a aplicação de algumas das construções vistas até aqui, e da coleta de dados, feita durante as atividades desenvolvidas para o estudo das construções fundamentais, polígonos e poliedros.

Capítulo 4

A PROPOSTA DE ENSINO E SEU CONTEXTO DE ESTUDO

Neste capítulo apresentamos nossa proposta de ensino e situamos o contexto do estudo desenvolvido, procedimento esse que é característico dos estudos qualitativos, como visto anteriormente, pois o pesquisador precisa despender muito tempo no campo, conforme Bogdan e Biklen (1994):

> "Os investigadores qualitativos freqüentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais tem de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem" (p. 48)

Esse cenário é complexo e envolve a relação do sujeito com o meio, com os outros sujeitos e, também, com o pesquisador, o qual tem que interagir com os sujeitos de forma natural, não intrusiva, para amenizar os efeitos de sua presença no campo.

As informações aqui apresentadas referem-se a informações sobre a proposta de ensino, situando sobre quais premissas ela foi elaborada, bem como o local em que foi aplicada e alguns dados considerados relevantes sobre o perfil dos sujeitos pesquisados.

4.1 A Proposta de Pesquisa

Para desenvolver este trabalho foram elaboradas atividades voltadas para o ensino da Geometria Euclidiana Plana e Espacial.

A fim de situar sobre qual perspectiva o trabalho foi realizado, apresentamos uma breve descrição de nossa visão da *resolução de problemas* como metodologia de ensino, que norteou a preparação das atividades aplicadas aos alunos durante a coleta de dados. Posteriormente, fazemos uma descrição das atividades preparadas.

4.1.1 *Resolução de problemas*

Pesquisas importantes foram e ainda estão sendo desenvolvidas sobre a resolução de problemas como metodologia de ensino, buscando aprofundar compreensões sobre as s possibilidades e implicações.

Em Dante (1999) encontramos os objetivos da resolução de problemas, que sugerem sua importância no ensino de Matemática:

- *fazer o aluno pensar produtivamente;*
- *desenvolver o raciocínio do aluno;*
- *ensinar o aluno a enfrentar situações novas;*
- *dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;*
- *tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;*
- *equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e*
- *dar uma boa base matemática às pessoas.*

Outra autora que se dedicou a seu estudo foi Gazire (1988). Em seu trabalho destaca que: "O desenvolvimento da habilidade de resolver problema e a capacidade de utilização do pensamento reflexivo é considerado como sendo o resultado principal a ser observado na aprendizagem matemática"(p. 71) e distingue três perspectivas da resolução de problemas, que são: *resolução de problemas como um novo* conteúdo, ou seja, ensinar sobre resolução de problemas; *resolução de problemas como aplicação de conteúdos*, isto é, ensinar para a resolução de problemas e *resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática*, quer dizer, ensinar por meio da resolução de problemas. Antes de situar sobre qual destas perspectivas desenvolvemos nossa pesquisa, iremos explicitar qual nossa concepção de problema.

Concebemos problema como uma questão em que o aluno não conhece os meios para a sua resolução, mas, mesmo assim, tem interesse em resolvê-la, o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. De acordo com Dante (1999) classificamos os problemas elaborados para esta pesquisa como *problemas-processo ou heurísticos*, por serem problemas "cuja solução envolve operações que não estão

contidas no enunciado" (p. 17). Isso posto, entendemos que a resolução de problemas pode ser vista na perspectiva de *"como um meio de ensinar Matemática"*.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), também, indicam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e Onuchic (1999) corrobora nossa visão ao afirmar que:

> "Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito para aprender matemática mas também como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis." (p. 207)

Tendo definido nossa concepção de problema e também sobre qual perspectiva trabalhamos, iremos explicitar as quatro fases, sugeridas por Polya (1978), para a resolução de um problema:

- *Compreensão do problema:* o aluno precisa estar motivado a resolvê-lo. Esta é a fase em que precisa entender o enunciado e identificar as partes do problema.
- *Estabelecimento de um plano:* depois de ter visto o problema sobre diferentes aspectos, relacioná-lo a situações semelhantes e dividi-lo em partes, o aluno concebe uma estratégia para solucioná-lo.
- *Execução de um plano:* neste momento o aluno executa o plano que foi estabelecido para solucionar o problema.
- *Retrospecto:* esta é a fase em que testa a solução encontrada. Caso esta não seja válida recomeça todo o processo de resolução do problema.

No encaminhamento das atividades em resolução de problemas, Allevato e Onuchic (2003) sugerem que sigamos as seguintes etapas:

1º) formar grupos e entregar as atividades;

2º) observar e intermediar o trabalho em grupos;

3º) registrar os resultados na lousa;

4º) analisar os resultados em plenária;

5º) encaminhar um consenso e

6º) formalizar o que foi aprendido.

As autoras enfatizam que o aluno precisa sentir-se desafiado e desejar resolver um problema. Para isso, o problema deve conduzi-lo a utilizar seus conhecimentos anteriores, a fim de que não se sinta frustrado e incapaz de resolvê-lo. Além disso, se o aluno encarar a situação como um desafio, ele irá buscar novas alternativas, novos conhecimentos para solucionar o problema proposto, podendo, assim, dar significado àquilo que está aprendendo.

Acreditamos que esta metodologia de ensino favorece um trabalho mais autônomo, no qual o conhecimento construído faz mais sentido. Portanto, pelas razões já expostas, é que a resolução de problemas foi escolhida para desenvolver com os alunos atividades usando *origami* e caleidoscópio.

4.1.2 *Descrição das atividades e conteúdos desenvolvidos*

A coleta de dados se deu nas salas em que os sujeitos da pesquisa tinham aulas habitualmente, uma noite no Laboratório de Matemática, localizado no prédio 5, duas no Laboratório de Informática (laboratório 7 do prédio 9) e nos demais encontros em sala do prédio 14, de número 14301. Sobre esses locais podemos destacar que estavam sempre em ordem para receber os alunos. Na sala dos professores têm-se sempre, à disposição, material como giz branco e colorido. Quanto a outro material não temos informação de sua disponibilidade, pois nada mais precisamos solicitar, visto que levamos os objetos necessários para a execução do nosso trabalho.

O laboratório de Informática tem várias salas disponíveis, mas devido à grande quantidade de cursos oferecidos, no período noturno, deveria ser reservado com antecedência. O laboratório que nos foi cedido era equipado com 20 computadores, todos em bom estado e com o software *Cabri-Géomètre II* devidamente instalado, ligados em rede e com livre acesso a internet.

Para realizarmos as atividades foram disponibilizadas aulas em dias variados, procurando não prejudicar o andamento de nenhuma disciplina daquele semestre, trabalhamos a mesma quantia de horas em todas as disciplinas. Em média, estavam presentes às aulas vinte e três alunos, dos quais vinte eram fixos, ou seja, vinham em todos os encontros, pois participavam de todas as disciplinas do semestre.

Visando melhor situar o leitor no que se refere à quantia e duração dos encontros, apresentamos uma tabela com dia, local, horário, duração e quantia de alunos presentes em cada um. Nas noites em que trabalhamos mais de 2 horas fizemos intervalos de 15 minutos.

Dia	Local	Horário	Duração	Alunos presentes
31/07/2006	Laboratório de Matemática	19h 30min – 22h 30min	3 horas	24
01/08/2006	Sala 14301	19h 30min – 22h	2 horas e 30 minutos	24
02/08/2006	Sala 14301	19h 30min - 21h	1 hora e 30minuntos	23
04/08/2006	Sala 14301	19h 30min – 21h	1 hora e 30 minutos	24
07/08/2006	Sala 14301	19h 30min – 22h 30min	3 horas	28
08/08/2006	Sala 14301	19h 30min – 22h 30min	3 horas	26
09/08/2006	Sala 14301	19h 30min – 22h 30min	3 horas	20
11/08/2006	Laboratório de Informática	19h 30min – 22h 30min	3 horas	26
17/08/2006	Sala 14301	19h 30min – 22h 30min	3 horas	20
13/09/2006	Laboratório de Informática	19h 30min – 22h	2 horas e 30 minutos	20

Tivemos 10 encontros com os alunos, perfazendo um total de 26 horas de trabalho.

As atividades desenvolvidas foram divididas em três momentos: o primeiro referente às construções geométricas fundamentais; o segundo ao estudo de polígonos; e o terceiro ao estudo dos poliedros.

1° momento - O trabalho voltado às construções fundamentais teve como objetivo relembrar os fundamentos da Geometria Euclidiana Plana, e introduzir outra maneira de realizar tais construções: por meio das dobraduras. Tais construções têm como embasamento teórico os procedimentos geométricos fundamentais do *origami,* que foram detalhados no capítulo 2.

Conteúdos desenvolvidos: ponto, reta, plano, ângulo, ponto médio, bissetriz, mediatriz, perpendicularidade, retas paralelas, retas tangentes, congruência e semelhança de triângulos, transporte de segmentos e transporte de ângulos.

2° momento - A construção de polígonos foi feita com régua e compasso e, também, por dobraduras. Aqui os alunos, distribuídos em grupos, discutiram sobre cada polígono construído e escreveram definições para os mesmos, além de, durante a resolução dos problemas propostos, irem descobrindo as características (simetrias, isometrias, número de lados, ângulos...) dos polígonos estudados.

Conteúdos desenvolvidos: polígonos (quadrado, retângulo, retângulo áureo, triângulo eqüilátero, pentágono regular, hexágono regular, octógono regular), elementos dos polígonos (vértices, lados, ângulos, diagonais), simetria reflexiva e rotacional, congruência e semelhança de triângulos, soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulos (alternos, correspondentes, colaterais), ponto médio, mediatriz e bissetriz.

3° momento – Este momento foi destinado à introdução da técnica do *origami modular* (descrita no capítulo 3), por meio do qual foi feita a construção dos módulos que dão origem aos poliedros. A união desses módulos realizou-se seguindo uma seqüência de passos que levam ao entendimento de conceitos como vértice, face, aresta e a descoberta da existência de apenas cinco sólidos platônicos. Também, por meio da manipulação e observação dos sólidos, foram estudadas suas simetrias e isometrias. O estudo das simetrias levou à encontrar as dobraduras ou bases (que foram construídas no software *Cabri-Géomètre II*), que são colocadas no interior do caleidoscópio para fornecerem o visual dos poliedros.

Conteúdos desenvolvidos: poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro), elementos dos poliedros (faces, arestas e vértices), planos de simetria, eixos de simetria rotacional, relação de Euler, semelhanças e diferenças dos poliedros regulares e semi-regulares, área da esfera, área de triângulos esféricos, ângulos diedrais, lei dos cossenos, ponto médio, mediatriz e bissetriz.

4.2 Os Sujeitos e o Ambiente da Pesquisa

4.2.1 *A Universidade e o curso*

A pesquisa foi realizada na Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI, campus da cidade de Santo Ângelo, que se localiza na região noroeste do estado do Rio Grande do Sul. Essa instituição de ensino pertence a uma fundação que tem quatro campi e duas extensões em cidades da região.

figura 4.1

Esta universidade (fig. 4.1) é privada e tem, hoje, em funcionamento 25 cursos de graduação e conta com uma estrutura física bem conservada, composta por 20 prédios, todos

identificados por números (1 a 20), que possuem amplas salas de aulas. Possui uma biblioteca central e laboratórios específicos para cada área.

A pesquisa foi realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Esse curso, oferecido somente no horário noturno, tem por objetivo a formação de professores, e seu currículo pleno é organizado em nove semestres letivos.

Nessa faculdade o curso de Matemática tem por objetivo: "formar um profissional crítico, responsável e comprometido com o ensino fundamental e médio. Para tanto, visa desenvolver habilidades que levem o acadêmico a atuar como organizador, facilitador, mediador, incentivador e avaliador do processo de aprendizagem."[20], almejando preparar um profissional que atenda as demandas da sociedade. Tem em sua grade curricular as seguintes disciplinas, oferecidas por semestre:

Grade Curricular do curso de Licenciatura em Matemática

Código	Disciplinas	C/H		CRÉD.	PRÉ-REQ.
		T.	P.		
1º Semestre					
10-800	Geometria Euclidiana	60		04	
10-810	Laboratório de Geometria Euclidiana		30	02	
10-801	Desenho Geométrico	45	15	04	
10-106	Matemática Básica I	60		04	
81-101	Língua Portuguesa	45	15	04	
70-427	Metodologia Científica	20	10	02	
2º Semestre					
10-107	Matemática Básica II	60		04	
10-102	Pré-Cálculo	60		04	
10-802	Geometria Analítica I	60		04	
10-701	Laboratório de Ensino de Matemática I	30	30	04	
70-224	Psicologia da Aprendizagem	45	15	04	
3º Semestre					
10-405	Cálculo I	60		04	10-102; 10-107
10-803	Geometria Analítica II	60		04	10-802
10-804	Álgebra Linear I	60		04	10-802
10-702	Laboratório de Ensino de Matemática II		60	04	10-701
72-115	Didática I	45	15	04	
4º Semestre					
10-406	Cálculo II	60		04	10-405
10-805	Álgebra Linear II	60		04	10-804
10-108	Matemática Básica III: Tratamento da Informação	60		04	
10-109	Matemática Financeira A	60		04	10-106
10-703	Laboratório de Ensino de Matemática III		60	04	10-702
5º Semestre					
10-407	Cálculo III	60		04	10-406
10-706	Informática no Ensino da Matemática	15	15	02	
10-705	Laboratório de Ensino de Matemática IV		60	04	10-703
10-207	Física Geral I-A	60		04	10-405
72-378	Metodologia da Pesquisa	10	20	02	
70-218	Política Educacional e Organização da Educação Brasileira	45	15	04	

[20] Texto retirado do site da universidade www.urisan.tche.br em link dedicado ao curso de Matemática.

6º Semestre					
10-408	Cálculo IV	60		04	10-406
10-806	Álgebra A	60		04	
10-707	História da Matemática A	30	15	03	
10-708	Seminários Temáticos em Educação Matemática	30	15	03	72-115; 70-224
10-208	Física Geral B	60		04	10-207
10-605	Estágio Curricular em Ensino de Matemática I		75	05	72-115; 10-800; 10-801; 10-810; 10-703
7º Semestre					
10-409	Cálculo V: Equações Diferenciais	60		04	10-407
10-807	Álgebra B	30		02	10-806
70-156	Filosofia da Educação	30		02	
10-209	Física Geral C	60		04	10-208; 10-406
10-606	Estágio Curricular em Ensino de Matemática II		90	06	10-605; 10-106; 10-107 e 10-108
70-578	Planejamento e Gestão Educacional A	30		02	
	Eletivas	30		02	
8º Semestre					
15-128	Cálculo Numérico	60		04	10-406; 10-804
10-112	Probabilidade e Estatística Aplicada	45	15	04	10-108
70-155	Sociologia da Educação	30		02	
10-607	Estágio Curricular em Ensino de Matemática III		120	08	10-606; 10-703
10-620	Trabalho de Graduação I	15	15	02	72-378, 73 10-606
	Eletiva	30		02	
9º Semestre					
10-411	Introdução à Análise	60		04	10-408
10-608	Estágio Curricular em Ensino de Matemática IV		120	08	10-607; 10-705; 10-802
10-621	Trabalho de Graduação II		30	02	10-606;10-620
	Eletivas	90		06	

Disciplinas Eletivas

Código	Disciplina	T	P	Crédito	Pré-Req.
10-714	Modelagem Matemática no Ensino	15	15	02	10-703
10-715	Lógica Matemática	30		02	
10-412	Geometria Diferencial	60		04	10-407 e 10-209
10-413	Equações Diferenciais Parciais	60		04	10-409
10-410	Cálculo VI: Variáveis Complexas	60		04	10-107 e 10-407
10-808	Geometria não Euclidiana	15	15	02	10-800
10-716	Tópicos Especiais em Educação Matemática	15	15	02	72-115
10-717	Tópicos Especiais em Ensino de Estatística	15	15	02	10-108 e 72-115
10-210	Física Geral D	60		04	10-209
10-718	Tópicos Especiais em Ensino de Física	30		02	10-209 e 10-704
10-719	Psicologia da Aprendizagem Matemática	30		02	
10-720	Pesquisa em Educação Matemática	15	15	02	
10-721	Seminários Temáticos em Educação		30	02	
10-722	História da Matemática B	15	15	02	10-707
10-111	Modelos de Previsão	60		04	
73-400	Realidade Brasileira	60		04	
10-709	Introdução a Filosofia Matemática	30		02	
10-723	Didática da Matemática	45	15	04	
10-211	Física Experimental I		30	02	10-207
10-212	Física Experimental II		30	02	10-209

4.2.2 *Os sujeitos*

figura 4.3
Sujeitos pesquisados

Para fazer um levantamento do perfil dos sujeitos pesquisados foi entregue um questionário para cada aluno, logo na primeira noite de trabalho. Ele era constituído de questões estruturadas, relacionadas à sua vida escolar, sua relação com a Matemática e experiência com recursos didáticos diferenciados. (Anexo 3)

Os sujeitos selecionados para a pesquisa eram alunos da turma do segundo semestre, e as informações que seguem refletem suas características gerais.

Com a análise deste questionário foi possível observar que 60% da turma eram mulheres e 40% homens, dos quais 76% tinham idade entre 17 e 24 anos. Os demais se encontravam na faixa etária que vai dos 25 aos 40 anos. A maioria (62%) estudava e trabalhava, tendo uma jornada média de trabalho de 8 horas diárias, o que corresponde a 40 horas semanais.

Observando a vida acadêmica dos sujeitos, pudemos perceber que 90% freqüentaram a rede pública de ensino ao cursar o ensino médio, e que nenhum deles fez cursinho pré-vestibular para ingressar na Universidade. A escolha dessa instituição de ensino, para dar continuidade aos estudos, se deu pela proximidade do local de residência e, também, porque nessa região essa Universidade é muito bem conceituada.

Esses alunos, em sua maioria (60%), ficaram alguns anos (em geral 2 a 5) sem estudar no período entre o final do ensino médio e o início da faculdade, quando apenas trabalharam ou fizeram cursos técnicos.

A escolha do curso foi justificada pelo gosto por números, por ser considerado como um bom campo de trabalho e, também, por gostarem e terem facilidade e afinidade com a Matemática.

Alguns comentários pareceram bem efusivos, que achamos interessante apresentá-los. Foram frases como: "*porque adoro matemática*", "*porque gosto, a matemática nos faz despertar o interesse de estudar e tem muitas curiosidades a serem descobertas*", "*matéria que mais tive afinidade e sempre gostei*", "*é um curso que admiro*", "*pelo carinho que sempre tive pela disciplina de matemática*".

Finalizando este capítulo, gostaríamos de destacar algumas considerações a respeito dos alunos, informações estas advindas dos questionários respondidos e da realidade que conhecemos tanto da Universidade quanto da cidade em que ela se situa. Os alunos procuram o curso como uma opção para melhorar a qualidade de vida, pois tendo uma profissão, como a de professor, acredita-se ter emprego garantido, com um salário razoável. Em virtude de a Matemática ser considerada difícil pela maioria das pessoas, o campo de trabalho torna-se amplo, sempre tendo vagas para lecionar esta disciplina nas escolas.

Nesse capítulo foi apresentado o cenário em que se desenvolveu esta pesquisa. Falta agora apresentar os dados coletados neste ambiente, tarefa que será feita no próximo capítulo.

Capítulo 5

DESCRIÇÃO DOS DADOS

Os horários em que foram feitas as observações eram variados, assim como os dias disponibilizados. Para não prejudicar nenhuma disciplina do semestre foram feitos acertos para que trabalhássemos a mesma quantia de horas, em todas as disciplinas. Ao todo foram realizados 10 encontros, perfazendo um total de vinte e seis horas, que ocorreram nos meses de agosto e setembro de 2006. Trabalhamos com os alunos, em média, duas horas e meia por dia.

Conforme esclarecido anteriormente, no capítulo de metodologia, utilizamos quatro formas de registrar os dados: anotações, documentos, fotografias e gravações de áudio.

Para análise dos dados foram realizadas leituras das anotações, que contribuíram na narração dos fatos ocorridos e também de comentários, explicações e esclarecimentos necessários para uma melhor compreensão dos dados.

Os documentos analisados são as apostilas com os problemas resolvidos pelos alunos, assim como os relatórios, entregues ao final de cada módulo estudado, como descrito no capítulo 1. Os comentários e as narrativas apresentadas derivam, também, das gravações de áudio dos diálogos, realizados durante as atividades. Esses diálogos são constituídos pelas falas dos alunos e do pesquisador. Os apresentados neste capítulo são aqueles considerados mais significativos para o aprofundamento e explicação das análises.

Para melhor organizar esses diálogos utilizamos convenções: para o pesquisador utilizamos **Pe** e para os alunos **A, B, C**... Como não conseguimos identificar pela voz qual aluno está falando, devido ao pouco tempo em que trabalhamos com os mesmos, pode haver casos em que um mesmo aluno seja identificado com letras diferentes em outros diálogos. Em alguns momentos não foi possível identificar qual dos alunos está falando; então, utilizamos um ponto de interrogação (**?**) para representá-lo.

Outras indicações aparecem, tais como:

- **SILÊNCIO** para indicar que houve uma pausa, momento de silêncio.

- [texto] no caso de inclusão de comentário nosso no diálogo, ou por ser conveniente esclarecer o que estava ocorrendo.

- **palavra(s) em negrito** para mostrar que a pessoa que fala deu ênfase àquela(s) palavra(s).

Como citado no capítulo anterior, as atividades foram divididas em três momentos. A seguir detalharemos como isso se processou.

5.1 As Construções Fundamentais - 1° momento

No primeiro momento estudamos os conceitos referentes às construções geométricas fundamentais, como explicado a seguir.

5.1.1 *Construções com régua e compasso*

Para a realização destas atividades a turma fez cópia das apostilas (Anexos 4 e 5) e dividiu-se em trios. Foram relembrados os casos de congruência e semelhança de triângulos, por estes serem necessários nas justificativas das construções com régua e compasso, além de serem recordadas as definições de: interseção, congruente, semelhante, etc. Para isso, os grupos seguiram as instruções da primeira página da apostila (Anexo 4). Após escreverem o que sabiam, foi aberta a discussão com toda a turma, na qual os grupos apresentaram suas respostas e confrontaram com as dos colegas. Finalmente, fechou-se a discussão com a anotação na lousa, pela pesquisadora, dos dados julgados relevantes.

Depois dessa introdução começamos o trabalho com as construções utilizando régua e compasso, tarefa que os alunos tinham realizado em disciplina do semestre anterior. Essas construções referiam-se ao transporte de segmentos, de ângulos, construção da bissetriz, mediatriz, ponto médio, paralelas e reta tangente.

Um ponto que gerou discussão foi o momento de justificar as construções. A dificuldade centrava-se no fato de eles não saberem de que ponto partir, sendo então, orientados por nós a iniciarem a justificativa por aquilo que tinha sido construído por eles, e que tinham certeza de estar correto. Alguns alunos sentiram dificuldade no momento de elaborar as provas pedidas. A aluna Lidiane expressou isso em seu relatório:

"*Tive muita dificuldade ao provar tudo o que construía de acordo com os casos de congruência. Isto me fez pedir ajuda para a professora como também para colegas... Dificuldades eu tive, mas foram superadas com o tempo...*",

...e o aluno Fábio também:

"*Nestas construções surgiu certa dificuldade em justificar as construções na linguagem matemática...*"

Além da dificuldade de explicar as construções, observamos também que alguns alunos não se sentiram muito motivados a realizar essas construções. Percebemos que, dos vinte e quatro alunos presentes nesse dia, apenas uns dez deles estavam, realmente, empenhados em encontrar as justificativas.

Mariana, em seu relatório, escreveu o seguinte:

"*A parte em que foram trabalhados os segmentos de retas, mediatrizes, bissetrizes talvez para grande parte dos colegas, foi repetitivo, pois no 1° semestre já havíamos trabalhado os conceitos e também havíamos construído*."

Por outro lado, temos o depoimento de Taira que, mesmo já tendo visto este conteúdo, considerou-o importante:

"*... no semestre passado já havíamos trabalhado com esse conteúdo, porém quanto mais estudarmos mais iremos adquirir conhecimento e dessa aula tirei muito proveito...*"

Justamente por terem trabalhado com essas construções anteriormente, solicitamos que, antes de fazê-las, escrevessem definições para cada construção, para que após o término da atividade proposta pudessem comparar suas descrições com as construções. Analisando e discutindo com a turma as respostas dadas, percebemos não mais haver dificuldades quanto à conceituação e entendimento destas construções.

Nem todos os grupos terminaram as atividades pedidas durante a aula. Então, pedimos que as terminassem em casa, e se surgissem dúvidas retomaríamos o assunto no dia seguinte.

5.1.2 *Construções com dobraduras*

Por não terem surgido dúvidas referentes às construções com régua e compasso, prosseguimos, dando início ao trabalho com as dobraduras.

Os alunos receberam pedaços de papéis coloridos, para a confecção das dobraduras de retas, bissetrizes, ponto médio e de outras figuras geométricas, propostas na apostila (Anexo 4).

O início das atividades com dobraduras despertou maior interesse nos estudantes do que as atividades de desenho com régua e compasso. Um aluno, que antes de realizar qualquer atividade produziu um avião de papel, ao término da aula comentou:

"Hoje a professora conseguiu despertar meu interesse."

Todas as construções realizadas com o *origami* precisavam ser descritas passo a passo. Nessa tarefa apresentaram muita dificuldade, gerando intensas discussões sobre a maneira como escrever corretamente. Por sugestão da pesquisadora os alunos passaram a nomear as construções (retas, pontos, etc.), obtidas com as dobras, a fim de facilitar essa descrição.

Havia certa insegurança por parte de alguns alunos, que ficavam esperando o colega iniciar o trabalho para, então, fazer o seu. Isso pode ser comprovado no comentário retirado do relatório de Lidiane:

> "*Tenho muita dificuldade de interpretar os enunciados, tenho muitas dúvidas de que maneira responder e, as vezes, até medo de responder, pensando que não seria a resposta correta (escreveria alguma besteira), por causa disto solicitei muito a presença da professora que teve paciência de sentar com nosso grupo, discutir e fazer nós mesmos entender, assim, fazendo com que conseguíssemos responder.*"

Os alunos encontraram diversas formas de dobrar os papéis e chegar às respostas pedidas, o que gerou intensa discussão entre os grupos sobre quem estava certo. Assim, ao término de todas as construções, as atividades eram revistas com a turma toda, a fim de se fazer uma análise de quais estavam corretas e se era realmente possível realizar por dobraduras, e de maneiras diferentes, essas construções fundamentais.

Cada grupo defendeu seu modo de confeccionar as dobras, mas também não descartou a possibilidade de fazer como os outros estavam sugerindo, chegando à conclusão de que umas eram mais fáceis que outras. A esse respeito ressaltamos que no *origami*, assim como nas construções com régua e compasso, melhor e mais elegante é a construção que usar menos passos para se chegar ao resultado esperado.

Para a construção da bissetriz alguns grupos com o papel totalmente aberto, fazia com que os lados do ângulo se sobrepusessem, tentando ver através do papel. Essa atitude dificultava um pouco a precisão da construção e pode ser observada na figura 5.1, a dobra é feita sobrepondo *A* e *B*. Outro grupo de alunos, utilizou a sobreposição dos lados do ângulo com o papel dobrado, isto é, vincado nas dobras que formam cada lado do ângulo, na figura 5.2 podemos observar a dobra que é feita ao unir os pontos *A* e *B*

figura 5. 1

figura 5. 2

Apresentamos, a seguir, o modo como um dos alunos descreveu a construção da bissetriz. As diferenças nas descrições feitas pelos grupos, são basicamente referentes às letras utilizadas:

> *"Com dobraduras fiz retas concorrentes A e B, escolhi um ângulo Ô qualquer e uni a reta B com a reta A achando a bissetriz do ângulo escolhido."* (fig. 5.3)

figura 5. 3

A confecção da perpendicular foi feita de duas maneiras diferentes pelos grupos. Alguns grupos construíram a reta e, com o papel dobrado, fizeram a construção da perpendicular fazendo as semi-retas se sobreporem. Outros abriam totalmente o papel e, realizando o mesmo procedimento, faziam as semi-retas se sobreporem, mas observando através do papel (método esse que também dificulta a precisão da construção).

Para a construção da mediatriz os alunos optaram por observar os pontos marcados através do papel, colocando-o contra a luz. Dois grupos construíram a mediatriz marcando perpendiculares nos extremos do segmento e unindo, com o papel dobrado nas perpendiculares, esses pontos.

Descrição feita por uma aluna para a construção da mediatriz:

"S*obre a reta dobrada marcam-se os pontos A e B, marcar perpendiculares a esses pontos determinando as retas* ***m*** *e* ***n.*** *Unir* ***m*** *a* ***n****, a dobra encontrada será a mediatriz do segmento* $\overline{AB}$*."* (fig. 5.4)

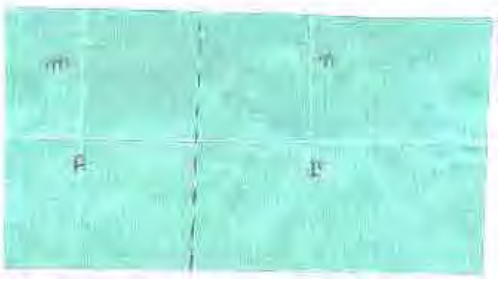


figura 5. 4

A construção de retas paralelas proporcionou muito debate, pois os alunos queriam utilizar a borda da folha como referência para fazer a dobra. Colocamos, então, em dúvida o fato de a borda da folha ser uma reta, tendo eles de encontrar outro modo para realizar tal construção. Constatamos, nesse momento, que os papéis entregues aos alunos não deveriam ter as bordas recortadas retas, e que a melhor opção teria sido rasgar suas bordas.

Dos grupos envolvidos, apenas dois não fizeram essa construção utilizando-se dos conceitos de retas perpendiculares, e dois alunos não estavam convencidos de que, ao fazerem as dobras do modo como estavam procedendo, encontrariam perpendiculares. Um dos alunos de um grupo chegou a recortar o seu papel de maneira que suas bordas não estivessem retas. Isso para que seu colega, que descreveu a construção da reta paralela usando como referência a borda, percebesse que sua descrição não era satisfatória, pois ela deveria esclarecer como fazer essa construção, independentemente do formato do papel.

Duas maneiras descritas pelos grupos na construção da reta paralela:

"Fiz uma reta ***s****, sobre ela marquei um ponto* ***P*** *e achei a sua perpendicular que passe pelo ponto* ***P*** *determinando* $\overleftrightarrow{t}$*, marquei sob a reta* ***t*** *o ponto* ***O*** *e achei a perpendicular de* ***t*** *passando por* ***O****. Assim achei as retas paralelas* ***r*** *e* ***s****."* (fig. 5.5)

figura 5. 5

*"Dobrar a reta **a**. Marcar um ponto **P** fora da reta e traçar a perpendicular da reta passando pelo ponto **P.** Marcar o ponto **t** fora da perpendicular já obtida e traçar outra perpendicular que passe pelo ponto **t** que será a paralela da reta **a.**"* (fig. 5.6)

figura 5. 6

Cinco ou seis alunos não fizeram as descrições pedidas (por não estarem de posse da apostila, pois ainda não tinham feito cópia da mesma), mas todos realizaram as construções conforme o solicitado, e ninguém reclamou por não ter entendido alguma atividade ou por não ter conseguido fazê-la. Uma das alunas que estava sem a apostila teve o interesse de anotar todos os passos para que, posteriormente, quando estivesse com o seu material pudesse fazer a atividade.

As construções foram coladas nos locais indicados na apostila (figura 5.7), e alguns perceberam que seria mais interessante colar apenas uma parte e deixar o restante do papel livre, para que as dobras pudessem ser efetuadas em outro momento caso o desejasse.

figura 5. 7

Comentário da aluna Mariana em seu relatório:

"Esse trabalho para mim, foi muito interessante e me chamou a atenção da maneira pela qual podemos construir, por exemplo, um quadrado, apenas com dobras paralelas e perpendiculares, também como podemos achar mediatrizes, bissetrizes, e depois ainda comprovarmos que são realmente o que foi construído. Todos esses procedimentos, frizando bem, sem a utilização de qualquer outro tipo de material (régua, compasso, tesoura, ...) apenas dobrando."

5.2 A Construção de Polígonos - 2° momento

Neste momento estudamos conceitos matemáticos, resolvendo problemas referentes à construção de alguns polígonos com régua e compasso e dobraduras. Durante a resolução dos problemas propostos os alunos permaneceram divididos em grupos, em sua maioria formavam trios, mas essa formação dependia de quais alunos estavam presentes, tendo algumas situações em que o trabalho transcorria em duplas ou até mesmo individualmente.

5.2.1 *O quadrado*

O trabalho teve início com a construção do quadrado. Na noite em que fizemos estas atividades os alunos estavam um pouco dispersos. Cinco deles estavam sem apostila, o que dificultava o andamento das atividades no grupo, por precisarem recorrer ao material do colega para lerem as perguntas.

Mesmo tendo realizado a construção de um quadrado em disciplina do semestre anterior, e tendo o conhecimento de como construir perpendiculares e paralelas com régua e compasso, quase todos os alunos tiveram dificuldade em fazer essas construções conosco, fazendo uso dos mesmos materiais.

Supomos que esta dificuldade se deveu ao fato de os alunos não terem, realmente, aprendido como fazer esta construção, quando trabalharam com isso no semestre anterior. Talvez, apenas decoraram a seqüência de passos dada pelo professor sem tentar entendê-la, não se dando conta de que a construção de um quadrado envolvia tão somente a confecção de retas paralelas e perpendiculares.

Outra atividade com *origami* em que os alunos sentiram muita dificuldade foi a de encontrar um quadrado, partindo de um pedaço de papel qualquer, sem lados retos que pudessem ser usados como base. Após várias tentativas, os grupos solucionaram o problema valendo-se dos conceitos estudados quando da realização das construções fundamentais com dobraduras.

As construções ficaram muito parecidas entre si, por isso descrevemos apenas uma delas (fig. 5.8):

"1°) Dobro uma reta;

2°) Dobro uma perpendicular da primeira reta;

3°) Dobro uma perpendicular da segunda reta;

4°) Dobro a bissetriz do ângulo da 2ª com a 3ª reta e marco o ponto onde deve passar a outra reta;

5°) Dobro uma reta que passe no ponto marcado.

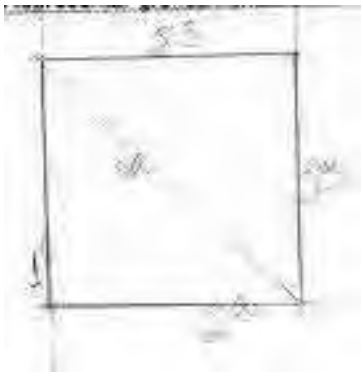


figura 5. 8

A construção de um quadrado a partir de um papel retangular, também não era uma noção clara para todos os alunos. Apenas três grupos fizeram a construção do modo convencional, dobrando o lado menor do retângulo sobre o lado maior, vincando uma diagonal do quadrado a ser recortado (construção descrita no capítulo 3). Os demais utilizaram os passos descobertos na atividade descrita anteriormente.

Houve uma discussão interessante a respeito da definição de quadrado em relação ao retângulo. Transcrevemos, abaixo, o diálogo:

Grupo 1 formado pelos alunos G, H, I e J.

Aluno G: - O quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

Aluna H: - **Não!** Ah, o quadrado é. Pensei que tava falando do retângulo, eu ia dizer que o retângulo não tem lados iguais.

Aluno G: - O quadrado é um retângulo que tem os lados iguais.

Aluna H: - É um retângulo que tem os lados iguais. [os dois falaram juntos]

Aluno G: - O retângulo é um polígono regular que tem os quatro ângulos retos.

Aluna H: - Mas não é um quadrado.

Aluno G: - Não, pode ser um quadrado. Um quadrado é um retângulo.

Aluna H: - **Hã?**

Aluno G: - O quadrado é um retângulo.

Aluna H: - Ai, me deu um nó na cabeça.

Aluno G: - O retângulo pode ou não ser um quadrado.

Aluna H: - E não é!

Aluno G: - O quadrado é um retângulo, porém um retângulo pode ou não ser um quadrado.

Aluna H: - Não é um quadrado.

Aluno G: - O retângulo **pode ou não** ser um quadrado.

Aluna H: - O retângulo **não pode ser um quadrado**.

Pe: - Se o quadrado **é** um retângulo...

Aluna H: - Então um retângulo... [risos]

Aluno G: - O retângulo pode ou não ser um quadrado.

Aluna H: - E porque uma mulher disse semestre passado... que não.

Pe: - Qual é a definição de retângulo? Como você define retângulo?

Aluno G: - Quem disse que não?

Aluna H: - Não. Não, não, não, não... **desenhado**, não pode.

Pe: - Define retângulo para mim. [insistindo para que a aluna falasse sobre o que considerava ser a definição de retângulo]

Aluna H: - Retângulo?

Pe: - É define-o para mim.

Aluna H: - É um polígono regular, com quatro ângulos...

Aluno G: - Não!

Aluna H: - Não, não é. Ah! O quadrado é regular.

Pe: - O quadrado é regular.

Aluna H: - Então o retângulo não é quadrado.

Pe: - Defina retângulo!

Aluna H: - Retângulo é um polígono... com **quatro ângulos retos**.

Pe: - E o quadrado não é um polígono com quatro ângulos retos?

Aluna H: - Porém é um polígono regular. **O quadrado é um polígono regular**.

Pe: - Tudo bem, mas o quadrado não tem quatro ângulos retos?

Aluna H: - Tem, mas é regular.

Pe: - Mas ele não tem os quatro ângulos retos que a definição do retângulo fala?

Aluna H: - Sim, mas ele tem **mais** definição.

Pe: - Mas ele **pode** ser um retângulo.

Aluna H: - Não.

Aluno G: - O quadrado é um retângulo que tem quatro ângulos retos.

Aluna H: - Tá, mas tem mais definição do quadrado.

Aluna I: - Mas isso não importa.

Aluno G: - Retângulo não é um quadrado, ele pode ser um quadrado.

Aluna H: - Como pode ser?

Aluno G: - Nem sempre ele é. Tu tens dois retângulos, isso aqui... [faz um desenho representativo do que está falando].

- Temos um quadrado e um retângulo. Certo?

Aluna H: - Tá! [sua voz demonstra impaciência]

Aluno G: - Definição do retângulo, quatro ângulos retos.

Aluna H: - Isso aí não pode ser quadrado, pra mim não pode ser quadrado. [se referindo ao desenho]

Pe: - Esse não é um quadrado.

Aluno H: - Então, é o que eu tô dizendo.

Pe: - Mas esse aqui pode ser um retângulo. [apontando para o desenho do quadrado]

Aluno G: - O que, que é isso aqui? Tem quatro ângulos retos é retângulo.

Aluna H – A esse pode ser. [referindo-se ao quadrado]

Aluno G: - O quadrado é retângulo.

Aluna H: - Tá!

Aluno G: - O retângulo **pode ou não** ser um quadrado.

Aluna H: - O retângulo não pode ser um quadrado.

Pe: - Por que não?

Aluno G: - Pra ser um retângulo tem de ter quatro ângulos retos. O quadrado tem.

Aluna H: - Tá! E um retângulo pode ser um quadrado? **Não!**

Pe: - Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado.

Aluna H: - Tá, acho que é isso que eu to querendo dizer.

Aluna I: - Ahn!!!

Aluna H: - Acho que é isso que eu to querendo dizer.

Aluno G: - Essa figura aqui, isso é um... losango, não é? [faz um desenho]

Aluna H: - Sei lá eu. Tá! Eu vendo aqui é um losango.

Aluno G: - Ele é um quadrado?

Aluna H: - É! [meio em dúvida] Não... sei...

Aluno G: - É um quadrado?

Aluna H: - É, é um quadrado. É um quadrado virado para baixo. [refere-se a posição em que foi desenhado o quadrado]

Aluno G: - O losango pode ou não ser um quadrado.

- Isso aqui é um losango [falando do desenho], também é um quadrado.

Aluna H: - Também é um retângulo.

Aluno G: - Também é um retângulo. Porém ele pode ser um losango e não... [não é possível entender o restante da frase]

Pe: - Qual é a definição de losango?

Aluna H: - São quatro lados... são congruentes?

Aluno G: - Polígono regular.

Pe: - O losango é regular?

Aluna H: - Não.

Aluno G: - É regular. O losango é um polígono regular com os quatro lados iguais.

Aluna H: - Mas não obrigatoriamente.

Aluno J: - O losango regular é um polígono regular, né? [risos]

Aluna H: - Ah, é! Mas ele não fala de ângulos. Ele tem quatro lados. É um polígono que tem quatro lados.

Aluno J: - Exatamente.

Pe: - Então, um quadrado pode ser um losango, mas nem todo losango é um quadrado?

Aluna H: - É verdade.

Aluno J – Bem como o quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado. **Aha!**

Em relação aos eixos de simetria do quadrado, apenas uma aluna estava em dúvida se deveria considerar as duas diagonais ou apenas uma. Contudo, ao conversar com os colegas convenceu-se de que teria 4 eixos. A simetria rotacional do quadrado também não apresentou problemas em sua resolução.

Porém, o trabalho demorou mais do que o esperado. Os alunos se detiveram, em grande parte do tempo, na construção do quadrado partindo de um pedaço de papel qualquer. Nem todos leram que deveriam descrever os passos necessários para sua obtenção e representá-la graficamente. Dois grupos não conseguiram concluir as atividades propostas para este dia, ficaram um bom tempo tentando encontrar uma maneira para dobrar o quadrado e, mesmo após muita discussão, ainda estavam em dúvida se a resposta encontrada estava certa. Então, dissemos-lhes que não havia uma única resposta correta para o problema, assim, ficaram satisfeitos com seu trabalho e não foram procurar uma alternativa mais fácil.

Como havia ainda algum tempo para o término da aula, alguns alunos seguiram lendo a apostila. Aproveitamos o ensejo para identificar seus conhecimentos sobre razão áurea, que seria o assunto da próxima atividade. Dos vinte e quatro alunos presentes na sala somente dois

afirmaram ter ouvido falar de razão áurea ou mesmo de retângulo áureo. Ficou, então, combinado que deveriam pesquisar sobre o retângulo áureo para o próximo encontro, que ocorreria na semana seguinte.

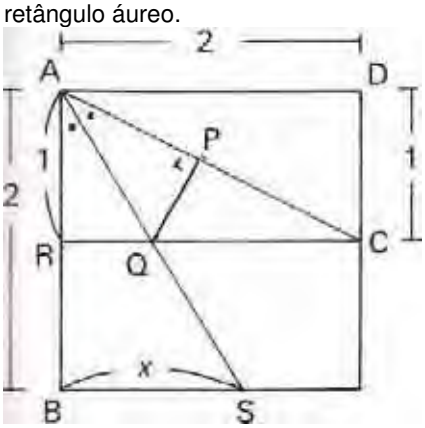
5.2.2 *O retângulo áureo*

Em razão de o nosso trabalho não fazer parte do cronograma de nenhuma disciplina, e não valer nota para os alunos, a maioria não tinha interesse em fazer tarefas extra classe. Por isso, apenas um grupo trouxe a pesquisa pedida. O grupo fez a leitura dos resultados encontrados na investigação e iniciou-se uma discussão sobre o conceito de razão áurea. Alguns se lembraram de uma palestra assistida no início do ano, na qual foram tratadas noções sobre o assunto. Após isso, os grupos escreveram uma definição para razão áurea.

Neste encontro a turma era composta de vinte e cinco alunos. Observamos que em quatro dos grupos que se mantinham constantes, os alunos não trabalhavam coletivamente. Respondiam as perguntas individualmente. Cada um ia fazendo o seu trabalho, parando, às vezes, para ajudar algum colega do grupo que não conseguia responder alguma questão. A maioria dos alunos perguntava se sua construção estava certa antes de continuar seu trabalho.

Houve grande dificuldade por parte dos alunos na resolução da prova de que o retângulo representado na atividade seis (abaixo) era realmente áureo (prova descrita no capítulo 3).

6. Observar a figura abaixo. Encontrar o valor de **x** e verificar se esse retângulo é realmente o retângulo áureo.



Depois de darmos algumas orientações, um grupo conseguiu resolver o problema utilizando semelhança de triângulos. Outros três grupos não fizeram dessa maneira por entenderem que utilizando a proporção dos triângulos em relação à razão áurea estaria correto. Por falta de tempo, somente no dia seguinte pudemos esclarecer que esta maneira não

era a correta, pois se o problema pedia para encontrar o valor de *x* e provar que o retângulo era áureo, não poderíamos partir da premissa de ele ser *áureo* para se encontrar o valor de *x*.

5.2.3 *O pentágono*

Essa figura deveria ser feita por dobradura, mas muitos insistiam em utilizar a régua e o compasso para marcarem os pontos, nos quais o papel deveria ser dobrado. A foto a seguir (figura 5.9) mostra o momento em que um aluno foi flagrado utilizando o compasso para fazer a divisão do lado do triângulo, o que deveria ser feito com dobras, conforme explicitado no Anexo 4.

figura 5. 9

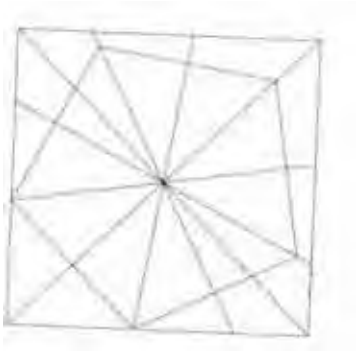
A construção do pentágono, por ser um pouco mais elaborada, exigiu maior concentração. Mas, apesar disso, em dois grupos, os alunos decidiram confeccionar dois ou mais pentágonos, a fim de apresentar a figura esteticamente mais bonita.

O trabalho com dobraduras exige paciência e persistência, atitudes essas reconhecidas e comentadas por Clenhi em seu relatório:

> *"...os grupos não estão todos juntos, alguns estão adiantados, outros estão com mais dificuldades, eu ainda preciso da ajuda da professora, mas agora entendendo mais das dobraduras, consigo começar os primeiros passos, é um trabalho que exige paciência para melhor ficar feito."*

Houve muita discussão, e certa dificuldade, para encontrarem a medida dos ângulos do pentágono, pedidos na atividade 9 (abaixo). Isso aconteceu porque a resolução desse problema envolvia conceitos de ângulos opostos pelo vértice, alternos internos e somas dos ângulos internos de um triângulo.

9. No esquema abaixo marcar a medida de cada ângulo determinado pelas dobras do pentágono regular.



5.2.4 *A simetria*

O estudo das simetrias reflexiva e rotacional dos polígonos tornou-se mais complicado quando os alunos chegaram ao pentágono. Os conceitos que pareciam claros quando estavam lidando com o quadrado e o triângulo eqüilátero, agora, tornaram-se confusos. Isso pode ser constatado no relatório de Lidiane:

> *"Ainda não consegui deixar claro o que é os eixos de simetria e a simetria rotacional, que coisa complicada! Também achei difícil provar nas dobraduras que fizemos porque os polígonos que construímos era realmente regulares, mas com tantas vezes que tivemos de fazer eu aprendi."*

Para tentar amenizar estas dificuldades sugerimos aos alunos que colocassem a figura recortada sobre o desenho dela e, com a ponta do lápis, firmassem o centro da figura (ponto em que passa o eixo de simetria rotacional) fazendo-a girar, para encontrar sua simetria rotacional. Isso facilitou bastante a compreensão dos alunos. Um deles até já havia furado o centro de seu pentágono de tanto girá-lo preso à ponta da caneta, na tentativa de encontrar a simetria desse polígono, pois ele estava procurando se havia alguma outra além da de 72°.

Quanto à simetria reflexiva, as dificuldades foram diminuindo a medida em que os alunos faziam novas figuras e iam dobrando-as para justificar que eram regulares, pois para fazer esta prova precisavam dobrá-las pelos eixos de simetria reflexiva.

5.3 Construindo Poliedros - 3° momento

5.3.1 *Os módulos*

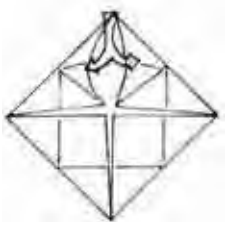
Os alunos trouxeram os papéis recortados em forma de quadrados e iniciaram a construção dos módulos triangulares, quadrangulares e pentagonais, seguindo os passos indicados na apostila (Anexo 5). Para o trabalho não se tornar muito penoso e demorado foram formados grupos com seis pessoas.

Em razão de os alunos, agora, estarem mais familiarizados com os gráficos dos passos para construção do *origami*, mostraram-se mais independentes na realização das construções dos módulos.

Na construção do módulo triangular precisaram de auxílio, porque estava incorreta uma das etapas da construção descrita na apostila, cuja correção fizemos naquele momento. Após isso, concluíram o trabalho sem dificuldade.

No módulo quadrangular foi preciso explicar o passo 4 (abaixo) de sua construção, pois não conseguiam entender o que o gráfico estava representando.

4. Abrir



Já o módulo pentagonal exigiu mais paciência e dedicação, e os passos 3 e 6 da primeira parte foram os que geraram maiores dúvidas.

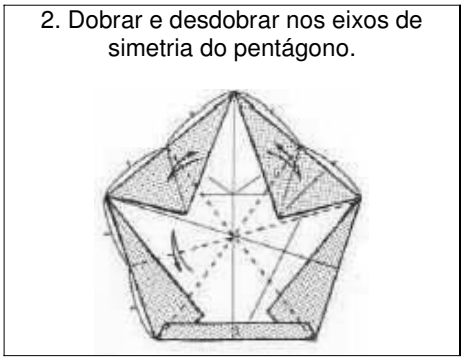
3. Dobrar e desdobrar a aba superior.	6. Dobrar puxando para frente.

Nesta noite os alunos estavam mais atentos à leitura das indicações dos passos (figura 5.10), o que fez com que tivessem mais autonomia em suas construções, não necessitando tanto de auxílio para compreender como deveriam executar a dobra pedida.

figura 5. 10

Vários alunos, mesmo observando o desenho da apostila, perguntavam quais eram os eixos de simetria do pentágono. Essa pergunta esteve presente na construção de todos os polígonos, evidenciando que o assunto não estava muito bem compreendido até aquela ocasião.

Porém, este conceito foi se tornando mais claro após repetirem várias vezes as mesmas dobras, ao fazerem a construção dos módulos, principalmente o do pentágono, pois o passo 2, da segunda parte, pedia justamente isso.



Inicialmente pensamos que os alunos não conseguiriam construir o módulo pentagonal, devido à grande quantidade de passos, dentre os quais, alguns considerados com um nível médio de dificuldade. Entretanto, nos surpreendemos ao verificar que todos os alunos conseguiram fazer esse módulo, ainda que com o nosso auxílio ou de outros colegas (figuras 5.11 e 5.12).

figura 5. 11
Aluna dobrando módulo pentagonal

Os alunos que entendiam mais facilmente as construções acabavam-nas rapidamente e depois se aplicavam a ajudar seus colegas, contribuindo para que nosso trabalho não fosse prejudicado.

figura 5. 12
Alunos trabalhando juntos na construção dos módulos

Como era de se esperar, devido à dificuldade de sua construção, a estética dos primeiros módulos não era muito boa, mas à medida que os estudantes repetiam o mesmo procedimento o trabalho foi adquirindo maior qualidade.

Houve muito empenho por parte de todos os grupos nesta etapa do trabalho, o que permitiu que a confecção de todos os módulos ficasse completa em apenas dois encontros (6 horas).

5.3.2 *Os poliedros*

Com os módulos prontos demos início à resolução dos problemas propostos na segunda etapa da apostila (Anexo 5).

Para que entendessem o que eram os "bicos", foi preciso exemplificar, pois, de início, não queríamos fazer referência à palavra *vértice*.

1. Utilizando os módulos confeccionados, como juntá-los de maneira a formar "bicos"? Inicialmente utilizar somente os módulos iguais em um mesmo "bico".

2. Quantos "bicos" diferentes podemos formar:
a) usando triângulos? _____
b) usando quadrados?_____
c) usando pentágonos?_____

Foi dado um tempo para que manuseassem o material livremente. Construíram pirâmides com diferentes bases ou utilizaram 6 peças triangulares como fundamento de outro sólido a ser construído. Após isso, solicitamos que lessem os problemas e fizessem a construção da maneira indicada.

As definições de vértice, aresta e face, solicitadas logo no início do trabalho, geraram discussões interessantes. Enquanto os alunos tentavam explicar esses conceitos, eles manipulavam e apontavam, como se o visual, por si só, respondesse a pergunta. Transcrevemos uma das situações ocorridas:

Grupo 2 formado no momento da discussão por três alunas A, B e C.
Pe: - O que é um vértice?
Aluna todas: - Encontro das... encontro... encontro das arestas.
Pe: - O que é uma aresta?
Aluna A: - É o lado.
Pe: - Lado do quê?
Aluna A: - Da figura.
Pe: - Que figura?
[risos]
Aluna A: - Aiaiaia...
Aluna B: - Não é o lado da figura. [referindo-se ao sólido]
Pe: - Porque o lado dessa figura [referindo-se ao sólido] são as faces.

Aluna B: - Então...

Pe: - O que seria uma aresta?

SILÊNCIO

Aluna A: - É um canto. [risos]

Pe: - Canto dá para confundir com ponto, que seria o vértice.

Aluna C: - Aresta é isso aqui? [apontando para a aresta do sólido]

Pe: - É. Como você explicaria isso?

Aluna B: - Segmento que une um vértice a outro. Sei lá! [risos]

Pe: - Se fosse um segmento que une um vértice a outro poderia ser um segmento que passe por dentro do sólido e ligue este vértice [apontando para um vértice do sólido] a este aqui em baixo. [apontando o vértice oposto]

Aluna ? - Ai meu Deus!

[risos]

Pe: - Também não pode.

Aluna C: - As faces são estas, né?

Pe: - As faces são estas.

Aluna C: - Tem alguma coisa a ver com as faces? Não, profe?

Pe: - Porque não?

Pe: - Olhando assim, a aresta, você diria que ela é o quê?

SILÊNCIO

Aluna A: - Face é o lado da figura...

Aluna A: - Ela é o lado da figura. [referindo-se ao polígono, acho que falava da aresta]

Pe: - Face é o lado do poliedro.

SILÊNCIO

Aluna ?: - É isso! [Apontam a aresta no sólido construído]

Pe: - Eu sei, mas vocês estão com o material na frente de vocês.

Aluna C: - A gente sabe o que é, mas não consegue definir ele.

Pe: - Como vocês o definiriam?

Aluna A: - Esse que é o nosso problema!

Pe: - Então descreve-o para mim, descreve...descreve uma aresta para mim.

Aluna A: - Ela divide...

Pe: - Divide...

Aluna ? – Ai!

Aluna B: - Seria duas arestas. [elas estão falando sobre o lado do polígono e que o lado dele seria uma aresta, então no sólido seriam duas juntas]
Aluna A: - Ou é uma emenda.
Pe: - Duas arestas? Seria duas arestas isso aí? [apontando para a aresta]
Aluna B: - Não! Seria uma que serve pros dois.
Pe: - Serve para os dois! Estamos indo bem, é uma aresta! Serve para os dois o quê?
Aluna B: - Pros dois lados, as duas faces.
Pe: - As duas faces.
Pe: - Qual é a função dessa aresta? Como poderíamos dizer isso?
Aluna A: - Divide duas faces.
Pe: - Dividir duas faces não está bom...
Aluna (Duas não identificadas falaram juntas): - Unir duas faces, liga...
Pe: - Então a gente poderia definir uma aresta como? Uma aresta é...
[risos]
Aluna ?: - Não sei!
Aluna B: - Tá complicado!
Pe: - Estamos indo pelo caminho certo, relação com faces... aresta, está entre elas! Une! ela...separa, divide. O que vocês acham que ela faz?
Aluna todas: - Une duas faces.
Pe: - Então uma aresta...
Aluna B: - Une duas faces, formando um poliedro.
Pe: - Uma aresta une duas faces, ou uma aresta é o encontro de duas faces?
Aluna ?: - Ah!
Pe: - Pode ser?
Aluna C: - Encontro de duas faces.
Aluna B: - Oh, coisinha complicada...

Comentário no relatório de uma aluna que participou da discussão:

"Tivemos uma discussão para entender o que é uma aresta, foi demorado mas conseguimos resolver."

Terminada essa fase inicial, e já tendo construído os poliedros, percebemos a grande satisfação com que os grupos apresentavam suas construções aos colegas, mostrando, orgulhosos, o resultado do seu trabalho. As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 mostram algumas construções, e a satisfação de seus executores em exibi-las.

figura 5. 13

figura 5. 14

figura 5. 15

De posse dos sólidos construídos passaram a resolver os problemas propostos, referentes a cada poliedro. Nenhuma das respostas foi apresentada sem antes haver manipulação dos sólidos e debate com o grupo. Na maioria das vezes, mesmo tendo a fórmula, como aquela pedida no problema 2, referente ao octaedro (pergunta abaixo), e tendo feito o cálculo, alguns alunos insistiam em comprovar no sólido construído, para verificar se a resposta estava correta.

2. Desafio: Encontrar uma maneira de calcular quantas arestas tem o octaedro sem contá-las. Fazer com que essa equação tenha validade para calcular as arestas de todos os poliedros regulares.

O trecho transcrito abaixo, retirado do diálogo dos alunos, representa o momento em que eles tentavam descobrir quantas arestas tinha o icosaedro, contando no sólido construído, sendo que um deles já havia resolvido a questão utilizando a fórmula.

Grupo 3 formado pelos alunos D, E, F.

Aluno E: - São vinte faces.

Aluno E: - É triangular, vezes três, dividido por dois trinta. [referia-se ao cálculo $\frac{\text{lados do polígono} \times \text{faces}}{2}$] Trinta arestas.

Aluno D: - Doze vértices. Um, dois, três, quatro, cinco, dez, vinte, trinta arestas.

[risos]

Aluno D: - Uma, duas, três, conta aqui.

Aluno E: - Peraí cara! Deixa eu te ajuda...

Aluno D: - Uma, duas, três, quatro, não, não..

Aluno E: - Conta em cada vértice.

Aluno D: - Calma cara!

Pe: - Marquem com os dedos. [risos]

Aluno D: - Pior é que não tem como marca.
RISOS
Aluno D: - Deu, deu, deu quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, vinte, trinta.
...
Aluno E: - Vinte, trinta. Mas dá onde tu tiro vinte?
Aluno D: - Mas vinte, olha aqui cara [apontando para o sólido] ó ó ó, cinco e cinco não é um dez?
Aluno E: - Tá.
Aluno D: - Com mais vinte e mais dez aqui, trinta.
Aluno E: - Cinco?
Aluno D: - Um, dois, três, quatro, cinco [referindo-se a vértices do sólido]. Agora vai querer contar também?

Uma outra atividade referia-se à soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice, e um fato curioso aconteceu quando houve uma discussão, enquanto tentavam encontrar o valor de cada ângulo interno do pentágono. Levantavam conjecturas, mas não conseguiam provar matematicamente se estavam corretos.

Para fazer essa prova surgiram várias argumentações, e uma delas foi esta: dividir o pentágono em cinco triângulos que tinham como ponto comum o centro dele. Neste momento surgiu a seguinte dúvida: achavam que os triângulos formados eram eqüiláteros. Foi preciso provar que isso era falso, fazendo a soma dos ângulos formados em torno do centro do pentágono. O valor encontrado foi 360° e ao ser dividido por 5 resultou em um ângulo maior que 60°, provando-se, assim, que não eram triângulos eqüiláteros. Através desse raciocínio encontraram o valor correto.

A noção de eixo de simetria rotacional pareceu mais simples, tanto que alguns chegaram a generalizar uma maneira de se encontrar tais eixos. Inicialmente imaginavam eixos que passassem por uma das faces do sólido e, também, pela face oposta a essa. Depois, contavam o número total de faces e dividiam este valor pela metade. Os outros eixos de simetria eram encontrados ligando-se as arestas opostas do poliedro. Então, dividia-se o número de arestas pela metade, o mesmo procedimento foi feito com os vértices. O total de eixos de simetria era encontrado fazendo-se a soma desses valores.

Exemplo:

Cubo

6 faces – 3 eixos passando, cada um, pelo centro de duas faces opostas. (fig. 5.16)

12 arestas – 6 eixos passando, cada um, pelo centro de duas arestas opostas. (fig. 5.17)

8 vértices – 4 eixos passando, cada um, por dois vértices opostos. (fig. 5.18)

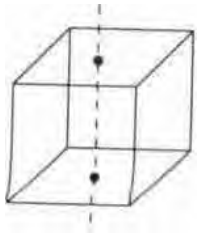


figura 5. 16

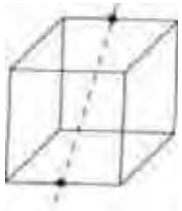


figura 5. 17

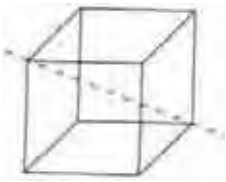


figura 5. 18

Para encontrar os planos de simetria os alunos não conseguiram estabelecer relações que levassem a generalizações e pudessem ajudá-los nesse cálculo. Foi necessário riscar nos próprios sólidos os locais por onde passava cada plano. Essa foi uma tarefa demorada, cansativa e difícil de ser executada em poliedros com muitas faces, desestimulando-os a encontrarem, por exemplo, os planos de simetria do dodecaedro e icosaedro.

Mesmo diante de algumas dificuldades e do caráter trabalhoso de se construir os sólidos com *origami*, os alunos pareciam muito interessados nesta maneira diferente de trabalhar com os poliedros. Isso pode ser constatado em um comentário registrado no relatório de Elisandra:

> *"Os poliedros são muito interessante ótimo para usar no ensino médio, pois, só assim podemos manusear o material a ser estudado de perto, assim se aprende bem mais com o material concreto. Adorei a aula, a construção dos poliedros é ótima para ter uma visão mais ampla e entender melhor, isso torna a aula mais produtiva e descontraída, pois, sai da rotina do aluno e existe mais interesse de aprender. As aulas foram verdadeiras obras de arte eu gostei muito, pois, requer raciocínio, interesse, dedicação e atenção, depois de tudo você vê o quanto aprendeu com aquele trabalho e o resultado é maravilhoso, porque você é capaz de fazer todos aqueles poliedros lindos e saber que você aprendeu e pode demonstrar as descobertas com criatividade."*

5.3.3 *O caleidoscópio*

Tendo construído todos os sólidos solicitados passamos para o estudo do caleidoscópio.

Fizemos uma discussão sobre o que seria caleidoscópio e alguns alunos lembraram-se do brinquedo. Apresentamos a eles o caleidoscópio generalizado e demos uma breve explicação dos conceitos envolvidos em sua construção (fig. 5.19).

figura 5. 19
Alunos observando os caleidoscópios

Deixamos que manuseassem livremente os caleidoscópios. Esse momento foi interessante, pois os alunos introduziam partes de suas construções dentro do caleidoscópio e ficavam fascinados com os resultados, observando que obtinham sólidos (fig. 5.20).

figura 5. 20

Foi solicitado que observassem seus sólidos e pensassem em alguma porção que poderia ser colocada no interior dos caleidoscópios para fornecer o visual desses poliedros. Após intensa discussão, apresentamos uma das dobraduras que dava origem ao visual do cubo no caleidoscópio de ângulos (90°,90°,90°). Com isso, surgiram sugestões sobre as outras peças que poderiam ser utilizadas no outro caleidoscópio, de ângulos (90°,90°,180°), para o visual do cubo e do octaedro (fig. 5.21). Mas, além desses dois sólidos, não conseguiram encontrar mais nenhuma dobradura que possibilitasse o visual de algum outro sólido, o que era de se esperar, pois para se encontrar essas dobraduras necessita-se de tempo para um estudo intenso dos planos de simetria dos sólidos e também dos caleidoscópios, tempo esse que não tivemos

disponível. Assim, apresentamos-lhes dobraduras que permitiam o visual de alguns poliedros semi-regulares.

figura 5. 21
Aluna observando dobradura do octaedro no caleidoscópio (2,2,2)

Depois da apresentação dessas dobraduras, dirigimo-nos ao laboratório de informática para construí-las no software geométrico *Cabri-Géometrè II* (atividades constantes na apostila, Anexo 5).

Em virtude de já terem realizado a construção de alguns sólidos com o *origami* e já os ter observado em caleidoscópio, não demonstraram muito interesse em realizar as construções no software. Apenas cinco alunos construíram as figuras solicitadas. Os demais saíram antes do término da aula, para fazer uma pesquisa requisitada pela professora da disciplina que seria ministrada no dia seguinte.

Os alunos que realizaram as atividades de construção das dobraduras no software *Cabri-Géometrè II* (apostila, Anexo 5) apresentaram dificuldade devido à falta de habilidade com o programa e a quantidade de passos a serem seguidos. O estudo do software não pôde ser aprofundado devido à pressão feita pelos alunos para que o trabalho fosse logo concluído, e eles voltassem a ter suas aulas normais.

Encaminhávamo-nos para a reta final do trabalho e, como esclarecido anteriormente, este trabalho não constava da grade curricular e não contaria como nota para nenhuma disciplina cursada no semestre, os alunos começaram a apresentar certa inquietação por julgarem que estavam tendo algum prejuízo com o tempo destinado ao nosso trabalho. Conjeturavam que, talvez, estivessem sendo privados de conteúdos que poderiam ser importantes relacionados às disciplinas que estávamos ocupando o horário.

Diante desses fatos nossa intervenção teve que ser encerrada. Apesar de nosso planejamento inicial não ter sido cumprido em sua totalidade, acreditamos que foi alcançada a

maioria dos objetivos, mesmo com a suspensão de alguns procedimentos. Trataremos no capítulo seguinte sobre as limitações observadas no desenvolvimento da pesquisa, e do próprio trabalho com o *origami* e o caleidoscópio, além de sugestões para o seu aperfeiçoamento.

Capítulo 6

POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES

Faremos neste capítulo uma análise retrospectiva das fichas de atividades (Anexos 4 e 5), elaboradas com base no uso do *origami* e dos caleidoscópios para o ensino de Geometria. Traremos sugestões de outras possibilidades de estudo com estes materiais e, também, as limitações observadas em sua aplicação, bem como as dificuldades e facilidades encontradas pelos alunos na sua utilização.

6.1 Possibilidades

Primeiramente propomos que este trabalho seja desenvolvido em cursos de formação inicial de professores. Em nossa compreensão, é bom que os professores tenham a noção de como confeccionar peças com *origami,* que estejam familiarizados com os diagramas e passos do mesmo, que conheçam os fundamentos matemáticos envolvidos na construção do caleidoscópio generalizado, para, então aplicar as atividades em sala de aula com seus alunos.

O simples fato de ter acesso a estes materiais dará oportunidade para que analisem suas características e percebam a variedade de possibilidades de utilização destes, para ensinar os mais diversos conteúdos matemáticos.

Dentre os benefícios que o trabalho com o *origami* pode trazer destacamos o desenvolvimento de atividades voltadas para: senso de localização espacial, leitura e interpretação de diagramas, exploração dos elementos de linguagem relativos à posição no espaço, como “cima”, “baixo”, “esquerda”, “direita”, etc., construção de conceitos e uso dos termos geométricos em um contexto.

Alguns dos alunos que participaram da pesquisa relataram ao final do trabalho que, inicialmente, não se achavam capazes de fazer construções com *origami*. Não imaginavam que teriam paciência para isso, e acabaram por se surpreender com a sua capacidade de concentração e persistência em realizar as dobras.

Neste estudo o *origami* foi praticado em grupo, permitindo o debate de idéias, o esclarecimento de conceitos, o desenvolvimento de estratégias individuais e coletivas e a solidariedade entre os colegas, pois aqueles que tinham facilidade para aprender as dobras se dispunham a ajudar os outros.

Observamos que seria melhor iniciar o trabalho com *origami* partindo de dobras mais simples, como, por exemplo, a construção de polígonos para, depois, introduzir o *origami modular*. Assim, o executor estaria mais familiarizado com os diagramas e dobras, sentindo-se mais seguro para realizar as construções com maior número de elementos. A estética dos primeiros modelos nem sempre era boa, mas à medida que eles iam repetindo o mesmo procedimento o trabalho adquiria melhor qualidade, e os alunos orgulhavam-se em exibir suas construções.

Conforme já citamos, dentro da pesquisa desenvolvemos três momentos específicos, relacionados às construções fundamentais, ao estudo de alguns polígonos e poliedros. Assim, particularizamos a seguir os conteúdos que foram ou poderiam ter sido desenvolvidos com os materiais construídos.

6.1.1 *Construções Fundamentais*

No caso específico dos problemas propostos para o estudo das construções fundamentais, dentre os conteúdos que foram ou podem ser desenvolvidos, podemos citar:

- Ponto, reta e plano,
- Retas paralelas e perpendiculares,
- ponto médio,
- mediatriz,
- bissetriz.

Nas atividades propostas na apostila (Anexo 4) fizemos também as construções com régua e compasso, mas acreditamos que esses mesmos conceitos podem ser trabalhados somente com o uso das dobraduras, contextualizando o estudo numa perspectiva diferente para os alunos. Por exemplo, ao se fazer uma dobra em papel constrói-se uma reta. Essa reta percorre todo o plano (no caso o pedaço de papel utilizado) o que geralmente não fazemos quando desenhamos uma reta em uma folha de caderno; geralmente ela é menor do que a extensão desse plano (folha do caderno).

No estudo da bissetriz, ao se fazer à dobra que a representa, o aluno estará sobrepondo um lado do ângulo sobre o outro, sendo possível constatar que os dois têm a mesma medida,

fato esse imperceptível ao se fazer um desenho. É claro que existem maneiras de se provar que a construção está correta como, por exemplo, utilizando os conceitos referentes à congruência de triângulos. Nesta perspectiva o *origami* difere-se das construções feitas com régua e compasso devido ao seu apelo visual e manipulativo, o que pode despertar maior interesse nos alunos, pelo fato de poderem manipular e comprovar visualmente.

6.1.2 *Polígonos*

Destacamos outros pontos que podem ser focados ao se trabalhar polígonos com dobraduras:

- divisão e frações,
- semelhança de triângulos,
- ângulos: soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulos opostos pelo vértice, colaterais, correspondentes e alternos.
- incentro, baricentro, circuncentro;
- área de superfícies planas,
- eixos de simetria reflexiva e rotacional,
- razão áurea e retângulo áureo,
- diagonais.

Nas fichas de atividades nos detivemos no estudo dos elementos dos polígonos, das suas simetrias e ângulos. Contudo, pode-se fazer o estudo de frações e divisões, ao pedir que os alunos dobrem as figuras em partes iguais e observem as possibilidades que cada tipo de figura oferece para que se faça isso.

Também podemos levar os alunos a descobrirem as fórmulas para encontrar a área desses e de outros polígonos, fazendo a decomposição das figuras em outras, das quais se conhece a área.

O estudo das bissetrizes, alturas e mediatrizes dos triângulos também podem ser feitos com dobras, levando, assim, os alunos perceberem suas diferenças.

6.1.3 *Poliedros*

Ao trabalhar com o *origami modular*, temos mais opções de construções além das dos poliedros, estudamos também prismas e pirâmides:

- semelhanças e diferenças,

- identificação de seus elementos (arestas, faces, vértices, base),
- composição e decomposição,
- planos e eixos de simetria,
- planificação,
- fórmula de Euler,
- áreas e volume,
- vistas,
- justificativa da existência de apenas cinco sólidos de Platão,
- noções de geometria Esférica.

Construindo os poliedros com *origami modular* experimentam-se, de uma forma muito simples, suas propriedades como graus de um vértice, regularidade e simetria.

As construções de prismas e pirâmides são limitadas, mas nem por isso podem deixar de ser aproveitadas. Podemos construir pirâmides com bases triangulares e quadrangulares. Já os prismas podem ter todos os tipos de bases (módulos que foram construídos), mas suas laterais serão sempre quadradas. Com esses materiais é possível fazer planificações das mais diversas, mostrando que não existe apenas uma seqüência para desmontar os sólidos e, ao mesmo tempo, indicando que nem todas são válidas.

O trabalho com vistas envolve o desenvolvimento da visão em perspectiva. O aluno empilha os sólidos (os cubos são os mais indicados para fazer estas edificações) e depois os desenha, observando-os de diferentes ângulos (laterais, vista superior, em perspectiva).

É importante salientar que todo o trabalho com *origami modular* é melhor aproveitado quando realizado em grupo para que a produção dos módulos não se torne cansativa, além do que, as atividades em grupo trabalham nos alunos o senso de solidariedade.

Mesmo diante de algumas dificuldades e do caráter trabalhoso de se construir os sólidos com *origami*, os alunos mostraram-se muito interessados em trabalhar com os poliedros desta maneira diferente.

Ao utilizar os caleidoscópios podemos fazer a exploração de noções iniciais de Geometria Esférica, pois em sua construção são necessários estes conceitos. Assim, ângulos diedrais formados entre os espelhos; o estudo da lei dos cossenos (utilizado para calcular o ângulo de corte dos espelhos) e tesselações esféricas são alguns dos conteúdos que poderiam ser abordados. Porém, devido à escassez de tempo, não realizamos tais estudos durante a

aplicação das atividades, o que nos constrangeu porque era uma excelente oportunidade de tratarmos dessa Geometria que não é muito explanada.

Para se encontrar as dobraduras, que fornecem o visual dos poliedros quando colocadas no interior do caleidoscópio, é preciso: fazer um intenso estudo das linhas de simetria dos sólidos, tempo para analisar sua planificação e fazer cálculos de ângulos dos polígonos que o formam. Para a confecção das dobraduras é preciso ter domínio do software *Cabri-Géomètre II*, pois elas envolvem muitos conceitos e exigem bastante atenção do seu executor.

6.2 Limitações

No desenvolvimento desta pesquisa foi possível observar pontos nos quais os materiais não foram tão eficientes, ou que os problemas apresentados pareceram não contribuir para o aprendizado dos conceitos propostos. Aliado a isso, percebemos dificuldades e deficiências nos alunos, que também prejudicaram o andamento das atividades. Assim, procuramos ressaltar estes pontos e propor possíveis soluções para essas limitações.

No início do trabalho percebemos a dificuldade que os alunos têm em manusear os papéis, em fazer as dobras e a leitura dos diagramas das dobraduras. Isso reforçou nossa idéia de que seria mais adequado iniciar o trabalho com construções mais simples, que incluem poucos passos, e ir, gradualmente, introduzindo construções mais elaboradas, como as utilizadas no *origami modular*.

A maioria dos alunos demonstrou insegurança diante do novo. Não ousavam arriscar e pareciam ter medo de errar. Tiveram dificuldade em interpretar alguns dos problemas, pois não liam com a atenção necessária e acabavam perguntando o que era para ser feito, qual a resposta que deveriam dar.

A falta de vocabulário, na hora de escrever as respostas, foi um empecilho no transcorrer das atividades. Tiveram muita dificuldade em escrever, em utilizar as palavras corretas para representar suas construções.

Notamos que os alunos, mesmo já cursando uma graduação, apresentam dificuldades em conceitos que foram, ou deveriam ter sido aprendidos no ensino fundamental e médio. Isso ficou claro no momento em que precisaram escrever justificativas para as construções. A falta de familiaridade em realizar demonstrações revelou que essa não é uma prática freqüente nas escolas.

Observamos, também, que mesmo já tendo construído certas figuras com régua e compasso, os alunos não conseguiam refazê-las quando solicitado. Isto levou-nos a concluir que eles podem não ter aprendido realmente, mas apenas decorado os passos para sua elaboração, e também pode explicar porque não conseguiam justificar as construções que fizeram, pois não sabendo como construíram, não saberão explanar o que fizeram e nem porque está correto.

Para que se possa empregar a técnica do *origami* é preciso ter um número limitado de alunos, principalmente, se o objetivo for que os grupos trabalhem independentemente. Para se trabalhar com grupos maiores é preciso fazer um estudo dirigido, no qual o professor apresenta a construção confeccionando a peça passo a passo com os alunos, é muito importante que se desenvolva a solidariedade entre eles, a fim de que os que têm mais facilidade auxiliem os outros colegas. Essa é uma atividade que, no início, exige muito empenho e perseverança do professor até que os alunos passem a entender os gráficos utilizados nas construções e adquiram autonomia no desenvolvimento das tarefas.

Para que a construção dos poliedros não demore muito a ser concluída é necessário que os papéis sejam cortados fora do horário de aula, e nem sempre os alunos estão dispostos a fazer esse trabalho em casa. Alguns se esquecem de trazer o material, o que atrasa o andamento das atividades do grupo. Os modelos construídos são frágeis e necessitam de um espaço adequado para serem guardados, dificultando, assim, que se tenha à disposição essas construções ao longo do ano.

Com relação à construção do caleidoscópio, ela envolve um custo maior se comparado ao *origami*, pois é necessário comprar os espelhos cortados nos tamanhos certos. Apesar de o preço não ser muito elevado, muitas vezes, é preciso pedir ajuda dos alunos ou da escola para arcar com estas despesas, o que nem sempre se consegue, principalmente quando nos deparamos com instituições de ensino não preocupadas em investir no processo de ensino e aprendizagem.

O maior prejuízo detectado na aplicação das atividades foi mesmo à escassez do tempo. Como esclarecido anteriormente, nosso trabalho não constava da grade curricular e os alunos começaram a preocupar-se muito com o espaço que estávamos ocupando em detrimento às disciplinas que deveriam cursar naquele semestre. Essa preocupação os desestimulou a concluírem o trabalho, prejudicando a última etapa, na qual faríamos o estudo do caleidoscópio.

Por ser este um trabalho demorado, ele seria mais bem aproveitado se fosse distribuído ao longo do ano, ou mesmo de todo o curso. Desse modo, quando possível, os materiais seriam utilizados à medida que fosse necessário introduzirem-se novos conceitos. Dessa forma, também, teríamos aperfeiçoado a operacionalização do software *Cabri-Géomètre II.*

Teria sido muito proveitoso se tivéssemos construído o caleidoscópio com os alunos, pois teríamos estudado importantes conceitos utilizados em sua confecção. Isso os auxiliaria no entendimento dos cálculos utilizados para encontrar a medida dos ângulos de corte dos espelhos, o que seria uma introdução à Geometria Esférica, além de facilitar na confecção das dobraduras e na percepção de como são gerados os visuais dos poliedros, quando essas peças são colocadas no interior do caleidoscópio.

Nas atividades propostas sobre o caleidoscópio (Anexo 5) seria mais proveitoso se não fossem dados os passos para a construção das dobraduras. Os alunos poderiam analisar o poliedro, fazer a planificação e, então, construir a dobradura, que poderia ser descrita passo a passo por eles.

Mais especificamente em relação ao *origami modular* foi possível observar que o tipo de módulos por nós escolhidos para esta pesquisa (que representam as faces dos poliedros) não facilitou a compreensão dos planos de simetria. Portanto, em outra aplicação das atividades, eles poderiam ser trocados por outros tipos de módulos que beneficiam este estudo, por representarem em sua construção o interior dos sólidos.

Ao relatarmos nossas impressões sobre as possibilidades e limitações do uso do *origami* e do caleidoscópio em sala de aula, tivemos a intenção de auxiliar os interessados em aplicar as atividades propostas em nossa pesquisa, e levantar pontos em que este trabalho possa ser melhorado em pesquisas futuras.

No capítulo seguinte formulamos as considerações finais a respeito do estudo feito nesta dissertação, procurando fazer uma sinopse da sua contribuição para a Educação Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já dedicamos o capítulo 6 à análise da utilização do *origami* e do caleidoscópio no ensino de Geometria, aqui iremos nos ater a uma apreciação geral sobre o trabalho.

Inserida no campo de pesquisa da Educação Matemática, esta dissertação contribuiu no sentido de trazer um estudo que enseja o uso de materiais de fácil acesso e construção simples, que podem ser utilizados em sala de aula. Através de trabalhos que precederam nosso projeto, pesquisamos a origem desses materiais, sua aplicabilidade, suas contribuições para a Educação Matemática e as fundamentações matemáticas de sua construção. Reunidas todas as informações necessárias, elaboramos uma proposta de ensino que contemplou o uso destes materiais no ensino da Geometria, com sugestão de atividades que usou a resolução de problemas como metodologia de ensino.

A nossa proposição foi trazer novos materiais para a sala de aula. Não se trata de novos materiais no sentido de serem usados pela primeira vez ou que ainda não tenham sido postos em uso. A peculiaridade de nosso trabalho residiu na utilização combinada do *origami* e do caleidoscópio generalizado no estudo de alguns conceitos de Geometria, procedimento esse, pelo que temos conhecimento, ainda não consignado por escrito, além disso, descrevemos a possibilidade de construir dobraduras para visualizar poliedros em caleidoscópio generalizados utilizando a técnica do *origami* (procedimento apresentado no capítulo 3). Esses dois recursos têm como singularidade comum a capacidade de reproduzir coisas belas, capazes de promoverem maior atenção e interesse no processo de ensino e aprendizagem.

A questão que foi investigada partiu da seguinte conjectura:

O uso da técnica do *origami* associada ao caleidoscópio possibilita-nos ensinar conteúdos matemáticos, principalmente os relacionados à Geometria, ainda mais quando trabalhados seguindo a metodologia de ensino resolução de problemas.

Tal suposição foi validada ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, pois percebemos que realmente o *origami* e o caleidoscópio são recursos que podem ser utilizados de maneira efetiva no ensino de Geometria e da Matemática em geral. Na fuga de um ensino

centrado apenas no aspecto geométrico formal ou axiomático, e na busca do desenvolvimento de um ensino mais significativo para o aprendiz, estamos realmente convencidos de que o uso de material manipulável possui um conteúdo de significações que incentivam o seu emprego. Com planejamento e preparo adequado para a utilização desses recursos, aliados ao estabelecimento de estratégias de ação, o trabalho extrapola os objetivos de uma simples atividade lúdica, já que, durante as atividades de aprendizagem, atraídos por aquilo que é belo, o recurso da experimentação permite aos alunos, além do contato, a formulação de conjecturas e a exploração de suas características.

Assim, considerando que a Geometria é particularmente propícia para o ensino baseado na exploração e investigação, as relações de conformidade entre a experimentação e a formalização devem ser desenvolvidas por meio de situações significativas, que podem ser construídas usando conexões com idéias e conceitos conhecidos, analogias com outras situações ou comparações com o dia-a-dia do aluno, pois as idéias geométricas fazem parte de situações cotidianas.

Por mais que o *origami* pareça uma técnica rígida, com esquemas de construção pré-definidos, podemos utilizá-lo para confeccionar materiais manipuláveis que, acreditamos, conduzem os alunos a descobertas e os auxiliam a generalizarem os conceitos, chegando às "fórmulas", sem precisar decorá-las.

Esta pesquisa apresentou uma proposta de atividades, com a elaboração de alguns problemas para ensinar conteúdos de Geometria relacionados às construções fundamentais, estudo de polígonos, e poliedros, bem como a matemática que fundamentou esses procedimentos por meio do *origami* e do caleidoscópio. Utilizamos os poliedros por representarem um campo favorável para o estudo de muitos conceitos matemáticos, que são importantes na formação dos alunos.

Por conseqüência, apesar de não absolutamente completo, mas também não lacônico, nosso estudo foi suficientemente abrangente para os fins que se destinou. Igualmente, vemos como perspectiva futura, ser possível o desenvolvimento de uma pesquisa que comprove sua eficácia com alunos do ensino fundamental e médio, além de aperfeiçoá-lo a fim de se obter os subsídios necessários para implementação desta proposta em cursos de formação de professores.

Todavia, não devemos nos intimidar com os óbices que se interpõem em nossa jornada, para obstar o desenvolvimento do nosso trabalho. São barreiras que podem ser flexibilizadas

e, finalmente, vencidas. Vivenciamos isso, de alguma maneira, em nossa pesquisa. Observamos que uma das dificuldades, com que se depara um pesquisador ao planejar desenvolver uma pesquisa que busque mudanças, é a resistência das escolas e professores, que têm seu cronograma fixado, têm as provas e exames que avaliam a qualidade do ensino com os quais precisam se preocupar, o que prejudica o trabalho de pesquisa e a exploração de novos materiais em sala de aula.

O tempo é outro fator preocupante para o pesquisador e idealizador de um trabalho como este. Temos muitas idéias, sonhamos muito, mas na prática a realidade é bem diferente. Nem sempre é possível realizar tudo o que programamos. Ao final da pesquisa desenvolvida, com um estudo desta importância, percebemos que ainda ficaram lacunas por preencher, o que é considerado normal em estudos de cunho científico, pois é impraticável realizarmos um trabalho absolutamente completo, que abarque todos os enfoques possíveis.

Assim, seria pretensioso de nossa parte pensar que dissemos, nesse trabalho, o suficiente sobre a utilização do *origami* e do caleidoscópio generalizado no ensino e aprendizagem de alguns conceitos geométricos, pois muito ainda há para ser pesquisado, discutido e analisado a respeito do assunto. As questões propostas e consideradas em nossa pesquisa podem ainda ser analisadas de outra forma, talvez, mais sistemática, sendo-lhe conferido outro tratamento. É possível, por exemplo, fazer um detalhamento maior da parte matemática, que fundamenta as construções com *origami*, pois esse não foi nosso principal foco, e também dar mais ênfase à construção do caleidoscópio, levando a efeito a exploração de todos os conceitos que podem ser estudados em sua confecção, pois, por absoluta falta de tempo, este foi um ponto que não conseguimos trabalhar adequadamente.

Há necessidade de uma mudança na postura do educador para facilitar o processo de ensino e aprendizagem e ajudar a melhorar a relação entre docente e discente. É importante tomar consciência do quanto é urgente proporcionar aos alunos novas experiências, novos contactos, novas formas de adquirirem conhecimentos, de aprofundarem conceitos, bem como novas formas de expressarem sua compreensão.

Finalmente, concluímos que uma mudança na práxis pedagógica é um fator de extrema relevância para a melhoria do interesse em sala de aula. Ao promovermos aulas diferenciadas, mais dinâmicas, informais e prazerosas, num clima de camaradagem, os alunos se aplicam mais a aprender, levando-nos a inferir que, quando não há imposição de idéias e o aluno pode experimentar para, então, recriar, a aprendizagem se processa de maneira mais efetiva, eficiente e duradoura, capaz de provocar mudanças, as quais a escola deve promover.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. e ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas e o uso do computador na construção do conceito de taxa média de variação. **Revista de Educação Matemática**. Ano 8, n. 8, p. 37-42, 2003.

ALMEIDA, S. T. de. **Um Estudo de Pavimentação do Plano Utilizando Caleidoscópios e o Software Cabri-Géometrè II.** 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

ALPERIN, R. C. **Trisections and Totally Real Origami.** 2004. Disponível em: <http://www.math.sjus.edu/~alperin> Acesso em: novembro de 2005.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. e GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais:** Pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001. 2. ed.

ANDRADE, J. A. A. e NACARATO, A. M. **Tendências Didáticos-Pedagógicas para o Ensino de Geometria.** p. 1-18. In: Anais da 27ª Reunião Anual da ANPEd. Caxambu – MG, 21-24 nov, 2004. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/27/gt19/t197.pdf . Acesso em maio de 2006.

ARAÚJO, J. L. e BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C. e ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

BALL, R & COXETER, M. C. H. **Mathematical Recreations and Essays.** Univer. Toronto, 1974, republication by Dover. New York, 1987.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo Padrões em Mosaicos.** São Paulo: Atual, 1993.

BATISTELA, R. de F. **Um kit de Espelhos Planos para o Ensino de Geometria.** 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BERMAN, B. *How children learn math*: rediscovering manipulatives. **Curriculum Review**, v.21, n.2, may 1982.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. e ARAÚJO, J. L.(orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COLLI, E. **Poliedros**. Disponível em: Incubadora FAPESP http://matemateca.incubnadura.fapesp.br/portal/textos/matemateca/poliedros/Poliedros.pdf Acesso em: fevereiro de 2006.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas:** 1ª a 5ª séries. São Paulo: Ática, 1999.

FIORENTINI, D. e MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim SBEM.** São Paulo, v.4 n.7, p. 4-9, 1996.

FRANCO, B. **Unfolding Mathematics with Unit Origami.** Emerville, CA: Key Curriculum Press, 1999.

FUSÈ, T. **Unit Origami**: Multidimensional transformations. 20. ed. Tokyo, New York: Japan Publications, 2005.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas:** perspectivas em Educação Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

___. **O não Resgate das Geometrias.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GOLDEMBERG, M. **A Arte de Pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GOUVEA, F. R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

HULL, T. **Tom Hull Home Page.** Disponível em: Página pessoal de Tom Hull http://www.merrimack.edu/~thull/index.html Acesso em: outubro de 2005.

IMENES, L. M. **Vivendo a Matemática:** Geometria das dobraduras. São Paulo: Scipione, 1988.

KASAHARA, K. **Saishin-Origami no Subete.** Nihon Bungeisha, 1997.

___. Origami Omnibus: Paper folding for everybody. 20. ed. Tokyo, New York: Japan Publications, 2005.

KODA, Y. **Origami.** Trad. Akiro Kurihara Watanabe. Caderno de Cultura Japonesa, vol.2. São Paulo: Aliança Cultural Brasil – Japão, 1986.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar geometria?* **A Educação Matemática em Revista – Geometria.** Blumenau, n. 4, p. 03-13, set. 1995.

MARTINS, R. A. **Ensino-Aprendizagem de Geometria:** Uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MATTOS, F. R. P. **Números Construtíveis por Dobraduras ou Reflexões.** 290 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) Instituto de Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 2003, 5. ed.

MURARI, C. **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via Caleidoscópios.** 374 f. 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

___ **A tesselação (5,6,6)** – a bola de futebol visualizada em caleidoscópio generalizado. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 2004, Recife (PE): SBEM, p. 01-09.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática,** ano 9, n. 9-10, 2005.

NIELSEN. K. L. **Modern Trigonometry**. New York: Barnes and Noble, 1966.

NOVAES, J. A. **Frações e Geometria com Dobradura de Papel.** In Anais do III Congresso Internacional de Ensino de Matemática, Canoas – RS, 20-22 de outubro, 2005. ISBN 85-7528-154-2.

O'DAFFER, P. G. and CLEMENS, R.S. **Geometry:** An investigative Approach. California: Addison-Wesley, 1977.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, p. 199-218, 1999.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, v.4, n. 6, p. 65-74, jul/dez, 1996.

PASSOS, C. L. B. Materiais Manipuláveis como Recursos Didáticos na Formação de Professores de Matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de Ensino de matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, p. 77-92, 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PRIETO, J. I. R. **Matemáticas y Papiroflexia**. Artigo disponível em: Asociación Española de Papiroflexia

http://www.pajarita.org/modules.php?name=Downloads&d_op=viewdownload&cid=5

Acesso em: dezembro de 2005.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, T. M. do e SEVERINO JUNIOR, G. **A Geometria do Origami:** Atividades de ensino através de dobraduras. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2003.

REIS, J. S. **Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis.** 154f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing and Company, cap. 3, p. 49-64, 1992.

SANTOS, M. R. **Pavimentações do plano:** um estudo com professores de Matemática e Arte. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

Anexos

Anexo 1

Capítulo da dissertação de Mattos (2001)

Capítulo 6

Correlação entre Procedimentos do Origami e os Procedimentos Realizados com Régua e Compasso

6.1 Relacionando os Procedimentos Euclideanos com o Origami

Nesta seção, mostramos como as construções Euclideanas por régua e compasso podem ser realizadas pelas construções por dobraduras Origami. Vamos relacioná-las com certo cuidado para que fique clara tal possibilidade. Na verdade, tomamos cada um dos cinco procedimentos Euclideanos realizados por régua e compasso descritos na seção 5.2 e mostramos a possibilidade de substituí-los por uma combinação dos sete primeiros procedimentos do Origami descritos na seção 5.3.

Assim enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 6.1 *Toda construção que pode ser feita por métodos Euclideanos, utilizando somente régua não marcada e compasso, pode também ser efetuada por métodos que utilizam os procedimentos elementares das dobraduras Origami. Especificamente, os procedimentos* (E1) *a (E5) podem ser substituídos por combinações dos procedimentos (O1) a (O7) do Origami.*

Demonstração. Para provar este teorema, procuramos desenvolver cada passo que deverá ser executado para realizar as dobraduras do Origami, deixando claro como, em cada situação, podemos substituir a régua não marcada e o compasso pelas dobraduras no papel.

Tomando primeiramente (E1), podemos observar que este é idêntico ao procedimento (O4). O primeiro fala em traçar uma reta a partir de dois pontos dados, enquanto o segundo estabelece que por dois pontos podemos realizar uma dobradura, que forma uma única reta que contém os dois pontos. Na verdade, podemos notar que o verbo "traçar" foi substituído

pelo verbo “dobrar”, e o traçado utilizando a régua foi substituído pelo vinco formado pela dobradura do papel.

O procedimento (ℰ2) diz que, dados um ponto **M** e um segmento de reta *r*, podemos traçar um único círculo *c* = {**M**; *r*} usando o compasso. Por aplicação direta dos métodos do Origami não é possível realizar o traçado de um círculo.

Porém, podemos combiná-los de modo que, determinando um número de pontos pertencentes ao círculo e determinando tangentes a ele, podemos dizer que o círculo fica bem determinado. Propomos os seguintes passos:

1. Conhecidos o centro **M** e o raio *r* = AB, é possível dobrar **A** sobre **M** por (𝒪5), dobrando a perpendicular bissetora (mediatriz) de $\overline{\mathrm{MA}}$, o que implica em levar **B** em **B**’, e assim temos *r* = $\overline{MB'}$, figura 6.1.

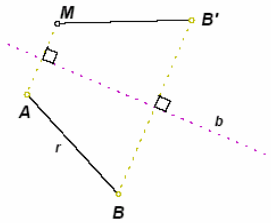


figura 6.1

2. Seja uma reta específica *l* contendo **M**. Sobre esta reta dada podemos dobrar o raio $\overline{MB'}$, o que é possível pela realização do procedimento (𝒪3), refletindo **B’** através da reta que determina o ângulo bissetor de $\angle B'Ml$. Assim fica determinado o ponto **P**, situado sobre o círculo que possui diâmetro sobre a reta *l*. Podemos também determinar o ponto **P**’ pertencente ao círculo e diametralmente oposto a **P**, fazendo a dobradura de *l* sobre si mesma, construindo o bissetor do segmento que contém **M** e leva **P** em um ponto, que ficará em posição diametralmente oposta à **P**, e será denominado **P**’, figura 6.2.

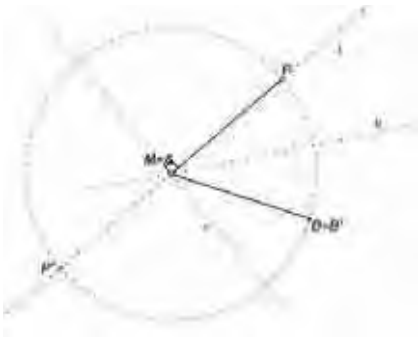


figura 6.2

3. Dobrar *l* sobre ela própria de modo a construir uma perpendicular por **P** é possível pelo procedimento (𝒪6), como na figura 6.3. Assim, encontraremos a única reta *t*, perpendicular a *l*, que contém **P**. Como *l* contém o raio $\overline{MP}$, a reta *t* será tangente ao círculo em **P**. O mesmo procedimento pode ser feito para o ponto **P’**, diametralmente oposto a **P**, como na figura 6.3.

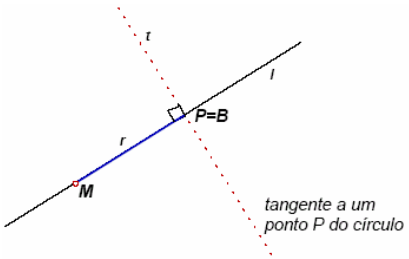


figura 6.3

Também verificamos uma identidade entre os procedimentos (&3) e (O1). O primeiro estabelece, a partir de duas retas não paralelas, l_1 e l_2, a existência de um único ponto de interseção **P** = $l_1 \cap l_2$, enquanto para o segundo, ao dobrarmos duas retas não paralelas, os vincos que as formam também determinarão um único ponto de interseção **P** = $l_1 \cap l_2$, construído pelo encontro dos vincos.

O procedimento (&4) diz que, dado um círculo *c*, conhecidos seu centro **M** e um ponto sobre sua circunferência, e dada uma reta *l*, de modo que a distância entre **M** e *l* não é maior que o raio do círculo *r*, podemos determinar o(s) ponto(s) de interseção entre *l* e *c*. O procedimento (O7) estabelece que, dado um ponto **P** e uma reta *l,* por dobradura podemos encontrar qualquer tangente a uma parábola com foco **P** e diretriz *l*. Como o círculo fica bem definido se são conhecidos seu centro **M** e um ponto ***P*** sobre sua circunferência, e se é dada uma reta *l* satisfazendo às condições acima, os pontos de interseção entre o círculo *c* e a reta *l* podem ser encontrados por dobradura de **P** sobre *l*, de modo que o vinco formado pela dobradura represente uma reta que contém **M.** Assim, podemos encontrar os pontos de interseção de um círculo *c* e uma reta *l* de modo equivalente ao utilizado para encontrar as tangentes a uma parábola específica, com foco **P** e diretriz *l*. As tangentes às parábolas contêm um ponto específico **Q = M** ≠ **P**, que, neste caso, será o centro do círculo. Isto pode ser visto na figura 6.4.

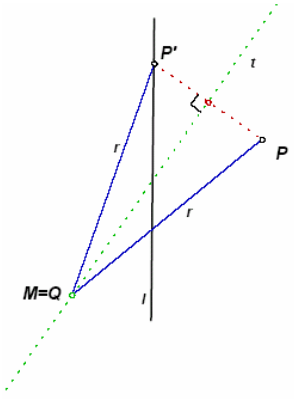


figura 6.4

O procedimento (&5) estabelece que, a partir de dois círculos $c_1 = \{M_1; r_1\}$ e $c_2 = \{M_2; r_2\}$, sempre será possível determinar o(s) ponto(s) de interseção entre c_1 e c_2, desde que nenhum dos círculos contenha o centro do outro, e a distância entre seus centros não seja maior que a soma dos seus raios; ou ainda que um contenha o centro do outro em seu interior, e a distância entre os centros não seja menor que a diferença dos seus respectivos raios. Os círculos somente são possíveis no Origami através do conhecimento de pontos específicos presentes em sua circunferência e de tangentes construídas por estes pontos. Não será possível com procedimentos diretos do Origami encontrar pontos comuns a dois círculos. No entanto, é possível encontrar a corda comum de interseção entre dois círculos, transformando então a realização do procedimento (&5) na realização do procedimento (&4), como pode ser visto na figura 6.5.

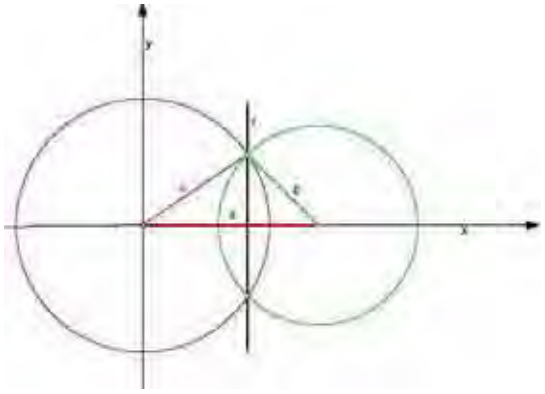


figura 6.5

Sejam dados dois círculos, c_1 e c_2, cujos pontos de interseção desejamos determinar. Tomamos por *a* a distância entre os centros dos círculos dados, cujos raios são respectivamente *b* e *c*, e tais que $a < b+c$. Faremos um procedimento algébrico para determinar a interseção entre os dois círculos dados. Consideraremos, então, que o centro de um deles esteja na origem de um sistema cartesiano, e que, de acordo com o sistema de coordenadas escolhido, eixo-*x* e eixo-*y* ortogonais, o centro do outro esteja sobre o eixo das abscissas e possua coordenadas (*a*, 0). Deste modo suas equações serão dadas por:

$$x^2 + y^2 = c^2 \text{ e } (x-a)^2 + y^2 = b^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - c^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - b^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

No desenvolvimento acima, o resultado explicitado para *x* representa a expressão da equação da reta vertical que forma a corda comum aos dois círculos considerados. Como dissemos anteriormente, conseguimos uma redução que leva à solução realizada para o

procedimento (&4), pois trata-se da interseção entre a reta *l* que contém a corda e um dos círculos. Sabemos, assim, que os pontos comuns entre dois círculos estão sobre uma reta *l* perpendicular à reta que contém os centros dos círculos. Esta perpendicular *l* intercepta a reta que contém os centros dos círculos a uma determinada distância do centro de um deles. Em relação ao círculo de raio *c*, esta distância é dada por:

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

Se tomamos o círculo de raio *b*, esta distância será dada por:

$$a - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{1}{2}\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}.$$

Primeiro verificaremos analiticamente a existência de tal interseção, e, em seguida, estabeleceremos os passos do Origami que tornam possíveis a construção por dobraduras.

1. Com as distâncias *a* e *c* dadas, é possível dobrar um ângulo reto de um triângulo com catetos *a* e *c*. Utilizamos para tal a seguinte combinação de procedimentos: [(O3);O5);(O6)]. Assim teremos que a hipotenusa de tal triângulo será dada por $\sqrt{a^2 + c^2}$, o que mostra que esta medida pode ser construída por dobraduras. Para a figura 6.6, deveremos considerar as seguintes representações para os segmentos:

$\overline{AB} = c;$
$\overline{AC} = a;$
$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{a^2 + c^2}$, por Pitágoras.

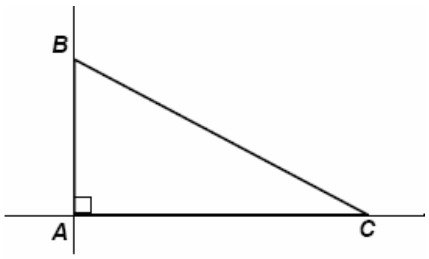


figura 6.6

2. Uma vez que $\sqrt{a^2 + c^2}$ é uma medida que pode ser construída e a distância *b* é conhecida, poderemos obter, por dobraduras no papel, um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{a^2 + c^2}$ e cateto *b*, cujo terceiro lado, de medida $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$, também poderá ser obtido a partir da combinação dos procedimentos: [(O3);(O5);(O6);(O7)]. Desse modo, será possível, por dobraduras, construirmos um triângulo retângulo que

possui um cateto com a medida deste terceiro lado obtido. Na figura 6.7 deveremos considerar as seguintes representações para os lados:

$$\overline{AB} = b;$$
$$\overline{BC} = \sqrt{a^2 + c^2};$$
$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}, \text{ por Pitágoras.}$$

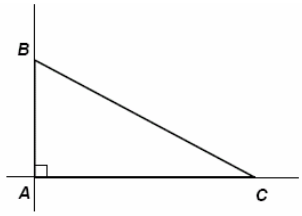


figura 6.7

3. A partir da medida $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ construída no passo anterior e de um comprimento unitário dado, formaremos com estas duas medidas os lados conhecidos de um triângulo qualquer. Um triângulo semelhante a este pode ser construído por dobraduras, combinando os procedimentos: [(O2);(O3)]. Nesta construção teremos um segundo triângulo, cujo lado de comprimento $\overline{AC} = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ será correspondente, por semelhança, ao lado $\overline{AB}$ de comprimento unitário do primeiro triângulo, formando uma razão de semelhança. Um segundo lado $\overline{AE}$ deste novo triângulo formará a mesma razão de semelhança com o lado de medida $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$ do primeiro triângulo. Resolvendo a proporção determinada pelas razões de semelhanças, temos que este segundo lado do novo triângulo construirá a medida procurada de valor $a^2 - b^2 + c^2$.

   Para esta construção consideramos as seguintes medidas na figura 6.8:

$$\overline{AD} = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2};$$
$$\overline{AB} = 1;$$
$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2};$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}}{1},$$
$$\Rightarrow \overline{AE} = a^2 - b^2 + c^2.$$

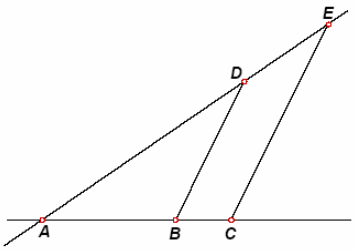


figura 6.8

4. Podemos realizar a dobradura de um triângulo qualquer onde o lado $\overline{AE}$ será dado por $2a$, enquanto um outro lado é dado pelo segmento $\overline{AC}$ já construído no passo anterior cujo comprimento é dado por $a^2 - b^2 + c^2$. Esta construção é possível pela combinação dos procedimentos: [(O2);(O3)]. Um triângulo semelhante ao dado pode ser construído por dobraduras, tendo dois dos seus lados as seguintes medidas: $\overline{AD}$ terá comprimento unitário e formará razão de semelhança com o lado $\overline{AE}$ de medida $2a$, do primeiro triângulo. Esta construção é realizada por combinação dos procedimentos: [(O2);(O3);(O5)]. Assim, o lado correspondente ao lado $\overline{AC}$ de comprimento $a^2 - b^2 + c^2$, do primeiro triângulo, pela mesma razão de semelhança, será dado por:

$$\overline{AB} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

que é precisamente o comprimento que queríamos produzir inicialmente.

Na figura 6.9, consideramos as seguintes medidas para os lados dos dois triângulos construídos:

$$\overline{AD} = 1;$$
$$\overline{AE} = 2a;$$
$$\overline{AC} = a^2 - b^2 + c^2;$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{1}{2a},$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

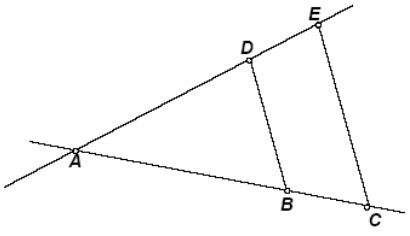


figura 6.9

Proposição 6.1 *É possível construir uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto conhecido, usando construções realizadas por dobraduras Origami.*

Demonstração. Dada uma reta *l* e um ponto **P**, podemos tomar dois pontos: **R** e **S** sobre *l*. Usando o procedimento ($\mathcal{O}$4), podemos, por dobraduras realizadas no plano Origami, construir as retas l_1 e l_2, tal que a primeira contém os pontos **P** e **R** enquanto a segunda contém os pontos **P** e **S**. Pelo procedimento ($\mathcal{O}$6) podemos dobrar a reta construída *l* sobre ela mesma de modo que a dobra construída determinou a reta l_3, perpendicular a *l* e que contém **P.** Seja **T** a interseção entre as retas *l* e l_3, **T** = $l \cap l_3$, possível pelo procedimento ($\mathcal{O}$1). Podemos dobrar o segmento $\overline{PS}$ de modo a determinar a reta l_6 bissetora a esse segmento, realizada pelo procedimento ($\mathcal{O}$5). Pelo procedimento ($\mathcal{O}$1) podemos determinar o ponto **Q** = $l_6 \cap l_2$. Dado os pontos construídos **T** e **Q** pelo procedimento ($\mathcal{O}$ 4), podemos construir a reta l_4 que os contém. Agora dobraremos a reta *l* sobre ela mesma de modo a obter l_5, a única reta perpendicular a *l* e que contém o ponto **S**, realizável pelo procedimento ($\mathcal{O}$6). Utilizando novamente o procedimento ($\mathcal{O}$1), teremos **U** = $l_4 \cap l_5$, construído.

Finalmente podemos utilizar o procedimento ($\mathcal{O}$4), e por **P** dado, e **U** construído, dobrar uma única reta $\overleftrightarrow{PU} = p$, de modo que *p* é paralela a reta *l* e passa pelo ponto **P**, dados inicialmente, como pode ser visto na figura 6.10.

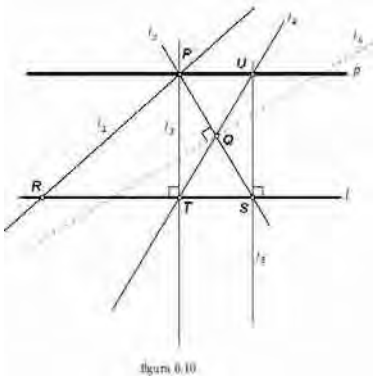


figura 6.10

Anexo 2

Construção do caleidoscópio generalizado

Material:

- Material emborrachado (E.V.A) – para encapar os caleidoscópios
- Cola de contato – para colar o E.V.A. nos espelhos
- Estilete – para cortar o E.V.A.
- Fita crepe – para arranjar os espelhos antes de espalhar a cola
- Espátula ou pincel – para espalhar a cola
- Espelhos cortados em forma de setor circular com mais ou menos 20 cm de raio e ângulo central de aproximadamente:

  180° (2 espelhos)

  90° (3 espelhos)

  70,53° (1 espelho)

  54,73° (3 espelhos)

  45° (1 espelho)

  37,38° (1 espelho)

  35,26° (1 espelho)

  31,72° (1 espelho)

  20,90° (1 espelho)

O corte em forma de setor circular é uma sugestão, pois não é necessária a forma arredondada para o efeito pretendido.

Para a construção dos caleidoscópios tomar os seguintes trios de espelhos cortados:

CALEIDOSCÓPIO (90°,60°,60°)

Espelhos de ângulos (70,53°, 54,73°, 54,73°)

CALEIDOSCÓPIO (90°,60°,36°)

Espelhos de ângulos (20,90°, 31,72°, 37,38°)

CALEIDOSCÓPIO (90°,60°,45°)

Espelhos de ângulos (35,26°, 45°, 54,73°)

CALEIDOSCÓPIO (90°,90°,90°)

Espelhos de ângulos (90°,90°,90°)

CALEIDOSCÓPIO (90°,90°,180°)

2 Espelhos de ângulos 180°

Articular os trios de espelho de forma a ficarem como uma pirâmide triangular, com as faces espelhadas voltadas para o interior, e com os lados bem ajustados entre eles para a formação perfeita dos ângulos.

Depois de devidamente ajustados os espelhos, apoiados num plano, como mostra a figura ao lado, espalhar a cola de contato no lado opaco dos espelhos e no material emborrachado (em um tamanho correspondente ao tamanho dos espelhos que serão encapados). Em seguida unir as duas superfícies que contêm cola e pressionar por alguns segundos (de acordo com o uso da cola escolhida), unir os espelhos na forma de um funil triangular.

figura 1

Procedendo da mesma forma com os outros trios de espelhos, constroem-se todos os caleidoscópios sugeridos.

figura 2

Na figura 2 tem-se um caleidoscópio pronto, ele forma uma pirâmide triangular aberta na base, esse exemplo refere-se ao caleidoscópio de ângulos (90°,60°,60°).

OBS.: Para a confecção do caleidoscópio (90°,90°,180°) é necessário ter um suporte metálico em forma de L, formando ângulo de 90°. Os espelhos com 180° de ângulo devem ser fixados a este suporte para depois serem revestidos com o emborrachado, para que fiquem como mostra a figura 3.

figura 3

Anexo 3

QUESTIONÁRIO

Objetivo: Obter dados para uma investigação a respeito do perfil dos alunos do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática.
Pesquisadora: Neirelise Buske **Orientador**: Claudemir Murari
Instituição: UNESP – Universidade Estadual Paulista – Campus Rio Claro

1 DADOS PESSOAIS
1.1 Nome (opcional):_____
1.2 Sexo ( ) Masculino ( ) Feminino
1.3 Idade
( ) 17 a 20 anos
( ) 21 a 24 anos
( ) 25 a 30 anos
( ) 31 a 40 anos
( ) mais de 40 anos
1.4 Lugar de residência (Cidade) _____
1.5 Estado civil
( ) Solteiro ( ) Casado ( ) Divorciado/desquitado ( ) Viúvo ( ) Outros
1.6 Ocupação:
( ) Só estuda ( ) Estuda e trabalha

2 DADOS ACADÊMICOS
2.1 Rede de ensino onde freqüentou o Ensino Fundamental
( ) Pública ( ) Particular
2.2 Rede de ensino onde freqüentou o Ensino Médio
( ) Pública ( ) Particular
2.3 Fez cursinho pré-vestibular?
( ) Sim ( ) Não

3 DADOS PROFISSIONAIS
3.1 Se trabalha, qual é o número de horas semanais trabalhadas? _____
3.2 Se trabalha, qual é o horário de trabalho?_____
4 O CURSO E A FACULDADE
4.1 Você entrou na faculdade imediatamente depois de terminado o Ensino Médio?
( ) Sim ( ) Não
Se não, que atividades exerceu neste intervalo de tempo?
_____
Se ficou sem estudar, foi por quanto tempo?
_____

4.2 Por que escolheu esse curso?
_____

4.3 Por que escolheu esta Universidade?
_____

5 A MATEMÁTICA

5.1 Seus professores costumavam utilizar algum recurso didático para ensinar Matemática? Em caso afirmativo especifique quais.

_____
_____
_____

5.2 Você conhece o *origami*? Imagina que ele pode ser útil no estudo da Matemática? Em caso afirmativo explicite como.

_____
_____
_____

5.3 Você sabe o que é um caleidoscópio? Imagina que ele pode ser útil no estudo da Matemática? Em caso afirmativo explicite como.

_____
_____
_____

5.4 Você considera importante o estudo da Geometria? Por quê?

_____
_____
_____

5.5 Se há mais alguma informação que julga relevante acrescentar, use este espaço.

_____
_____
_____

Anexo 4

Primeira parte da apostila

ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO ORIGAMI E CALEIDOSCÓPIOS

Elaboração: **Neirelise Buske**

Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da

Universidade Estadual Paulista - UNESP Rio Claro

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS OU ELEMENTARES

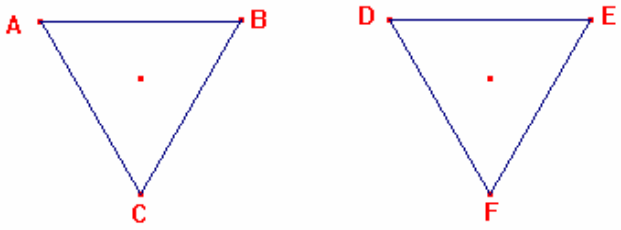
Para essas construções usaremos como instrumentos a régua não graduada e o compasso. As construções a seguir estão fundamentadas em resultados da Geometria Euclidiana Plana.
Antes de iniciarmos as construções vamos elaborar um vocabulário para facilitar as representações.

Interseção: _____
_____
_____

Congruente: _____
_____
_____

Semelhante: _____
_____

Casos de congruência e semelhança de triângulos.



Construção de retas

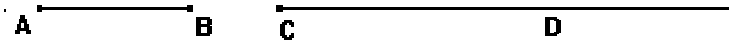
Dados dois pontos distintos A e B, quantas retas, contendo ambos os pontos podemos traçar, utilizando uma régua? Realize essa construção.

CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS

1ª construção - Transporte de Segmentos

Isto significa construir um segmento congruente ao segmento dado com uma de suas extremidades coincidindo com a origem da semi-reta.

a) Como podemos transportar o segmento $\overline{AB}$ sobre a semi-reta $\overline{CD}$ dada, com os instrumentos que temos? Explicar como fez isso.



2ª construção - Transporte de Ângulos

Isto significa construir um ângulo congruente ao ângulo dado tendo a semi-reta como um de seus lados.

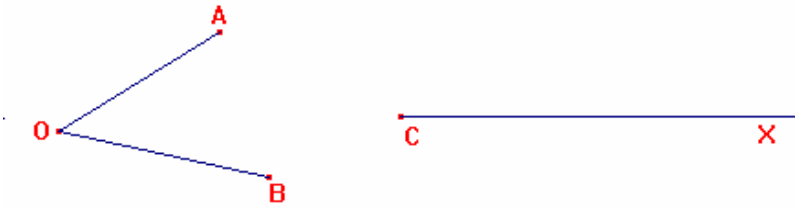
Para transportar o ângulo *AÔB* sobre a semi-reta $\overrightarrow{CX}$ dada:

• Traçar um arco com centro em *O* e raio *r* arbitrário, que interseciona os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, nos pontos *D* e *E,* respectivamente.

• Traçar a circunferência *C(C,r)*, que é congruente à circunferência *C(O,OE)* e que interseciona a semi-reta $\overrightarrow{CX}$ num ponto *F*.

• Traçar a circunferência *C(F, DE)*, que interseciona a circunferência *C(C,r)* nos pontos *G* e *G*'. Escolhemos *G*.

O ângulo $G\hat{C}F$ tem como um de seus lados à semi-reta $\overrightarrow{CX}$, sendo, portanto o ângulo procurado.



a) Justificar essa construção.

_____
_____
_____
_____

3ª construção - Bissetriz de um ângulo

a) Discutir com o grupo e escrever uma definição para *bissetriz*.

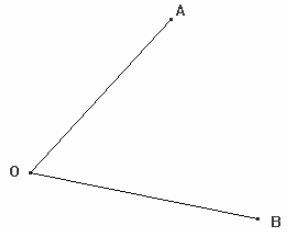
_____
_____
_____

b) Para traçar a bissetriz de um ângulo *AÔB*:

• Traçar uma circunferência *C(O,r)* com raio arbitrário e suficientemente grande, a qual determina os pontos *D* e *E* sobre os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ do ângulo *AÔB*, respectivamente.

• Traçar *C(D,r')* e *C(E,r')* com r' suficientemente grande, e tome o ponto *P*, um dos pontos da intersecção dessas duas circunferências.

• A semi-reta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de *AÔB*.



c) Provar que esta é a bissetriz do ângulo dado.

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Perpendicularidade

Discutir com o grupo e escrever uma definição para *retas perpendiculares*.

_____
_____
_____

4ª construção - Dado o segmento $\overline{AB}$, traçar duas circunferências *C(A,r)* e *C(B,r)*, com *r* maior que a metade da medida de *AB*, as quais encontram-se em dois pontos, que chamamos *P* e *Q*. Trace a reta *m*= $\overleftrightarrow{PQ}$**.** Marque o ponto M na interseção da reta *m* com $\overline{AB}$. Utilizando o compasso meça a distância entre *AM* e *MB*.

a) O que se pode concluir sobre o ponto *M*?

_____
_____

b) E sobre a reta perpendicular $\overleftrightarrow{PQ}$?

_____
_____

c) Justificar essa construção. _____
_____
_____
_____

5ª construção - Construir uma reta perpendicular a uma reta *r* dada, pelo ponto *P* dado.

Caso 1. $P \in r$

Para realizar essa construção determinar um segmento auxiliar $\overline{AB}$ em *r,* do qual P é o ponto médio. Este segmento é obtido pela interseção de *r* com a circunferência $C(P,d)$, com d arbitrário.

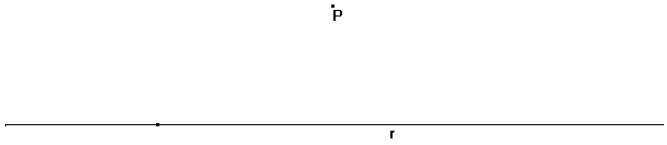
A reta s, mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta procurada.

a) Justificar essa construção.

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Caso 2. $P \notin r$

Marque um ponto A *sobre* r *e trace a circunferência* C(P,PA). *Se* C(P,PA) *intersecionar* r *em apenas um ponto, então a reta* $\overleftrightarrow{AP}$ *é a reta perpendicular pedida. Por outro lado, se* C(P,PA) *intersecionar* r *também em um outro ponto* B*, então, a reta procurada é a mediatriz do segmento* $\overline{AB}$ *.*



a) Justificar essa construção.

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Retas Paralelas

Discutir com o grupo e escrever uma definição para *retas paralelas*.

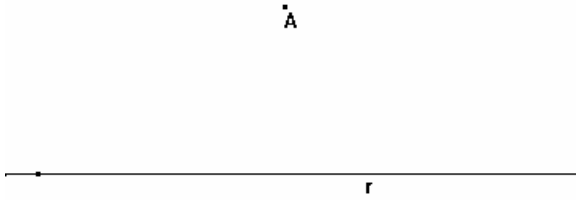
_____
_____
_____
_____

6ª construção - Retas paralelas

Dada uma reta *r* e um ponto *A* fora dela, construir por *A* uma reta paralela à *r.*

Caso 1.

- Traçar uma reta qualquer por *A,* que intercepte *r* em *B*. Marcar *C* em *r.* Temos o ângulo $A\hat{B}C$.
- Com vértice em *A* e tendo $\overline{AB}$ como lado, construir um ângulo congruente a $A\hat{B}C$.
- O outro lado desse novo ângulo, que denominaremos $\overline{AD}$, é paralelo a *r.*



a) Justificar essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

Caso 2.

- Traçar uma reta qualquer por *A* que intercepte *r* em *B*. Marcar *C* em *r*. Temos o ângulo $A\hat{B}C$.
- Marcar *D* sobre $\overline{AB}$ tal que *A* se encontre, nessa reta, entre *B* e *D*.
- Com vértice em *A* e $\overline{AD}$ como lado, construir um ângulo congruente ao ângulo $A\hat{B}C$.
- O outro lado desse novo ângulo, que denominaremos de $\overline{AE}$, é paralelo a *r*.

a) Justificar essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

Retas tangentes

Discutir com o grupo e escrever uma definição para *retas tangentes*.

_____

_____

_____

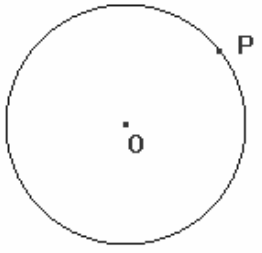
_____

7ª construção – Reta tangente

Dado um ponto P, numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

- Traçar uma reta que passe pelo ponto *P* e pelo centro da circunferência.
- Construir, por *P*, uma reta perpendicular a $\overline{OP}$.

Essa reta é a tangente à circunferência por *P*.



a) Justificar essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

PROCEDIMENTOS GEOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS DO ORIGAMI

Origami é a tradicional arte japonesa de confeccionar figuras por meio de dobras no papel. Etimologicamente advém do japonês *ori* (dobrar) *e kami* (papel).

A construção de um origami, na sua forma mais tradicional, não envolve o uso de cortes nem colagem, partindo, na maioria das vezes, de um pedaço de papel quadrado. O resultado final depende do corte do papel utilizado e da confecção de dobras perfeitas, exigindo paciência e concentração do executor ao seguir os passos indicados na construção de cada figura.

Iremos realizar as atividades fazendo as construções com dobraduras.

1. Construção de retas

Em um pedaço de papel marcar dois pontos. Quantas retas, que passem por esses dois pontos, podem ser dobradas? Colar aqui a dobradura feita.

2. Bissetriz

- Tomar uma folha de papel e dobrá-la de modo que as bordas da folha não coincidam. Vincar bem.
- Abrir a folha e dobrá-la novamente de forma que não coincida com dobra anterior, mas a intercepte.

a) Escolher um dos ângulos formados pela interseção das linhas e encontrar a sua bissetriz.

b) Descrever como fez essa construção.

_____

_____

_____

_____

c) Colar aqui sua construção.

3. Perpendicularidade

Construir uma reta perpendicular a uma reta *r* dada, pelo ponto *P* dado.

Caso 1. $P \in r$

a) Construir com dobraduras, uma reta *r* e marcar o ponto *P* sobre ela. Dobrar a sua perpendicular fazendo com que ela passe pelo ponto *P*.

b) Descrever como fez essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

c) Colar aqui sua construção.

Caso 2. $P \notin r$

a) Repetir o processo anterior, mas agora marcando o ponto fora da reta. Dobrar uma perpendicular a reta que passe por esse ponto.

b) Descrever como fez essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

c) Colar aqui sua construção.

Mediatriz de um segmento.

a) Em uma folha de papel dobrar uma reta. Marcar os pontos *A* e *B*. Encontrar a mediatriz desse segmento fazendo dobras no papel.

b) Descrever como fez essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

c) Colar aqui sua construção.

4. Retas Paralelas

a) Utilizando as construções anteriores, dobrar um par de retas paralelas.

b) Descrever como fez essa construção.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

c) Colar aqui sua construção.

CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS

Tendo feito as construções fundamentais, por meio de dobraduras e com régua e compasso, agora podemos construir polígonos.

Aqui realizaremos as construções por dobraduras e também utilizando régua e compasso.

Discutir com o grupo e responder: O que são *polígonos regulares*?

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Quadrado

1. Discutir com o grupo sobre *quadrado* e escrever uma definição.

_____
_____
_____

2. É possível construir um quadrado utilizando somente a régua não graduada e o compasso? Se possível, explique como fez.

3. Sabemos dobrar retas paralelas e perpendiculares. Utilizando esses conhecimentos dobrar um quadrado em um pedaço qualquer de papel. Representar graficamente essa construção.

4. Realizar a construção anterior partindo de um papel retangular e recortar esse quadrado.

5. Partindo do quadrado construído, quantos polígonos diferentes podem ser dobrados para que cada um tenha a metade da área do quadrado original? Fazer quantas dobras julgar necessário. _____

6. Representar, com desenhos, as dobras anteriores em que houve sobreposição das metades.

10. Se pudermos dobrar uma figura por uma linha que a divide ao meio unindo suas pontas, diz-se que esta figura tem **simetria reflexiva,** onde o eixo de simetria é dado pela dobra feita. Pegue outro quadrado e dobre-o a fim de encontrar seus eixos de simetria.

a) Desenhar essas linhas no quadrado construído com a régua.

b) Quantos eixos de simetria reflexiva o quadrado tem? _____

c) Descrever esses eixos de simetria.

_____

_____

d) Dobrar o quadrado sobre qualquer eixo de simetria. Qual é a área do novo polígono comparada com o quadrado original? Escrever conjeturas baseadas nos resultados sobre o eixo de simetria reflexiva.

_____

_____

10. Se pudermos fazer a rotação de uma figura em torno de um ponto e a imagem dessa figura coincidir com a figura original após uma volta de 360º, então se diz que essa figura tem **simetria rotacional**. A letra Z tem **duas dobras de simetria rotacional** porque quando é girada 180º e 360º sobre o centro de rotação, a imagem coincide duas vezes com a figura original.

a) Recortar um quadrado de 3 cm de lado e desenhá-lo no espaço ao lado. Marcar A no canto superior esquerdo do quadrado recortado. Quantas vezes podemos girar o papel em 90º até o A voltar ao seu lugar de origem? _____

b) Descrever a simetria rotacional do quadrado.

_____

_____

_____

Retângulo Áureo

1. Discutir com o grupo e escrever seus conhecimentos sobre *razão áurea*.

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

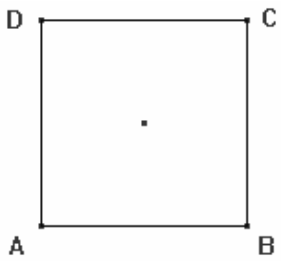
2. Apresentar para turma as conclusões a que chegaram.

3. Para construir o retângulo áureo, com régua e compasso:

- Tomar um quadrado de lado $\overline{AB}$, marcar o ponto médio *M* desse lado.
- Prolongar o segmento $\overline{AB}$ no sentido de *A* para *B*.
- Seja *P* um ponto sobre esse prolongamento tal que a medida de $\overline{MP}$ seja igual à medida de $\overline{MC}$.

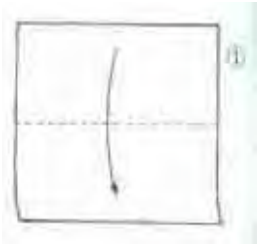
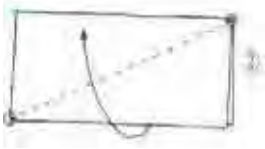
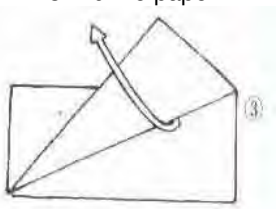
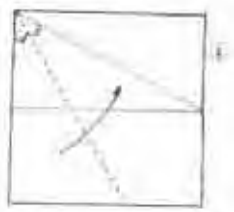
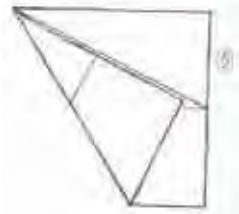
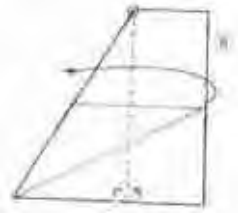
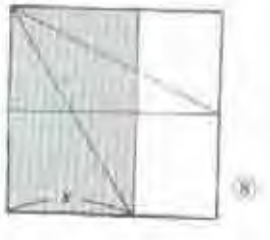
a) Como determinar esse ponto P? _____

- Complete o desenho construindo um retângulo de comprimento *AP* e largura *AB*.



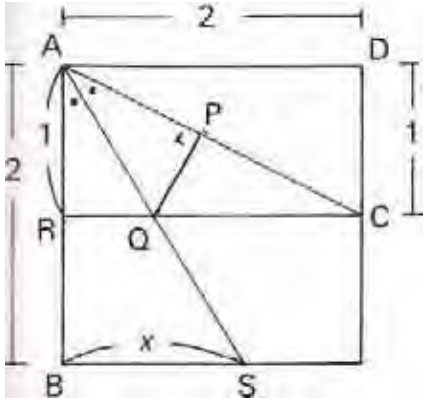
4. Verificar se esse retângulo é áureo. Explique como fez isso.

5. Construção do retângulo áureo por dobraduras. Baseada na construção feita por Kasahara (2005, p. 72)

1. Dobrar	2. Dobrar para frente marcando a diagonal deste retângulo.	3. Abrir o papel.	4. Dobrar a bissetriz do ângulo mostrado na figura
			
5. Virar completamente a figura para que fique como mostra o passo seguinte.	**6. Dobrar esta parte para frente marcando uma dobra perpendicular a base da figura**	**7. Figura formada após feita a dobra.**	**8. A parte escura é o retângulo procurado**
			

Colar sua construção aqui.

6. Observar a figura abaixo. Encontrar o valor de **x** e verificar se esse retângulo é realmente o retângulo áureo.



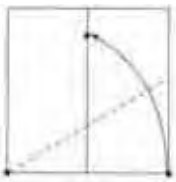
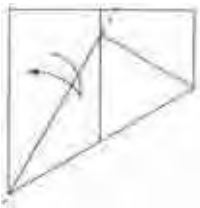
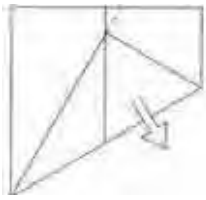
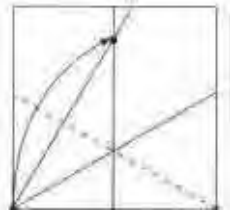
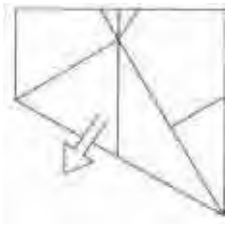
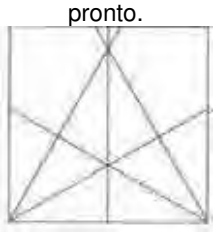
Triângulo eqüilátero

1. Discutir com o grupo sobre *triângulo eqüilátero* e escrever uma definição.

_____
_____
_____
_____

2. Construir um triângulo eqüilátero utilizando régua e compasso. Escrever os passos seguidos para realizar essa construção.

3. Construir um triângulo eqüilátero por dobraduras. Construção retirada de Franco (1999, p. 42)

1. Dobrar e desdobrar.	2. Dobrar um ponto sobre o outro. Esta dobra mostra que o lado tem o mesmo tamanho da base. 	3. Dobrar para frente e desdobrar. 	4. Abrir. 
5. Dobrar fazendo os dois pontos coincidirem. 	6. Dobrar para frente e desdobrar.	7. Abrir. 	8. Triângulo eqüilátero pronto. 

4. Como provar que este triângulo construído com dobraduras é eqüilátero?

_____
_____
_____
_____

5. Recortar o triângulo construído. Fazer dobras nele para encontrar seus eixos de *simetria reflexiva*

6. Quantos eixos de simetria reflexiva o triângulo tem? _____

a) Traçar no triângulo desenhado esses eixos.

b) Descrever esses eixos de simetria.

_____
_____

7. Descrever a simetria rotacional do triângulo.

_____

_____

_____

8. Construir um triângulo qualquer, o qual deve ser recortado. Qual é o valor da soma dos ângulos internos desse triângulo? Como proceder para provar sua afirmação utilizando dobras?

_____

_____

_____

9. Colar sua construção aqui.

Hexágono regular

1. Discutir com o grupo sobre *hexágono regular* e escrever uma definição.

_____

_____

_____

_____

2. Construir um *hexágono regular* utilizando régua e compasso. Escrever os passos seguidos para realizar essa construção.

3. Partindo de um triângulo eqüilátero construir um hexágono regular por meio de dobraduras.

4. Escrever as instruções para realizar essa construção.

5. Recortar o hexágono construído com dobraduras. Como provar que este hexágono construído com dobraduras é regular?

_____

_____

_____

_____

6. Fazer dobras no hexágono recortado para descobrir quantos eixos de simetria reflexiva ele tem. _____

a) Marcar esses eixos no hexágono desenhado.

b) Descrever esses eixos de simetria.

_____

_____

8. Descrever a simetria rotacional do hexágono.

_____

_____

Pentágono regular

1. Discutir com o grupo sobre *pentágono regular* e escrever uma definição.

_____

_____

_____

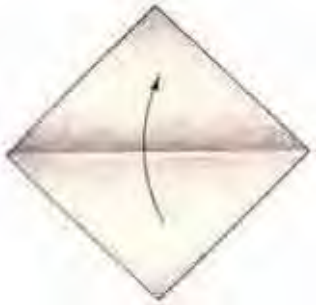
_____

2. Para construir um *pentágono regular* utilizando régua e compasso.

- Construir um retângulo áureo.
- Tomar o comprimento do retângulo como raio e traçar uma circunferência.
- Dividir a circunferência em cinco partes iguais tomando como medida a diagonal do retângulo áureo construído anteriormente, que é a hipotenusa do triangulo retângulo que tem por catetos o comprimento desse retângulo (raio da circunferência) e o segmento áureo deste raio (largura do retângulo) .

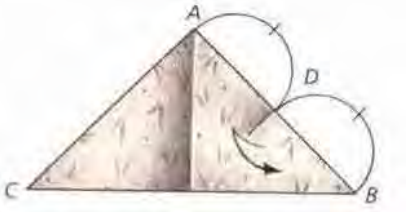
3. Para construir um pentágono regular por dobraduras: Construção retirada de Franco (1999, p. 46)

1. Dobrar a diagonal.

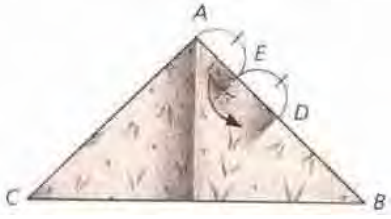


2. Dobrar ao meio e desdobrar.

3. Marcar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, dobrando e desdobrando. Chamar esse ponto médio de *D.*

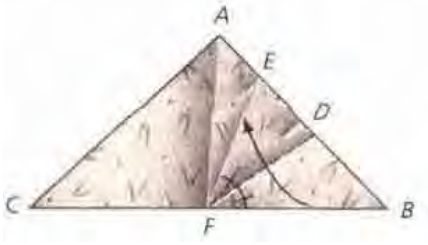


4. Marcar o ponto médio do segmento $\overline{AD}$ dobrando e desdobrando. Chamar esse ponto médio de *E.*

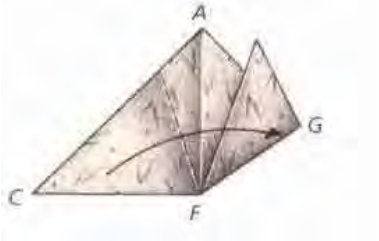


5. Dobrar e desdobrar para marcar a reta que une os pontos *E* e *F.*

6. Dobrar a bissetriz do ângulo $E\hat{F}B$.



7. Dobrar para frente e marcar a bissetriz do ângulo $C\hat{F}G$.



8. Dobrar a ponta produzida pela dobra anterior ao longo do segmento $\overline{FE}$.

9. Dobrar para trás todo o lado direito do segmento $\overline{FE}$.

10. Dobre todas as camadas. Essa dobra deve passar pelo ponto *G* e ser perpendicular ao lado esquerdo da figura.

11. Desdobrar o papel.

4. Recortar o pentágono construído com dobraduras. Como provar que este pentágono é regular?

_____
_____
_____
_____

5. Será possível colorir o papel desdobrado com apenas duas cores, sem as repetir lado a lado?

_____

6. Discutir com seus colegas sobre *diagonais* e escrever uma definição.

_____
_____

7. As dobras feitas na construção do pentágono coincidem com as suas diagonais? Explicar porque sim ou porque não. Como descrever essas dobras?

_____

_____

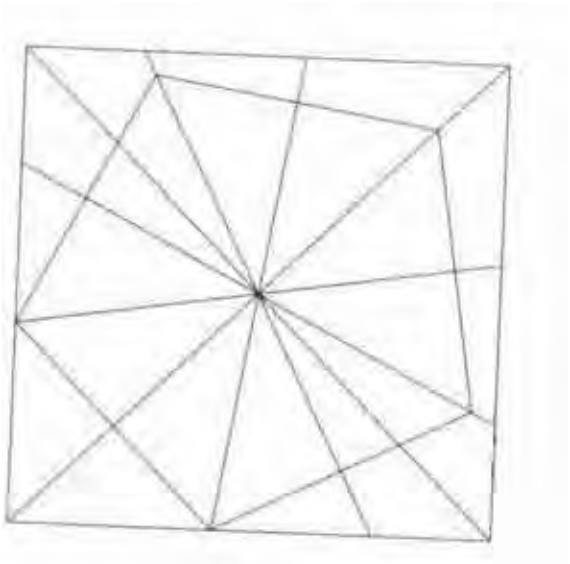
_____

8. Desenhar as diagonais do pentágono construído com régua e compasso.

a) Quantas diagonais têm? _____

b) Descrever a figura formada pelas diagonais. _____

9. No esquema abaixo marcar a medida de cada ângulo determinado pelas dobras do pentágono regular.



10. Fazer a soma dos ângulos alternados em torno de cada vértice. Que resultados foram encontrados? Qual a quantidade de ângulos em cada vértice?

11. Quantos eixos de simetria reflexiva o pentágono tem? _____

a) Descrever esses eixos de simetria.

_____

_____

12. Descrever a simetria rotacional do pentágono.

_____

_____

13. Colar aqui sua construção.

Octógono regular

1. Discutir com o grupo sobre *octógono regular* e escrever uma definição.

_____
_____
_____
_____

2. Construir um *octógono regular* utilizando régua e compasso. Escrever os passos seguidos para realizar essa construção.

3. Para construir um octógono com dobraduras, fazemos a bisseção de um quadrado:

- Construir um quadrado.
- Dobrar as linhas de simetria do quadrado.
- Dobrar as bissetrizes dos ângulos formados pelas linhas de simetria do quadrado.
- O encontro das bissetrizes com os lados do quadrado formam os vértices do octógono.

4. Recortar o octógono construído com dobraduras. Como provar que ele é regular?

_____
_____
_____
_____

5. Quantos eixos de simetria reflexiva o octógono tem? _____

a) Descrever esses eixos de simetria.

_____
_____

6. Descrever a simetria rotacional do octógono.

_____
_____

7. Colar aqui sua construção.

Preencher o quadro abaixo de acordo com as descobertas feitas durante a construção dos polígonos regulares.

Nome do polígono regular	Número de vértices	Número de lados	Número de eixos de simetria	Simetria rotacional
QUADRADO				
TRIÂNGULO EQUIL.				
HEXÁGONO				
PENTÁGONO				
OCTÓGONO				

Observe o quadro e faça conjeturas sobre a simetria reflexiva de polígonos com ***n*** lados.

BIBLIOGRAFIA

FRANCO, B. **Unfolding Mathematics with Unit Origami.** Emerville, CA: Key Curriculum Press, 1999.

IMENES, L. M. **Vivendo a Matemática:** Geometria das dobraduras. São Paulo: Scipione, 1988.

KASAHARA, K. **Origami Omnibus.** Paper folding for everybody. 20. ed. Tokyo, New York: Japan Publications, 2005.

MATTOS, F. R. P. **Números Construtíveis por Dobraduras ou Reflexões.** Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

MURARI, C. Apostila: Construções Geométricas Fundamentais, 2004 (impresso).

NOVAES, J. A. **Frações e Geometria com Dobradura de Papel.** Anais do III Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Minicurso. ULBRA – Canoas, 2005.

REZENDE, E. Q. F. e QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2000.

Anexo 5

Segunda parte da apostila

ORIGAMI MODULAR

O Origami pode ser caracterizado pela quantia de peças de papel utilizadas em sua confecção, o tradicional utiliza apenas uma peça e o modular se baseia na construção de módulos ou unidades (quase sempre iguais) que formam figuras ao serem encaixadas.

Para se chegar ao módulo partimos de um papel quadrado que após ser dobrado, de acordo com os passos indicados para cada tipo de módulo (triangular, quadrangular, pentagonal...), resulta em um polígono com bolsos de encaixe.

Para unir um módulo a outro é necessário construir peças de conexão, ou seja, abas que ao serem introduzidas nos bolsos fazem à união dos módulos. Com a interligação dos módulos podemos construir sólidos.

PROPORÇÕES DOS QUADRADOS UTILIZADOS NA CONSTRUÇÃO DOS MÓDULOS

Para que se obtenham módulos de lados congruentes, que possam ser encaixados uns aos outros, em sua construção é necessário o uso de diferentes tamanhos de papéis.

Quanto mais ângulos tiver a figura, maior deve ser o papel utilizado em sua construção.

O quadrado original será utilizado na construção do módulo pentagonal e o quadrado obtido pelas dobras realizadas será utilizado na construção do módulo triangular e quadrangular.

Não iremos apresentar os passos para realizar essa construção, mas eles seguem a seqüência da construção do retângulo áureo visto anteriormente.

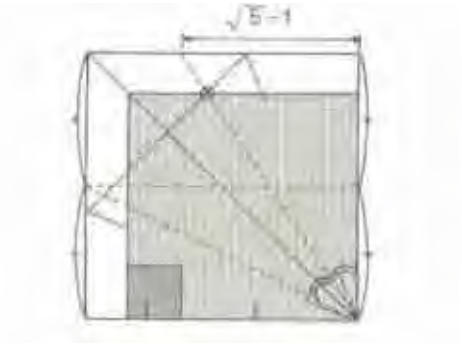


FIGURA 1

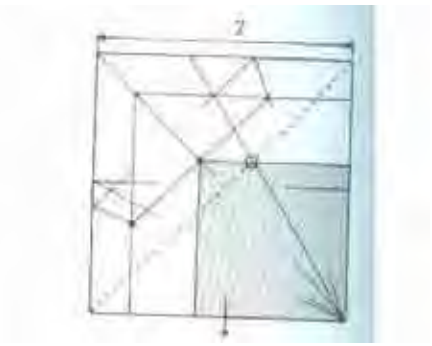


FIGURA 2

A parte representada pelo quadrado menor pintado (fig. 2) é o tamanho do papel, que será utilizado na construção do módulo triangular e quadrangular, em comparação com o utilizado na construção do módulo pentagonal (fig. 1).

CONSTRUÇÃO DOS MÓDULOS

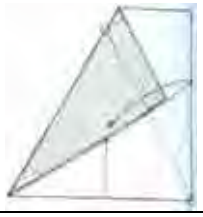
Iremos construir os módulos utilizando papéis de diferentes cores e partindo sempre de um pedaço de papel quadrado. Esses módulos, depois de construídos, terão bolsos, nas laterais, que servem para o encaixe das peças de conexão (que serão construídas logo a seguir).

Construção do módulo triangular (baseada em Kasahara (1997, p. 284-285).)

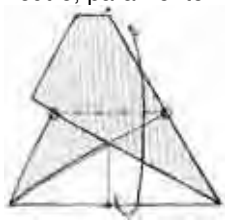
1. Dobrar e desdobrar

2. Dobrar um ponto sobre o outro. Dobrar a aba superior e desdobrar a inferior.

3. Dobrar um ponto sobre o outro, tendo atenção com os pontos maiores marcados.



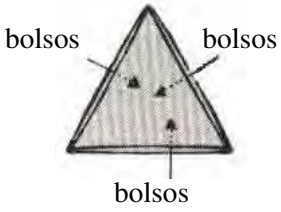
4. Dobrar um ponto sobre o outro, para frente.



5. Dobrar um ponto sobre o outro, seguindo a seta, e dobrar a abinha para frente.

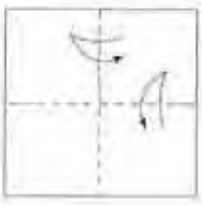
6. Dobrar a aba para dentro do bolso formado.

7. Dobradura completa.

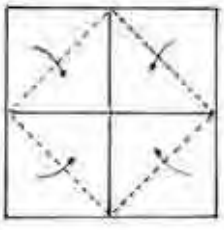


Construção do módulo quadrangular

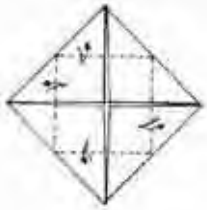
1. Dobrar e desdobrar marcando o vinco



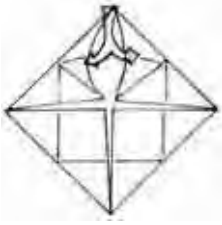
2. Dobrar as pontas até o centro



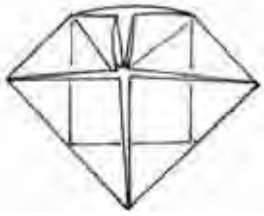
3. Dobrar e desdobrar marcando o vinco



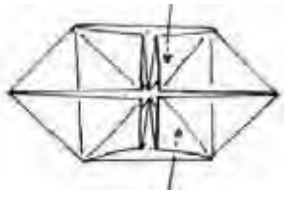
4. Abrir

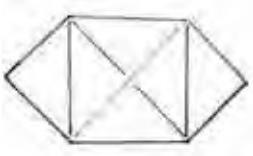


5. Dobrar para dentro



6. Fazer o mesmo do outro lado.

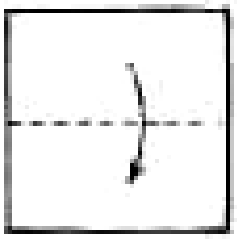
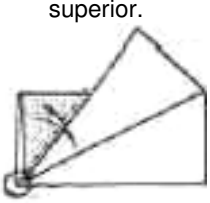
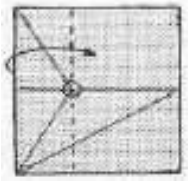
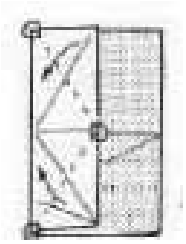
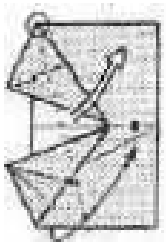
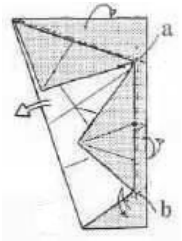
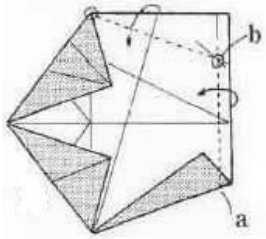
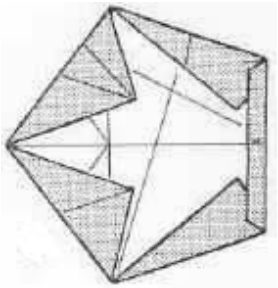


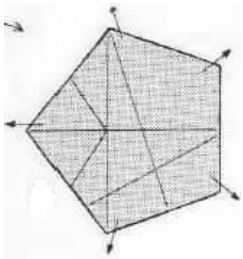


7. A face está pronta. Neste caso, os encaixes já estão ligados às faces.

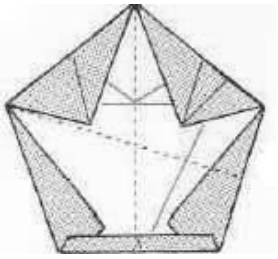
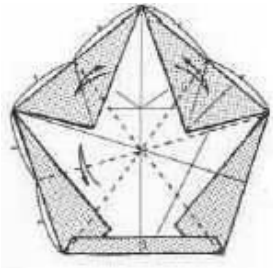
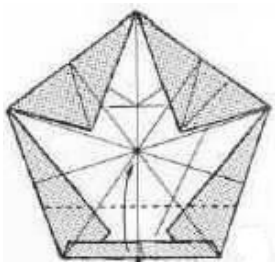
Construção realizada por Kasahara (1997, p.254).

Módulo pentagonal

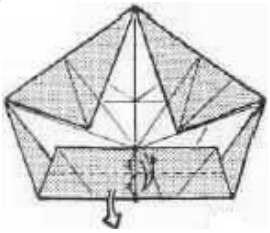
1. Dobrar. 	2. Dobrar para frente marcando a diagonal deste retângulo. 	3. Dobrar e desdobrar a aba superior. 
4. Abrir a figura. Dobrar uma perpendicular a base que passe pelo ponto assinalado. 	5. Dobrar seguindo a seta. 	6. Dobrar puxando para frente. 
7. O lado marcado pelos pontos *a* e *b* deve estar paralelo ao lado maior. Dobrar as pontas para trás e desdobrar, de acordo com as setas. Abrir. 	8. Virar a figura. Dobrar pelo vértice superior e pelos pontos *a* e *b* marcados anteriormente. 	9. Figura pronta 



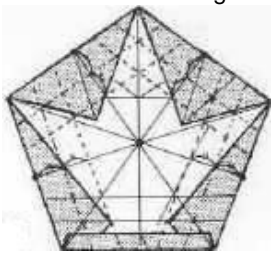
Seguindo os passos 1 – 10 encontramos o pentágono, a partir deste pentágono construímos o módulo pentagonal.

1.Colocar a peça nessa posição. 	2. Dobrar e desdobrar nos eixos de simetria do pentágono. 	3. Dobrar o lado do pentágono até o centro da figura. 

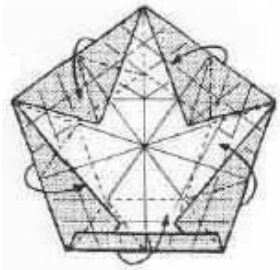
4. Dobrar ao meio a aba encontrada pela dobra anterior. Abrir.



5. Repetir os passos 3 e 4 dobrando todos os lados da figura.

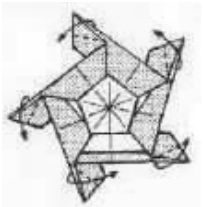


6. Dobrar os lados sobre a linha da dobra feita no passo 3, para encontrar a figura mostrada a seguir.

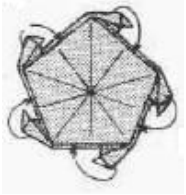


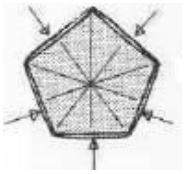
7. Dobrar para frente, pelas dobras feitas no passo 4, para encontrar a figura da etapa seguinte.

8. Dobrar as abinhas formadas para frente.



9. Introduzir as abas nos bolsos formados em cada lado da figura.



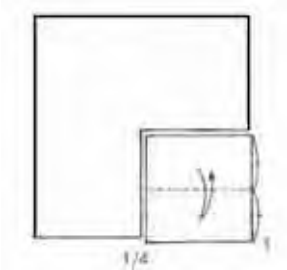


Módulo pronto, com bolsos de encaixe em todos os lados.

Construção retirada de Kasahara (1997, p. 280-284).

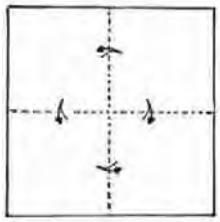
Peça de conexão

Esta peça serve para unir um módulo ao outro, pois a construção do Origami não pode envolver o uso de cola.

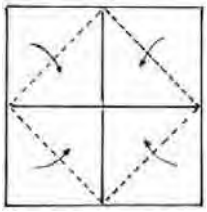


A área do quadrado usado na construção desta peça corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do papel utilizado para construir as faces do módulo triangular.

1. Dobrar o papel em quatro partes e desdobrar.

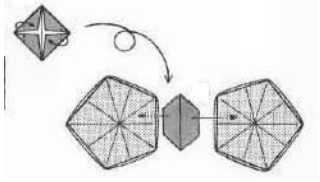


2. Dobrar as pontas até o centro do papel.



3. Peça pronta para o encaixe.

4. Para utilizar a mesma peça de conexão no encaixe dos módulos pentagonais basta fazer uma dobra em dois dos vértices da peça de conexão.



ENCAIXANDO OS MÓDULOS

1. Utilizando os módulos confeccionados, como juntá-los de maneira a formar "bicos"? Inicialmente utilizar somente os módulos iguais em um mesmo "bico".

2. Quantos "bicos" diferentes podemos formar:

a) usando triângulos? _____

b) usando quadrados?_____

c) usando pentágonos?_____

3. Construir sólidos partindo dos "bicos" confeccionados, fazendo com que todos os "bicos" do sólido sejam iguais. Utilize o maior número de cores sem repeti-las lado a lado.

a) Quantos sólidos foram construídos, utilizando somente módulos triangulares? _____

b) Quantos sólidos foram construídos, utilizando somente módulos quadrangulares? _____

c) Quantos sólidos foram construídos, utilizando somente módulos pentagonais?_____

Esses sólidos construídos são chamados de *poliedros regulares ou poliedros de Platão.*

4. Que relação pode-se observar, entre os polígonos regulares e os poliedros regulares.

_____

_____

_____

_____

5. Um polígono tem dois elementos básicos: lados e vértices. Observar os poliedros construídos e descrever seus três elementos básicos.

_____

_____

_____

6. Discutir com o grupo e escrever uma definição para *poliedros de Platão.*

_____

_____

_____

_____

7. Nomeando os poliedros construídos:

Nome dos poliedros	Número de faces	Forma das faces

CARACTERÍSTICAS DOS POLIEDROS DE PLATÃO OU POLIEDROS REGULARES

Tetraedro

1. Quantas faces foram necessárias para a construção do tetraedro? _____E quantas peças de conexão?_____

2. O que essas peças de conexão representam? _____

3. Quantos vértices e arestas têm o tetraedro? _____

4. Cada vértice do tetraedro une quantos polígonos? De quais tipos? _____

5. Qual a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice? _____

6. O tetraedro possui planos de simetria? Traçar as linhas que correspondem ao local onde os planos de simetria cortam o tetraedro. Quantos planos foram encontrados? _____

7. Usar palitos de churrasco para encontrar os eixos de simetria rotacional do tetraedro. Quantos eixos de simetria ele tem? Descrever esses eixos. _____

_____

Hexaedro ou Cubo

1. Quantas faces foram necessárias para a construção do cubo? _____

2. Quantos vértices e arestas têm o cubo? _____

3. Cada vértice do cubo une quantos polígonos? De que tipo? _____

4. Qual a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice? _____

5. Traçar as linhas que correspondem ao local onde os planos de simetria cortam o cubo. Quantos planos foram encontrados? _____

6. Quantos eixos de simetria o cubo tem? Descrever esses eixos.

_____

_____

Octaedro

1. Quantas faces foram necessárias para a construção do octaedro? _____

2. Desafio: Encontrar uma maneira de calcular quantas arestas tem o octaedro sem contá-las. Fazer com que essa equação tenha validade para calcular as arestas de todos os poliedros regulares.

3. Cada vértice do octaedro une quantos polígonos? _____

4. Qual a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice? _____

5. Traçar as linhas que correspondem ao local onde os planos de simetria cortam o octaedro. Quantos planos foram encontrados? _____

6. Quantos eixos de simetria o octaedro tem? Descrever esses eixos.

_____

_____

Dodecaedro

1. Quantas faces foram necessárias para a construção do dodecaedro? _____

2. Quantos vértices e arestas têm o dodecaedro? _____

3. Cada vértice do dodecaedro une quantos polígonos? _____

4. Qual a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice? _____

5. Traçar as linhas que correspondem ao local onde os planos de simetria cortam o dodecaedro. Quantos planos foram encontrados? _____

6. Quantos eixos de simetria o dodecaedro tem? Descrever esses eixos.

_____

Icosaedro

1. Quantas faces foram necessárias para a construção do icosaedro? _____

2. Quantos vértices e arestas têm o icosaedro? _____

3. Cada vértice do icosaedro une quantos polígonos? _____

4. Qual a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice?_____

5. Traçar as linhas que correspondem ao local onde os planos de simetria cortam o icosaedro. Quantos planos foram encontrados? _____

6. Quantos eixos de simetria o icosaedro tem? Descrever esses eixos.

_____

_____

Completar o quadro e responder:

	Número de faces	**Número de arestas**	**Número de vértices**	**Forma das faces**	**Número de arestas que convergem para cada vértice**	**Soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice**
TETRAEDRO						
HEXAEDRO						
OCTAEDRO						
DODECAEDRO						
ICOSAEDRO						

a) Existe alguma relação entre o número de faces, vértices e arestas de cada poliedro? Observe o quadro e tente identificá-la.

b) Expresse essa relação em forma de equação.

ALGUMAS DESCOBERTAS

1. Construir hexágonos e octógonos com dobraduras. Utilizando estes polígonos é possível construir o vértice de algum poliedro regular?

2. Justificar porque conseguiu, ou não, fazer estas construções.

_____

_____

3. Tomando a construção anterior e as respostas do quadro, sobre a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice, o que você pode afirmar?

_____
_____
_____
_____
_____
_____

CONSTRUÇÃO DE VÉRTICES DE POLIEDROS UTILIZANDO DIFERENTES POLÍGONOS

1. Construir vértices de poliedros utilizando os diferentes módulos confeccionados. Quais combinações foram possíveis fazer? Descrever cada vértice construído.

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

2. É possível construir poliedros com esses vértices, mantendo a propriedade de que todos os vértices sejam iguais, isto é, tenham os mesmos polígonos? Descrever os poliedros construídos.

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Esses sólidos construídos são chamados de *poliedros de Arquimedes* ou *poliedros semi-regulares.*

3. Quais as semelhanças entre esses sólidos e os sólidos platônicos?

_____
_____

4. Observando os poliedros construídos escrever uma definição para *poliedros de Arquimedes.*

_____
_____
_____
_____

POLIEDROS DE ARQUIMEDES

Sólidos de Arquimedes	v	a	f3	f4	f5	f6	f8	f10	Configuração do vértice
Tetraedro truncado	12	18	4	-	-	4	-	-	(3,6,6)
Cubo truncado	24	36	8	-	-	-	6	-	(3,8,8)
Octaedro truncado	24	36	-	6	-	8	-	-	(4,6,6)
Cuboctaedro	12	24	8	6	-	-	-	-	(3,4,3,4)
Rombicuboctaedro	24	48	8	18	-	-	-	-	(3,4,4,4)
Cuboctaedro truncado	48	72	-	12	-	8	6	-	(4,6,8)
Cubo achatado	24	60	32	6	-	-	-	-	(3,3,3,3,4)
Dodecaedro truncado	60	90	20	-	-	-	-	12	(3,10,10)
Icosaedro truncado	60	90	-	-	12	20	-	-	(5,6,6)
Icosidodecaedro	30	60	20	-	12	-	-	-	(3,5,3,5)
Rombicosidodecaedro	60	120	20	30	12	-	-	-	(3,4,5,4)
Icosidodecaedro truncado	120	180	-	30	-	20	-	12	(4,6,10)
Dodecaedro achatado	60	150	80	-	12	-	-	-	(3,3,3,3,5)

- v = #vértices
- a = #arestas
- fn = #faces representadas por polígonos de n lados

CALEIDOSCÓPIOS

Os caleidoscópios são instrumentos formados pela articulação de dois ou mais espelhos, devidamente ajustados, de modo a fornecer imagens repetidas e perfeitas. “A combinação de espelhos produz o efeito da multiplicação da imagem, criando uma rede de imagens formadas pela conexão entre o ângulo dos espelhos e o número de imagens formadas.” (BATISTELA, 2005, p. 34)

Seu nome é derivado do grego, *kalos* (belo), *eidos* (aspecto) e *skopien* (ver) é, essencialmente, um dispositivo geométrico que produz formas pela reflexão simétrica.

O ajuste dos espelhos dos caleidoscópios é dado conforme o estudo que se pretende praticar e os objetos a visualizar. Assim, podemos ter caleidoscópios Planos ou caleidoscópios Generalizados. A descrição da construção e utilização dos caleidoscópios Planos pode ser encontrada em Murari (1999), Almeida (2003), Martins (2003) e Batistela (2005). Aqui faremos uma descrição simplificada dos caleidoscópios Generalizados.

CALEIDOSCÓPIOS GENERALIZADOS

Se considerarmos um conjunto de três espelhos triangulares planos, sendo um horizontal ao plano, e os outros dois articulados de maneira a formarem uma pirâmide triangular (aberta na base), tais espelhos se constituirão num triedro de espelhos. Assim, temos três ângulos diedrais que são $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$ e que determinarão a posição de cada espelho, para formar o caleidoscópio Especial ou Generalizado.

Desde que, para espelhos planos, um objeto e imagem são eqüidistantes do plano do espelho, pode-se concluir que todas as imagens de um ponto no *caleidoscópio generalizado* pertencem a uma esfera, cujo centro é o

ponto de intersecção dos planos dos três espelhos. Sobre a esfera, estes planos cortam-se formando um triângulo esférico, de ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$.

O resultado das reflexões dos espelhos do triângulo esférico é a divisão da esfera toda em uma rede de tais triângulos, contendo imagens de qualquer objeto colocado dentro do primeiro triângulo. Tomando o raio da esfera como unitário, a área da esfera é 4π, enquanto que a área de cada triângulo é $\left(\frac{\pi}{l}\right)+\left(\frac{\pi}{m}\right)+\left(\frac{\pi}{n}\right)-\pi$. Dessa forma, temos: $\frac{4\pi}{\pi(1/l+1/m+1/n-1)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1 > 0$ cujo conjunto solução são as ternas (2,2,n), (2,3,3), (2,3,4) e (2,3,5).

Neste caso temos três tipos de caleidoscópios bem definidos e um que varia conforme o valor atribuído a *n*. Suas construções devem ser feitas observando-se que os ângulos são as medidas dos lados do triângulo esférico de ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m} e \frac{\pi}{n}$. Dos casos em que os valores estão definidos temos, então, os ângulos respectivos $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$, os quais irão determinar a maneira como os espelhos deverão ser cortados para a formação dos caleidoscópios generalizados que, no caso, são: (54°44', 54°44', 70°32'); (35°16', 45°, 54°44') e (20°54', 31°43', 37°23').

Os ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ externos (diedrais) correspondentes são:

- para a terna (*l,m,n*) = (2,3,3), temos os ângulos $\hat{A}$ = 90°; $\hat{B}$ = 60° e $\hat{C}$ = 60°;
- para a terna (*l,m,n*) = (2,3,4), temos os ângulos $\hat{A}$ = 90°; $\hat{B}$ = 60° e $\hat{C}$ = 45° e
- para a terna (*l,m,n*) = (2,3,5), temos os ângulos $\hat{A}$ = 90°; $\hat{B}$ = 60° e $\hat{C}$ = 36°.

Apresentamos também duas das formas possíveis obtidas da terna (2, 2, n). Para *n*=1 e *n*=2, teremos, respectivamente, os ângulos externos ($\hat{A}, \hat{B} e \hat{C}$ **)** com valores (90°, 90°, 180°) e (90°, 90°, 90°). Os ângulos internos ($\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$), obtidos pela lei dos cossenos, valem para *n*=1 $\Rightarrow$ (90°, 90°, 180°) e *n*=2 $\Rightarrow$ (90°, 90°, 90°).

CONSTRUÇÃO DE DOBRADURAS PARA VISUALIZAÇÃO DOS POLIEDROS

Nesse estudo estamos utilizamos os caleidoscópios Generalizados para visualizar os *poliedros regulares e semi-regulares*, faremos isso por meio da construção de dobraduras que quando colocadas entre o ângulo sólido formado pelos três espelhos, permitirá a visualização do poliedro escolhido.

As dobraduras

> para visualização dos poliedros devem ser construídas apropriadamente, para que apenas os pontos vértices dos poliedros estejam sobre a esfera. Assim, na sua construção, há necessidade de atentar para os polígonos que formam o poliedro. Tais polígonos, quando desenhados, farão parte da dobradura planificada. Esta passará por dobras e recortes para um ajuste perpendicular dos lados da mesma aos espelhos, e, consequentemente, para gerar o visual perfeito do poliedro. (BATISTELA, 2005, p. 110)

Nem todos esses poliedros podem ser visualizados em caleidoscópios. Se forem inflados, os poliedros gerarão tesselações esféricas em suas superfícies. Somente quando essas tesselações apresentam linhas de simetria é que podemos construir as dobraduras para que os poliedros sejam vistos nos espelhos.

Apresentamos o passo a passo a construção gráfica com o software Cabri-géometrè II de duas dobraduras que possibilitam a visualização dos poliedros semi-regulares: (3,4,5,4) o *Rombicosidodecaedro* e (4,6,8) o *Cuboctaedro truncado.*

Construção da dobradura para visualização do sólido (4,6,8) com o software Cabri-géometrè II

Para construção dessa dobradura os seguintes passos devem ser seguidos (construção feita por Batistela, 2005):

1) Construir um octógono regular (polígono regular). Nomear o ponto central como *O"* (rótulo).

2) A partir da base do octógono, indicada por *AB*, desenhar um quadrado. Para isso traçar a reta *s* perpendicular ao lado *AB* por *A* e a reta *t*, perpendicular a *AB* por *B* (reta perpendicular). Fazer duas circunferências de raio *AB*: uma com centro em *A* e outra com centro em *B* (circunferência). Determinar os pontos *D* e *C*, respectivamente, sobre as retas *s* e *t*. unir os ponto *A, B, C* e *D* (polígono) para obter o quadrado *ABCD.*

3) Construir duas circunferências com raio *AB* e centros em *B* e *C* (circunferência), para obter o ponto fora do quadrado, na interseção das duas circunferências, que deve ser rotulado por *O'* (rótulo). Fazer uma circunferência de centro *O'* e raio *O'B* para obter os ponto *L* e *P* (rótulo). Construir outras duas circunferências com centros, agora em *L* e *P* e raio *AB=O'L=O'P*, para obter os pontos *M* e *N,* que são também vértices do hexágono regular de centro *O'* . Unir os pontos *B, L, M, N, P e C* com a ferramenta polígono para obter o hexágono.

4) Obter o ponto médio do lado *AB* do quadrado (ponto médio). Construir a reta *u* passando pelo ponto *O"* do octógono e pelo ponto médio encontrado (reta). Construir o simétrico do hexágono em relação à reta *u* (simetria axial). Rotular como *O* , o ponto simétrico do centro do hexágono.

5) Unir *O* a *O'* (segmento) e a partir de *O*, *O'* e *O"* ; baixar as perpendiculares aos lados dos polígonos, contendo os vértices *A* e *B* (reta perpendicular), obtendo os pontos *E, F, G* e *H.*

A figura geométrica formada pelos polígonos *BAGO"HB* e *OO"FBAEO* é a planificação da dobradura. Depois de recortada, é preciso unir, por exemplo, através de uma fita adesiva) *G* a *E* e *H* a *F* para que a dobradura se ajuste perfeitamente aos espelhos.

O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 60°).

Construção da dobradura para visualização do sólido (3,4,5,4) com o software Cabri-géometrè II

Para construção dessa dobradura os seguintes passos devem ser seguidos (construção feita pro Batistela, 2005):

1) Construir um pentágono regular *ABCDE* (polígono regular), e nomear o centro deste por *Q* (rótulo).

2) A partir dos lados *AB* e *AE* do pentágono, construir dois quadrados. Traçar as retas *s, t, u* e *v* perpendiculares aos respectivos lados pelos pontos *A, B* e *E* (reta perpendicular). Fazer duas circunferências com raio *AB* e centros em *A* e *B* para determinar os pontos nomeados por *F, I* e *G* (ponto e rótulo) sobre as retas *u, v* e *t*, respectivamente. Com raio *AE* e centro em *E*, fazer uma circunferência para obter *H* (ponto e rótulo) sobre a reta *s*. unir os pontos *A, B, I, F* e *A*; e depois *A, G, H, E* e *A* (polígono) para obter os quadrados de centro *P* e *O* (ponto e rótulo). Os centros dos quadrados são obtidos pela interseção de suas diagonais.

3) A partir do vértice *A* e do lado *AG* do quadrado de centro *O,* construir o triangulo eqüilátero ΔAGR de centro *T*; onde o ponto *R* é determinado pela interseção das circunferências de raio *AG* com centro em *A* e em *G* (circunferência, ponto e polígono); e o centro *T* é obtido pela interseção das bissetrizes do ΔAGR (bissetriz, ponto e rótulo).

4) Encontrar os pontos médios de *AF* e de *AR*, rotulando-os como *M e N* (ponto médio e rótulo).

5) Com a ferramenta (polígono) unir os pontos *A,M, P, Q, A e A, t, N, A,* para traçar a dobradura procurada.

6) Usando a ferramenta (preencher) pode-se colorir as partes dos polígonos que formam a dobradura.

Recortar, colar e dobrar a construção feita para que todos os seus lados fiquem perpendiculares a todos os espelhos. O visual desse poliedro é fornecido pelo caleidoscópio Generalizado de ângulos (90°, 60°, 36°).

Atividade:

De posse dos poliedros construídos, observar as linhas de simetria traçadas neles e fazer conjeturas sobre quais seriam as porções que quando colocadas no interior dos caleidoscópios poderiam fornecer o visual desses poliedros.

Com auxílio do software Cabri-géometrè II, construir essas dobraduras.

Descrever os passos seguidos.

BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, S. T. de. **Um Estudo de Pavimentação do Plano Utilizando Caleidoscópios e o Software Cabri Géometrè II.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) IGCE – UNESP, Rio Claro, 2003.

BALL, W. W. R.; COXETER, H. S. M. **Mathematical recreations and essays**. 13. ed. New York: Dover, 1987.

BATISTELA, R. **Um Kit de Espelhos Planos para o Ensino de Geometria.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) IGCE – UNESP, Rio Claro, 2005.

BUSKE, N. e MURARI, C. **Dobraduras para Visualização do Cubo em Caleidoscópios.** Anais do III Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Comunicação Científica. ULBRA – Canoas, 2005.

COLLI, E. **Poliedros**. Disponível em: Incubadora FAPESP http://matemateca.incubnadura.fapesp.br/portal/textos/matemateca/poliedros/Poliedros.pdf Acesso em: fevereiro de 2006.

FRANCO, B. **Unfolding Mathematics with Unit Origami.** Emerville, CA: Key Curriculum Press, 1999.

IMENES, L. M. **Vivendo a Matemática:** Geometria das dobraduras. São Paulo: Scipione, 1988.

KASAHARA, K. **Origami Omnibus.** Paper folding for everybody. 20. ed. Tokyo, New York: Japan Publications, 2005.

MARTINS, R. A. **Ensino-Aprendizagem de Geometria:** Uma proposta fazendo uso de caleisdoscópios, sólidos geométricos e *softwares* educacionais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) IGCE – UNESP, Rio Claro, 2003.

MURARI, C. **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**. 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) IGCE - UNESP, Rio Claro, 1999.

NIELSEN. K. L. **Modern Trigonometry**. New York: Barnes and Noble, 1966.

O'DAFFER, P. G. and CLEMENS, R.S. **Geometry:** An investigative Approach. California: Addison-Wesley, 1977.