

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HUDSON VINICIUS DE ALMEIDA SILVA

**Geradores do grupo de Poincaré para tensores e espinores-tensores de ordem
arbitrária**

Guaratinguetá

2024

Hudson Vinicius de Almeida Silva

Geradores do grupo de Poincaré para tensores e espinores-tensores de ordem arbitrária

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física Bacharelado da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física Bacharelado .

Orientador: Profº Dr. Elias Leite Mendonça

Guaratinguetá

2024

S586g	Silva, Hudson Vinicius de Almeida Geradores do grupo de Poincaré para tensores e espinores-tensores de ordem arbitrária / Hudson Vinicius de Almeida - Guaratinguetá, 2024. 64 f : il. Bibliografia: f. 61-62 Trabalho de Graduação em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025. Orientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça 1. Física de spin elevado. 2. Mecânica clássica. 3. Poincaré, Séries de. I. Título. CDU 530.145
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HUDSON VINICIUS DE ALMEIDA SILVA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA
BACHARELADO "

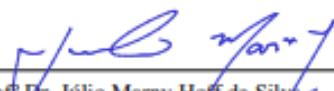
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA BACHARELADO

Profº Dr. Elias Leite Mendonça
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
gov.br ELIAS LEITE MENDONÇA
Data: 13/01/2025 14:42:35-0300
Verifique em <https://validar.fg.gov.br>

Profº Dr. Elias Leite Mendonça
Orientador/UNESP-FEG


Profº Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
UNESP-FEG


Profº Dr. Denis Dalmazi
UNESP-FEG

Novembro , 2024

DADOS CURRICULARES

HUDSON VINICIUS DE ALMEIDA SILVA

NASCIMENTO 10 de abril de 2000 - Guaratinguetá / SP

FILIAÇÃO Edson Valdevino da Silva
Geralda Sueli de Almeida

2021 / 2024 Bacharel em Física
UNESP

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Sueli por sempre me apoiar e incentivar aos estudos, e ao meu pai Edson pelo apoio. Vocês tornaram tudo isso possível.

Ao meu orientador Elias que me guia desde o início do curso, agrago não só por esse projeto, mas também por todas as oportunidades que me deu e por me mostrar o que é ser um bom pesquisador.

Um agradecimento especial a todos os meus professores que contribuíram com a minha formação. Em particular agradeço aos professores Júlio Marny Hoff e Willian Chiappim pelas muitas horas de conversas e todos os conselhos, vocês são inspirações de profissionais para mim.

Por fim, gostaria de agradecer a minha companheira de estudos Maria Isabel Iguti pelas muitas e muitas horas de estudos e por todas as conversas, com certeza aprendemos muito um com o outro.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Projeto: 22/14185-1)

“We are in the position of a little child entering a huge library whose walls are covered to the ceiling with books in many different tongues. The child does not understand the languages in which they are written. He notes a definite plan in the arrangement of books, a mysterious order which he does not comprehend, but only dimly suspect“
(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho, lidamos com duas frentes distintas das teorias de *higher spin*. Na primeira parte, nos concentramos em teorias spin alto massivas, nos valendo das propriedades algébricas do grupo de Poincaré. Derivamos as formas explícitas dos geradores do grupo de Poincaré $ISO(3, 1)$ e $ISO(2, 1)$, que atuam sobre tensores e espinores-tensores de ordem arbitrária, partindo de primeiros princípios. Com esses geradores conseguimos construir os operadores de casimir da álgebra de Poincaré, $iso(3, 1)$ e $iso(2, 1)$, e suas respectivas equações de autovalor. Das equações de autovalor, foi possível obter os vínculos de Fierz-Pauli, de maneira independente de modelo, em $D = 3 + 1$ dimensões para spin-5/2, 3 e 4, e em $D = 2 + 1$ dimensões para helicidades-5/2, 3 e 4. Já na segunda parte do trabalho, nos voltamos a teorias de spin alto não massivas. Apresentamos as equações de Fronsda e Fang-Fronsda, como generalizações das teorias de calibre de spin baixo, exibimos suas simetrias e construímos ações invariantes de calibre das quais pudéssemos derivar tais equações. Por fim, destacamos a formulação de Francia e Sagnotti para lidar com teorias de spin. Tal formalismo permite lidar com teorias de calibre sem restrições, diferente dos casos de Fang e Fronsda, no qual há restrições sobre os campos e parâmetros de calibre. Por meio de uma proposta alternativa, conseguimos recuperar os resultados por eles obtidos para uma teoria de spin-5/2.

PALAVRAS-CHAVE: Teorias de spin alto; Geradores do grupo de Poincaré; Vínculos de Fierz-Pauli; Equação de Fang-Fronsda; Teorias não locais.

ABSTRACT

In this work, we deal with two distinct fronts of higher spin theories. In the first part, we focus on massive high spin theories, making use of the algebraic properties of the Poincaré group. We derive the explicit forms of the Poincaré group generators $ISO(3, 1)$ and $ISO(2, 1)$, which act on tensors and spinor-tensors of arbitrary order, starting from first principles. With these generators we were able to construct the Casimir operators of the Poincaré algebra, $iso(3, 1)$ and $iso(2, 1)$, and their respective eigenvalue equations. From the eigenvalue equations, it was possible to obtain the Fierz-Pauli constraints, in a model-independent way, in dimensions for spin-5/2, 3 and 4, and dimensions for helicities-5/2, 3 and 4. In the work's second part, we turn to non-massive high spin theories. We present the Fronsdal and Fang-Fronsdal equations as generalizations of low spin gauge theories, exhibit their symmetries, and construct gauge invariant actions from which we could derive such equations. Finally, we highlight Francia and Sagnotti's formulation to deal with spin theories. Such formalism allows us to deal with gauge theories without restrictions, unlike the cases of Fang and Fronsdal, in which there are restrictions on gauge fields and parameters. Through an alternative proposal, we were able to recover the results they obtained for a spin-5/2 theory.

KEYWORDS: Higher spin theories; Poincaré group generators; Fierz-Pauli constraints; Fang-Fronsdal equation; Nonlocal theories.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	ONDE ESTÃO OS <i>HIGHER SPIN</i> ?	13
1.2	LINHA HISTÓRICA DA TEORIA DE <i>HIGHER SPIN</i>	13
2	RELATIVIDADE RESTRITA: UMA BREVE REVISÃO	14
2.1	MECÂNICA CLÁSSICA	14
2.2	RELATIVIDADE RESTRITA	14
2.2.1	Quadrivetores	17
2.2.2	Transformações de Poincaré	18
3	GRUPO DE POINCARÉ	21
3.1	TEORIA DE GRUPOS	21
3.2	GRUPOS DE LIE	23
3.2.1	Grupo $SO(3)$	24
3.3	GRUPO DE LORENTZ	25
3.4	GRUPO DE POINCARÉ	26
3.5	REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DO GRUPO DE LORENTZ	29
3.5.1	Equação de Dirac	29
3.5.2	Covariância da equação de Dirac	30
4	GERADORES DO GRUPO DE POINCARÉ	33
4.1	TENSOR ARBITRÁRIOS DE ORDEM S EM $D = 3 + 1$	33
4.1.1	Translações espaço-temporais	33
4.1.2	Transformações de Lorentz	34
4.2	ESPINORES-TENSORES DE ORDEM S EM $D = 3 + 1$	35
4.2.1	Translações espaço-temporais	35
4.2.2	Transformações de Lorentz	35
4.3	OPERADORES DE CASIMIR DA $ISO(3,1)$	36
4.3.1	Casimirs para tensores de ordem s	37
4.3.2	Casimirs para espinores-tensores de ordem s	40
4.4	GRUPO DE POINCARÉ $ISO(2,1)$	42
4.4.1	Tensores e espinores-tensores de ordem s em $D = 2 + 1$	42
4.4.2	Operadores de Casimir da $iso(2,1)$	43
5	VÍNCULOS DE FIERZ-PAULI A PARTIR DA ÁLGEBRA	45
5.1	SPIN-5/2	45
5.1.1	Spin-5/2 em $D = 3 + 1$:	46
5.1.2	Helicidade-5/2 em $D = 2 + 1$	46

5.2	SPIN-3	47
5.2.1	Spin-3 em $D = 3 + 1$	47
5.2.2	Helicidade-3 em $D = 2 + 1$	49
5.3	SPIN-4	49
5.3.1	Spin-4 in $D = 3 + 1$	49
5.3.2	Helicidade-4 em $D = 2 + 1$	51
6	UMA INTRODUÇÃO ÀS TEORIAS DE <i>HIGHER SPIN</i> NÃO MASSIVAS	52
6.1	FORMALISMO LAGRANGIANO	52
6.2	CAMPOS BOSÔNICOS	54
6.2.1	Equação de Fronsda l	54
6.2.2	Ação de Fronsda l	56
6.3	CAMPOS FERMIÔNICOS	57
6.4	TEORIAS DE <i>HIGHER SPIN</i> NÃO LOCAIS	58
6.4.1	Recuperando ações não locais - spin-5/2	59
7	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A – CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE: CASO BOSÔNICO	64

1 INTRODUÇÃO

O estudo de teorias de *Higher Spin* é algo que vai bem além de um trabalho de graduação, como o presente trabalho. Sendo assim, este trabalho segue um roteiro, o qual explicarei a seguir, com o intuito de mitigar lacunas relacionadas as teorias básicas.

Iniciamos este trabalho falando sobre a não observação de partículas fundamentais de spins maiores que $3/2$, mesmo havendo a possibilidade teórica de existência das mesmas. Damos então um panorama histórico sobre o estudo de teorias de spin mais altos ao longo do século vinte, desde sua primeira proposta dada por Dirac em 1936 até a incorporação de conceitos geométricos nas teorias de spin alto, iniciadas por de Wit e Freedman.

No capítulo 2 se inicia uma revisão da mecânica clássica, para uma posterior introdução a relatividade restrita, na qual surgem naturalmente as transformações de Poincaré. Tais transformações constituem um grupo, sendo assim no capítulo 3 se inicia uma introdução à teoria de grupos e grupos de Lie, onde é feito inclusive um estudo do grupo $SO(3)$ como exemplo elucidativo. Passamos então aos grupos de Lorentz $SO(3, 1)$ e Poincaré $ISO(2, 1)$, onde obtemos a álgebra de Lie do grupo de Poincaré $\mathfrak{iso}(3, 1)$.

O capítulo 4 é dedicado à obtenção da forma explícita dos geradores do grupo de Poincaré, iniciando com os geradores que atuam sobre tensores de rank- s arbitrário, seguido da obtenção dos geradores que atuam sobre espinores-tensores de rank- s . Feito isso, introduzimos os operadores de Casimir do grupo de Poincaré, P^2 e W^2 , assim como suas equações de autovalor e então obtemos suas formas explícitas tanto para o caso espinorial quanto para o caso tensorial. Até então tudo havia sido feito considerando um espaço-tempo de $D = 3 + 1$ dimensões, fizemos então uma readaptação dos resultados para $D = 2 + 1$ dimensões, onde todas as expressões obtidas anteriormente se simplificam consideravelmente.

O capítulo 5 é motivado pelo trabalho (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016) no qual os autores obtêm os chamados vínculos de Fierz-Pauli, diretamente das equações de autovalor dos Casimirs do grupo de Poincaré, para campos de spin- $1/2$, 1 , $3/2$ e 2 . Fazemos uma extensão desses resultados para os casos de spin- $5/2$, 3 e 4 , tanto em $D = 3 + 1$ como em $D = 2 + 1$ dimensões.

Por fim, no capítulo 6 lidamos com teorias de calibre não massivas de spin alto. Começamos esse capítulo fazendo uma revisão do formalismo lagrangiano. Apresentamos então as teorias de Fronsdal e Fang-Fronsdal, como generalizações das teorias de calibre de spin baixo. Apresentamos suas simetrias de calibre e construímos ações invariantes de calibre, escritas em termos de objetos geométricos. Citamos então a formulação de Francia e Sagnotti para teorias de *higher spin*, na qual as teorias de Fronsdal e Fang-Fronsdal acabam sendo fixações de calibre dessas. Para finalizar, reobtemos uma lagrangiana não local de uma teoria de spin- $5/2$, originalmente obtida por Francia, por meio de redefinições de campos.

1.1 ONDE ESTÃO OS *HIGHER SPIN*?

Um marco notável na fundamentação da teoria quântica de campos é dado pela conexão entre estados de uma partícula e as representações unitárias, irredutíveis do grupo de Poincaré, no contexto de um espaço-tempo plano, o espaço de Minkowski. Vamos analisar essas palavras uma a uma: a unitariedade é imprescindível para englobar um princípio básico da mecânica quântica, a conservação da probabilidade, a irredutibilidade se deve à natureza elementar da partícula e o grupo de Poincaré está presente para que os princípios da relatividade especial possam ser incorporados. Todas essas ideias são conectadas a partir de um teorema chave na fundamentação da teoria quântica de campos, o teorema de Wigner, no qual Wigner propõe uma maneira de classificar partículas elementares. Esse teorema atesta que os números quânticos básicos de uma partícula elementar são massa e spin, como consequência temos que as partículas/campos podem ser massivos ou não massivos, possuir spin-0, 1, 2,... para partículas bosônicas e spin-1/2, 3/2, 5/2,... para partículas fermiônicas. A questão é que o modelo padrão da física de partículas requer apenas campos de spin-0, 1/2 e 1 para explicar toda a física, a exceção da gravidade que por exemplo nas equações de campo de Einstein é descrita por um campo de spin-2. Então surge naturalmente a pergunta "Onde estão os spin mais altos?", os chamados *higher spins*.

1.2 LINHA HISTÓRICA DA TEORIA DE *HIGHER SPIN*

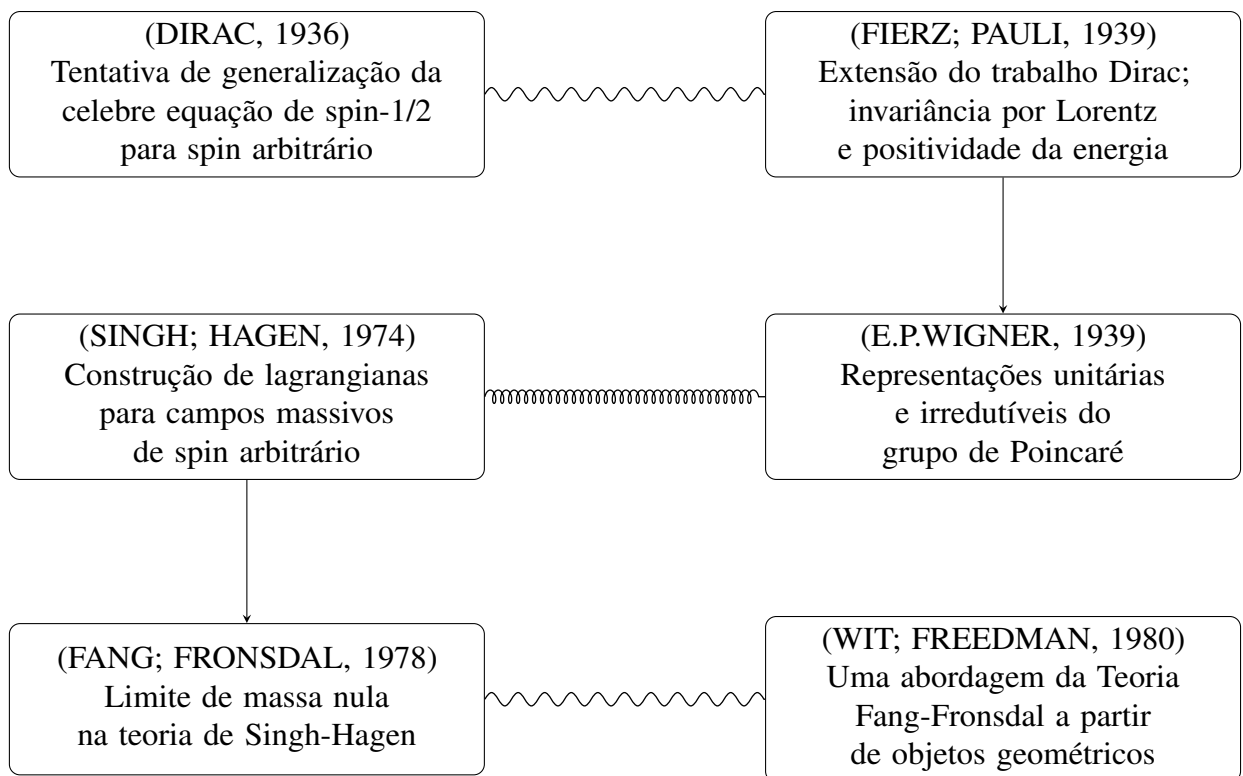


Figura 2 – Linha histórica da teoria de higher spin. Imagem fornecida pelo próprio autor.

2 RELATIVIDADE RESTRITA: UMA BREVE REVISÃO

2.1 MECÂNICA CLÁSSICA

Consideremos dois referenciais S e S' , com S' se movendo com velocidade constante u em relação a S com origens no mesmo ponto no instante $t = 0$. A relação entre as coordenadas dos referenciais S e S' , serão dadas por:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t, \quad (2.1)$$

$$t' = t. \quad (2.2)$$

As transformações (2.1) e (2.2), são conhecidas com transformações de Galileu, que desempenham um importante papel na mecânica newtoniana. Uma característica evidente dessas transformações é que o tempo é considerado uma grandeza absoluta, i.e., intervalos de tempo medidos em diferentes referenciais são iguais.

Diferenciando (2.1) com respeito ao tempo, resulta em:

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

e agora diferenciando esta última novamente em relação ao tempo, obtemos:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}}, \quad (2.4)$$

ou seja, as acelerações medidas em ambos os referenciais são as mesmas. Com esse resultado em mãos, podemos olhar para a segunda lei de Newton. No referencial S :

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (2.5)$$

e no referencial S' :

$$\mathbf{F}' = m\ddot{\mathbf{r}}' = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (2.6)$$

Concluimos portanto, que a segunda lei de Newton é invariante perante a transformações de Galileu.

2.2 RELATIVIDADE RESTRITA

Na mecânica clássica é de costume escrever a força de interação em termos da energia potencial V como, $\mathbf{F} = -\nabla V$. Em geral, a energia potencial é independente do tempo, só dependendo das coordenadas espaciais, i.e, $V = V(\mathbf{r})$. Logo, na mecânica newtoniana uma força pode mudar instantaneamente pela simples mudança na posição em um dado instante, o que está em desacordo com resultados experimentais que sugerem que nenhum

efeito pode se propagar mais rápido que a velocidade da luz no vácuo, c , e que esta, por sua vez, é uma constante universal que independe do referencial. Além disso, esse último resultado contradiz a lei de composição de velocidades (2.3).

Um outro contraponto, é que diferente da mecânica clássica, as equações de Maxwell não são invariantes por transformações de Galileu. Com base nesses resultados, devemos buscar novas transformações de simetria e reformular a mecânica. Há um conjunto de transformações que garantem a invariância das equações de Maxwell. Considerando os mesmos sistemas de referência anteriores, S e S' , mas por facilidade tomando $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$, temos:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} ; \\ y' &= y ; \\ z' &= z ; \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \end{aligned} \quad (2.7)$$

como sendo transformações que deixam as equações de Maxwell invariantes. Essas transformações são conhecidas como transformações de Lorentz. Perceba que no regime de baixas velocidades, i.e, para $|v| \ll c$, recuperamos as transformações de Galileu. Ademais, essas transformações misturam espaço e tempo, ou seja, essas grandezas não são mais absolutas.

Podemos agora introduzir a Relatividade Especial, com dois postulados:

- i.* As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- ii.* A velocidade da luz no vácuo, c , é a mesma em todos os referenciais e em todas as direções.

O postulado (*i*) é conhecido como princípio da relatividade e (*ii*) como princípio da constância da velocidade da luz.

Vejamos quais as consequências desses postulados. Consideremos, no referencial S , um sinal enviado na velocidade da luz, de um ponto (x_1, y_1, z_1) no instante t_1 e recebido no ponto (x_2, y_2, z_2) no instante t_2 . Como o sinal se propaga com velocidade c , temos:

$$c^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} , \quad (2.8)$$

podemos a partir dessa expressão, escrever o seguinte intervalo no referencial S :

$$\Delta s = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 . \quad (2.9)$$

Esse mesmo sinal observado a partir do referencial S' , partiria do ponto (x'_1, y'_1, z'_1) no instante t'_1 e atingiria o ponto (x'_2, y'_2, z'_2) no instante t'_2 . Logo, em S' teremos o intervalo:

$$\Delta s' = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Considerando os pontos muito próximos, o intervalo (2.9) se reduz a:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad . \quad (2.11)$$

Como vimos $ds = 0$ em S e $ds' = 0$ em S' , logo $ds^2 = a ds'^2$, onde a é uma constante de proporcionalidade, na verdade $a = 1$, como mostrado por (LANDAU, 2013). Portanto, $ds'^2 = ds^2$, i.e, o intervalo é invariante pela transformação que relaciona os referências. Podemos imaginar esse intervalo como sendo a distância entre dois pontos num espaço quadridimensional com coordenadas dadas por (ct, x, y, z) e denotá-las por x^μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$, assim:

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z \quad . \quad (2.12)$$

Vamos definir a seguinte matriz:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.13)$$

e denotar seus elementos por $\eta_{\mu\nu}$. Nessa nova notação, nosso intervalo ds^2 pode ser escrito de maneira compacta:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^4 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.14)$$

Daqui em diante usaremos a notação de Einstein para soma, na qual índices repetidos em cima e em baixo indicam soma. Dessa maneira, podemos escrever ds^2 , simplesmente como sendo:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad . \quad (2.15)$$

O conjunto das 4-upla $(ct, x, y, z) \in \mathbb{R}^{3+1}$ compõem um espaço vetorial real quadridimensional. Os elementos $\eta_{\mu\nu}$ compõem a chamada métrica de Minkowski, o conjunto anterior endossado com essa métrica forma o chamado espaço de Minkowski. Esse é o espaço onde a relatividade especial se desenvolve.

2.2.1 Quadrivetores

Consideremos uma transformação (não singular) de S para S' que relacione x^μ e x'^μ , teremos assim:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad . \quad (2.16)$$

As quantidades que se transformam como (2.16) são chamadas de quadrivetores contravariantes. Consideremos agora um campo escalar $\phi(x)$, onde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Uma característica desse tipo de campo é que ele apresenta o mesmo valor em qualquer sistema de referência, ou seja,

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad , \quad (2.17)$$

derivando este campo com relação a x^μ :

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \quad . \quad (2.18)$$

As quantidades transformadas como $\partial \phi' / \partial x'^\mu$ são chamados de quadrivetores covariantes. Nesse sentido, quadrivetores contravariantes e covariantes, são quantidades que se transformam, respectivamente, como:

$$V^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad ; \quad (2.19)$$

$$V_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad . \quad (2.20)$$

Esses dois tipos de vetores são relacionados pela métrica:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad e \quad V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \quad (2.21)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ designa os elementos da matriz η^{-1} que é igual a própria matriz η . Em outras palavras, a métrica sobe e desce índices.

Podemos também definir tensores contravariantes, covariantes e mistos. Considere os objetos transformados como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \quad ; \quad (2.22)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad ; \quad (2.23)$$

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T^\alpha{}_\beta \quad ; \quad (2.24)$$

esses são chamados, respectivamente, de tensores de segunda ordem contravariantes, covariantes e mistos (misturas ambos os tipos). Nesse sentido, podemos definir tensores de ordem arbitrária, $T^{\mu\nu\dots\rho}$.

Vamos citar algumas propriedades dos tensores que serão importantes no decorrer do

trabalho. Um tensor é dito simétrico se:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad , \quad (2.25)$$

e antissimétrico se:

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \quad . \quad (2.26)$$

Perceba que a métrica de Minkowski é um tensor simétrico, um outro tensor simétrico de suma importância é o chamado delta de Kronecker:

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.27)$$

Note que $\eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$.

Podemos também definir o produto escalar entre dois quadrivetores:

$$V \cdot U = V^{\mu}U_{\mu} = V^0U_0 + V^1U_1 + V^2U_2 + V^3U_3, \quad (2.28)$$

esse produto é um invariante pelas transformações de coordenada, pois:

$$\begin{aligned} V'^{\mu}U'_{\mu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} V^{\alpha}U_{\beta} \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} V^{\alpha}U_{\beta} \\ &= \delta_{\alpha}^{\beta} V^{\alpha}U_{\beta} \\ &= V^{\alpha}U_{\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2.2 Transformações de Poincaré

Voltemos ao nosso intervalo invariante $ds'^2 = ds^2$, no lado esquerdo temos que:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.30)$$

e no lado direito:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.31)$$

logo, pela invariância do intervalo

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} \quad . \quad (2.32)$$

Derivando (2.32) com relação a x^{ρ} :

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} = 0, \quad (2.33)$$

como $\eta_{\alpha\beta}$ é simétrico, podemos permutar os índices α e β no segundo termo:

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\nu} = 0, \quad (2.34)$$

Sabemos de (2.32) que a expressão é simétrica nos índices μ e ν , podemos permutá-los no segundo membro da expressão acima. Feito isso, obteremos:

$$2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = 0, \quad (2.35)$$

como estamos interessados em transformações invertíveis, multipliquemos (2.35) pela transformação inversa e por $\eta^{\alpha\lambda}$, obtemos assim:

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} = 0 \quad (2.36)$$

a solução dessa equação diferencial é a transformação linear:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.37)$$

onde,

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu_\nu. \quad (2.38)$$

As transformações (2.37) são chamadas de transformações de Poincaré, sendo essas as transformações, não singulares, mais gerais possíveis que garantem a invariância de ds^2 . Perceba que a^μ , representa uma translação no vetor x^μ , na ausência de translações ($a^\mu = 0$), temos as chamadas transformações de Lorentz homogêneas ou simplesmente transformações de Lorentz.

Retornando a (2.32) com (2.38), teremos:

$$\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

é possível observarmos uma estrutura de um produto matricial nessa expressão, dado por:

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta, \quad (2.40)$$

onde $\Lambda^\top$ denota a transposição da matriz Λ . Multiplicando (2.40) por η^{-1} à esquerda e por Λ^{-1} à direita, resulta em:

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^\top \eta, \quad (2.41)$$

ou em componentes,

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} (\Lambda^\top)_\alpha^\beta \eta_{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha} \Lambda^\beta_\alpha \eta_{\beta\nu}, \quad (2.42)$$

usando a métrica para subir e descer os índices, temos:

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \quad , \quad (2.43)$$

ou seja, $\Lambda_\nu{}^\mu$ representa a transformação de Lorentz inversa.

Toda essa construção vista até aqui sugere uma estrutura de grupo, à qual iremos nos adentrar no próximo capítulo.

3 GRUPO DE POINCARÉ

A teoria de grupos desempenha um papel fundamental na física, tendo em vista que as principais transformações de simetria constituem um grupo. Nesse capítulo iremos introduzir alguns conceitos das teorias de grupos e de representações que serão necessários no decorrer do trabalho.

3.1 TEORIA DE GRUPOS

Começemos com a definição de grupo:

Definição 3.1.1. *Um conjunto G não vazio, munido de uma operação " $\cdot$ " que associa qualquer par de elementos $a, b \in G$ a um outro elemento de G , ou seja, $a \cdot b \in G$, é denominado grupo se as seguintes propriedades são satisfeitas, para quaisquer $a, b, c \in G$*

- i. Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;*
- ii. Existência da identidade: $\exists e \in G$, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$;*
- iii. Existência do inverso: $\forall a \in G$, $\exists a^{-1}$, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.*

Se além das propriedades anteriores, for cumprida a comutatividade, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G,$$

o grupo é denominado grupo abeliano. Por questão de simplificação vamos omitir o símbolo da operação " $\cdot$ ", exceto quando necessário, isto é, escreveremos ab ao invés de $a \cdot b$.

Por exemplo, o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ inversíveis formam um grupo com respeito ao produto de matrizes. Esse grupo é conhecido como grupo linear geral, denotado por $GL(n, \mathbb{R})$ se as entradas da matriz forem reais e por $GL(n, \mathbb{C})$ se forem complexas. De fato, a multiplicação de matrizes é associativa, a matriz identidade faz o papel de elemento neutro e por definição são matrizes inversíveis.

Definição 3.1.2. *Um subconjunto H do grupo G é dito um subgrupo de G , se H forma um grupo com respeito a mesma operação definida em G .*

Como exemplo temos o conjunto das matrizes $n \times n$ com determinante igual a um, que corresponde a um subgrupo do grupo linear geral. Esse grupo é conhecido como grupo linear especial, e é denotado por $SL(n, \mathbb{R})$ para entradas reais e $SL(n, \mathbb{C})$ para entradas complexas. De fato, SL é um grupo com respeito a multiplicação de matrizes. Uma vez que o determinante do produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes, isto é, $\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2)$, teremos que se $\det(M_1) = 1$ e $\det(M_2) = 1$ então

$\det(M_1 M_2) = 1$. Além disso, como o determinante é não nulo, as matrizes são inversíveis e portanto pertencem a GL .

Devemos falar também da possibilidade de mapeamento entre grupos, que nos leva aos conceitos de homomorfismo e isomorfismo:

Definição 3.1.3. *Um mapeamento de um grupo G em G' é um homomorfismo se a estrutura multiplicativa de ambos os grupos for preservada. Em outras palavras, a função $f : G \rightarrow G'$, deve cumprir:*

$$f(a)f(b) = f(ab),$$

para quaisquer $a, b \in G$. Se a função f for injetora, então o homomorfismo torna-se um isomorfismo.

Duas consequências imediatas da definição anterior são que $f(e) = e'$ (onde e' é o elemento identidade de G') e $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \equiv f^{-1}(a)$.

Os elementos do grupo são entes abstratos, porém podemos torna-los algo concreto como por exemplo mapeando esse grupo num grupo de matrizes. Essa é a ideia da teoria de representação. Se há um homomorfismo de um grupo G em um grupo de operadores lineares $T(G)$ agindo sobre um espaço vetorial V , dizemos que $T(G)$ forma uma representação de G , no espaço das representações V . Em outras palavras, temos o mapeamento:

$$g \in G \mapsto T(g),$$

de forma que,

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2),$$

para todo $g_1, g_2 \in G$.

A dimensão da representação é a mesma do espaço vetorial V . Se considerarmos um espaço vetorial de dimensão n , podemos utilizar matrizes $D(g)$, $n \times n$, ao invés dos operadores $T(g)$. Perceba que um grupo pode ter inúmeras representações, uma vez que a mesma será determinada pela base do espaço vetorial. Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de V , atuando $T(g)$ nos elementos da base, temos um novo vetor que pode ser expandido na base, assim:

$$T(g)e_i = (t_g)^j{}_i e_j, \quad (3.1)$$

$(t_g)^j{}_i$ é o elemento da j -ésima linha e i -ésima coluna, da matriz t_g , que representa o operador $T(g)$ na base $\{e_i\}_{i=1}^n$. O conjunto das matrizes t_g , constitui a representação matricial do grupo G . Como se trata de uma representação, as matrizes herdam a lei de composição do grupo, ou seja, $t_a t_b = t_{ab}$.

A partir de uma dada representação matricial, podemos construir outras representações por meio de transformações de similaridade, uma vez que tais transformações preservam o produto matricial, duas transformações que estão relacionadas por esse tipo de transformação são ditas equivalentes. Considere por exemplo, $D(g)$ e $D'(g)$, duas representações matriciais do elemento g , podemos construir uma nova representação dada pela super

matriz:

$$\begin{pmatrix} D(g) & 0 \\ 0 & D'(g) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

se uma dada representação puder ser trazida para a forma (3.2), por uma transformação de similaridade, então ela é dita ser redutível, caso contrário é dita ser irredutível. Vale salientar que essa não é a definição precisa de irredutibilidade, mas seu reflexo na representação matricial.

3.2 GRUPOS DE LIE

O grupo de Lie possui uma formulação muito sofisticada, já que junta as propriedades de grupos e variedades, a qual foge do escopo desse trabalho. Então vamos fazer uma discussão mais qualitativa desse grupo, nos guiando por meio de exemplos, para que possamos entender propriedades desse tipo de grupo. Basicamente, um grupo de Lie é um grupo infinito em que seus elementos dependem de um número finito de parâmetros, digamos r , que variam continuamente, de modo que a estrutura multiplicativa do grupo é diferenciável.

Como vimos na seção anterior, o grupo pode ser mapeado num grupo de matrizes, ou melhor, representado e isso não é diferente com grupos de Lie. Há caso especial de grupo de Lie, chamado grupo de Lie conexo, no qual todos os elementos do grupo estão conectados ao elemento identidade por meio de um caminho contínuo no espaço do grupo. Seja M uma matriz pertencente a um grupo de Lie conexo, então essa matriz pode ser expressa na forma:

$$M = e^K = I + K + \frac{1}{2!}K^2 + \frac{1}{3!}K^3 + \dots \quad (3.3)$$

onde K é uma matriz que não pertence necessariamente ao grupo. Contudo, o conjunto das matrizes quadradas de ordem N constitui um espaço vetorial de dimensão N^2 . Seja $\{J_a\}$ uma base desse espaço, então qualquer matriz desse espaço pode ser escrito como uma combinação linear das matrizes J_a 's, i.e, $K = r^a J_a$. Desse modo, qualquer matriz do grupo de Lie conexo pode ser parametrizada como:

$$M = \exp[r^a J_a], \quad (3.4)$$

as matrizes J_a são chamadas de geradores do grupo.

Há algo a mais sobre esses geradores, eles constituem um tipo especial de álgebra. Lembremos o que uma álgebra sobre um espaço vetorial: Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Uma operação binária interna definida nesse espaço, ou seja, $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ faz de $\mathbb{V}$ uma álgebra. Por exemplo, no espaço vetorial das matrizes $N \times N$, o produto matricial constitui uma álgebra. A álgebra que estamos interessado é chamada de álgebra de Lie, vejamos a sua definição

Definição 3.2.1. *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de uma*

operação binária

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

i. *é bilinear*:

$$\begin{aligned} [\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \\ [X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha[X, Y] + \beta[X, Z] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii. *antissimétrica*: $[X, Y] = -[Y, X]$

iii. *satisfaz a identidade de Jacobi*: $[X, [Y, Z]] = [Z, [X, Y]] = [Y, [Z, X]] = 0$.

Tais propriedades são satisfeitas pelo comutador $[A, B] = AB - BA$, ou seja, o comutador define uma álgebra de Lie no espaço de matrizes. Os elementos da base do espaço vetorial da álgebra de Lie em questão são chamados de geradores, sua relação de comutação resulta em um vetor que pode ser escrito como combinação linear dos mesmos:

$$[J_a, J_b] = f_{ab}^c J_c, \quad (3.5)$$

os coeficientes f_{ab}^c são chamados de constantes de estrutura.

3.2.1 Grupo $SO(3)$

Como exemplo elucidativo para o que vimos até agora, vamos olhar para o grupo de rotações em três dimensões espaciais, o grupo $SO(3)$, esse grupo é constituído por matrizes R , 3×3 , ortogonais, ou seja, $RR^T = \mathbf{1}$ com determinante igual a um. Por se tratar um grupo de Lie, podemos parametrizar seus elementos como¹:

$$R = \exp[i\theta^a J_a], \quad (3.6)$$

onde J_a 's são os geradores do grupo. Vamos obter a forma explícita dos geradores e a álgebra de Lie associada aos mesmos. Partindo da condição de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \exp[i\theta^a J_a^T] \exp[i\theta^a J_a] \\ &= \left(I + i\theta^a J_a^T + \dots \right) \left(I + i\theta^a J_a + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$= I + i\theta^a \left(J_a^T + J_a \right) + \dots \quad (3.8)$$

para que se cumpra a condição de ortogonalidade é preciso que

$$J_a^T = -J_a, \quad (3.9)$$

¹ A presença da unidade imaginária é um mero comodismo, poderíamos incorporá-la a J_a caso desejássemos.

portanto os geradores J_a são matrizes antissimétricas. Dessa maneira $i\alpha^a J_a$ deve assumir o seguinte formato,

$$i\alpha^a J_a = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

que pode ser escrito como a seguinte combinação linear,

$$i\alpha^a J_a = iaJ_1 + ibJ_2 + icJ_3, \quad (3.11)$$

em (3.11) fica evidente a presença de três parâmetros (a, b, c) e três geradores (J_1, J_2, J_3) , podemos então obter a forma explícita dos geradores

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Essas matrizes respeitam a seguinte *álgebra de Lie*

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (3.13)$$

onde o símbolo de *Levi-civita* faz o papel da constante de estrutura. A álgebra (3.13) é também conhecida como álgebra do momento angular, pois é a mesma álgebra obedecida pelo operador momento angular na mecânica quântica.

3.3 GRUPO DE LORENTZ

Vimos que se uma transformação é dita de Lorentz ela deve respeitar (2.40). Seja L o conjunto das transformações de Lorentz e sejam Λ_1 , Λ_2 e Λ_3 elementos desse conjunto, então:

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^\top \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^\top \Lambda_1^\top \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^\top \eta \Lambda_2 = \eta \quad (3.14)$$

portanto, $(\Lambda_1 \Lambda_2) \in L$. A matriz identidade $\mathbf{I} \in L$, pois satisfaz (2.40). Tomando o determinante de (2.40), teremos:

$$\det(\Lambda^\top \eta \Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda^\top) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta) \Rightarrow \det(\Lambda)^2 = 1$$

$$\therefore \det(\Lambda) = \pm 1 \quad (3.15)$$

sendo assim, existe Λ^{-1} , devemos então verificar se a mesma é uma transformação de Lorentz. Aplicando $(\Lambda^\top)^{-1}$ à esquerda de (2.40) e Λ^{-1} à direita, resulta em:

$$(\Lambda^{-1})^\top \eta \Lambda^{-1} = \eta \quad (3.16)$$

ou seja, $\Lambda^{-1} \in L$. Por fim, lembrando que o produto matricial é associativo, concluímos que L forma um grupo, o chamado grupo de Lorentz, com respeito ao produto matricial.

As matrizes pertencentes a L possuem 16 componentes, contudo a relação (2.39) impõem certas restrições as mesmas. Explicitando a soma em (2.39), temos:

$$-\Lambda^0_{\mu} \Lambda^0_{\nu} + \Lambda^i_{\mu} \Lambda^i_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

tomando $\mu = \nu = 0$, segue que:

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \quad (3.18)$$

como os elementos de Λ são reais, concluímos que:

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^0_0 \leq -1 \quad (3.19)$$

As condições (3.15) e (3.19), nos permite separar L em quatro conjuntos disjuntos, denotados por $L^{\uparrow}_+$, $L^{\downarrow}_+$, $L^{\uparrow}_-$ e $L^{\downarrow}_-$. Os índices + e - se referem ao sinal do determinante de Λ e $\uparrow\downarrow$ a $\Lambda^0_0 \geq 1$ e $\Lambda^0_0 \leq -1$, respectivamente. Dentre esses conjuntos, apenas $L^{\uparrow}_+$ constitui um grupo, o chamado grupo ortócrono próprio, denotado por $SO(3, 1)$.

3.4 GRUPO DE POINCARÉ

Vimos na seção anterior que o conjunto das transformações de Lorentz constituem o grupo de Lorentz. Quando englobamos a essas transformações as traslações espaço-temporais, temos as chamadas transformações de Poincaré. O conjunto das transformações de Poincaré, também constitui um grupo, o chamado grupo de Poincaré. Vamos denotar por $\mathcal{P}$, o conjunto de todas as transformações de Poincaré. Vejamos então como $\mathcal{P}$ constitui um grupo. Como vimos, um elemento $g(\Lambda, a)$, induz no quadrivetor x^μ a transformação:

$$x^\mu \xrightarrow{g} x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu + a^\mu. \quad (3.20)$$

A aplicação de uma segunda transformação $g(\Lambda', a')$ levará a:

$$x'^\mu \xrightarrow{g'} x''^\mu = \Lambda'^\mu_{\nu} (\Lambda^\nu_{\rho} x^\rho + a^\nu) + a'^\mu = \Lambda'^\mu_{\nu} \Lambda^\nu_{\rho} x^\rho + \Lambda'^\mu_{\nu} a^\nu + a'^\mu, \quad (3.21)$$

$\Lambda' \Lambda$ é uma transformação de Lorentz, assim como $\Lambda' a + a'$ é uma nova translação, ou seja, (3.21) também é uma transformação de Poincaré. Podemos então intuir a seguinte lei de composição:

$$g(\Lambda', a') g(\Lambda, a) = g(\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a') \quad (3.22)$$

que usaremos para constatar que $\mathcal{P}$ constitui um grupo.

O elemento identidade de $\mathcal{P}$ é dado por $g(1, 0)$, onde 1 representa $\Lambda^\mu_{\nu} = \delta^\mu_{\nu}$. Sendo

$g^{-1}(\Lambda, a)$ o inverso do elemento $g(\Lambda, a)$, temos assim:

$$g^{-1}(\Lambda, a)g(\Lambda, a) = g(1, 0), \quad (3.23)$$

pela lei de composição (3.22), concluímos que:

$$g^{-1}(\Lambda, a) = g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \quad (3.24)$$

Portanto, o conjunto de todas as transformações de Poincaré constituem um grupo, o chamado grupo de Poincaré, denotado por $ISO(3, 1)$ quando o subgrupo de Lorentz que o constitui é o ortócrono próprio.

De um ponto de vista mais técnico, sobre a ótica da teoria de grupos, o grupo de Poincaré $ISO(3, 1)$ é o produto semi-direto entre o grupo de Lorentz (homogêneo) $SO(3, 1)$ e o grupo de translações $\mathbb{R}^{3,1}$, denotado por $ISO(3, 1) = SO(3, 1) \rtimes \mathbb{R}^{3,1}$. Mais especificamente, o grupo de Poincaré é um grupo de Lie. A transformação identidade do grupo de Poincaré é dada tomando-se $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$ e $a^\mu = 0$, de modo que estamos interessados nas transformações com,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \quad (3.25)$$

onde $\omega^\mu{}_\nu$ e ϵ^μ são parâmetros contínuos infinitesimais. Além disso, $\omega^\mu{}_\nu$ deve ser anti-simétrico, ou seja, $\omega^\mu{}_\nu = -\omega_\nu{}^\mu$ para que a relação (2.39) seja satisfeita. Em $D = 3 + 1$ dimensões, um tensor anti-simétrico de segunda ordem possui 6 componentes independentes que somadas às 4 componentes do vetor ϵ^μ , nos dá os 10 parâmetros do grupo de Poincaré. Os 6 parâmetros mencionados a priori estão relacionados as transformações de Lorentz, sendo 3 deles relacionados aos ângulos de rotação e os outros 3 aos *boosts*. Logo, usando (3.25) podemos reescrever (2.37) como:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu. \quad (3.26)$$

Como $ISO(3, 1)$ é um grupo de Lie conexo podemos escrever seus elementos como:

$$\Pi(\omega, \epsilon) = \exp \left[\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_\mu P^\mu \right], \quad (3.27)$$

onde P^μ é gerador do grupo de translações espaço-temporais e $J^{\mu\nu}$ é o gerador do grupo de Lorentz, que pode ser tomada como antissimétrico, uma vez que $\omega_{\mu\nu}$ é antissimétrico. Contudo, o escalar $\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}$ será simétrico, por isso a presença do fator 1/2, para evitar as duplicidades. Infinitesimalmente teremos,

$$\Pi(1 + \omega, \epsilon) = I + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_\mu P^\mu + \dots \quad (3.28)$$

Queremos saber como $J^{\mu\nu}$ e P^μ se comportam sob transformações de Poincarè. Vamos

verificar o seguinte produto:

$$\Pi(\Lambda, a)\Pi(1 + \omega, \epsilon)\Pi^{-1}(\Lambda, a) = \Pi(\Lambda(1 + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \quad (3.29)$$

que obtivemos a partir da lei de composição (3.22). Logo, teremos que

$$\Pi(\Lambda, a) \left[\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha}P^{\alpha} \right] \Pi^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}P^{\mu}, \quad (3.30)$$

igualando os coeficientes $\omega_{\mu\nu}$ e ϵ_{μ} , temos que os geradores se transformam da seguinte forma:

$$\Pi(\Lambda, a)J^{\alpha\beta}\Pi^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\beta}(J^{\mu\nu} + a^{\nu}P^{\mu} - a^{\mu}P^{\nu}), \quad (3.31)$$

$$\Pi(\Lambda, a)P^{\alpha}\Pi^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}^{\alpha}P^{\mu}, \quad (3.32)$$

Perceba que de (3.31) e (3.32) que se fizermos $a^{\mu} = 0$, isto é, uma transformação de Lorentz pura, temos que $J^{\alpha\beta}$ se transforma como um tensor e P^{α} como um vetor. Agora, se tomarmos $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, ou seja, uma translação pura, teremos que P^{α} é invariante sobre translações, mas $J^{\alpha\beta}$ não. Segundo (WEINBERG, 1995) uma mudança nas coordenadas espaciais de $J^{\alpha\beta}$ perante a translações espaciais é apenas a mudança usual da origem relativa ao qual o momento angular é calculado.

Vamos agora utilizar as transformações infinitesimais e nos reter a primeira ordem de ω e ϵ . O lado esquerdo da Eq.(3.31) ficará

$$\left(I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu} \right) J^{\alpha\beta} \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu}P^{\mu} \right) = J^{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\alpha\beta}, J^{\mu\nu}] - i\epsilon_{\mu}[P^{\mu}, J^{\alpha\beta}], \quad (3.33)$$

e lado direito da Eq.(3.31) ficará

$$\begin{aligned} (\delta_{\mu}^{\alpha} + \omega_{\mu}^{\alpha})(\delta_{\nu}^{\beta} + \omega_{\nu}^{\beta})(J^{\mu\nu} + \epsilon^{\nu}P^{\mu} + \epsilon^{\mu}P^{\nu}) &= J^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}(\eta^{\beta\nu}J^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\nu}J^{\beta\mu}) \\ &+ \epsilon_{\mu}(\eta^{\beta\mu}P^{\alpha} - \eta^{\alpha\mu}P^{\beta}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Já para a Eq.(3.32), teremos

$$\begin{aligned} \left(I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}P^{\mu} \right) P^{\alpha} \left(I - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu}P^{\mu} \right) &= (\delta_{\mu}^{\alpha} + \omega_{\mu}^{\alpha})P^{\mu}, \\ -i\omega_{\mu\nu}[P^{\alpha}, J^{\mu\nu}] - i\epsilon_{\mu}[P^{\alpha}, P^{\mu}] &= \omega_{\mu\nu}(\eta^{\alpha\nu}P^{\mu} - \eta^{\alpha\mu}P^{\nu}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Igualando os coeficientes $\omega_{\mu\nu}$ e ϵ_{μ} nas equações (3.33) e (3.34) e na equação (3.35),

obtemos as seguintes relações de comutação:

$$[J^{\alpha\beta}, J^{\mu\nu}] = i(\eta^{\alpha\mu} J^{\beta\nu} + \eta^{\beta\nu} J^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\nu} J^{\beta\mu} - \eta^{\beta\mu} J^{\alpha\nu}); \quad (3.36)$$

$$[P^\mu, J^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\mu\beta} P^\alpha - \eta^{\mu\alpha} P^\beta); \quad (3.37)$$

$$[P^\alpha, P^\beta] = 0; \quad (3.38)$$

está é a álgebra de Lie do grupo, muitas vezes chamada de álgebra de Poincaré, denotada por $\text{iso}(3, 1)$.

3.5 REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DO GRUPO DE LORENTZ

3.5.1 Equação de Dirac

Vamos iniciar essa seção visitando os primórdios da mecânica quântica relativística. A evolução temporal dos estados na mecânica quântica, $\psi(\mathbf{r}, t)$, é descrita pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (3.39)$$

onde H é o operador hamiltoniano. A hamiltoniana que descreve uma partícula relativística livre é dada por:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}, \quad (3.40)$$

onde m é a massa da partícula e $\mathbf{p}$ seu momento. Na mecânica quântica, o momento da partícula é promovido ao operador momento, dado por $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$, de modo que o operador correspondente a hamiltoniana (3.40) será:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2}. \quad (3.41)$$

Com o hamiltoniano (3.41), a equação de Schrödinger será:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2} \psi \quad (3.42)$$

a qual apresenta a inconveniência de um operador dentro de uma raiz quadrada. Tal problema poderia ser facilmente resolvido aplicando novamente o operador hamiltoniano sobre essa equação, o que nos levaria a equação

$$\left(\square - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi = 0, \quad (3.43)$$

chamada equação de Klein-Gordon. No contexto aqui apresentado essa equação apresenta alguns "problemas" de interpretação, o que na época levou Dirac a buscar uma outra equação para descrever as propriedades quânticas de partículas relativísticas, isso o levou a sua celebre equação. Vejamos como isso se deu. A ideia de Dirac foi partir de um

hamiltoniano sem raiz quadrada, dado por:

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \quad (3.44)$$

de modo que seu quadrado de a hamiltoniana da partícula livre, para que isso aconteça os coeficientes $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e β devem satisfazer as seguintes condições:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad (3.45)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (3.46)$$

$$\beta^2 = 1. \quad (3.47)$$

Perceba então que α_i e β não podem ser simplesmente números. No entanto, podem ser matriz. Nesse caso, teremos uma equação matricial, a chamada equação de Dirac:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi, \quad (3.48)$$

onde ψ é um n -vetor. Como H deve ser hermitiano, α_i e β também o serão, i.e, $\alpha_i = \alpha_i^\dagger$ e $\beta = \beta^\dagger$. Como essas matrizes são hermitianas, sabemos da álgebra linear que podemos diagonalizá-las por meio de uma transformação de similaridade. Logo, das condições (3.45) e (3.47), temos que seus autovalores podem ser $+1$ ou -1 . Segue daí que:

$$\text{tr}(\alpha_i) = \text{tr}(\alpha_i \beta^2) = \text{tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{tr}(\alpha_i) \Rightarrow \text{tr}(\alpha_i) = 0, \quad (3.49)$$

$$\text{tr}(\beta) = \text{tr}(\beta \alpha_i^2) = \text{tr}(\alpha_i \beta \alpha_i) = -\text{tr}(\beta) \Rightarrow \text{tr}(\beta) = 0. \quad (3.50)$$

Logo, como a soma dos autovalores tem que ser nula e eles só podem assumir os valores ± 1 , podemos concluir que as matrizes só podem ser de ordem par. A primeira possibilidade são matrizes ordem 2, porém não há um conjunto de quatro matrizes 2×2 hermitianas, que anti-comutem. Portanto, a menor possibilidade se dá com $n = 4$. Nesse caso há vários conjuntos de matrizes α_i e β , uma possibilidade é dada escolhendo:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade 2×2 e σ_i a i -ésima matriz de Pauli.

3.5.2 Covariância da equação de Dirac

Na equação (3.48), espaço e tempo parecem desempenhar papéis distintos, contudo estamos em um contexto relativístico. Vamos então encontrar a forma covariante da equação de Dirac. Começamos introduzindo as chamadas matrizes gama de Dirac γ^μ :

$$\gamma^0 = -i\beta \quad ; \quad \gamma^i = -i\beta \alpha^i, \quad (3.52)$$

a partir das relações (3.45), (3.46) e (3.47), podemos verificar que as matrizes γ^μ , satisfazem a relação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.53)$$

Multiplicando (3.48) por β à esquerda, podemos reescreve-la como:

$$(\hbar \not{\partial} + mc)\psi = 0, \quad (3.54)$$

onde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu(x)$.

Para que a equação (3.54) seja invariante por transformações de Lorentz, deve haver um referencial S' , tal que a equação de Dirac possa ser escrita como:

$$(\hbar \gamma^{\mu'} \partial'_\mu + mc)\psi'(x') = 0. \quad (3.55)$$

Logo, deve haver uma matriz $S(\Lambda)$ tal que

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (3.56)$$

ou seja, $S(\Lambda)$ é a representação da transformação de Lorentz nesse espaço. Note que,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^{\nu} \partial_\nu, \quad (3.57)$$

assim, retornando com esses resultados a (3.56) e multiplicando por $S(\Lambda)$ à esquerda, teremos:

$$(\hbar S^{-1} \gamma^{\mu'} S \Lambda_\mu^{\nu} \partial_\nu + mc)\psi(x) = 0. \quad (3.58)$$

Multiplicando (3.53) por $\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu$ e usando (2.39), temos que:

$$(\Lambda^\alpha_\mu \gamma^\mu)(\Lambda^\beta_\nu \gamma^\nu) + (\Lambda^\beta_\nu \gamma^\nu)(\Lambda^\alpha_\mu \gamma^\mu) = 2\eta^{\alpha\beta}. \quad (3.59)$$

Agora, multiplicando (3.53) por S à esquerda e S^{-1} à direita, teremos:

$$(S \gamma^\alpha S^{-1})(S \gamma^\beta S^{-1}) + (S \gamma^\beta S^{-1})(S \gamma^\alpha S^{-1}) = 2\eta^{\alpha\beta}. \quad (3.60)$$

Segue de (3.59) e (3.60) que:

$$S^{-1} \gamma^\mu S \Lambda_\mu^{\nu} = \gamma^\nu, \quad (3.61)$$

ou seja, γ^μ é invariante. Já que $S(\Lambda)$ representa um elemento do grupo de Lorentz, vamos supor:

$$S(\Lambda) = \exp\left[\frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}\right], \quad (3.62)$$

onde $\omega_{\alpha\beta}$ são os parâmetros da transformação de Lorentz, que como vimos anteriormente é antissimétrico. Devemos então encontrar quem são as matrizes $\sigma^{\alpha\beta}$. A presença do fator $\frac{1}{4}$ é uma mera comodidade que ficará clara em breve. Considerando uma transformação

infinitesimal:

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu, \quad (3.63)$$

$$S(\Lambda) = 1 + \frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}, \quad (3.64)$$

levando esses resultados à (??), teremos:

$$(\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu) \gamma^\nu = (1 + \frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}) \gamma^\mu (1 - \frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}) \quad (3.65)$$

desprezando termos de ordem $\mathcal{O}(\omega^2)$, obtemos

$$\frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = \omega_\nu^\mu \gamma^\nu \quad (3.66)$$

Levando em conta a antissimetria de $\omega_{\alpha\beta}$, podemos reescrever o resultado acima como

$$\frac{i}{4} [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = \eta^{\beta\mu} \gamma^\alpha - \eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta \quad (3.67)$$

perceba então que $\sigma^{\alpha\beta}$ é antissimétrico. Isso já justifica um fator $\frac{1}{2}$ em (??), para evitar duplicidade. Uma possibilidade para $\sigma^{\alpha\beta}$ que está de acordo com esse resultado é:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]. \quad (3.68)$$

Acontece que:

$$\left[\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta}, \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \right] = i (\eta^{\alpha\mu} \sigma^{\beta\nu} + \eta^{\beta\nu} \sigma^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\nu} \sigma^{\beta\mu} - \eta^{\beta\mu} \sigma^{\alpha\nu}), \quad (3.69)$$

que é a álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Portanto, $\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta}$ é o gerador do grupo de Lorentz na representação espinorial. E por fim está justificando a presença do outro fator $\frac{1}{2}$ em (??).

4 GERADORES DO GRUPO DE POINCARÉ

4.1 TENSOR ARBITRÁRIOS DE ORDEM S EM $D = 3 + 1$

Nesta seção iremos obter os geradores do grupo de Poincaré que agem sobre tensores $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x)$ de ordem s . Consideraremos translações espaço-temporais e transformações de Lorentz separadamente e obteremos assim P^α e $J^{\alpha\beta}$, respectivamente.

4.1.1 Translações espaço-temporais

Considerando uma translação espaço-temporal infinitesimal:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \quad (4.1)$$

como $\partial x'^\mu / \partial x^\nu = \delta_\nu^\mu$, temos que:

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x') = T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x), \quad (4.2)$$

i.e, o tensor é invariante por translações espaço-temporais. Expandindo o lado esquerdo de (4.2), temos

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) + \epsilon_\alpha \partial^\alpha T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x). \quad (4.3)$$

Para ordens $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ é permitido a trocar $\partial^\alpha T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x)$ por $\partial^\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x)$. Assim, podemos reescrever (4.3), como:

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) = T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) - \epsilon_\alpha \partial^\alpha T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.4)$$

Por outro lado, podemos considerar um elemento de grupo agindo sobre o tensor original, ou seja,

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_s}(x) = [\exp(-i\epsilon_\alpha P^\alpha)]^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} T^{\nu_1\cdots\nu_s}(x). \quad (4.5)$$

Expandindo a exponencial, temos que

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_s}(x) = T^{\mu_1\cdots\mu_s}(x) - i\epsilon_\alpha (P^\alpha)^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} T^{\nu_1\cdots\nu_s}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.6)$$

Igualando (4.4) com (4.6), obtemos:

$$(P^\alpha)^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} = -i \left(\prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \right) \partial^\alpha, \quad (4.7)$$

que é o gerador de translações espaço-temporais que age sobre tensores de ordem s em $D = 3 + 1$.

4.1.2 Transformações de Lorentz

Um tensor de ordem s se transforma sobre transformações de Lorentz da seguinte maneira:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x') = \left(\prod_{i=1}^s \Lambda^{\mu_i}_{\nu_i} \right) T^{\nu_1 \dots \nu_s}(x). \quad (4.8)$$

Se considerarmos uma transformação de Lorentz infinitesimal ($\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu$) e desprezarmos termos de ordem $\mathcal{O}(\omega^2)$, temos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^s \Lambda^{\mu_i}_{\nu_i} &= (\delta^{\mu_1}_{\nu_1} \delta^{\mu_2}_{\nu_2} \dots \delta^{\mu_s}_{\nu_s} - \omega^{\mu_1}_{\nu_1} \delta^{\mu_2}_{\nu_2} \delta^{\mu_3}_{\nu_3} \dots \delta^{\mu_s}_{\nu_s} - \omega^{\mu_2}_{\nu_2} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} \delta^{\mu_3}_{\nu_3} \dots \delta^{\mu_s}_{\nu_s} - \omega^{\mu_s}_{\nu_s} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \delta^{\mu_{s-1}}_{\nu_{s-1}} \delta^{\mu_s}_{\nu_s}) \\ &= \prod_{i=1}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} - \sum_{k=1}^s \prod_{i=1, i \neq k}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} \omega^{\mu_k}_{\nu_k}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Inserindo (4.9) em (4.8) e ao mesmo tempo expandindo o lado esquerdo de (4.8) até primeira ordem de ω , tem-se:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) - \omega^\gamma_\alpha x^\alpha \partial_\gamma T^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \left[\prod_{i=1}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} - \sum_{k=1}^s \prod_{i=1, i \neq k}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} \omega^{\mu_k}_{\nu_k} \right] T^{\nu_1 \dots \nu_s}(x), \quad (4.10)$$

usando a antissimetria de $\omega_{\mu\nu}$, podemos reescrever esta última equação como,

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = T^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) + \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2} \left[(x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta) \prod_{i=1}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} - \sum_{k=1}^s \prod_{i=1, i \neq k}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} (\eta^{\alpha\mu_k} \delta^\beta_{\nu_k} - \eta^{\beta\mu_k} \delta^\alpha_{\nu_k}) \right] T^{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \quad (4.11)$$

Fazendo agora um elemento de grupo atuar sobre o tensor original, temos:

$$\begin{aligned} T'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) &= \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}\right)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} T^{\nu_1 \dots \nu_s}(x), \\ &= T^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} (J^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} T^{\nu_1 \dots \nu_s}(x) + \mathcal{O}(\omega^2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

comparando (4.12) com (4.11), obtemos:

$$(J^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = i \left(\prod_{i=1}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} \right) (x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta) - i \sum_{k=1}^s \prod_{i=1, i \neq k}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} (\eta^{\alpha\mu_k} \delta^\beta_{\nu_k} - \eta^{\beta\mu_k} \delta^\alpha_{\nu_k}) \quad (4.13)$$

que é a forma explícita dos geradores do grupo Lorentz. Esse gerador pode ser decomposto em partes de momento angular orbital e spin, $J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$, dadas por:

$$(L^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = i \prod_{i=1}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} (x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta), \quad (4.14)$$

$$(S^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = i \sum_{k=1}^s \prod_{i=1, i \neq k}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} (\eta^{\beta\mu_k} \delta^\alpha_{\nu_k} - \eta^{\alpha\mu_k} \delta^\beta_{\nu_k}). \quad (4.15)$$

Temos então, todos os geradores do grupo de Poincaré que agem sobre tensores de

ordem s , em $D = 3 + 1$.

4.2 ESPINORES-TENSORES DE ORDEM S EM $D = 3 + 1$

Nesta seção iremos obter os geradores do grupo de Poincaré que agem sobre espinores-tensores $\psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x)$ de ordem s . Vamos recorrer ao mesmo procedimento utilizado anteriormente.

4.2.1 Translações espaço-temporais

Começamos requerendo a invariância do espinor-tensor perante a translações espaço-temporais, ou seja,

$$\psi'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x') = \psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x). \quad (4.16)$$

Expandindo o lado esquerdo de (4.16) até primeira ordem de ϵ , temos:

$$\psi'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) = \psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) - \epsilon_\alpha \partial^\alpha \psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.17)$$

Atuando um elemento de grupo sobre o espinor-tensor original,

$$\begin{aligned} \psi'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) &= [\exp(-i\epsilon_\alpha P^\alpha)]^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \psi^{\nu_1\cdots\nu_s}(x) \\ &= \psi^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}(x) - i\epsilon_\alpha (P^\alpha)^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \psi^{\nu_1\cdots\nu_s}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Comparando (4.18) e (4.17), obtemos a forma explicita do gerador P^α , dada por:

$$(P^\alpha)^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} = -i \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \partial^\alpha \mathbb{I} \quad (4.19)$$

em que $\mathbb{I}$ é uma matriz identidade (4×4) no espaço espinorial. Perceba que a menos da matriz $\mathbb{I}$, o gerador de translações apresenta a mesma forma que no caso tensorial.

4.2.2 Transformações de Lorentz

A transformação de Lorentz sobre um espinor-tensor é descrita como:

$$\psi'^{\mu_1\cdots\mu_s}(x') = \left(\prod_{i=1}^s \Lambda^{\mu_i}_{\nu_i} \right) S \psi^{\nu_1\cdots\nu_s}(x), \quad (4.20)$$

onde Λ representa as transformações de Lorentz sobre os índices do espaço de Minkowski, S é a representação espinorial da transformação de Lorentz, que é parametrizado por (3.62).

Expandindo o lado esquerdo de (4.20) e as exponenciais do lado direito, temos que:

$$\psi'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) - \omega^\gamma_\alpha x^\alpha \partial_\gamma \psi'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \left[\prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} - \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \omega^{\mu_k}_{\nu_k} + \dots \right] \left[\mathbb{I} + \frac{i}{4} \omega_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} + \dots \right] \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}(x), \quad (4.21)$$

considerando até primeira ordem em ω , esse último resultado pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \psi'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) &= \psi^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) + \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2} \left[(x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta) \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \mathbb{I} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\alpha\mu_k} \delta_{\nu_k}^\beta - \eta^{\beta\mu_k} \delta_{\nu_k}^\alpha) \mathbb{I} + \frac{i}{2} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \right] \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}(x). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} \psi'^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) &= \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}\right)_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}(x) \\ &= \psi^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} (J^{\alpha\beta})_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Comparando (4.23) com (4.22), resulta que o gerador $I^{\alpha\beta}$ é dado por:

$$(J^{\alpha\beta})_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s} = i \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta) \mathbb{I} - i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\alpha\mu_k} \delta_{\nu_k}^\beta - \eta^{\beta\mu_k} \delta_{\nu_k}^\alpha) \mathbb{I} - \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i}. \quad (4.24)$$

que novamente pode ser decomposto nas partes de momento angular orbital e spin, $J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$, dadas respectivamente por:

$$(L^{\alpha\beta})_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s} = i \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (x^\beta \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\beta) \mathbb{I}, \quad (4.25)$$

$$(S^{\alpha\beta})_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_s} = i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\beta\mu_k} \delta_{\nu_k}^\alpha - \eta^{\alpha\mu_k} \delta_{\nu_k}^\beta) \mathbb{I} - \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i}, \quad (4.26)$$

perceba que na parta de spin ($S^{\alpha\beta}$), temos que o primeiro termo no lado direito de (4.26) está relacionado a "parte inteira", pois apresenta a mesma forma do gerador (4.15), já o segundo membro no lado direito de (4.26) está relacionado a "parte semi-inteira".

Temos agora todos os geradores do grupo de Poincaré que atuam sobre espiniores-tensores de ordem s , com s inteiro, em $D = 3 + 1$.

4.3 OPERADORES DE CASIMIR DA $ISO(3,1)$

Os operadores de Casimir são aqueles que comutam com todos os geradores da álgebra de Lie. Por consequência esses operadores são invariantes pela transformação de simetria do grupo, sendo assim utilizados para classificar representações irredutíveis do grupo. De acordo com (E.P.WIGNER, 1939), massa e spin, são propriedades que caracterizam um

sistema que é invariante perante transformações de Poincaré, sendo estas as propriedades necessárias para classificar partículas elementares.

A álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(3, 1)$ é dada por (3.36), (3.37) e (3.38). Em $D = 3 + 1$ há dois operadores de Casimir, definidos como:

$$C_1 \equiv P^2 = P_\alpha P^\alpha, \quad (4.27)$$

$$C_2 \equiv W^2 = W_\alpha W^\alpha = -\frac{1}{2} J_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} P^2 + J_{\gamma\beta} J^{\alpha\beta} P_\alpha P^\gamma, \quad (4.28)$$

em que W^α é o chamado pseudo-vetor de Pauli-Lubanski, dado por:

$$W^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} P_\beta J_{\gamma\delta}, \quad (4.29)$$

e $J_{\gamma\sigma}$ é dado por (4.13), para tensores, e por (4.24), para espinores.

Os casimirs P^2 e W^2 compõem as seguintes equações de autovalor:

$$P^2 \phi = -m^2 \phi, \quad (4.30)$$

$$W^2 \phi = -m^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{s} + 1) \phi, \quad (4.31)$$

onde m e $\mathfrak{s}$ são, respectivamente, a massa e o spin da partícula elementar representada pelo campo arbitrário ϕ .

4.3.1 Casimirs para tensores de ordem s

Para tensores de ordem s arbitrário, os quais representam partículas bosônicas, temos que o casimir C_1 é construído utilizando (4.7), de modo que será dado por:

$$(P^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = - \left(\prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \right) \square, \quad (4.32)$$

utilizando esse resultado na equação de autovalor (4.30), obtemos a equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2) T^{\mu_1 \dots \mu_s} = 0. \quad (4.33)$$

Utilizando (4.7) e (4.13), podemos construir o operador C_2 . Mas antes, considerando a decomposição do gerador do grupo de Lorentz em $J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$, percebe-se que

$$\begin{aligned} (L^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\rho_1 \dots \rho_s} (P^\gamma)^{\rho_1 \dots \rho_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= - \prod_{i=1}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \prod_{j=1}^s \delta_{\nu_j}^{\rho_j} \partial^\gamma, \\ &= \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (x^\beta \partial^\alpha \partial^\gamma - x^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma), \end{aligned}$$

devido a comutação das derivadas o tensor $\partial^\alpha \partial^\beta$ é simétrico. Logo,

$$\epsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma} (L^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\rho_1 \dots \rho_s} (P^\gamma)^{\rho_1 \dots \rho_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0 \quad (4.34)$$

de modo que o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski e consequentemente o casimir C_2 se reduzem, respectivamente a:

$$W^\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}S_{\beta\gamma}P_\delta, \quad (4.35)$$

$$W^2 = -\frac{1}{2}S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}P^2 + S_{\gamma\beta}S^{\alpha\beta}P_\alpha P^\gamma. \quad (4.36)$$

Primeiramente, usando (4.15), calculemos:

$$(S_{\gamma\beta})^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_s}(S^{\alpha\beta})^{\nu_1\ldots\nu_s}_{\rho_1\ldots\rho_s} = -\sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} (\delta_\gamma^{\mu_k} \eta_{\beta\nu_k} - \delta_\beta^{\mu_k} \eta_{\gamma\nu_k}) \sum_{r=1}^s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s \delta^{\nu_j}_{\rho_j} (\eta^{\alpha\nu_r} \delta_\rho^\beta - \eta^{\beta\nu_r} \delta_\rho^\alpha),$$

separemos esse resultado para $k = r$ e $k \neq r$, teremos assim:

$$\begin{aligned} (S_{\gamma\beta})^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_s}(S^{\alpha\beta})^{\nu_1\ldots\nu_s}_{\rho_1\ldots\rho_s} = & - \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} [\delta_\gamma^{\mu_k} \delta_{\rho_k}^\alpha (2-D) - \delta_{\rho_k}^{\mu_k} \delta_\gamma^\alpha] + \\ & - \sum_{\substack{k,r=1 \\ r \neq k}}^s \delta_{\nu_r}^{\mu_r} \delta_{\rho_k}^{\nu_k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} [\delta_\gamma^{\mu_k} \eta_{\beta\nu_k} (\eta^{\alpha\nu_r} \delta_{\rho_r}^\beta - \eta^{\beta\nu_r} \delta_{\rho_r}^\alpha) + \\ & + \delta_\beta^{\mu_k} \eta_{\gamma\nu_k} (\eta^{\beta\nu_r} \delta_{\rho_r}^\alpha - \eta^{\alpha\nu_r} \delta_{\rho_r}^\beta)] \quad . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Vamos decompor a equação (4.37) da seguinte maneira $(S_{\gamma\beta})^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_s}(S^{\alpha\beta})^{\nu_1\ldots\nu_s}_{\rho_1\ldots\rho_s} = [A^\alpha_\gamma + B^\alpha_\gamma]^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\rho_1\ldots\rho_s}$, onde:

$$\begin{aligned} (A^\alpha_\gamma)^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\rho_1\ldots\rho_s} &= - \sum_{\substack{k,r=1 \\ r \neq k}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} [\delta_{\rho_r}^\alpha (\eta^{\mu_k\mu_r} \eta_{\gamma\nu_k} - \delta_\gamma^{\mu_k} \delta_{\rho_k}^{\mu_r}) + \eta^{\alpha\mu_r} (\eta_{\rho_r\rho_k} \delta_\gamma^{\mu_k} - \eta_{\gamma\rho_k} \delta_{\rho_r}^{\mu_k})] \quad (4.38) \\ (B^\alpha_\gamma)^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\rho_1\ldots\rho_s} &= - \sum_{k=1}^s \prod_{i=1, i \neq k}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} [\delta_\gamma^{\mu_k} \delta_{\rho_k}^\alpha (2-D) - \delta_{\rho_k}^{\mu_k} \delta_\gamma^\alpha] \quad . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Calculemos agora $(P_\alpha P^\gamma)^{\rho_1\ldots\rho_s}_{\nu_1\ldots\nu_s}$:

$$(P_\alpha P^\gamma)^{\rho_1\ldots\rho_s}_{\nu_1\ldots\nu_s} = - \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\rho_i} \partial_\alpha \partial^\gamma \quad . \quad (4.40)$$

Contraindo (4.40) com (4.38), temos:

$$\begin{aligned} (A^\alpha_\gamma P_\alpha P^\gamma)^{\mu_1\ldots\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_s} &= \sum_{\substack{k,r=1 \\ r \neq k}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} [\delta_{\nu_r}^\alpha (\eta^{\mu_k\mu_r} \eta_{\gamma\nu_k} - \delta_\gamma^{\mu_k} \delta_{\nu_k}^{\mu_r}) + \eta^{\alpha\mu_r} (\eta_{\nu_r\nu_k} \delta_\gamma^{\mu_k} - \eta_{\gamma\nu_k} \delta_{\nu_r}^{\mu_k})] \partial_\alpha \partial^\gamma \\ &= 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\mu_k\mu_r} \partial_{\nu_r} \partial_{\nu_k} + \eta_{\nu_k\nu_r} \partial^{\mu_r} \partial^{\mu_k} - \delta_{\nu_k}^{\mu_r} \partial_{\nu_r} \partial^{\mu_k} - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \partial^{\mu_r} \partial_{\nu_k}) \quad . \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde na segunda linha utilizamos a simetria entre os índices (k, r) .

Contraindo agora (4.40) com (4.39), teremos:

$$\begin{aligned}
 (B^\alpha_\gamma P_\alpha P^\gamma)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} [\delta_\gamma^{\mu_k} \delta_{\rho_k}^\alpha (2-D) - \delta_{\rho_k}^{\mu_k} \delta_\gamma^\alpha] \prod_{j=1}^s \delta_{\nu_j}^{\rho_j} \partial_\alpha \partial^\gamma \\
 &= (2-D) \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \partial_{\nu_k} \partial^{\mu_k} - \sum_{k=1}^s \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \square \quad . \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Com (4.41) e (4.42) em mãos, temos que em $D = 3 + 1$:

$$\begin{aligned}
 (S_{\gamma\beta} S^{\alpha\beta} P_\alpha P^\gamma)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} T^{\nu_1 \dots \nu_s} &= 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\mu_k \mu_r} \partial_{\nu_r} \partial_{\nu_k} + \eta_{\nu_k \nu_r} \partial^{\mu_r} \partial^{\mu_k} - \delta_{\nu_k}^{\mu_r} \partial_{\nu_r} \partial^{\mu_k} + \\
 &\quad - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \partial^{\mu_r} \partial_{\nu_k}) T^{\nu_1 \dots \nu_s} - 2 \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \partial_{\nu_k} \partial^{\mu_k} T^{\nu_1 \dots \nu_s} + \\
 &\quad - s \square T^{\mu_1 \dots \mu_s} \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Para calcular o próximo termo de W^2 , apliquemos δ_α^γ em (4.38), (4.39) e (4.40), obtemos respectivamente:

$$(A)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\rho_1 \dots \rho_s} = -4 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} (\eta_{\rho_r \rho_k} \eta^{\mu_k \mu_r} - \delta_{\rho_r}^{\mu_k} \delta_{\rho_k}^{\mu_r}) \quad ; \quad (4.44)$$

$$(B)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\rho_1 \dots \rho_s} = 2(D-1) \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} \quad ; \quad (4.45)$$

$$(P^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = - \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \square \quad ; \quad (4.46)$$

Com esses resultados, temos que em $D = 3 + 1$:

$$(AP^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = 4 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta_{\nu_r \nu_k} \eta^{\mu_k \mu_r} - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \delta_{\nu_k}^{\mu_r}) \square \quad ; \quad (4.47)$$

$$(BP^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = -6s \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \square \quad ; \quad (4.48)$$

Com (4.47) e (4.48), teremos:

$$(S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} P^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} T^{\nu_1 \dots \nu_s} = -6s \square T^{\mu_1 \dots \mu_s} + 4 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta_{\nu_r \nu_k} \eta^{\mu_k \mu_r} - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \delta_{\nu_k}^{\mu_r}) \square T^{\nu_1 \dots \nu_s} \quad . \quad (4.49)$$

Com (4.43) e (4.49) em mãos, podemos finalmente montar a equação de autovalor para o

casimir C_2 , na representação tensorial:

$$\begin{aligned}
& 2s \square T^{\mu_1 \dots \mu_s} + 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \delta_{\nu_r}^{\mu_r} \delta_{\nu_k}^{\mu_k} \square T^{\nu_1 \dots \nu_s} - 2 \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \partial_{\nu_k} \partial^{\mu_k} T^{\nu_1 \dots \nu_s} + \\
& + 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \left[\eta^{\mu_k \mu_r} \partial_{\nu_k} \partial_{\nu_r} - \eta_{\nu_k \nu_r} (\square \eta^{\mu_k \mu_r} - \partial^{\mu_k} \partial^{\mu_r}) - \delta_{\nu_k}^{\mu_r} \partial^{\mu_k} \partial_{\nu_r} - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \partial^{\mu_r} \partial_{\nu_k} \right] T^{\nu_1 \dots \nu_s} \\
& = m^2 s(s+1) T^{\mu_1 \dots \mu_s}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

4.3.2 Casimirs para espinores-tensores de ordem s

Para espinores-tensores de ordem s , os quais representam partículas fermiônicas, podemos construir o Casimir C_1 . Utilizando (4.19), obtemos:

$$(P^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = - \left(\prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \right) \square \mathbb{I}, \tag{4.51}$$

e com este sua equação de autovalor, que resulta novamente na equação de Klein-Gordon:

$$(\square - m^2) \psi^{\mu_1 \dots \mu_s} = 0, \tag{4.52}$$

e utilizando (4.19) e (4.24), construiremos o Casimir C_2 e com este sua equação de autovalor. Vamos proceder como na seção anterior, comecemos decompondo a (4.26) em $(S^{\alpha\beta})^{\mu_i}_{\nu_i} = [C^{\alpha\beta} + D^{\alpha\beta}]^{\mu_i}_{\nu_i}$, onde:

$$(C^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\beta \mu_k} \delta_{\nu_k}^{\alpha} - \eta^{\alpha \mu_k} \delta_{\nu_k}^{\beta}) \mathbb{I}; \tag{4.53}$$

$$(D^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = -\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i}; \tag{4.54}$$

Perceba que $(C_{\lambda\beta} C^{\alpha\beta} P_{\alpha} P^{\lambda})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}$ apresenta a mesma estrutura de (4.43), de modo que:

$$\begin{aligned}
(C_{\lambda\beta} C^{\alpha\beta} P_{\alpha} P^{\lambda})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} &= 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta^{\mu_k \mu_r} \partial_{\nu_r} \partial_{\nu_k} + \eta_{\nu_k \nu_r} \partial^{\mu_r} \partial^{\mu_k} - \delta_{\nu_k}^{\mu_r} \partial_{\nu_r} \partial^{\mu_k} + \\
&- \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \partial^{\mu_r} \partial_{\nu_k}) \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} - 2 \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \partial_{\nu_k} \partial^{\mu_k} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} + \\
&- s \square \psi^{\mu_1 \dots \mu_s},
\end{aligned} \tag{4.55}$$

assim como $(C_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta} P^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}$, apresenta a mesma estrutura de (4.49), ou seja:

$$(C_{\alpha\beta} C^{\alpha\beta} P^2)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} = -6s \square \psi^{\mu_i} + 4 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\eta_{\nu_r \nu_k} \eta^{\mu_k \mu_r} - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \delta_{\nu_k}^{\mu_r}) \square \psi^{\nu_1 \dots \nu_s}. \tag{4.56}$$

Computemos agora os seguintes termos:

$$(C_{\lambda\beta}D^{\alpha\beta})_{\rho_1\ldots\rho_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} (\eta_{\beta\rho_k} \delta_{\lambda}^{\mu_k} - \eta_{\lambda\rho_k} \delta_{\beta}^{\mu_k}) \sigma^{\alpha\beta}; \quad (4.57)$$

$$(D_{\lambda\beta}D^{\alpha\beta})_{\rho_1\ldots\rho_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = \frac{1}{4} \sigma_{\lambda\beta} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i}; \quad (4.58)$$

Definindo $(\bar{S}_{\lambda}^{\alpha})_{\rho_1\ldots\rho_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = [C_{\lambda\beta}D^{\alpha\beta} + D_{\lambda\beta}C^{\alpha\beta} + D_{\lambda\beta}D^{\alpha\beta}]_{\rho_1\ldots\rho_s}^{\mu_1\ldots\mu_s}$ e utilizando os resultados (4.57) e (4.58), teremos:

$$(\bar{S}_{\lambda}^{\alpha})_{\rho_1\ldots\rho_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} (\delta_{\lambda}^{\mu_k} \sigma^{\alpha}_{\rho_k} - \eta_{\lambda\rho_k} \sigma^{\alpha\mu_k} + \eta^{\alpha\mu_k} \sigma_{\lambda\rho_k} - \delta_{\rho_k}^{\alpha} \sigma_{\lambda}^{\mu_k}) + \frac{1}{4} \sigma_{\lambda\beta} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i}. \quad (4.59)$$

Com (4.19) e (4.59), temos que:

$$(\bar{S}_{\lambda}^{\alpha} P_{\alpha} P^{\lambda})_{\nu_1\ldots\nu_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = -i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} (\sigma_{\alpha\nu_k} \partial^{\alpha} \partial^{\mu_k} - \sigma^{\alpha\mu_k} \partial_{\alpha} \partial_{\nu_k}) - \frac{1}{4} \sigma_{\lambda\beta} \sigma^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial^{\lambda} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \quad (4.60)$$

Usando (3.68), (3.53) e as propriedades em $D = 3 + 1$:

$$\gamma_{\mu} \not{\partial} \gamma^{\mu} = -2\not{\partial}; \quad \gamma_{\mu} \gamma^{\mu} = 4\mathbb{I}; \quad \not{\partial} \not{\partial} = \square\mathbb{I}; \quad (4.61)$$

obtemos:

$$\sigma_{\lambda\beta} \sigma^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial^{\lambda} = 3\square\mathbb{I}. \quad (4.62)$$

Assim, (4.60) pode ser reescrita como:

$$(\bar{S}_{\lambda}^{\alpha} P_{\alpha} P^{\lambda})_{\nu_1\ldots\nu_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = -i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} ([\not{\partial}, \gamma_{\nu_k}] \partial^{\mu_k} - [\not{\partial}, \gamma^{\mu_k}] \partial_{\nu_k}) - \frac{3}{4} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \square\mathbb{I}. \quad (4.63)$$

Aplicando $\delta_{\alpha}^{\lambda}$ em (4.59):

$$\begin{aligned} (\bar{S})_{\rho_1\ldots\rho_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} (\sigma_{\rho_k}^{\mu_k} - \sigma_{\rho_k}^{\mu_k} + \sigma_{\rho_k}^{\mu_k} - \sigma_{\rho_k}^{\mu_k}) + \frac{1}{4} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \prod_{i=1}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} \\ &= 2i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} \sigma_{\rho_k}^{\mu_k} + 3 \prod_{i=1}^s \delta_{\rho_i}^{\mu_i} \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde da primeira para a segunda linha usamos a anti-simetria de $\sigma^{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} = 12\mathbb{I}$.

Com (4.64) e (4.51), podemos computar o termo:

$$(\bar{S}P^2)_{\nu_1\ldots\nu_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = - \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} [\gamma^{\mu_k}, \gamma_{\nu_k}] \square - 3 \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \square\mathbb{I}. \quad (4.65)$$

Como $(S_{\lambda\alpha} S^{\alpha\beta})_{\nu_1\ldots\nu_s}^{\mu_1\ldots\mu_s} = [C_{\lambda\alpha} C^{\alpha\beta} + \bar{S}_{\lambda}^{\alpha}]_{\nu_1\ldots\nu_s}^{\mu_1\ldots\mu_s}$, podemos finalmente a partir de (4.55),

(4.56), (4.60) e (4.65) construir o casimir C_2 para a representação espinorial. Obtemos então:

$$\begin{aligned}
& \left(2s + \frac{3}{4}\right) \square \psi^{\mu_1 \dots \mu_s} + 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \delta_{\nu_k}^{\mu_r} \square \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} - 2 \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \partial_{\nu_k} \partial^{\mu_k} \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} + \\
& + 2 \sum_{\substack{k,r=1 \\ k < r}}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,r}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \left[\eta^{\mu_k \mu_r} \partial_{\nu_k} \partial_{\nu_r} - \eta_{\nu_k \nu_r} (\square \eta^{\mu_k \mu_r} - \partial^{\mu_k} \partial^{\mu_r}) - \delta_{\nu_k}^{\mu_r} \partial^{\mu_k} \partial_{\nu_r} - \delta_{\nu_r}^{\mu_k} \partial^{\mu_r} \partial_{\nu_k} \right] \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} ([\not{\partial}, \gamma_{\nu_k}] \partial^{\mu_k} - [\not{\partial}, \gamma^{\mu_k}] \partial_{\nu_k} - [\gamma^{\mu_k}, \gamma_{\nu_k}] \square) \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} \\
& = m^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{s} + 1) \psi^{\mu_1 \dots \mu_s}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Temos portanto todos os operadores de Casimir do $ISO(3, 1)$ e suas equações de autovalores, nas representações que agem sobre tensores e espinores-tensores de ordem s , em $D = 3 + 1$. Nosso próximo passo é fazer uma readaptação dimensional dos resultados obtidos até aqui, iremos adaptá-los para $D = 2 + 1$.

4.4 GRUPO DE POINCARÉ $ISO(2, 1)$

Em um espaço tridimensional um tensor antissimétrico de segunda ordem $J^{\alpha\beta}$, pode ser escritor na forma de um vetor, da seguinte maneira:

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\nu} J^{\mu\nu}. \tag{4.67}$$

Com essa prescrição a álgebra de Lie do grupo do Poincaré $\mathfrak{iso}(2, 1)$, será dada por:

$$[J_\mu, J_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\rho} J^\rho, \tag{4.68}$$

$$[J_\mu, P_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\rho} P^\rho, \tag{4.69}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{4.70}$$

4.4.1 Tensores e espinores-tensores de ordem s em $D = 2 + 1$

Perceba que os geradores de translações espaço-temporais (4.7) e (4.19) em $D = 3 + 1$, preservam sua estrutura em $D = 2 + 1$. Já para os geradores das transformações de Lorentz, devemos utilizar as prescrição (4.67). Temos então que:

$$(L_\rho)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\alpha\beta} (L^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s}, \tag{4.71}$$

$$(S_\rho)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\alpha\beta} (S^{\alpha\beta})^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s}, \tag{4.72}$$

utilizando (4.14) e (4.15), respectivamente, obtemos:

$$(L_\rho)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = -i\epsilon_{\rho\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i}, \quad (4.73)$$

$$(S_\rho)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \epsilon_{\rho\nu_k}^{\mu_k} \delta_{\nu_i}^{\mu_i}. \quad (4.74)$$

esses são os geradores do grupo de Lorentz que atuarão sobre tensores de ordem s , em $D = 2 + 1$.

Da mesma forma com os geradores (4.25) e (4.26)¹, teremos:

$$(L_\rho)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = -i\epsilon_{\rho\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \mathbb{I}, \quad (4.75)$$

$$(S_\rho)^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_s} = i \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \epsilon_{\rho\nu_k}^{\mu_k} \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \mathbb{I} + \frac{i}{2} \prod_{i=1}^s \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \gamma_\rho, \quad (4.76)$$

que são os geradores do grupo de Lorentz que agem sobre espinores-tensores de ordem s , em $D = 2 + 1$.

4.4.2 Operadores de Casimir da $\mathfrak{iso}(2, 1)$

Jackiw e Nair (JACKIW; NAIR, 1991), apresentam os operadores de Casimir do grupo de Poincaré em $D = 2 + 1$. Esses operadores e suas respectivas equações de autovalor, são definidos da seguinte maneira:

$$C_1 \equiv P^\mu P_\mu \Rightarrow P^\mu P_\mu \phi = -m^2 \phi, \quad (4.77)$$

$$C_2 \equiv P^\mu S_\mu \Rightarrow P^\mu S_\mu \phi = \alpha m \phi, \quad (4.78)$$

onde m e α representam, respectivamente, a massa e a helicidade da partícula. Perceba, que a equação (4.77) possui a mesma forma que em $D = 3 + 1$, assim como o próprio Casimir, logo é esperado obtermos a equação de Klein-Gordon novamente. Como fizemos antes, vamos obter as equações de autovalor, nas representações tensorial e espinorial-tensorial.

Para a representação tensorial, utilizando os geradores (4.7) e (4.74), obtemos as equações de autovalor:

$$(\square - m^2) T^{\mu_1 \dots \mu_s} = 0, \quad (4.79)$$

$$\left(\sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s E_{\nu_k}^{\mu_k} \delta_{\nu_i}^{\mu_i} \right) T^{\nu_1 \dots \nu_s} = \alpha m T^{\mu_1 \dots \mu_s}. \quad (4.80)$$

onde o operador E_{ν}^{μ} é definido como,

$$E_{\nu}^{\mu} \equiv \epsilon^{\mu\rho} \partial_\rho. \quad (4.81)$$

¹ Em $D = 2 + 1$, podemos utilizar do fato que $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho$.

Para representação espinorial-tensorial, utilizando os geradores (4.19) e (4.76), teremos as equações de autovalor:

$$(\square - m^2) \psi^{\mu_1 \dots \mu_s} = 0 \quad (4.82)$$

$$\left(\sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s E^{\mu_k}_{\nu_k} \delta^{\mu_i}_{\nu_i} \mathbb{I} + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^s \delta^{\mu_i}_{\nu_i} \not{\partial} \right) \psi^{\nu_1 \dots \nu_s} = \alpha m \psi^{\mu_1 \dots \mu_s}. \quad (4.83)$$

Portanto, temos em mãos todas as equações de autovalor dos operadores de Casimir do grupo de Poincaré em $D = 2 + 1$, tanto para tensores quanto para espinores-tensores de ordem s .

5 VÍNCULOS DE FIERZ-PAULI A PARTIR DA ÁLGEBRA

A medida em que aumentamos o spin de partículas massivas, para que propaguem o número correto de graus de liberdade físicos em uma dada representação, é requerido o uso de tensores e espinores-tensores de ordens mais altas. A questão é que campos de ordens mais altas introduzem componentes espúrias que devem ser eliminadas. Isso pode ser feito a partir de equações de vínculo. No caso de partículas massivas isso pode ser feito a partir dos vínculos de Fierz-Pauli (FIERZ; PAULI, 1939). Para partículas de spin- s inteiro, representados por tensores arbitrários de ordem s , essas condições são:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_s} = T^{(\mu_1 \dots \mu_s)}, \quad (5.1)$$

$$\eta_{\mu_1 \mu_2} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s} = 0, \quad (5.2)$$

$$\partial_{\mu_1} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s} = 0. \quad (5.3)$$

Para spin- s semi-inteiro, representados por espinores-tensores de ordem s , elas são:

$$\psi^{\mu_1 \dots \mu_s} = \psi^{(\mu_1 \dots \mu_s)}, \quad (5.4)$$

$$\eta_{\mu_1 \mu_2} \psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s} = 0, \quad (5.5)$$

$$\partial_{\mu_1} \psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s} = 0, \quad (5.6)$$

$$\gamma_{\mu_1} \psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s} = 0. \quad (5.7)$$

Obter esses vínculos não é uma tarefa fácil, em geral são obtidos trabalhando-se nas equações de movimento de um dado modelo até que as condições sejam demonstradas e os campos auxiliares sejam eliminados. Contudo, em (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016), os autores conseguiram derivar os vínculos de Fierz-Pauli de maneira independente de modelo, para spin-1/2, 1, 3/2 e 2. No presente trabalho estendemos esses resultados para spin-5/2, 3 e 4, em $D = 3 + 1$. Também generalizamos esses resultados para $D = 2 + 1$, para helicidades-5/2, 3 e 4.

5.1 SPIN-5/2

Nesta seção obtemos os vínculos de Fierz-Pauli para um espinor-tensor de segunda ordem que representa uma partícula massiva de spin-5/2, em $D = 3 + 1$ e $D = 2 + 1$, a partir das equações de autovalor advinda dos Casimirs C_1 e C_2 .

5.1.1 Spin-5/2 em $D = 3 + 1$:

Para um espinor-tensor de segunda ordem, o operador de Casimir C_1 temo como equação de autovalor a equação de Klein-Gordon:

$$\square \psi^{\mu\nu} = m^2 \psi^{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

Setando $s = 2$ e $\mathfrak{s} = 5/2$ em (4.66) e fazendo uso da equação de Klein-Gordon (5.8), encontramos depois de algumas manipulações, a seguinte expressão para equação de Pauli-Lubanski:

$$\begin{aligned} & m^2(-2\psi^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\psi + \psi^{\nu\mu}) + \partial^\mu \partial^\nu \psi + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \psi^{\alpha\beta} + \\ & - \partial^\mu \partial_\alpha \psi^{\alpha\nu} - \partial^\nu \partial_\beta \psi^{\mu\beta} - \partial^\mu \partial_\beta \psi^\nu{}_\beta - \partial^\nu \partial_\alpha \psi^{\alpha\mu} + \\ & - \frac{1}{4}([\not{\partial}, \gamma_\alpha] \partial^\mu - [\not{\partial}, \gamma^\mu] \partial_\alpha - m^2[\gamma^\mu, \gamma_\alpha]) \psi^{\alpha\nu} + \\ & - \frac{1}{4}([\not{\partial}, \gamma_\beta] \partial^\nu - [\not{\partial}, \gamma^\nu] \partial_\beta - m^2[\gamma^\nu, \gamma_\beta]) \psi^{\mu\beta} = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde ψ denota $\eta_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu}$.

As seguintes contrações irão resultar nos vínculos de Fierz-Pauli:

$$\partial^2(5.9) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.10)$$

$$\gamma \partial(5.9) \Rightarrow \gamma_\nu \partial_\mu \psi^{\mu\nu} = \gamma_\mu \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.11)$$

$$\partial(5.9) \Rightarrow \partial_\mu \psi^{\mu\nu} = \partial_\nu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.12)$$

$$\eta(5.9) \Rightarrow \psi = 0, \quad (5.13)$$

$$\gamma \gamma(5.9)_a \Rightarrow \gamma_\mu \gamma_\nu \psi_a^{\mu\nu} = 0, \quad (5.14)$$

$$\gamma(5.9)_a \Rightarrow \gamma_\mu \psi_a^{\mu\nu} = \gamma_\nu \psi_a^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \psi_{a\mu\nu} = 0, \quad (5.15)$$

$$\gamma \gamma(5.9) \Rightarrow \gamma_\mu \gamma_\nu \psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.16)$$

$$\gamma(5.9) \Rightarrow \gamma_\mu \psi^{\mu\nu} = \gamma_\nu \psi^{\mu\nu} = 0. \quad (5.17)$$

Nas equações (5.14) e (5.15) o subscrito “a” significa que nós estamos tomando apenas a parte antissimétrica de $\psi^{\mu\nu}$, i.e., $\psi_a^{\mu\nu} = (\psi^{\mu\nu} - \psi^{\nu\mu})/2$.

Com as equações (5.12), (5.13), (5.15) e (5.17) em mãos, nós completamos a demonstração dos vínculos de Fierz-Pauli (5.4) - (5.7) para um espinor-tensor de segunda ordem em $D = 3 + 1$, obtidas das equações de autovalor dos casimirs.

5.1.2 Helicidade-5/2 em $D = 2 + 1$

Para um espinor-tensor de segunda ordem com helicidade $\alpha = 5/2$, a equação (4.82) nos dá a equação de Klein-Gordon enquanto (4.83) nos dá a equação de Pauli-Lubanski em $D = 2 + 1$:

$$E^\mu{}_\rho \psi^{\rho\nu} + E^\nu{}_\rho \psi^{\mu\rho} + \frac{1}{2} \not{\partial} \psi^{\mu\nu} = \frac{5}{2} m \psi^{\mu\nu}. \quad (5.18)$$

Primeiro, aplicando $\not{\partial}$ na equação (5.18) e usando própria (5.18) nos termos com $\not{\partial}\psi^{\alpha\beta}$, teremos que:

$$9m^2\psi^{\mu\nu} + 2\partial^\mu\partial_\lambda\psi^{\lambda\nu} + 2\partial^\nu\partial_\lambda\psi^{\mu\lambda} - E^\mu{}_\rho E^\nu{}_\lambda\psi^{\rho\lambda} = 5m\not{\partial}\psi^{\mu\nu}. \quad (5.19)$$

Então, como fizemos em $D=3+1$, nós sugerimos alguns passos para obter os vínculos de Fierz-Pauli, mas agora será sempre necessário fazer o uso da equação de Klein-Gordon e das equações (5.18) e (5.19). Combinando essas equações, temos que:

$$\partial^2(5.18); \partial^2(5.19) \Rightarrow \partial_\mu\partial_\nu\psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.20)$$

$$\eta(5.18); \eta(5.19) \Rightarrow \eta_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.21)$$

$$\partial\gamma(5.18); \partial\gamma(5.19) \Rightarrow \partial_\mu\gamma_\nu\psi^{\mu\nu} = \partial_\nu\gamma_\mu\psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.22)$$

$$\gamma^2(5.18); \gamma^2(5.19) \Rightarrow \gamma_\mu\gamma_\nu\psi^{\mu\nu} = \gamma_\nu\gamma_\mu\psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.23)$$

$$\partial(5.18); \partial(5.19) \Rightarrow \partial_\mu\psi^{\mu\nu} = \partial_\nu\psi^{\mu\nu} = 0, \quad (5.24)$$

$$\gamma(5.18); \gamma(5.19) \Rightarrow \gamma_\mu\psi^{\mu\nu} = \gamma_\nu\psi^{\mu\nu} = 0. \quad (5.25)$$

Note que após de obter a condição de transversalidade e usar a propriedade $E_{\mu\nu}E_{\alpha\beta} = \square(\theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha} - \theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta})$ a equação (5.19) se reduz a equação de Dirac:

$$(\not{\partial} - m)\psi^{\mu\nu} = 0. \quad (5.26)$$

A fim de demonstrar que $\psi^{\mu\nu}$ é simétrico, nós aplicamos $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$ em (5.18), o que nos dá:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha}\psi^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \psi^{\mu\nu} = \psi^{\nu\mu}. \quad (5.27)$$

Com esse resultado e as condições (5.21), (5.24), e (5.25) os vínculos de Fierz-Pauli estão todos verificado a partir das equações dos Casimirs.

5.2 SPIN-3

A seguir, nós obtemos aos vínculos de Fierz-Pauli para um tensor de ordem-3 que representa uma partícula massiva em $D = 3 + 1$ e $D = 2 + 1$, a partir das equações de Casimir.

5.2.1 Spin-3 em $D = 3 + 1$

Os Casimirs C_1 e C_2 são dados respectivamente por (4.27) e (4.28),

$$C_1 \equiv P^2 = P_\alpha P^\alpha \Rightarrow (\square - m^2)T^{\mu\nu\gamma} = 0, \quad (5.28)$$

$$C_2 \equiv W^2 = W_\alpha W^\alpha \Rightarrow W^2 T^{\mu\nu\gamma} = m^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{s} + 1) T^{\mu\nu\gamma} = 12m^2 T^{\mu\nu\gamma}. \quad (5.29)$$

Usando (4.29) explicitamente nas expressões (5.29) e (5.28), nós encontramos depois de algumas manipulações:

$$\begin{aligned}
& 6m^2 T^{\mu\nu\gamma} + 2m^2 (\eta^{\nu\gamma} T^{\mu\sigma}{}_{\sigma} + \eta^{\mu\gamma} T^{\sigma\nu}{}_{\sigma} + \eta^{\mu\nu} T^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\gamma}) - 2m^2 (T^{\mu\gamma\nu} + T^{\gamma\nu\mu} + T^{\nu\mu\gamma}) + \\
& + 2(\partial_{\alpha} \partial^{\gamma} T^{\mu\nu\alpha} + \partial_{\alpha} \partial^{\nu} T^{\mu\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} \partial^{\mu} T^{\alpha\nu\gamma}) - 2(\eta^{\nu\gamma} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} T^{\mu\alpha\sigma} + \eta^{\mu\gamma} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} T^{\alpha\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\sigma} T^{\alpha\sigma\gamma}) + \\
& - 2\partial^{\nu} \partial^{\gamma} T^{\mu\sigma}{}_{\sigma} - 2\partial^{\mu} \partial^{\gamma} T^{\sigma\nu}{}_{\sigma} - 2\partial^{\mu} \partial^{\nu} T^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\gamma} + 2\partial_{\alpha} \partial^{\gamma} T^{\mu\alpha\nu} + 2\partial_{\alpha} \partial^{\gamma} T^{\alpha\nu\mu} + \\
& + 2\partial_{\alpha} \partial^{\nu} T^{\mu\gamma\alpha} + 2\partial_{\alpha} \partial^{\nu} T^{\alpha\mu\gamma} + 2\partial_{\alpha} \partial^{\mu} T^{\nu\alpha\gamma} + 2\partial_{\alpha} \partial^{\mu} T^{\gamma\nu\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Aplicando $\eta_{\nu\gamma}$, $\eta_{\mu\nu}$, e $\eta_{\mu\gamma}$, respectivamente, em (5.30), e tomando uma derivada da equação resultante, mostramos que:

$$T^{\mu\sigma}{}_{\sigma} = 0 \quad ; \quad T^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\gamma} = 0 \quad ; \quad T^{\sigma\nu}{}_{\sigma} = 0. \tag{5.31}$$

Inserindo os resultados (5.31) em (5.30) e aplicando $\partial_{\mu} \partial_{\nu} \partial_{\gamma}$ na expressão obtida, demonstramos que $\partial_{\mu} \partial_{\nu} \partial_{\gamma} T^{\mu\nu\gamma} = 0$. Em seguida, aplicamos $\partial_{\mu} \partial_{\gamma}$, $\partial_{\mu} \partial_{\nu}$, e $\partial_{\nu} \partial_{\gamma}$, respectivamente, em (5.30) para mostrar que $\partial_{\mu} \partial_{\gamma} T^{\mu\nu\gamma} = 0$, $\partial_{\mu} \partial_{\nu} T^{\mu\nu\gamma} = 0$, e $\partial_{\nu} \partial_{\gamma} T^{\mu\nu\gamma} = 0$. Finalmente, aplicando ∂_{μ} , ∂_{ν} , and ∂_{γ} , respectivamente, nos obtemos a condição de transversalidade:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu\gamma} = 0 \quad ; \quad \partial_{\nu} T^{\mu\nu\gamma} = 0 \quad ; \quad \partial_{\gamma} T^{\mu\nu\gamma} = 0. \tag{5.32}$$

Então, a expressão resultante (5.30) pode ser reescrita como:

$$3 T^{\mu\nu\gamma} = T^{\mu\gamma\nu} + T^{\nu\mu\gamma} + T^{\gamma\nu\mu}. \tag{5.33}$$

Por meio de subtrações de (5.33) e renomeação de alguns índices, nós obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
4 t_1^{\mu\nu\gamma} - t_2^{\gamma\nu\mu} - t_3^{\mu\gamma\nu} &= 0, \\
-t_1^{\mu\nu\gamma} + 4 t_2^{\gamma\nu\mu} + t_3^{\mu\gamma\nu} &= 0, \\
-t_1^{\mu\nu\gamma} + t_2^{\gamma\nu\mu} + 4 t_3^{\mu\gamma\nu} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde $t_1^{\mu\nu\gamma} \equiv T^{\mu\nu\gamma} - T^{\nu\mu\gamma}$, $t_2^{\gamma\nu\mu} \equiv T^{\gamma\nu\mu} - T^{\gamma\mu\nu}$ e $t_3^{\mu\gamma\nu} \equiv T^{\nu\gamma\mu} - T^{\mu\gamma\nu}$. Já que a matriz correspondente ao sistema linear (5.34) tem determinante não nulo, a única solução de (5.34) é a trivial: $t_j^{\mu\nu\rho} = 0$, $j = 1, 2, 3$. Consequentemente, ficamos com um tensor totalmente simétrico

$$T^{\mu\nu\gamma} = T^{(\mu\nu\gamma)}. \tag{5.35}$$

Deste modo, deduzimos todos os vínculos de Fierz-Pauli para um tensor de ordem-3, i.e., o tensor é totalmente simétrico (5.35), possui traço nulo (5.31) e é transverso (5.32).

5.2.2 Helicidade-3 em $D = 2 + 1$

Para um tensor de ordem-3 com helicidade $\alpha = 3$, a equação de Pauli-Lubanski (4.80) é dada por:

$$E_\gamma{}^\rho T^{\mu\nu\gamma} + E_\beta{}^\nu T^{\mu\beta\rho} + E_\alpha{}^\mu T^{\alpha\nu\rho} = 3m T^{\mu\nu\rho}. \quad (5.36)$$

Usando a equação de Klein-Gordon em (5.36), podemos demonstrar os vínculos de Fierz-Pauli após algumas manipulações. Indicamos os passos necessários a seguir:

$$\partial^3(5.36) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho T^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (5.37)$$

$$\partial^2(5.36) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \partial_\rho T^{\mu\nu\rho} = \partial_\rho \partial_\nu T^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (5.38)$$

$$\partial(5.36) \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu\rho} = \partial_\nu T^{\mu\nu\rho} = \partial_\rho T^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (5.39)$$

$$\eta(5.36) \Rightarrow T^\mu{}_\mu{}^\rho = T^{\mu\nu}{}_\mu = T^{\mu\nu}{}_\nu = 0 \quad (5.40)$$

onde, foi feito o uso repetido de (5.36). Contraindo $E^\gamma{}_\mu$, $E^\gamma{}_\nu$ e $E^\gamma{}_\rho$, uma a uma, com (5.36) e reinserindo as três equações resultantes em (5.36), obtemos:

$$3T^{\mu\nu\gamma} = T^{\mu\gamma\nu} + T^{\nu\mu\gamma} + T^{\gamma\nu\mu} \quad (5.41)$$

ou seja, a mesma equação (5.33), então realizando os mesmos passos da seção anterior nos concluímos que o tensor é totalmente simétrico. Isso completa a demonstração dos vínculos de Fierz-Pauli para um tensor de ordem-3 em $D = 2 + 1$

5.3 SPIN-4

Aqui nos obtemos os vínculos de Fierz-Pauli para um tensor de ordem-4 que representa uma partícula massiva de spin-4 em $D = 3 + 1$ e $D = 2 + 1$, a partir das equações de Casimir.

5.3.1 Spin-4 in $D = 3 + 1$

Como de costume, o operador de Casimir C_1 nos dá a equação de Klein-Gordon:

$$\square T^{\mu\nu\alpha\beta} = m^2 T^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (5.42)$$

Por sua vez, para $s = 4$ e $\mathfrak{s} = 4$, reescrevemos a equação de autovalor do operador de Pauli-Lubanski como:

$$m^2 A^{\mu\nu\alpha\beta} + B^{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad (5.43)$$

onde

$$A^{\mu\nu\alpha\beta} = 6 T^{\mu\nu\alpha\beta} - (T^{\nu\mu\alpha\beta} + T^{\alpha\nu\mu\beta} + T^{\beta\nu\alpha\mu} + T^{\mu\alpha\nu\beta} + T^{\mu\beta\alpha\nu} + T^{\mu\nu\beta\alpha}), \quad (5.44)$$

e

$$\begin{aligned}
B^{\mu\nu\alpha\beta} = & \partial^\mu \partial_\gamma T^{\gamma\nu\alpha\beta} + \partial^\mu \partial_\gamma T^{\nu\gamma\alpha\beta} + \partial^\mu \partial_\gamma T^{\alpha\nu\gamma\beta} + \partial^\mu \partial_\gamma T^{\beta\nu\alpha\gamma} + \partial^\nu \partial_\gamma T^{\gamma\mu\alpha\beta} + \partial^\nu \partial_\gamma T^{\mu\gamma\alpha\beta} \\
& + \partial^\nu \partial_\gamma T^{\mu\alpha\gamma\beta} + \partial^\nu \partial_\gamma T^{\mu\beta\alpha\gamma} + \partial^\alpha \partial_\gamma T^{\gamma\nu\mu\beta} + \partial^\alpha \partial_\gamma T^{\mu\gamma\nu\beta} + \partial^\alpha \partial_\gamma T^{\mu\nu\gamma\beta} + \partial^\alpha \partial_\gamma T^{\mu\nu\beta\gamma} \\
& + \partial^\beta \partial_\gamma T^{\gamma\nu\mu\alpha} + \partial^\beta \partial_\gamma T^{\mu\gamma\nu\alpha} + \partial^\beta \partial_\gamma T^{\mu\nu\gamma\alpha} + \partial^\beta \partial_\gamma T^{\mu\nu\alpha\gamma} \\
& - \partial_\gamma \partial_\sigma (\eta^{\mu\nu} T^{\gamma\sigma\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} T^{\gamma\nu\sigma\beta} + \eta^{\mu\beta} T^{\gamma\nu\sigma\alpha} + \eta^{\nu\alpha} T^{\mu\gamma\sigma\beta} + \eta^{\nu\beta} T^{\mu\gamma\sigma\alpha} + \eta^{\alpha\beta} T^{\mu\nu\gamma\sigma}) \\
& - m^2 (\theta^{\mu\nu} T^{\gamma\alpha\beta}{}_\gamma + \theta^{\mu\alpha} T^{\gamma\nu\beta}{}_\gamma + \theta^{\mu\beta} T^{\gamma\nu\alpha}{}_\gamma + \theta^{\nu\alpha} T^{\mu\gamma\beta}{}_\gamma + \theta^{\nu\beta} T^{\mu\gamma\alpha}{}_\gamma + \theta^{\alpha\beta} T^{\mu\nu\gamma}{}_\gamma).
\end{aligned} \tag{5.45}$$

A fim de verificar os vínculos de Fierz-Pauli, faremos uma série de contrações a operações começando com (5.43), sempre usando (5.42). Devido ao grande número de contrações possíveis com os quatro índices do tensor, o procedimento para a demonstração é trabalhoso e tipicamente envolve o uso de sistemas de equações que são obtidos de diferentes manipulações de (5.43). As seguir resumimos os passos a serem seguidos:

$$\partial^4 (5.43) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta T^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \tag{5.46}$$

$$\partial^3 (5.43) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha T^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu \partial_\nu \partial_\beta T^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu \partial_\alpha \partial_\beta T^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta T^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \tag{5.47}$$

$$\partial^2 \eta (5.43) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu\gamma}{}_\gamma = \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\gamma\nu}{}_\gamma = 0 = \dots \tag{5.48}$$

$$\partial^2 (5.43) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\alpha\nu\beta} = 0 = \dots \tag{5.49}$$

$$\partial \eta (5.43) \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\beta\gamma}{}_\gamma = \partial_\mu T^{\mu\gamma\beta}{}_\gamma = \partial_\mu T^{\beta\mu\gamma}{}_\gamma = 0 = \dots \tag{5.50}$$

$$\eta \eta (5.43) \Rightarrow T^{\gamma}{}_\gamma{}^\alpha{}_\alpha = T^{\gamma\alpha}{}_{\gamma\alpha} = T^{\gamma\alpha}{}_{\alpha\gamma} = 0 \tag{5.51}$$

$$\eta (5.43) \Rightarrow T^{\gamma}{}_\gamma{}^\alpha\beta = T^{\alpha\beta\gamma}{}_\gamma = 0 = \dots \tag{5.52}$$

$$\partial (5.43) \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_\mu T^{\nu\mu\alpha\beta} = 0 = \dots \tag{5.53}$$

Após isso, (5.43) se torna:

$$6 T^{\mu\nu\alpha\beta} = T^{\nu\mu\alpha\beta} + T^{\alpha\nu\mu\beta} + T^{\beta\nu\alpha\mu} + T^{\mu\alpha\nu\beta} + T^{\mu\beta\alpha\nu} + T^{\mu\nu\beta\alpha}. \tag{5.54}$$

Similarmente ao caso de spin-3, é conveniente definir seis tensores parcialmente antissimétricos:

$$\begin{aligned}
t_1^{\mu\nu\alpha\beta} &= T^{\mu\nu\alpha\beta} - T^{\nu\mu\alpha\beta} & ; & & t_4^{\alpha\mu\nu\beta} &= T^{\alpha\mu\nu\beta} - T^{\alpha\nu\mu\beta} \\
t_2^{\nu\alpha\mu\beta} &= T^{\nu\alpha\mu\beta} - T^{\mu\alpha\nu\beta} & ; & & t_5^{\beta\mu\alpha\nu} &= T^{\beta\mu\alpha\nu} - T^{\beta\nu\alpha\mu} \\
t_3^{\nu\beta\alpha\mu} &= T^{\nu\beta\alpha\mu} - T^{\mu\beta\alpha\nu} & ; & & t_6^{\beta\alpha\mu\nu} &= T^{\beta\alpha\mu\nu} - T^{\beta\alpha\nu\mu}
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Por meio de subtrações de (5.54) obtemos, por exemplo,

$$7t_1^{\mu\nu\alpha\beta} + t_1^{\mu\nu\beta\alpha} + t_2^{\nu\alpha\mu\beta} + t_3^{\nu\beta\alpha\mu} + t_4^{\alpha\mu\nu\beta} + t_5^{\beta\mu\alpha\nu} = 0. \tag{5.56}$$

Note que, a princípio, $t_1^{\mu\nu\alpha\beta} \neq t_1^{\mu\nu\beta\alpha}$. Portanto, a troca $\alpha \leftrightarrow \beta$ em (5.55) leva a um total

de 12 tensores de ordem-4 parcialmente antissimétricos. Tomando subtrações de (5.54) e renomeando índices, podemos derivar 12 equações para os 12 tensores. Como no caso de spin-3, o determinante da matriz 12×12 que representa o sistema linear é não nulo, e a solução trivial $t_j^{\gamma\delta\rho\lambda} = 0$ com $j = 1, 2, \dots, 12$ é a única possível. Isso implica imediatamente que o tensor é totalmente simétrico.

$$T^{\gamma\delta\rho\lambda} = T^{(\gamma\delta\rho\lambda)}. \quad (5.57)$$

Então, junto com (5.52) e (5.53), nos demonstramos todos os vínculos de Fierz-Pauli para um tensor de ordem-4 em $D = 3 + 1$, obtidos a partir das equações de autovalor dos operadores de Casimir.

5.3.2 Helicidade-4 em $D = 2 + 1$

Para um tensor arbitrário de ordem-4, a equação (4.80) é dada por:

$$E_\lambda^\mu T^{\lambda\nu\alpha\beta} + E_\lambda^\nu T^{\mu\lambda\alpha\beta} + E_\lambda^\alpha T^{\mu\nu\lambda\beta} + E_\lambda^\beta T^{\mu\nu\alpha\lambda} = 4 m T^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (5.58)$$

Similarmente ao que foi feito em $D = 3 + 1$, vamos descrever os principais passos para encontrar os vínculos de Fierz-Pauli, são esses:

$$\partial^3 (5.58) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta T^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (5.59)$$

$$\partial^3 (5.58) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha T^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (5.60)$$

$$\partial^2 \eta (5.58) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu\gamma}{}_\gamma = 0 \quad (5.61)$$

$$E \partial^2 (5.58) \Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (5.62)$$

$$\partial \eta (5.58) \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu\gamma}{}_\gamma = 0 \quad (5.63)$$

$$E \eta \eta (5.58) \Rightarrow T^\mu{}_\mu{}^\gamma{}_\gamma = 0 \quad (5.64)$$

$$E \eta (5.58) \Rightarrow T^{\mu\nu\gamma}{}_\gamma = 0 \quad (5.65)$$

$$E \partial (5.58) \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (5.66)$$

Vale mencionar que sempre empregamos o uso da equação de Klein-Gordon $\square T^{\mu\nu\alpha\beta} = m^2 T^{\mu\nu\alpha\beta}$, onde quer que fosse possível assim como a própria equação (5.58). Contraindo $E_\mu{}^\rho$, $E_\nu{}^\rho$, $E_\alpha{}^\rho$, e $E_\beta{}^\rho$ com (5.58), temos que:

$$6 T^{\mu\nu\alpha\beta} = T^{\nu\mu\alpha\beta} + T^{\alpha\nu\mu\beta} + T^{\beta\nu\alpha\mu} + T^{\mu\alpha\nu\beta} + T^{\mu\beta\alpha\nu} + T^{\mu\nu\beta\alpha} \quad (5.67)$$

que é a mesma equação (5.54) obtida em $D = 3 + 1$. Esse último resultado demonstra, portanto, que o tensor é totalmente simétrico. Demonstramos assim todos os vínculos de Fierz-Pauli para um tensor de ordem-4, também a partir das equações de autovalor dos operadores de Casimir do grupo de Poincaré em $D = 2 + 1$.

6 UMA INTRODUÇÃO ÀS TEORIAS DE *HIGHER SPIN* NÃO MASSIVAS

Neste capítulo iremos lidar com teorias de calibre não massivas para spin alto. Apresentaremos as teorias de Fronsdal e em seguida de Fang-Fronsdal, como uma generalização das teorias de calibre de spin baixo (spin-1, 3/2 e 2) para spin- s arbitrário. Apresentaremos as simetrias dessa teoria e construiremos assim ações invariantes de calibre, escritas em termos de objetos geométricos. Por fim, falaremos do formalismo de Francia e Sagnotti e tentaremos reobter um resultado dessa teoria de uma maneira mais simples.

Antes de iniciar essa discussão, há algumas notações que adotarei exclusivamente neste capítulo. Lidaremos exclusivamente com objetos simétricos:

$$\varphi_{(\mu_1 \dots \mu_s)} \quad (6.1)$$

onde (...) indica simetrização, sem termos de normalização, por exemplo:

$$\varphi_{(\mu\nu)} = \varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\nu\mu}. \quad (6.2)$$

O traço de será representado por:

$$\varphi'_{\mu_3 \dots \mu_s} = \eta^{\mu_1 \mu_2} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}, \quad (6.3)$$

e o divergente será representado por:

$$\partial \cdot \varphi_{\mu_2 \dots \mu_s} = \partial^{\mu_1} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}. \quad (6.4)$$

6.1 FORMALISMO LAGRANGIANO

Seja um sistema mecânico com N graus de liberdade, descrito pelo conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_i\}_{i=1, \dots, N}$ no espaço de configuração. Seja também L uma função dessas coordenadas, das velocidades generalizadas e eventualmente do tempo,

$$L(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t), \quad (6.5)$$

ou de forma compacta,

$$L(q, \dot{q}, t), \quad (6.6)$$

essa função é denominada lagrangiana.

Podemos então enunciar o princípio de Hamilton (ou mínima ação): Dado um sistema mecânico holônomo descrito pela lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, seu movimento do instante t_1 ao instante t_2 é tal que a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (6.7)$$

é mínima para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória no espaço de configuração.

Assim, segundo o princípio de Hamilton a variação funcional da ação é nula

$$\delta S = 0, \quad (6.8)$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2}, \end{aligned}$$

como estamos considerando os extremos da trajetória fixos, i.e., $\delta(q_1) = \delta(q_2) = 0$, o último termo é nulo. Logo,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (6.9)$$

Como as quantidades δq_i 's são arbitrárias e independentes entre si (não há vínculos), a integral só será nula se o integrando também o for, assim:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (6.10)$$

Essas são as chamadas equações de Euler-Lagrange, que descrevem a evolução temporal de um sistema clássico.

Consideremos agora um sistema com infinitos graus de liberdade, o mesmo sendo descrito por campos como coordenadas generalizadas, ao invés dos índices discretos i , temos um índice contínuo dado pelas coordenadas espaciais $\mathbf{r}$:

$$q_i(t) \mapsto \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (6.11)$$

Logo, os campos formam um espaço de configuração com infinitos graus de liberdade. No caso do sistema discreto, a lagrangiana envolvia uma soma sobre todos os graus de liberdade, de modo que agora no caso contínuo a lagrangiana deve expressar em termos de uma integral espacial sobre uma densidade de lagrangianas, $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, dada por:

$$L = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (6.12)$$

Nesse caso a ação fica dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (6.13)$$

Variando a ação, temos:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) \right\}\end{aligned}$$

considerando que as variações $\delta \varphi$ anulam-se na superfície que delimita o volume de integração, temos que o último termo é nulo. Assim, pelo princípio de Hamilton:

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi = 0. \quad (6.14)$$

Pelo mesmo argumento de antes, de que as variações $\delta \varphi$ são independentes e arbitrárias, resultam as equações de Euler-Lagrange para o caso contínuo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0. \quad (6.15)$$

6.2 CAMPOS BOSÔNICOS

6.2.1 Equação de Fronsda

Os campos de Calibre são de vital importância para física teórica moderna. Seu sucesso se deve a explicação da dinâmica das partículas elementares por meio de campos de calibre de spin-1, estando vinculados aos mediadores das forças eletromagnética, fraca e forte. O modelo mais simples de campo de calibre de spin-1, que podemos dar como exemplo, é fornecido pelo eletromagnetismo. As equações de Maxwell no vácuo podem ser escritas na forma:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (6.16)$$

onde, $F_{\mu\nu}$ é chamado de tensor do campo eletromagnético e é dado em termos de um campo de calibre de spin-1, A_μ , como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.17)$$

Podemos escrever (6.16) em termos de A_μ usando (6.17):

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha = 0 \quad (6.18)$$

Consideremos a seguinte transformação para o campo A_μ :

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \xi(x) \quad (6.19)$$

onde $\xi(x)$ é um parâmetro arbitrário que é função apenas das coordenadas do espaço-tempo x^μ . Note que a equação (6.18) é invariante por essa transformação de calibre.

Os campos de calibre de spin-1 podem ser usados para explicar todas as forças fundamentais da natureza, a exceção da gravitacional, que requer campos de calibre de spin-2. Contudo, a estrutura matemática relacionada a essa teoria de spin-2 apresenta algumas analogias com o caso de spin-1.

Na gravitação, um arcabouço geométrico permeia todas as manipulações algébricas, e pode-se verificar que as equações de Einstein no vácuo se reduzem a:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (6.20)$$

ou, em termos de uma perturbação linear em torno da métrica, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, podemos obter:

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_{(\mu} \partial \cdot h_{\nu)} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h' = 0, \quad (6.21)$$

que é invariante pelo seguinte diefeomorfismo:

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}. \quad (6.22)$$

Podemos supor que as equações (6.18) e (6.22) podem ser generalizadas para campos de calibre de spin- s arbitrário. Um possível *ansatz* é dado pela equação de Fronsdal

$$\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s} = \square \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} - \partial_{(\mu_1} \partial \cdot \phi_{\mu_2 \dots \mu_s)} + \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi'_{\mu_3 \dots \mu_s)} = 0, \quad (6.23)$$

onde $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ é um campo totalmente simétrico e $F_{\mu_1 \dots \mu_s}$ é chamado tensor de Fronsdal. Note que tomando $s = 1$ em (6.23) recuperamos (6.18) e tomando $s = 2$ temos (6.22).

A transformação de calibre do campo é dada por:

$$\delta \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} = \partial_{(\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_s)}. \quad (6.24)$$

Logo, a variação do tensor de Fronsdal será:

$$\delta \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s} = 3 \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \xi'_{\mu_4 \dots \mu_s)}. \quad (6.25)$$

Vimos que para os casos de spin-1 e spin-2 ($s=1$ e $s=2$), o tensor de Fronsdal era naturalmente um invariante de calibre. Perceba de (6.25) que para $s > 2$, precisamos impor que o parâmetro da transformação tenha traço nulo, a fim de que o tensor de Fronsdal seja invariante de calibre

$$\xi'_{\mu_1 \dots \mu_{s-3}} = 0. \quad (6.26)$$

A fim de que o campo de calibre propague o número correto de graus de liberdade de um campo de spin- s não massivo, vamos impor que o campo tenha duplo traço nulo:

$$\phi''_{\mu_1 \dots \mu_{s-4}} = 0. \quad (6.27)$$

Para ver que essa condição garante o número de graus de liberdade correto vide apêndice-A.

6.2.2 Ação de Fronsda

Precisamos agora encontrar uma ação da qual possamos derivar essas equações de movimento e que ao mesmo tempo seja invariante de calibre. Começamos notando que o tensor de Fronsda satisfaz a seguinte identidade de Bianchi:

$$\partial \cdot \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} - \frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} \mathcal{F}'_{\mu_2 \dots \mu_{s-1})} = 0. \quad (6.28)$$

Definimos então o seguinte tensor de Einstein:

$$\mathcal{G}_{\mu_1 \dots \mu_s} = \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{1}{2} \eta_{(\mu_1 \mu_2} \mathcal{F}'_{\mu_3 \dots \mu_s)} \quad (6.29)$$

que é claramente um invariante de calibre. Note que a divergência do tensor de Einstein é proporcional a métrica

$$\partial \cdot \mathcal{G}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \sigma} = -\frac{1}{2} \eta_{(\mu_1 \mu_2} \partial \cdot \mathcal{F}'_{\mu_3 \dots \mu_{s-1})}. \quad (6.30)$$

Vamos propor então a seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s}, \quad (6.31)$$

tomando sua variação de calibre, temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \delta \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s} + \frac{1}{2} \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} \delta \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s} \\ &= \frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_s)} \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s} \\ &= \frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} (\xi_{\mu_2 \dots \mu_s)} \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s}) - \frac{1}{2} \xi_{(\mu_2 \dots \mu_{s-1})} \partial \cdot \mathcal{G}^{\mu_2 \dots \mu_s}, \end{aligned}$$

porém, de (6.30) vemos que o segundo termo é nulo, já que o divergente do tensor de Einstein é proporcional a métrica, o que acaba tomando o traço do parâmetro de calibre, portanto:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} (\xi_{\mu_2 \dots \mu_s)} \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s}), \quad (6.32)$$

isso nos leva a seguinte ação invariante de calibre:

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} \mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s}. \quad (6.33)$$

Contudo, note que a equação de movimento advinda da ação (6.33) é

$$\mathcal{G}^{\mu_1 \dots \mu_s} = 0, \quad (6.34)$$

que não coincide com a equação de Fronsdal (6.23). Porém se tomarmos o traço da mesma, temos que $\mathcal{F}'^{\mu_1 \dots \mu_{s-2}} = 0$, logo a equação (6.34) é equivalente a equação de

Fronsdal, já que o tensor de Einstein difere do tensor de Fronsdal, apenas pelo traço do tensor de Fronsdal.

6.3 CAMPOS FERMIÔNICOS

Seguindo o mesmo caminho que na seção anterior podemos desenvolver uma teoria de calibre para campos fermiônicos de spin arbitrário. Dessa vez, tendo como base de generalização a teoria de spin-3/2, temos como *ansatz* a equação de Fang-Fronsdal:

$$\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s} = \not{\partial} \psi_{\mu_1 \dots \mu_s} - \partial_{(\mu_1} \not{\not{\mathcal{F}}}_{\mu_2 \dots \mu_s)} = 0, \quad (6.35)$$

onde o campo de calibre $\psi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ é um espinor-tensor, cujo a transformação de calibre é dada por:

$$\delta \psi_{\mu_1 \dots \mu_s} = \partial_{(\mu_1} \zeta_{\mu_2 \dots \mu_s)}. \quad (6.36)$$

A variação do tensor de Fang-Fronsdal nos dá:

$$\delta \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s} = -2 \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \not{\not{\mathcal{F}}}_{\mu_3 \dots \mu_s)}. \quad (6.37)$$

No caso de spin-3/2 ($s = 1$) o tensor de Fang-Fronsdal é invariante de calibre, para spin maiores ou iguais a 5/2 ($s \geq 2$) precisamos impor que o parâmetro da transformação seja gama-traço nulo, a fim de que $\mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s}$ seja invariante, ou seja:

$$\not{\not{\mathcal{F}}}_{\mu_1 \dots \mu_{s-2}} = 0. \quad (6.38)$$

Uma condição suficiente para que o campo $\psi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ propague o número correto de graus de liberdade de um campo não massiva de spin- $(s + 1/2)$ é que seu triplo gama-traço seja nulo, i.e.,

$$\not{\not{\not{\mathcal{F}}}}_{\mu_1 \dots \mu_{s-3}} = 0. \quad (6.39)$$

Perceba que com a condição (6.39), o tensor de Fang-Fronsdal satisfaz a seguinte identidade de Bianchi:

$$\partial \cdot \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} - \frac{1}{2} \not{\partial} \not{\mathcal{F}}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} - \frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} \mathcal{F}'_{\mu_2 \dots \mu_{s-1})} = 0, \quad (6.40)$$

que como antes, nos leva a definir o seguinte tensor de Einstein:

$$\mathcal{G}_{\mu_1 \dots \mu_s} = \mathcal{F}_{\mu_1 \dots \mu_s} - \frac{1}{2} \gamma_{(\mu_1} \not{\mathcal{F}}_{\mu_2 \dots \mu_s)} - \frac{1}{2} \eta_{(\mu_1 \mu_2} \mathcal{F}'_{\mu_3 \dots \mu_s)}, \quad (6.41)$$

que é claramente um invariante de calibre. A divergência do Tensor de Einstein é:

$$\partial \cdot \mathcal{G}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} = \frac{1}{2} \gamma_{(\mu_1} \partial \cdot \not{\mathcal{F}}_{\mu_2 \dots \mu_{s-1})} - \frac{1}{2} \eta_{(\mu_1 \mu_2} \partial \cdot \mathcal{F}'_{\mu_3 \dots \mu_{s-1})}, \quad (6.42)$$

que é proporcional a matrizes gama, lembrando que a métrica está relacionada as matrizes gama pela álgebra de Clifford (3.53).

Propomos então a seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}_{\mu_1\ldots\mu_s}\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s}, \quad (6.43)$$

a unidade imaginária está presente para que nossa lagrangiana seja hermitiana. Tomando a variação de calibre da lagrangiana

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -i\delta\bar{\psi}_{\mu_1\ldots\mu_s}\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s} - i\bar{\psi}_{\mu_1\ldots\mu_s}\delta\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s} \\ &= -i\partial_{(\mu_1}\bar{\zeta}_{\mu_2\ldots\mu_s)}\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s} \\ &= -i\partial_{(\mu_1}(\bar{\zeta}_{\mu_2\ldots\mu_s)}\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s}) - i\zeta_{(\mu_2\ldots\mu_{s-1})}\partial\cdot\mathcal{G}^{\mu_2\ldots\mu_s}, \end{aligned}$$

porém, de (6.42) vemos que o segundo termo é nulo, já que o divergente do tensor de Einstein é proporcional a matrizes gama, o que acaba tomando o gama-traço do parâmetro de calibre, portanto:

$$\delta\mathcal{L} = -i\partial_{(\mu_1}(\zeta_{\mu_2\ldots\mu_s)}\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s}). \quad (6.44)$$

Somos então levados a uma ação invariante de calibre, dada por:

$$S = -i \int d^D x \bar{\psi}_{\mu_1\ldots\mu_s}\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s}, \quad (6.45)$$

cuja a equação de movimento é

$$\mathcal{G}^{\mu_1\ldots\mu_s} = 0. \quad (6.46)$$

Tomando o gama-traço de (6.46), temos que $\mathcal{F}'_{\mu_1\ldots\mu_{s-1}} = 0$, consequentemente $\mathcal{F}'_{\mu_1\ldots\mu_{s-2}} = 0$, concluímos assim que essa equação de movimento é equivalente a equação de Fang-Fronsdal.

6.4 TEORIAS DE *HIGHER SPIN* NÃO LOCAIS

Recentemente, uma formulação minimal (aqui, “minimal” refere-se à: Mínima quantidade de campos em uma teoria invariante por transformações de difeomorfismo irrestritas) foi proposta por Francia e Sagnotti, vide seleção de artigos (FRANCIA; SAGNOTTI, 2002), (FRANCIA; SAGNOTTI, 2003) e (FRANCIA; SAGNOTTI, 2005). Nesta formulação, voltada para teorias não massivas, o campo totalmente simétrico não possui as restrições usuais impostas pelos modelos de Fronsdal, no qual o campo é duplo traço nulo (6.27), e Fang-Fronsdal onde o campo é triplo gama-traço nulo (6.39). Além disso, o mesmo se aplica ao parâmetro de simetria de calibre que possui traço nulo no caso bosônico e gama-traço nulo no caso fermiônico. Decorre dessa proposta que o modelo traz em sua formulação campos compensadores de ordem- $(n-3)$ no caso bosônico e ordem- $(n-2)$ no caso fermiônico. Portanto, os autores investigaram a obtenção de modelos não locais de spin alto por meio de integrações funcionais sobre os compensadores, e a relação entre a formulação minimal (sem restrições) de Francia e Sagnotti e a formulação usual de Fang-Fronsdal pode ser investigada através de fixações de calibre adequadas.

Acreditamos que os resultados obtidos por Francia e Sagnotti podem ser alcançados por meio de redefinições nos campos, ou seja, trabalhando a nível da lagrangiana apenas e utilizando como ponto de partida a teoria de Fang-Fronsdal. Faremos isso para o caso de spin-5/2, na esperança de reobter a forma não local obtida por Francia em (FRANCIA, 2010).

6.4.1 Recuperando ações não locais - spin-5/2

A ação de Fang-Fronsdal para campos de spin-5/2, não massivos, é dada tomando $s = 2$ em (6.45), temos então:

$$S[\tilde{\psi}] = -i \int d^D x \tilde{\psi}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(\tilde{\psi}). \quad (6.47)$$

Vamos considerar a seguinte redefinição no campo:

$$\tilde{\psi}_{\mu\nu} \rightarrow \psi_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu} \quad ; \quad \Lambda_{\mu\nu} \equiv \gamma_{(\mu} \partial_{\nu)} \chi \quad (6.48)$$

onde nós introduzimos o campo compensador de ordem- $(s - 2)$, nesse caso dado pelo espinor χ .

Sob a redefinição (6.48) a ação (6.47) se torna:

$$S[\psi, \chi] = -i \int d^D x \left[\tilde{\psi}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(\psi) + \tilde{\psi}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(\Lambda) + \bar{\Lambda}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(\psi) + \bar{\Lambda}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(\Lambda) \right]. \quad (6.49)$$

A equação de movimento para $\bar{\psi}$ é dada por:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(\psi + \Lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}(\psi + \Lambda) = 0, \quad (6.50)$$

então,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\psi) = 2 D \partial_\mu \partial_\nu \chi. \quad (6.51)$$

A ação (6.49) é invariante sob as transformações:

$$\delta \psi_{\mu\nu} = \partial_{(\mu} \zeta_{\nu)} \quad ; \quad \delta \chi = -\frac{1}{D} \not{\partial} \quad (6.52)$$

cujo o parâmetro de calibre, ζ , não apresenta nenhuma restrição.

A relação (6.51) pode ser usada para eliminar o campo compensador χ , temos a seguinte ação não local¹:

$$S[\psi] = -i \int d^D x \left[\tilde{\psi}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}(\psi) - \partial \cdot \bar{\mathcal{F}} \frac{\not{\partial}}{2 \square^2} \partial \cdot \mathcal{F} \right] \quad (6.53)$$

que coincide com aquela obtida por Francia, vide equação (61) de (FRANCIA, 2010).

¹ A não localidade se deve a presença do operador d'alembertiano no denominador, o motivo disso implicar em não localidade pode ser encontrado em (BENGTSSON, 2020)

7 CONCLUSÃO

Esse trabalho foi dividido em duas grandes partes ligadas a diferentes ramos da teoria de *higher spin*. Na primeira parte lidamos com teorias de spin alto massivas em $D = 3 + 1$ e $D = 2 + 1$ dimensões. Começando com a obtenção dos geradores do grupo de Poincaré, conseguimos obter os gerados nas representações tensoriais e espinoriais de ordem arbitrária. Tais geradores nos possibilitaram construir os operadores de Casimir da álgebra so grupo de Poincaré $\mathfrak{iso}(3, 1)$ e $\mathfrak{iso}(2, 1)$ e suas respectivas equações de autovalor. Das equações de autovalor, foi possível obter os vínculos de Fierz-Pauli, ou seja, de maneira independente de modelo.

Os vínculos de Fierz-Pauli, obtidos diretamente das equações de autovalor determinadas pelos operadores de Casimir dos grupos de Poincaré parecem ter sido obtidos pela primeira vez em (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016). Nesse trabalho os autores conjecturam a possibilidade de estender os resultados por eles obtidos para spin arbitrário. Tal conjectura motivou a publicação do trabalho (SILVA et al., 2024) por mim e meu orientador Elias Leite Mendonça, em colaboração com professor Denis Dalmazi (UNESP) e o pós-doutorando Rafael Robson Lino dos Santos (NCBJ-Polônia). Nessa publicação encontram-se os resultados originais do presente trabalho e ademais argumentamos sobre as dificuldades técnicas de se generalizar o procedimento, de obtenção das condições de Fierz-Pauli, para spin arbitrário. Então os vínculos de Fierz-Pauli não são restrições postas *ad hoc* sobre tensores e espinores-tensores para que os campos propaguem o número correto de graus de liberdade, elas são ditadas pela álgebra de Poincaré, sendo assim elas devem estar presentes em qualquer modelo construído para descrever partículas massivas de qualquer spin.

Vale mencionar que com os resultados obtidos nesse trabalho é possível revisitar as equações de movimento dos modelos auto-duas de primeira ordem que descrevem partículas massivas com helicidade- 1 (TOWNSEND; PILCH; NIEUWENHUIZEN, 1984), $3/2$ (DESER; KAY, 1983), 2 (ARAGONE; KHOUDEIR, 1986), $5/2$ (ARAGONE; STEPHANY, 1984), 3 e 4 (ARAGONE; KHOUDEIR, 1993) em $D = 2 + 1$ dimensões, já que após obter as condições de Fierz-Pauli dinamicamente, tais equações de movimento se reduzem as equações de Klein-Gordon e Pauli-Lubanski.

Diferente da primeira parte, que lidamos com teorias de spin alto massivas, nos valendo de aspectos algébricos do grupo de Poincaré e portanto de maneira independente de modelo, na segunda parte desse trabalho lidamos com teorias de spin alto não massivas, agora atreladas a um modelo. Em especial, apresentamos os modelos de Fronsdal e Fang-Fronsdal, como generalizações das teorias de calibre de spin baixos dos casos bosônicos e fermiônicos, respectivamente. A fim de que as equações de Fronsdal (6.23) e Fang-Fronsdal (6.35) sejam invariantes de calibre, foi preciso impor condições de traço nulo e gama-traço nulo sobre os parâmetros das transformações de calibre dessas teorias. Além

disso, com o intuito de que os campos propagassem os graus de liberdade corretos, fomos levados a impor condições de duplo traço nulo, sobre o campo bosônico, e triplo gama-traço nulo, sobre o campo fermiônico. Na busca por uma ação invariante de calibre, que fornecesse as equações de Fronsdal e Fang-Fronsdal, conseguimos construir generalizações do tensor de Einstein, e por fim obter ações escritas em termos desse objeto.

Em formulações minimais para teorias de spin alto não massivas, propostas recentemente por Francia e Sagnotti, os campos e os parâmetros de calibre não possuem as restrições usuais, presentes nos modelos de Fronsdal e Fang-Fronsdal. Em tais formulações há presença de campos compensadores, de modo que ao integrar funcionalmente sobre os mesmos, os autores obtêm modelos não locais de spin alto. Na tentativa de reobter os resultados alcançados por Francia na teoria de spin-5/2, propomos uma redefinição sobre o campo de calibre, trabalhando a nível da lagrangiana e ao eliminar o campo compensador, adicionado em nossa redefinição, conseguimos recuperar o modelo não local obtido em (FRANCIA, 2010).

Vale destacar, que no presente momento da finalização deste trabalho estamos trabalhando na obtenção da teoria não local de spin-7/2. Diferentemente do que fizemos no caso de spin-5/2, o campo de calibre no caso de spin-7/2 é sujeito a condição de triplo gama-traço-nulo (6.39), sendo assim devemos fazer uma transformação que expõe o triplo gama-traço do campo antes de adicionarmos o campo compensador, o que torna o procedimento mais difícil do ponto de vista computacional, já que teremos expressões consideravelmente maiores se comparadas ao caso de spin-5/2. Contudo, temos boas perspectivas, pois os resultados obtidos aqui puderam ser implementados, utilizando computação algébrica, no *Wolfram Mathematica*, com o auxílio do pacote *FieldsX* (FRÖB, 2020), que possibilita efetuar cálculos computacionais com férmions. A ideia é que possamos fazer o mesmo no caso de spin-7/2.

REFERÊNCIAS

- ARAGONE, C.; KHOUDEIR, A. Self-dual massive gravity. **Physics Letters B**, Netherlands, v. 173, n. 2, p. 141–144, 1986.
- ARAGONE, C.; KHOUDEIR, A. **Selfdual spin 3 and 4 theories**. 1993.
- ARAGONE, C.; STEPHANY, J. Dreibein massive spin-5/2. **Classical and Quantum Gravity**, Bristol, v. 1, n. 3, p. 265, 1984.
- BENGTSSON, A. **Volume 1 Free Theory**. Berlin, Boston: Gruyter, 2020. <<https://doi.org/10.1515/9783110451771>>. Acesso em: 24/10/2024.
- DESER, S.; KAY, J. Topologically massive supergravity. **Physics Letters B**, Netherlands, v. 120, n. 1-3, p. 97–100, 1983.
- DIRAC, P. A. M. Relativistic wave equations. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences**, London, v. 155, n. 886, p. 447–459, 1936.
- E.P.WIGNER. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. **Annals Math.**, Princeton, 10.2307/1968551, p. 149–204, 1939.
- FANG, J.; FRONSDAL, C. Massless fields with half-integral spin. **Physical Review D**, [S.l.], v. 18, n. 10, p. 3630, 1978.
- FIERZ, M.; PAULI, W. E. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, London, v. 173, n. 953, p. 211–232, 1939.
- FRANCIA, D. On the relation between local and geometric lagrangians for higher spins. **Journal of Physics: Conference Series**, Bristol, v. 222, n. 1, p. 012002, 2010.
- FRANCIA, D.; SAGNOTTI, A. Free geometric equations for higher spins. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 543, n. 3-4, p. 303–310, 2002.
- FRANCIA, D.; SAGNOTTI, A. On the geometry of higher-spin gauge fields. **Classical and Quantum Gravity**, Bristol, v. 20, n. 12, p. S473, 2003.
- FRANCIA, D.; SAGNOTTI, A. Minimal local lagrangians for higher-spin geometry. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 624, n. 1-2, p. 93–104, 2005.
- FRÖB, M. B. Fieldsx—an extension package for the xact tensor computer algebra suite to include fermions, gauge fields and brst cohomology. arXiv [Preprint], 2020. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2008.12422>>.
- JACKIW, R.; NAIR, V. P. Relativistic wave equation for anyons. **Physical Review D**, [S.l.], v. 43, n. 6, p. 1933, 1991.
- KESSEL, P. **The physics of higher-spin theories**. Dissertationen (Master Physik)- Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 2016.
- KOENIGSTEIN, A.; GIACOSA, F.; RISCHKE, D. H. Classical and quantum theory of the massive spin-two field. **Annals of Physics**, New York, v. 368, p. 16–55, 2016.

LANDAU, L. D. **The classical theory of fields**. Oxford: Elsevier, 2013. v. 2.

SILVA, H. A. et al. Generators of the poincaré group for arbitrary tensors and spinor-tensors. **Annals of Physics**, New York, v. 464, p. 169646, 2024.

SINGH, L.; HAGEN, C. Lagrangian formulation for arbitrary spin. i. the boson case. **Physical Review D**, [S.l], v. 9, n. 4, p. 898, 1974.

TOWNSEND, P.; PILCH, K.; NIEUWENHUIZEN, P. V. Self-duality in odd dimensions. **Physics Letters B**, [S.l], v. 136, n. 1-2, p. 38–42, 1984.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. Cambridge: Cambridge university press, 1995. v. 2.

WIT, B. de; FREEDMAN, D. Z. Systematics of higher-spin gauge fields. **Physical Review D**, [S.l], v. 21, n. 2, p. 358, 1980.

APÊNDICE A – CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE: CASO BOSÔNICO

Precisamos verificar se o campo de calibre, $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$, propaga o número de graus de liberdade correto de um campo não massivo de spin- s , em um espaço de Minkowski de dimensão D , que é:

$$\binom{D-3+s}{s} - \binom{D-5+s}{s-2} \quad (\text{A.1})$$

que pode ser checado (KESSEL, 2016), onde o autor obtém esse número detalhadamente.

Vamos mostrar que uma condição suficiente para que $\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}$ propaga o número correto de graus de liberdade é a imposição do duplo traço nulo, i.e.,

$$\phi''_{\mu_1 \dots \mu_{s-4}} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Começamos fixando nosso calibre, vamos escolher para isso o calibre de de Donder generalizado, dado por:

$$\mathcal{D}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} = \partial^\sigma \phi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \sigma} - \frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} \phi'_{\mu_2 \dots \mu_{s-1})} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Tomemos o traço do tensor de de Donder

$$\mathcal{D}'_{\mu_1 \dots \mu_{s-3}} = -\frac{1}{2} \partial_{(\mu_1} \phi''_{\mu_2 \dots \mu_{s-3})} = 0 \quad (\text{A.4})$$

ou seja, o mesmo possui traço nulo. Esse resultado será útil mais tarde.

Calculemos então a variação do tensor de $\mathcal{D}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$, para isso é útil notar que

$$\partial^\sigma \delta \phi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \sigma} = \square \xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} + \partial^\sigma \partial_{(\mu_1} \xi_{\mu_2 \dots \mu_{s-1}) \sigma}, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta \phi'_{\mu_1 \dots \mu_{s-2}} = 2 \partial^\sigma \xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \sigma}, \quad (\text{A.6})$$

segue daí e de (A.4), que

$$\mathcal{D}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} = \square \xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} \quad (\text{A.7})$$

portanto, (A.4) não fixa o calibre completamente, para isso podemos fazer $\square \xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} = 0$.

Note que

$$\partial_{(\mu_1} \mathcal{D}_{\mu_1 \dots \mu_s)} = \partial_{(\mu_1} \partial^\sigma \phi_{\mu_2 \dots \mu_s) \sigma} - \partial_{(\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi'_{\mu_3 \dots \mu_s)}, \quad (\text{A.8})$$

que coincide com os dois últimos termos de (6.23). Logo, no calibre de de Donder a equação de Fronsdal se reduz a:

$$\square \phi_{\mu_1 \dots \mu_s} = 0, \quad (\text{A.9})$$

cujos a solução é dada por

$$\phi_{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \int d^D p e^{ip \cdot x} a_{\mu_1 \dots \mu_s}(p), \quad (\text{A.10})$$

com $p^2 = 0$. Note que o tensor $a_{\mu_1 \dots \mu_s}$, deve ser completamente simétrico e possuir traço nulo, sendo assim ele possui

$$\binom{D-1+s}{s} - \binom{D-5+s}{s-4}, \quad (\text{A.11})$$

componentes independentes. Além disso, algumas dessas componentes estão amarradas devido o calibre (A.4), como o tensor de de Donder é completamente simétrico e como vimos tem traço nulo,

$$\binom{D-2+s}{s-1} - \binom{D-4+s}{s-3}, \quad (\text{A.12})$$

condições, são impostas sobre $a_{\mu_1 \dots \mu_s}$. Não podemos nos esquecer também da condição $\square \xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}} = 0$, que possui solução

$$\xi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}(x) = \int d^D p e^{ip \cdot x} \tilde{\xi}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}(p), \quad (\text{A.13})$$

com $p^2 = 0$. O parâmetro $\tilde{\xi}_{\mu_1 \dots \mu_{s-1}}$ é totalmente simétrico e possui traço nulo, isso nos permite eliminar mais

$$\binom{D-2+s}{s-1} - \binom{D-4+s}{s-3}, \quad (\text{A.14})$$

componentes de $a_{\mu_1 \dots \mu_s}$. Por fim, temos que o número de graus de liberdade é

$$\binom{D-1+s}{s} - \binom{D-5+s}{s-4} - 2 \left[\binom{D-2+s}{s-1} - \binom{D-4+s}{s-3} \right] = \binom{D-3+s}{s} - \binom{D-5+s}{s-2}, \quad (\text{A.15})$$

que é o número correto de graus de liberdade (A.1). Portanto, a condição de duplo traço nulo imposta sobre o campo de calibre é uma condição suficiente para que o mesmo propague corretamente os graus de liberdade de um campo de spin- s não massivo.