IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.006/02

Sólitons e Supersimetrias em Modelos de Toda Não-Abelianos

Marcelo Brasil Silka

Orientador

Prof. Dr. José Francisco Gomes

BIBLIOTECA
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
471

23-4170

Março de 2002

"Better stop dreaming of the quiet life - cos it's the one we'll never know
And quite running for the runaway bus - cos those rosy days are few.
And stop apologising for the things you've never done;
Cos time is short and life is cruel - but it's up to us to change
This town called malice."

Paul Weller.

"And you, of tender years
Can't know the fears
That your elder grew by
And so please help them with your youth
They seek the truth
Before they can die."

Graham Nash.

Agradecimentos

- Como agradecimento e dedicatória,

  para minha esposa Anna Gabriella e minha filha Alicia Sofia

  sem as quais meu mundo seria desolado. Tak.

- Aos meus pais, pelas condições iniciais; à tia Noêmia, pelas condições de contorno.

- Ao Prof. Dr. José Francisco Gomes que, sendo simplesmente Frank, foi amigo, exemplo e orientador.

- Ao Prof. Dr. Abraham Hirsz Zimerman que enriqueceu este trabalho com inúmeros conselhos.

- Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, por apoiar financeiramente o projeto do processo 99/10.902-2 cujo desenvolvimento levou a essa dissertação.

Resumo

Nessa dissertação, propõe-se a construção de um modelo de Toda não-abeliano supersimétrico, o modelo super Lund-Regge. Parte-se do modelo WZW associado à álgebra $OSP(2,2)$ no qual implementa-se uma redução hamiltoniana. Tal construção leva às equações de movimento do modelo na forma de equações de Leznov-Saveliev (condição de curvatura nula).
O formalismo da condição de curvatura nula é estendido para tempos indexados definindo uma hierarquia de modelos. Esta estratégia leva à construção do modelo $AKNS$ associado à mesma estrutura algébrica. Soluções solitônicas para os dois modelos são construídas aplicando o formalismo da função tau generalizada na representação integrável de peso máximo.
Também é verificada a correlação entre os modelos através do mapeamento das correntes vinculadas do super Lund-Regge nas variáveis do $AKNS$. Tal mapeamento é implementado aplicando as soluções solitônicas encontradas.

Palavras Chaves:Modelos Integráveis; Modelos de Toda; Modelo de Lund-Regge; Modelo $AKNS$; Sólitons; Supersimetria.

Áreas do conhecimento:Teoria de Grupos; Física-Matemática.

Abstract

In this work the construction of a supersymmetric version of the non-abelian Toda model, the super Lund-Regge model, is proposed. It employs the WZW hierarchy associated to the algebra $OSP(2,2)$, followed by a hamiltonian reduction. This construction leads to equations of motion that agree with the Leznov-Saveliev equations (zero curvature condition). The zero curvature condition formalism is extended to its multi-time form establishing an hierarchy of equations. This strategy leads to the construction of the $AKNS$ model underlined by the same algebraic structure. One soliton solutions are calculated for both models. Also it was verified the correlation between these models by the mapping of super Lund-Regge constrained currents into $AKNS$ variables. This mapping is verified applying the one soliton solutions.

Índice

1 Introdução 1

1.1 Introdução algébrica 2

1.2 Modelos integráveis 5

1.3 Hierarquia WZW 6

1.4 Soluções tipo sóliton 11

1.5 Supersimetria 12

2 Modelo relativístico de OSP(2,2) 13

2.1 As equações de movimento do modelo 13

2.2 Soluções tipo sóliton para as variáveis de Lund-Regge 19

3 Modelo não-relativístico de OSP(2,2) 28

3.1 Equações de curvatura nula em tempos indexados 28

3.2 As equações de movimento do modelo em $t(2)$ 30

3.2.1 Verificando a supersimetria das equações do $AKNS$ 31

3.3 Soluções tipo sóliton para as variáveis do $AKNS$ 33

4 Correlação entre os modelos e conclusão 36

A Álgebra OSP(2,2) 40

B Transformações de Dressing 42

C O Programa aknssol.m 46

Referências 49

Capítulo 1

Introdução

O estudo de modelos integráveis vem do desejo de formular a física por métodos exatos, querendo assim conhecer exatamente a natureza. Majoritariamente essa é uma área da física que lida com o espaço-tempo em duas dimensões, e mesmo assim representa um laboratório importante para o desenvolvimento de novas idéias.
É de grande interesse em física teórica o estudo de modelos com supersimetria. Ela pressupõe a possibilidade de unificar numa só linguagem as partículas de spin inteiro com aquelas de spin semi-inteiro.
Nessa dissertação discutimos modelos integráveis bidimensionais supersimétricos. Em particular discutimos em detalhe o modelo $AKNS$ associado à álgebra $OSP(2,2)$ proposto na referência [1]. A partir da redução hamiltoniana do modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) associado à $OSP(2,2)$, propomos uma versão supersimétrica do modelo de Lund-Regge.
Os modelos $AKNS$ e super Lund-Regge então partilham da mesma estrutura algébrica. O papel dessa estrutura algébrica será analisado confrontando as soluções dos dois modelos. As soluções tipo sóliton serão construídas aplicando o formalismo da função tau generalizada na representação de peso máximo.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. O capítulo 1 apresenta a base algébrica do trabalho subseqüente (seção 1.1); introduz o conceito de modelo integrável em duas dimensões apoiado no formalismo da condição de curvatura nula (seção 1.2); apresenta a ação de Wess-Zumino-Witten, que permite a construção de uma hierarquia de modelos relativísticos (seção 1.3); indica o processo de obtenção de soluções solitônicas a ser desenvolvido (seção 1.4) e finalmente apresenta um pequeno comentário, como motivação, sobre a supersimetria (seção 1.5).

Na seção 1.3, há um exemplo do uso da hierarquia WZW com a construção do modelo de Lund-Regge para o caso mais simples da álgebra $SL(2)$. No capítulo 2 é feita a escolha de uma superálgebra, $OSP(2,2)$, para aplicar na hierarquia

WZW seguindo procedimento igual àquele da seção 1.3. Surge assim o modelo que chamamos de super Lund-Regge. Na segunda seção desse capítulo são encontradas soluções solitônicas para os campos físicos do modelo. O procedimento para a obtenção das soluções é o formalismo da função tau generalizada na representação integrável de peso máximo.

No capítulo 3 o formalismo da condição de curvatura nula é estendido para o conceito de tempos indexados, estabelecendo uma hierarquia de modelos. Em particular, através do tempo $t(2)$, a mesma álgebra $OSP(2,2)$ leva à construção do modelo $AKNS$ (seção 3.2). Há uma subseção , 3.2.1, na qual é verificada a supersimetria das equações do modelo $AKNS$ e na seção seguinte, 3.3, são encontradas soluções tipo sóliton para os campos do modelo pelo formalismo da função tau generalizada na representação integrável de peso máximo.

No capítulo 4 conclui-se o trabalho relacionando as soluções dos dois modelos, super Lund-Regge e $AKNS$, para comprovar a correlação entre eles visto que a base algébrica de ambos é a mesma.

No final da dissertação estão anexados três apêndices: o primeiro, onde se apresenta a álgebra $OSP(2,2)$; o segundo, com a transformação de Dressing, base teórica do formalismo da função tau generalizada na representação integrável de peso máximo e o terceiro com a listagem do programa `aknssol.m` desenvolvido para determinar as soluções solitônicas do modelo $AKNS$ pela aplicação do formalismo da função tau generalizada na representação integrável de peso máximo.

1.1 Introdução algébrica

Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie, denotada por $\mathcal{G}$, de dimensão finita $d = \dim \mathcal{G}$ é composta por geradores T_a $(a = 1, \ldots, d)$, tais que eles satisfazem relações de comutação definidas por

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c, \tag{1.1.1}$$

onde f_{ab}^c são números conhecidos como *constantes de estrutura* da álgebra.
Uma álgebra de Lie deve obedecer a identidade de Jacobi:

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^c, [T^a, T^b]] + [T^b, [T^c, T^a]] = 0. \tag{1.1.2}$$

ou seja, aplicando (1.1.1) em (1.1.2), as constantes de estrutura da álgebra, f_c^{ab}, devem validar a identidade de Jacobi. Os sinais dos cociclos $\epsilon(\alpha, \beta)$, em (1.1.5), também são determinados através da igualdade de Jacobi.
As relações (1.1.1) são escritas na base de Chevalley como

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{1.1.3}$$

$$[h_i, E_\alpha] = \sum_{b=1}^{r} n_b^\alpha k_{bi} E_\alpha, \tag{1.1.4}$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha,\beta) E_{\alpha+\beta}, & \text{se } \alpha+\beta \text{ é raiz} \\ \sum_{b=1}^{r} l_b^\alpha h_b, & \text{se } \alpha+\beta = 0 \\ 0, & \text{em outros casos.} \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Os geradores h_i ($i = 1, \ldots, r = \text{rank } \mathcal{G}$) são conhecidos como operadores de Cartan. Eles geram a subálgebra de Cartan da álgebra $\mathcal{G}$. Os geradores E_α são os operadores step, combinações lineares complexas dos geradores T_a. O vetor $\alpha = \sum n_i^\alpha \alpha_i$ é uma raiz da álgebra e os α_j denominam-se raízes simples da álgebra. Tais raízes são vetores de um espaço euclidiano de dimensão r. O símbolo k_{ij} representa um elemento da matriz de Cartan, definida pela relação

$$k_{ij} = 2\frac{\alpha_i . \alpha_j}{\alpha_j^2}. \tag{1.1.6}$$

Os cociclos $\epsilon(\alpha, \beta)$ podem ter valor ± 1, a serem definidos mais a frente, e têm a característica que

$$\epsilon(\alpha, \beta) = -\epsilon(\beta, \alpha). \tag{1.1.7}$$

Os inteiros l_b^α são determinados por

$$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \sum_{b=1}^{r} l_b^\alpha \frac{\alpha_b}{\alpha_b^2}. \tag{1.1.8}$$

No mesmo espaço euclidiano r-dimensional das raízes encontram-se os vetores chamados pesos fundamentais λ_i que satisfazem a relação

$$2\frac{\alpha_i . \lambda_j}{\alpha_i^2} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, r). \tag{1.1.9}$$

O peso fundamental pode ser expresso como uma combinação linear das raízes simples

$$\lambda_i = (k_{ij})^{-1} \alpha_j. \tag{1.1.10}$$

Os geradores em (1.1.2) podem ser normalizados de forma que

$$\text{Tr}(h_i h_j) = \delta_{ij}, \quad \text{Tr}(h_i E_\alpha) = 0, \quad \text{Tr}(E_\alpha E_\beta) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0}. \tag{1.1.11}$$

Um elemento de grupo genérico $g \in G$ pode ser escrito [2] como

$$g = e^{\sum f_a T_a}, \tag{1.1.12}$$

isto é, parametrizado por f_a.

Álgebra de Kac-Moody

Uma Álgebra de Kac-Moody $\hat{\mathcal{G}}$ é uma álgebra de Lie de dimensão infinita. Os geradores da álgebra de Kac-Moody carregam um índice extra n

$$T_a \in \mathcal{G} \longrightarrow T_a^{(n)} \in \hat{\mathcal{G}}, \tag{1.1.13}$$

quando $n \in \mathbf{Z}$ a álgebra de Kac-Moody é classificada como não torcida (*untwisted*). Nessa dissertação só será usada a álgebra de Kac-Moody não torcida.

A Álgebra de Kac-Moody também satisfaz a identidade de Jacobi (1.1.2). A relação (1.1.1) é estendida através da adição de um termo central, ou termo de Schwinger, e passa a

$$[T_a^{(m)}, T_b^{(n)}] = f_{ab}^c T_c^{(m+n)} + \hat{c} m \delta_{ab} \delta^{m+n,0}. \tag{1.1.14}$$

Dois novos geradores são acrescentados à álgebra:

- O operador derivação $\hat{D}$, definido por

$$[\hat{D}, T_a^{(n)}] = n T_a^{(n)}. \tag{1.1.15}$$

  O operador derivação $\hat{D}$ é responsável pela quebra de uma degenerescência intrínseca da álgebra de Kac-Moody (cf. no caso de $T_a^{(m)} = h_i^{(0)}$ em (1.1.14)).

- O operador de carga central $\hat{c}$, o mesmo que aparece em (1.1.14). O operador $\hat{c}$ comuta com todos os outros geradores

$$[\hat{c}, T_a^{(n)}] = [\hat{c}, \hat{D}] = 0. \tag{1.1.16}$$

Define-se os adjuntos hermitianos dos geradores da álgebra de Kac-Moody pela relação

$$[h_i^{(n)}]^\dagger = h_i^{(-n)}, \quad [E_\alpha^{(n)}]^\dagger = E_{-\alpha}^{(-n)}. \tag{1.1.17}$$

Na álgebra de Kac-Moody, os r pesos fundamentais λ_i (1.1.3) são acrescidos do vetor λ_0. É possível então construir as representações irredutíveis da álgebra de Kac-Moody a partir desses $r+1$ pesos.

Os geradores da álgebra de Kac-Moody atuam em um estado de peso máximo $|\lambda_j>$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ da forma

$$\begin{aligned}
\hat{c}|\lambda_j> &= c|\lambda_j>, \quad (j = 0, \ldots, r), \\
h_i^{(0)}|\lambda_j> &= \delta_{ij}|\lambda_j>, \quad (i = 1, \ldots, r), \\
h_i^{(n)}|\lambda_j> &= 0, \quad (n > 0), \quad (i = 1, \ldots, r), \\
E_\alpha^{(0)}|\lambda_j> &= 0, \quad (\alpha > 0), \\
E_{\pm\alpha}^{(n)}|\lambda_j> &= 0, \quad (n > 0).
\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Pode-se definir um operador de gradação $\mathcal{Q}$, o qual decompõe $\mathcal{G}$ em subespaços graduados $\mathcal{G} = \oplus\mathcal{G}_i$ tal que

$$[\mathcal{Q}, \mathcal{G}_m] = m\mathcal{G}_m, \quad m \in \mathbf{Z}, \tag{1.1.19}$$

e, como conseqüência da identidade de Jacobi (1.1.2),

$$[\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_n] \subset \mathcal{G}_{m+n}. \tag{1.1.20}$$

Em particular,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_< \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_>, \quad \mathcal{G}_< = \oplus_{i<0}\mathcal{G}_i, \quad \mathcal{G}_> = \oplus_{i>0}\mathcal{G}_i. \tag{1.1.21}$$

Nessa dissertação será usada a decomposição homogênea, à qual o operador de gradação $\mathcal{Q}$ coincide com o operador derivação $\hat{D}$.
Note que de acordo com a escolha do operador de gradação $\mathcal{Q} = \hat{D}$, a álgebra de Lie de dimensão finita $\mathcal{G}_0$ corresponde ao grau zero da álgebra $\widehat{\mathcal{G}}$

$$\mathcal{G}_0 = \widehat{\mathcal{G}}_0 = \{T_a^{(0)}\}$$

satisfazendo (1.1.1).
Pela decomposição de Gauss, um elemento de grupo $g \in G$ também pode ser decomposto em três setores graduados,

$$g = NBM = e^{\mathcal{G}_<} e^{\mathcal{G}_0} e^{\mathcal{G}_>}. \tag{1.1.22}$$

Quando $\hat{c} = 0$, a relação (1.1.14) determina a chamada álgebra de loop, simbolizada por $\widetilde{\mathcal{G}}$. Os geradores da álgebra de loop podem ser escritos em termos de um parâmetro espectral λ, cuja potência indica o grau do gerador.

$$T_a^{(n)} = \lambda^n T_a. \tag{1.1.23}$$

O operador derivação é escrito como $\hat{D} = \lambda\frac{d}{d\lambda}$ na álgebra de loop.

1.2 Modelos integráveis

Um modelo integrável [3] é um sistema físico descrito por equações diferenciais parciais não-lineares que pode ser resolvido exatamente e admite uma infinidade de cargas conservadas e funcionalmente independentes.
A integrabilidade de um modelo bidimensional esta relacionada [1] com a anulação da curvatura

$$\partial_0 \mathcal{A}_1 - \partial_1 \mathcal{A}_0 - [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1], \tag{1.2.24}$$

onde os potenciais de gauge $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ pertencem a uma álgebra $\mathcal{G}$. A anulação de (1.2.24) implica que os potenciais $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ são da forma puro gauge, ou seja, podem ser escritos como

$$\mathcal{A}_0 = T^{-1}\partial_0 T \quad \mathcal{A}_1 = T^{-1}\partial_1 T. \tag{1.2.25}$$

A condição de puro gauge (1.2.25) implica que a quantidade T é tal que

$$T = \mathcal{P}\, e^{\oint \mathcal{A}_\mu dx^\mu}, \tag{1.2.26}$$

onde $dx^\mu = dt, dx$ e $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu(x^0, x^1)$, é independente do caminho. O símbolo $\mathcal{P}$ indica um ordenamento espaço-temporal na integração .
Considerando um espaço restrito a

$$0 \leq x^0 \leq \tau, \quad -L \leq x^1 \leq L, \tag{1.2.27}$$

e impondo condições periódicas de contorno $\mathcal{A}_0(x^0, L) = \mathcal{A}_0(x^0, -L)$, pode-se determinar a igualdade

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{P}\, e^{\int_{-L}^{L} \mathcal{A}_1(0,x^1)dx^1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{P}\, e^{\int_{-L}^{L} \mathcal{A}_1(\tau,x^1)dx^1}\right), \tag{1.2.28}$$

a qual significa que $\mathrm{Tr}\left(\mathcal{P}\, e^{\int_{-L}^{L} \mathcal{A}_1(x^0,x^1)dx^1}\right)$ é uma quantidade conservada. A exponencial ordenada de (1.2.28) pode ser expandida em potências do parâmetro espectral λ se considerarmos $\mathcal{A}_\mu$ pertencente a uma álgebra de loop. Dessa expansão surge uma infinidade de cargas conservadas.
Os modelos integráveis têm soluções especiais, chamadas sólitons. O termo sóliton designa uma solução com as seguintes características:

- Ela é localizada no espaço;
- Desloca-se sem dispersar sua energia;
- Preserva a sua forma após o espalhamento com outro sóliton.

Nessa dissertação será usado como critério de integrabilidade dos modelos a anulação da curvatura nula (1.2.24).

1.3 Hierarquia WZW

Introduz-se agora a construção sistemática [4] de modelos físicos em duas dimensões conhecido como modelo de Wess-Zumino-Witten ou hierarquia WZW, no qual campos parametrizam os geradores de uma álgebra característica. A ação do modelo de

Wess-Zumino-Witten ($S_{WZW}(g)$) para um elemento de grupo $g \in G$ é dada [5] por

$$\begin{aligned} & S_{WZW}(g) \\ & = -\frac{k}{8\pi}\int dx^2 Tr[g^{-1}\partial g g^{-1}\bar{\partial} g] + \frac{k}{24\pi}\int_D dx^3 \epsilon^{ijk} Tr[g^{-1}\partial_i g g^{-1}\partial_j g g^{-1}\partial_k g], \end{aligned} \tag{1.3.29}$$

onde o termo topológico é dado por uma integral de volume sobre uma variedade tridimensional D cuja fronteira é identificada com o espaço-tempo $(z, \bar{z})$.

Observação 1 *Observando a estrutura da métrica em (1.1.11), verifica-se que a ação $S_{WZW}(g)$ em (1.3.29) anula-se quando $g \in \mathcal{G}_>$ ou $g \in \mathcal{G}_<$.*

Observação 2 *A ação (1.3.29) descreve a dinâmica de todos os campos em $\mathcal{G}$. É possível reduzir o espaço de fase desse modelo impondo vínculos. Tal escolha de vínculos deve ser consistente com a redução hamiltoniana que preserva as relações entre variáveis canonicamente conjugadas*

$$[\Phi_i, \Pi_j] = \delta_{ij}. \tag{1.3.30}$$

A redução do espaço de fase levará a uma teoria de campos parametrizando o coset $G/H \equiv H_-\backslash G/H_+$.

Modificando-se a ação (1.3.29), com a incorporação dos campos auxiliares $A \in \mathcal{G}_<$ e $\bar{A} \in \mathcal{G}_>$ bem como da escolha de geradores constantes $\epsilon_\pm \in \mathcal{G}_{\pm 1}$, define-se a ação calibrada $S_{G/H}(g, A, \bar{A})$,

$$S_{G/H}(g, A, \bar{A}) \equiv S_{WZW}(g) - \frac{k}{4\pi}\int dx^2 Tr[A(\bar{\partial} g g^{-1} - \epsilon_+) + \bar{A}(g^{-1}\partial g - \epsilon_-) + A g \bar{A} g^{-1}], \tag{1.3.31}$$

que é invariante* pela transformação

$$\begin{aligned} g &\longrightarrow g' = \alpha_- g \alpha_+, \\ A &\longrightarrow A' = \alpha_- A \alpha_-^{-1} + \alpha_- \partial \alpha_-^{-1}, \\ \bar{A} &\longrightarrow \bar{A}' = \alpha_+^{-1} \bar{A} \alpha_+ + \bar{\partial} \alpha_+^{-1} \alpha_+, \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

na qual $\alpha_- \in \mathcal{G}_<$ e $\alpha_+ \in \mathcal{G}_>$.

*A identidade de Polyakov-Wiegmann [6]

$$\begin{aligned} & S_{WZW}(\alpha\beta\gamma) = S_{WZW}(\alpha) + S_{WZW}(\beta) + S_{WZW}(\gamma) - \\ & -\frac{k}{4\pi}\int dx^2 Tr[(\alpha^{-1}\partial\alpha)(\bar{\partial}\beta)\beta^{-1} + (\beta^{-1}\partial\beta)(\bar{\partial}\gamma)\gamma^{-1} + (\alpha^{-1}\partial\alpha)\beta(\bar{\partial}\gamma)\gamma^{-1}\beta^{-1}], \end{aligned}$$

é uma ferramenta útil quando se trabalha com elementos de grupo decompostos como $g = \alpha\beta\gamma$.

Observação 3 *Note que a transformação* $g \longrightarrow g' = \alpha_- g \alpha_+$ *implica que*

$$g = NBM \longrightarrow g' = B \in \mathcal{G}_0, \quad \textit{para a escolha} \quad \alpha_- \equiv N^{-1}, \quad \alpha_+ \equiv M^{-1},$$

indicando assim a dependência de (1.3.31) do subgrupo B, *de grau zero*

$$S_{G/H}(g, A, \bar{A}) = S_{G/H}(B, A', \bar{A}'). \tag{1.3.33}$$

O modelo descrito pela ação (1.3.33) é chamado de modelo de Toda, caracterizado pelos campos físicos que parametrizam o subgrupo $B \in G_0$. Se B contém somente geradores que comutam entre si, tem-se um modelo de Toda abeliano. Para as estruturas algébricas escolhidas nessa dissertação, serão propostos modelos de Toda não-abelianos.

Escrevendo a ação (1.3.31), levando em conta (1.3.33) e então aplicando a definição de traço (1.1.11), encontra-se os resultados

$$Tr[A\bar{\partial}BB^{-1}] = Tr[\bar{A}B^{-1}\partial B] = 0. \tag{1.3.34}$$

Esta é uma condição subsidiária que permitem simplificar a ação (1.3.31) para

$$S_{G/H}(B, A, \bar{A}) = S_{WZW}(B) - \frac{k}{4\pi}\int dx^2 Tr[-A\epsilon_+ - \bar{A}\epsilon_- + AB\bar{A}B^{-1}]. \tag{1.3.35}$$

Somando e subtraindo $\epsilon_+ B\epsilon_- B^{-1}$, o traço de (1.3.35) pode ser reescrito como

$$Tr[(A - B\epsilon_- B^{-1})B(\bar{A} - B^{-1}\epsilon_+ B)B^{-1} - \epsilon_+ B\epsilon_- B^{-1}]$$

A integração funcional sobre os campos auxiliares A e $\bar{A}$ leva a ação efetiva para o modelo WZW perturbado $S_{G/H}(B, A, \bar{A})$

$$S_{eff}(B) = S_{WZW}(B) - \frac{k}{4\pi}\int dx^2 Tr[\epsilon_+ B\epsilon_- B^{-1}]. \tag{1.3.36}$$

Pela aplicação do princípio de ação mínima em (1.3.36), encontra-se as equações de movimento do modelo

$$\bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] = 0, \tag{1.3.37}$$

$$\partial(\bar{\partial}BB^{-1}) + [B\epsilon_- B^{-1}, \epsilon_+] = 0, \tag{1.3.38}$$

que coincidem com as equações propostas por Leznov e Saveliev [7].

Observação 4 *As equações (1.3.37) e (1.3.38) são equivalentes, pois é verdadeira a igualdade*

$$B\{\bar{\partial}(B^{-1}\partial B) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B]\}B^{-1} = \partial(\bar{\partial}BB^{-1}) + [B\epsilon_- B^{-1}, \epsilon_+].$$

Se existirem geradores $Y^l.H \in \mathcal{G}_0$ que definem uma subálgebra $\mathcal{G}_0^0 \subset \mathcal{G}_0$, tais que

$$[Y^l.H, \epsilon_\pm] = 0, \tag{1.3.39}$$

é possível escrever

$$\bar{\partial}\,\mathrm{Tr}(Y^l.HB^{-1}\partial B) = 0, \tag{1.3.40}$$

$$\partial\,\mathrm{Tr}(Y^l.H\bar{\partial}BB^{-1}) = 0, \tag{1.3.41}$$

ao multiplicar (1.3.37) e (1.3.38) por $Y^l.H$ e então calcular o traço.
Então, por (1.3.40)-(1.3.41), o espaço de fase pode ser reduzido ainda mais. Este novo vínculo é incorporado na ação através da simetria de gauge residual

$$B \longrightarrow B' = \alpha_0 B \alpha_0', \tag{1.3.42}$$

onde $\alpha_0, \alpha_0' \in \mathcal{G}_0^0$. Tal vínculo permite a eliminação de campos associados a $Y^l.H$.

As equações (1.3.37) e (1.3.38) podem ser escritas como uma condição de curvatura nula (1.2.24)

$$\partial\bar{A} - \bar{\partial}A + [\bar{A}, A] = 0, \tag{1.3.43}$$

desde que defina-se o chamado par de Lax:

$$\bar{A} = \epsilon_+ + \bar{\partial}BB^{-1}, \quad A = B\epsilon_- B^{-1}. \tag{1.3.44}$$

O resultado de (1.3.43) comprova, vide a curvatura (1.2.24), que os modelos da hierarquia WZW, incluindo os modelos de Toda, são modelos integráveis. O par de Lax $(A, \bar{A})$ em (1.3.44) faz o papel dos potenciais $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ de (1.2.24).

O modelo de Lund-Regge

Será aplicada a redução hamiltoniana à hierarquia WZW do $SL(2)$ de forma a construir o chamado modelo de Lund-Regge. Dele encontra-se as equações de movimento do modelo de buraco-negro bidimensional proposto por Witten em [8] quando $\epsilon_\pm = 0$.
O Lund-Regge corresponde [4] a um modelo de Toda não abeliano associado a álgebra $SL(2)$, de geradores h, E_+ e E_-, definida pelas relações de comutação

$$\begin{aligned} [h, E_\pm] &= \pm 2E_\pm, \\ [E_+, E_-] &= h. \end{aligned} \tag{1.3.45}$$

Uma representação dessa álgebra é obtida através das matrizes de Pauli, fazendo $h = \sigma_3$, $E_+ = \sigma_+$ e $E_- = \sigma_-$.

Um elemento de grupo genérico pode ser escrito de acordo com a decomposição de Gauss

$$B = e^{\tilde{\chi}E_-} e^{\phi h} e^{\tilde{\psi}E_+}. \tag{1.3.46}$$

onde os campos $\tilde{\chi}$, ϕ e $\tilde{\psi}$ parametrizam o grupo $SL(2)$.
Para encontrar as equações de movimento far-se-á uso das equações de Leznov-Saveliev (1.3.37) e (1.3.38). Considerando primeiramente as correntes de (1.3.37) e (1.3.38), com o uso de (1.3.46), tem-se

$$B^{-1}\partial B = [\partial\tilde{\psi} + 2\tilde{\psi}\partial\tilde{\phi} - \tilde{\psi}^2\partial\tilde{\chi}e^{2\phi}]E_+ + [\partial\tilde{\chi}e^{2\phi}]E_- + [\partial\phi - \tilde{\psi}\partial\tilde{\chi}e^{2\phi}]h, \tag{1.3.47}$$

$$\bar{\partial}BB^{-1} = [\bar{\partial}\tilde{\psi}e^{2\phi}]E_+ + [\bar{\partial}\tilde{\chi} + 2\tilde{\chi}\bar{\partial}\phi - \tilde{\chi}^2\bar{\partial}\tilde{\psi}e^{2\phi}]E_- + [\bar{\partial}\phi - \bar{\partial}\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{2\phi}]h. \tag{1.3.48}$$

A eliminação de um grau de liberdade será pela imposição dos vínculos na direção de h, colocando a restrição sobre a subálgebra de Cartan.

$$B^{-1}\partial B|_h = \partial\phi - \tilde{\psi}\partial\tilde{\chi}e^{2\phi} = 0, \quad \bar{\partial}BB^{-1}|_h = \bar{\partial}\phi - \bar{\partial}\tilde{\psi}\tilde{\chi}e^{2\phi} = 0. \tag{1.3.49}$$

Uma observação de (1.3.49) sugere uma redefinição dos campos antes da imposição dos vínculos

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &\to \psi e^{-\phi}, \\ \tilde{\chi} &\to \chi e^{-\phi}, \end{aligned} \tag{1.3.50}$$

que permite determinar as duas derivadas em relação a ϕ

$$\partial\phi = \frac{\psi\partial\chi}{1+\chi\psi}, \tag{1.3.51}$$

$$\bar{\partial}\phi = \frac{\chi\bar{\partial}\psi}{1+\chi\psi}. \tag{1.3.52}$$

Aplicadas as expressões das derivadas (1.3.51) e (1.3.52) em (1.3.47) e (1.3.48) tem-se

$$B^{-1}\partial B|_{vinc.} = \left[\frac{\partial\chi}{1+\chi\psi}e^{\phi}\right]E_+ + [\partial\psi e^{-\phi}]E_-, \tag{1.3.53}$$

$$\bar{\partial}BB^{-1}|_{vinc.} = [\bar{\partial}\chi e^{-\phi}]E_+ + \left[\frac{\bar{\partial}\psi}{1+\chi\psi}e^{\phi}\right]E_-. \tag{1.3.54}$$

Para os comutadores de (1.3.37) e (1.3.38), com os geradores constantes $\epsilon_\pm$ definidos como

$$\epsilon_+ = \frac{\lambda}{2}h, \quad \epsilon_- = \frac{1}{2\lambda}h, \tag{1.3.55}$$

tem-se

$$[\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] = \psi e^{-\phi}E_+ + \chi(1+\chi\psi)e^{\phi}E_-, \tag{1.3.56}$$

$$[B\epsilon_- B^{-1}, \epsilon_+] = \chi e^{\phi}E_+ + \psi(1+\chi\psi)e^{-\phi}E_-. \tag{1.3.57}$$

Coletando as projeções em $E_{\pm}$, finalmente chega-se às equações de movimento

$$\partial\bar{\partial}\chi = \frac{\psi\partial\chi\bar{\partial}\chi}{1+\psi\chi} - \chi(1+\psi\chi), \tag{1.3.58}$$

$$\partial\bar{\partial}\psi = \frac{\chi\partial\psi\bar{\partial}\psi}{1+\psi\chi} - \psi(1+\psi\chi). \tag{1.3.59}$$

Estas equações definem o chamado modelo de Lund-Regge.

1.4 Soluções tipo sóliton

Há vários métodos para encontrar as soluções tipo sóliton. Nessa dissertação será aplicado o formalismo da função tau generalizada, veja [9], por exemplo.
Com o uso da transformação de Dressing (cf. apêndice B) pode-se construir a partir de uma solução de vácuo dada, uma órbita de soluções parametrizadas por um elemento de grupo constante $g \in \widehat{\mathcal{G}}$ através de transformações de gauge. As soluções tipo sóliton correspondem a pontos dessa órbita nos quais g tem a forma de uma exponencial de autovetores de $\epsilon_{\pm}$.
As funções tau são elementos de matriz de uma representação específica do grupo $\widehat{G}$. Para uma representação infinitamente dimensional nem sempre é possível passar da representação do grupo para a representação da álgebra ($\widehat{G} \mapsto \widehat{\mathcal{G}}$) através do mapeamento exponencial mostrado em (1.1.12). Há uma possibilidade operacional para este mapeamento se a série de potência da exponencial truncar, ou se o seu espaço de representação admitir uma base de autovalores de $\epsilon_{\pm}$. A representação em questão é chamada representação integrável de peso máximo (*integrable highest-weight representation*) e tornará a obtenção de sólitons relativamente fácil e de forma sistemática.
Para o modelo de Lund-Regge expresso pelas equações de movimento (1.3.58) e (1.3.59), foram encontradas [10] soluções tipo sóliton pelo formalismo da função tau generalizada. As soluções encontradas nessa referência (cf. (5.176)-(5.177)) são

$$\tilde{\psi} = \frac{b\rho_2}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}, \tag{1.4.60}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{a\rho_1}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}, \tag{1.4.61}$$

onde a e b são quaisquer, $\Gamma = \frac{ab\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}$, γ_1 e γ_2 são quaisquer e ρ_1 e ρ_2 são exponenciais nas variáveis $(z, \bar{z})$ parametrizadas, respectivamente, por γ_1 e γ_2.

1.5 Supersimetria

A supersimetria relaciona elementos de spin inteiro com elementos de spin semi-inteiro. Esta relação identifica nos dois conjuntos os chamados superparceiros. Os primeiros obedecem uma estatística de Bose-Einstein, são chamados bósons; eles representam os campos de força. Os outros respeitam uma estatística de Fermi-Dirac. São os férmions, cujo princípio de exclusão identifica com partículas (campos) de matéria.

Os bósons são caracterizados por manterem relações de comutação entre si enquanto na estatística de Fermi-Dirac as relações são de anticomutação .

Sendo assim, o modelo de Lund-Regge, desenvolvido na seção 1.3, é um modelo bosônico.

Uma supersimetria é representada por variações infinitesimais dos campos que representam os superparceiros. Por exemplo, para um bóson B e um férmion F encontram-se as relações

$$\delta B = \epsilon_1 F, \quad \delta F = \epsilon_2 B, \tag{1.5.62}$$

onde os ϵ são números grassmannianos.

A supersimetria apareceu na teoria de campos bidimensional a partir dos trabalhos de Ramond e Neveu-Schwarz [11] e foi verificada sua possibilidade num universo quadridimensional por Wess e Zumino em [12]. Uma comprovação física da supersimetria só seria possível pela observação experimental de superparceiros das partículas fundamentais conhecidas. Mas, mesmo sem essa certeza, há bons indicadores do papel da supersimetria na natureza. Em física nuclear, por exemplo, Metz *et al.* [13] verificaram transformações supersimétricas dos quartetos supersimétricos, conjuntos de quatro núcleos, dois de caráter bosônico chamados par-par e ímpar-ímpar transmudando-se para outros dos tipos par-ímpar ou ímpar-par, de caráter fermiônico.

Capítulo 2

Modelo relativístico de OSP(2,2)

A proposta de criar uma versão supersimétrica do modelo de Lund-Regge, em vista das construções algébricas mostradas até este ponto, passa pela escolha de uma álgebra para substituir $SL(2)$. Esse novo grupo foi escolhido tendo em mente que a redução hamiltoniana no novo caso deve ocorrer nos mesmos moldes do caso puramente bosônico apresentado na seção 1.3. Para tanto, escolheu-se a álgebra $\mathcal{G} = \widehat{OSP}(2,2)$, descrita no apêndice A. Também escolheu-se $\mathcal{Q} = \hat{D}$, que leva a identificar no grau zero $\mathcal{G}_0 = OSP(2,2)$.

Observação 5 *É interessante notar que o elemento de grupo do $\mathcal{G}_0 = OSP(2,2)$, apresentado em (A.1)*

$$B = e^{\tilde{\chi}E_{-2\rho}} e^{\tilde{f}_1 E_{-\rho-\varepsilon}} e^{\tilde{f}_2 E_{-\rho+\varepsilon}} e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H + \phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H + \nu\hat{c}} e^{\tilde{g}_2 E_{\rho-\varepsilon}} e^{\tilde{g}_1 E_{\rho+\varepsilon}} e^{\tilde{\psi}E_{+2\rho}},$$

será idêntico ao elemento de grupo do $SL(2)$ dado em (1.3.46) se os campos fermiônicos forem colocados a zero, ϕ_1 identificado com ϕ_2 e o termo central desconsiderado. Nesse caso as relações de comutação de $OSP(2,2)$ pertinentes serão apenas as três anotadas na primeira linha de (A.3) as quais podem ser identificadas com as relações de comutação do $SL(2)$ dadas em (1.3.45).

2.1 As equações de movimento do modelo

Escolhida a álgebra $OSP(2,2)$ como base do novo modelo, serão encontradas as equações de movimento desse modelo seguindo os aplicados para $SL(2)$ que levaram à construção do modelo de Lund-Regge: calcular as correntes, escolher transformações de redefinição dos campos, impor vínculos, escolher elementos constantes $\epsilon_\pm$.

Calcula-se as correntes $B^{-1}\partial B$ e $\bar{\partial}BB^{-1}$ de (1.3.38) e (1.3.37), com o elemento de grupo $B \in OSP(2,2)$ dado em (A.1) e usando as relações de comutação/anticomutação (A.3) para chegar às expressões (observe a simplificação de notação $e^{+} \equiv e^{\phi_1+\phi_2}$):

$$
\begin{aligned}
B^{-1}\partial B &= E_{+2\rho}[\partial\tilde{\psi} + \tilde{\psi}(\partial\phi_1 + \partial\phi_2) - \partial\tilde{f}_2\tilde{g}_2 e^{\phi_1}\tilde{\psi} - \tilde{\psi}^2(\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+}) + \\
&\quad +(\partial\tilde{g}_2 + \partial\phi_1\tilde{g}_2 - (\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+})\tilde{\psi}\tilde{g}_2 + \tilde{\psi}\partial\tilde{f}_1 e^{\phi_2})\tilde{g}_1] + \\
&+ E_{\rho+\varepsilon}[\partial\tilde{g}_1 - \tilde{\psi}\partial\tilde{f}_2 e^{\phi_1} + (\partial\tilde{\phi}_2 - (\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+})\tilde{\psi} - \partial\tilde{f}_2\tilde{g}_2 e^{\phi_1})\tilde{g}_1] + \\
&+ E_{\rho-\varepsilon}[\partial\tilde{g}_2 + \partial\phi_1\tilde{g}_2 - (\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+})\tilde{\psi}\tilde{g}_2 + \tilde{\psi}\partial\tilde{f}_1 e^{\phi_2}] + \\
&+ \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H[\partial\phi_1 - \tilde{\psi}(\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+}) + \partial\tilde{f}_1\tilde{g}_1 e^{\phi_2} - (\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+})\tilde{g}_2\tilde{g}_1] + \\
&+ \left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H[\partial\phi_2 - \tilde{\psi}(\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+}) - \partial\tilde{f}_2\tilde{g}_2 e^{\phi_1}] + \\
&+ E_{-2\rho}[\partial\tilde{\chi}e^{+} + \partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+}] + \\
&+ E_{-(\rho+\varepsilon)}[\partial\tilde{f}_1 e^{\phi_2} - (\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+})\tilde{g}_2] + \\
&+ E_{-(\rho-\varepsilon)}[\partial\tilde{f}_2 e^{\phi_1} + (\partial\tilde{f}_1\tilde{f}_2 e^{+} + \partial\tilde{\chi}e^{+})\tilde{g}_1],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial}BB^{-1} &= E_{-2\rho}[\bar{\partial}\tilde{\chi} + \tilde{\chi}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2) - \tilde{f}_2\bar{\partial}\tilde{g}_2\tilde{\chi}e^{\phi_1} - \tilde{\chi}^2(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+}) + \\
&\quad +\tilde{f}_1(\bar{\partial}\tilde{f}_2 + \bar{\partial}\phi_1\tilde{f}_2 - \tilde{\chi}\tilde{f}_2(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+}) + \tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{\phi_2})] + \\
&+ E_{-(\rho+\varepsilon)}[\bar{\partial}\tilde{f}_1 - \tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{g}_2 e^{\phi_1} + \tilde{f}_1(\bar{\partial}\phi_2 - \tilde{f}_2\bar{\partial}\tilde{g}_2 e^{\phi_1} - \tilde{\chi}(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+}))] + \\
&+ E_{-(\rho-\varepsilon)}[\bar{\partial}\tilde{f}_2 + \bar{\partial}\phi_1\tilde{f}_2 - \tilde{\chi}\tilde{f}_2(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+}) + \tilde{\chi}\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{\phi_2}] + \\
&+ \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H[\bar{\partial}\phi_1 - \tilde{\chi}(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+}) - \tilde{f}_1\tilde{f}_2(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+}) + \tilde{f}_1\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{\phi_2}] + \\
&+ \left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H[\bar{\partial}\phi_2 - \tilde{f}_2\bar{\partial}\tilde{g}_2 e^{\phi_1} - \tilde{\chi}(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+})] + \\
&+ E_{+2\rho}[\bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+} + \tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+}] + \\
&+ E_{\rho+\varepsilon}[\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{\phi_2} - \tilde{f}_2(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+})] + \\
&+ E_{\rho-\varepsilon}[\bar{\partial}\tilde{g}_2 e^{\phi_1} + \tilde{f}_1(\tilde{g}_2\bar{\partial}\tilde{g}_1 e^{+} + \bar{\partial}\tilde{\psi}e^{+})].
\end{aligned}
$$

Como foi feito em (1.3.50), para impor os vínculos associados à subálgebra de Cartan primeiro efetua-se as transformações de variáveis,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\psi} \to \psi e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}, \quad \tilde{g}_1 \to g_1 e^{-\frac{\phi_2}{2}}, \quad f_1 \to \tilde{f}_1 e^{-\frac{\phi_2}{2}}, \\
&\tilde{\chi} \to \chi e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}, \quad \tilde{g}_2 \to g_2 e^{-\frac{\phi_1}{2}}, \quad f_2 \to \tilde{f}_2 e^{-\frac{\phi_1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

Pela transformação (2.1.1) tem-se as correntes reescritas como:

$$
\begin{aligned}
B^{-1}\partial B = & \\
= \; & E_{+2\rho}e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} \\
& [\partial\psi + \frac{1}{2}\psi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2) + \partial g_2 g_1 + \frac{1}{2}g_2 g_1 \partial\phi_1 - \partial f_2 g_2 \psi + \frac{1}{2}f_2 g_2 \psi\partial\phi_1 + \psi\partial f_1 g_1 + \\
& + \frac{1}{2}f_1 f_2 g_2 g_1 \psi\partial\phi_2 - \partial f_1 f_2 g_2 g_1 \psi - \frac{1}{2}\psi f_1 g_1 \partial\phi_2 - \psi\partial\chi g_2 g_1 + \frac{1}{2}\chi\psi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2) g_2 g_1 - \\
& - \psi^2(\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2))] + \\
+ \; & E_{\rho+\varepsilon}e^{-\frac{\phi_2}{2}}[\partial g_1 - \psi\partial f_2 - \frac{1}{2}\partial\phi_2 g_1 + \frac{1}{2}\psi f_2 \partial\phi_1 - \\
& - g_1(\partial\phi_2 - \partial f_2 g_2 + \frac{1}{2}f_2 g_2 \partial\phi_1 - \psi(\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2))] + \\
+ \; & E_{\rho-\varepsilon}e^{-\frac{\phi_1}{2}} \\
& [\partial g_2 + \psi\partial f_1 + \frac{1}{2}\partial\phi_1 g_2 - \frac{1}{2}\psi\partial\phi_2 f_1 - \psi g_2(\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2))] + \\
+ \; & \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H \\
& [\partial\phi_1 + \partial f_1 g_1 - \frac{1}{2}f_1 g_1 \partial\phi_2 - (\psi + g_2 g_1)(\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2))] + \\
+ \; & \left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H[\partial\phi_2 - \partial f_2 g_2 + \frac{1}{2}f_2 g_2 \partial\phi_1 - \psi(\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2)] + \\
+ \; & E_{-2\rho}e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}[\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2)] + \\
+ \; & E_{-(\rho+\varepsilon)}e^{\frac{\phi_2}{2}}[\partial f_1 - \frac{1}{2}f_1 \partial\phi_2 - (\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2)) g_2] + \\
+ \; & E_{-(\rho-\varepsilon)}e^{\frac{\phi_1}{2}}[\partial f_2 - \frac{1}{2}f_2 \partial\phi_1 + (\partial\chi + \partial f_1 f_2 - \frac{1}{2}f_1 f_2 \partial\phi_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2)) g_1],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial} B B^{-1} = & \\
= \; & E_{-2\rho} e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} \\
& [\bar{\partial}\chi + \frac{1}{2}\chi(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2) + f_1\bar{\partial}f_2 + \frac{1}{2}\bar{\partial}\phi_1 f_1 f_2 - \chi f_2 \bar{\partial} g_2 + \frac{1}{2} f_2 g_2 \chi \bar{\partial}\phi_1 + f_1 \bar{\partial} g_1 \chi - \\
& -\frac{1}{2} f_1 g_1 \bar{\partial}\phi_2 \chi - \chi f_1 f_2 g_2 \bar{\partial} g_1 + \frac{1}{2}\chi f_1 f_2 g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \chi \bar{\partial}\psi f_1 f_2 + \frac{1}{2}\chi\psi(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2) f_1 f_2 - \\
& -\chi^2(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi)] + \\
+ \; & E_{-(\rho+\varepsilon)} e^{-\frac{\phi_2}{2}} [\bar{\partial} f_1 - \chi\bar{\partial} g_2 - \frac{1}{2} f_1 \bar{\partial}\phi_2 + \frac{1}{2}\chi\bar{\partial}\phi_1 g_2 - \\
& -f_1(\bar{\partial}\phi_2 - f_2\bar{\partial} g_2 + \frac{1}{2} f_2 g_2 \bar{\partial}\phi_1 - \chi(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi))] + \\
+ \; & E_{-(\rho-\varepsilon)} e^{-\frac{\phi_1}{2}} \\
& [\bar{\partial} f_2 + \frac{1}{2}\bar{\partial}\phi_1 f_2 + \chi\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2}\chi\bar{\partial}\phi_2 g_1 - \chi f_2(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi)] + \\
+ \; & \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right) . H \\
& [\bar{\partial}\phi_1 + f_1\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} f_1 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - (\chi + f_1 f_2)(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi)] + \\
+ \; & \left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right) . H [\bar{\partial}\phi_2 - f_2\bar{\partial} g_2 + \frac{1}{2} f_2 g_2 \bar{\partial}\phi_1 - \chi(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi)] + \\
+ \; & E_{+2\rho} e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} [\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi] + \\
+ \; & E_{\rho+\varepsilon} e^{\frac{\phi_2}{2}} [\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_1 \bar{\partial}\phi_2 - f_2(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi)] + \\
+ \; & E_{\rho-\varepsilon} e^{\frac{\phi_1}{2}} [\bar{\partial} g_2 - \frac{1}{2} g_2 \bar{\partial}\phi_1 + f_1(\bar{\partial}\psi + g_2\bar{\partial} g_1 - \frac{1}{2} g_2 g_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi)].
\end{aligned}
$$

Impondo que as projeções em relação a $E_{\pm(\rho+\varepsilon)}$ sejam zero nas duas correntes, encontra-se relações para as derivadas de f_1 e g_1 que permitem simplificar a dependência dos campos f_1 e g_1. As derivadas encontradas são :

$$
\partial f_1 = \frac{1}{2} f_1 \partial\phi_2 + \partial\chi g_2 - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1 + \partial\phi_2) g_2, \tag{2.1.2}
$$

$$
\bar{\partial} g_1 = \frac{1}{2} g_1 \bar{\partial}\phi_2 + f_2\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2} f_2(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi, \tag{2.1.3}
$$

$$
\bar{\partial} f_1 = \chi\bar{\partial} g_2 + \frac{1}{2} f_1 \bar{\partial}\phi_2 - \frac{1}{2}\chi\bar{\partial}\phi_1 g_2, \tag{2.1.4}
$$

$$
\partial g_1 = \psi\partial f_2 + \frac{1}{2}\partial\phi_2 g_1 - \frac{1}{2}\psi\partial\phi_1 f_2. \tag{2.1.5}
$$

Um novo vínculo é tomado, no sentido de (1.3.39), para reduzir ainda mais o espaço de fase. Para tal considera-se $\epsilon_\pm \propto H$. As projeções das correntes nas direções de $\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H$ e $\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H$ igualadas a zero levam a sistemas de equações que determinam, já simplificadas por (2.1.2)-(2.1.5),

$$\partial\phi_1 = \frac{\psi\partial\chi(1+g_2f_2) - \frac{1}{2}\chi\psi\partial f_2 g_2}{1+\chi\psi+\frac{5}{4}\chi\psi g_2 f_2}, \tag{2.1.6}$$

$$\partial\phi_2 = \frac{\psi\partial\chi(1+\frac{3}{2}g_2f_2) + \frac{1}{2}\chi\psi\partial f_2 g_2 + \partial f_2 g_2}{1+\chi\psi+\frac{5}{4}\chi\psi g_2 f_2}, \tag{2.1.7}$$

$$\bar\partial\phi_1 = \frac{\bar\partial\psi\chi(1+g_2f_2) - \frac{1}{2}\chi\psi f_2\bar\partial g_2}{1+\chi\psi+\frac{5}{4}\chi\psi g_2 f_2}, \tag{2.1.8}$$

$$\bar\partial\phi_2 = \frac{\bar\partial\psi\chi(1+\frac{3}{2}g_2f_2) + \frac{1}{2}\chi\psi f_2\bar\partial g_2 + f_2\bar\partial g_2}{1+\chi\psi+\frac{5}{4}\chi\psi g_2 f_2}. \tag{2.1.9}$$

Reescrevendo as correntes, tem-se

$$\begin{aligned} B^{-1}\partial B = & \qquad (2.1.10)\\ & E_{+2\rho}e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}[\partial\psi + \frac{1}{2}\psi(\partial\phi_1+\partial\phi_2) - \psi(\partial f_2 - \frac{1}{2}f_2\partial\phi_1)g_2 - \\ & -\psi^2(1+g_2f_2)[\partial\chi - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1+\partial\phi_2)] + (\partial g_2 + \frac{1}{2}\partial\phi_1 g_2)g_1] + \\ + & E_{\rho-\varepsilon}e^{-\frac{\phi_1}{2}}[\partial g_2 + \frac{1}{2}\partial\phi_1 g_2] + \\ + & E_{-2\rho}e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}(1+g_2f_2)[\partial\chi - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1+\partial\phi_2)] + \\ + & E_{-(\rho-\varepsilon)}e^{\frac{\phi_1}{2}}[\partial f_2 - \frac{1}{2}f_2\partial\phi_1 + (1+g_2f_2)[\partial\chi - \frac{1}{2}\chi(\partial\phi_1+\partial\phi_2)]g_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar\partial B B^{-1} = & \qquad (2.1.11)\\ & E_{-2\rho}e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}[\bar\partial\chi + \frac{1}{2}\chi(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2) - \chi f_2(\bar\partial g_2 - \frac{1}{2}g_2\bar\partial\phi_1) - \\ & -\chi^2(1+g_2f_2)[\bar\partial\psi - \frac{1}{2}(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2)\psi] + f_1(\bar\partial f_2 + \frac{1}{2}f_2\bar\partial\phi_1)] + \\ + & E_{-(\rho-\varepsilon)}e^{-\frac{\phi_1}{2}}[\bar\partial f_2 + \frac{1}{2}f_2\bar\partial\phi_1] + \\ + & E_{+2\rho}e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}(1+g_2f_2)[\bar\partial\psi - \frac{1}{2}(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2)\psi] + \\ + & E_{\rho-\varepsilon}e^{\frac{\phi_1}{2}}[\bar\partial g_2 - \frac{1}{2}g_2\bar\partial\phi_1 + f_1(1+g_2f_2)[\bar\partial\psi - \frac{1}{2}(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2)\psi]]. \end{aligned}$$

Para o cálculo do comutador de (1.3.38) deve-se definir geradores constantes $\epsilon_\pm$, de graus ± 1. No caso em questão será feita uma escolha compatível com a construção do modelo de Lund-Regge bosônico. Essa escolha é

$$\epsilon^\pm = \lambda^{\pm 1}\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H. \tag{2.1.12}$$

Com o uso de (A.1), (2.1.1) tem-se

$$\begin{aligned}
[B\epsilon_- B^{-1}, \epsilon_+] &= E_{2\rho}\psi e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} + \\
&+ E_{-2\rho}(1+\chi\psi+f_2g_2)(\chi+f_1f_2)e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} + \\
&+ E_{-\rho+\varepsilon}f_2(1+\chi\psi)e^{-\frac{\phi_1}{2}} + \\
&+ E_{\rho-\varepsilon}(g_2+f_1\psi)e^{\frac{\phi_1}{2}},
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Do comutador de (1.3.37),

$$\begin{aligned}
[\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_+ B] &= E_{2\rho}(1+\chi\psi+f_2g_2)(\psi+g_2g_1)e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} + \\
&+ E_{-2\rho}\chi e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} + \\
&+ E_{-\rho+\varepsilon}(f_2+g_1\chi)e^{\frac{\phi_1}{2}} + \\
&+ E_{\rho-\varepsilon}g_2(1+\chi\psi)e^{-\frac{\phi_1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Finalmente, coletando os dados de (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13) e (2.1.14), as equações de movimento do modelo em questão são

$$\begin{aligned}
&\left[\bar\partial\partial\chi - \tfrac{1}{2}\bar\partial\chi(\partial\phi_1+\partial\phi_2) - \tfrac{1}{2}\chi(\bar\partial\partial\phi_1+\bar\partial\partial\phi_2) + \tfrac{1}{2}(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2)(\partial\chi - \tfrac{1}{2}\chi(\partial\phi_1+\partial\phi_2))\right]\cdot \\
&\cdot(1+g_2f_2) + \bar\partial(g_2f_2)\left[\partial\chi - \tfrac{1}{2}\chi(\partial\phi_1+\partial\phi_2)\right] + \chi = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

$$\bar\partial\partial g_2 - \frac{1}{2}\bar\partial\phi_1\partial g_2 - \frac{1}{4}g_2\bar\partial\phi_1\partial\phi_1 + \frac{1}{2}\bar\partial g_2\partial\phi_1 + \frac{1}{2}g_2\bar\partial\partial\phi_1 + g_2(1+\chi\psi) = 0, \tag{2.1.16}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\bar\partial\partial\psi - \tfrac{1}{2}\partial\psi(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2) - \tfrac{1}{2}\psi(\bar\partial\partial\phi_1+\bar\partial\partial\phi_2) + \tfrac{1}{2}(\partial\phi_1+\partial\phi_2)(\bar\partial\psi - \tfrac{1}{2}(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2)\psi)\right]\cdot \\
&\cdot(1+g_2f_2) + \partial(g_2f_2)\left[\bar\partial\psi - \tfrac{1}{2}(\bar\partial\phi_1+\bar\partial\phi_2)\psi\right] + \psi = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

$$\bar\partial\partial f_2 - \frac{1}{2}\partial\phi_1\bar\partial f_2 - \frac{1}{4}f_2\partial\phi_1\bar\partial\phi_1 + \frac{1}{2}\partial f_2\bar\partial\phi_1 + \frac{1}{2}f_2\bar\partial\partial\phi_1 + f_2(1+\chi\psi) = 0. \tag{2.1.18}$$

as quais constituem as equações do super Lund-Regge quando eliminamos ϕ_1 e ϕ_2 através das equações (2.1.6)-(2.1.9).

Observação 6 *As quatro equações de movimento do super Lund-Regge reduzem-se às equações de movimento do modelo de Lund-Regge (1.3.58) e (1.3.59) quando se faz $g_i = f_i = 0$ $(i = 1, 2)$. Este resultado já era esperado para um modelo supersimétrico.*

Para desenvolver esse cálculo deve-se utilizar as equações (2.1.6)-(2.1.9) com os campos fermiônicos postos a zero. Desse reducionismo encontra-se equações equivalentes a (1.3.51)-(1.3.52) nas duas variáveis ϕ_1,ϕ_2. Desse resultado pode-se concluir que $\phi_1 = \phi_2$ para o regime puramente bosônico. Tal característica já se delineava nos comentários da observação 5, da página 13.

2.2 Soluções tipo sóliton para as variáveis de Lund-Regge

As soluções solitônicas dos campos de Lund-Regge serão encontradas seguindo a prescrição exposta no apêndice B, o formalismo da função tau generalizada na representação integrável de peso máximo, com aplicação das transformações de Dressing de soluções de vácuo dadas.

Começa-se pela escolha de um potencial de vácuo. O par de Lax do vácuo é escolhido condizente com (2.1.12)

$$\bar{A}_{vac} = \epsilon^{+} = \lambda \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, \quad A_{vac} = \epsilon^{-} = \lambda^{-1}\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H. \tag{2.2.19}$$

O cálculo dos operadores de vértice parte de (B.20) com o elemento de grupo $B \in OSP(2,2)$, dado em (A.1).

As autofunções são dadas em (B.27) e os autovalores em (B.28) tomam a forma

$$f_{\pm}^{+}(\gamma) = \pm\gamma^{+1}, \quad f_{\pm}^{-}(\gamma) = \pm\gamma^{-1}, \tag{2.2.20}$$

que permitem escrever os valores de $\rho_i(\gamma_i)$ em (B.25) como

$$\rho_1(\gamma_1) = e^{-\frac{z}{\gamma_1}-\gamma_1\bar{z}}, \quad \rho_2(\gamma_2) = e^{\frac{z}{\gamma_2}+\gamma_2\bar{z}}. \tag{2.2.21}$$

Para o estado de peso máximo $|\lambda_0>$, tem-se (B.20) na forma

$$\begin{aligned}
< \lambda_0| \ldots e^{t(-2)}e^{t(-1)}Be^{(-\mu^2 z\bar{z}\hat{c})}|\lambda_0> &= < \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0> . \\
< \lambda_0|Be^{(-\mu^2 z\bar{z}\hat{c})}|\lambda_0> &= < \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0> . \\
< \lambda_0|e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H+\phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H+\nu\hat{c}}e^{(-\mu^2 z\bar{z}\hat{c})}|\lambda_0> &= < \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0> . \\
< \lambda_0|e^{(\nu-\mu^2 z\bar{z})\hat{c}}|\lambda_0> &= < \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0> . \\
e^{c(\nu-\mu^2 z\bar{z})} &= < \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0> . \\
\tau_0^{LR} &= < \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0> .
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

onde foram usadas a definição de B dada em (A.1), o fato que $\hat{c}$ comuta com todos os outros geradores e as relações de (A.2).

O elemento de normalização , do lado direito de (2.2.22), com o uso de (B.30) será

$$
\begin{aligned}
\tau_0^{LR} &= <\lambda_0|\lambda_0> +\rho_1(\gamma_1) <\lambda_0|\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0> +\rho_2(\gamma_2) <\lambda_0|\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0> \\
&\quad +\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2) <\lambda_0|\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0>= \\
&= 1+\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2) <\lambda_0|\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0>= \\
&= 1+\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2) <\lambda_0|\left(\sum_m (E_{2\rho}^{(m)}+a_+E_{\rho-\varepsilon}^{(m)})\gamma_1^{-m}\right)\left(\sum_n (E_{-2\rho}^{(n)}+a_-E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(n)})\gamma_2^{-n}\right)|\lambda_0>= \\
&= 1+\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\sum_{\substack{m>0\\n<0}} <\lambda_0|E_{2\rho}^{(m)}E_{-2\rho}^{(n)}+a_+a_-E_{\rho-\varepsilon}^{(m)}E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(n)}|\lambda_0>\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n}= \\
&= 1+\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\sum_{\substack{m>0\\n<0}} <\lambda_0|m\hat{c}\delta_{m+n,0}-a_+a_-m\hat{c}\delta_{m+n,0}|\lambda_0>\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n}= \\
&= 1+\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\sum_{m>0} cm(1-a_+a_-)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^m,
\end{aligned}
\tag{2.2.23}
$$

que leva a

$$
\tau_0^{LR} = 1+(1-b)\frac{\gamma_2\gamma_1}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}\rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2) \equiv 1+\Gamma\rho_1\rho_2, \tag{2.2.24}
$$

onde $b = a_+a_-$ e fez-se a consideração $\gamma_2 < \gamma_1$ para o cálculo do somatório. O valor de $c = 1$ está indicado em (B.31).

Observação 7 *Para deixar a notação mais compacta define-se os símbolos*

$$
\Gamma \equiv (1-b)\Gamma_0, \quad \Gamma_0 \equiv \frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}, \tag{2.2.25}
$$

e suprime-se os argumentos de ρ_1 e ρ_2.

As projeções de (B.19) nos estados $|\rho>$ e $|\varepsilon>$ levam a equações para ϕ_1 e ϕ_2, a saber

$$
\begin{aligned}
<\rho|\ldots e^{t(-1)}Be^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}|\rho> &= <\rho|T_0gT_0^{-1}|\rho>. \\
<\rho|e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H+\phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H+\nu\hat{c}}e^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}|\rho> &= <\rho|T_0gT_0^{-1}|\rho>. \\
\tau_0^{LR}<\rho|e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H+\phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H}|\rho> &= <\rho|T_0gT_0^{-1}|\rho>. \\
\tau_0^{LR}e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} &= <\rho|T_0gT_0^{-1}|\rho>.
\end{aligned}
\tag{2.2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
<\varepsilon|\ldots e^{t(-1)}Be^{-\mu^2 z\bar{z}c}|\varepsilon> &= <\varepsilon|T_0gT_0^{-1}|\varepsilon>. \\
<\varepsilon|e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H+\phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H+\nu\hat{c}}e^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}|\varepsilon> &= <\varepsilon|T_0gT_0^{-1}|\varepsilon>. \\
\tau_0^{LR}<\varepsilon|e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H+\phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H}|\varepsilon> &= <\varepsilon|T_0gT_0^{-1}|\varepsilon>. \\
-\tau_0^{LR}e^{\frac{(\phi_1-\phi_2)}{2}} &= <\varepsilon|T_0gT_0^{-1}|\varepsilon>.
\end{aligned}
\tag{2.2.27}
$$

Calculando o lado direito de (2.2.26)

$$
\begin{aligned}
&< \rho|T_0 g T_0^{-1}|\rho >= \\
&= \; < \rho|\rho > + \rho_1\rho_2 < \rho|\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\rho >= \\
&= \; 1 + \rho_1\rho_2 < \rho| \left(\sum_m (E_{2\rho}^{(m)} + a_+ E_{\rho-\varepsilon}^{(m)})\gamma_1^{-m} \right) \left(\sum_n (E_{-2\rho}^{(n)} + a_- E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(n)})\gamma_2^{-n} \right) |\rho >= \\
&= \; 1 + \rho_1\rho_2 \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} < \rho|E_{2\rho}^{(m)} E_{-2\rho}^{(n)} + b E_{\rho-\varepsilon}^{(m)} E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(n)}|\rho > \gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \; 1 + \rho_1\rho_2 \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} < \rho|\rho.H^{(m+n)} + m\hat{c} + b\left(\frac{\varepsilon-\rho}{2}.H^{(m+n)} - m\hat{c}\right)|\rho > \delta_{m+n,0}\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \; 1 + \rho_1\rho_2 \sum_{m>0} < \rho| \left(1 - \frac{b}{2}\right) \rho.H^{(0)} + (1-b)m\hat{c}|\rho > \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^m = \\
&= \; 1 + \rho_1\rho_2 \left(\frac{\gamma_1^2}{(\gamma_1-\gamma_2)^2} - b\frac{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}{2(\gamma_1-\gamma_2)^2} \right),
\end{aligned}
\tag{2.2.28}
$$

que leva a

$$
e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma_1\Gamma_0}{\gamma_2}\left(1 - b\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2\gamma_1}\right)\rho_1\rho_2}{\tau_0^{LR}}. \tag{2.2.29}
$$

Trabalhando com o lado direito de (2.2.27) tem-se

$$
\begin{aligned}
&< \varepsilon|T_0 g T_0^{-1}|\varepsilon >= \\
&= \; < \varepsilon|\varepsilon > + \rho_1\rho_2 < \varepsilon|\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\varepsilon >= \\
&= \; -1 + \rho_1\rho_2 < \varepsilon| \left(\sum_m (E_{2\rho}^{(m)} + a_+ E_{\rho-\varepsilon}^{(m)})\gamma_1^{-m} \right) \left(\sum_n (E_{-2\rho}^{(n)} + a_- E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(n)})\gamma_2^{-n} \right) |\varepsilon >= \\
&= \; -1 + \rho_1\rho_2 \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} < \varepsilon|E_{2\rho}^{(m)} E_{-2\rho}^{(n)} + b E_{\rho-\varepsilon}^{(m)} E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(n)}|\varepsilon > \gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \; -1 + \rho_1\rho_2 \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} < \varepsilon|m\hat{c}(1-b) + b\left(\frac{\varepsilon-\rho}{2}\right).H^{(m+n)}|\varepsilon > \delta_{m+n,0}\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \; -1 - \rho_1\rho_2 \sum_{m>0} \left(m(1-b) + \frac{b}{2} \right) \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^m = \\
&= \; -1 - \rho_1\rho_2 \left((1-b)\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1-\gamma_2)^2} + b\frac{\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)}{2(\gamma_1-\gamma_2)^2} \right) = \\
&= \; -1 - \rho_1\rho_2 \left(\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1-\gamma_2)^2} + b\frac{\gamma_1(\gamma_1-3\gamma_2)}{2(\gamma_1-\gamma_2)^2} \right),
\end{aligned}
\tag{2.2.30}
$$

que permite escrever

$$
e^{\frac{\phi_1-\phi_2}{2}} = \frac{1 + \Gamma_0\rho_1\rho_2 + b\frac{(\gamma_1-3\gamma_2)\Gamma_0}{2\gamma_2}\rho_1\rho_2}{1 + \Gamma_0\rho_1\rho_2 + b\Gamma_0\rho_1\rho_2} = 1 - \frac{b(\gamma_2-\gamma_1)\Gamma_0\rho_1\rho_2}{2\gamma_2(1+\Gamma_0\rho_1\rho_2)}. \tag{2.2.31}
$$

O uso de operadores $\hat{O}$ específicos em (B.21) permite encontrar os elementos de matriz que definem as soluções tipo sóliton para os campos do modelo.

a) Aplicando-se o operador $E^{(0)}_{-2\rho}$ pela direita de (B.20) tem-se

$$< \rho|Be^{-\mu^2 z\bar{z}c}E^{(0)}_{-2\rho}|\rho >=< \rho|T_0 g T_0^{-1}E^{(0)}_{-2\rho}|\rho >, \tag{2.2.32}$$

que permite determinar o campo ψ.

O lado esquerdo de (2.2.32) é desenvolvido através da expansão em séries das exponenciais que compõem B. Há um truncamento das séries relativas aos operadores de step ($E_{\pm 2\rho}$, $E_{\pm\rho\pm\varepsilon}$) que compõem B, pois eles são nilpotentes. Da multiplicação dessas séries resulta

$$\begin{aligned}
\tau_0^{LR} < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}(1+\tilde{g}_2E^{(0)}_{\rho-\varepsilon})(1+\tilde{g}_1E^{(0)}_{\rho+\varepsilon})(1+\tilde{\psi}E^{(0)}_{2\rho})E^{(0)}_{-2\rho}|\rho > &= \\
= \tau_0^{LR} < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}(\tilde{\psi}E^{(0)}_{2\rho}+\tilde{g}_2\tilde{g}_1E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}E^{(0)}_{\rho+\varepsilon})E^{(0)}_{-2\rho}|\rho > &= \\
= \tau_0^{LR} < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}(\tilde{\psi}E^{(0)}_{2\rho}E^{(0)}_{-2\rho}+\tilde{g}_2\tilde{g}_1E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}E^{(0)}_{-2\rho})|\rho > &= \\
= \tau_0^{LR}\left(\tilde{\psi}+\frac{\tilde{g}_2\tilde{g}_1}{2}\right) < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}|\rho > &= \\
= \tau_0^{LR}\left(\tilde{\psi}+\frac{\tilde{g}_2\tilde{g}_1}{2}\right)e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} &= \\
= \tau_0^{LR}\left(\psi+\frac{g_2g_1}{2}\right). &
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Observe que na última linha foi usada a transformação (2.1.1) que redefine os campos "tilde" em termos dos campos ϕ.

O lado direito de (2.2.32) com a aplicação de (B.30) evolui para uma expressão na qual os únicos termos não nulos são os proporcionais à $E^{(0)}_{+2\rho}E^{(0)}_{-2\rho}$, sendo assim o lado direito de (2.2.32) ficará

$$\begin{aligned}
&< \rho|\rho_1\mathcal{F}_1(\gamma_1)E^{(0)}_{-2\rho}|\rho >= \\
&= \rho_1 < \rho|\left(\sum_n(E^{(n)}_{\pm 2\rho}+a_\pm E^{(n)}_{\pm(\rho-\varepsilon)})\gamma^{-n}\right)E^{(0)}_{-2\rho}|\rho >= \\
&= \rho_1 < \rho|\left(\sum_n E^{(n)}_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}\right)E^{(0)}_{-2\rho}|\rho >= \\
&= \rho_1\sum_n < \rho|E^{(n)}_{\pm 2\rho}E^{(0)}_{-2\rho}|\rho > \gamma^{-n} = \\
&= \rho_1\sum_n < \rho|E^{(0)}_{-2\rho}E^{(n)}_{\pm 2\rho}+\rho.H^{(n)}+n\hat{c}\delta_{n,0}|\rho > \gamma^{-n} = \\
&= \rho_1\sum_n < \rho|\rho.H^{(n)}+n\hat{c}|\rho > \delta_{n,0}\gamma^{-n} = \\
&= \rho_1\sum_n(< \rho|\rho > +nc < \rho|\rho >)\delta_{n,0}\gamma^{-n} = \\
&= \rho_1.
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Então, com o uso de (2.2.24),(2.2.33),(2.2.34) pode-se escrever a relação

$$\psi + \frac{g_2 g_1}{2} = \frac{\rho_1}{\tau_0^{LR}}, \tag{2.2.35}$$

onde os campos g_1 e g_2 ainda estão por determinar.

b) Aplicando-se o operador $E^{(0)}_{+2\rho}$ pela esquerda de (B.20) e seguindo o mesmo procedimento mostrado anteriormente, chega-se a uma expressão para o campo χ em conjunto com f_1, f_2, ainda indeterminados.

$$\chi + \frac{f_1 f_2}{2} = \frac{\rho_2}{\tau_0^{LR}}. \tag{2.2.36}$$

c) Aplicando-se o operador $E^{(0)}_{+\varepsilon-\rho}$ pela direita de (B.20) é possível encontrar uma expressão para o campo g_2.

$$< \rho|Be^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}} E^{(0)}_{+\varepsilon-\rho}|\rho > = < \rho|T_0 g T_0^{-1} E^{(0)}_{+\varepsilon-\rho}|\rho > . \tag{2.2.37}$$

O lado esquerdo de (2.2.37) resulta

$$\begin{aligned}
\tau_0^{LR} < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1 + \frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}(1+\tilde{g}_2 E^{(0)}_{\rho-\varepsilon})(1+\tilde{g}_1 E^{(0)}_{\rho+\varepsilon})(1+\tilde{\psi} E^{(0)}_{2\rho}) E^{(0)}_{+\varepsilon-\rho}|\rho > &= \\
= \tau_0^{LR}\tilde{g}_2 < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1 + \frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2} E^{(0)}_{\rho-\varepsilon} E^{(0)}_{-\rho+\varepsilon}|\rho > &= \\
= \tau_0^{LR}\tilde{g}_2 < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1 + \frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}\left(-\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H|\rho > &= \\
= -\frac{\tau_0^{LR}}{2}\tilde{g}_2 e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} &= \\
= -\frac{\tau_0^{LR}}{2} g_2 e^{\frac{\phi_2}{2}}. &
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

O lado direito de (2.2.37) tem por termo não nulo aquele proporcional à $E^{(m)}_{+\rho-\varepsilon} E^{(0)}_{-\rho+\varepsilon}$,

$$\begin{aligned}
&= \rho_1 a_+ \sum_m < \rho|E^{(m)}_{\rho-\varepsilon} E^{(0)}_{-\rho+\varepsilon}|\rho > \gamma_1^{-m} = \\
&= \rho_1 a_+ \sum_m < \rho|\left(-\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H^{(m)}\delta_{m,0}|\rho > \gamma_1^{-m} = \\
&= -\frac{a_+}{2}\rho_1.
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

A solução para o campo g_2 vem da comparação entre (2.2.38) e (2.2.39)

$$g_2 = \frac{a_+ \rho_1 e^{-\frac{\phi_2}{2}}}{\tau_0^{LR}}. \tag{2.2.40}$$

d) Aplicando-se o operador $E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}$ pela esquerda de (B.20) para encontrar a solução para o campo f_2.

$$< \rho|E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}Be^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}|\rho >=< \rho|E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}T_0 g T_0^{-1}|\rho > . \tag{2.2.41}$$

No lado direito de (2.2.41) tem-se por termo não nulo aquele proporcional à $E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}E^{(n)}_{-\rho+\varepsilon}$, ou seja

$$\begin{aligned} &= \rho_2 a_- \sum_n < \rho|E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}E^{(n)}_{-\rho+\varepsilon}|\rho > \gamma_2^{-n} = \\ &= \rho_2 a_- \sum_n < \rho| \left(-\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H^{(n)}\delta_{n,0}|\rho > \gamma_2^{-n} = \\ &= -\frac{a_-}{2}\rho_2. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

O lado esquerdo de (2.2.41) resulta

$$\begin{aligned} \tau_0^{LR} < \rho|E^{(0)}_{-\varepsilon+\rho}(1+\tilde{\chi}E^{(0)}_{-2\rho})(1+\tilde{f}_1E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon})(1+\tilde{f}_2E^{(0)}_{-\rho+\varepsilon})e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}|\rho > &= \\ = \tau_0^{LR}\tilde{f}_2 e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}} < \rho|E^{(0)}_{\rho-\varepsilon}E^{(0)}_{-\rho+\varepsilon}|\rho > &= \\ = \tau_0^{LR}\tilde{f}_e e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}} < \rho| \left(-\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H|\rho > &= \\ = -\frac{\tau_0^{LR}}{2}\tilde{f}_2 e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} &= \\ = -\frac{\tau_0^{LR}}{2}f_2 e^{\frac{\phi_2}{2}} \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

Comparando (2.2.42) e (2.2.43) a solução encontrada para o campo f_2 é

$$f_2 = \frac{a_-\rho_2 e^{-\frac{\phi_2}{2}}}{\tau_0^{LR}}. \tag{2.2.44}$$

e) Aplicando-se o operador $E^{(0)}_{-\varepsilon-\rho}$ pela direita de (B.20) encontra-se uma expressão para o campo g_1.

$$< \rho|Be^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}E^{(0)}_{-\varepsilon-\rho}|\rho >=< \rho|T_0 g T_0^{-1}E^{(0)}_{-\varepsilon-\rho}|\rho > . \tag{2.2.45}$$

O lado esquerdo de (2.2.45) resulta

$$\begin{aligned} \tau_0^{LR} < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}(1+\tilde{g}_2E^{(0)}_{\rho-\varepsilon})(1+\tilde{g}_1E^{(0)}_{\rho+\varepsilon})(1+\tilde{\psi}E^{(0)}_{2\rho})E^{(0)}_{-\varepsilon-\rho}|\rho > &= \\ = \tau_0^{LR}\tilde{g}_1 < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon}|\rho > &= \\ = \tau_0^{LR}\tilde{g}_1 < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H|\rho > &= \\ = \frac{\tau_0^{LR}}{2}\tilde{g}_1 e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} &= \\ = \frac{\tau_0^{LR}}{2}g_1 e^{\frac{\phi_1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

O lado direito de (2.2.45), com a aplicação de (B.30), tem por termo não nulo apenas aquele proporcional à $E^{(n)}_{+2\rho}E^{(m)}_{-\rho+\varepsilon}E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon}$. Substituindo as expressões das autofunções no lado direito de (2.2.45), tem-se

$$
\begin{aligned}
&= < \rho|\rho_1\rho_2(\sum_m E^{(m)}_{+2\rho}\gamma_1^{-m})(a_-\sum_n E^{(n)}_{-\rho+\varepsilon}\gamma_2^{-n})E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon}|\rho >= \\
&= \rho_1\rho_2 a_-\sum_{m,n} < \rho|E^{(m)}_{+2\rho}E^{(n)}_{-\rho+\varepsilon}E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon}|\rho > \gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \rho_1\rho_2 a_-\sum_{m\geq 0,n<0} < \rho|E^{(m+n)}_{\rho+\varepsilon}E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon}|\rho > \gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \rho_1\rho_2 a_-\sum_{m\geq 0,n<0} < \rho|\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(m+n)} + (m+n)\hat{c}|\rho > \delta_{m+n,0}\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \rho_1\rho_2\frac{a_-}{2}\sum_{m\geq 0,n<0} < \rho|\rho > \delta_{m+n,0}\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \rho_1\rho_2\frac{a_-}{2}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^m = \\
&= \rho_1\rho_2\frac{a_-}{2}\frac{\gamma_1}{(\gamma_1-\gamma_2)}. \qquad (2.2.47)
\end{aligned}
$$

A expressão para o campo g_1 é

$$
g_1 = \frac{a_-\gamma_1 e^{-\frac{\phi_1}{2}}}{\tau_0^{LR}(\gamma_1-\gamma_2)}\rho_1\rho_2. \qquad (2.2.48)
$$

f) Aplicando-se o operador $E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}$ pela esquerda de (B.20) pode-se escrever o elemento de matriz

$$
< \rho|E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}Be^{-\mu^2 z\bar{z}\hat{c}}|\rho >=< \rho|E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}T_0 g T_0^{-1}|\rho >, \qquad (2.2.49)
$$

para encontrar uma expressão para o campo f_1.
O lado direito de (2.2.49), com a aplicação de (B.30), tem por termo não nulo apenas aquele proporcional à $E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}E^{(n)}_{\rho-\varepsilon}E^{(m)}_{-2\rho}$,

$$
\begin{aligned}
&= \rho_1\rho_2\frac{a_+}{2}\sum_{m\geq 0,n<0} < \rho|\rho > \delta_{m+n,0}\gamma_1^{-m}\gamma_2^{-n} = \\
&= \rho_1\rho_2\frac{a_+}{2}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^m = \\
&= \rho_1\rho_2\frac{a_+}{2}\frac{\gamma_1}{(\gamma_1-\gamma_2)}. \qquad (2.2.50)
\end{aligned}
$$

O lado esquerdo de (2.2.49) resulta

$$\begin{aligned}
\tau_0^{LR} < \rho|E^{(0)}_{\varepsilon+\rho}(1+\tilde{\psi}E^{(0)}_{-2\rho})(1+\tilde{f}_1E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon})(1+\tilde{f}_2E^{(0)}_{-\rho+\varepsilon})e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}\phi_1.H+\frac{\rho-\varepsilon}{2}\phi_2.H}|\rho> &= \\
= \tau_0^{LR}\tilde{f}_1 < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}E^{(0)}_{\rho+\varepsilon}E^{(0)}_{-\rho-\varepsilon}|\rho> &= \\
= \tau_0^{LR}\tilde{f}_1 < \rho|e^{\frac{\rho+\varepsilon}{2}.H\phi_1+\frac{\rho-\varepsilon}{2}.H\phi_2}\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H|\rho> &= \\
= \frac{\tau_0^{LR}}{2}\tilde{f}_1e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} &= \\
= \frac{\tau_0^{LR}}{2}f_1e^{\frac{\phi_1}{2}}. \quad (2.2.51)
\end{aligned}$$

A expressão para o campo f_1 é, comparando (2.2.50) com (2.2.51):

$$f_1 = \frac{a_+\gamma_1e^{-\frac{\phi_1}{2}}}{\tau_0^{LR}(\gamma_1-\gamma_2)}\rho_1\rho_2. \quad (2.2.52)$$

Encontradas as expressões para os campos fermiônicos, pode-se retornar para (2.2.35), (2.2.36) e determinar ψ e χ:

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{\rho_1}{\tau_0^{LR}} - \frac{g_2g_1}{2} = \\
&= \frac{\rho_1}{\tau_0^{LR}} - \frac{a_+a_-\gamma_1\rho_1\rho_1\rho_2}{2(\gamma_1-\gamma_2)(\tau_0^{LR})^2}e^{-\frac{(\phi_1+\phi_2)}{2}} = \\
&= \frac{\rho_1}{\tau_0^{LR}}\left(1-\frac{b\gamma_1\rho_1\rho_2}{2(\gamma_1-\gamma_2)\left[1+\frac{\gamma_1\Gamma_0}{\gamma_2}\left(1-b\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2\gamma_1}\right)\rho_1\rho_2\right]}\right) = \\
&= \frac{\rho_1}{\tau_0^{LR}}\left(1-\frac{b\gamma_1\rho_1\rho_2}{2(\gamma_1-\gamma_2)\left[1+\frac{\gamma_1\Gamma_0}{\gamma_2}\rho_1\rho_2\right]}\right), \quad (2.2.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{\rho_2}{\tau_0^{LR}} - \frac{f_1f_2}{2} = \\
&= \frac{\rho_2}{\tau_0^{LR}} - \frac{a_+a_-\gamma_1\rho_1\rho_2\rho_2}{2(\gamma_1-\gamma_2)(\tau_0^{LR})^2}e^{-\frac{(\phi_1+\phi_2)}{2}} = \\
&= \frac{\rho_2}{\tau_0^{LR}}\left(1-\frac{b\gamma_1\rho_1\rho_2}{2(\gamma_1-\gamma_2)\left[1+\frac{\gamma_1\Gamma_0}{\gamma_2}\left(1-b\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2\gamma_1}\right)\rho_1\rho_2\right]}\right) = \\
&= \frac{\rho_2}{\tau_0^{LR}}\left(1-\frac{b\gamma_1\rho_1\rho_2}{2(\gamma_1-\gamma_2)\left[1+\frac{\gamma_1\Gamma_0}{\gamma_2}\rho_1\rho_2\right]}\right). \quad (2.2.54)
\end{aligned}$$

O vínculo de (2.1.2)-(2.1.5)

Para a construção das equações de movimento do super Lund-Regge foi proposta, como vínculo, a anulação das correntes nas direções de $E_{\pm(\rho+\varepsilon)}$. Há uma conseqüência desse vínculo implícito nas equações (2.1.2)-(2.1.5).
Escolhendo uma delas, por exemplo (2.1.4),

$$\bar{\partial} f_1 = \chi \bar{\partial} g_2 + f_1 \frac{\bar{\partial}\phi_2}{2} - g_2 \chi \frac{\bar{\partial}\phi_1}{2}.$$

pode-se derivar a expressão de f_1 dada em (2.2.52) no lado esquerdo de (2.1.4)

$$-f_1 \frac{\bar{\partial}\phi_1}{2} + f_1(\gamma_2 - \gamma_1) - f_1 \frac{\Gamma(\gamma_2 - \gamma_1)\rho_1\rho_2}{\tau_0^{LR}} = \chi \bar{\partial} g_2 + f_1 \frac{\bar{\partial}\phi_2}{2} - g_2 \chi \frac{\bar{\partial}\phi_1}{2}. \quad (2.2.55)$$

Substituindo as soluções solitônicas dos campos na expressão acima chega-se a

$$\frac{a_+ \gamma_1 \rho_1 \rho_2 e^{\phi_1}}{1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma \rho_1 \rho_2} = \frac{a_+ \gamma_1 \rho_1 \rho_2 e^{\phi_2}}{1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma \rho_1 \rho_2}. \quad (2.2.56)$$

Tal igualdade indica que, a menos de termos em a_+, tem-se $\phi_1 = \phi_2$ como já havia sido sugerido na observação 6, página 18.
Sendo os campos ϕ de caráter bosônico, os termos não-visíveis de (2.2.56) devem ser proporcionais não só a a_+, mas a $b = a_+ a_-$. Assim, pode-se escrever

$$\phi_2 = \phi_1 + b\phi_b. \quad (2.2.57)$$

Pode-se encontrar uma expressão para ϕ_b aplicando (2.2.57) em (2.2.31), que resulta

$$\begin{aligned} e^{-\frac{b\phi_b}{2}} &= 1 - \frac{b(\gamma_2 - \gamma_1)\Gamma_0 \rho_1 \rho_2}{2\gamma_2(1 + \Gamma_0 \rho_1 \rho_2)}. \\ 1 - \frac{b\phi_b}{2} &= 1 - \frac{b(\gamma_2 - \gamma_1)\Gamma_0 \rho_1 \rho_2}{2\gamma_2(1 + \Gamma_0 \rho_1 \rho_2)}. \\ \phi_b &= \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)\Gamma_0 \rho_1 \rho_2}{\gamma_2(1 + \Gamma_0 \rho_1 \rho_2)}. \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

Capítulo 3

Modelo não-relativístico de OSP(2,2)

Há uma classe de equações solitônicas em duas dimensões que pertencem a chamada hierarquia cKP (tipo Kadomtsev-Petviashvili vinculada). Os modelos dessa hierarquia permitem uma descrição unificada de equações tais como: $mKdV$ (Korteveg-de Vries modificado), modelo $AKNS$ (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur), Yajima-Oikawa [15], equações $GNLS$ (equações do tipo Schrödinger não-linear generalizadas) [16] do $AKNS$ e equações tipo Boussinesq acopladas, entre outras.
Nesse capítulo, o formalismo algébrico da construção da equação de curvatura nula como condição para a integrabilidade será estendido a fim de englobar o modelo $AKNS$ da hierarquia cKP. Dessa construção serão encontradas equações não-relativísticas, ou do tipo Schrödinger não-linear generalizadas, para a álgebra $OSP(2,2)$. A supersimetria dessas equações será verificada bem como serão calculadas suas soluções tipo sóliton.

3.1 Equações de curvatura nula em tempos indexados

A hierarquia cKP pode ser construida [1] em termos da álgebra de grau zero $\mathcal{G}_0$ decomposta em kernel e imagem sob a ação adjunta* de $\epsilon_+ \in \mathcal{G}_{+1}$

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{K} = Im(\text{ad } \epsilon_+) \oplus Ker(\text{ad } \epsilon_+). \tag{3.1.1}$$

onde $\mathcal{K}$ é composto por todos os geradores de $\mathcal{G}$ que comutam com ϵ_+ enquanto $\mathcal{M}$ é seu complemento ortogonal.
Da identidade de Jacobi (1.1.2) pode-se mostrar que o coset $\mathcal{G}/\mathcal{K}$

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \in \mathcal{K}, \quad [\mathcal{M}, \mathcal{K}] \in \mathcal{M}. \tag{3.1.2}$$

As equações de movimento da hierarquia são obtidas a partir da equação de curvatura nula (1.3.43) quando reescrita sob a ótica de tempo indexado (multitime)

$$\partial_{t(n)}\bar{A} - \bar{\partial}A_{t(n)} - [A_{t(n)}, \bar{A}] = 0, \tag{3.1.3}$$

*Quanto a ação adjunta de ϵ_+, quer-se indicar: ad $\epsilon_+ \equiv [\epsilon_+, \cdot]$.

onde o par de Lax tem a forma

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}_0 + \epsilon_+, & \bar{A}_0 \in Im(\text{ad } \epsilon_+), \\ A_{t(n)} &= \begin{cases} D_n^{(n)} + D_n^{(n-1)} + \cdots + D_n^{(1)} + D_n^{(0)}, & n > 0, \\ D_{-n}^{(n)} + D_{-n}^{(n+1)} + \cdots + D_{-n}^{(-1)}, & n < 0. \end{cases} & D_n^{(i)} \in \mathcal{G}_i \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Com o uso de $\bar{A}$ e $A_{t(n)}$ pode-se decompor (3.1.3) grau a grau em um sistema de equações. No caso de tempo positivamente indexado, $n > 0$, tem-se um sistema de equações, colocadas em ordem decrescente dos graus:

$$\begin{aligned} [D_n^{(n)}, \epsilon_+] &= 0. \\ -\bar{\partial} D_n^{(n)} - [D_n^{(n)}, \bar{A}_0] - [D_n^{(n-1)}, \epsilon_+] &= 0. \\ -\bar{\partial} D_n^{(n-1)} - [D_n^{(n-1)}, \bar{A}_0] - [D_n^{(n-2)}, \epsilon_+] &= 0. \\ &\vdots \\ -\bar{\partial} D_n^{(1)} - [D_n^{(1)}, \bar{A}_0] - [D_n^{(n-1)}, \epsilon_+] &= 0. \\ \partial_{t(n)} \bar{A}_0 - \bar{\partial} D_n^{(0)} - [D_n^{(0)}, \bar{A}_0] &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Resolve-se esse sistema de equações algébricas (3.1.5) assumindo que $D_n^{(n)} \in Ker(\text{ad } \epsilon_+)$ e então sucessivamente substituindo o resultado prévio na equação subseqüente. Isso até a equação de grau zero, que determina as equações de movimento dos campos fisicos que estão em $\bar{A}_0$.

Para o tempo negativamente indexado, $n < 0$, aqui também mostrado em ordem decrescente, a equação de curvatura nula (3.1.3) é decomposta no sistema de equações [17],[18]

$$\begin{aligned} \partial_{t(n)} \bar{A}_0 - [D_{-n}^{(-1)}, \epsilon_+] &= 0. \\ -\bar{\partial} D_{-n}^{(-1)} - [D_{-n}^{(-1)}, \bar{A}_0] - [D_{-n}^{(-2)}, \epsilon_+] &= 0. \\ &\vdots \\ -\bar{\partial} D_{-n}^{(n+2)} - [D_{-n}^{(n+2)}, \bar{A}_0] - [D_{-n}^{(n+1)}, \epsilon_+] &= 0. \\ [D_{-n}^{(n)}, \epsilon_+] &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

mas nesse caso a seqüência de substituições , partindo de $D_{-n}^{(n)} \in Ker(\text{ad } \epsilon_+)$ não funcionará a contento (exceto para $n = -1$, a ser tratado no próximo parágrafo) porque esse é um sistema de equações integrais, as quais levam ao aparecimento de soluções com caráter não local.

No caso de $n = -1$ tem-se $A_{t(-1)} = D_1^{(-1)}$ e apenas a primeira equação do sistema (3.1.6) existe,

$$\partial_{t(-1)} \bar{A}_0 - [D_1^{(-1)}, \epsilon_+] = 0. \tag{3.1.7}$$

Uma solução geral, e exata, é então dada por $D_1^{(-1)} = -B\epsilon_- B^{-1}$ que permite identificar (3.1.3) com (1.3.38) ao se escrever

$$\partial_{t(-1)} \equiv \partial, \quad \bar{A}_0 \equiv \bar{\partial} B B^{-1}. \tag{3.1.8}$$

Este foi o caso no desenvolvimento das equações de movimento do modelo de Lund-Regge (seção 1.3) e do super Lund-Regge (capítulo 2). Em outras palavras, a equação de curvatura nula multitime com $n = -1$ descreve uma classe de modelos integráveis relativísticos, os modelos de Toda não abelianos.

3.2 As equações de movimento do modelo em $t(2)$

A mesma álgebra $OSP(2,2)$ será aplicada nessa seção , com a equação (3.1.3) escrita no tempo indexado em dois ($t(2)$).

$$\partial_{t(2)} \bar{A} - \bar{\partial} A_{t(2)} - [A_{t(2)}, \bar{A}] = 0. \tag{3.2.9}$$

Para o elemento $A_{t(2)}$ tem-se

$$A_{t(2)} = D_2^{(2)} + D_2^{(1)} + D_2^{(0)}. \tag{3.2.10}$$

O ponto inicial dessa construção é a escolha de qual ϵ_+ fará a decomposição da álgebra em kernel e imagem em (3.1.1). Será usado o mesmo gerador que foi usado no capítulo 2 para o Lund-Regge (2.2.19),

$$\epsilon^+ = \lambda \left(\frac{\rho + \varepsilon}{2} \right) .H.$$

O sistema de coordenadas do espaço-tempo será considerado tal que

$$\bar{\partial} \equiv \partial_x, \quad \partial \equiv \partial_t. \tag{3.2.11}$$

Procurando os elementos de $\bar{A}_0 \in Im(\text{ad } \epsilon_+)$ em (A.3), encontra-se

$$\bar{A}_0 = b_{1A} E_{2\rho}^{(0)} + b_{2A} E_{-2\rho}^{(0)} + f_{1A} E_{-(\rho-\varepsilon)}^{(0)} + f_{2A} E_{\rho-\varepsilon}^{(0)}, \tag{3.2.12}$$

onde $b_{1A}, b_{2A}, f_{1A}, f_{2A}$ são campos que parametrizam os geradores de $Im(\text{ad } \epsilon_+)$. Nessa dissertação esses campos também serão chamados de variáveis do $AKNS$. Aplicado o elemento de Lax (3.2.10) no sistema (3.1.5) esse fica decomposto em

$$\begin{aligned} [D_2^{(2)}, \epsilon_+] &= 0. \\ -\partial D_2^{(2)} - [D_2^{(2)}, \bar{A}_0] - [D_2^{(1)}, \epsilon_+] &= 0. \\ -\partial D_2^{(1)} - [D_2^{(1)}, \bar{A}_0] - [D_2^{(0)}, \epsilon_+] &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Fixando $D_2^{(2)} = \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(2)}$ e resolvendo a seqüência de equações em (3.2.13) o par de Lax (3.1.4) será dado por

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \bar{A}_0 + \lambda\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(0)} = \\ &= b_{1A}E^{(0)}_{2\rho} + b_{2A}E^{(0)}_{-2\rho} + f_{1A}E^{(0)}_{-(\rho-\varepsilon)} + f_{2A}E^{(0)}_{\rho-\varepsilon} + \lambda\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(0)}, \quad (3.2.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{t(2)} &= \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(2)} + b_{1A}E^{(1)}_{2\rho} + b_{2A}E^{(1)}_{-2\rho} + f_{1A}E^{(1)}_{-(\rho-\varepsilon)} + f_{2A}E^{(1)}_{\rho-\varepsilon} + \partial_x b_{1A}E^{(0)}_{2\rho} - \\ &-\partial_x b_{2A}E^{(0)}_{-2\rho} - \partial_x f_{1A}F^{(0)}_{-(\rho-\varepsilon)} + \partial_x f_{2A}F^{(0)}_{\rho-\varepsilon} - b_{1A}f_{1A}F^{(0)}_{\rho+\varepsilon} - b_{2A}f_{2A}F^{(0)}_{-(\rho+\varepsilon)} + \\ &+f_{1A}f_{2A}\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H^{(0)} - b_{1A}b_{2A}\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(0)}. \quad (3.2.15)\end{aligned}$$

e as equações de movimento encontradas no grau zero $D_2^{(0)}$ serão

$$-\partial_{xx}b_{1A} + \partial_t b_{1A} + 2b_{1A}(b_{1A}b_{2A} + f_{1A}f_{2A}) = 0, \quad (3.2.16)$$

$$\partial_{xx}b_{2A} + \partial_t b_{2A} - 2b_{2A}(b_{1A}b_{2A} + f_{1A}f_{2A}) = 0, \quad (3.2.17)$$

$$\partial_{xx}f_{1A} + \partial_t f_{1A} - 2f_{1A}(b_{1A}b_{2A}) = 0, \quad (3.2.18)$$

$$\partial_{xx}f_{2A} - \partial_t f_{2A} - 2f_{2A}(b_{1A}b_{2A}) = 0. \quad (3.2.19)$$

Observação 8 *As equações de movimento do AKNS (3.2.16)-(3.2.19) são invariantes pela transformação simultânea de sinais dos campos bosônicos*

$$b_{1A} \to -b_{1A} \quad e \quad b_{2A} \to -b_{2A}, \quad (3.2.20)$$

ou dos campos fermiônicos

$$f_{1A} \to -f_{1A} \quad e \quad f_{2A} \to -f_{2A}. \quad (3.2.21)$$

3.2.1 Verificando a supersimetria das equações do $AKNS$

A supersimetria das equações (3.2.16)-(3.2.19) foi verificada propondo o conjunto de transformações

$$\begin{aligned}\delta b_{1A} &= \epsilon_1 f_{2A}, \\ \delta b_{2A} &= \epsilon_2 f_{1A}, \\ \delta f_{1A} &= \epsilon_3 b_{2A}, \\ \delta f_{2A} &= \epsilon_4 b_{1A}.\end{aligned} \quad (3.2.22)$$

no qual ϵ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ são constantes grasmanianas a serem determinadas e pelo qual a equação (3.2.16) transforma-se em

$$-\partial_{xx}f_{2A}\epsilon_1 + \partial_t f_{2A}\epsilon_1 + 2\epsilon_1 f_{2A}b_{1A}b_{2A} + 2b_{1A}(\epsilon_1 f_{2A}b_{2A} + b_{1A}\epsilon_2 f_{1A} + \epsilon_3 b_{2A}f_{2A} + f_{1A}\epsilon_4 b_{1A}) = 0.$$

Comparando com a equação (3.2.19), tem-se a igualdade

$$\epsilon_1 f_{2A} b_{2A} + b_{1A}\epsilon_2 f_{1A} + \epsilon_3 b_{2A} f_{2A} + f_{1A}\epsilon_4 b_{1A} = 0,$$

que é verdadeira para

$$\epsilon_1 = -\epsilon_3 \quad e \quad \epsilon_2 = \epsilon_4,$$

ou seja, pode-se escrever (3.2.22) em termos de dois parâmetros

$$\begin{aligned} \delta b_{1A} &= \epsilon_1 f_{2A}, \\ \delta b_{2A} &= \epsilon_2 f_{1A}, \\ \delta f_{1A} &= -\epsilon_1 b_{2A}, \\ \delta f_{2A} &= \epsilon_2 b_{1A}. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Mediante a transformação (3.2.23) pode-se ler (3.2.19) transformada para

$$-\epsilon_2[-\partial_{xx} b_{1A} + \partial_t b_{1A} + 2b_{1A}(b_{1A} b_{2A} + f_{1A} f_{2A})] = 0$$

Substituindo (3.2.23) na equação (3.2.17), tem-se

$$\partial_{xx}\epsilon_2 f_{1A} + \partial_t \epsilon_2 f_{1A} - 2\epsilon_2 f_{1A}(b_{1A} b_{2A} + f_{1A} f_{2A}) - 2b_{2A}(\epsilon_1 f_{2A} b_{2A} + b_{1A}\epsilon_2 f_{1A} - \epsilon_1 b_{2A} f_{2A} + f_{1A}\epsilon_2 b_{1A}) = 0,$$

que é

$$\epsilon_2[\partial_{xx} f_{1A} + \partial_t f_{1A} - 2f_{1A}(b_{1A} b_{2A})] = 0.$$

Substituindo agora (3.2.23) na equação (3.2.18), tem-se

$$-\partial_{xx}\epsilon_1 b_{2A} - \partial_t \epsilon_1 b_{2A} + 2\epsilon_1 b_{2A}(b_{1A} b_{2A}) - 2f_{1A}(\epsilon_1 f_{2A} b_{2A} + b_{1A}\epsilon_2 f_{1A}) = 0,$$

que pode ser escrita

$$-\epsilon_1[\partial_{xx} b_{2A} + \partial_t b_{2A} - 2b_{2A}(b_{1A} b_{2A} + f_{1A} f_{2A})] = 0.$$

sendo assim comprova-se que o sistema de equações (3.2.16)-(3.2.19) é invariante pelo conjunto de transformações de supersimetria (3.2.23).

3.3 Soluções tipo sóliton para as variáveis do $AKNS$

Como estamos com o tempo indexado em dois, o par de Lax para o vácuo será

$$\bar{A}_{vac} = \epsilon^+ = \lambda\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, \quad A_{vac} = \epsilon^- = \lambda^2\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H. \tag{3.3.24}$$

As autofunções são dadas em (B.27) e os autovalores, com $m = 2$, em (B.28). Aplicando-se (B.28) em (B.25), tem-se para o $AKNS$, levando em conta (3.2.11),

$$\rho_1'(\gamma_1) = e^{-\gamma_1^2 t - \gamma_1 x}, \quad \rho_2'(\gamma_2) = e^{\gamma_2^2 t + \gamma_2 x}. \tag{3.3.25}$$

onde escreveu-se ρ' para não confundir com o ρ de (2.2.21).
A relação (B.3) no grau zero, com $\bar{A}$ dado em (3.1.4) e Θ^- em (B.1), é

$$\bar{A}_0 = -[\epsilon^+, t(-1)], \tag{3.3.26}$$

com o gerador $t(-1)$, de Θ^-, escrito na forma

$$t(-1) = a_1 E^{(-1)}_{+2\rho} + a_2 E^{(-1)}_{-2\rho} + a_3 E^{(-1)}_{-(\rho-\varepsilon)} + a_4 E^{(-1)}_{\rho-\varepsilon} + a_5\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(-1)}, \tag{3.3.27}$$

onde a_i $(i = 1, \ldots, 5)$ são parâmetros a serem determinados. Por (3.3.26) pode-se escrever (3.3.27) identificando os a_i com os campos do $AKNS$

$$t(-1) = -b_{1A} E^{(-1)}_{+2\rho} + b_{2A} E^{(-1)}_{-2\rho} + f_{1A} E^{(-1)}_{-(\rho-\varepsilon)} - f_{2A} E^{(-1)}_{\rho-\varepsilon} - 2\partial\nu\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(-1)}. \tag{3.3.28}$$

Aplicando (3.3.28) em (B.20), para o estado de peso máximo $|\lambda_0>$, tem-se como em (2.2.22)

$$\begin{aligned} <\lambda_0| e^{b_{1A}E^{(-1)}_{+2\rho} - b_{2A}E^{(-1)}_{-2\rho} - f_{1A}E^{(-1)}_{-(\rho-\varepsilon)} + f_{2A}E^{(-1)}_{\rho-\varepsilon} + 2\partial_t\nu\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H^{(-1)}} B e^{-\mu^2 x t\hat{c}}|\lambda_0> = \\ = <\lambda_0| T_0 g T_0^{(-1)}|\lambda_0>, \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

e então será possível calcular as funções tau. Expandindo a exponencial de (3.3.29) e levando em consideração que os operadores que compõem (3.3.28) aniquilam $<\lambda_0|$, tem-se

$$\begin{aligned} <\lambda_0| B e^{-\mu^2 x t\hat{c}}|\lambda_0> &= <\lambda_0| T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0>. \\ <\lambda_0| e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H + \phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H + \nu\hat{c}} e^{-\mu^2 x t\hat{c}}|\lambda_0> &= <\lambda_0| T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0>. \\ \tau_0 \equiv e^{c(\nu - \mu^2 x t)} &= <\lambda_0| T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0>. \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

A escolha e aplicação de certos operadores em (3.3.29) permite isolar elementos de matriz que determinam as soluções solitônicas dos campos do $AKNS$.

As relações encontradas são

$$
\begin{aligned}
\tau_1 \equiv c\, b_{1A}\tau_0 &= \quad < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0 >, \\
\tau_2 \equiv c\, b_{2A}\tau_0 &= \quad - < \lambda_0|E^{(1)}_{+2\rho}T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0 >, \\
\tau_3 \equiv c\, f_{1A}\tau_0 &= \quad < \lambda_0|E^{(1)}_{\rho-\varepsilon}T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0 >, \\
\tau_4 \equiv c\, f_{2A}\tau_0 &= \quad < \lambda_0|E^{(1)}_{-(\rho-\varepsilon)}T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0 > .
\end{aligned}
\tag{3.3.31}
$$

O cálculo de $\tau_0 =< \lambda_0|T_0 g T_0^{-1}|\lambda_0 >$ com o uso de (B.30) leva a uma expressão equivalente àquela encontrada em (2.2.24),

$$
\begin{aligned}
\tau_0 &= 1 + \rho_1' < \lambda_0|\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 > + \rho_2' < \lambda_0|\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > \\
&\quad + \rho_1'\rho_2' < \lambda_0|\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 >= \\
&= 1 + \rho_1'\rho_2' \sum_{n>0} cn(1 - a_+a_-)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^n = \\
&= 1 + c(1-b)\frac{\gamma_2\gamma_1}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}\rho_1'\rho_2' \equiv 1 + \Gamma\rho_1'\rho_2'.
\end{aligned}
\tag{3.3.32}
$$

Observe-se que (3.3.32) é uma expressão que difere de (2.2.24) apenas nos expoentes das exponenciais ρ_1, ρ_2 e ρ_1', ρ_2'. O símbolo Γ é o mesmo de (2.2.24) e também foram desconsiderados os argumentos dos ρ' no lado direito de (3.3.32).
Continua-se os cálculos em (3.3.31), que determinam

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 > + \rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > + \\
&\quad + \rho_1'\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 >= \\
&= \rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 >= \\
&= \rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}\sum_n (E^{(n)}_{+2\rho} + a_+E^{(n)}_{+(\rho-\varepsilon)})\gamma_1^{-n}|\lambda_0 >= \\
&= \rho_1' \sum_n < \lambda_0|E^{(1)}_{-2\rho}E^{(n)}_{+2\rho}|\lambda_0 > \gamma_1^{-n} = \\
&= \rho_1' \sum_n < \lambda_0|\hat{c}\delta_{n+1,0}|\lambda_0 > \gamma_1^{-n} = \\
&= c\rho_1' \sum_n \delta_{n+1,0}\gamma_1^{-n} = \\
&= c\gamma_1\rho_1'.
\end{aligned}
\tag{3.3.33}
$$

De forma equivalente

$$
\begin{aligned}
\tau_2 &= -\rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{+2\rho}\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 > - \rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{+2\rho}\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > - \\
&\quad - \rho_1'\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{+2\rho}\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > \\
&= -\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{+2\rho}\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > \\
&= -c\gamma_2\rho_2'
\end{aligned}
\tag{3.3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &= \rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{\rho-\varepsilon}\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 > +\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{\rho-\varepsilon}\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > + \\
&\quad +\rho_1'\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{\rho-\varepsilon}\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 >= \\
&= \rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{\rho-\varepsilon}\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 >= \\
&= -ca_-\gamma_2\rho_2', \qquad (3.3.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_4 &= \rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{-(\rho-\varepsilon)}\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 > +\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{-(\rho-\varepsilon)}\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 > + \\
&\quad +\rho_1'\rho_2' < \lambda_0|E^{(1)}_{-(\rho-\varepsilon)}\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2)|\lambda_0 >= \\
&= \rho_1' < \lambda_0|E^{(1)}_{-(\rho-\varepsilon)}\mathcal{F}_1(\gamma_1)|\lambda_0 >= \\
&= ca_+\gamma_1\rho_1'. \qquad (3.3.36)
\end{aligned}
$$

Das relações (3.3.32)-(3.3.36) constrói-se as soluções tipo sóliton do modelo $AKNS$.

$$
b_{1A} = \frac{\gamma_1\rho_1'}{1+\Gamma\rho_1'\rho_2'}, \qquad (3.3.37)
$$

$$
b_{2A} = -\frac{\gamma_2\rho_2'}{1+\Gamma\rho_1'\rho_2'}, \qquad (3.3.38)
$$

$$
f_{1A} = -\frac{a_-\gamma_2\rho_2'}{1+\Gamma\rho_1'\rho_2'}, \qquad (3.3.39)
$$

$$
f_{2A} = \frac{a_+\gamma_1\rho_1'}{1+\Gamma\rho_1'\rho_2'}. \qquad (3.3.40)
$$

As soluções acima também foram verificadas usando o programa `aknssol.m` do software Mathematica, listado no apêndice B.

Capítulo 4

Correlação entre os modelos e conclusão

No capítulo 2 foram determinadas soluções solitônicas para o modelo $OSP(2,2)$ nas variáveis (campos) de Lund-Regge: ψ, χ, g_2 e f_2. No capítulo 3 foram determinadas soluções tipo sóliton para o modelo $OSP(2,2)$ nas variáveis do $AKNS$: b_{1A}, f_{1A}, b_{2A} e f_{2A}. Uma inspeção das correntes em (2.1.12) e (3.2.14), ou (3.2.12), indica uma correlação entre os campos dos dois modelos. Esta correlação também é sugerida em (3.1.8) uma vez que ambos modelos apresentam a mesma estrutura algébrica. Pretende-se fechar esse trabalho mostrando que é verdadeira a correlação

$$\bar{A}_0|_{AKNS} \stackrel{?}{=} \bar{\partial} B B^{-1}|_{sLR}. \tag{4.1.1}$$

pela comparação das soluções dos campos.
Explicitamente, pode-se escrever (4.1.1) como

$$f_{1A} \stackrel{?}{=} e^{-\frac{\phi_1}{2}} \left[\bar{\partial} f_2 + \frac{1}{2} f_2 \bar{\partial}\phi_1\right], \tag{4.1.2}$$

$$f_{2A} \stackrel{?}{=} e^{\frac{\phi_1}{2}} \left[\bar{\partial} g_2 - \frac{1}{2} g_2 \bar{\partial}\phi_1 + f_1(1+g_2 f_2)[\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi]\right], \tag{4.1.3}$$

$$b_{1A} \stackrel{?}{=} e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}(1+g_2 f_2)\left[\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi\right], \tag{4.1.4}$$

$$\begin{aligned} b_{2A} \stackrel{?}{=} e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} \Big[&\bar{\partial}\chi + \frac{1}{2}\chi(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2) - \chi f_2(\bar{\partial} g_2 - \frac{1}{2} g_2 \bar{\partial}\phi_1) - \\ &-\chi^2(1+g_2 f_2)[\bar{\partial}\psi - \frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2)\psi] + f_1(\bar{\partial} f_2 + \frac{1}{2} f_2 \bar{\partial}\phi_1)\Big]. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

A expressão do lado direito de (4.1.2) pode ser simplificada para um diferencial total na parte entre colchetes.

$$f_{1A} = e^{-\phi_1}\bar{\partial}\left[f_2 e^{\frac{\phi_1}{2}}\right]. \tag{4.1.6}$$

Ao se substituir as soluções encontradas no capítulo 2 para as variáveis de Lund-Regge (2.2.29), (2.2.44), etc... tem-se

$$
\begin{aligned}
f_{1A} &= \frac{(1+\Gamma\rho_1\rho_2)^2}{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)\left(1+(1-b\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_2})\Gamma\rho_1\rho_2\right)}\bar{\partial}\left[\frac{a_-\rho_2}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}\right] = \\
&= \frac{(1+\Gamma\rho_1\rho_2)^2}{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)\left(1+(1-b\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_2})\Gamma\rho_1\rho_2\right)}\left[-\frac{a_-\gamma_2\rho_2}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}-\frac{a_-\rho_2\Gamma(\gamma_1-\gamma_2)\rho_1\rho_2}{(1+\Gamma\rho_1\rho_2)^2}\right] = \\
&= -\frac{a_-}{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)(1+\Gamma\rho_1\rho_2)}\left[\gamma_2\rho_2(1+\Gamma\rho_1\rho_2)+\rho_2\Gamma(\gamma_1-\gamma_2)\rho_1\rho_2\right] = \\
&= -\frac{a_-\gamma_2\rho_2}{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)(1+\Gamma\rho_1\rho_2)}\left[1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right] = \\
&= -\frac{a_-\gamma_2\rho_2}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}. \qquad (4.1.7)
\end{aligned}
$$

Em (4.1.3), tem-se

$$
\begin{aligned}
f_{2A} &= e^{\phi_1}\bar{\partial}\left[g_2e^{-\frac{\phi_1}{2}}\right]+f_1e^{-\frac{\phi_1}{2}}b_{1A} = \\
&= \frac{\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)\left(1+(1-b\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_2})\Gamma\rho_1\rho_2\right)}{(1+\Gamma\rho_1\rho_2)^2}\bar{\partial}\left[\frac{a_+\rho_1}{1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2}\right]+ \\
&\quad +\frac{a_+\gamma_1\rho_1\rho_2}{(\gamma_1-\gamma_2)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}\frac{\gamma_1\rho_1}{(1+\Gamma\rho_1\rho_2)} = \\
&= \frac{a_+\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}\left[\frac{\gamma_1\rho_1}{1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2}-\frac{\gamma_1\rho_1\Gamma(\gamma_1-\gamma_2)\rho_1\rho_2}{\gamma_2\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)^2}\right]+ \\
&\quad +\frac{a_+\gamma_1^2\rho_1^2\rho_2}{(\gamma_1-\gamma_2)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)(1+\Gamma\rho_1\rho_2)} = \\
&= \frac{a_+}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}\left[\gamma_1\rho_1-\frac{\gamma_1\rho_1\Gamma(\gamma_1-\gamma_2)\rho_1\rho_2}{\gamma_2\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}+\frac{\gamma_1^2\rho_1^2\rho_2}{(\gamma_1-\gamma_2)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}\right] = \\
&= \frac{a_+\gamma_1\rho_1}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}\left[1-\frac{\Gamma(\gamma_1-\gamma_2)\rho_1\rho_2}{\gamma_2\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}+\frac{\gamma_1\rho_1\rho_2}{(\gamma_1-\gamma_2)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}\right] = \\
&= \frac{a_+\gamma_1\rho_1}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}\left[1-\frac{\gamma_1\rho_1\rho_2}{(\gamma_1-\gamma_2)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}+\frac{\gamma_1\rho_1\rho_2}{(\gamma_1-\gamma_2)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Gamma\rho_1\rho_2\right)}\right] = \\
&= \frac{a_+\gamma_1\rho_1}{1+\Gamma\rho_1\rho_2}. \qquad (4.1.8)
\end{aligned}
$$

Observe que as soluções (4.1.7) e (4.1.8) tem a mesma forma funcional que (3.3.39) e (3.3.40), respectivamente.

Elas diferem apenas na definição dos ρ, no caso do $AKNS$ (ρ') em (2.2.21) e no modelo do super Lund-Regge (ρ) em (3.3.25).
Da relação

$$\rho' = e^{\pm\gamma^2 t \pm \gamma x} \longrightarrow \rho = e^{\pm\frac{z}{\gamma} \pm \gamma \bar{z}}. \tag{4.1.9}$$

percebe-se o mapeamento de um modelo no outro pela substituição das coordenadas do espaço-tempo

$$\gamma^2 t \longrightarrow \frac{z}{\gamma} \quad x \longrightarrow \bar{z}. \tag{4.1.10}$$

A correlação (4.1.10) já havia sido verificada na literatura [14] para o caso puramente bosônico.

Para (4.1.4) também pode ser feita uma simplificação para um diferencial total.

$$b_{1A} = e^{\phi_1+\phi_2}(1 + g_2 f_2)\bar{\partial}\left[\psi e^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}\right]. \tag{4.1.11}$$

Substituindo os valores dos campos do super Lund-Regge em (4.1.11), encontra-se

$$b_{1A} = -\frac{\gamma_1\rho_1}{1 + \Gamma\rho_1\rho_2}. \tag{4.1.12}$$

Comparando o valor encontrado em (4.1.12) com a solução do $AKNS$ (3.3.37) há uma diferença de sinal. Esse fato não é tão danoso se for lembrada a observação 8, da página 31: uma troca simultânea de sinal nas duas correntes bosônicas deixa as equações de movimento do modelo $AKNS$ invariantes.
Resta então calcular a última correlação para finalizar essa verificação.

A relação (4.1.5) pode ser escrita na forma

$$b_{2A} = e^{-(\phi_1+\phi_2)}\bar{\partial}\left[\chi e^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}\right] - \chi f_2 e^{-\frac{\phi_2}{2}}\bar{\partial}\left[g_2 e^{-\frac{\phi_1}{2}}\right] - \chi^2 e^{-(\phi_1+\phi_2)} b_{1A} + f_1 e^{-\frac{\phi_2}{2}} f_{1A}. \tag{4.1.13}$$

Note-se que partes dessa expressão já foram calculadas como soluções para b_{1A} e para f_{1A}. Após as substituições e as inúmeras manipulações necessárias encontra-se

$$b_{2A} = \frac{\gamma_2\rho_2}{1 + \Gamma\rho_1\rho_2}, \tag{4.1.14}$$

com o sinal contrário a (3.3.38), como se esperava.

Conclusão

Os dois modelos supersimétricos estudados dividem a mesma estrutura algébrica, o que suscitou verificar a correlação entre eles. Essa verificação foi positiva, tal qual relações similares bem conhecidas para modelos puramente bosônicos como,

por exemplo, entre o modelo sine-Gordon e o $mKdV$, ou entre o Lund-Regge e o Schröedinger não-linear.

Tem-se que salientar que para as variáveis de Lund-Regge também deve existir uma transformação de supersimetria como aquela encontrada para as variáveis do $AKNS$ em (3.2.23). Esse resultado fica em aberto apesar de diversas tentativas.

Apêndice A

Álgebra OSP(2,2)

Há oito geradores da álgebra $\mathcal{G} = OSP(2,2)$, metade deles bosônicos e outra metade fermiônicos. Os quatro geradores bosônicos $E_{+2\rho}$, $E_{-2\rho}$, $\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H$ e $\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H$ definem a álgebra de Lie $SL(2) \oplus U(1)$. Os geradores fermiônicos são $E_{-\rho-\varepsilon}, E_{\rho-\varepsilon}, E_{-\rho+\varepsilon}$ e $E_{\rho+\varepsilon}$. Os versores ρ e ε são tais que $\rho^2 = 1$, $\varepsilon^2 = -1$ e $\rho.\varepsilon = 0$.
Para a álgebra de Kac-Moody $\widehat{OSP}(2,2)$ o operador de carga central é $\hat{c}$.
O elemento de grupo $B \in \widehat{OSP}(2,2)$ será definido pela relação

$$B = e^{\tilde{\chi} E_{-2\rho}} e^{\tilde{f}_1 E_{-\rho-\varepsilon}} e^{\tilde{f}_2 E_{-\rho+\varepsilon}} e^{\phi_1\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H + \phi_2\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H + \nu\hat{c}} e^{\tilde{g}_2 E_{\rho-\varepsilon}} e^{\tilde{g}_1 E_{\rho+\varepsilon}} e^{\tilde{\psi} E_{+2\rho}}. \tag{A.1}$$

Os pesos fundamentais definem estados $|\rho>$, $|\varepsilon>$ e $|\lambda_0>$. A atuação dos geradores nesses estados é

$$\begin{array}{lll}
\hat{c}|\lambda_0> = c|\lambda_0> & \hat{c}|\rho> = c|\rho> & \hat{c}|\varepsilon> = c|\varepsilon> \\
\rho.H^{(0)}|\lambda_0> = 0 & \rho.H^{(0)}|\rho> = |\rho> & \rho.H^{(0)}|\varepsilon> = 0 \\
\varepsilon.H^{(0)}|\lambda_0> = 0 & \varepsilon.H^{(0)}|\rho> = 0 & \varepsilon.H^{(0)}|\varepsilon> = |\varepsilon> \\
\rho.H^{(n)}|\lambda_0> = 0 \quad (n>0) & \rho.H^{(n)}|\rho> = 0 \quad (n>0) & \rho.H^{(n)}|\varepsilon> = 0 \quad (n>0) \\
\varepsilon.H^{(n)}|\lambda_0> = 0 \quad (n>0) & \varepsilon.H^{(n)}|\rho> = 0 \quad (n>0) & \varepsilon.H^{(n)}|\varepsilon> = 0 \quad (n>0) \\
E^{(0)}_{+\alpha}|\lambda_0> = 0 & E^{(0)}_{+\alpha}|\rho> = 0 & E^{(0)}_{+\alpha}|\varepsilon> = 0 \\
E^{(n)}_{\pm\alpha}|\lambda_0> = 0 \quad (n>0) & E^{(n)}_{\pm\alpha}|\rho> = 0 \quad (n>0) & E^{(n)}_{\pm\alpha}|\varepsilon> = 0 \quad (n>0)
\end{array} \tag{A.2}$$

onde o símbolo $\pm\alpha$ indica o conjunto de índices $\{\pm 2\rho, \pm(\rho+\varepsilon), \pm(\rho-\varepsilon)\}$.

A álgebra $OSP(2,2)$ obedece as relações :

$$
\begin{array}{ll}
[\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, E_{\pm 2\rho}] = \pm E_{\pm 2\rho} & [\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H, E_{\pm 2\rho}] = \pm E_{\pm 2\rho} \quad [E_{\pm 2\rho}, E_{\mp 2\rho}] = \pm \rho.H \\
[\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, E_{\pm(\rho-\varepsilon)}] = \pm E_{\pm(\rho-\varepsilon)} & [\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H, E_{\pm(\rho-\varepsilon)}] = 0 \\
[\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, E_{\pm(\rho+\varepsilon)}] = 0 & [\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H, E_{\pm(\rho+\varepsilon)}] = \pm E_{\pm(\rho+\varepsilon)} \\
[E_{\pm 2\rho}, E_{\pm(\rho+\varepsilon)}] = 0 & [E_{\pm 2\rho}, E_{\pm(\rho-\varepsilon)}] = 0 \\
\{E_{\rho+\varepsilon}, E_{-\rho-\varepsilon}\} = \left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H & \{E_{\rho-\varepsilon}, E_{-\rho+\varepsilon}\} = -\left(\frac{\rho-\varepsilon}{2}\right).H \\
[E_{\pm 2\rho}, E_{\mp(\rho+\varepsilon)}] = \mp E_{\pm(\rho-\varepsilon)} & [E_{\pm 2\rho}, E_{\mp(\rho-\varepsilon)}] = \pm E_{\pm(\rho+\varepsilon)} \\
\{E_{\pm(\rho+\varepsilon)}, E_{\pm(\rho+\varepsilon)}\} = 0 & \{E_{\pm(\rho-\varepsilon)}, E_{\pm(\rho-\varepsilon)}\} = 0 \\
\{E_{\pm(\rho+\varepsilon)}, E_{\pm(\rho-\varepsilon)}\} = E_{\pm 2\rho} & \{E_{\pm(\rho-\varepsilon)}, E_{\mp(\rho+\varepsilon)}\} = 0
\end{array}
\tag{A.3}
$$

e a representação irredutível mais simples é dada por

$$
E_{-2\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{+2\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\rho.H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon.H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
E_{-\rho-\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{\rho+\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
E_{-\rho+\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{\rho-\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Apêndice B

Transformações de Dressing

O método de dressing é baseado na hipótese [19] da existência de duas transformações de gauge geradas por $\Theta^{\pm}$ formados por combinações lineares de geradores de mesmo grau

$$\begin{aligned} \Theta^{-} &= e^{t(0)}e^{t(-1)}e^{t(-2)}\cdots, \qquad & t(n) \in \{\mathcal{G}_{<}\}, \\ \Theta^{+} &= e^{v(0)}e^{v(1)}e^{v(2)}\cdots, \qquad & v(n) \in \{\mathcal{G}_{>}\}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

que mapeiam o vácuo em soluções não triviais fazendo com que o par de lax transforme-se pelas regras

$$A = \Theta^{\pm}A_{vac}(\Theta^{\pm})^{-1} - \partial\Theta^{\pm}(\Theta^{\pm})^{-1}, \tag{B.2}$$

$$\overline{A} = \Theta^{\pm}\overline{A}_{vac}(\Theta^{\pm})^{-1} - \overline{\partial}\Theta^{\pm}(\Theta^{\pm})^{-1}. \tag{B.3}$$

A condição de curvatura nula (1.3.43) implica na possibilidade de escrever (B.2) e (B.3) como uma conexão de puro gauge, na forma

$$A = -\partial TT^{-1} \quad \bar{A} = -\bar{\partial}TT^{-1}, \tag{B.4}$$

que para o vácuo fica

$$A_{vac} = -\partial T_0T_0^{-1} \quad \bar{A}_{vac} = -\bar{\partial}T_0T_0^{-1}. \tag{B.5}$$

Supondo que exista uma solução tipo vácuo com potenciais

$$A_{vac} = \epsilon^{-}, \quad \overline{A}_{vac} = \epsilon^{+} + \mu^2 z\hat{c}. \tag{B.6}$$

A solução de (B.5) com a suposição (B.6) é dada por

$$T_0 = e^{-z\epsilon^{-}}e^{-\bar{z}\epsilon^{+}}. \tag{B.7}$$

Como conseqüência da aplicação de (B.4) e (B.5) em ambas as possibilidades ($\pm$) de (B.2), encontra-se a relação

$$-\partial(\Theta^{-}T_0)(\Theta^{-}T_0)^{-1} = -\partial(\Theta^{+}T_0)(\Theta^{+}T_0)^{-1}. \tag{B.8}$$

que leva à uma proporcionalidade $\Theta^- T_0 \propto \Theta^+ T_0$. Pode-se então escrever a igualdade

$$\Theta^+ T_0 = \Theta^- T_0 g, \tag{B.9}$$

onde g é um elemento de grupo constante arbitrário.
Identificando o par de Lax (1.3.44) em (B.2)-(B.3), tem-se

$$B\epsilon_- B^{-1} = \Theta^\pm \epsilon^- (\Theta^\pm)^{-1} - \partial\Theta^\pm(\Theta^\pm)^{-1}, \tag{B.10}$$

$$-\epsilon^+ - \bar\partial B B^{-1} = \Theta^\pm(-\epsilon^+ - \mu^2 z\hat{c})(\Theta^\pm)^{-1} - \bar\partial\Theta^\pm(\Theta^\pm)^{-1}. \tag{B.11}$$

Olhando-se para (B.10-Θ^-) e (B.11-Θ^+) no grau zero

$$\begin{aligned} B\epsilon_- B^{-1} &= \Theta^-\epsilon^-(\Theta^-)^{-1} - \partial\Theta^-(\Theta^-)^{-1}, \\ &\Downarrow \\ 0 &= 0 - \partial e^{t(0)}(e^{t(0)})^{-1}, \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned} -\epsilon^+ - \bar\partial B B^{-1} &= \Theta^+(-\epsilon^+ - \mu^2 z\hat{c})(\Theta^+)^{-1} - \bar\partial\Theta^+(\Theta^+)^{-1}, \\ &\Downarrow \\ -\bar\partial B B^{-1} &= -e^{v(0)}\mu^2 z\hat{c}(e^{v(0)})^{-1} - \bar\partial e^{v(0)}(e^{v(0)})^{-1}. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Ambas implicam

$$t(0) = H(\bar z), \quad e^{v(0)} = B e^{G(z) - \mu^2 z\bar z\hat{c}}, \tag{B.14}$$

onde $H(\bar z), G(z) \in \mathcal{G}_0^0$ são funções arbitrárias de uma variável.
Considerando-se agora (B.10-Θ^+) e (B.11-Θ^-) no grau zero

$$\begin{aligned} B\epsilon_- B^{-1} &= \Theta^+\epsilon^-(\Theta^+)^{-1} - \partial\Theta^+(\Theta^+)^{-1}, \\ &\Downarrow \\ 0 &= e^{v(0)}[v(1), \epsilon_-]e^{-v(0)} - (\partial e^{v(0)})e^{-v(0)}, \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned} -\epsilon^+ - \bar\partial B B^{-1} &= \Theta^-(-\epsilon^+ - \mu^2 z\hat{c})(\Theta^-)^{-1} - \bar\partial\Theta^-(\Theta^-)^{-1}, \\ &\Downarrow \\ \bar\partial B B^{-1} &= e^{H(\bar z)}[t(-1), \epsilon_+]e^{-H(\bar z)} + \mu^2 z\hat{c} + (\partial e^{H(\bar z)})e^{-H(\bar z)}. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Substituindo-se (B.14) em (B.15)

$$B^{-1}\partial B = e^{G(z)}[v(1), \epsilon_-]e^{-G(z)} + \mu^2 \bar z\hat{c} - B^{-1}(\partial e^{G(z)})e^{-G(z)}B. \tag{B.17}$$

Multiplicando-se (B.16) e (B.17) por um elemento arbitrário de $\mathcal{G}_0^0$ conclui-se que

$$H(\bar z) = G(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(\bar\partial B B^{-1}\mathcal{G}_0^0) = \mathrm{Tr}(B^{-1}\partial B\mathcal{G}_0^0) = 0, \tag{B.18}$$

que corresponde a condição subsidiária (1.3.34).
Da equação (B.9), com o uso de (B.14) e (B.18) pode-se escrever

$$...e^{-t(-2)}e^{-t(-1)}Be^{-\mu^2\overline{z}z\hat{c}}e^{v(1)}e^{v(2)}... = T_0gT_0^{-1}, \tag{B.19}$$

que projetada em um estado $|\lambda' >$ determina

$$...e^{-t(-2)}e^{-t(-1)}Be^{(-\mu^2 z\overline{z}\hat{c})}|\lambda' >= T_0gT_0^{-1}|\lambda' >, \tag{B.20}$$

pois o estado $|\lambda' >$ é aniquilado pelos $v(i) \in \mathcal{G}_>$.
Pode-se aplicar um operador $\widehat{O}$ em (B.20) caso seja necessário e calcular o elemento de matriz que define a função tau

$$< \lambda_i|\widehat{O}...e^{-t(-2)}e^{-t(-1)}Be^{(-\mu^2 z\overline{z}\hat{c})}|\lambda_i >=< \lambda_i|\widehat{O}T_0gT_0^{-1}|\lambda_i > . \tag{B.21}$$

Seguindo (B.9), o elemento de grupo constante $g \in OSP(2,2)$ será escrito como

$$g = \exp[\mathcal{F}_1(\gamma_1)]\exp[\mathcal{F}_2(\gamma_2)]...\exp[\mathcal{F}_N(\gamma_N)], \tag{B.22}$$

onde N é o número de vértices e γ_i $(i = 1 \ldots N)$ é um parâmetro complexo. Escolhe-se os operadores de vértice $\mathcal{F}_i(\gamma_i)$ sendo autoestados de $\epsilon^{\pm}$, i.e.

$$[\epsilon^{\pm}, \mathcal{F}_i(\gamma_i)] = f_i^{\pm}(\gamma_i)\mathcal{F}_i(\gamma_i), \tag{B.23}$$

onde $f_i^{\pm}(\gamma_i)$ serão os autovalores de $\mathcal{F}_i(\gamma_i)$.
De (B.22) pode-se escrever

$$\begin{aligned} T_0gT_0^{-1} &= T_0e^{\mathcal{F}_1(\gamma_1)}T_0^{-1}T_0e^{\mathcal{F}_2(\gamma_2)}T_0^{-1}T_0...T_0^{-1}T_0e^{\mathcal{F}_N(\gamma_N)}T_0^{-1} = \\ &= \exp[\rho_1(\gamma_1)\mathcal{F}_1(\gamma_1)]\exp[\rho_2(\gamma_2)\mathcal{F}_2(\gamma_2)]...\exp[\rho_N(\gamma_N)\mathcal{F}_N(\gamma_N)], \end{aligned} \tag{B.24}$$

onde

$$\rho_i(\gamma_i) = \exp[-zf_i^-(\gamma_i) - \overline{z}f_i^+(\gamma_i)]. \tag{B.25}$$

Para o trabalho de dissertação proposto deve-se encontrar as autofunções relativas aos geradores da álgebra $OSP(2,2)$. Os operadores constantes devem ser escolhidos para o uso de (B.23). Seguindo a linha de trabalho do modelo de Lund-Regge, capítulo 1, foram escolhidos $\epsilon_{\pm} \in \widetilde{H}$,

$$\epsilon^+ = \lambda\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, \quad \epsilon^- = \lambda^m\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H. \tag{B.26}$$

O grau m fica como um parâmetro a ser fixado quando necessário.
Verificando as relações (A.3) da álgebra $OSP(2,2)$ tem-se como candidatos para

compor as autofunções os geradores $E_{\pm 2\rho}$ e $E_{\pm(\rho-\varepsilon)}$ pois,

$$
\begin{aligned}
[\epsilon^+, \sum_n E^n_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}] = [\lambda\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, \sum_n \lambda^n E_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}] &= \pm\gamma \sum_n E^n_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}, \\
[\epsilon^+, a_+ \sum_n E^n_{\pm(\rho-\varepsilon)}\gamma^{-n}] = [\lambda\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, a_+ \sum_n \lambda^n E_{\pm(\rho-\varepsilon)}\gamma^{-n}] &= \pm\gamma a_+ \sum_n E^n_{\pm(\rho-\varepsilon)}\gamma^{-n}, \\
[\epsilon^-, \sum_n E^n_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}] = [\lambda^m\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, \sum_n \lambda^n E_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}] &= \pm\gamma^m \sum_n E^n_{\pm 2\rho}\gamma^{-n}, \\
[\epsilon^-, a_- \sum_n E^n_{\pm(\rho-\varepsilon)}\gamma^{-n}] = [\lambda^m\left(\frac{\rho+\varepsilon}{2}\right).H, a_- \sum_n \lambda^n E_{\pm(\rho-\varepsilon)}\gamma^{-n}] &= \pm\gamma^m a_- \sum_n E^n_{\pm(\rho-\varepsilon)}\gamma^{-n},
\end{aligned}
$$

com $n, m \in \mathbf{Z}$ e $a_\pm$ um par de números grassmannianos.
Da equação de autovalores (B.23), observando as relações anteriores, as autofunções serão escritas

$$\mathcal{F}_\pm(\gamma) = \sum_n (E^{(n)}_{\pm 2\rho} + a_\pm E^{(n)}_{\pm(\rho-\varepsilon)})\gamma^{-n}, \tag{B.27}$$

e os autovalores

$$f^+_\pm(\gamma) = \pm\gamma, \quad f^-_\pm(\gamma) = \pm\gamma^m. \tag{B.28}$$

Após o cálculo das autofunções (B.27) pode-se escrevere (B.24) como (fazendo a troca de índices $+ \to 1$, $- \to 2$)

$$
\begin{aligned}
T_0 g T_0^{-1} &= \exp[\rho_1\mathcal{F}_1]\exp[\rho_2\mathcal{F}_2] = \\
&= \left(1 + \rho_1\mathcal{F}_1 + \frac{\rho_1^2\mathcal{F}_1^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho_1^a\mathcal{F}_1^a}{a!}\right)\left(1 + \rho_2\mathcal{F}_2 + \frac{\rho_2^2\mathcal{F}_2^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho_2^b\mathcal{F}_2^b}{b!}\right).
\end{aligned} \tag{B.29}
$$

Contribuirão para o resultado os termos que vêm de (B.29) e geram termo central. Estes são os termos onde as somas dos índices ρ e ε são nulas (cf. (1.1.14)). Pode-se concluir daí que os termos relevantes de (B.29) são aqueles em que $a - b$ é uma constante. Porém sendo a ou b no mínimo igual a dois, tem-se um produto da soma de dois geradores. Os geradores em questão são nilpotentes e os produtos cruzados que resultam também são nulos. Sendo assim (B.29) tem a forma exata

$$T_0 g T_0^{-1} = 1 + \rho_1(\gamma_1)\mathcal{F}_1(\gamma_1) + \rho_2(\gamma_2)\mathcal{F}_2(\gamma_2) + \rho_1(\gamma_1)\rho_2(\gamma_2)\mathcal{F}_1(\gamma_1)\mathcal{F}_2(\gamma_2). \tag{B.30}$$

A aplicação de (B.30) no lado direito de (B.21) permite calcular os elementos de matriz que definem as funções tau.

Observação 9 *A igualdade (B.30) expressa que o operador de vértice $\mathcal{F}_i(\gamma_i)$ é tal que $\mathcal{F}_i^2(\gamma_i) = 0$. Isso é verdade na representação de nível um, então o truncamento de (B.30) implica que*

$$c = 1. \tag{B.31}$$

Apêndice C

O Programa aknssol.m

O Programa `aknssol.m` é uma variante do programa apresentado em [20] para o modelo de Toda do $SL(3)$. Esse programa determina as soluções tipo sóliton do sistema de equações formado pelas equações de movimento (3.2.16)-(3.2.19) acrescidas da projeção sobre ϵ^+ do grau -1 de (B.1-Θ^-), ou seja

$$\Big([\epsilon^+, t(-2)] = -\frac{1}{2}[A_0, t(-1)] + \partial t(-1)\Big)_{\epsilon^+} \longrightarrow 2\partial\partial\tilde{\nu} + b_{1A}b_{2A} = 0, \qquad \text{(C.1)}$$

com a consideração que

$$b_{1A} = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad b_{2A} = -\frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad f_{1A} = -\frac{\tau_3}{\tau_0}, \quad f_{2A} = \frac{\tau_4}{\tau_0}, \quad \tau_0 = e^{\tilde{\nu}},$$

e com $\rho_{1,2}$ definido em (3.3.25).

```
(* variaveis: t sera "com barra" e x sera "sem barra" *)
(* tau[5]=normalizacao tau[1]=b1A tau[2]=-b2A tau[3]=-f1A tau[4]=f2A *)

taueq[1,x_,t_]:=tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[D[tau[1,x,t],x],x]-2 tau[5,x,t]
D[tau[1,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]-tau[5,x,t]tau[1,x,t]D[D[tau[5,x,t],x],x]
+2 tau[1,x,t]D[tau[5,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]-tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[tau[1,x,t],t]
+tau[5,x,t]tau[1,x,t]D[tau[5,x,t],t]+2 tau[1,x,t] tau[1,x,t] tau[2,x,t]
+2 tau[1,x,t] tau[3,x,t] tau[4,x,t];

taueq[2,x_,t_]:=tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[D[tau[2,x,t],x],x]-2 tau[5,x,t]
D[tau[2,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]-tau[5,x,t]tau[2,x,t]D[D[tau[5,x,t],x],x]
+2 tau[2,x,t]D[tau[5,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]+tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[tau[2,x,t],t]
-tau[5,x,t]tau[2,x,t]D[tau[5,x,t],t]+2 tau[2,x,t]tau[1,x,t]tau[2,x,t]
+2 tau[2,x,t]tau[3,x,t]tau[4,x,t];
```

```
taueq[3,x_,t_]:=tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[D[tau[3,x,t],x],x]-2 tau[5,x,t]
D[tau[3,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]-tau[5,x,t]tau[3,x,t]D[D[tau[5,x,t],x],x]
+2 tau[3,x,t]D[tau[5,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]+tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[tau[3,x,t],t]
-tau[5,x,t]tau[3,x,t]D[tau[5,x,t],t]+2 tau[3,x,t]tau[1,x,t]tau[2,x,t];

taueq[4,x_,t_]:=tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[D[tau[4,x,t],x],x]-2 tau[5,x,t]
D[tau[4,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]-tau[5,x,t]tau[4,x,t]D[D[tau[5,x,t],x],x]
+2 tau[4,x,t]D[tau[5,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]-tau[5,x,t]tau[5,x,t]D[tau[4,x,t],t]
+tau[5,x,t]tau[4,x,t]D[tau[5,x,t],t]-2 tau[4,x,t]tau[1,x,t]tau[2,x,t];

taueq[5,x_,t_]:=tau[5,x,t]D[D[tau[5,x,t],x],x]-D[tau[5,x,t],x]D[tau[5,x,t],x]
-1/2 tau[1,x,t]tau[2,x,t];

                    (* As condi\coes iniciais *)
b[0,0][1]:= 0;
b[0,0][2]:= 0;
b[0,0][3]:= 0;
b[0,0][4]:= 0;
b[0,0][5]:= 1;

                    (* The program itself *)
c[i_,j_]:=Array[b[i,j],5];
zero:=Table[0,{l,1,5}];
a[i_,j_]:=Complement[c[i,j],zero];

                    (* Os comandos *)
exec[m_,l_]:=
Table[Factor[(D[(D[taueq[n,x,t],{e1,l}] /. e1->0)/(l!),{e2,m-l}] /.
                e2->0)/((m-l)!)],{n,1,5}];

rule[m_,l_]:=Solve[exec[m,l]==0,a[l,m-l]];

calctest[m_,l_]:=
Block[{ctest},ctest[l,m-l]=Factor[c[l,m-l] /. rule[m,l]];
c[l,m-l]=ctest[l,m-l][[1]]];

calc[ord_]:=Do[calctest[m,l],{m,1,ord},{l,0,m}];
```

```
checkeq[n_,ord_]:=
Do[Print[m,l];
 Print[Factor[(D[(D[taueq[n,x,t],{e1,l}] /. e1->0)/(l!),{e2,m-l}] /.
 e2->0)/((m-l)!)],{m,0,ord},{l,0,m}]];

  (* Part of the program sensitive to the species of solitons *)
g1[z_,x_,t_]:= (-z x - z^2 t);
g2[z_,x_,t_]:= (z x + z^2 t);
tau[n_,x_,t_]:=
Sum[c[i,j][[n]] e1^i e2^j Exp[i g1[z,x,t]]Exp[j g2[s,x,t]],{i,0,1},{j,0,1}];
(* z faz o papel de gamma_{2} e s faz o papel de gamma_{1}*)

genout:=
Do[n>>>outakns.m;
InputForm[Simplify[tau[n,x,t]]]>>>outakns.m;
            "- - -">>>outakns.m,{n,1,5}];
```

O programa retornou o arquivo outakns.m, transcrito a seguir

```
1
InputForm[E^(s*(s*t + x))*e2*b[0, 1][1]]
"- - -"
2
InputForm[(e1*b[1, 0][2])/E^(z*(x + t*z))]
"- - -"
3
InputForm[(e1*b[1, 0][3])/E^(z*(x + t*z))]
"- - -"
4
InputForm[E^(s*(s*t + x))*e2*b[0, 1][4]]
"- - -"
5
InputForm[1 + (E^((s - z)*(s*t + x + t*z))*e1*e2*b[0, 1][1]*b[1, 0][2])/
   (2*(s - z)^2)]
"- - -"
```

que é compatível com (3.3.37)-(3.3.40).

Referências

[1] Zero Curvature Formalism in Superspace. H. Aratyn, A. Das, C. Rasinariu and A. H. Zimerman. in Supersymmetry and Integrable Models, H. Aratyn et al. Springer, 1998.

[2] E. Vinberg. Linear Representation of Groups. Birkhäuser. (1989)

[3] A.Das. Selected topics in integrable models. Notas do curso da XI Escola de Verão Jorge André Swieca. hep-th/0110125

[4] J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlanian, G. M. Sotkov e A. H. Zimerman. Nucl. Phys. B. **598**, 615 (2001). hep-th/0011187.

[5] E. Witten. Commun. Math. Phys. **92**, 455 (1984).

[6] A. M. Polyakov e P. B. Wiegman. Phys. Lett. B. **141**, 223 (1984).

[7] A. N. Leznov e M. V. Saveliev. Lett. Math. Phys. **3**, 489 (1979); Commun. Math. Phys. **89**, 59 (1983).

[8] E. Witten. Phys. Rev. D. **44**, 314 (1991).

[9] L.A. Ferreira e J. S. Guillén. Solitons and Generalized Tau-Functions for Affine Integrable Hierarchies. in Supersymmetry and Integrable Models, H. Aratyn et al. Springer, 1998.

[10] E. P. Gueuvoghlanian. Tese de doutorado: Sólitons em teorias de Toda não abelianas singulares. IFT-D.004/00. Fevereiro de 2000.

[11] P.Ramond. Phys. Rev. D. **10**, 2415 (1971).
A. Neveu, J. H. Schwarz. Nucl. Phys. B. **31**, 86 (1971).
Y. Aharonov, A. Casher e L. Susskind. Phys. Lett. B. **35**, 512 (1971).
J. L. Gervais e B. Sakita. Nucl. Phys. B. **34**, 632 (1971).

[12] J. Wess, B. Zumino. Nucl. Phys. B. **70**, 39 (1974).
J. Wess, B. Zumino. Phys. Lett. B. **49**, 52 (1974).

[13] A. Metz et al. Phys. Rev. Lett. **83**, 1542 (1999).

[14] Non Abelian Toda Models and the Constrained KP Hierarchies. I. C. Carnero, J. F. Gomes, E. P. Gueuvoghlanian, G. M. Sotkov and A. H. Zimerman. Proc. of the 7th International Wigner Symposium, Colege Park, Maryland, August 2001.

[15] Symmetry Flows, Conservation Laws and Dressing Approach to the Integrable Models. H. Aratyn, J. F. Gomes, E. Nissimov, S. Pacheva e A. H. Zimerman. J. Math. Phys. **36**, 3419 (1995). nlin.si/0012042.

[16] Affine Lie Algebraic Origin of Constrained KP Hierarchies. H. Aratyn, J. F. Gomes e A. H. Zimerman. hep-th/9408104

[17] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes e A. H. Zimerman. J. Phys. A. **33**, L 331 (2000)

[18] H. Aratyn, J. F. Gomes e A. H. Zimerman. Integrable hierarchy for multidimensional Toda equations and topological-anti-topological fusion. hep-th 0107056

[19] L.A. Ferreira, J. L. Miramontes e J. S. Guillén. Nucl. Phys. B. **449**, 631 (1995). L.A. Ferreira, J. L. Miramontes e J. S. Guillén. J. Math. Phys. **38**, 882 (1997).

[20] A. G. Bueno, L.A. Ferreira, A. V. Razumov. Confinement and soliton solutions in the SL(3) Toda model coupled to matter fields. hep-th/0105078.