

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE EWINS-GLEESON PARA
IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Projetos e Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Mauro Hugo Mathias

Co-orientador: Dr. Everaldo de Barros

Guaratinguetá

2007

M539e	Mendonça, Willy Roger de Paula Estudo e implementação do método de Ewins-Gleeson para identificação de parâmetros modais. / Willy Roger de Paula Mendonça.- Guaratinguetá : [s.n.], 2007 97f.: il. Bibliografia: f. 94-97 Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2007 Orientador: Prof. Dr. Dr. Mauro Hugo Mathias Co-orientador: Dr. Everaldo de Barros 1. Vibrações I. Título CDU 534.1
-------	--

UNESP  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**"ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE EWINS-GLEESON PARA
IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS"**

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA"

PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA: PROJETOS

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Marcelo S. Pereira
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. MAURO HUGO MATHIAS
Orientador / UNESP-FEG

Prof. Dr. JOSÉ ELIAS TOMAZINI
UNESP-FEG

Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELO SOUSA
UNESP-FEB

Dezembro de 2007

DADOS CURRICULARES

WILLY ROGER DE PAULA MENDONÇA

NASCIMENTO	25.05.1979 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP
FILIAÇÃO	Mário Lisboa Mendonça Beatriz Paula Pinto
1998/2002	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

Aos meus pais, Beatriz Paula Pinto e Mário Lisboa Mendonça pelo apoio incondicional e grande incentivo em todos os dias da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor e mestre Mauro Hugo Mathias, pela dedicação em me ensinar e me orientar nestes vários anos, por ser amigo além de professor, pelas horas de sono mal dormidas, pelas madrugadas corrigindo meus trabalhos e por me ajudar a subir mais este degrau.

Aos pesquisadores do Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial da Divisão de integração e Ensaio pelo apoio técnico ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores, técnicos e funcionários do departamento de mecânica por me concederem os recursos necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

Às funcionárias da biblioteca por sempre me receberem com um sorriso mesmo quando meu mau humor era notado a distância.

À minha mãe Beatriz, por me mostrar às virtudes do conhecimento, ao meu pai Mário, por me dar tranquilidade enquanto segui o meu caminho nos estudos, aos meus irmãos Michele, Diego, Matheus e Lucas por me dar alegria nos momentos de descanso.

À minha namorada Cristiane, pelo companheirismo, compreensão e por me motivar a finalizar este trabalho quando o seu fim parecia distante.

“Existem apenas duas maneiras de ver a vida.
Uma é pensar que não existem milagres e a outra
é que tudo é um milagre.”

Albert Einstein

MENDONÇA, W. R. P. **Estudo e implementação do método de Ewins-Gleeson para identificação de parâmetros modais**. 2007. 97 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

RESUMO

Estruturas e máquinas em regime operacional usualmente são submetidas a carregamentos dinâmicos ocasionados por vibração. Este fenômeno é em grande parte prejudicial, tendo em vista que podem causar falhas por fadiga, ruídos indesejáveis, etc. Com objetivo de minimizar e avaliar níveis de vibração em sistemas estruturais, técnicas de modelagem teórica e experimental vêm sendo utilizadas com frequência. Dentre diferentes técnicas aplicadas à avaliação do comportamento dinâmico de estruturas, a análise modal figura como uma das principais. O presente trabalho tem como objetivo implementar um método de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência, de estruturas com vários graus de liberdade (MDOF). O método foi implementado em um ambiente computacional de baixo custo. O programa desenvolvido possibilita através de suas interfaces gráficas identificar os parâmetros modais de dados experimentais de uma estrutura metálica ensaiada, simular os modos de vibrar identificados da estrutura e permite de forma prática que os usuários com poucos conhecimentos em análise modal interajam com todo o processo de análise dos dados experimentais.

PALAVRAS-CHAVE: Análise modal, Sistemas Estruturais, Identificação de Sistemas

MENDONÇA, W. R. P. Study and implementation of the Ewins-Gleeson method applied to modal parameters identification. 2007. 97 f. Dissertation (Masters degree in Mechanical Engineering) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

ABSTRACT

Structures and machines in operational regime are usually submitted to dynamic loads caused by vibration. This phenomenon is largely harmful, considering can cause cracks for fatigue, undesirable noises, etc. With objective of minimize and evaluate vibration levels in structural systems, techniques of theoretical and experimental modeling have been used frequently. Among different techniques applied to the evaluation of the dynamic behavior of structures, the modal analysis present as one of the main. The present work has as objective implements a method of identification of modal parameters in the domain of the frequency to structures with multi degrees of freedom (MDOF). The method should be implemented in a low cost software. The developed software had made possible through their graphic interfaces to identify the modal parameters of experimental data of a rehearsed metallic structure, to simulate the modes of vibration identified and make possible users with few knowledge in modal analysis interact with the whole the process of analysis of the experimental data.

KEYWORDS: Modal analysis, Structural Systems, System Identification

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Exemplo de modelo de N graus de liberdade	22
FIGURA 2 - Formas de vibrar de uma placa	24
FIGURA 3 - Representações de uma FRF	37
FIGURA 4 - Amortecimento proporcional e não-proporcional	38
FIGURA 5 - Diferentes representações de uma FRF	38
FIGURA 6 – Gráfico de Nyquist para um MDOF	41
FIGURA 7 - Exemplo de frequências Ω escolhidas	44
FIGURA 8 - Ajuste para 2 modos de vibrar	49
FIGURA 9 - Ajuste para 3 modos de vibrar	50
FIGURA 10 - Ajuste para 6 modos de vibrar	50
FIGURA 11 - Frequências ajustadas com as mesmas fases	51
FIGURA 12 - Frequências ajustadas com fases diferentes	52
FIGURA 13 - Seleção ideal das frequências do método de Ewins-Gleeson	52
FIGURA 14 - Entrada do programa	54
FIGURA 15 - Definição dos parâmetros de ensaio	54
FIGURA 16 - Janela de procura	56
FIGURA 17 - Gráficos da parte real e imaginária da FRF	57
FIGURA 18 - Gráficos da fase e amplitude logarítmica da FRF	57
FIGURA 19 - Gráfico de Nyquist	58
FIGURA 20 - Delimitação da região de análise	59
FIGURA 21 - Tela de definição dos parâmetros de análise	60
FIGURA 22 - Controle de definição dos parâmetros	60
FIGURA 23 - Sétima frequência ajustada	60
FIGURA 24 - Ajuste da FRF e resultados obtidos	61
FIGURA 25 - Tela de obtenção dos modos de vibrar	62
FIGURA 26 - Campo de um modo de vibrar	62
FIGURA 27 - Controles para analisar o modo de vibrar	64
FIGURA 28 - Ajuste do modo de Vibrar	65

FIGURA 29 - Descontinuidade nas amplitudes	65
FIGURA 30 - Ponto fora da trajetória	66
FIGURA 31 - Matriz com ponto incorreto	67
FIGURA 32 - Matriz com ponto ajustado	67
FIGURA 33 - Modo ajustado	67
FIGURA 34 - Aparato experimental	69
FIGURA 35 - Pontos de excitação	71
FIGURA 36 - Arquivo com informações do ensaio	72
FIGURA 37 - Arquivo gerado para uma FRF	73
FIGURA 38 - Realocação dos dados no arquivo	74
FIGURA 39 - Ajuste para a primeira frequência	75
FIGURA 40 - Ajuste para a segunda frequência	75
FIGURA 41 - Ajuste para a terceira frequência	76
FIGURA 42 - Ajuste para a quarta e quinta frequência	76
FIGURA 43 - Ajuste para sexta, sétima e oitava frequência	76
FIGURA 44 - Ajuste para a nona frequência	77
FIGURA 45 - Ajuste para a décima frequência	77
FIGURA 46 - Primeiro modo	78
FIGURA 47 - Segundo modo	78
FIGURA 48 - Terceiro modo	79
FIGURA 49 - Quarto modo	79
FIGURA 50 - Quinto Modo	79
FIGURA 51 - Sexto Modo	79
FIGURA 52 - Sétimo Modo	79
FIGURA 53 - Oitavo Modo	79
FIGURA 54 - Nono modo	80
FIGURA 55 - Décimo modo	80
FIGURA 56 - Correções efetuadas no primeiro e segundo modo de vibrar	81
FIGURA 57 - Correção efetuada para o oitavo modo de vibrar	82
FIGURA 58 - Modelo em elementos finitos	84
FIGURA 59 - Definição dos parâmetros do material da placa	84

FIGURA 60 - Comparação para o primeiro modo	85
FIGURA 61 - Comparação para o segundo modo	86
FIGURA 62 - Comparação para o terceiro modo	86
FIGURA 63 - Comparação para o quarto modo	86
FIGURA 64 - Comparação para o quinto modo	87
FIGURA 65 - Comparação para o sexto modo	87
FIGURA 66 - Comparação para o sétimo modo	87
FIGURA 67 - Comparação para o oitavo modo	88
FIGURA 68 - Comparação para o nono modo	88
FIGURA 69 - Comparação para o décimo modo	88

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Frequências ajustadas pelo método de Ewins-Glesson	77
TABELA 2 - Resultados da análise	78
TABELA 3 - Frequências obtidas na análise em elementos finitos	85
TABELA 4 - Comparação de resultados	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SDOF	- Single Degree of Freedom
MDOF	- Multi Degree of Freedom
FRF	- Função Resposta em Frequência
FRI	- Função Resposta ao Impulso
MIMO	- Multiple Input Multiple Output
AME	- Análise Modal Experimental
MAC	- Modal Assurance Criterion
VBA	- Visual Basic for Applications

LISTA DE SÍMBOLOS

c	Coeficiente de amortecimento viscoso
d	Coeficiente de amortecimento histerético
k	Constante de rigidez
e	Erro quadrático
m	Massa
s	Operador Laplaciano
r	Referência ao modo de vibrar
i	Ponto de medição
k	Ponto de medição
c_c	Coeficiente de amortecimento crítico
ω_d	Frequência natural amortecida
s_k	Autovalor
ω_n	Frequência natural não amortecida
A	Resíduo
B	Constante complexa
L	Número de pontos
R	Raio
N	Graus de liberdade
$f(t)$	Força de excitação aplicada ao sistema
$x(t)$	Coordenada de deslocamento
$\dot{x}(t)$	Coordenada de velocidade
$\ddot{x}(t)$	Coordenada de aceleração
$q(t)$	Coordenada generalizada de deslocamento
$\dot{q}(t)$	Coordenada generalizada de velocidade
$\ddot{q}(t)$	Coordenada generalizada de aceleração
$u(t)$	Vetor de coordenada espaço-estado
$\dot{u}(t)$	Vetor de coordenada espaço-estado
$F(\omega)$	Transformada de Fourier do sinal de entrada $x(t)$
$X(\omega)$	Transformada de Fourier do sinal de saída
$H(\omega)$	Função resposta de frequência do sistema
$H(s)$	Função de transferência do sistema
$[M]$	Matriz de massa
$[K]$	Matriz de rigidez
$[C]$	Matriz de amortecimento
$[I]$	Matriz identidade
$[A]$	Matriz espaço-estado
$[B]$	Matriz espaço-estado
$[D]$	Matriz histerética de amortecimento
$[9]$	Matriz de amortecimento em coordenadas generalizadas
$[m_r]$	Matriz diagonal de massa modal
$[k_r]$	Matriz diagonal de rigidez modal
$[\omega_r]$	Matriz diagonal de frequências
$[a_r]$	Matriz diagonal

$[b_r]$	Matriz diagonal
$[^{\wedge}]$	Matriz de coeficientes da receptância
$[\Phi]$	Matriz modal de massa normalizada
$[\Psi]$	Matriz modal
$[c_r]$	Matriz de amortecimento modal
$\text{Re}(\alpha)$	Parte real da função de transferência
$\text{Im}(\alpha)$	Parte imaginária da função de transferência
$N \times N$	Ordem da matriz
ξ	Fator de amortecimento viscoso
n	Fator de amortecimento histerético
ω	Frequência
ε	Constante
υ	Constante
λ	Autovalores complexos
γ	Constante arbitrária
θ	Ângulo
Ω	Frequência escolhida
o	Origem
$\{\Psi\}$	Autovetores
$\alpha(\omega)$	Receptância
$Y(\omega)$	Mobilidade
$A(\omega)$	Acelerância
$[\alpha(\omega)]$	Matriz receptância
$\{f\}$	Vetor de resposta
$\{\bar{X}\}$	Vetor
$\det$	Determinante
m_R	Coeficiente angular da reta
n_R	Coeficiente angular da reta
m_I	Coeficiente angular da reta
n_I	Coeficiente angular da reta
$h(t)$	Função resposta ao impulso

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
1.1 OBJETIVO	20
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	21
2 REVISÃO DA TEORIA DA ANÁLISE MODAL	22
2.1 FORMULAÇÃO PARA SISTEMAS DE VARIOS GRAUS DE LIBERDADE	22
2.1.1 Tipos de amortecimento	23
2.1.2 Frequências naturais e modos de vibrar de sistemas	24
2.1.2.1 Sistemas sem amortecimento	25
2.1.2.2 Sistema com amortecimento viscoso	27
2.1.2.3 Sistemas com amortecimento histerético	30
2.1.3 Resposta forçada de sistemas	32
2.1.3.1 Modelo de amortecimento histerético	33
2.1.3.2 Modelo de amortecimento viscoso	35
2.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FRF PARA SISTEMAS DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE	36
2.3 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	39
2.3.1 Método de Ajuste de Círculos	40
2.3.2 Método de Dobson	41
2.3.3 Método de Ewins-Gleeson	43
2.3.4 Método da Exponencial Complexa	45
3 METODOLOGIA	48
3.1 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO ESCOLHIDO PARA O PROGRAMA	48
3.1.1 Aplicação do método de Ewins-Gleeson	48
3.2 DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA	53
3.2.1 Rotinas computacionais	53
3.2.2 Utilização do programa	53
4 RESULTADOS	68
4.1 DADOS EXPERIMENTAIS UTILIZADOS NA ANÁLISE	68
4.1.1 Aparato experimental	68
4.1.2 Vibrômetro a laser POLYTEC PSV 400 B	70
4.1.3 Dados coletados	70
4.2 ANÁLISE DAS FRFS EXPERIMENTAIS	72
4.2.1 Preparação dos dados para análise	73
4.2.2 Ajuste de curvas com o programa	75
4.2.3 Parâmetros modais identificados pelo programa	78
4.3 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS	83
4.3.1 Análise em elementos finitos	83
4.3.2 Comparação dos resultados	89
5 DISCUSSÕES	90
5.1 DADOS EXPERIMENTAIS	90
5.2 AJUSTES EFETUADOS	90

5.3 RESULTADOS DO PROGRAMA	91
6 CONCLUSÕES	92
REFERÊNCIAS	94
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	96

1 INTRODUÇÃO

Estruturas e máquinas em regime operacional usualmente são submetidas a carregamentos dinâmicos ocasionados por vibração. Este fenômeno é em grande parte prejudicial, tendo em vista que pode causar falhas por fadiga, ruídos indesejáveis, aquecimento etc. Com objetivo de minimizar e avaliar níveis de vibração em sistemas estruturais, técnicas de modelagem teórica e experimental vêm sendo utilizadas com frequência. Dentre diferentes técnicas aplicadas à avaliação do comportamento dinâmico de estruturas, a análise modal figura como uma das principais.

Esta teoria, ao longo das últimas décadas, tornou-se uma poderosa ferramenta aplicada à análise dinâmica de estruturas. Com o decorrer do tempo, a análise modal evoluiu para diferentes abordagens, interagindo com técnicas experimentais, com análise de sinais e com a teoria de álgebra aplicada à solução de sistemas dinâmicos. Atualmente, a análise modal experimental e a teoria de elementos finitos compreendem a teoria de análise modal aplicada tanto na validação numérica quanto experimental.

O critério de escolha das diferentes abordagens existentes é influenciado por aspectos do grau de complexidade do problema em questão, dos recursos de instrumentação existentes, da disponibilidade de pacotes computacionais dedicados e, principalmente, das informações modais que o analista almeja extrair do sistema.

As pesquisas na área de análise modal são relacionadas a um conjunto de técnicas que possibilitam a obtenção de modelos matemáticos de estruturas em estudo [Ewins, 1984; Maia, 1997]. As abordagens aplicadas ao assunto são divididas em duas classes, que compreendem as *técnicas do domínio do tempo* e do *domínio da frequência*. A última é usualmente tratada na literatura como abordagem clássica da análise modal, tendo em vista que, historicamente, foi pioneira, em especial pelo advento do analisador de Fourier e pela técnica da transformada de Fourier discreta.

As técnicas no domínio do tempo, que são baseadas no conteúdo de informação original dos sinais (não requerendo manipulações), são tratadas na literatura como técnicas modernas. A conotação moderna foi utilizada em razão destas técnicas terem sido mais bem exploradas a partir da recente evolução dos recursos computacionais. A

estrutura das técnicas de estimação no domínio do tempo se baseia na obtenção de um sistema de equações a diferenças finitas formuladas a partir de componentes discretas no tempo de sinais medidos em sistemas estruturais.

O retrospecto histórico da teoria de análise modal pode ser classificado em três fases distintas. A primeira, na década de 60, quando predominavam técnicas formuladas a partir de informações analógicas de sinais medidos em sistemas estruturais. A segunda fase teve início na década de 70, quando surgiram novas abordagens de técnicas de medida em decorrência da evolução dos computadores digitais. Assim, modernas técnicas de aquisição e processamento de sinais começaram a ser aplicadas. Finalmente, a terceira fase, que segue aos dias atuais, teve início na década de 80. Os fatores principais que alavancaram a terceira fase foram: i) o aparecimento de computadores de menor porte físico, minicomputadores e microcomputadores, com maior capacidade de processamento de dados; ii) o desenvolvimento de novos aplicativos computacionais dedicados à análise modal de estruturas [Varoto, 1991].

1.1 OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo implementar um método de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência, de estruturas com vários graus de liberdade (MDOF). O método foi implementado em um ambiente computacional de baixo custo.

O software desenvolvido permite, através de suas interfaces gráficas, identificar os parâmetros modais de dados experimentais de uma estrutura metálica ensaiada, simular os modos de vibrar identificados da estrutura e possibilitar, de forma prática, que os usuários com poucos conhecimentos em análise modal interajam com todo o processo de análise dos dados experimentais, assimilando os conceitos da teoria de análise modal através de uma tecnologia refinada.

O presente trabalho é uma continuidade das pesquisas desenvolvidas pelo autor nos projetos: *Técnicas de regularização numérica aplicada à identificação de sinais*

de sistemas mecânicos [Mendonça, 2000]; *Identificação de parâmetros modais através de técnicas do domínio da frequência* [Mendonça, 2001]; e *Implementação de ferramentas numéricas de processamento de sinais como recurso ao ensino de análise modal* [Mendonça, 2002].

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação apresenta no *Capítulo 1* a introdução, no *Capítulo 2*, uma revisão da teoria de análise modal, abrangendo a teoria utilizada no desenvolvimento do presente trabalho, na revisão é abordados os seguintes teorias: formulação de sistemas MDOF, amortecimento em estruturas, resposta livre e forçada de estruturas, representações gráficas da função resposta em frequência de sistemas MDOF e métodos de identificação de parâmetros modais do domínio da frequência. Posteriormente, no *Capítulo 3* é apresentado a metodologia, com o método de identificação modal escolhido para o desenvolvimento do trabalho e a apresentação do programa desenvolvido.

No *Capítulo 4*, é apresentado os dados experimentais utilizados para a validação do programa desenvolvido, também é apresentado a análise modal dos dados experimentais e por último a validação dos resultados obtidos, por meio de corroboração com os resultados obtidos de uma análise modal em elementos finitos.

Finalizando o trabalho, é apresentado no *Capítulo 5* as discussões e no *Capítulo 6* as Conclusões.

2 REVISÃO DA TEORIA DA ANÁLISE MODAL

Neste capítulo são abordados os principais conceitos da teoria da análise modal aplicados no desenvolvimento deste trabalho, tais como: a formulação para sistemas com vários graus de liberdade (MDOF) e a representação gráfica da função resposta em frequência (FRF) para sistemas com vários graus de liberdade. Também são analisados alguns métodos de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência.

2.1 FORMULAÇÃO PARA SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Neste tópico é apresentado o estudo das equações de movimento para um sistema com vários graus de liberdade.

O estudo de sistemas MDOF se justifica em razão de estruturas reais serem contínuas, e não homogêneas elasticamente. Por essa razão, sua análise sempre requer uma aproximação que consiste em descrever a dinâmica do sistema através do uso de um número finito de graus de liberdade que possibilite resultar em uma solução com precisão satisfatória.

O número de graus de liberdade do sistema é o número de coordenadas independentes necessárias para descrever o movimento do sistema. Na Figura 1, é ilustrada a representação de um sistema com amortecimento viscoso, descritas pelas propriedades massa, rigidez e amortecimento. Um total de N coordenadas $x_i(t)$ ($i=1,2,\dots, N$) é necessário para descrever a posição das N massas relativa a suas posições de equilíbrio estático, e neste caso, diz-se que o sistema tem N graus de liberdade [Maia, 1997].

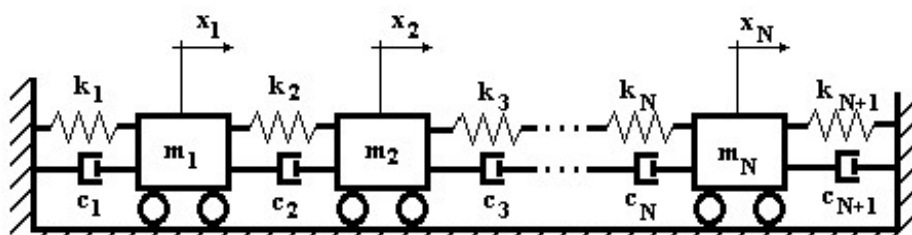


Figura 1 - Exemplo de modelo de N graus de liberdade

Cada massa pode ser excitada por uma força externa $f_i(t)$ ($i=1,2,\dots,N$) que induz o movimento das mesmas. Com base nas equações de forças, o movimento do sistema é dado pelo conjunto de equações;

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & (c_2+c_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (c_N+c_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & (k_1+k_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (k_N+k_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (1)$$

As equações deste sistema consistem de N equações diferenciais de segunda ordem, sendo necessário o conhecimento de duas condições iniciais para solucionar cada equação. Observa-se que não se pode solucionar uma equação sozinha, já que são dependentes, isto é, a resposta de movimento de uma coordenada é dependente do movimento de outras coordenadas. Esta dependência é expressa pelo fato de que cada equação inclui termos envolvidos em mais de uma coordenada.

Uma forma compacta para representar a equação (1) é através da expressão;

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (2)$$

onde as matrizes de ordem $N \times N$ $[M]$, $[C]$ e $[K]$ correspondem às matrizes de massa, amortecimento e rigidez simétricas, respectivamente. As matrizes colunas $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ são vetores $N \times 1$ que guardam informações no tempo de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente, e $\{f\}$ é um vetor $N \times 1$ correspondente às forças de excitação no tempo.

2.1.1 Tipos de amortecimento

As estruturas reais, quando vibram, dissipam energia através de diferentes formas, as quais ocorrem simultaneamente, sendo assim difícil modelar este mecanismo de dissipação corretamente.

Amortecimento é o termo usado para definir as forças não-conservativas que atuam sobre um sistema massa-mola dissipando energia. Ao contrário da massa e da rigidez, o amortecimento não pode ser determinado através de testes estáticos.

O amortecimento, para a grande maioria das estruturas, pode ser classificado como amortecimento viscoso ou histerético, mas existem outros tipos de

amortecimento, tais como: Coulomb, Ren, Shoukry, Burdekin, que consideram diferentes fatores de dissipação nos seus modelos de amortecimento [Ferreira, 1998].

Por definição, o amortecimento viscoso é uma forma de dissipação de energia oposta à velocidade, sendo assim gerado por uma força proporcional à velocidade do sistema ($f = c.\dot{x}$). Já o amortecimento histerético é uma forma de dissipação de energia oposta ao deslocamento, sendo deste modo gerada por uma força proporcional ao deslocamento do sistema. Os coeficientes de ambos os modelos podem ser relacionados, sendo o coeficiente do amortecimento viscoso representado como o coeficiente de amortecimento histerético e inversamente proporcional à frequência $c = d/\omega$.

2.1.2 Frequências naturais e modos de vibrar de sistemas

A frequência natural e os modos de vibrar são os principais parâmetros para caracterizar a vibração de uma estrutura. No exemplo da Figura 2, uma placa é ilustrada com diferentes modos de vibrar, e cada modo está associada a uma frequência natural.

A frequência natural ocorre quando um sistema não amortecido é perturbado e deixado vibrar livremente; o sistema irá vibrar em torno de sua posição estática de equilíbrio, sendo a frequência com que vibra nestas condições conhecida como frequência natural.

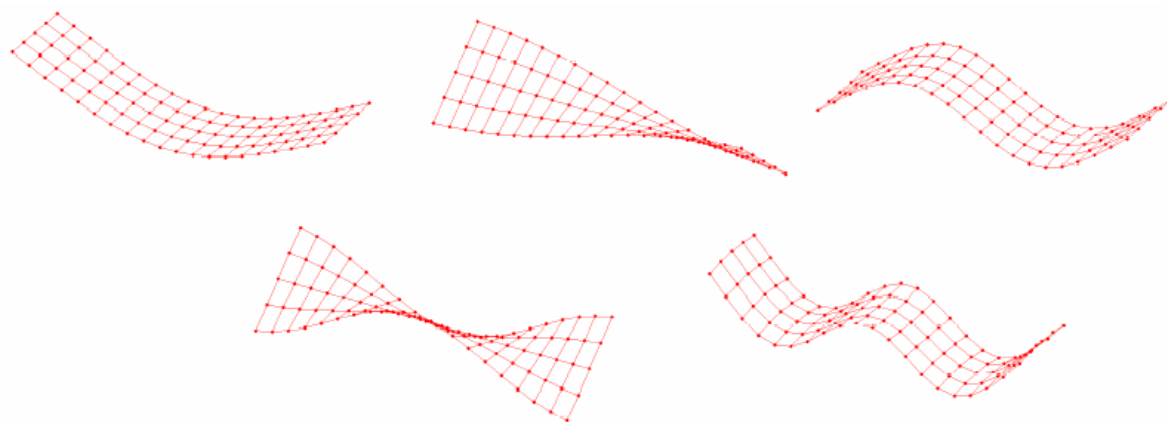


Figura 2 - Formas de vibrar de uma placa

Nos itens seguintes são apresentadas as formulações para os parâmetros modais de sistemas MDOF sem amortecimento, com amortecimento viscoso e com amortecimento histerético.

2.1.2.1 Sistemas sem amortecimento

Considerando a equação (2) que rege o comportamento dinâmico de um sistema com N graus de liberdade, e admitindo à resposta a vibração livre e sem amortecimento, obtém-se:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3)$$

Ressaltando o fato que as N equações da equação (3) são homogêneas, é visto que, se $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ representam uma solução do vetor $\{x\}$ do sistema, então $\gamma(x_1(t))$, $\gamma(x_2(t))$, ..., $\gamma(x_N(t))$, (γ é uma constante arbitrária diferente de zero), também representa a solução. Isto mostra que a solução de (3) só pode ser obtida em termos de movimentos relativos, cuja solução é da forma;

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{i\omega t} \quad (4)$$

onde $\{\bar{X}\}$ é um vetor Nx1 da amplitude que independe do tempo. Substituindo (4) em (3) obtém-se;

$$[[K] - \omega^2[M]]\{\bar{X}\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (5)$$

onde $e^{i\omega t}$ é diferente de zero para qualquer instante do tempo t, assim, fica claro que, se $\{\bar{X}\}$ é solução, $\gamma\{\bar{X}\}$ também será.

A equação (5) possuirá solução não nula quando:

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0 \quad (6)$$

Esta é uma equação algébrica conhecida como equação característica do sistema, que apresenta N possíveis soluções reais positivas ω_1^2 , ω_2^2 , ..., ω_N^2 , proporcionais aos autovalores de (5). Os valores ω_1 , ω_2 , ..., ω_N correspondem às frequências naturais não amortecidas do sistema.

A substituição das frequências naturais em (5) fornece um grupo de equações para $\{\bar{X}\}$, da qual N possíveis vetores-solução são encontrados $\{\psi_r\}$

($r = 1, 2, \dots, N$), conhecidos como formas modais do sistema, que correspondem aos autovetores do problema [Maia, 1997].

Cada $\{\psi_r\}$ que corresponde ao N-ésimo modo de vibrar do sistema contém N elementos reais (positivos ou negativos), que são conhecidos em termos relativos.

O modelo modal do sistema é expresso por duas matrizes $N \times N$, conhecidas como matrizes modais. A matriz (7) é caracterizada por ser uma matriz diagonal das N frequências naturais quadráticas e a matriz (8) é conhecida como a matriz modal, cujas colunas são compostas pelos N modos de vibrar do sistema.

$$[\omega_r^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \cdots & \psi_{NN} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Este modelo descreve o sistema através das propriedades modais (frequência e modo de vibrar), igualmente opostos ao modelo espacial, onde o sistema é descrito por propriedades espaciais ($[M]$, $[C]$ e $[K]$).

Cada $\{\psi_r\}$ se relaciona com uma configuração ou “forma” de movimento livre, associada ao N-ésimo modo de vibrar do sistema.

Devido às propriedades de ortogonalidade dos modos de vibrar, é possível obter uma normalização estabelecida com base na matriz modal de massa-normalizada $[\Phi]$, cujo vetores são formulados por $\{\phi_r\} = \gamma_r \{\psi_r\}$, a qual reduz o sistema de equações (3) na forma:

$$[m_r] \{\ddot{q}(t)\} + [k_r] \{q(t)\} = \{0\} \quad (9)$$

A equação (9) representa um grupo de N equações de movimento de sistemas de um grau de liberdade SDOF desacopladas através das relações:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [\omega_r^2] \end{aligned} \quad (10)$$

2.1.2.2 Sistema com amortecimento viscoso

Dentre os modelos utilizados para descrever as estruturas, encontra-se o modelo viscoso, o qual possui a característica de ter as forças de amortecimento proporcionais à velocidade relativa dos pontos da estrutura. Um dos casos de amortecimento é formado pela combinação da matriz de massa e rigidez do sistema [Maia, 1997].

$$[C] = \varepsilon[K] + \nu[M] \quad (11)$$

Com as condições de ortogonalidade já aplicadas à equação (11), obtém-se a matriz $[c_r]$, que é diagonal. Desta forma, através de transformação linear aplicada à matriz de massa e de rigidez modal do sistema, os modos de vibrar serão idênticos aos encontrados para o sistema sem amortecimento, podendo assim ser solucionados da mesma maneira.

No caso em que a matriz de amortecimento não é proporcional, o desacoplamento modal é impossível, sendo necessária a adoção de outra transformação de coordenadas que possibilite o desacoplamento do sistema de equações.

Retomando a equação do movimento para um sistema MDOF, com amortecimento viscoso e a hipótese de $\{f\} = \{0\}$, e aplicando as técnicas estudadas com base na matriz modal, para um sistema sem amortecimento formula-se;

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q(t)\} = \{0\} \quad (12)$$

ou

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\mathcal{D}] \{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2] \{q(t)\} = \{0\} \quad (13)$$

onde $[\mathcal{D}]$ é em geral uma matriz não diagonal $N \times N$.

Neste caso a matriz modal do sistema sem amortecimento e as propriedades ortogonalizadas conduzem;

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [\varepsilon[K] + \nu[M]] [\Phi] \{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2] \{q(t)\} = \{0\} \quad (14)$$

ou

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\nu + \varepsilon\omega_r^2] \{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2] \{q(t)\} = \{0\} \quad (15)$$

e fazendo a analogia com o sistema de um grau de liberdade (SDOF) [Ewins, 1982], pode-se escrever a equação (15) como;

$$\{\ddot{q}(t)\} + [2\xi_r \omega_r] \{\dot{q}(t)\} + [\omega_r^2] \{q(t)\} = \{0\} \quad (16)$$

onde,

$$\xi_r = \frac{\nu}{2\omega_r} + \frac{\varepsilon\omega_r}{2} \quad (r=1,2,\dots,N) \quad (17)$$

ou

$$\xi_r = \frac{c_r}{2\sqrt{m_r k_r}} \quad (18)$$

que é definido como o fator de amortecimento modal r . Este, em conjunto com a frequência natural do modo r , é chamado parâmetro modal do modo r .

No caso em que o amortecimento não é proporcional, que é o geralmente encontrado, realiza-se uma aproximação. Quando o amortecimento é muito pequeno, é aceitável negligenciar o termo $[\mathcal{G}]$ sem grande dano na precisão da solução. Porém, se o amortecimento for grande, então essa aproximação não pode ser feita. Neste caso, a melhor aproximação é realizada assumindo a equação do movimento homogênea e assumindo uma solução geral da forma:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} e^{st} \quad (19)$$

a qual, substituída na equação do movimento, dará um autoproblema complexo.

$$[s^2[M] + s[C] + [K]] \{\bar{X}\} = \{0\} \quad (20)$$

Uma forma apropriada de solucionar o problema é definir um vetor complexo $u(t)$ igual a:

$$u(t) = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Reescrevendo a equação do movimento com esta nova variável, formula-se:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{u}(t)\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \{u(t)\} = \{0\} \quad (22)$$

ou simplificando:

$$[A] \{\dot{u}(t)\} + [B] \{u(t)\} = \{0\} \quad (23)$$

Procurando uma solução da forma (19), onde $\{\bar{X}\}$ é um vetor complexo $N \times 1$ que representa a amplitude da resposta, e s é uma quantidade complexa:

$$\{u(t)\} = \left\{ \begin{matrix} \{\bar{X}\} \\ s\{\bar{X}\} \end{matrix} \right\} e^{st} = \{\bar{U}\} e^{st} \quad (24)$$

e

$$\{\dot{u}(t)\} = \left\{ \begin{matrix} s\{\bar{X}\} \\ s^2\{\bar{X}\} \end{matrix} \right\} e^{st} = s\{\bar{U}\} e^{st} \quad (25)$$

Substituindo (24) e (25) em (23), obtém-se para todo o tempo t:

$$[s[A] + [B]][\bar{U}] = \{0\} \quad (26)$$

que é a representação geral do autoproblema, no qual a solução abrange um grupo de 2N autovalores que podem ser reais e/ou pares de complexos conjugados. Aqui, o interesse recai no caso em que a solução é complexa, ou seja, para um sistema sem amortecimento. Os valores sempre aparecem em pares, sendo assim, os autovalores serão representados por s_r e s_r^* e os autovetores por $\{\Psi_r'\}$ e $\{\Psi_r'^*\}$, dos quais se têm;

$$\{\psi_r\} = \left\{ \begin{matrix} \{\psi_r\} \\ \{\psi_r\} s_r \end{matrix} \right\} \quad (27)$$

e

$$\{\psi_r'^*\} = \left\{ \begin{matrix} \{\psi_r'^*\} \\ \{\psi_r'^*\} s_r^* \end{matrix} \right\} \quad (28)$$

onde $\{\Psi_r\}$ e $\{\Psi_r^*\}$ correspondem aos autovetores complexos Nx1 correspondentes aos vetores da coordenada espacial $\{x\}$.

Igualmente, no caso de sistemas sem amortecimento ou com amortecimento proporcional, os autovetores obedecem as propriedades ortogonais já discutidas. Disto define-se uma transformação de coordenada:

$$\{u(t)\} = [\Psi'] \{q(t)\} \quad (29)$$

Realizando uma transformação de coordenada tem-se:

$$[a_r'] \{\dot{q}(t)\} + [b_r'] \{q(t)\} = \{0\} \quad (30)$$

Com esta transformação, obtém-se 2N equações desacopladas, o que equivale a afirmar que tem-se um grupo independente de 2N SDOF. Considerando-se cada solução da forma:

$$q_r(t) = \bar{Q}_r e^{s_r t} \quad (31)$$

onde $\bar{Q}_r$ depende das condições iniciais. Substituindo em (29) e (30), obtém-se a resposta de vibração livre em termos das coordenadas de espaço de estado;

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\psi_r'\} \bar{Q}_r e^{s_r t} \quad (32)$$

com $s_r = -b_r/a_r$. Em (32) $\bar{Q}_r$ é associado ao modo $\{\Psi_r'\}$, que representa uma contribuição em cada modo para o total da resposta de cada coordenada, ou seja, assim o fator de participação modal.

Com a solução do autoproblema complexo tem-se $2N$ autovalores, e os correspondentes pares conjugados e $2N$ autovetores igualmente com seus pares complexos conjugados. Em outras palavras, obtêm-se N autovalores s_r e os correspondentes N autovetores $\{\Psi_r\}$, os seus correspondentes complexos conjugados. A representação comum dos autovalores é:

$$s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (33)$$

em analogia com o sistema SDOF.

Por meio de manipulações algébricas com um par de autovalores e autovetores s_r e $\{\Psi_r\}$, e outro s_p e $\{\Psi_p\}$ que satisfazem a equação (20), chega-se às seguintes relações:

$$\frac{\{\psi_r^*\}^T [C] \{\psi_r\}}{\{\psi_r^*\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{c_r}{m_r} = 2\omega_r \xi_r \quad (34)$$

e

$$\frac{\{\psi_r^*\}^T [K] \{\psi_r\}}{\{\psi_r^*\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 \quad (35)$$

2.1.2.3 Sistemas com amortecimento histerético

Para um grande número de problemas, o modelo histerético é o que se aproxima melhor do sistema real. Neste tipo de modelo, a energia dissipada independe da frequência. Considerando novamente o sistema MDOF da Figura 1, e assumindo que o mecanismo de dissipação de energia é histerético, da equação (2) tem-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + i[D]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (36)$$

na qual $[D]$ é uma matriz histerética de amortecimento $N \times N$.

Em analogia com um modelo viscoso amortecido proporcional, escreve-se:

$$[D] = \varepsilon[K] + \nu[M] \quad (37)$$

onde ε e ν são constantes. Assumindo que a solução é da forma:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{i\lambda t} \quad (38)$$

onde $\{\bar{X}\}$ é um vetor $N \times 1$ da amplitude de resposta independente do tempo, o qual é introduzido na equação (36), e considerando $\{f(t)\} = \{0\}$ tem-se:

$$[[[K] - \lambda^2[M]] + i[\varepsilon[K] + \nu[M]]]\{\bar{X}\} = \{0\} \quad (39)$$

caracterizando assim um problema de autovalores complexos, ou seja, têm-se N autovalores complexos λ_r^2 e N autovetores reais $\{\psi_r\}$, igual ao caso não amortecido. Sendo estes iguais ao do caso não amortecido, pode-se também ser considerados iguais os significados físicos, assim, suas propriedades de ortogonalidade desacoplam as equações de movimento.

Com estas afirmações, leva-se a escrever λ_r^2 através das frequências naturais do sistema;

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta_r) \quad (40)$$

onde ω_r^2 e η_r^2 são as frequências naturais e os fatores de amortecimento respectivamente para o modo r , definindo assim:

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (41)$$

e

$$\eta_r = \varepsilon + \frac{\nu}{\omega_r^2} \quad (42)$$

Assumindo o amortecimento não-proporcional, o correspondente autop problema complexo surge não somente com N autovalores complexos λ_r^2 , mas também com N autovetores complexos $\{\psi_r\}$. Por meio da parte real da equação (40), pode-se escrever:

$$\lambda_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [[K] + i[D]] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \quad (43)$$

onde k_r e m_r são termos complexos.

2.1.3 Resposta forçada do sistema

O estudo da resposta forçada de sistemas lineares é focado quanto a uma excitação harmônica, da qual resultarão informações sobre as características de resposta em frequência da estrutura, possibilitando o conhecimento do comportamento dinâmico. Para este tipo de excitação pode-se obter respostas para sistemas amortecidos, que é o caso real, através do desacoplamento modal. Na situação de sistemas amortecidos, admite-se o modelo viscoso e hysterético de amortecimento, como também as duas formas de distribuição proporcional e não-proporcional.

Para um caso particular de excitação harmônica, uma forma prática de se derivar a equação (2) é pegar o correspondente vetor de excitação $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ e o vetor de resposta $\{x(t)\} = \{\bar{X}\}e^{i\omega t}$, obtendo;

$$[[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]]\{\bar{X}\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (44)$$

consequentemente:

$$\{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]]^{-1}\{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (45)$$

O mesmo procedimento, baseando-se no modelo hysterético, levará a;

$$\{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2[M] + i[D]]^{-1}\{F\} \quad (46)$$

onde $[\alpha(\omega)]$ é a matriz receptância NxN do sistema, contendo todas as informações do sistema dinâmico. Cada elemento α_{jk} da matriz corresponde, para uma determinada FRF, à relação entre a resposta medida em j para a excitação aplicada em k. A matriz receptância $[\alpha(\omega)]$ constitui uma outra forma de modelar o sistema e é conhecida como Modelo Resposta, opondo-se ao Modelo Espacial e ao Modelo Modal.

A aparente simplicidade das equações (45) e (46) tende a ser ineficiente para a aplicação numérica, e dessas é possível calcular os valores da $[\alpha(\omega)]$ de algumas frequências de interesse. Estas operações requerem a inversão de uma matriz NxN para escolher valores de frequências. Quando se tem um sistema com um grande número de graus de liberdade (grande N), isto requer um grande número de operações. A ineficiência do processo é realçada quando o interesse recai somente sobre um elemento dentro de um número limitado de elementos da individual receptância (individual FRFs). Oportunamente, é possível derivar mais proveitosamente

expressões para $[\alpha(\omega)]$ baseando-se nas propriedades modais, o que adiciona vantagens, provendo uma introspecção dentro da forma de várias propriedades da FRF. Iniciando-se o estudo desta manipulação com o modelo hysterético de amortecimento, é extremamente fácil, pelo ponto de vista da matemática.

2.1.3.1 Modelo de amortecimento hysterético

Foi visto anteriormente que existe um grupo de N autovalores complexos λ_r^2 , associados aos autovetores $\{\psi_r\}$ os quais satisfazem as equações homogêneas;

$$[[K] + i[D] - \lambda_r^2[M]]\{\psi_r\} = \{0\} \quad (47)$$

e que os N autovetores lineares independentes formam um grupo de vetores em N-espacos, possuindo propriedades ortogonais, isto é, igualmente os $\{\bar{X}\}$ podem ser expressos como uma combinação linear de autovetores;

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\psi_r\} \quad (48)$$

Substituindo (48) em (46) e pré-multiplicando por $\{\psi_s\}^T$, obtém-se:

$$\{\psi_s\}^T [[K] + i[D]] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\psi_r\} - \omega^2 \{\psi_s\}^T [M] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T \{F\} \quad (49)$$

Com as considerações já estudadas de ortogonalidade dos autovetores aplicadas em (49) chega-se a:

$$\gamma_r \{\psi_r\}^T [[K] + i[D]] \{\psi_r\} - \omega^2 \gamma_r \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\} = \{\psi_r\}^T \{F\} \quad (50)$$

ou

$$\gamma_r k_r - \omega^2 \gamma_r m_r = \{\psi_r\}^T \{F\} \quad (51)$$

onde k_r e m_r foram definidos em (43); disto tem-se:

$$\gamma_r = \frac{\{\psi_r\}^T \{F\}}{k_r - \omega^2 m_r} \quad (52)$$

Substituindo (52) em (48), conduz-se à definição da resposta para um sistema com amortecimento hysterético, em termos de modos complexos:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\}^T \{F\} \{\psi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r} e^{i\omega t} \quad (53)$$

Com (40) e (43), tem-se;

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\psi_r\}^T \{F\} \{\psi_r\}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \quad (54)$$

Se for de interesse extrair um elemento da receptância, por exemplo, a resposta na coordenada j para uma excitação harmônica aplicada em k , isto quer dizer que o vetor $\{F\}$ terá exatamente um elemento diferente de zero, desta forma, pode-se escrever;

$$\bar{X}_j = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{jr} F_k \psi_{kr}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \quad (55)$$

ou

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{jr} \psi_{kr}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \quad (56)$$

onde ψ_{jr} e ψ_{kr} são elementos j e k , respectivamente do vetor de modo de vibrar $\{\psi_r\}$. Então se chega a uma expressão geral para os elementos da matriz receptância, em termos das propriedades modais, que se assemelha a um sistema SDOF. Em termos físicos (56), pode ser interpretado como sendo a resposta total da somatória de contribuições das respostas de N sistemas SDOF separados.

Dentro de um caso geral de amortecimento não proporcional, o numerador de (56) é complexo, enquanto que no caso não amortecido ou com amortecimento proporcional, este é real. Considerando a normalização da massa pelo vetor dos modos de vibrar:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \quad (57)$$

ou

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\bar{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \quad (58)$$

duas importantes conclusões podem ser extraídas desta derivação. Primeiro, é evidente que a matriz receptância é simétrica, e por essa razão:

$$\alpha_{jk} = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \alpha_{kj} = \frac{\bar{X}_k}{F_j} \quad (59)$$

esta propriedade é o princípio de reciprocidade; segundo, as constantes modais são inter-relacionadas, obedecendo uma relação que é descrita pelo par de equações:

$$\begin{aligned} {}_r\bar{A}_{jk} &= \phi_{jr}\phi_{kr} \\ {}_r\bar{A}_{jj} &= \phi^2_{jr} \quad \text{ou} \quad {}_r\bar{A}_{kk} = \phi^2_{kk} \end{aligned} \quad (60)$$

Estas conclusões deixam claro que, se uma linha ou coluna da matriz $[\alpha(\omega)]$ é conhecida, então toda a matriz pode ser avaliada.

2.1.3.2 Modelo de amortecimento viscoso

Para encontrar a solução das equações algébricas, usa-se um recurso conhecido como matriz de espaço-estado, a qual converte a matriz complexa do problema $N \times N$ em uma matriz real $2N \times 2N$, descrita em (23), da qual a análise do vetor de excitação torna-se:

$$[A]\{\dot{u}(t)\} + [B]\{u(t)\} = \{f'(t)\} \quad (61)$$

onde

$$\{f'(t)\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Considerando a coordenada de transformação definida por (29) e usando as propriedades de ortogonalidade, a equação (61) torna-se:

$$[a_r]\{\dot{q}(t)\} + [b_r]\{q(t)\} = [\Psi']^T \{f'(t)\} \quad (63)$$

a qual apresenta um grupo de $2N$ equações desacopladas, e cada qual pode ser escrita como:

$$\dot{q}_r(t) - s_r q_r(t) = \frac{1}{a_r} \{\psi'_r\}^T \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

onde $s_r = -b_r/a_r$ é usualmente escrita sob a forma (33). Para uma excitação harmônica, o vetor força tem a forma;

$$\{f(t)\} = \{\bar{F}\}e^{i\omega t} \quad (65)$$

A resposta será:

$$\{q(t)\} = \{\bar{Q}\}e^{i\omega t} \quad (66)$$

disto realizando operações algébricas de mudança de coordenadas e as devidas substituições na equação (64); além da normalização dos autovetores utilizados, obtém-se relação:

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\phi_r\} \left(\frac{1}{i\omega - s_r} \right) \{\phi_r\}^T \{\bar{F}\} \quad (67)$$

A receptância $\alpha_{jk}(\omega)$ é definida como sendo a resposta em deslocamento na coordenada j devido à força excitadora na coordenada k, com todas as outras forças iniciais iguais a zero, e define-se como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}}{\bar{F}} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} \quad (68)$$

Em vista de os autovalores e autovetores aparecerem em pares de complexos conjugados, pode-se reescrever a equação (68) na forma;

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}}{\bar{F}} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{i\omega - s_r} + \frac{\phi_{jr}^* \phi_{kr}^*}{i\omega - s_r^*} \right) \quad (69)$$

Os autovalores s_r são os pólos (os quais aparecem em pares de complexos conjugados) e os produtos $\phi_{jr} \phi_{kr}$ são os resíduos para o modo r. Igualmente ao caso de amortecimento histerético, chega-se na expressão geral onde a receptância total é o resultado do somatório das contribuições de diferentes modos de vibrar.

Considerando (33) e denotando os resíduos por ${}_r A_{jk}$, a equação (69) pode ser rescrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} + \frac{{}_r A_{jk}^*}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right) \quad (70)$$

2.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FRF PARA SISTEMAS DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

A vibração de um sistema é medido em termos de movimento, deste modo, a correspondente FRF pode ser representada em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração, sendo as FRFs conhecidas respectivamente por: receptância, mobilidade e aceleração.

Estas FRFs podem ser representadas graficamente e possuem características próprias nas diversas formas possíveis. Muitos métodos de identificação modal exploram o ajuste de curvas nos gráficos gerados para determinar os parâmetros modais do sistema.

A FRF original gera uma curva tridimensional. Para efeitos de visualização é usual representar esta função no plano através do gráfico da parte real e imaginário e por intermédio do gráfico de módulo e fase, conforme ilustrado na Figura 3.

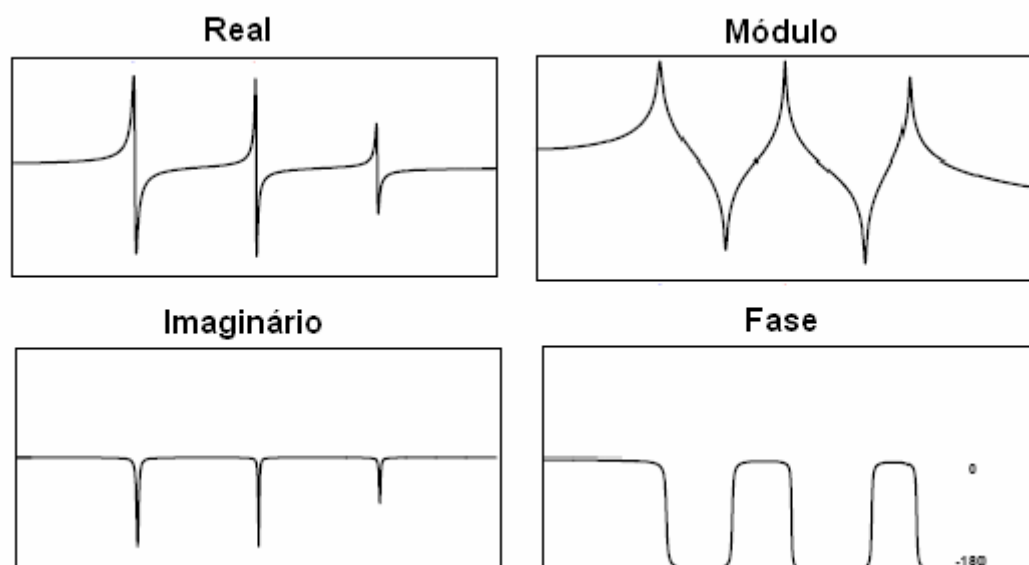


Figura 3 - Representações de uma FRF

Outra forma de representação da FRF é através do gráfico de Nyquist. Esta representação facilita a identificação de parâmetros modais do sistema. A Figura 4, ilustra o gráfico de Nyquist de um sistema com amortecimento proporcional e outro com amortecimento não proporcional.

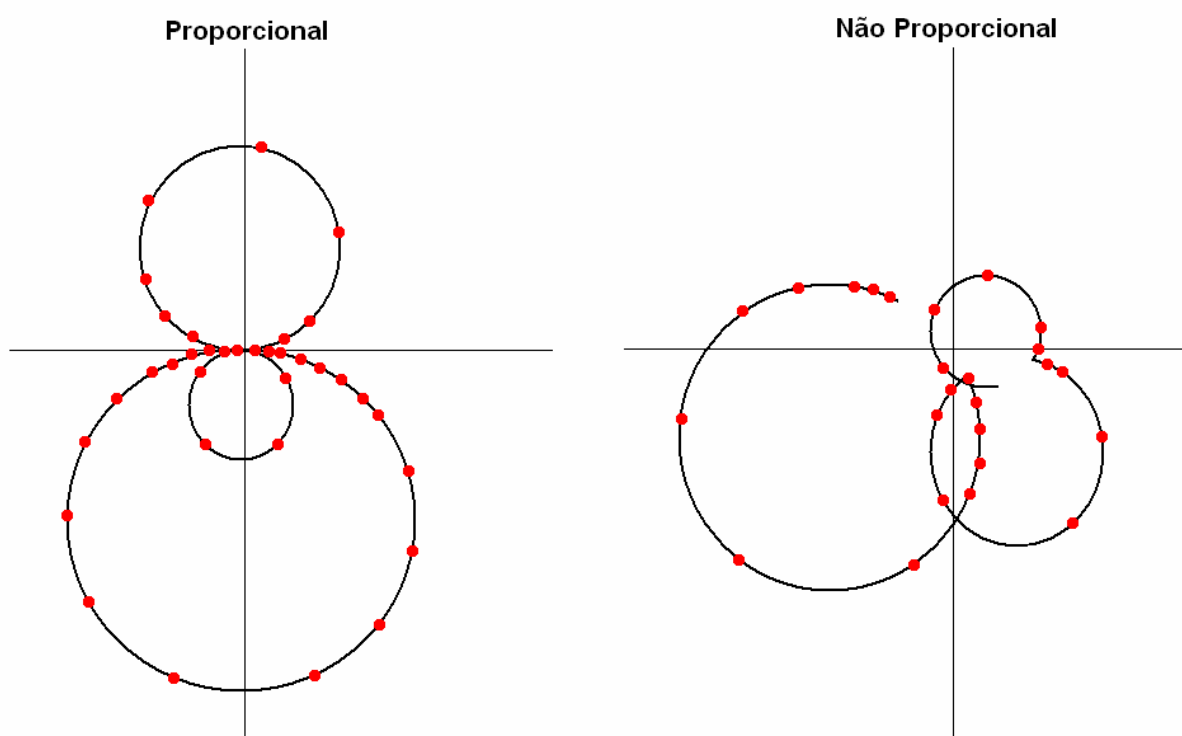


Figura 4 – Amortecimento proporcional e não-proporcional

A Figura 5 ilustra as diferenças existentes entre as representações das receptância, mobilidade e aceleração.

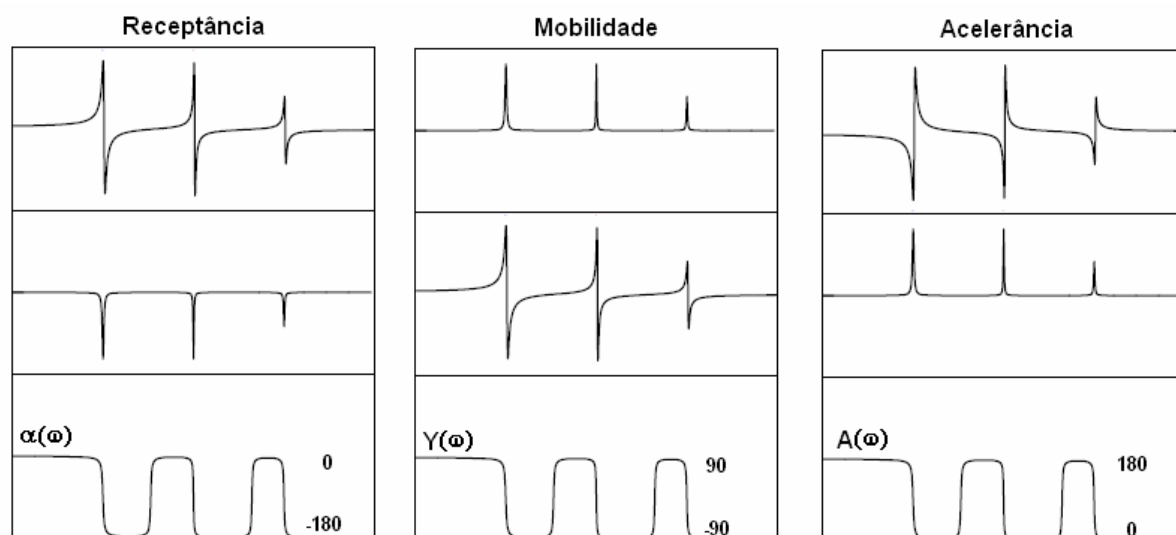


Figura 5 – Diferentes representações de uma FRF

2.3 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Neste item são estudadas técnicas de identificação de parâmetros modais no domínio da frequência. Os fundamentos das técnicas estudadas são baseados na teoria apresentada por Maia (1997). As técnicas existentes dividem-se nos métodos de identificação modo a modo, onde se trabalha com sistemas MDOF. Porém, realiza-se o isolamento dos modos, transformando-os em sistemas SDOF para, assim, realizar a identificação de seus parâmetros modais e para sistemas multimodos. Nestes métodos realiza-se a identificação dos parâmetros modais para vários modos, simultaneamente, assim, trabalha-se com sistemas MDOF.

Os métodos de identificação estudados baseiam-se no ajuste de curvas; dois métodos de identificação modo a modo foram estudados; o método do ajuste de círculo e o método de Dobson, no qual se utiliza ajuste de retas. Em seguida, são apresentados os métodos de identificação multimodos, o método de Ewins-Gleeson e o método da exponencial complexa.

Tanto os métodos de identificação modal modo a modo, como os multimodos, objetivam a determinação dos coeficientes da FRF, os quais guardam relação com os parâmetros modais ou são os próprios. Como já mencionado, os métodos modo a modo utilizam ajustes de curvas; o mesmo se aplica para quase todos os métodos de identificação no domínio da frequência. Este processo se dá a partir do conhecimento dos dados da FRF, a qual tenta ajustar um modelo matemático; geralmente, este ajuste se faz através do método dos mínimos quadrados. Sendo assim, depois que se define o modelo matemático para a FRF, gera-se uma função objetivo dada pelo quadrado da diferença entre os dados do ensaio e o modelo matemático da estrutura estudada. Minimizando a função objetivo, com relação a cada variável do processo de ajuste, resultará num sistema de equações cuja solução determinará os parâmetros modais [Varoto, 1991].

2.3.1 Método de Ajuste de Círculos

Este é um dos mais antigos e clássicos métodos de identificação, o qual foi elaborado por Kennedy-Pancu [Maia,1997], e explora o fato de que o gráfico de uma FRF na forma complexa pode ser ajustado a um círculo, ou seja, a amplitude da FRF é regida pelo modo correspondente r .

A função receptância de um sistema de N graus de liberdade com amortecimento histerético é dada pela expressão:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{{}_s A_{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \omega_s^2}, \quad (71)$$

onde η_s e A_{jk} são respectivamente o fator de amortecimento histerético e a constante modal complexa ${}_s A_{jk} = (A_s e^{i\phi_r})_{jk}$, associada com cada modo s .

Pode-se isolar uma parcela correspondente a um modo, por exemplo, r ;

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \frac{{}_s A_{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \omega_s^2}, \quad (72)$$

quando se faz uma aproximação para um grau de liberdade, considera-se que numa vizinhança próxima de ω_r a segunda parcela da equação (72) pode ser tomada como uma constante; procedendo com esta aproximação para o modo r , tem-se:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} + {}_r B_{jk}, \quad (73)$$

onde ${}_r B_{jk}$ é uma constante complexa associada ao modo r . Pode-se demonstrar que o gráfico de Nyquist é um círculo [Ewins, 1982]. Observando a equação (73), pode-se afirmar que a constante A_{jk} corresponde a uma translação do círculo. Na verdade, ao representar a equação (73), obtém-se uma curva total que não é um círculo exato, para cada frequência natural; o que se observa são seções de arcos para cada frequência, como ilustrado na Figura 6.

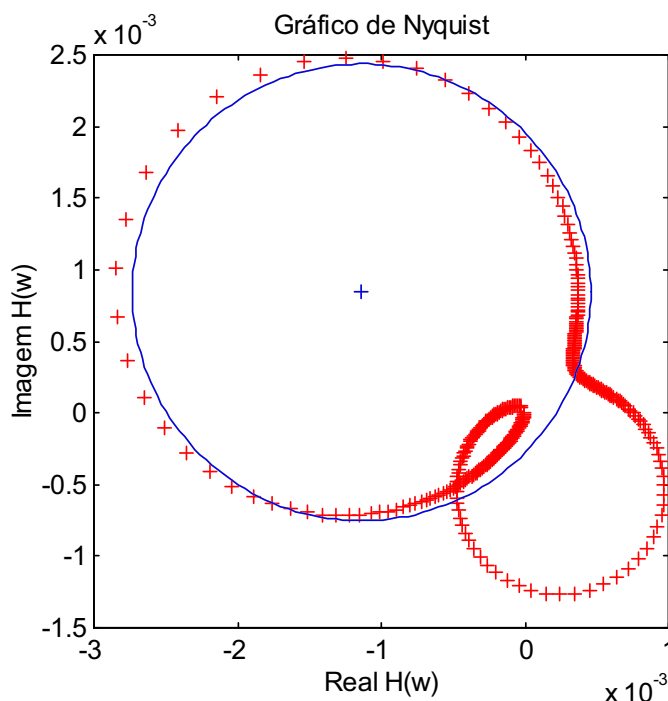


Figura 6 -Gráfico de Nyquist para um MDOF

Para se obter os parâmetros modais associados a um modo é necessário realizar o ajuste de um círculo na FRF, próximo à frequência natural de interesse. Este primeiro objetivo é geralmente alcançado fazendo uso da técnica dos mínimos quadrados, o que minimiza o erro do ajuste.

Com o círculo ajustado é possível, através de seus dados geométricos e da localização das coordenadas (x,y) dos pontos da receptância no plano que contém o círculo, determinar todos os parâmetros modais associados ao modo de vibrar analisado.

2.3.2 Método de Dobson

Este método enfoca o fato de que as partes real e imaginária do inverso da receptância são linhas retas num gráfico por frequência ao quadrado. Neste método, a análise se faz em um sistema SDOF, desprezando os resíduos referentes a outros modos da vizinhança que interfiram neste.

Tomando-se um caso geral, escrevendo a receptância de um sistema SDOF com amortecimento histerético, tem-se;

$$\alpha_r = \frac{C_r e^{i\phi_r}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}, \quad (74)$$

o inverso desta receptância é:

$$\frac{1}{\alpha_r} = \frac{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}{C_r e^{i\phi_r}}, \quad (75)$$

escrevendo (75) como;

$$\frac{1}{\alpha_r} = \frac{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}{A_r + iB_r}, \quad (76)$$

onde $A_r = C_r \cos \phi_r$ e $B_r = C_r \sin \phi_r$, segue-se que;

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) &= \frac{(A_r + B_r \eta_r) \omega_r^2 - A_r \omega^2}{A_r^2 + B_r^2} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) &= \frac{(A_r \eta_r + B_r) \omega_r^2 - B_r \omega^2}{A_r^2 + B_r^2} \end{aligned} \quad (77)$$

Ambas as partes, real e imaginária, são linhas retas em ω^2 , da forma;

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) &= m_R + n_R \omega^2 \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) &= m_I + n_I \omega^2 \end{aligned} \quad (78)$$

com

$$\begin{aligned} m_R &= \frac{(A_r + B_r \eta_r) \omega_r^2}{A_r^2 + B_r^2} & n_R &= -\frac{A_r}{A_r^2 + B_r^2} \\ m_I &= \frac{(A_r \eta_r + B_r) \omega_r^2}{A_r^2 + B_r^2} & n_I &= -\frac{B_r}{A_r^2 + B_r^2} \end{aligned} \quad (79)$$

Plotando-se as partes real e imaginária do inverso da receptância, faz-se um ajuste através de retas, podendo assim determinar os coeficientes m_R , m_I , n_R e n_I ; com a devida manipulação de (79), de modo a determinar respectivamente os parâmetros modais: frequência, amortecimento, constante modal e fase.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{-m_R n_R - m_I n_I}{n_R^2 + n_I^2}} \quad (80)$$

$$\eta_R = \frac{m_R n_I - m_I n_R}{-m_R n_R - m_I n_I} \quad (81)$$

$$C_R = \frac{1}{\sqrt{n_R^2 + n_I^2}} \quad (82)$$

$$\phi_R = tg^{-1} \left(-\frac{n_I}{n_R} \right) \quad (83)$$

Este método apresenta vantagens em alguns casos, com relação ao ajuste de círculos, a saber: quando o amortecimento é muito pequeno, e/ou existe um erro significativo nas medidas da região de ressonância, como também é evidente ser mais fácil ajustar uma reta do que um círculo.

2.3.3 Método de Ewins-Gleeson

O método proposto por Ewins (1982) é utilizado na identificação de parâmetros modais em estruturas levemente amortecidas, assumindo o modelo histerético. O levantamento dos dados experimentais de resposta em frequência em tais estruturas geralmente é uma tarefa difícil, principalmente nas regiões onde ocorrem as ressonâncias. Este método é capaz de fornecer os modos de vibrar mediante a identificação das constantes modais do modelo, a partir de dados da resposta em frequência.

Este método é formulado a partir da receptância;

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{C_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}, \quad (84)$$

onde C_r é uma quantidade real.

Inicialmente, considera-se que não existe amortecimento:

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{C_r}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (85)$$

O método requer que seja conhecida a resposta em frequência dos sistemas na faixa de interesse, por meio da qual pode-se conhecer as frequências naturais do sistema pelo método dos picos, ou seja, o gráfico da receptância pela frequência. Com isto, já se conhece as frequências naturais na faixa de interesse e a receptância correspondente. O próximo passo é definir as frequências Ω , que devem ser iguais em número às frequências naturais identificadas. Estas são escolhidas em pontos distantes das frequências naturais, como ilustrado na Figura 7, que representa um sistema de três graus de liberdade, onde se pode observar as frequências naturais ω e as frequências escolhidas Ω .

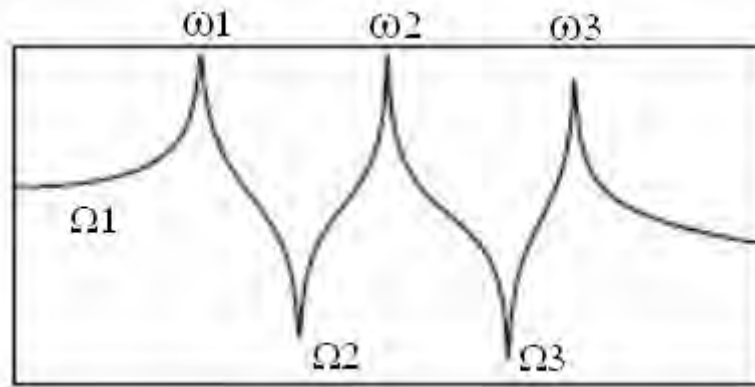


Figura 7 - Exemplo de frequências Ω escolhidas

Pode-se desta forma montar o sistema de equações indicado em (86), tomando-se as N frequências naturais ω , as N frequências Ω e a parte real da receptância, sendo as N constantes modais C os únicos parâmetros desconhecidos:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_1^2} \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_2^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_2^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_N^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_N^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_N^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \text{Re}(\tilde{\alpha}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\alpha}_2) \\ \vdots \\ \text{Re}(\tilde{\alpha}_N) \end{Bmatrix} \quad (86)$$

ou na forma matricial,

$$\begin{matrix} \{C\} = [R] \text{Re}\{\tilde{\alpha}\} \\ (Nx1) \quad NxN \quad Nx1 \end{matrix} \quad (87)$$

Com a determinação dos parâmetros C , inicia-se a terceira etapa, que se trata da identificação dos N fatores de amortecimento η ,

$$\eta_r \approx \frac{|C_r|}{|\tilde{\alpha}(\omega_r)|\omega_r^2} \quad (88)$$

Os efeitos dos resíduos dos outros modos podem ser introduzidos posteriormente. Uma alternativa é considerar $N+2$ pontos e calcular $N+2$ constantes modais, sendo desta forma a matriz $[R]$ de ordem $N+2$. Este método funciona muito bem em estruturas levemente amortecidas, sendo simples e rápido e de fácil implementação computacional.

2.3.4 Método da Exponencial Complexa

Este método de identificação de parâmetros modais usa os dados da resposta ao impulso do sistema e realiza uma aproximação baseada em funções exponenciais, usando o método de Prony [Braun,1986]. Tendo a função resposta ao impulso (FRI) dada por;

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r t} \quad (89)$$

a qual aplicando-se a transformada de Fourier, obtém-se a FRF dada por:

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A'_r}{i\omega - s_r} \quad (90)$$

Considerando uma série de N períodos da amostra da FRI:

$$h(t) = h(t + kT) \quad k=1,2,\dots,N \quad (91)$$

onde T é um incremento arbitrário de tempo. A correspondente FRF é dada por:

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A'_r e^{s_r kT}}{i\omega - s_r} \quad k=1,2,\dots,N \quad (92)$$

Expandindo (92) para todos os k valores, chega-se a:

$$\{\alpha(\omega)\} = \begin{bmatrix} A'_1 e^{s_1 T} & A'_2 e^{s_2 T} & \dots & A'_{2N} e^{s_{2N} T} \\ A'_1 e^{s_1 T} & A'_2 e^{s_2 T} & \dots & A'_{2N} e^{s_{2N} T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_1 e^{s_1 T} & A'_2 e^{s_2 T} & \dots & A'_{2N} e^{s_{2N} T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{i\omega - s_1} \\ \frac{1}{i\omega - s_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{i\omega - s_{2N}} \end{Bmatrix} \quad (93)$$

se cada período da amostra contém L pontos de freqüências, então:

$$[\{\alpha(\omega_1)\} \{\alpha(\omega_2)\} \dots \{\alpha(\omega_L)\}] = \begin{bmatrix} A'_1 e^{s_1 T} & A'_2 e^{s_2 T} & \dots & A'_{2N} e^{s_{2N} T} \\ A'_1 e^{s_1 2T} & A'_2 e^{s_2 2T} & \dots & A'_{2N} e^{s_{2N} 2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_1 e^{s_1 NT} & A'_1 e^{s_2 NT} & \dots & A'_{2N} e^{s_{2N} NT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i\omega_1 - s_1} & \frac{1}{i\omega_2 - s_1} & \dots & \frac{1}{i\omega_L - s_1} \\ \frac{1}{i\omega_1 - s_2} & \frac{1}{i\omega_2 - s_2} & \dots & \frac{1}{i\omega_L - s_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{i\omega_1 - s_{2N}} & \frac{1}{i\omega_2 - s_{2N}} & \dots & \frac{1}{i\omega_L - s_{2N}} \end{bmatrix} \quad (94)$$

ou na forma matricial,

$$[\alpha] = [A_T][\wedge] \quad (95)$$

Repetindo-se este processo, tomando-se trechos da resposta num intervalo de tempo Δt , (92) torna-se:

$$\alpha'_k(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A'_r e^{s_r kT} e^{s_r \Delta t}}{i\omega - s_r} \quad k=1,2,\dots,N \quad (96)$$

para o dobro do intervalo de tempo,

$$\alpha''_k(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A'_r e^{s_r kT} e^{s_r 2\Delta t}}{i\omega - s_r} \quad k=1,2,\dots,N \quad (97)$$

Para uma série de N trechos da resposta e para L pontos de freqüência, a matriz correspondente para (96) é obtida:

$$[\alpha'] = [A_T] \begin{bmatrix} e^{s_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 \Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} \Delta t} \end{bmatrix} [\wedge] = [A'_T][\wedge] \quad (98)$$

Um processo similar para (97), produz:

$$[\alpha''] = [A_T] \begin{bmatrix} e^{s_1 2\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 2\Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} 2\Delta t} \end{bmatrix} [\wedge] = [A_T''] [\wedge] \quad (99)$$

Através da combinação de (95) e (98) e assumindo $L=2N$,

$$\begin{bmatrix} [\alpha] \\ [\alpha'] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_T] \\ [A_T'] \end{bmatrix} [\wedge] \quad \text{ou} \quad [\alpha_A] = [A_A] [\wedge] \quad (100)$$

Combinando (98) e (99), segue-se que:

$$\begin{bmatrix} [\alpha'] \\ [\alpha''] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_T'] \\ [A_T''] \end{bmatrix} [\wedge] \quad \text{ou} \quad [\hat{\alpha}_A] = [\hat{A}_A] [\wedge] \quad (101)$$

pode-se escrever (100) como

$$[A_A]^{-1} [\alpha_A] = [\wedge] \quad (102)$$

Substituindo (102) em (101) tem-se:

$$[\hat{\alpha}_A] = [\hat{A}_A] [A_A]^{-1} [\alpha_A] \quad (103)$$

a qual pós-multiplicada por $[\alpha_A]^{-1}$, segue-se que:

$$[A_S] = [\hat{\alpha}_A] [\alpha_A]^{-1} = [\hat{A}_A] [A_A]^{-1} \quad (104)$$

onde $[A_S]$ é conhecida como matriz sistema; pós-multiplicando (104) por $[A_A]$, chega-se a:

$$[A_S] [A_A] = [\hat{A}_A] \quad (105)$$

mas cada coluna r de $[\hat{A}_A]$ é relacionada a uma correspondente coluna da matriz $[A_A]$ por:

$$\{\hat{A}_A\}_r = \{A_A\}_r e^{s_r \Delta t} \quad r=1,2,\dots,2N \quad (106)$$

deste modo, gera-se o seguinte autoproblema a solucionar:

$$[[A_S] - e^{s_r \Delta t} [I]] \{A_A\}_r = \{0\} \quad (107)$$

através do qual os parâmetros modais podem ser calculados.

3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho, apresentando primeiramente o método de identificação de parâmetros modais escolhido e depois o desenvolvimento do programa baseado no método.

3.1 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO ESCOLHIDO PARA O PROGRAMA

O método escolhido para o desenvolvimento do programa foi o método de Ewins-Gleeson, cuja escolha possibilitara atender os objetivos propostos para este trabalho, sendo um método de identificação multi-modos e que necessita de uma análise gráfica na busca da identificação dos parâmetros modais, desta forma, possibilitando a interatividade do usuário com o programa na aplicação do método em todas suas etapas até a obtenção dos resultados, que somente serão satisfatórios quando o usuário aplicar corretamente os conceitos deste método.

3.1.1 Aplicação do método de Ewins-Gleeson

A formulação do método de Ewins-Gleeson foi apresentada na revisão bibliográfica no item 2.3.3. Neste item serão apresentados conceitos do método que devem ser aplicados na identificação dos parâmetros modais para a obtenção de melhores resultados na análise.

O sucesso da identificação dos parâmetros modais pelo método depende principalmente de dois fatores, a qualidade da informação obtida do experimento e do ajuste das frequências ω e Ω .

Na grande maioria dos casos práticos, a aquisição é realizada para uma faixa de frequências maior do que a faixa de frequências de interesse da estrutura. Sendo impossível realizar a identificação de todas as frequências naturais contidas na FRF adquirida, o usual é selecionar um trecho, que contenha as frequências de interesse

para a análise. Devido ao acoplamento entre os modos de vibrar, ao se realizar o ajuste de curvas para um trecho da FRF, os resultados obtidos apresentam erros devido ao fato de se ignorar as outras frequências da FRF. As Figuras 8, 9 e 10 ilustram exemplos de erros nos ajustes realizados. As linhas em vermelho representam as FRFs regeneradas para as frequências ajustadas e as linhas pretas representam as FRFs experimentais.

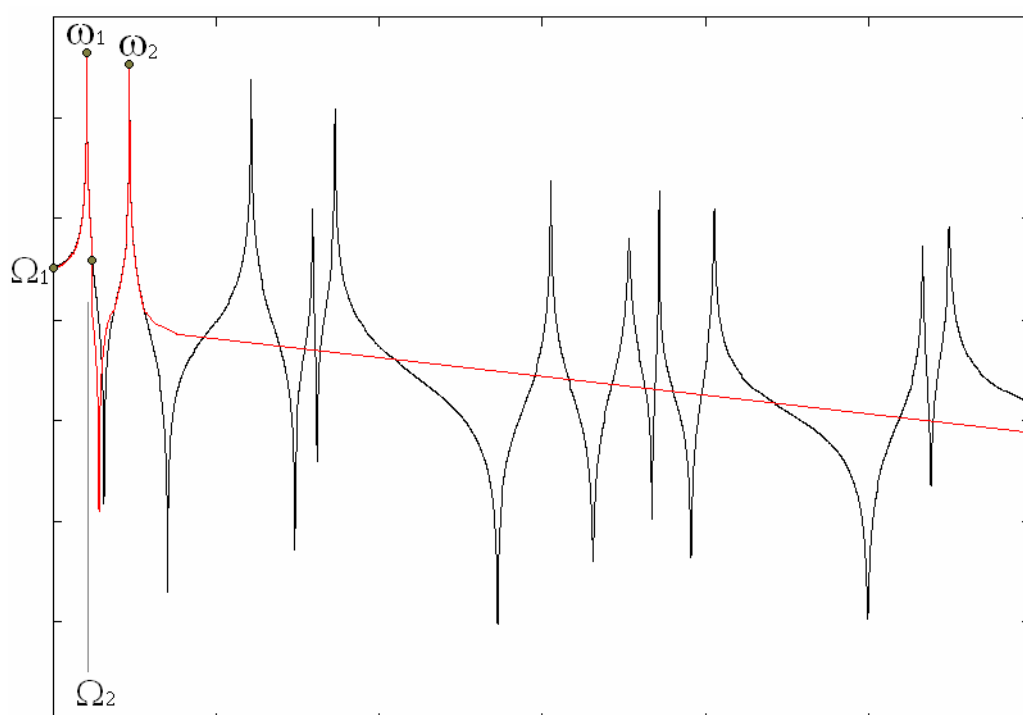


Figura 8 - Ajuste para 2 modos de vibrar

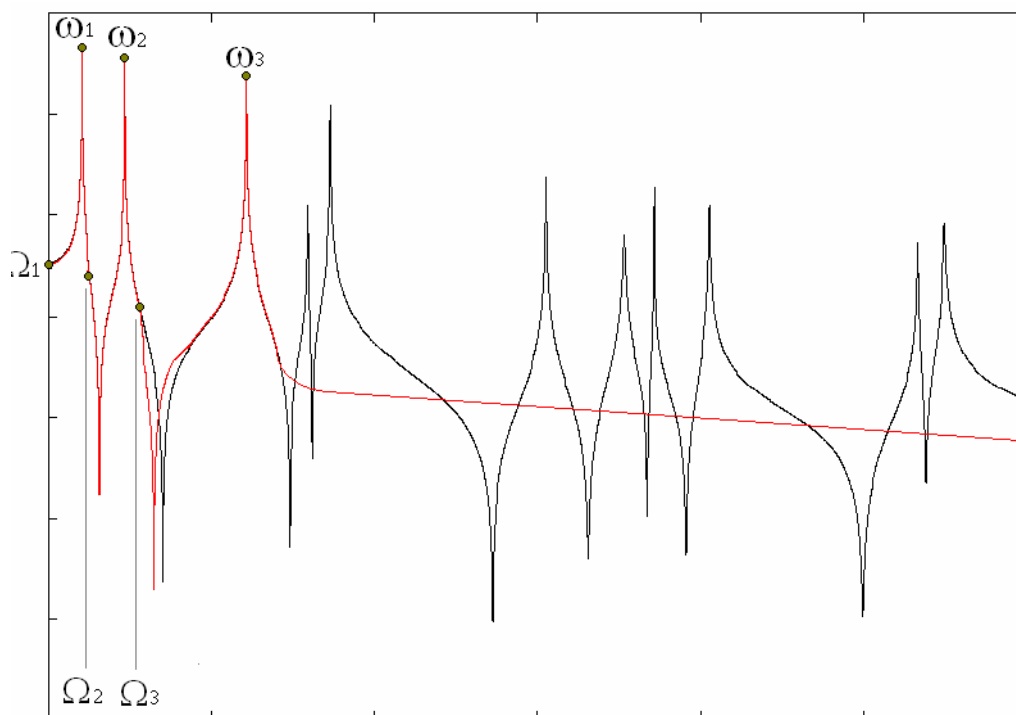


Figura 9 - Ajuste para 3 modos de vibrar

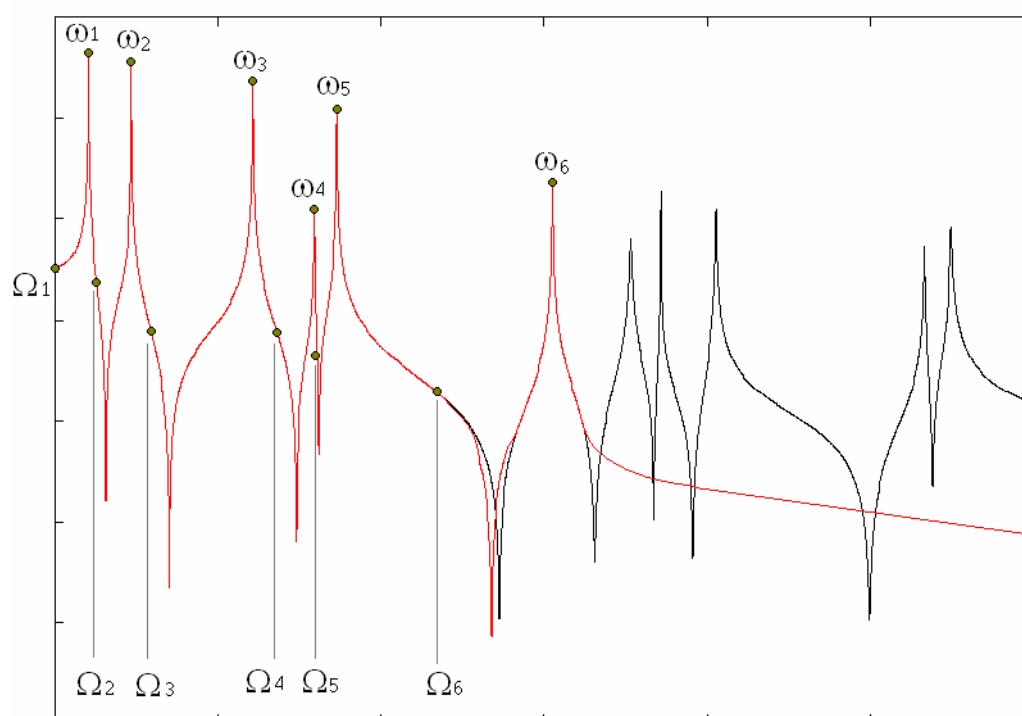


Figura 10 - Ajuste para 6 modos de vibrar

Nos exemplos ilustrados, as FRFs regeneradas foram prejudicadas nos últimos modos ajustados, devido à falta da contribuição dos modos seguintes a eles, que foram ignorados na análise. Desta forma, o ideal para se obter a identificação de um grupo de

freqüências é ajustar um número suficiente de modos além dos desejados para, assim, minimizar o erro existente nos modos em análise.

A escolha da fase das freqüências de ajuste do método também pode ter uma grande influência nos resultados obtidos. Os exemplos a seguir ilustram este erro: quando não se intercalam uniformemente as freqüências ω e Ω , as figuras apenas apresentam as freqüências Ω ajustadas, as freqüências ω encontram-se nas ressonâncias.

Na Figura 11, as freqüências Ω foram ajustadas na fase positiva da FRF e intercaladas pelas freqüências ω . Assim, observa-se que a FRF regenerada (linha vermelha) está sincronizada com a variação de fase da FRF experimental, e os erros observados nos últimos modos se devem aos modos ignorados nesta análise . Já na Figura 12 é possível ver o erro que ocorre quando as freqüências não são ajustadas na fase correta: embora as ressonâncias e amplitudes das freqüências tenham sido identificadas corretamente, a FRF regenerada está defasada.

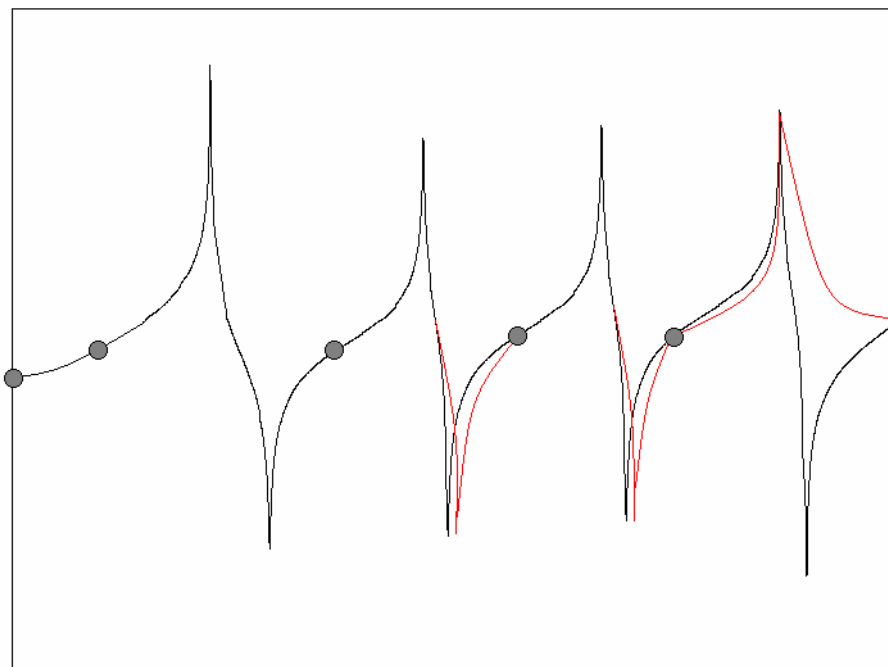


Figura 11 - Freqüências ajustadas com as mesmas fases

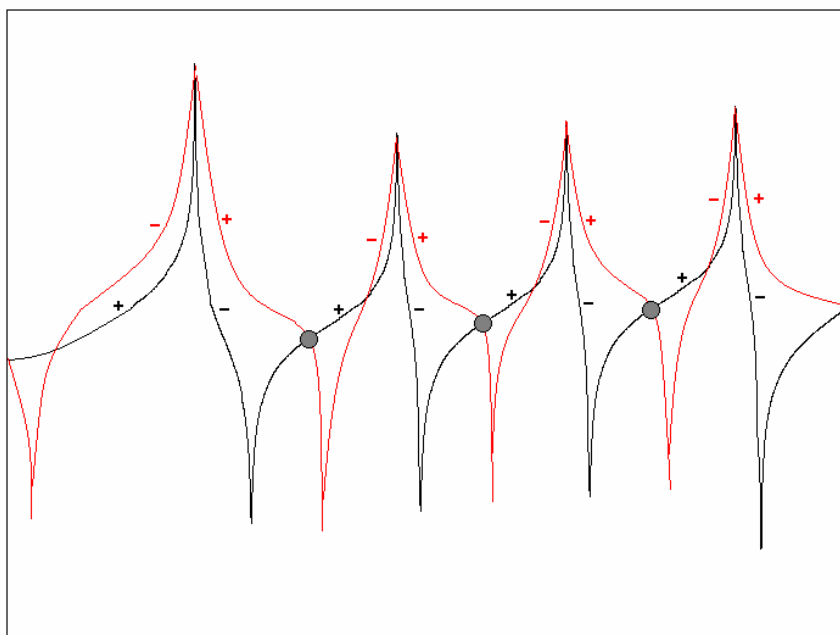


Figura 12 - Frequências ajustadas com fases diferentes

Os estudos do método de Ewins-Gleeson mostram que as FRF regeneradas são mais bem ajustadas usualmente quando, dentre as frequências Ω ajustadas, existe um maior número de anti-ressonâncias possível. Isto ocorre porque as anti-ressonâncias estão associadas com zeros na matriz $[R]$ da equação (87) e desta forma reduz os efeitos de erros de medidas dos casos práticos [Ewins, 1982]. Uma seleção ideal das frequências ω e Ω é ilustrado na Figura 13.

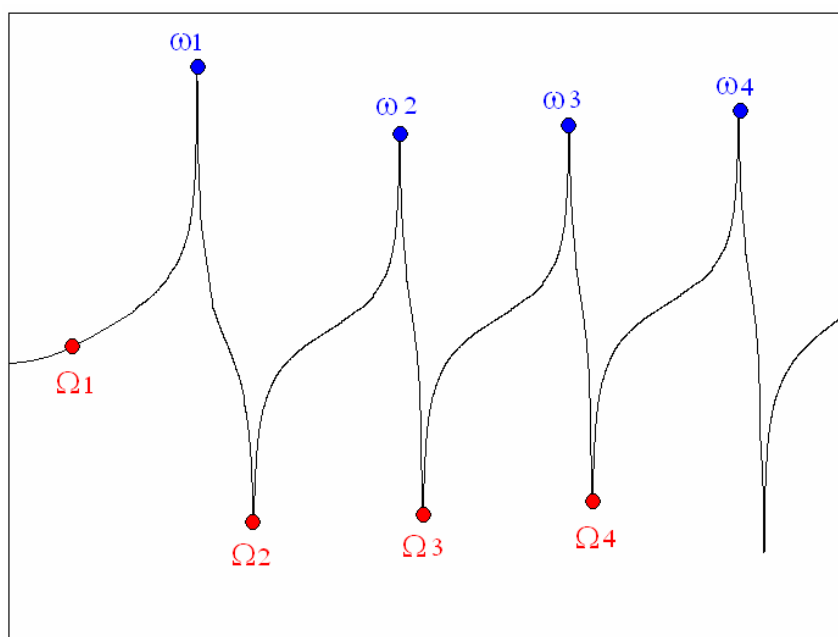


Figura 13 - Seleção ideal das frequências do método de Ewins-Gleeson

3.2 DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

A escolha da plataforma computacional Excel para o desenvolvimento do programa cumpriu com parte dos objetivos propostos para este trabalho, o de ser um ambiente computacional de baixo custo e que possibilitasse ao usuário interagir com o método. Este ambiente computacional permitiu, através da linguagem VBA, a criação das rotinas computacionais necessárias para a aplicação do método, principalmente com o processamento matricial dos dados experimentais e, ainda, criar controles de manipulação gráfica que fizeram a conexão entre o usuário e o método proposto.

3.2.1 Rotinas computacionais

As rotinas computacionais desenvolvidas no VBA do Excel podem ser divididas em dois grupos.

O primeiro engloba as rotinas responsáveis em realizar o tratamento dos dados experimentais durante todo o processo de análise, possibilitando extrair as informações do banco de FRFs, organizando os dados para gerar recursos gráficos para a interface com o usuário, separando dados do conjunto de informação através de comandos efetuados pelo usuário no processo de análise, e realizando cálculos matriciais.

O segundo grupo de rotinas computacionais tem a função de possibilitar ao usuário interagir com o programa, sendo responsável em realizar a mudança entre as telas do programa e responder aos comandos efetuados pelo usuário através dos controles existentes nas telas e gráficos.

3.2.2 Utilização do programa

Após a preparação dos dados a análise poderá ser iniciada. O programa desenvolvido é o *Análise Modal*. Para iniciá-lo, basta clicar sobre o ícone do arquivo, como se faz para qualquer arquivo do aplicativo Excel. A Figura 14 ilustra a entrada

do programa. No canto inferior direito existe um botão “INICIAR” que nos leva à tela de definição dos parâmetros de ensaio.

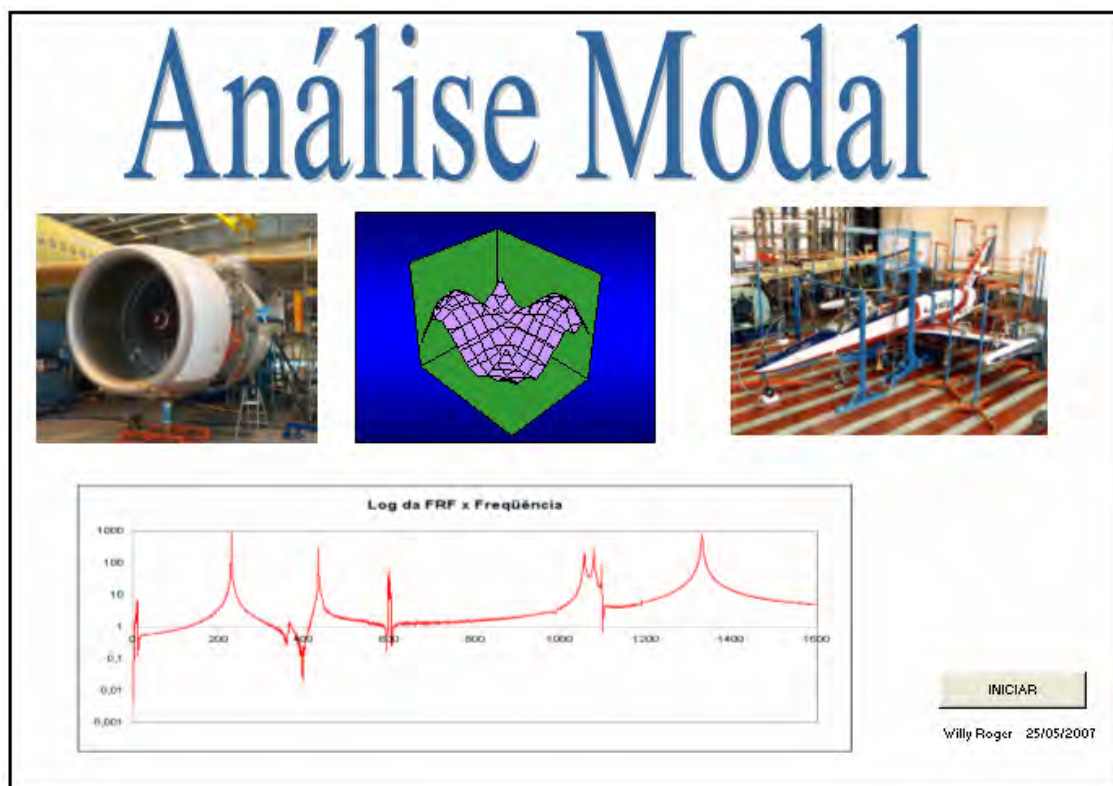


Figura 14 - Entrada do programa

DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DE ENSAIO

ESPESSURA DA PLACA	7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tbody> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td></tr> <tr><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td></tr> <tr><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td></tr> <tr><td>45</td><td>46</td><td>47</td><td>48</td><td>49</td><td>50</td><td>51</td><td>52</td><td>53</td><td>54</td><td>55</td></tr> <tr><td>56</td><td>57</td><td>58</td><td>59</td><td>60</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td></tr> <tr><td>67</td><td>68</td><td>69</td><td>70</td><td>71</td><td>72</td><td>73</td><td>74</td><td>75</td><td>76</td><td>77</td></tr> <tr><td>78</td><td>79</td><td>80</td><td>81</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>87</td><td>88</td></tr> <tr><td>89</td><td>90</td><td>91</td><td>92</td><td>93</td><td>94</td><td>95</td><td>96</td><td>97</td><td>98</td><td>99</td></tr> <tr><td>100</td><td>101</td><td>102</td><td>103</td><td>104</td><td>105</td><td>106</td><td>107</td><td>108</td><td>109</td><td>110</td></tr> <tr><td>111</td><td>112</td><td>113</td><td>114</td><td>115</td><td>116</td><td>117</td><td>118</td><td>119</td><td>120</td><td>121</td></tr> </tbody> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
1	2		3	4	5	6	7	8	9	10	11																																																																																																																
12	13		14	15	16	17	18	19	20	21	22																																																																																																																
23	24		25	26	27	28	29	30	31	32	33																																																																																																																
34	35		36	37	38	39	40	41	42	43	44																																																																																																																
45	46		47	48	49	50	51	52	53	54	55																																																																																																																
56	57		58	59	60	61	62	63	64	65	66																																																																																																																
67	68		69	70	71	72	73	74	75	76	77																																																																																																																
78	79		80	81	82	83	84	85	86	87	88																																																																																																																
89	90		91	92	93	94	95	96	97	98	99																																																																																																																
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110																																																																																																																	
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121																																																																																																																	
COMPRIMENTO DA PLACA	300																																																																																																																										
LARGURA DA PLACA	300																																																																																																																										
NUMERO DE LINHAS DA FRF	1067																																																																																																																										
NUMERO DE COLUNAS DA FRF	6																																																																																																																										
NUMERO DE PONTOS POR FRF	3200																																																																																																																										
DISCRETIZACAO DA FRF	0,5																																																																																																																										
NUMERO DE COLUNAS DA PLACA	11																																																																																																																										
NUMERO DE LINHAS DA PLACA	11																																																																																																																										
PONTO DE EXITAÇÃO (IN)	91																																																																																																																										
PONTO DE AQUISIÇÃO (OUT)	121																																																																																																																										

Localizar Amostras
Carregar FRF
Voltar
Proximo

Figura 15 - Definição dos parâmetros de ensaio

A Figura 15 ilustra a tela de definição dos parâmetros de ensaio. Os dados devem ser inseridos nos campos localizados à esquerda da tela.

Os três primeiros campos de cima para baixo definem a geometria da placa:

- 1- espessura da placa;
- 2- comprimento da placa;
- 3- largura da placa.

Os quatro campos seguintes devem ser preenchidos com as informações referentes a FRF a ser analisada:

- 1- número de linhas da FRF;
- 2- número de colunas da FRF;
- 3- número de pontos da FRF;

Discretização da FRF.

Os últimos campos restantes definem a discretização da placa, o máximo permitido é (15 x 15), também é definido o ponto de excitação “IN” e o ponto de aquisição “OUT”. Lembrando que os dois últimos campos definem a FRF que será analisada:

- 1- número de colunas da placa;
- 2- número de linhas da placa;
- 3- ponto de excitação (IN);
- 4- ponto de aquisição (OUT).

Definidos os parâmetros do ensaio, é necessário selecionar a FRF que será analisada. Este procedimento é efetivado por dois botões localizados no canto inferior esquerdo da tela. O primeiro botão a ser acionado é o “LOCALIZAR AMOSTRAS”. Após o acionamento, uma janela de procura aparecerá, como a ilustrada na Figura 16, e nela deverá ser indicada a localização da pasta que contém os arquivos das FRF's preparados previamente. Ao término da localização deverá ser acionado o botão “OK”. A FRF selecionada no campo será carregada com o acionamento do botão “Carregar FRF”.

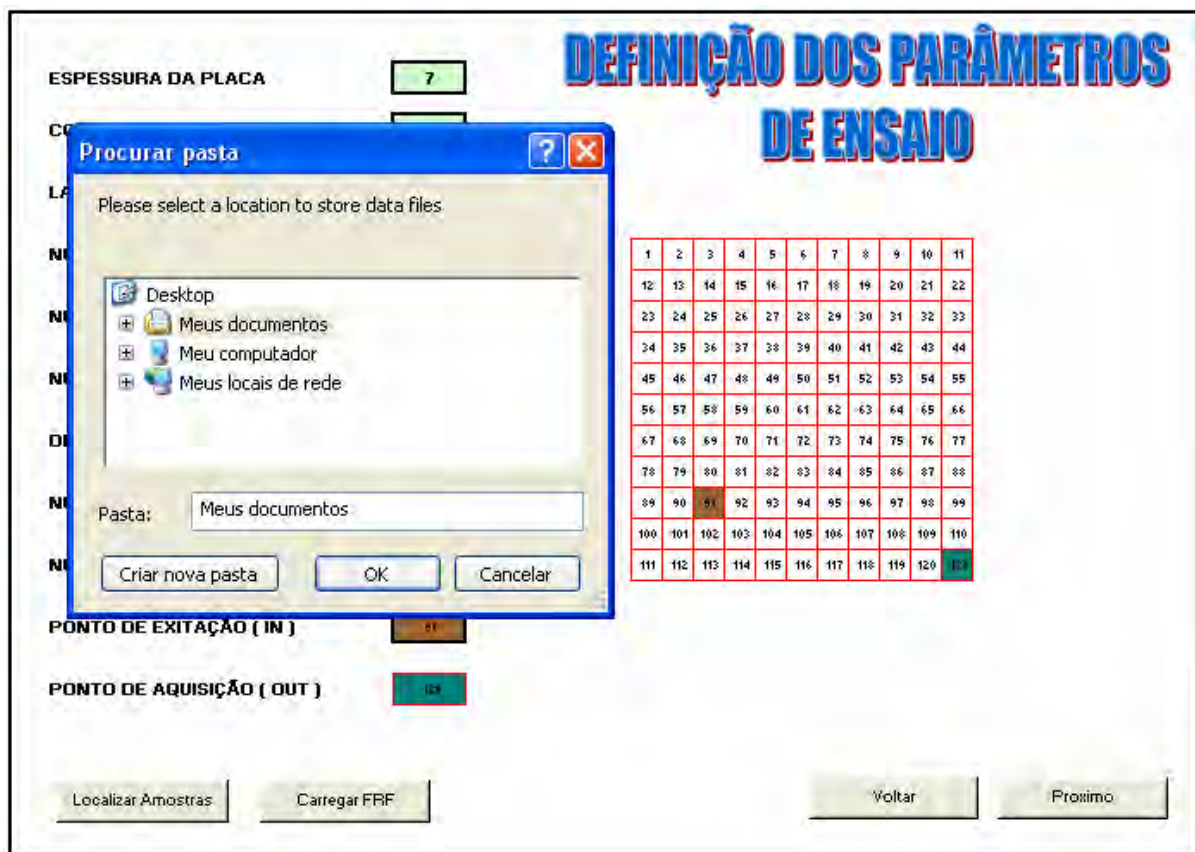


Figura 16 - Janela de procura

Automaticamente, ao finalizar o carregamento dos dados da FRF selecionada, o programa passará para a próxima tela que exibirá dois gráficos da FRF, como ilustrado na Figura 17. Os gráficos ilustrados apresentam no eixo vertical a amplitude da FRF e no eixo horizontal a frequência que cada amplitude ocorre. Nesta tela também se pode observar dois botões no canto inferior direito, que possuem a função de possibilitar ao usuário passar para a próxima tela ou retornar a anterior.

O gráfico superior ilustra as amplitudes da parte real da FRF, enquanto que o gráfico inferior exibe as amplitudes da parte imaginária da FRF.

Acessando a próxima tela, se observará, como na Figura 18, outros dois gráficos: no superior, a fase da FRF ao longo das frequências, e no inferior a amplitude logarítmica da FRF. Este gráfico ajuda a observar ruídos que contaminam a FRF e também a evidenciar os picos das frequências naturais. Da mesma forma que a tela anterior, esta possui dois botões que permitem avançar ou regredir.

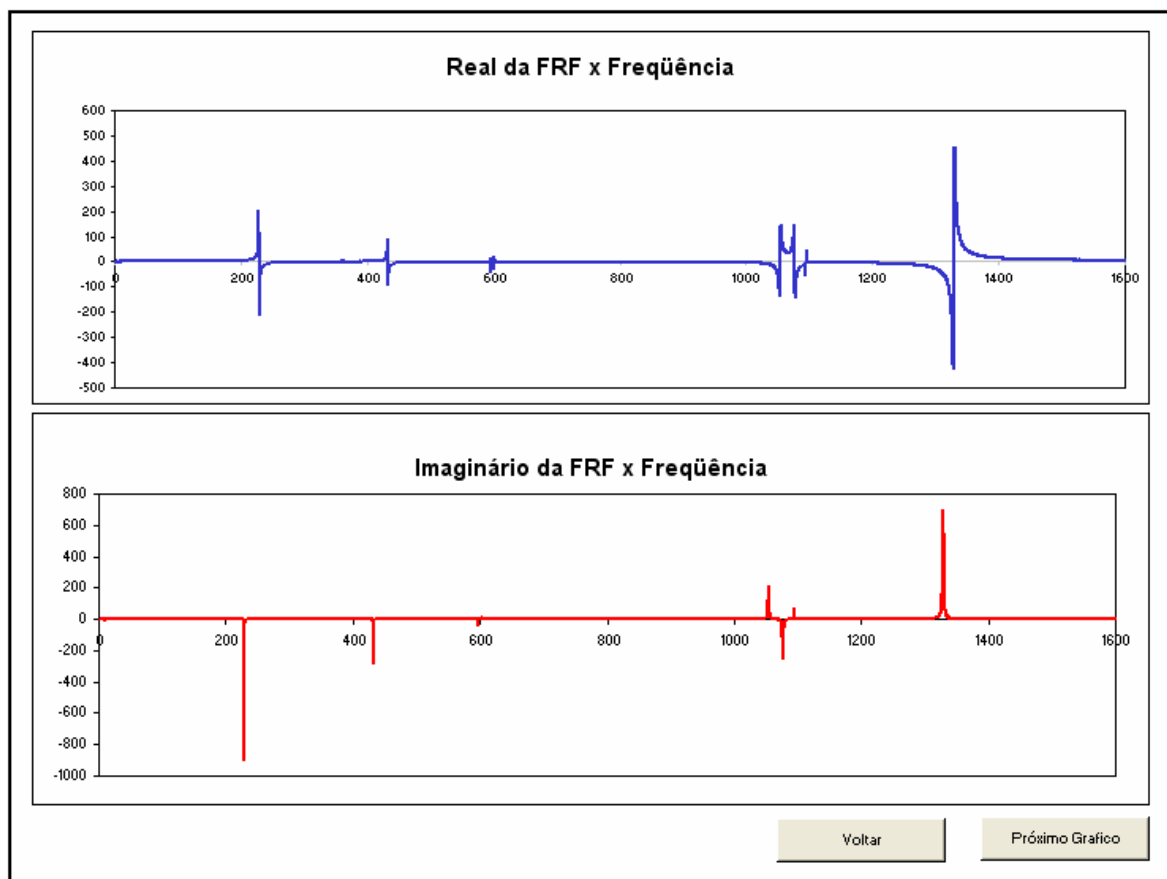


Figura 17 - Gráficos da parte real e imaginária da FRF

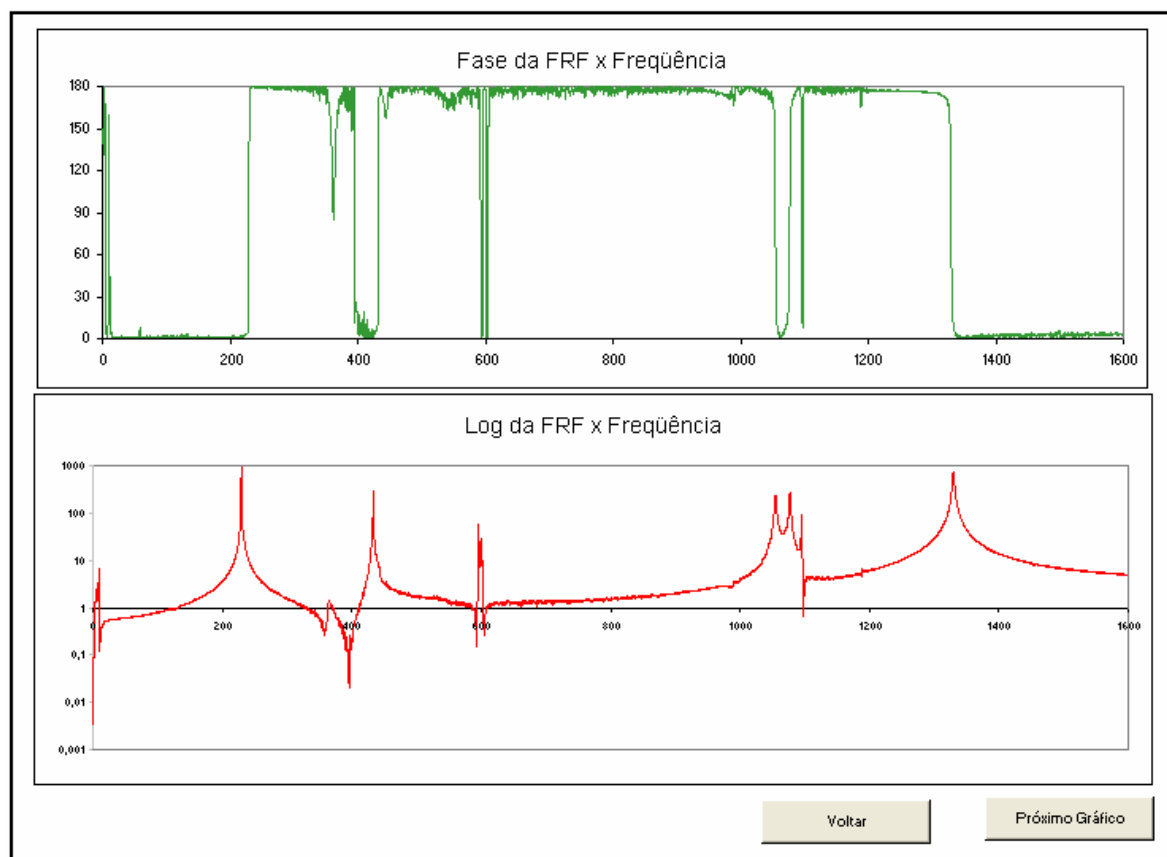


Figura 18 - Gráfica da fase e amplitude logarítmica da FRF

A última tela antes de se iniciar a análise, Figura 19, ilustra o gráfico da parte real pela parte imaginária da FRF, também conhecido como gráfico de Nyquist. Este gráfico fornece várias informações a respeito da FRF e serve como base de vários modelos de estimação modal, um dos mais conhecidos é o *Ajuste de Círculos*.

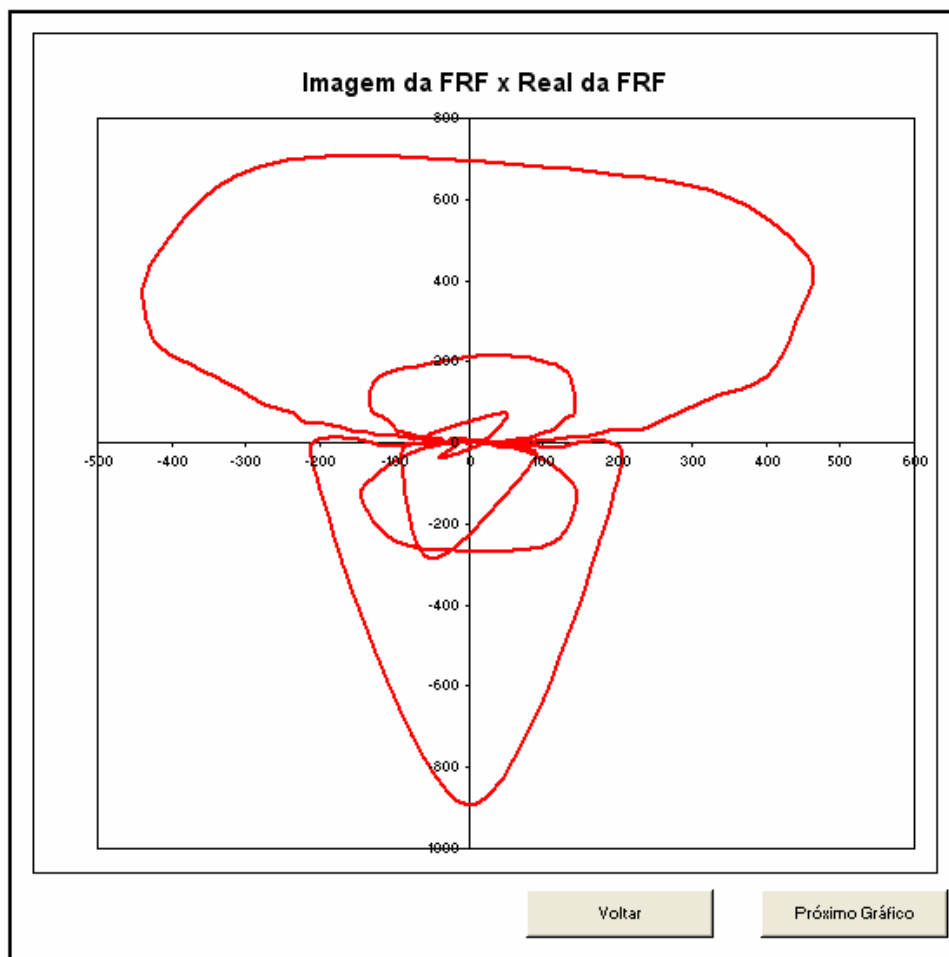


Figura 19 - Gráfico de Nyquist

Repetindo o procedimento apresentado, até a tela ilustrada na Figura 19, para algumas FRFs aquiritadas, mesmo para o usuário com poucos conhecimentos em análise modal, é possível avaliar algumas características das FRFs, como por exemplo: se o sinal aquiritado está com muitas perturbações de ruídos, quantas frequências existem na faixa aquiritada, quais frequências apresentam maiores amortecimentos e o quão acopladas estão as frequências naturais com as suas adjacentes. Essas informações ajudarão a traçar uma estratégia de análise.

A partir desta etapa, com a estratégia de análise definida, o usuário inicia a identificação dos parâmetros modais e, conseqüentemente as formas modais.

A Figura 20 ilustra a tela onde a FRF em análise está representada com amplitudes logarítmicas. Na parte inferior da tela existem duas barras de rolagem, que são responsáveis por limitar a região que será analisada no próximo momento; os limites são representados por um quadro verde igual ao ilustrado abaixo. No exemplo ilustrado, os limites definidos foram 263 Hz e 1393 Hz. Definida a faixa de análise, pode-se apertar o botão “Zoom”, localizado na parte inferior direita da tela.

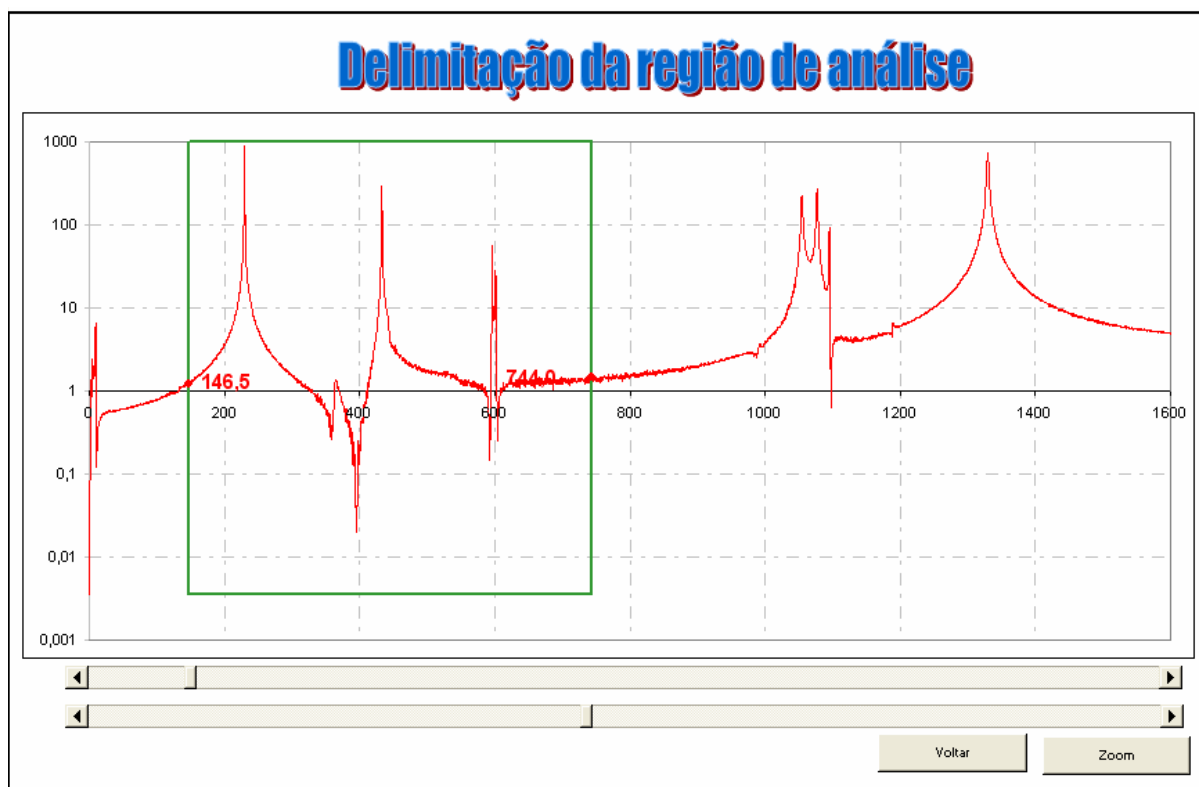


Figura 20 - Delimitação da região de análise

A Figura 21 exibe no gráfico superior o trecho da parte real FRF delimitada entre as frequências selecionadas na tela anterior. O gráfico inferior mostra a parte real da FRF na totalidade da faixa de frequência adquirida. Na esquerda da tela existem vinte barras de rolagem, as quais têm como função indicar as frequências existentes na FRF, que são parâmetros necessários para o desenvolvimento do método.

Com o posicionamento dos parâmetros ω é possível identificar as frequências naturais, e com a amplitude da parte imaginária da FRF para as mesmas frequências se determina as amplitudes que definirão o modo de vibrar da frequência; com os parâmetros Ω selecionados são calculados os amortecimentos e a fase do sistema para cada frequência.

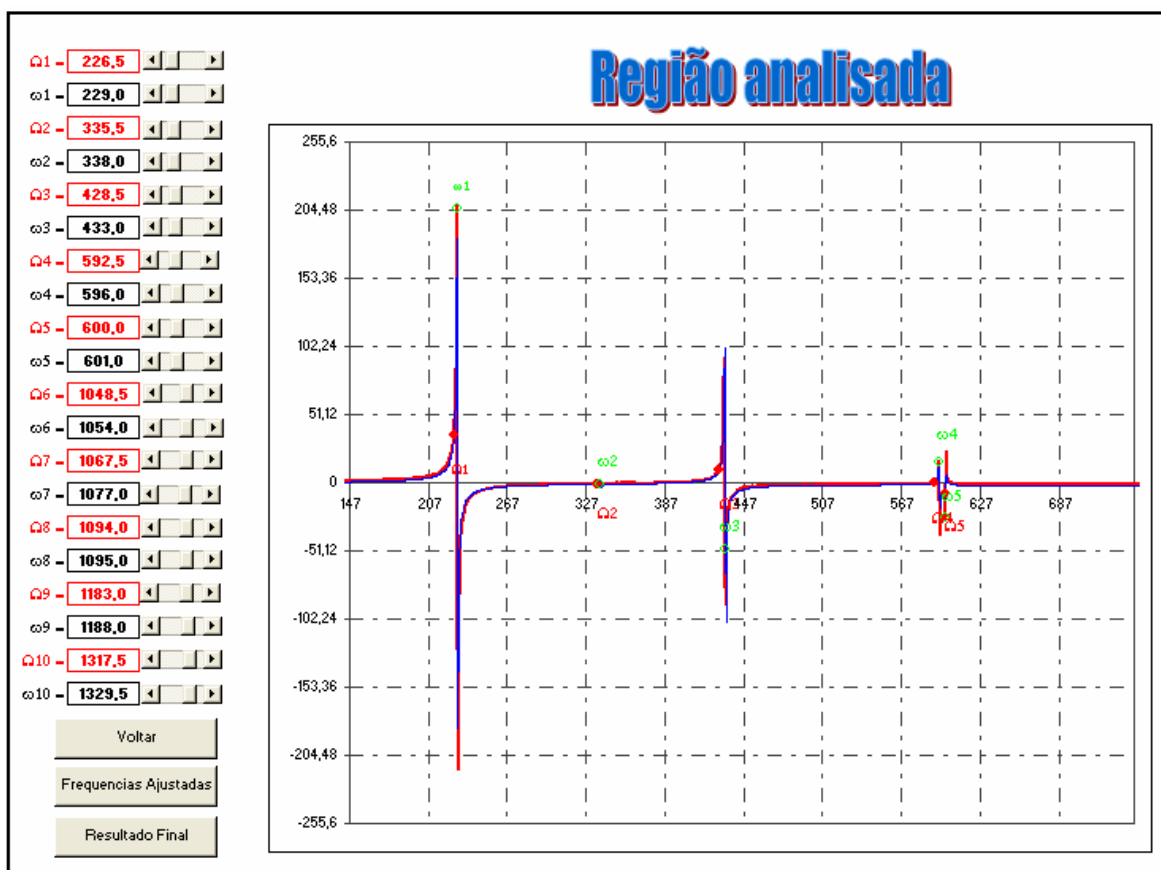


Figura 21 - Tela de definição dos parâmetros de análise

A Figura 22 ilustra o ajuste realizado através das barras de rolagem para a terceira frequência. Neste exemplo, $\omega3 = 432,5$ Hz. A Figura 23 ilustra um modo ajustado, a linha vermelha corresponde a FRF adquirida e a linha azul a FRF ajustada.

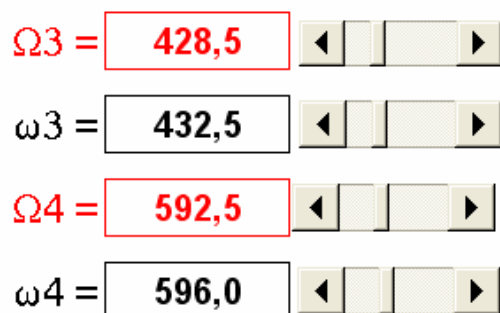


Figura 22 - Controle de definição dos parâmetros

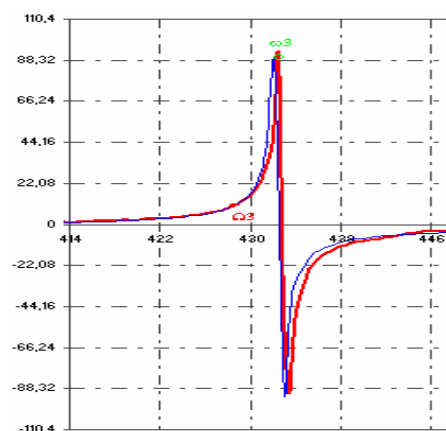


Figura 23 - Sétima frequência ajustada

A próxima etapa consiste em verificar o ajuste da FRF no gráfico e verificar os amortecimentos obtidos com o ajuste realizado para os modos de vibrar analisado na tabela que se encontra no canto inferior direito da tela.

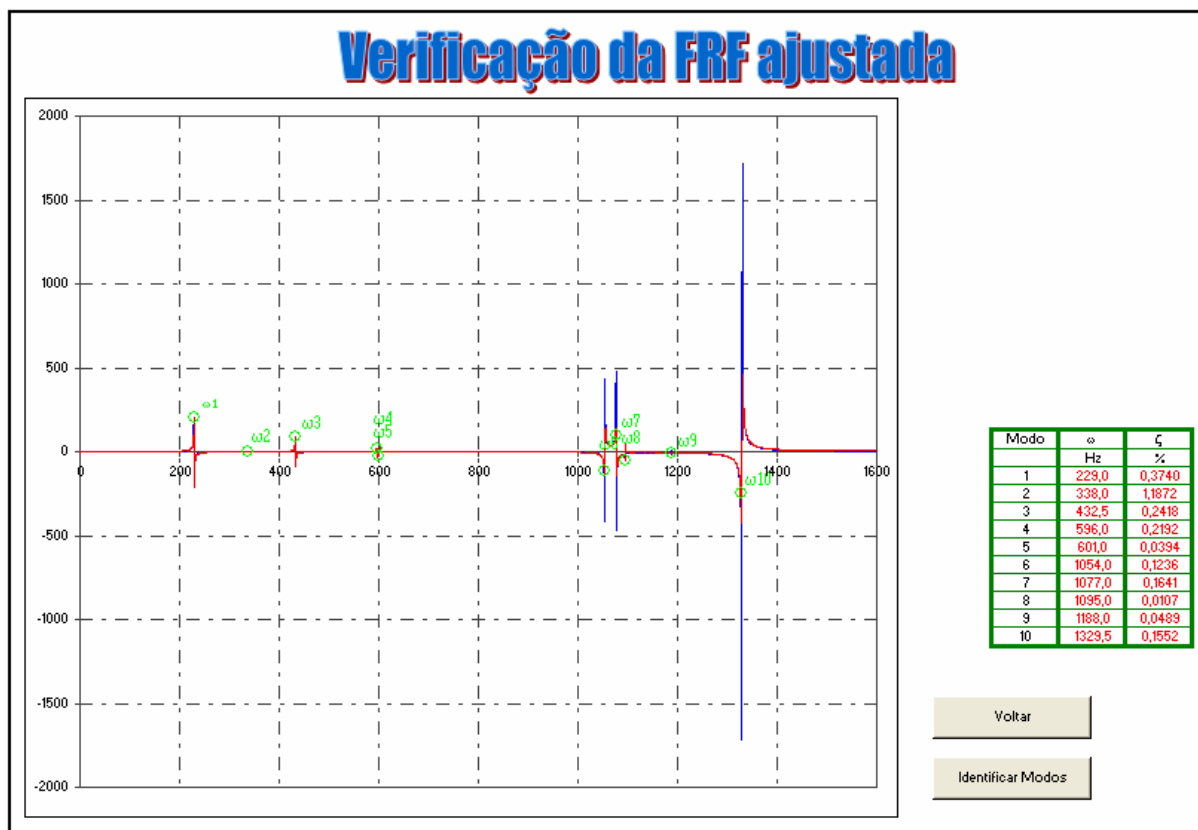


Figura 24 - Ajuste da FRF e resultados obtidos

A próxima tela apresenta os comandos que farão a identificação da forma modal da estrutura analisada em cada frequência natural obtida. O programa permite identificar o máximo de dez formas de vibrar da estrutura, de cada vez.

Na Figura 25, a tela ilustra dez gráficos, os quais têm a função de mostrar a forma modal da estrutura para cada frequência estimada anteriormente; também exibe dez matrizes, as quais dispõem de informação referente ao deslocamento de cada ponto medido no experimento; mostra os controles responsáveis em proceder à análise e outras informações, como o modo e frequência também são informados.

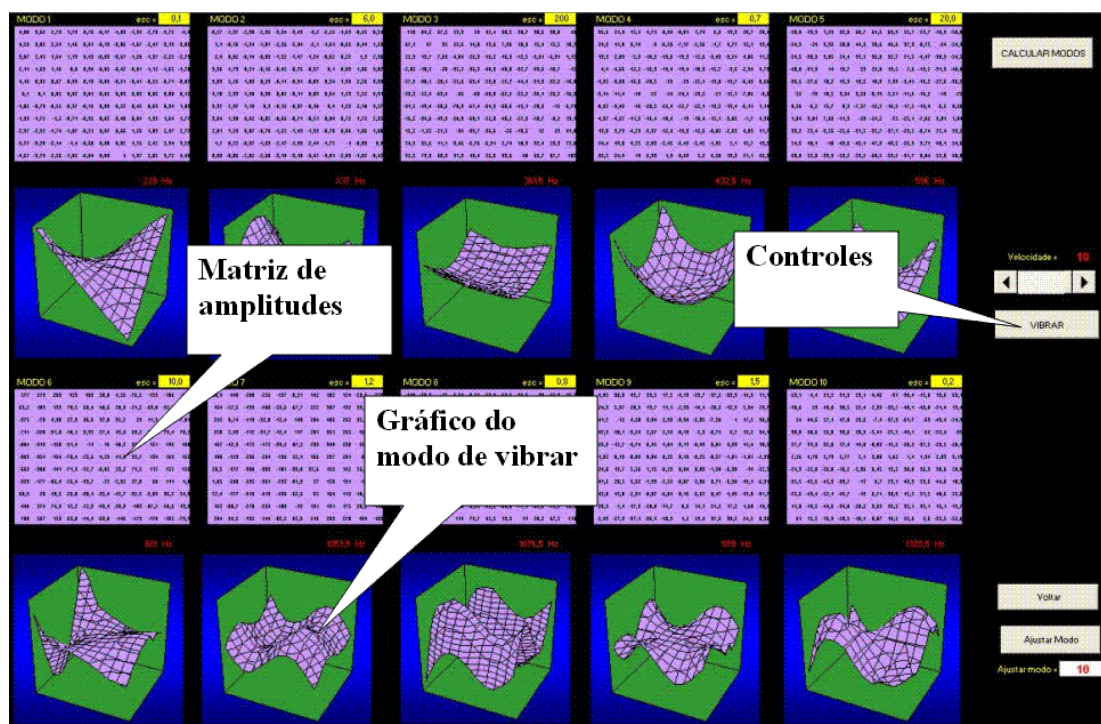


Figura 25 - Tela de obtenção dos modos de vibrar

Na Figura 26, pode-se observar o campo correspondente para um modo de vibrar. Cada campo como o ilustrado na figura apresenta informações que identificam o modo: a frequência, a matriz de amplitudes, a representação gráfica da forma modal, que é obtida através da matriz de amplitudes, e um campo onde o usuário pode escalar a matriz, para que o gráfico projete de forma mais clara o modo de vibrar.

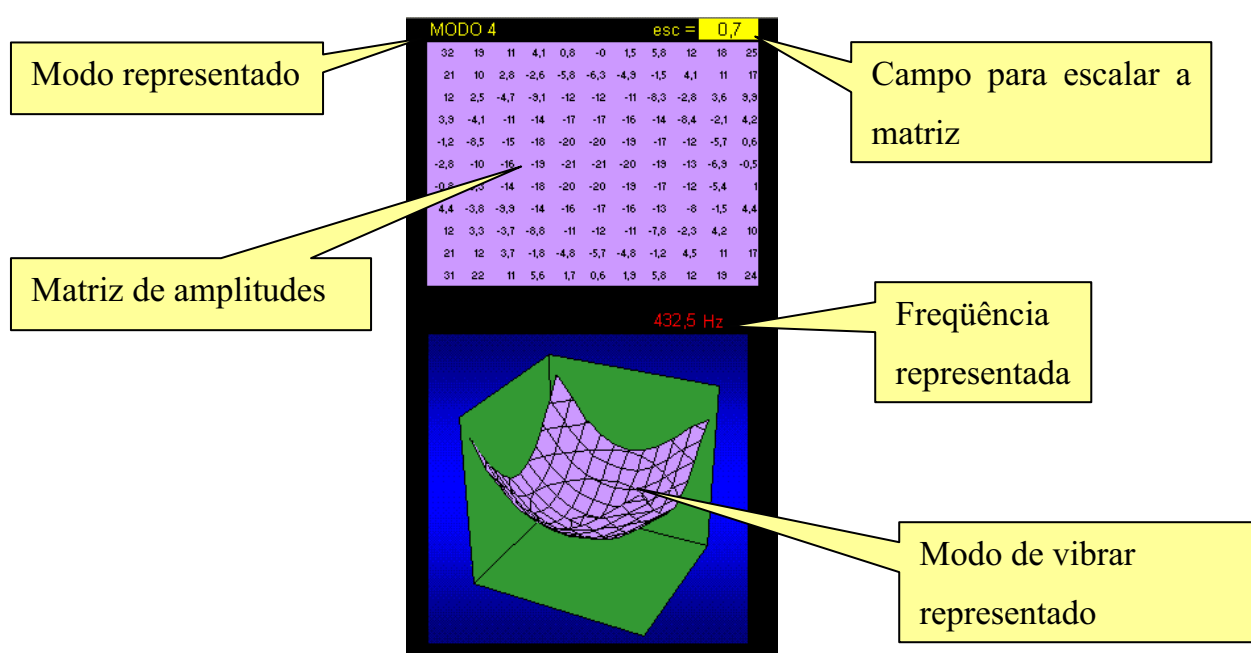


Figura 26 - Campo de um modo de vibrar

A Figura 27 ilustra os controles desta tela, e a sequência correta para se obter os modos é: pressionar o botão “ CALCULAR MODOS”; este, ao ser pressionado, dá início a rotina computacional que obtém os dados que compõem a matriz de amplitudes. O procedimento desta programação é carregar cada uma das FRF's armazenadas, identificar as amplitudes das frequências identificadas e armazenar as informações na matriz de amplitudes.

O botão central “VIBRAR” fará os gráficos que ilustram a forma modal oscilarem, produzindo na tela um efeito dinâmico que tem o intuito de possibilitar uma melhor interpretação do modo de vibrar e identificar pontos mal estimados, que aparecerão como prováveis descontinuidades no gráfico representado. Os pontos com erro poderão ser corrigidos na próxima etapa da análise. Acima do botão “VIBRAR” existe uma barra de rolagem, a qual permite controlar com dez níveis diferentes a velocidade da oscilação do gráfico.

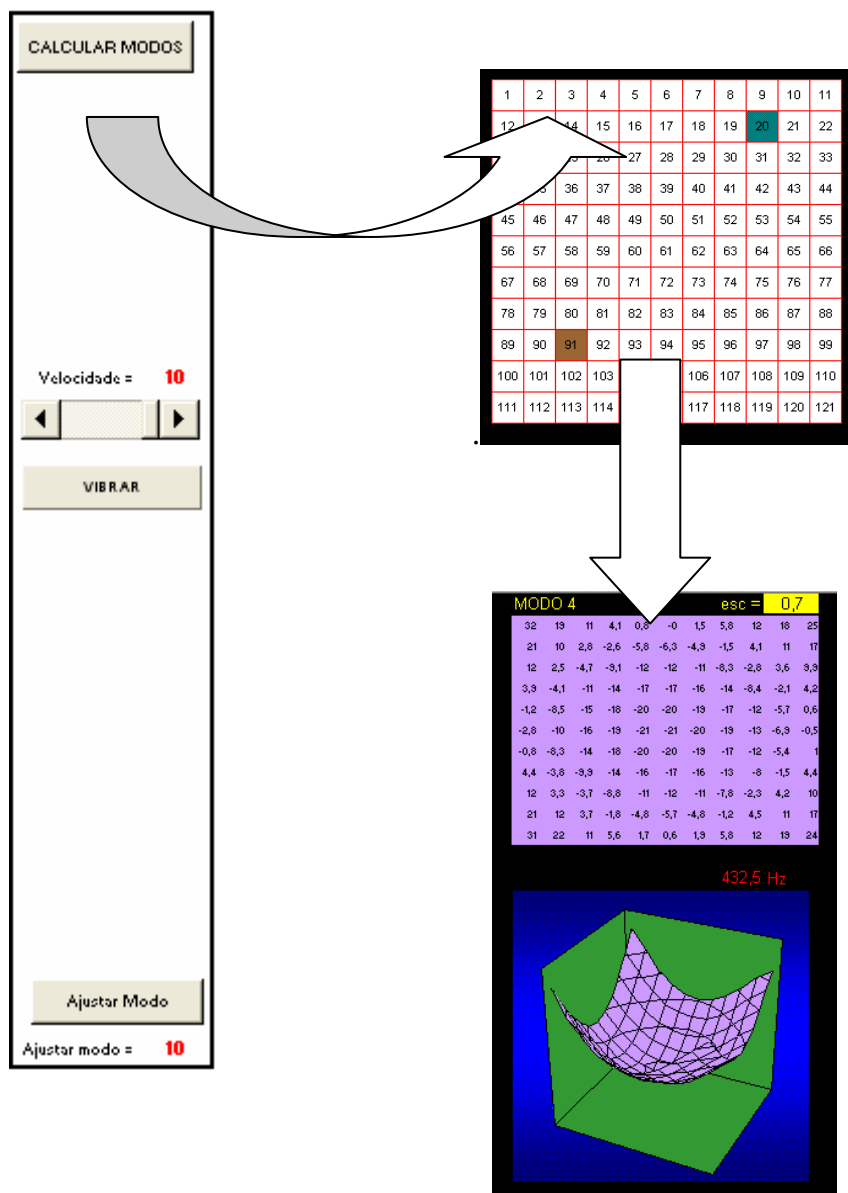


Figura 27 - Controles para analisar o modo de vibrar

No canto inferior direito da tela localizam-se dois botões que permitem regredir à tela anterior ou seguir para a última parte da análise. Abaixo do botão “Ajustar Modo” existe um campo de entrada, e neste deverá ser inserido o número do modo cujas amplitudes representadas nos gráficos necessitam de ajustes.

Na última tela do programa, Figura 28, o usuário poderá ajustar estatisticamente os pontos que fogem do padrão e depois gravá-los, melhorando a visualização do modo obtido.

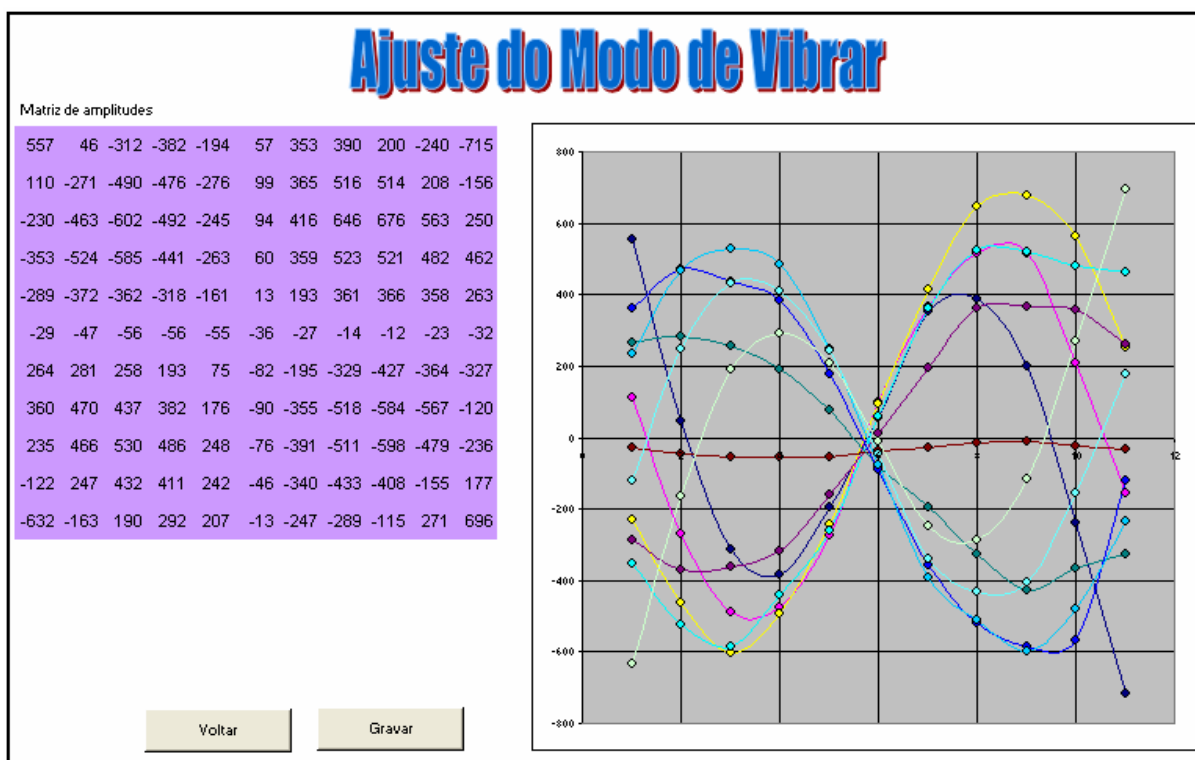


Figura 28 - Ajuste do modo de Vibrar

Na tela se observa, à esquerda, a matriz de amplitudes para o modo a ser corrigido e, à direita, o gráfico 2D da matriz, onde cada linha do gráfico corresponde a uma linha da matriz.

O exemplo a seguir ilustra como se deve proceder para a correção de um ponto. Na Figura 29 pode-se observar um modo de vibrar de uma placa, o qual apresenta uma descontinuidade no gráfico.

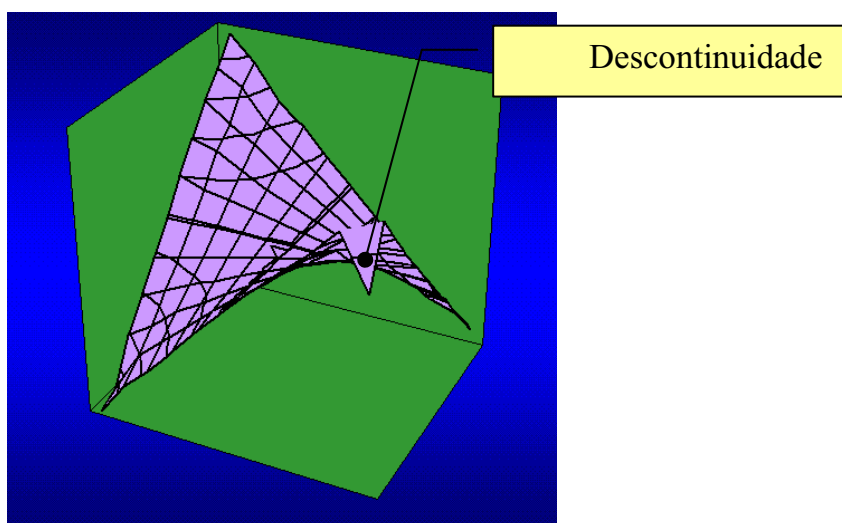


Figura 29 - Descontinuidade nas amplitudes

A Figura 30 ilustra o modo de vibrar no gráfico 2D. Observando as tendências das linhas do gráfico que refletem as linhas da matriz de amplitudes, é fácil identificar o ponto que desvia da trajetória das demais linhas.

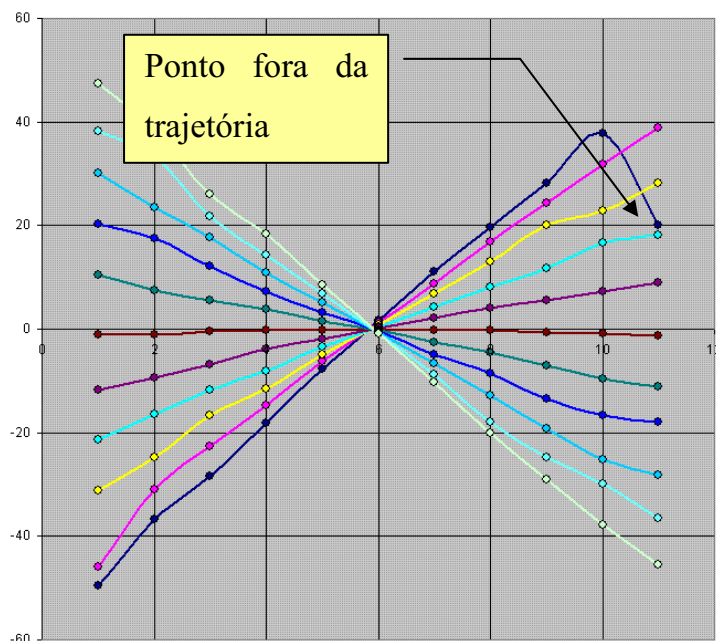


Figura 30 - Ponto fora da trajetória

Selecionando a linha no gráfico em que o ponto está contido, é possível localizar na matriz a linha em que o ponto se encontra, através de recursos estatísticos, ou simplesmente visuais e ajustar o ponto. Os modos normalmente possuem algum tipo de simetria ou assimetria, esta característica possibilita na maioria das vezes o usuário refletir valores da matriz para se obter o ajuste necessário.

O novo valor a ser adotado deverá ser inserido na matriz na posição correspondente, e após observar a regularização das curvas no gráfico 2D, efetuar o arquivamento da nova matriz de amplitudes através da seleção do botão “GRAVAR”, localizado na parte inferior esquerda da tela. Este processo poderá ser efetuado sucessivamente para vários pontos, se necessário, até que o resultado seja satisfatório para o usuário. Para analisar outro modo o usuário deverá apertar o botão “VOLTAR”, selecionar um novo modo e retornar à tela para repetir o processo descrito.

As Figura 31 e Figura 32 ilustram a correção efetuada no exemplo.

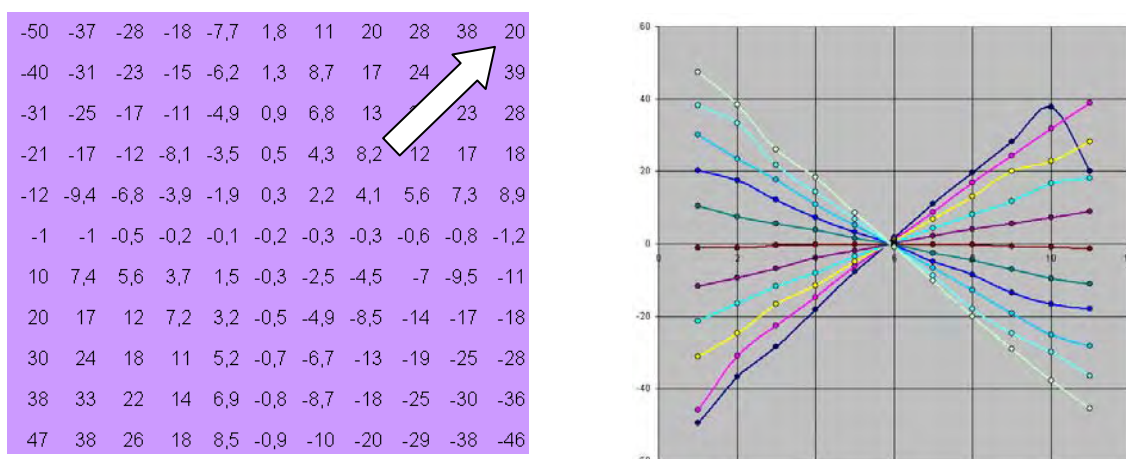


Figura 31 - Matriz com ponto incorreto

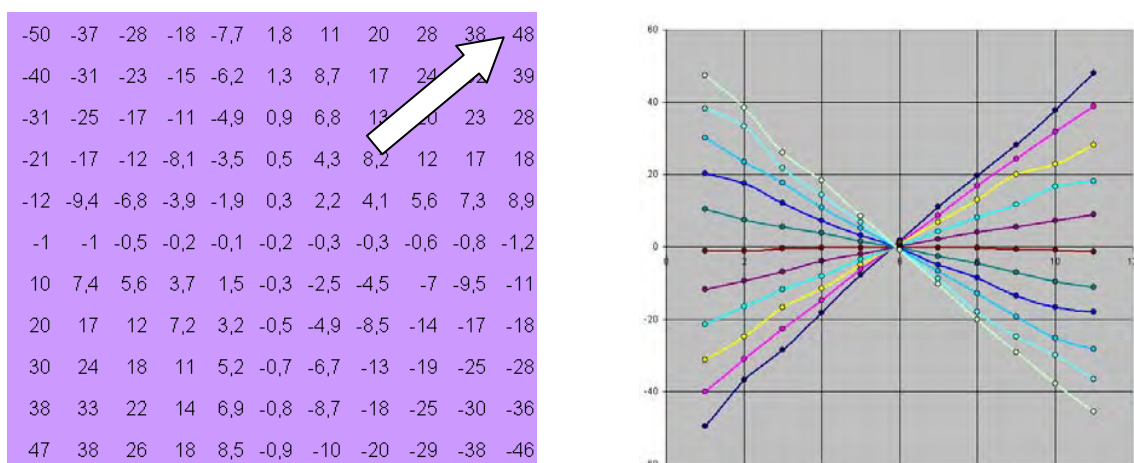


Figura 32 - Matriz com ponto ajustado

A Figura 33 ilustra o gráfico do modo de vibrar após a correção na matriz descrita anteriormente; a descontinuidade apresentada na Figura 29 foi solucionada.

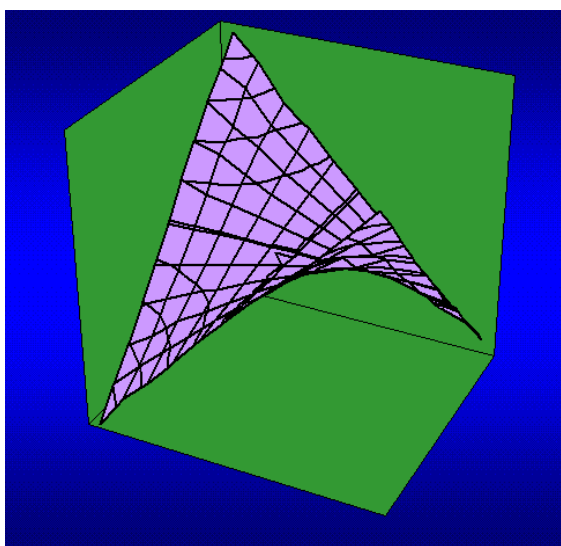


Figura 33 - Modo ajustado

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta resultados obtidos na identificação de uma estrutura com aplicação do programa computacional de análise e identificação modal desenvolvido na pesquisa. Inicialmente são discutidos aspectos dos dados experimentais de entrada, utilizados para a validação do programa. Na etapa seguinte são apresentados a análise das FRFs experimentais através programa *Análise Modal*, abrangendo a preparação dos dados experimentais, o ajuste de curvas através do programa e os parâmetros modais identificados. Por último, a validação dos resultados obtidos com o programa *Análise Modal* foi desenvolvida através da comparação de resultados obtidos com o software de identificação modal LMS CADA-X e por intermédio de modelo de elementos finitos da estrutura.

4.1 DADOS EXPERIMENTAIS UTILIZADOS NA ANÁLISE

Os dados experimentais utilizados neste estudo foram obtidos nos laboratórios do Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial (CTA), Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), Divisão de Integração e Ensaio [Dezotti, 2006].

4.1.1 Aparato experimental

Os dados experimentais de entrada do programa *Análise Modal* desenvolvido com recursos do Excel, foram obtidos através de um experimento realizado na Divisão de Integração e Ensaio do IAE/CTA [Dezotti, 2006]. O experimento desenvolvido teve por objetivo avaliar o comportamento dinâmico de uma placa de alumínio do tipo 2024-T3, de dimensões (300 x 300 x 7) mm na condição livre-livre. A estrutura sob ensaio foi suspensa por dois elásticos, respeitando o princípio de que a frequência natural do sistema (placa e elásticos), fosse inferior a 20% do valor da primeira frequência natural da placa, [Ewins, 1984].

Para excitar a placa, foi utilizado um excitador eletrodinâmico da LDS, modelo V201, que opera em conjunto com um amplificador, também da LDS, modelo TPO 25. Este sistema tem capacidade máxima de 17,8 N numa faixa de frequência de 5Hz a 10000 Hz. As medidas de força aplicada à estrutura para estimar as FRFs, foram obtidas através de um sensor dinâmico Endevco - 2311-10. No desenvolvimento dos ensaios, os sinais de medida foram monitorados no domínio da frequência através do aparato ilustrado na Figura 34, que essencialmente é um sistema de vibrômetro laser Polytec PSV 400 B.

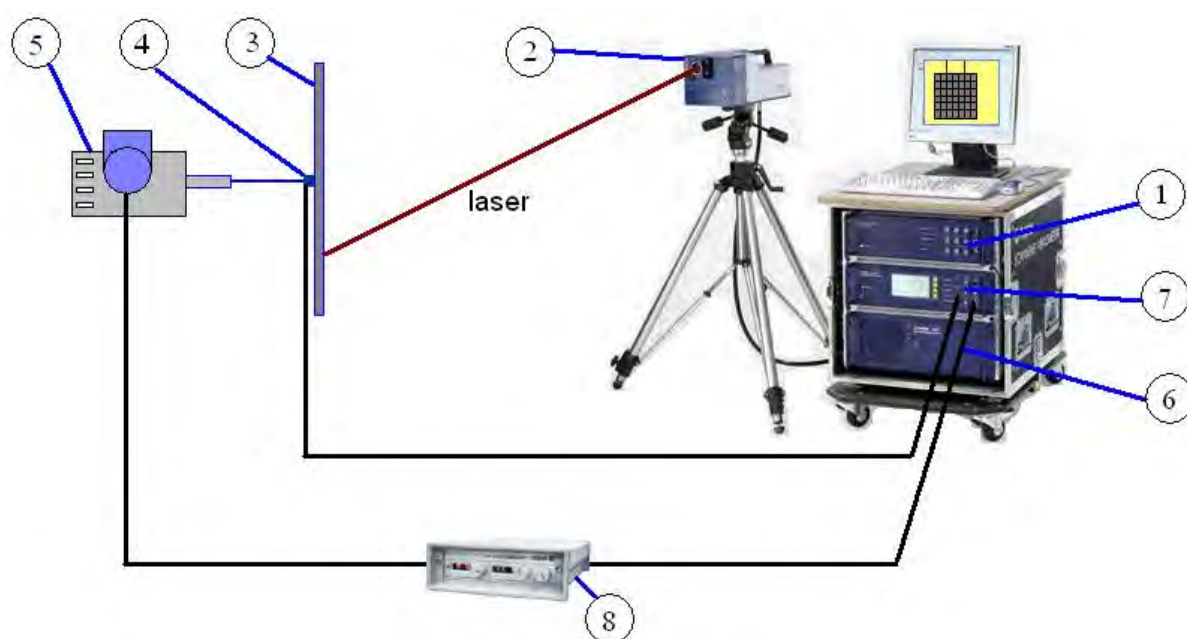


Figura 34 - Aparato experimental

O aparato do experimental da Figura 34 é constituído dos seguintes elementos:

- 1 – Controlador Polytec OFV – 5000
- 2 – Sensor a laser Polytec PSV-I-400
- 3 – Placa de Alumínio 2024-T3
- 4 – Sensor de força Endevco 2311-10
- 5 – Vibrador eletrodinâmico LDS V201
- 6 – Estação de trabalho Polytec
- 7 – Interface Polytec PSV-E-400
- 8 – Amplificador de potência LDS TPO25

4.1.2 Vibrômetro a laser POLYTEC PSV 400 B

O vibrômetro a laser é uma das tecnologias mais avançadas utilizadas atualmente na medição de vibração. Este sistema tem como características, medição sem contato físico entre a estrutura investigada e o sistema de medição, varredura de grandes superfícies de medição e alta mobilidade.

O sistema do vibrômetro a laser Polytec é composto por um sensor PSV-I-400, responsável pela medição a laser, um controlador OFV-5000 e uma interface entre o controlador e o sensor PSV-E-400, na qual é realizada a geração do sinal de vibração, aquisição dos sinais de velocidade e de força (referência). Uma estação de trabalho equipada com processador AMD Athlon XP-3200 e software Polytec Scanning Vibrometer V. 8,21 completam o sistema.

A unidade de varredura de imagem pode trabalhar em distâncias na ordem de 30m da estrutura investigada, realizando medições em velocidade (limitadas em 10m/s). Uma ampla área de varredura ($\pm 20^\circ$ nas coordenadas X, Y), densa malha de medidas (256 x 256 pontos) e larga faixa de frequência de medida (0.2 Hz – 40 kHz) proporcionam excelente discretização da estrutura.

4.1.3 Dados coletados

Os dados coletados no procedimento experimental objetivam a *Análise Modal Experimental* (AME) de uma placa flexível de alumínio com a utilização de um vibrômetro a laser [Dezotti, 2006]. A análise modal foi conduzida com excitação simples na direção normal ao plano da estrutura, a qual foi discretizada em uma malha de 121 pontos. Quatro pontos de excitação foram definidos, após uma análise preliminar dos modos vibracionais, visando comparar a influência de cada posição sobre os parâmetros modais da placa investigada.

O sistema do vibrômetro a laser foi aplicado no processamento dos sinais dinâmicos de excitação e resposta da placa. A excitação foi variada sobre os quatro pontos previamente definidos conforme ilustra a Figura 35, de forma que para cada

excitação as respostas dos 121 pontos da malha discretizada foram medidas sob a forma velocidade.

Os dados de saída do sistema consiste de um conjunto de 121 FRFs, necessárias para identificação dos parâmetros modais por meio do programa de identificação desenvolvido. Os resultados obtidos foram posteriormente validados com resultados de identificação modal através do sistema LMS CADA-X.

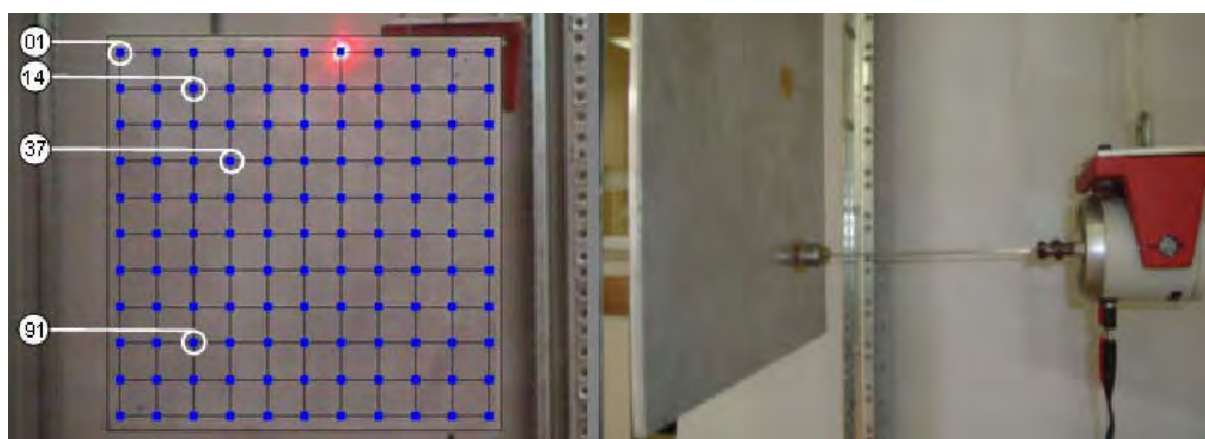


Figura 35 - Pontos de excitação

Para cada ponto de excitação foi gerado um arquivo com extensão (*.uff), que contém as informações das 121 FRFs. Este arquivo pode ser visualizado num bloco de notas (*.txt). No arquivo, além dos dados das FRFs, pode-se encontrar informações pertinentes ao ensaio realizado, como podemos se observa na Figura 36.

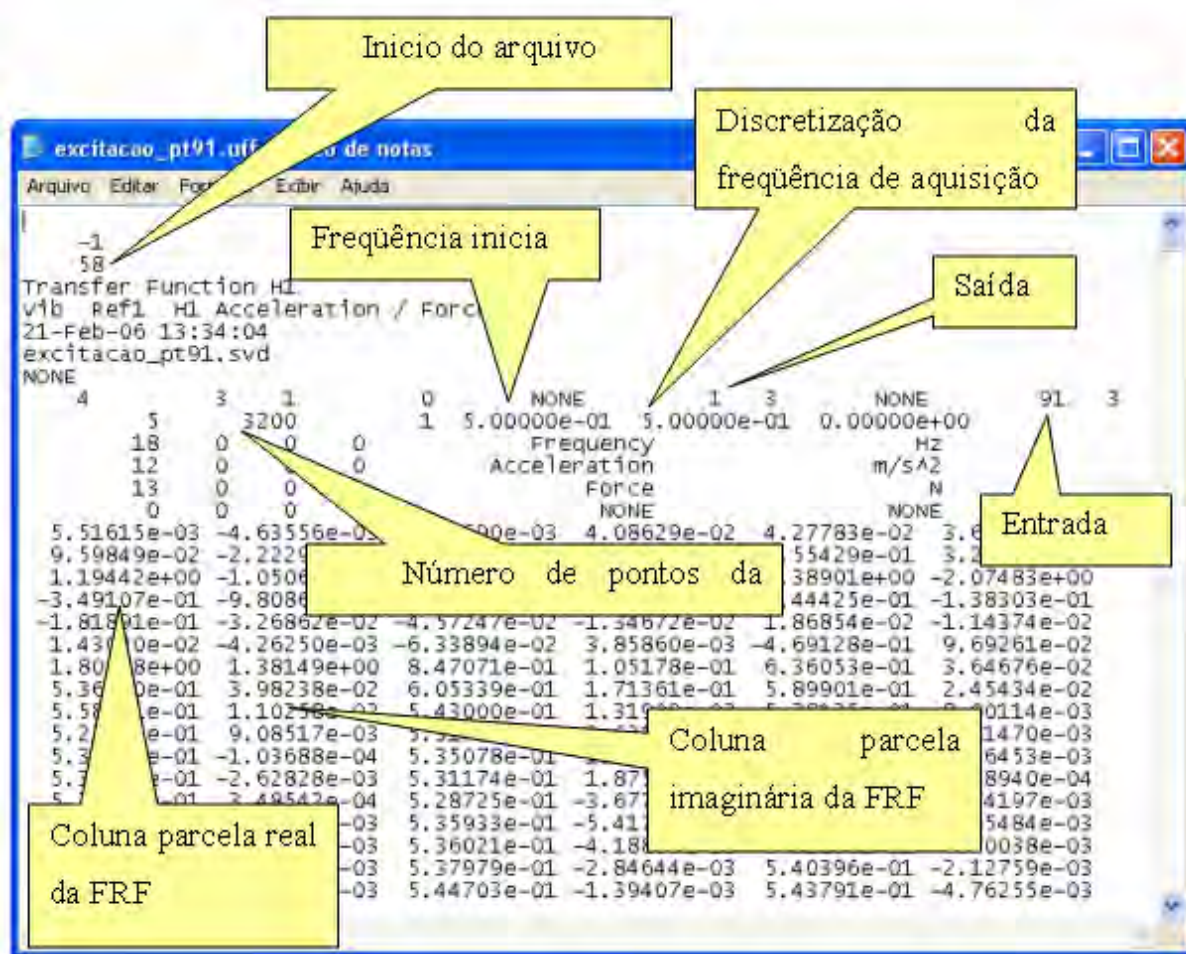


Figura 36 - Arquivo com informações do ensaio

4.2 ANÁLISE DAS FRFS EXPERIMENTAIS

Dentre os diversos conjuntos de FRFs obtidos com os diferentes pontos de excitação da Análise Modal Experimental, foi selecionado um dos conjuntos de dados. O critério de escolha foi a qualidade da informação dos dados coletados. A definição da qualidade dos dados foi estabelecida com base no critério *Modal Assurance Criterion* (MAC). Os resultados de Dezotti (2006), utilizando o critério mencionado indicaram uma coerência maior das informações para os dados das FRFs correspondentes à excitação no ponto 91. Estes dados foram os escolhidos como os dados de entrada do programa *Análise Modal* desenvolvido nesta pesquisa.

4.2.1 Preparação dos dados para análise

O procedimento se inicia com a adequação dos dados coletados na Análise Modal Experimental. O arquivo contém 121 FRFs obtidas através da excitação do ponto 91 da placa. O programa somente analisa uma FRF por vez, assim se faz necessário separar as FRFs.

Cada FRF foi alocada em um arquivo diferente do aplicativo Excel e nomeada adequadamente, segundo um critério estabelecido que possibilita a identificação da FRF através da posição que foi obtida na placa ensaiada. A Figura 37 ilustra um arquivo gerado com este critério.

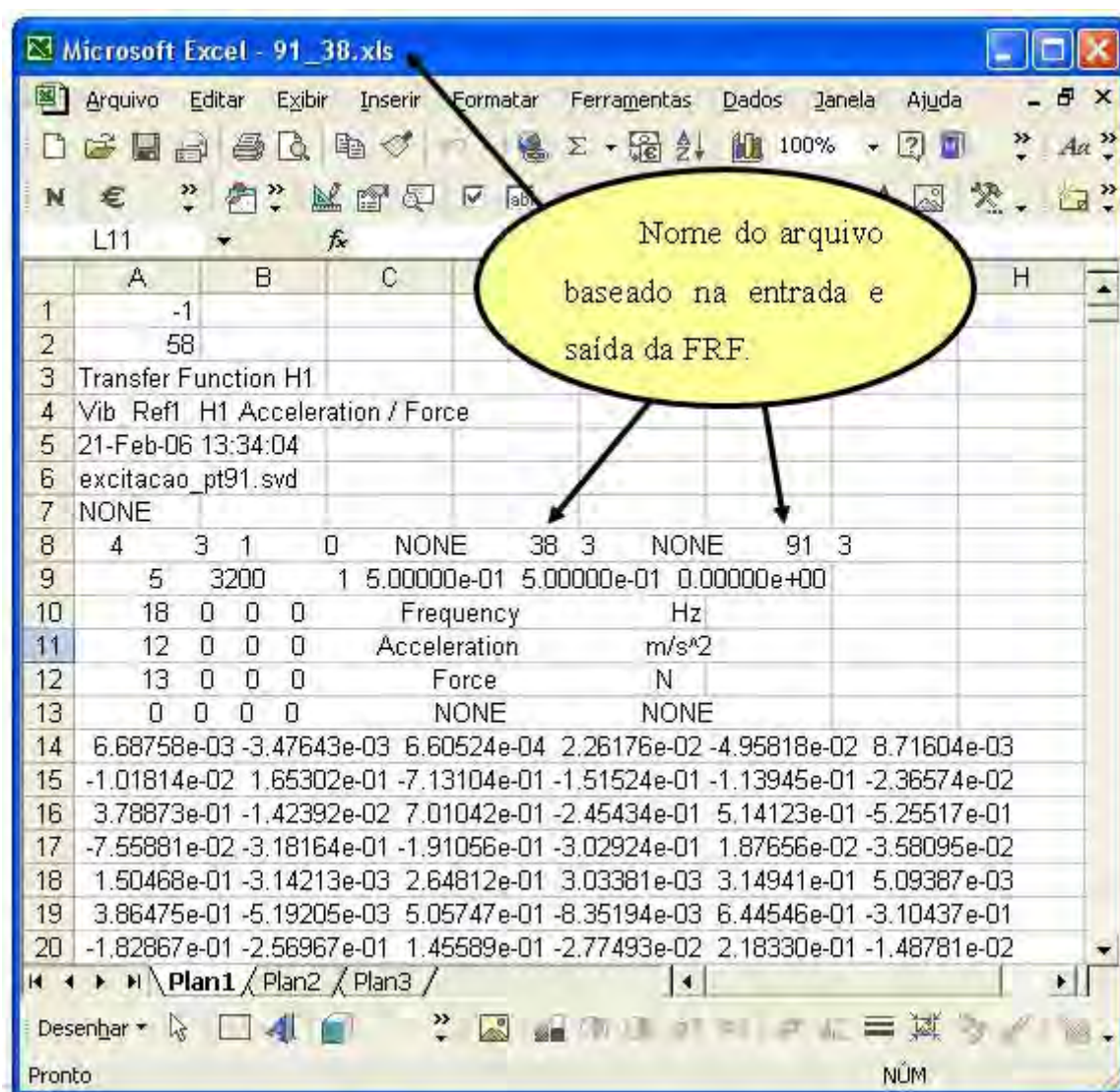
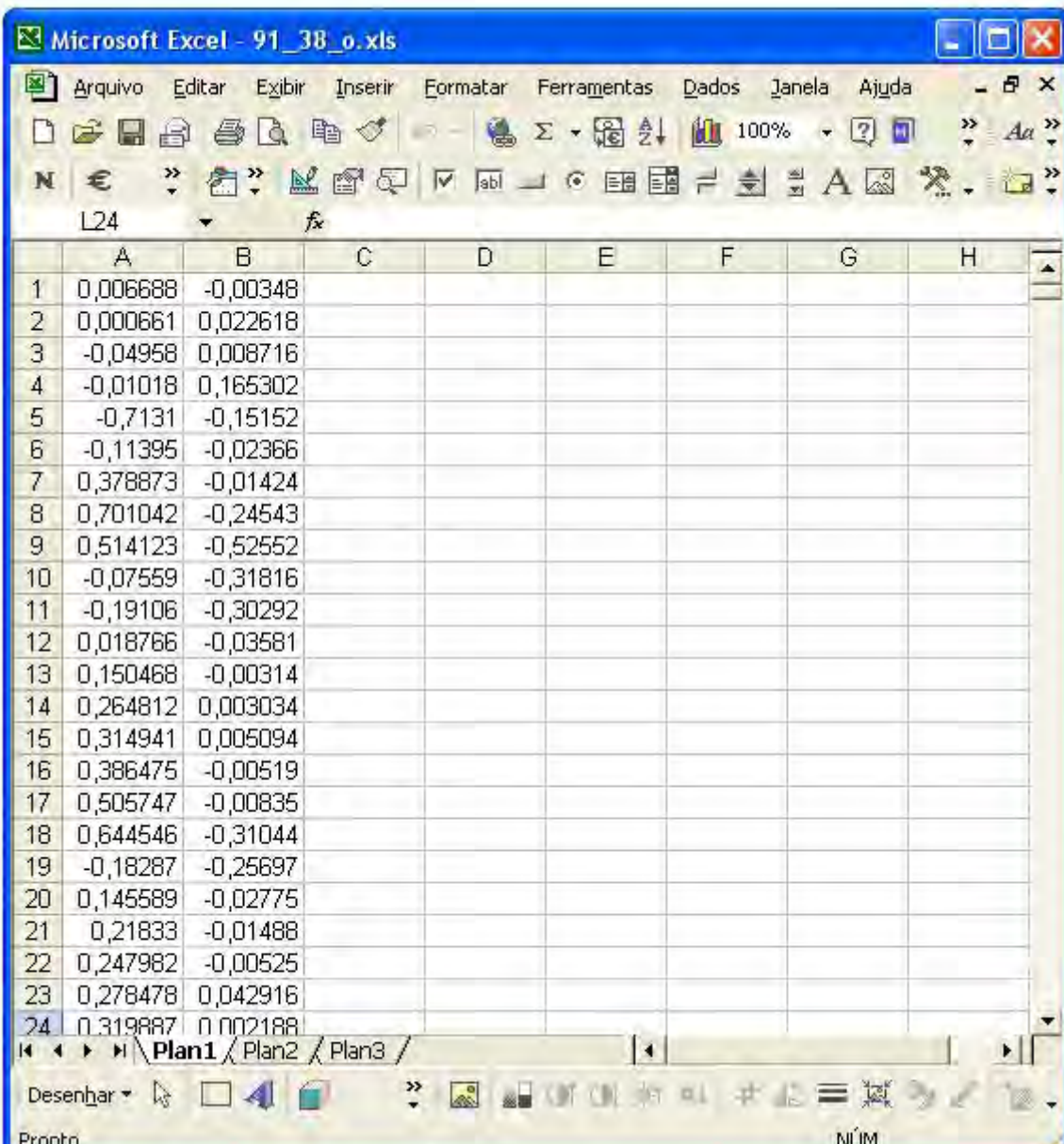


Figura 37 - Arquivo gerado para uma FRF

Os dados alocados na ilustração anterior ainda não estão posicionados no arquivo de forma a possibilitar uma correta leitura pelo programa. Os dados estão agrupados em seis colunas, onde a primeira corresponde à parte real da FRF, a segunda à parte imaginária da FRF, e as seguintes seguem o mesmo padrão. Por meio de uma rotina computacional implementada no VBA do próprio aplicativo, foi possível organizar os 3200 dados em apenas duas colunas e durante o processo substituir os *pontos* por *vírgulas* nos algarismos. O novo arquivo foi renomeado acrescentando o sufixo “-o”; a Figura 38 ilustra o resultado deste procedimento. O mesmo processo foi efetuado para as 121 FRFs.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0,006688	-0,00348						
2	0,000661	0,022618						
3	-0,04958	0,008716						
4	-0,01018	0,165302						
5	-0,7131	-0,15152						
6	-0,11395	-0,02366						
7	0,378873	-0,01424						
8	0,701042	-0,24543						
9	0,514123	-0,52552						
10	-0,07559	-0,31816						
11	-0,19106	-0,30292						
12	0,018766	-0,03581						
13	0,150468	-0,00314						
14	0,264812	0,003034						
15	0,314941	0,005094						
16	0,386475	-0,00519						
17	0,505747	-0,00835						
18	0,644546	-0,31044						
19	-0,18287	-0,25697						
20	0,145589	-0,02775						
21	0,21833	-0,01488						
22	0,247982	-0,00525						
23	0,278478	0,042916						
24	0,319887	0,002188						

Figura 38 - Realocação dos dados no arquivo

4.2.2 Ajuste de curvas com o programa

Foi escolhida dentre as 121 FRFs a obtida no ponto 89 da AME. Com esta amostra, foram executados os procedimentos de análise descritos no Capítulo 3 deste trabalho. Posicionando as frequências, segundo os critérios especificados pelo Método de Ewins-Glesson, e com o auxílio dos recursos computacionais do programa, o ajuste para a identificação de parâmetros dos 10 primeiros modos da estrutura ensaiada foi desenvolvido.

As figuras a seguir ilustram os ajustes realizados para cada frequência na FRF do ponto 89, onde as linhas amarelas representam a FRF experimental, e as linhas azuis ilustram o ajuste efetuado utilizando os recursos do método.

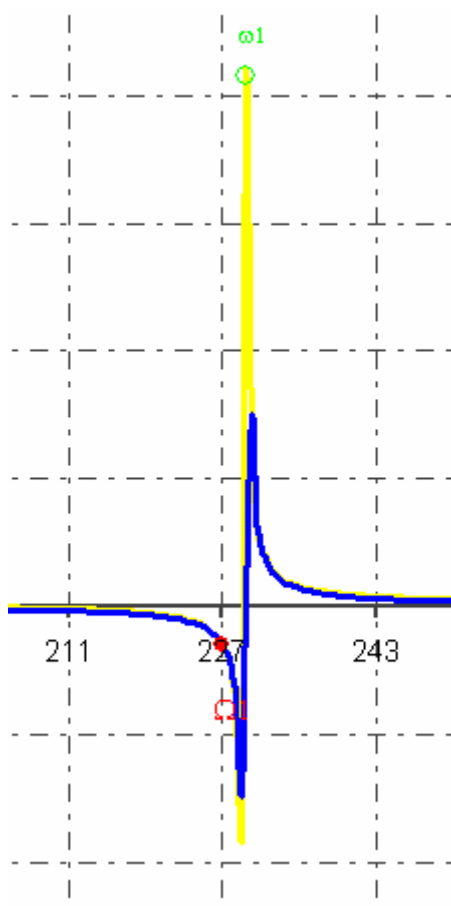


Figura 39 - Ajuste para a primeira frequência

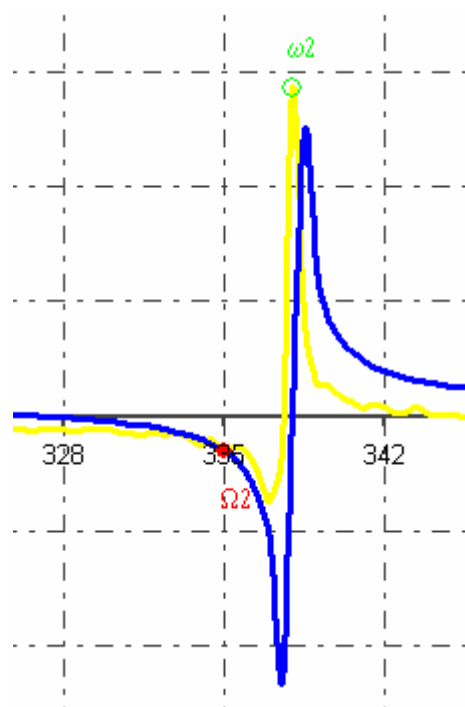


Figura 40 - Ajuste para a segunda frequência

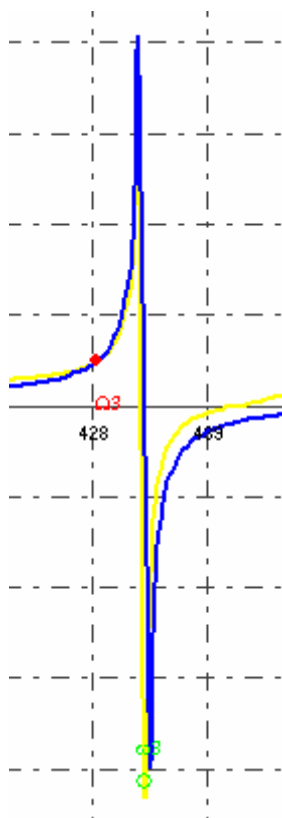


Figura 41 - Ajuste para a terceira frequência

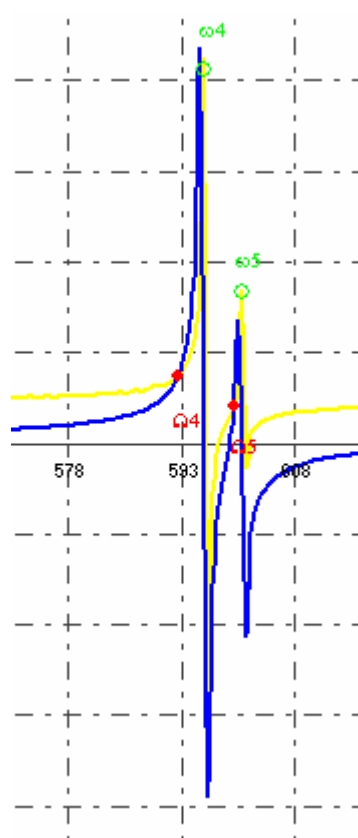


Figura 42 - Ajuste para a quarta e quinta frequência

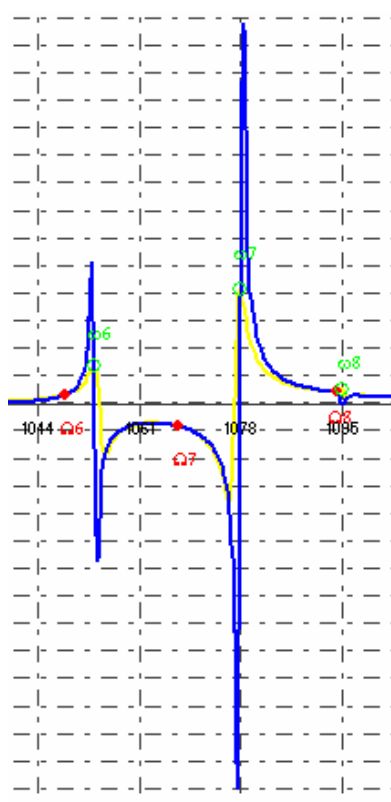


Figura 43 - Ajuste para sexta, sétima e oitava frequência

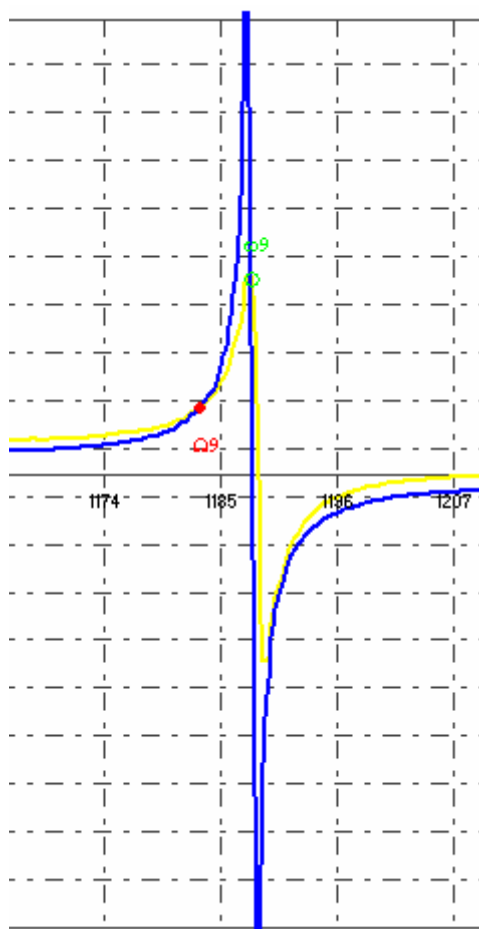


Figura 44 - Ajuste para a nona frequência

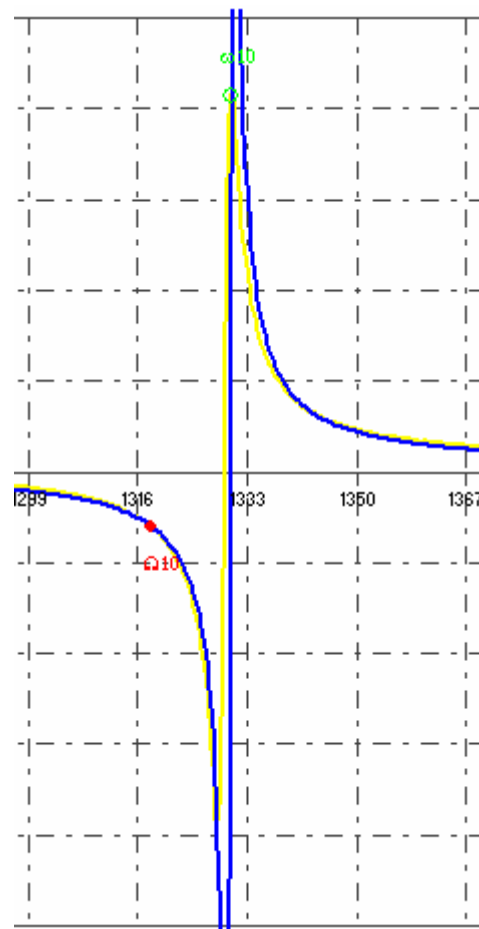


Figura 45 - Ajuste para a décima frequência

A Tabela 1 ilustra as frequências posicionadas para obter os ajustes de curvas apresentados nas figuras.

Tabela 1 - Frequências ajustadas pelo método de Ewins-Glesson

$\Omega_1 =$	227,0	$\omega_1 =$	229,5
$\Omega_2 =$	335,5	$\omega_2 =$	338,0
$\Omega_3 =$	428,5	$\omega_3 =$	433,0
$\Omega_4 =$	592,5	$\omega_4 =$	596,0
$\Omega_5 =$	600,0	$\omega_5 =$	601,0
$\Omega_6 =$	1048,5	$\omega_6 =$	1054,0
$\Omega_7 =$	1067,5	$\omega_7 =$	1077,0
$\Omega_8 =$	1094,0	$\omega_8 =$	1095,0
$\Omega_9 =$	1183,0	$\omega_9 =$	1188,0
$\Omega_{10} =$	1317,5	$\omega_{10} =$	1329,5

4.2.3 Parâmetros modais identificados pelo programa

Os ajustes ilustrados no item anterior resultaram na identificação das seguintes frequências e amortecimentos, apresentados na Tabela 2:

Tabela 2 - Resultados da análise

Modo	Frequência (ω) Hz	Amortecimento (ζ) %
1° modo	229,5	0,3808
2° modo	338,0	0,2346
3° modo	433,0	0,3034
4° modo	596,0	1,7419
5° modo	601,0	0,0625
6° modo	1054,0	0,0833
7° modo	1077,0	0,1407
8° modo	1095,0	0,0510
9° modo	1188,0	0,0612
10° modo	1329,5	0,1697

Com o ajuste efetuado, o programa analisou, através das rotinas desenvolvidas para o método de Ewins-Gleeson, as 121 FRFs da AME, resultando nos modos de vibrar ilustrados nas figuras a seguir.

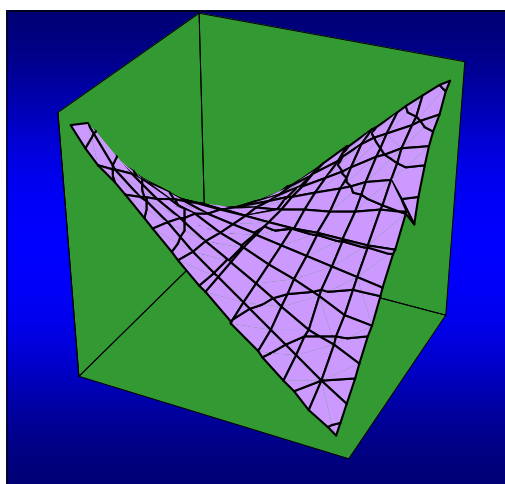


Figura 46 - Primeiro modo

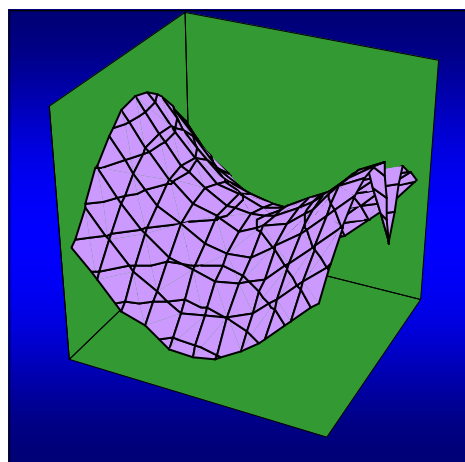


Figura 47 - Segundo modo

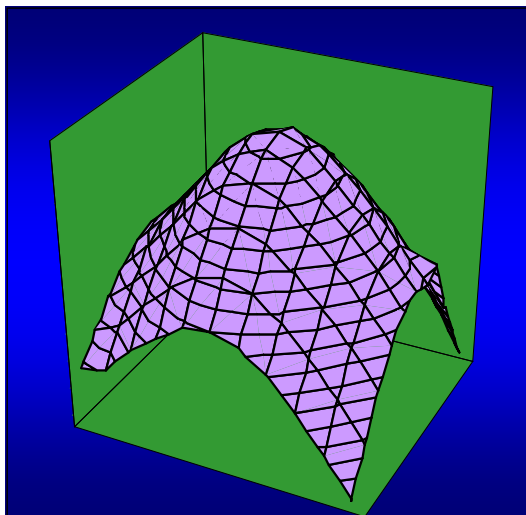


Figura 48 - Terceiro modo

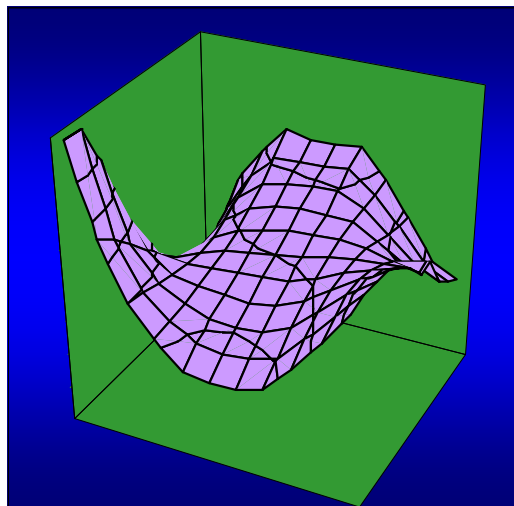


Figura 49 - Quarto modo

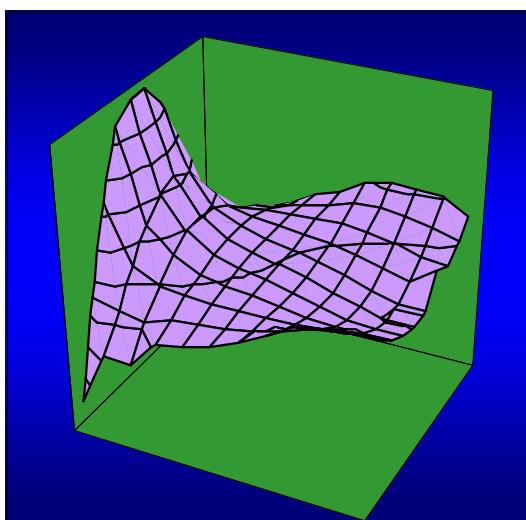


Figura 50 - Quinto modo

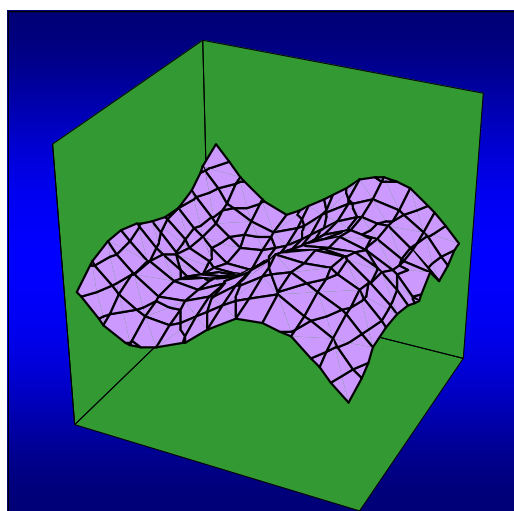


Figura 51 - Sexto modo

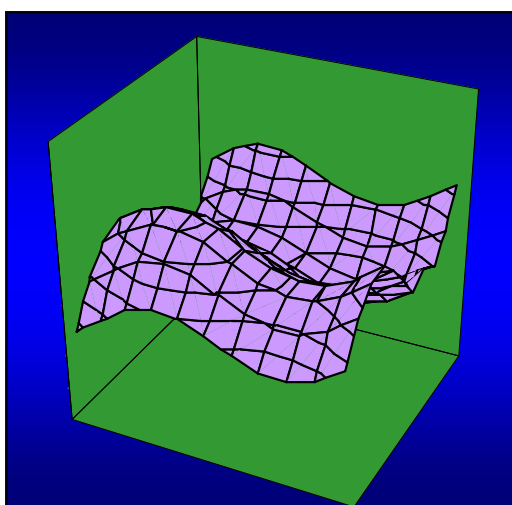


Figura 52 - Sétimo modo

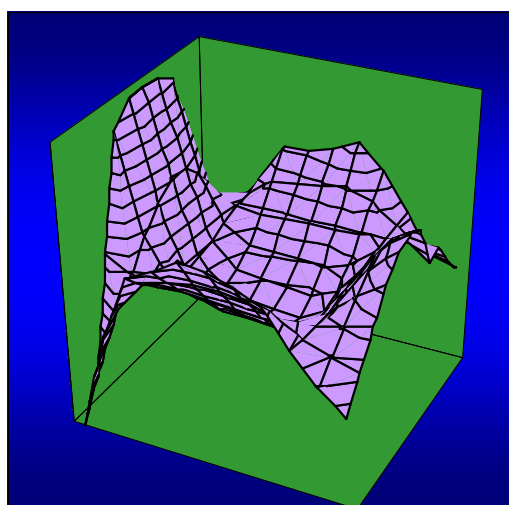


Figura 53 - Oitavo modo

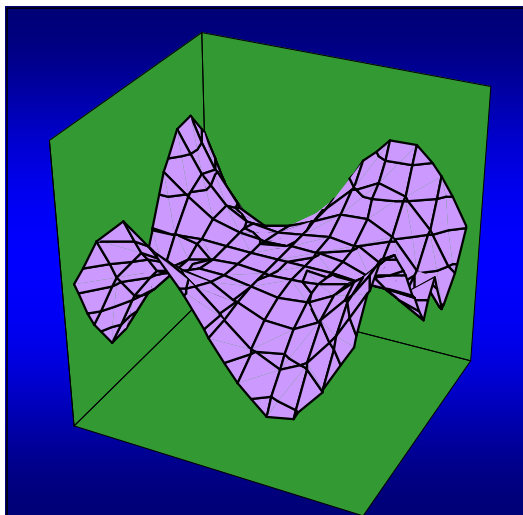


Figura 54 - Nono modo

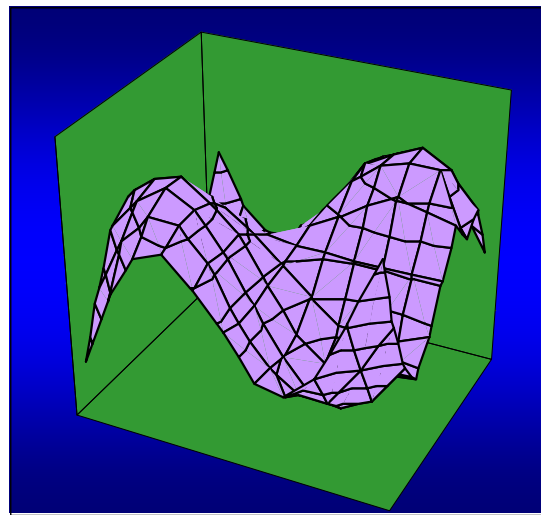


Figura 55 - Décimo modo

As formas de vibrar apresentadas não foram melhoradas através dos recursos existentes no programa, por este motivo, é possível verificar distorções nas formas de vibrar, como por exemplo, uma distorção pontual na forma modal do segundo modo, ou mesmo as diferentes amplitudes no oitavo modo, quando na verdade deveria apresentar uma simetria.

A última fase da análise consistiu em melhorar a forma dos modos de vibrar obtidos, através de correções de distorções verificadas nos gráficos de ajuste. A correção foi efetuada com manipulações estatísticas dos dados representados nas matrizes de amplitudes, por meio de um recurso desenvolvido no programa.

As figuras a seguir ilustram algumas das correções efetuadas.

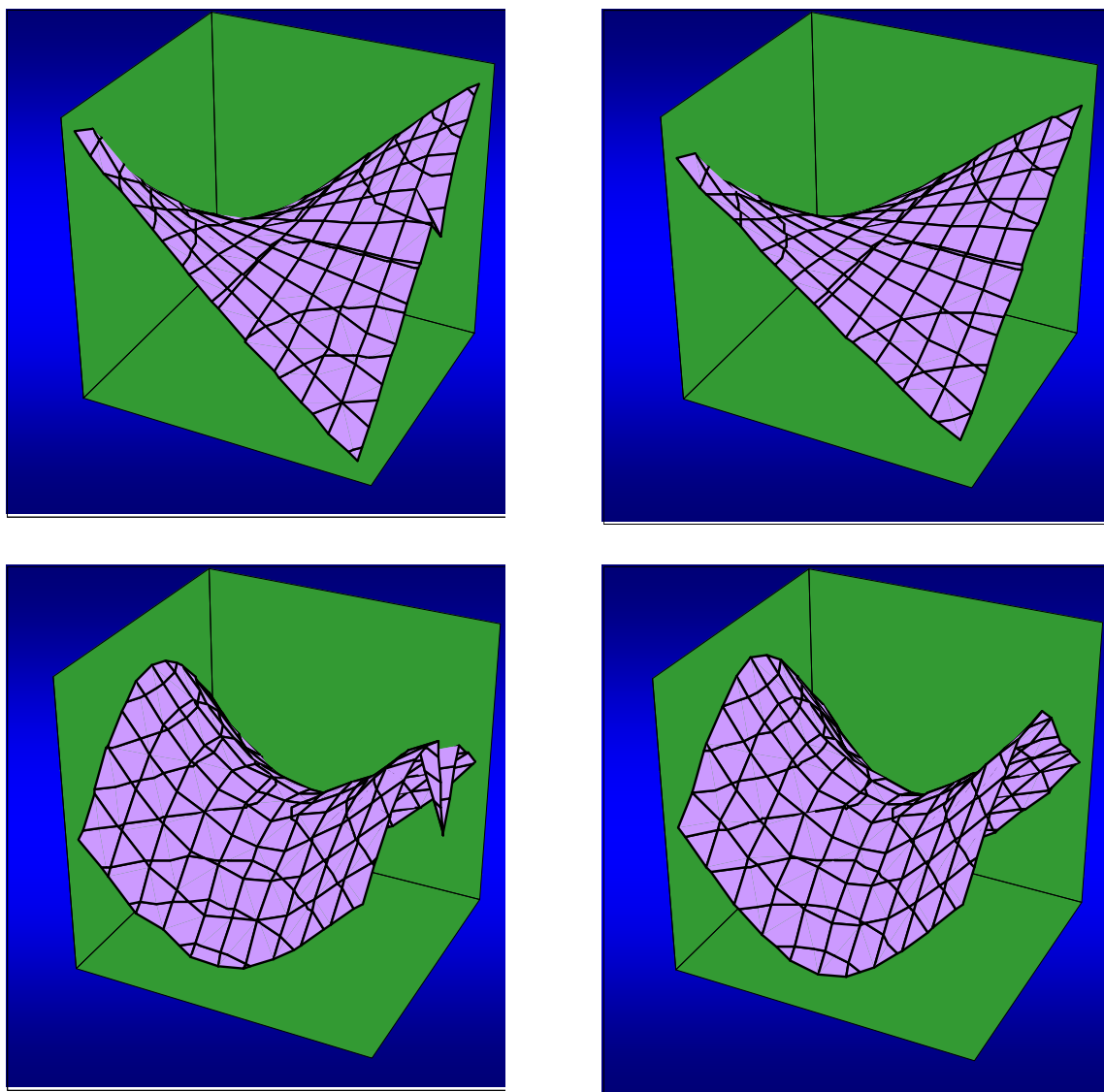
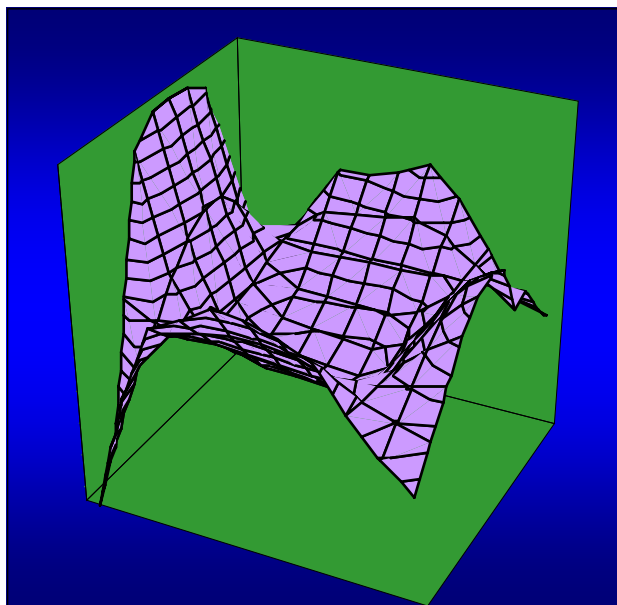


Figura 56 - Correções efetuadas no primeiro e segundo modo de vibrar

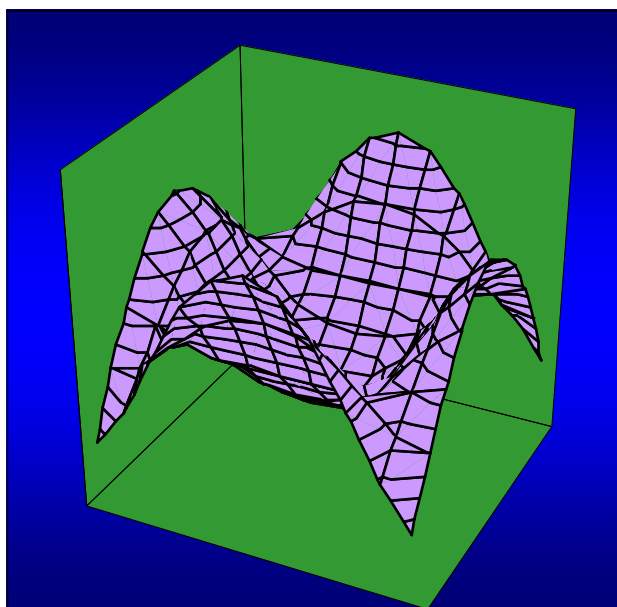
Os dois primeiros modos apresentaram distorções pontuais, as quais não apresentaram coerência à continuidade dos modos de vibrar gerados com a matriz de amplitude. Estes pontos de discordância foram muito evidentes, como ilustrados na Figura 56, sendo facilmente identificados e corrigidos na matriz de amplitudes de forma satisfatória.

Os primeiros modos de vibrar desta estrutura apresentaram uma curvatura simples. Assim, os erros pontuais de identificação ou de aquisição ficaram evidentes de visualizar na forma modal e também na matriz de amplitudes, sendo rápidos e fáceis de solucionar.

O mesmo não ocorreu com modos de vibrar mais complexos como, por exemplo, o oitavo modo de vibrar, onde as discrepâncias se apresentavam por toda forma modal. No entanto o modo de vibrar evidenciou as simetrias existentes, desta forma foi possível com um pouco mais de trabalho estatístico conseguir ótimos resultados. A Figura 57 ilustra a correção efetuada para o oitavo modo de vibrar.



99	19	-13	-20	-28	-26	-22	-17	0	14	25
49	12	-3,5	-8,2	-11	-10	-8,1	-4,9	2,1	7,4	11
-5,4	1	3,9	3,3	4,3	4,6	5,5	5,8	3,6	-0,3	-3,9
-58	-11	8	13	16	16	17	15	3,5	-7,9	-17
-97	-21	9,5	19	22	24	25	20	3,3	-14	-25
-111	-28	8,5	21	24	26	26	20	2,4	-17	-27
-99	-27	6,3	18	20	22	23	17	1,3	-15	-23
-63	-18	3,5	12	12	13	14	9,4	0,3	-9,7	-1
-13	-3,1	1,2	2,5	1,5	1,3	1,1	0,3	-0,5	-1,2	-1,6
38	17	-0,8	-9,3	-10	-12	-15	-9,6	-1,1	8,4	11
82	38	-2,9	-21	-22	-25	-31	-20	-2	17	21



30	17	-2	-21	-31	-35	-31	-20	-2	17	30
11	8,4	-1,1	-9,3	-15	-16	-15	-9,6	-1,1	8,4	11
-3,9	-0,3	3,6	5,8	5,5	6	5,5	5,8	3,6	-0,3	-3,9
-17	-7,9	3,5	13	17	18	17	13	3,5	-7,9	-17
-25	-14	3,3	19	25	26	25	20	3,3	-14	-25
-27	-17	2,4	21	26	28	26	20	2,4	-17	-27
-23	-15	1,3	18	25	26	25	17	1,3	-15	-23
-17	-7,9	3,5	13	17	18	17	13	3,5	-7,9	-17
-3,9	-0,3	3,6	5,8	5,5	6	5,5	5,8	3,6	-0,3	-3,9
11	8,4	-1,1	-9,3	-15	-16	-15	-9,6	-1,1	8,4	11
30	17	-2	-21	-31	-35	-31	-20	-2	17	30

Figura 57 - Correção efetuada para o oitavo modo de vibrar

4.3 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

A validação da identificação modal implementada como programa *Análise Modal* foi processada através da comparação com os resultados obtidos pelo método de elementos finitos e método da exponencial complexa, do software de identificação modal LMS CADA-X.

4.3.1 Análise em elementos finitos

A análise modal efetuada em elementos finitos, neste trabalho, foi desenvolvida no software ANSYS 10.0. O modelo representa a placa ensaiada no experimento, com as dimensões (300 x 300 x 7) [mm]. Para aproximar os resultados da forma modal, optou-se por uma discretização da placa com elementos Shell 63, e a discretização apresenta um nó para cada ponto de medição efetuado no ensaio, ou seja, 121 nós. O objetivo desta discretização foi para que as formas modais obtidas apresentassem a mesma resolução dos pontos aqusitados na AME e, conseqüentemente, dos resultados extraídos do programa desenvolvido.

O elemento Shell 63 é indicado para análise estrutural. Este elemento tem seis graus de liberdade para cada nó: translação nas coordenadas nodais no eixo x, y e z, e rotação em torno do eixo x, y e z. É definido por quatro nós e pode ter 4 lados ou 3 lados, com a sobreposição de 2 nós.

A Figura 58 ilustra a placa modelada em elementos finitos.

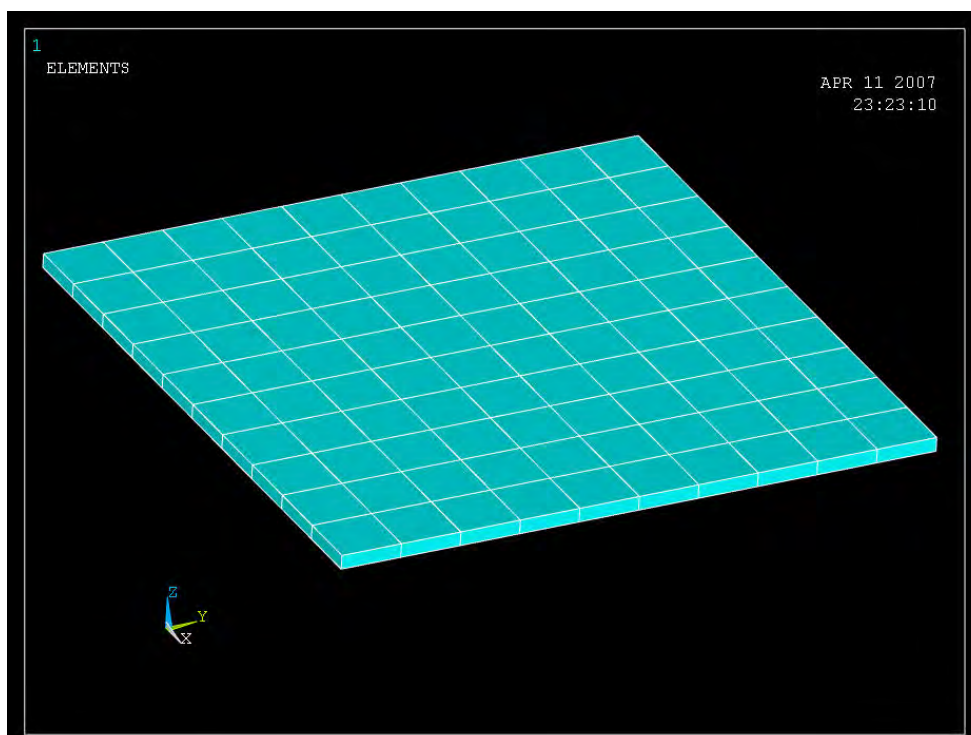


Figura 58 - Modelo em elementos finitos

O alumínio 2024-T3 apresenta módulo de elasticidade de 70 GPa e coeficiente de poisson de 0.33, os quais foram definidos para a placa modelada, assim como ilustrado na Figura 59.

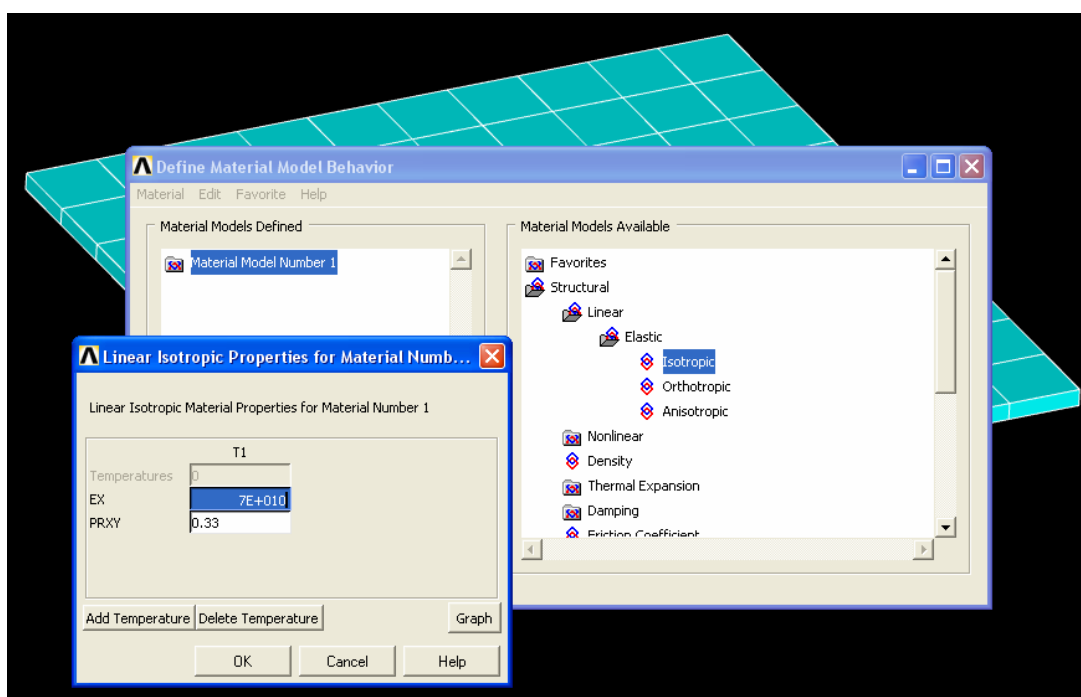


Figura 59 - Definição dos parâmetros do material da placa

A Tabela 3 apresenta o resultado comparativo entre parâmetros modais obtidos para os primeiros 10 modos da estrutura analisada, utilizando o método de elementos finitos e método de identificação modal Ewins-Gleeson do programa *Análise Modal*.

Tabela 3 - Freqüências obtidas na análise em elementos finitos

Modo	Elementos Finitos - Ansys	Método de Ewins-Gleeson	
	ω [Hz]	ω [Hz]	ζ [%]
1° modo	237,1	229,5	0,3808
2° modo	339,1	338,0	0,2346
3° modo	433,1	433,0	0,3034
4° modo	605,3	596,0	1,7419
5° modo	605,3	601,0	0,0625
6° modo	1056,2	1054,0	0,0833
7° modo	1056,2	1077,0	0,1407
8° modo	1100,4	1095,0	0,051
9° modo	1171,4	1188,0	0,0612
10° modo	1339,5	1329,5	0,1697

Na coluna da Tabela 3, referente às freqüências obtidas na análise em elementos finitos, é apresentada a mesma freqüência natural para o 4° e 5° modos e para o 6° e 7° modos; isso ocorre devido à simetria da estrutura. As figuras a seguir mostram os modos de vibrar obtidos na análise em elementos finitos corroborados com os obtidos no programa. É possível verificar as simetrias dos modos ilustrados na tabela anterior.

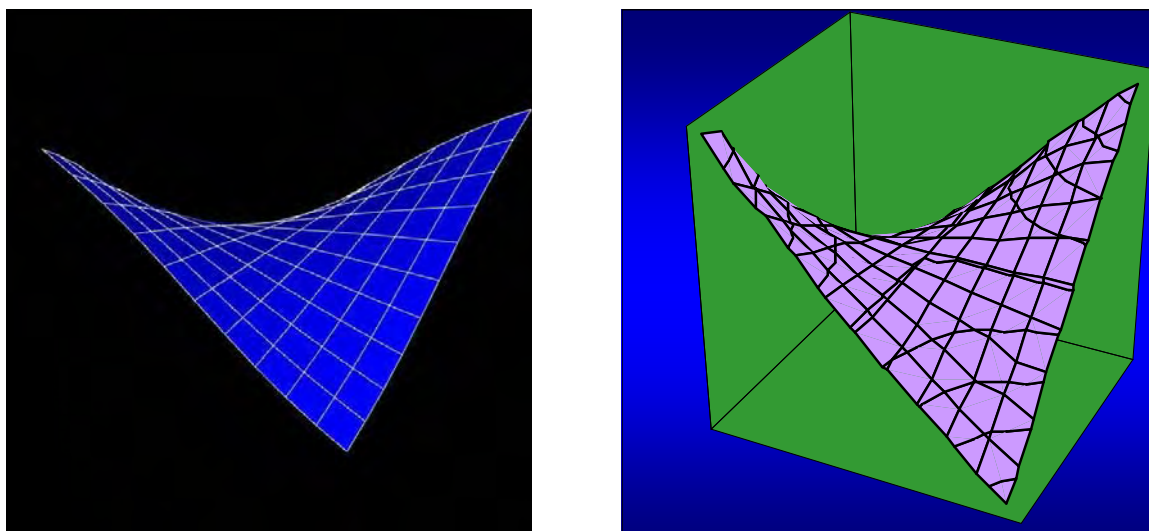


Figura 60 - Comparação para o primeiro modo

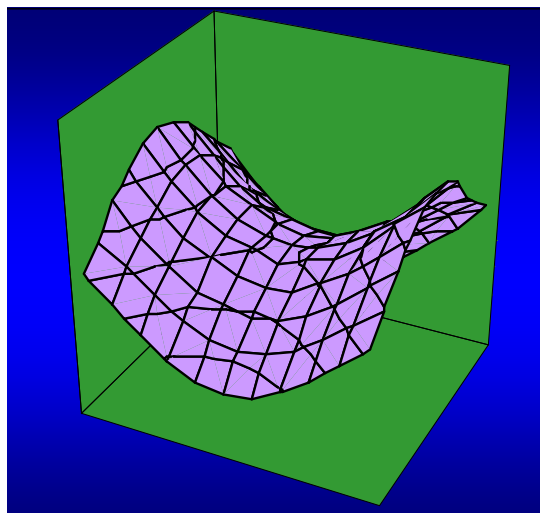
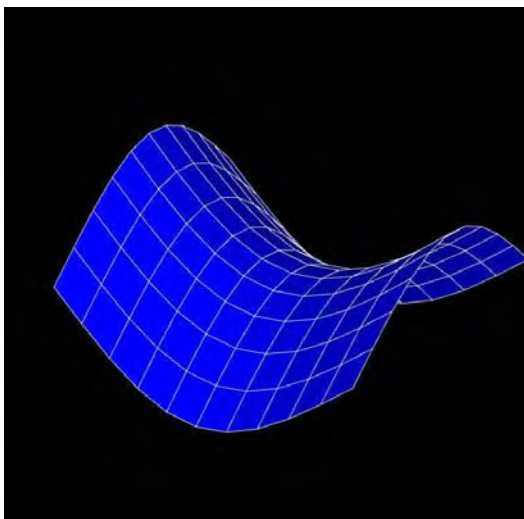


Figura 61 - Comparação para o segundo modo

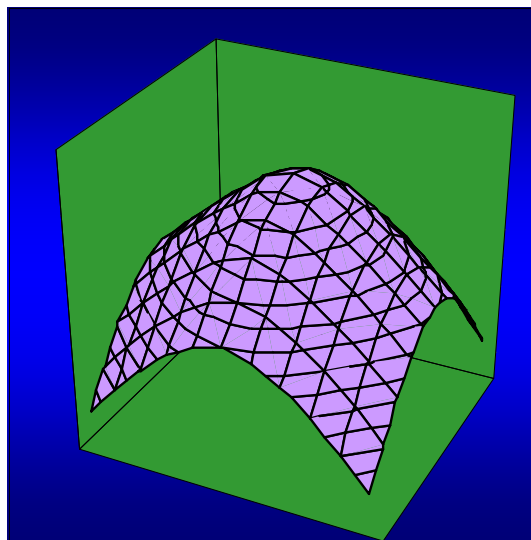
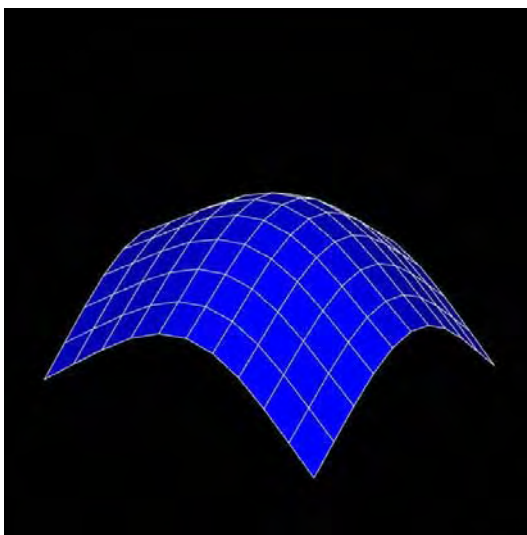


Figura 62 - Comparação para o terceiro modo

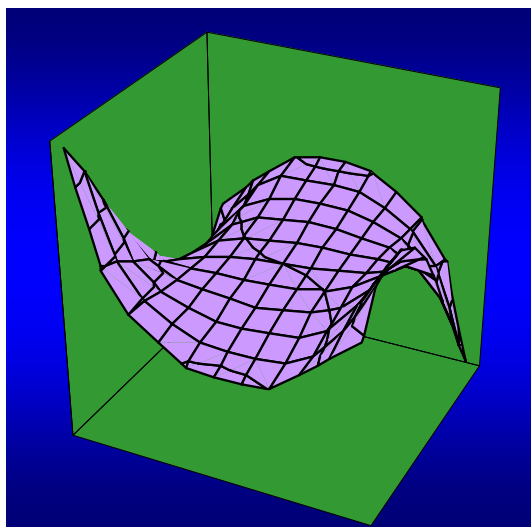
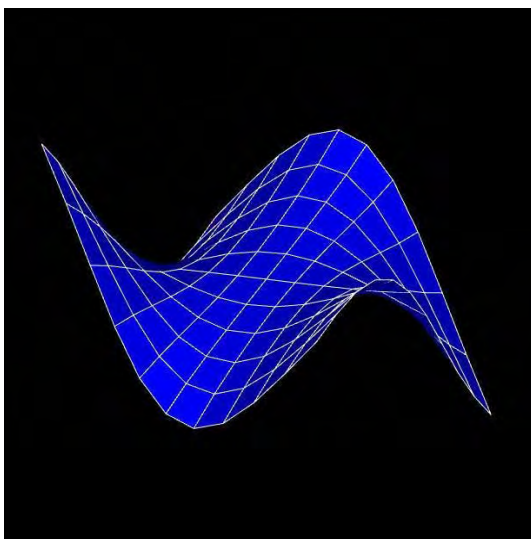


Figura 63 - Comparação para o quarto modo

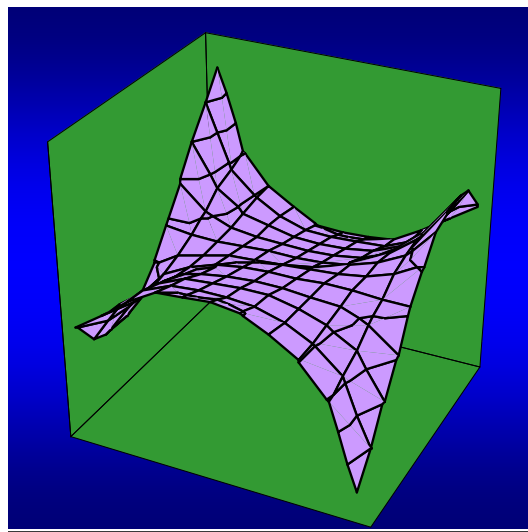
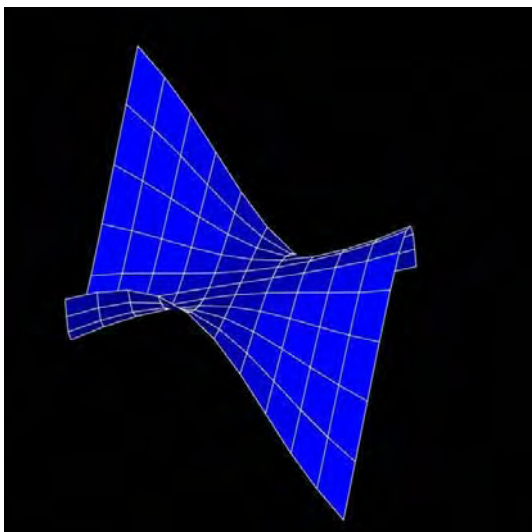


Figura 64 - Comparação para o quinto modo

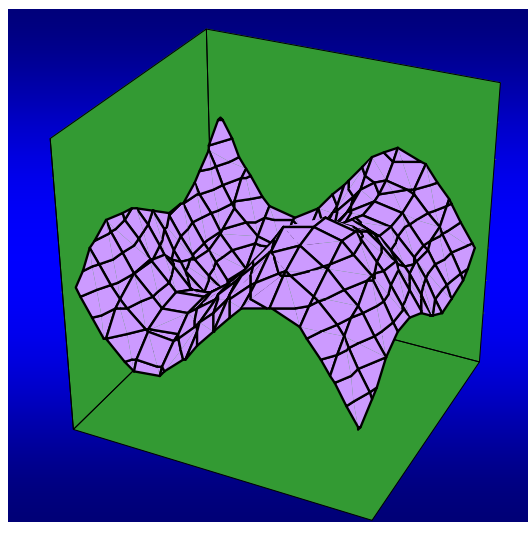
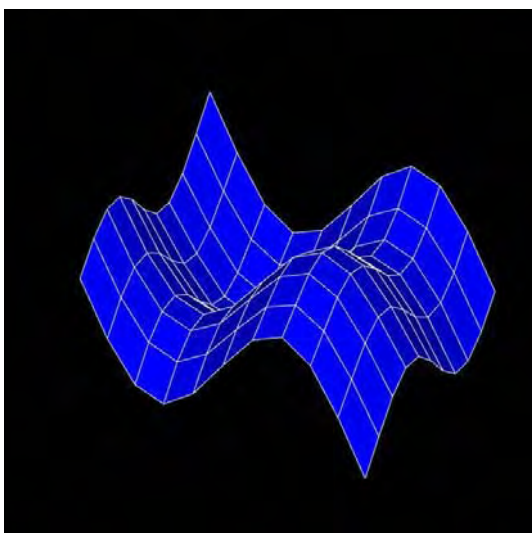


Figura 65 - Comparação para o sexto modo

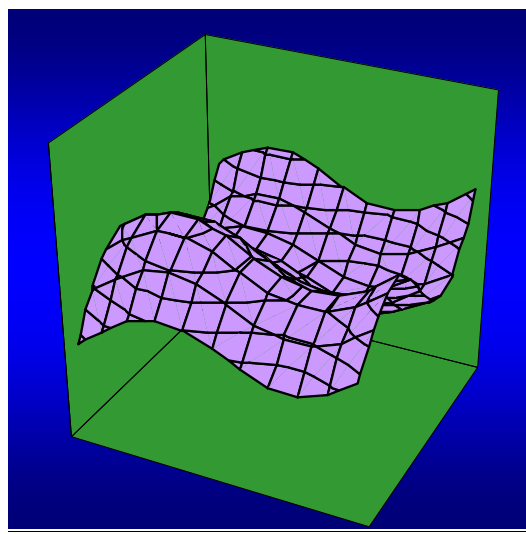
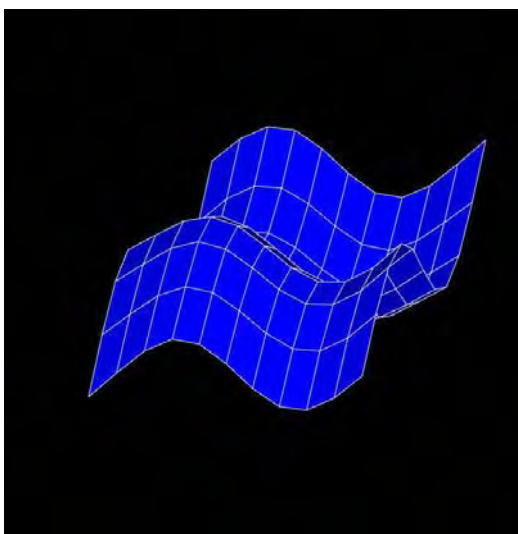


Figura 66 - Comparação para o sétimo modo

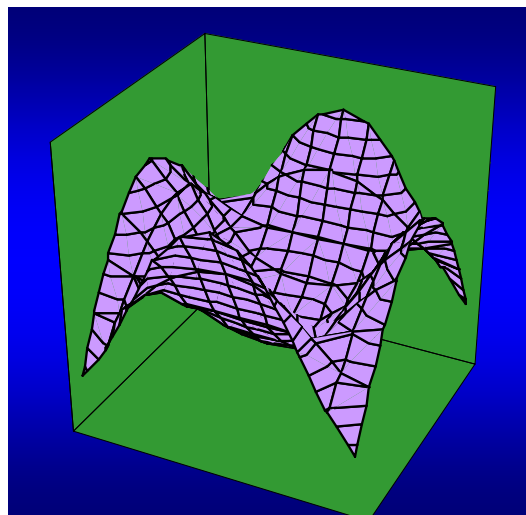
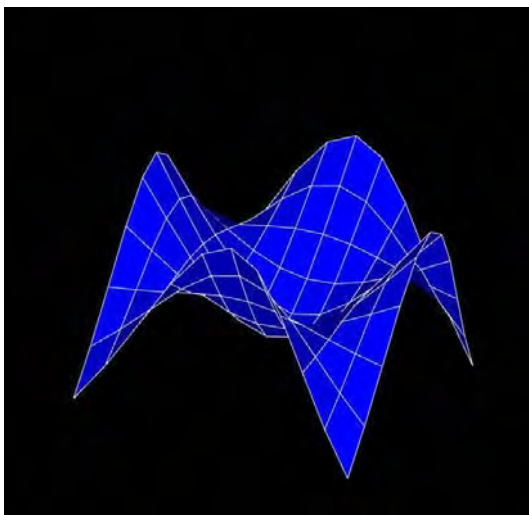


Figura 67 - Comparação para o oitavo modo

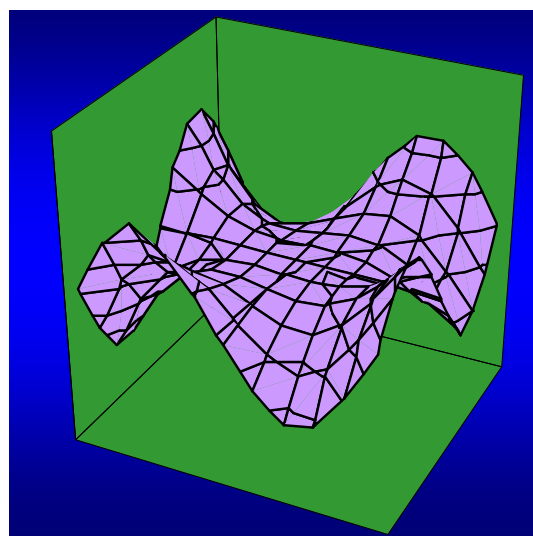
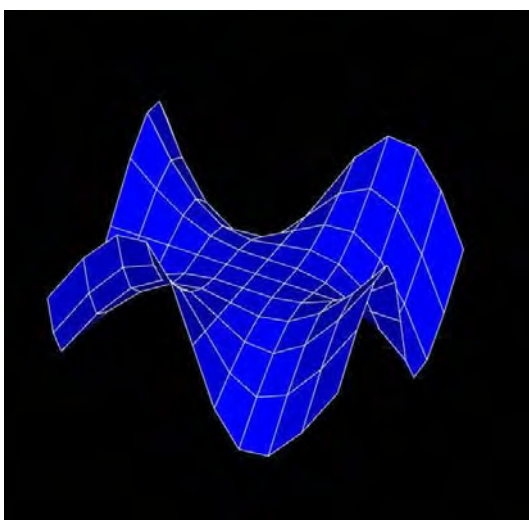


Figura 68 - Comparação para o nono modo

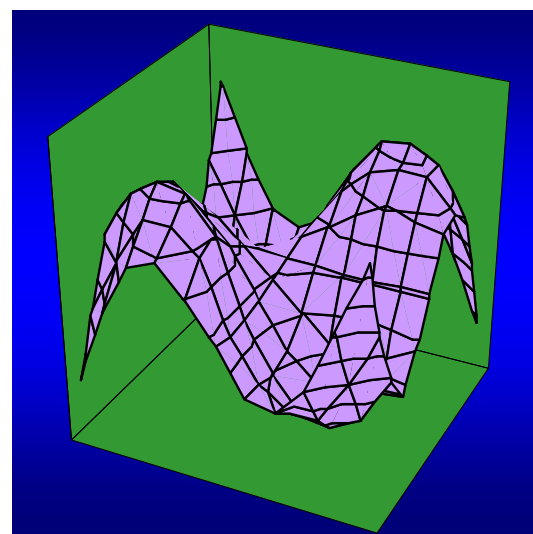
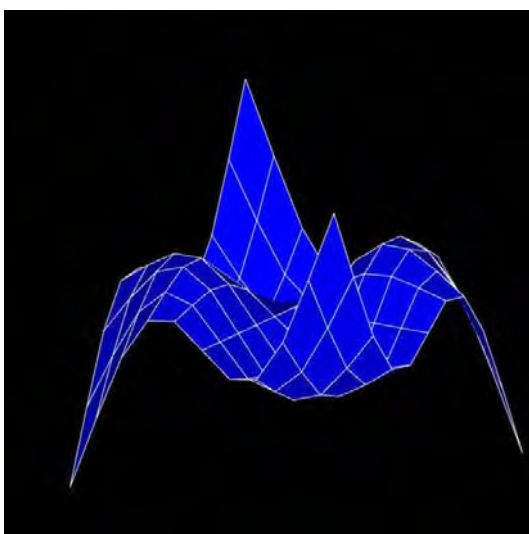


Figura 69 - Comparação para o décimo modo

4.3.2 Comparação dos resultados

Na Tabela 4 são apresentados à comparação entre os resultados da identificação modal obtidos na identificação dos 10 primeiros modos através dos métodos, de elementos finitos, da exponencial complexa e de Ewins-Gleeson. A identificação processada corresponde as FRFs obtidas com a excitação no ponto 91 da malha da estrutura.

Tabela 4 – Comparação de resultados

Modo	Elementos Finitos - Ansys	Método da Exponencial Complexa		Método de Ewins-Gleeson	
	ω [Hz]	ω [Hz]	ζ [%]	ω [Hz]	ζ [%]
1° modo	237,1	230,20	0,38	229,5	0,38
2° modo	339,1	338,54	0,24	338,0	0,23
3° modo	433,1	431,65	0,31	433,0	0,30
4° modo	605,3	597,21	0,59	596,0	1,74
5° modo	605,3	600,98	1,06	601,0	0,06
6° modo	1056,2	1045,83	0,09	1054,0	0,08
7° modo	1056,2	1078,77	0,14	1077,0	0,14
8° modo	1100,4	1094,99	0,05	1095,0	0,05
9° modo	1171,4	1191,68	0,06	1188,0	0,06
10° modo	1339,5	1329,08	0,16	1329,5	0,17

Os resultados do modelo em elementos finitos desenvolvido neste trabalho são coerentes com os obtidos através do programa NASTRAN desenvolvido pela equipe do IAE/CTA [Dezotti, 2006]

5 DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentadas discussões dos aspectos dos resultados da pesquisa que podem ser importantes para o desenvolvimento futuro deste trabalho em um programa de doutorado.

5.1 DADOS EXPERIMENTAIS

Os dados experimentais obtidos nos laboratórios do CTA apresentaram a qualidade esperada para o desenvolvimento deste trabalho, demonstrando consistência entre as FRFs, o que possibilitou estimar com clareza os modos de vibrar da estrutura e, com poucos ruídos nas FRFs, resultou numa correta estimação dos parâmetros modais, validados através da corroboração entre as análises efetuadas.

Avaliando os modos de vibrar obtidos através da Análise Modal Experimental, foi observado que um ponto dentre os 121 usados na aquisição das FRFs apresentou discrepância nas amplitudes das formas modais, conforme observado nas Figuras, 46, 47, 48, 53 e 54. No entanto, este erro evidenciou a importância das ferramentas desenvolvidas para a correta avaliação das formas modais de sistemas dinâmicos através da correlação de resultados de modelos analíticos e modelos experimentais. Foi verificada que a qualidade dos resultados foram excelentes e que o programa Análise Modal aliado a modelos de elementos finitos é uma ferramenta adicional no auxílio à avaliação da qualidade de testes experimentais e também para o ajuste de modelos modais.

5.2 AJUSTES EFETUADOS

Durante o processo de ajuste das frequências através do modelo de Ewins-Gleeson, foi possível vivenciar as situações citadas no item 3.1.1, as quais conduziam a uma FRF regenerada incorreta. Foi observada a importância do ajuste

com respeito às fases da FRF analisada para não se ter uma inversão de fases na FRF regenerada; também foi evidenciado o acoplamento entre os modos.

5.3 RESULTADOS DO PROGRAMA

Por meio de dados experimentais, foi efetuada uma análise completa utilizando o programa *Análise Modal* desenvolvido em ambiente Excel, mostrando a estimativa proposta para o conjunto de dados experimentais.

Por meio dos parâmetros modais: frequências, amortecimentos e modos de vibrar foram realizadas as validações, com os resultados obtidos em elementos finitos e, pelos resultados obtidos pelo software LMS CADA-X

As frequências e amortecimentos obtidos pelo programa ficaram muito próximos dos parâmetros de comparação, mostrando apenas divergência nos amortecimentos do quarto e quinto modos de vibrar. Devido à aproximação dos modos de vibrar, a identificação dos amortecimentos foi prejudicada. Ressalta-se o fato de que o amortecimento é o parâmetro mais sensível a ser estimado numa análise modal, desta forma, a proximidade dos modos de vibrar podem justificar a incoerência dos resultados matemáticos na estimativa para estes modos.

Os modos de vibrar identificados e ilustrados no Capítulo 4 foram satisfatoriamente validados, pelo o método de elementos finitos. Ressalta-se a facilidade de ajuste dos modos de vibrar pelo programa, os quais permitiram os ótimos resultados.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada a revisão da teoria de análise modal necessária para o desenvolvimento de rotinas computacionais. A revisão conceituou a formulação dos modelos matemáticos para sistemas dinâmicos de vários graus de liberdade. Outros conceitos abordados foram as possíveis respostas a serem obtidas de sistemas (resposta livre e forçada) e os tipos de amortecimentos empregados nos modelos (viscoso e histerético).

Os métodos de identificação modal do domínio da frequência mais utilizados foram abrangidos pela revisão da teoria de análise modal. Nesta revisão foram verificados as formulações dos métodos de Dobson, Ajuste de círculos, Ewins-Gleeson e Exponencial Complexa.

Foi apresentado o desenvolvimento do programa *Análise Modal* em ambiente Excel dedicado à análise modal. O método escolhido para o desenvolvimento das rotinas computacionais foi o método de Ewins-Gleeson, o qual é indicado para análises de sistemas MDOF. O programa foi elaborado de forma a permitir uma fácil transição entre as etapas da análise e procurou fornecer de forma gráfica a totalidade de informações contidas nos dados analisados. Os procedimentos de coleta de dados, cálculos e interatividade com o usuário foram transcritos no código VBA contido no Excel.

Os dados utilizados para o desenvolvimento e validação do programa foram fornecidos pelos colaboradores, que executaram o ensaio de uma placa de alumínio numa condição próxima de “corpo-livre”. Na coleta dos dados foi utilizado um vibrômetro a laser que gerou as FRFs de 121 pontos especificados sobre a placa.

O procedimento sugerido para a análise utilizando o programa foi transcrito passo a passo:

- Ilustrando todas as telas do programa e a forma de utilizá-las;
- Enfocando o procedimento para adequar os dados experimentais para análise;
- Detalhando o procedimento para inserção das informações experimentais no programa;

- Apresentando os procedimentos de análise das FRFs experimentais, baseados no método de Ewins-Gleeson,
- Evidenciando os problemas mais comuns que podem ser encontrados numa análise modal, propondo soluções para obter os melhores resultados.

Ao fim do desenvolvimento deste trabalho, ficou claro que, com os ótimos resultados obtidos, e com as aplicações que podem ser dadas a este, são diversas as possibilidades para a ampliação e melhorias do que foi desenvolvido até aqui. Dentre elas podemos citar:

- Ampliação dos recursos de análise para estruturas mais complexas;
- Implementação de outros métodos de análise como, por exemplo, o método de Dobson e de Ajuste de Círculos, estudados em trabalhos anteriores;
- Elaboração de um guia dos procedimentos de análise, que poderia ser colocado num campo de “Ajuda” e baseado no item 3.2.2 deste trabalho;
- Biblioteca com dados experimentais, para aplicação em sala de aula.

Com a qualidade dos resultados obtidos e a praticidade demonstrada para a utilização do programa *Análise Modal*, considera-se cumprido o principal objetivo deste trabalho, o de possibilitar a difusão de conceitos da teoria de análise modal e a tecnologia refinada, por meio de um recurso de baixo custo.

REFERÊNCIAS

EWINS, D. J., *Modal testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd., Taunton, England, 1984.

EWINS, D. J.; Gleeson, P. T., *A method for modal identification of lightly damped structures*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 84, No. 1, 1982, pp. 57-79.

MAIA, M. M. N., *Theoretical and experimental modal analysis*, Research Studies Press, Taunton, England, 1997.

MENDONÇA, W. R. P., *Técnicas de regularização numérica aplicada à identificação de sinais de sistemas mecânicos*. Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, CNPq Pibic, 2000.

MENDONÇA, W. R. P., *Identificação de parâmetros modais através de técnicas do domínio da frequência*. Relatório Final de Projeto de Iniciação Científica, CNPq Pibic, 2001.

MENDONÇA, W. R. P., *Implementação de ferramentas numéricas de processamento de sinais com recurso ao ensino de análise modal*. Trabalho de Graduação, UNESP, Guaratinguetá, 2002.

VAROTO, P. S., *Análise modal no domínio da frequência: um método de identificação multi-modos*, Dissertação de Mestrado, USP, São Carlos, 1991.

FERREIRA, V. J., *Dynamic Response Analysis of Structures with Nonlinear Components*, Tese de Doutorado, University of London, London, 1998.

DEZOTTI, V. H.; MOREIRA, A. C.; CAMARGO, L. R.; de BARROS, E., *Análise Modal Experimental de Uma Placa Flexível Utilizando um Vibrômetro a Laser*. In: IV

Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2006, Recife. Anais do IV CONEM, 2006.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L., *Experimental modal analysis and dynamic component synthesis*. University of Cincinnati, U.S.A., 1987.

AVITABILE, P., *Modal space back to basic*, Experimental techniques, Vol. 23, No. 5, 1999, pp.17-18.

AVITABILE, P., *Modal space back to basic*, Experimental techniques, Vol. 24, No. 1, 2000, pp.15-16.

AVITABILE, P., *Modal space back to basic*, Experimental techniques, Vol. 24, No. 2, 2000, pp.17-18.

AVITABILE, P., *Modal space back to basic*, Experimental techniques, Vol. 24, No. 3, 2000, pp.13-14.

BENDAT, J. S., *Engineering applications of correlation and spectral analysis*, John Wiley & Sons, New York, U.S.A., 1993.

BOTURA, C. P., *Análise linear de sistemas*, Editora Guanabara 2, Rio de Janeiro, Brasil, 1982.

BRAUN, S., *Mechanical signature analysis*, Academic Press, 1986.

DILLON, M. J.; BONO, R. W.; BROW, L. D., *Scaling use of photogrammetry for sensor location and orientation*, Journal of Sound and Vibration, November, 2004, pp. 23-27

IMBRAHIN, S. R.; Mikulcik, E. C., *A method for the direct identification of vibration parameters from the free response*. The Shock and Vibration Bulletin. Vol.46, No. 5, 1976, pp. 187-196.

MATHIAS, M. H., *Aplicação da técnica paramétrica ARMA de processamento de sinais na caracterização de estruturas mecânicas*. Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, Campinas, 1998.

MCCONNELL, G. K., *Vibration Testing: Theory and Practice*, Wiley Interscience, 1995.

MEIROVITCH, L., *Elements of vibration analysis*, McGraw-Hill Book Company, Virginia, 1986.

SCHWARZ, B.; RICHARDSON, M., *Scaling mode shapes obtained from operating data*, Journal of Sound and Vibration, November, 2003, pp. 18-22.

PEETERS, B.; LOWET, G.; AUWERAER, H. V.; LEURIDAN, J., *A new procedure for modal parameter estimation*, Journal of Sound and Vibration, January, 2004, pp. 24-28.

SEVER, I. A., *Experimental validation of turbomachinery blade vibration predictions*, Tese de Doutorado, University of London, Londres, 2004.