



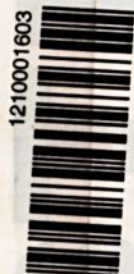
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL
PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES
COM PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS VARIÁVEIS**

Marcelo Ferreira Pelegrini

Ilha Solteira - SP



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM CIÊNCIAS TÉRMICAS**

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA
INTEGRAL PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFUSIVOS
TRANSIENTES COM PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS
VARIÁVEIS**

Marcelo Ferreira Pelegrini

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Cassio Roberto Macedo Maia

Ilha Solteira, maio de 2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

P381a Pelegrini, Marcelo Ferreira
Aplicação da técnica da transformada integral para solução de problemas difusivos transientes com propriedades termofísicas variáveis / Marcelo Ferreira Pelegrini. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2005
xiv, 128 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2005

Orientador: Cassio Roberto Macedo Maia
Bibliografia: p. 113-118

1. Células a combustível. 2. Calor – Condução. 3. Difusão. 4. Kirchhoff, Transformadas de. 5. Transformada integral generalizada.

30502004

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES COM PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS VARIÁVEIS

AUTOR: MARCELO FERREIRA PELEGRINI

ORIENTADOR: Dr. CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:

Dr. CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA

Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

Dr. MARCELO MOREIRA GANZAROLLI

Data da realização: 25 de maio de 2005

Presidente da Comissão Examinadora
Dr. CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA



CO sys 323782
sys 58892

Proc. 055105-NPD 134

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
<i>15.08.05</i>	<i>31.08.05</i>
REGISTRADO POR	TOMBO
<i>Ailza</i>	<i>Te. 1603</i>
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
<i>Ilacão Aut. bi R\$ 10.00</i>	<i>P381a</i>

Dedicatória

Dedicatória

Aos meus pais Otávio e Francisca e ao meu irmão Alexandre, pelos ensinamentos e palavras de carinho, respeito e incentivo, e à minha querida Rosa, que tanto embeleza a minha vida...

AGRADECIMENTOS

Quando encerramos uma etapa nesta grande jornada que é a vida, é sempre importante olhar para trás e agradecer as pessoas que, de uma maneira ou de outra, estiveram presentes nesta longa caminhada.

Começo meus agradecimentos pelo meu orientador, mestre e amigo Cassio Maia. As experiências que tivemos dentro e fora da Unesp me tornaram uma pessoa mais madura e consciente de nosso papel transformador numa sociedade tão injusta, mas cheia de potencialidades quanto a brasileira.

Também não poderia deixar de agradecer ao apoio e incentivo que recebi dos amigos Thiago Antonini, companheiro nas melhores e nas piores horas, Flávio José, uma das pessoas mais íntegras que já conheci e Paulo Eugênio, que me ensinou muito com seu jeito de encarar a vida. Em nome deles agradeço todos os amigos que conquistei nesta jornada.

Na passagem pela graduação, aqui mesmo em Ilha Solteira, tive a felicidade de trabalhar com vários professores, a quem agradeço especialmente: Emanuel Rocha Woiski, o grande tutor do PET, Antônio de Pádua Lima Filho, meu primeiro orientador, Edson Del Rio Vieira e Sérgio Said Mansur, com quem trabalhei e aprendi por mais de dois anos. Vale também ressaltar e agradecer os amigos e também professores Ricardo Alan Verdú Ramos e João Batista Campos Silva, pela sempre valiosa ajuda dentro e fora da escola. Em nome deles agradeço a colaboração de todos os professores e funcionários do DEM. Agradeço também a colaboração de José Antônio Preti, na redação final deste trabalho

Aos meus pais, Otávio e Francisca, uma menção especial, pela confiança, carinho e incentivo que depositaram em minha pessoa. À tia Luci, ao avô Domingos e aos meus avós maternos, *in memoriam*, pelo apoio e acolhida. Em nome deles agradeço toda a minha família.

À minha namorada Rosa Maria. Suas palavras de carinho, companheirismo, amizade e bom senso são um refúgio nas horas mais difíceis. E acima de tudo a Deus, que nos guia e protege para construção de um mundo melhor.

RESUMO

Pelegri, Marcelo Ferreira, *Aplicação da Técnica da Transformada Integral para Solução de Problemas Difusivos Transientes com Propriedades Termofísicas Variáveis*, Ilha Solteira, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2005. 128p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica).

A Técnica da Transformada Integral Generalizada - TTIG é uma técnica híbrida analítico-numérica que vem sendo aplicada com sucesso em diversos problemas de transferência de calor e massa os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. Assim, visando dar uma contribuição para o desenvolvimento e disseminação da TTIG como uma ferramenta qualificada para a resolução de problemas difusivos complexos, foi proposto para o presente trabalho, através da TTIG, a obtenção da solução de problemas difusivos de natureza parabólica em domínios de geometria elíptica e retangular que apresentam propriedades termofísicas variáveis. Para facilitar o tratamento analítico, a equação da difusão foi linearizada fazendo uso da Transformada de Kirchhoff sobre o potencial temperatura e, quando necessário, as variáveis espaciais também foram convenientemente transformadas para facilitar a aplicação das condições de contorno do problema. Para uma melhor compreensão dos problemas estudados, parâmetros físicos de interesse foram determinados para diversas razões de aspecto. Para a visualização e análise do comportamento transiente foram construídos, então, diagramas para representação de problemas cujos meios apresentam propriedades com diversos tipos de dependência com a temperatura. Posteriormente, para fins de comparação, os problemas propostos para o presente trabalho foram resolvidos numericamente pela técnica de elementos finitos com o auxílio do programa computacional *Ansys*[®]. A partir dos resultados obtidos, observou-se que a TTIG foi aplicada com sucesso para a obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais que não admitem soluções pelas técnicas analíticas clássicas.

Palavras-Chave: Transformada Integral Generalizada, Difusão, Transformada de Kirchhoff, Células de Combustível, Resfriamento de Tarugos.



ABSTRACT

Pelegrini, Marcelo Ferreira Pelegrini, *Application of Generalized Integral Transform Technique for Transient Diffusion Problems Solution with Variables Thermophysical Properties*, Ilha Solteira, Engineering Faculty, Paulista State University "Júlio de Mesquita Filho", 2005. 128p. (Master Thesis in Mechanical Engineering).

The Generalized integral Transform Technique (GITT), is an analytical numeric technique which has been applied with success in several heat and mass transfer problems that don't have solution by classical analytical techniques. This work intends to give some contribution for GITT development and dissemination how a qualified tool for calculation of diffusive problems of difficult solution by classical analytical techniques. Thus, it has been intended for this work the calculation of parabolic diffusive problems in elliptical and rectangular cross section cylinders. This domain has presented variable physical properties. In order to facilitate the analytic treatment, the diffusion equation has been linearized by Kirchhoff Transform application in a temperature potential. The spatial variables also have been transformed in order to facilitate the boundary conditions problem application. Temperature profiles and other interesting physical parameters have been evaluated for several cylinder aspect ratios. Some materials have been studied and their properties determined. The results obtained have been compared with the analytical solution (when to exist) and with finite element solution obtained by Ansys[®]. Finally, results presented are interesting, since that was possible to demonstrate the efficiency of GITT to obtain analytical solution for diffusive complex problems, which does not have solution through classical techniques.

Keywords: Integral Transform, Diffusion, Kirchhoff Transform, Fuel Cells, Bars Cooling.



Sumário

Lista de Figuras	iii
------------------------	-----

Lista de Tabelas	vii
------------------------	-----

Lista de Símbolos	x
-------------------------	---

1. Introdução, Motivação e Objetivos	01
--	----

1.1. Considerações Iniciais	01
-----------------------------------	----

1.2. Motivação	02
----------------------	----

1.3. Objetivos e Problemas Propostos	03
--	----

1.3.1. <i>Objetivos Gerais</i>	03
--------------------------------------	----

1.3.2. <i>Problemas Propostos</i>	04
---	----

2. Histórico TTIG e Revisão Bibliográfica	05
---	----

2.1. Histórico da TTIG	05
------------------------------	----

2.2. Revisão bibliográfica	07
----------------------------------	----

2.2.1. Problemas difusivos resolvidos com o auxílio da TTIG	07
---	----

2.2.2. Aplicações em geral	09
----------------------------------	----

3. Transformada de Kirchhoff e Técnica da Transformada Integral Generalizada	15
--	----

3.1. Introdução	15
-----------------------	----

3.2. Transformada de Kircchoff	15
--------------------------------------	----

3.3. Técnica da Transformada Integral Generalizada	17
--	----

3.3.1. Fundamentação Teórica	17
------------------------------------	----

3.3.2. Metodologia	18
--------------------------	----

3.3.3. Formulação para Aplicações Multidimensionais	21
---	----

3.3.4. Exemplo de Remoção das Derivadas Parciais com a TTIG	22
---	----



4. O Problema Difusivo Transiente com Fontes	29
4.1. Introdução.....	29
4.2. Problema Difusivos Transiente com Fontes Uniformemente Distribuídas.....	30
4.2.1. Formulação Matemática	30
4.2.2. Parâmetros Físicos de Interesse	41
4.2.3. Resultados e Discussão.....	43
4.2.4. Parâmetros Físicos Dimensionais – Transformada Inversa de Kirchhoff	54
4.3. Problema Difusivo com Fontes Variáveis.....	61
4.3.1. Formulação Matemática	61
4.3.2. Aplicação da TTIG.....	62
4.3.3. Resultados e Discussão.....	63
.....	
5. O Problema Difusivo Transiente Sem Fontes	65
5.1. Introdução.....	65
5.2. Problema Difusivo sem Fontes – Condição Inicial $\theta(U,V,0)=1$	66
5.2.1. Análise	66
5.2.2. Aplicação da TTIG.....	68
5.2.3. Parâmetros Físicos de Interesse	72
5.2.4. Resultados e Discussão.....	73
5.2.5. Parâmetros Físicos Dimensionais – Transformada Inversa de Kirchhoff	84
5.3. Problema Difusivo sem Fontes – Condição Inicial $\theta(u,v,0) = \theta_i(u,v)$	91
5.3.1. Análise.....	91
5.3.2. Aplicação da TTIG.....	93
5.3.3. Parâmetros Físicos de Interesse	94
5.3.4. Resultados e Discussão.....	95
5.3.5. Parâmetros Físicos Dimensionais – Transformada Inversa de Kirchhoff	106
6. Conclusões e Sugestões	111
7. Referências Bibliográficas	113
Apêndice A.....	119
Anexo A.....	126



Lista de Figuras

4.1	Formatos dos cilindros propostos para análise	33
4.2	Mudança de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema elíptico	34
4.3	Evolução da temperatura máxima em função do tempo em um cilindro de seção elíptica para diversas razões de aspecto	47
4.4	Evolução da temperatura média em função do tempo em um cilindro de seção elíptica para diversas razões de aspecto	47
4.5	Evolução da temperatura máxima em função do tempo em um cilindro de seção retangular para diversas razões de aspecto	48
4.6	Evolução da temperatura média em função do tempo em um cilindro de seção retangular para diversas razões de aspecto	48
4.7	Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção elíptica em função da razão de aspecto	50
4.8	Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção retangular em função da razão de aspecto	51
4.9	Evolução da Temperatura Normalizada para um cilindro de seção elíptica ao longo do eixo x em função do tempo adimensional	51
4.10	Evolução da Temperatura Normalizada para um cilindro de seção retangular ao longo do eixo x em função do tempo adimensional	52
4.11	Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	52
4.12	Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,5$	52
4.13	Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	53
4.14	Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	53
4.15	Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	53
4.16	Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	53
4.17	Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	53



4.18	Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	53
4.19	Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	54
4.20	Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	54
4.21	Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	54
4.22	Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	54
4.23	Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para a célula de combustível nuclear de seção transversal elíptica para $\rho_{aspec} = 0,50$ e $\tau = \tau_c$	56
4.24	Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para a célula de combustível nuclear de seção transversal retangular para $\rho_{aspec} = 0,50$ e $\tau = \tau_c$	57
4.25	Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em cilindros elípticos e retangulares	60
4.26	Constante de tempo para temperatura média em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em cilindros elípticos e retangulares	61
5.1	Evolução da temperatura máxima em função do tempo para um tarugo de seção elíptica para diversas razões de aspecto	77
5.2	Evolução da temperatura média em função do tempo para um tarugo de seção elíptica para diversas razões de aspecto	77
5.3	Evolução da temperatura máxima em função do tempo para um tarugo de seção retangular para diversas razões de aspecto	78
5.4	Evolução da temperatura média em função do tempo para um tarugo de seção retangular para diversas razões de aspecto	78
5.5	Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção elíptica em função da razão de aspecto	80
5.6	Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção retangular em função da razão de aspecto	81
5.7	Evolução da temperatura para um tarugo de seção elíptica ao longo do eixo x em função do tempo, com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	81
5.8	Evolução da temperatura para um tarugo de seção retangular ao longo do eixo x em função do tempo, com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	82
5.9	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	82
5.10	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	82
5.11	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	83
5.12	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	83



5.13	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	83
5.14	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	83
5.15	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	83
5.16	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	83
5.17	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	84
5.18	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	84
5.19	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	84
5.20	Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	84
5.21	Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para um tarugo de seção transversal elíptica para $\rho_{aspec}=0,50$ e $\tau=\tau_c$	86
5.22	Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para um tarugo de seção transversal retangular para $\rho_{aspec}=0,50$ e $\tau=\tau_c$	86
5.23	Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspectos, para propriedades físicas constantes e variáveis, em tarugos elípticos e retangulares	90
5.24	Constante de tempo para temperatura média em função da razão de aspectos, para propriedades físicas constantes e variáveis, em tarugos elípticos e retangulares	90
5.25	Evolução da temperatura máxima em função de τ para células de seção elíptica com diversas razões de aspecto	98
5.26	Evolução da temperatura média em função de τ para células de seção elíptica com diversas razões de aspecto	99
5.27	Evolução da temperatura máxima em função de τ para células de seção retangular com diversas razões de aspecto	99
5.28	Evolução da temperatura média em função de τ para células de seção retangular com diversas razões de aspecto	100
5.29	Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção elíptica em função da razão de aspecto	103
5.30	Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção retangular em função da razão de aspecto	103
5.31	Evolução da temperatura normalizada ao longo do eixo x para células de seção elíptica com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	104
5.32	Evolução da temperatura normalizada ao longo do eixo x para células de seção retangular com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	104
5.33	Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	105



5.34	Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	105
5.35	Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	105
5.36	Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	105
5.37	Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	105
5.38	Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	105
5.39	Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	106
5.40	Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	106
5.41	Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	106
5.42	Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	106
5.43	Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	106
5.44	Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$	106
5.45	Distribuição de temperatura para a célula de UO_2 , com seção elíptica de razão de aspecto $\rho_{aspec}=0,50$ e área $A_s=78,5 \text{ mm}^2$, no instante $\tau = \tau_c$	107
5.46	Distribuição de temperatura para a célula de UO_2 , com seção retangular de razão de aspecto $\rho_{aspec}=0,50$ e área $A_s=78,5 \text{ mm}^2$, no instante $\tau = \tau_c$	107
5.47	Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em células de seção elíptica e retangular	111
5.47	Constante de tempo para temperatura média em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em células de seção elíptica e retangular	111



Lista de Tabelas

4.1.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$	43
4.2.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$	44
4.3.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$	44
4.4.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$	44
4.5.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$	45
4.6.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$	45
4.7.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$	46
4.8.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$	46
4.9.	Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo para cilindros de seções elíptica e retangular ambos com $\rho_{aspec} = 0,50$	49
4.10.	Constantes de tempo em função da razão de aspecto para cilindros de seções elíptica e retangular	50
4.11.	Constantes usadas na correlação para o cálculo do calor específico do UO_2	55
4.12.	Parâmetros Térmicos e Geométricos da pastilha de UO_2 estudada	56
4.13.	Valores da temperatura dimensional para uma célula de combustível de UO_2 de seção elíptica, em função do número de Fourier para razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,5$	58
4.14.	Valores da temperatura dimensional para uma célula de combustível de UO_2 de seção retangular, em função do número de Fourier para razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,5$	59
4.15.	Constantes de tempo para temperatura máxima e média em função da razão de aspecto para células de seção elíptica e retangular com propriedades termofísicas variáveis	60



4.16.	Constantes de tempo em função da razão do comprimento de difusão neutrônica para cilindros de seções elíptica e retangular	64
5.1.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$	73
5.2.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$	74
5.3.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$	74
5.4.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$	74
5.5.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$	75
5.6.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$	76
5.7.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$	76
5.8.	Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$	76
5.9.	Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo para cilindros de seções elíptica e retangular ambos $\rho_{aspec} = 0,50$	79
5.10.	Constantes de tempo em função da razão de aspecto para cilindros de seções elíptica e retangular	80
5.11.	Propriedades Térmicas, Mecânicas e Geométricas do Tarugo de Aço SAE 4150 a 300 K	85
5.12.	Evolução da temperatura dimensional obtida pelos modelos com propriedades termofísicas constantes e variáveis, em tarugos de aço SAE 4150, de seção transversal elíptica e com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	87
5.13.	Evolução da temperatura dimensional obtida pelos modelos com propriedades termofísicas constantes e variáveis, em tarugos de aço SAE 4150, de seção transversal retangular e com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	88
5.14.	Constantes de tempo para temperatura máxima e média em função da razão de aspecto para propriedades físicas constantes e variáveis	89
5.15.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$	95
5.16.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$	95



5.17.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$	96
5.18.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$	96
5.19.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$	97
5.20.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$	97
5.21.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$	97
5.22.	Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$	98
5.23.	Evolução das temperaturas normalizadas máxima e média em função do tempo para células de seções elíptica e retangular ambos com $\rho_{aspec} = 0,50$	101
5.24.	Constantes de tempo em função da razão de aspecto para cilindros de seções elíptica e retangular	102
5.25.	Evolução das temperaturas máxima e média dimensionais para uma célula de combustível de UO_2 de seção elíptica e razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	108
5.26.	Evolução das temperaturas máxima e média dimensionais para uma célula de combustível de UO_2 de seção retangular e razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$	109
5.27.	Constantes de tempo para temperatura máxima e média em função da razão de aspecto para células de seção elíptica e retangular com propriedades termofísicas variáveis	110



Lista de Símbolos

Letras Latinas

- a Distância focal para coordenadas elípticas, [m]
- a^* Distância focal adimensionalizada.
- A_s Área da seção transversal elíptica ou retangular, [m²]
- A Matriz do sistema de equações diferenciais ordinárias, Equação 3.22b.
- a_{ij} Coeficientes da matriz do sistema de equações diferenciais, Equação 3.19a.
- A_{ij} Coeficiente do termo transiente não transformado
- B Operador condição de contorno, Equação 3.8b.
- B_{ijmn} Coeficiente não transformado no termo transiente da equação da energia.
- C_i Coeficiente do termo transformado definido pela Equação 3.33.
- $c_1, c_2...c_6$ Constantes utilizados para o cálculo do calor específico do UO₂
- D_{im} Coeficiente do termo transformado definido pela Equação 3.44.
- c_p Calor específico, [kJ/kg.K]
- d Coeficiente de dissipação do operador diferencial L , Equação 3.3a.
- f Vetor condição inicial do sistema de equações diferenciais, Equação 3.7a.
- f_i Componente do vetor condição inicial f .
- Fo Número de Fourier.
- g Vetor fonte do sistema de equações diferenciais ordinárias, Equação 3.16.
- g_i Componentes do vetor fonte g .



$\bar{g}_i$	Termo transformado definido pela Equação 3.16
$\tilde{g}_{ij}, \tilde{g}_{im}$	Termos transformados da equação da energia
G	Função que representa o termo fonte, Equação (3.25 ^a)
h, h_u, h_v	Coefficientes métricos do sistema de coordenadas transformado.
H	Função que acompanha o termo transiente na equação da energia.
J	Jacobiano da transformação do sistema de coordenadas.
k	Condutividade térmica, [W/m.K]
k_o	Condutividade térmica de referência da transformada de Kirchhoff, [W/m.K]
K_i	Autofunções normalizadas relativas às autofunções ψ_i .
I	Largura da célula ou do tarugo em análise, [m]
l_c	Comprimento do semi-eixo menor na seção transversal elíptica ou retangular, [m]
L_c	Comprimento do semi-eixo maior na seção transversal elíptica ou retangular, [m]
L	Operador diferencial, Equação 3.8a.
L	Altura da célula ou do tarugo em análise, [m]
L_{Dif}	Comprimento de Difusão, [m]
L_{ref}	Comprimento de referência, [m]
M	Ordem de truncamento da expansão do potencial para a variável v .
M_j, M_m	Norma das autofunções ϕ_j e ϕ_m .
n	Densidade de nêutrons, Apêndice A
N	Ordem de truncamento da expansão do potencial para a variável u .
N_i	Norma das autofunções ψ_i .
P	Termo fonte da equação da difusão, Equação 3.3.
Per	Perímetro da seção elíptica ou retangular, [m]
$\dot{q}'''$	Termo fonte de energia, [W / m ³]
$\dot{q}'''(x,y)$	Termo fonte variável de energia, [W / m ³]
S	Superfície estudada, {m ² }



t	Variável tempo, [s]
T	Potencial temperatura, [K]
T_0	Temperatura de referência, [K]
T^*	Potencial temperatura transformado por Kirchhoff, [K]
T_i	Temperatura inicial para o problema difusivo transiente, [K]
T_p	Condição de temperatura prescrita na parede, [K]
$\bar{T}_i$	Potencial transformado na direção u
$\bar{\bar{T}}_{ij}$	Potencial transformado na direção u e v
$\bar{\bar{\bar{T}}}_{ijk}$	Potencial transformado para o problema tridimensional, Equação 3.19.
T_i^*	Temperatura inicial transformada por Kirchhoff, [K]
T_p^*	Temperatura de parede transformada por Kirchhoff, [K]
T_i^*	Temperatura inicial transformada por Kirchhoff, [K]
T_p^*	Temperatura de parede transformada por Kirchhoff, [K]
u	Energia interna específica
u^*	Energia interna específica adimensional.
u	Coordenada do sistema transformado.
u_o	Parâmetro que define o contorno no plano transformado (u,v) .
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade do termo convectivo da equação da difusão, Equação 3.6.
v	Coordenada do sistema transformado.
V	Volume estudado, [m ³]
v_o	Parâmetro que define o contorno no plano transformado (u,v) .
w	Coeficiente do termo transiente na equação da difusão, Equação 3.6.
x, y, z	Coordenadas espaciais, [m]
X, Y, Z	Coordenadas espaciais adimensionais.
X_i, Y_j, Z_k	Autofunções normalizadas para os problemas de autovalores em x,y,z , Equação 3.24.
$\mathbf{y}$	Vetor solução do sistema de equações diferenciais ordinárias, Equação 3.22a.
Z_j, Z_m	Autofunções normalizadas relativas às autofunções $\phi_j(v)$ e $\phi_m(v)$.



Letras Gregas

α	Difusividade térmica, $[m^2 / s]$
α_0	Difusividade térmica na temperatura de referência, $[m^2 / s]$
δ	Delta de Dirac
ϕ_i, ϕ_m	Autofunções relativas à coordenada v .
$\phi(x, y)$	densidade de fluxo neutrônico numa célula de combustível nuclear
Φ	Função genérica no operador de contorno.
η	Componente normal a uma dada superfície $[m]$
η^*	Componente normal a uma dada superfície, adimensional.
λ_j, λ_m	Autovalores associados as autofunções $\phi_j(v)$ e $\phi_m(v)$.
Γ	Contorno elíptico e retangular de células e tarugos.
μ_i	Autovalor associado a autofunção $\psi_i(u)$.
θ	Potencial temperatura adimensional.
θ_i	Temperatura inicial adimensional para o problema difusivo transiente.
θ_m	Temperatura média adimensional.
θ_{max}	Temperatura adimensional máxima da célula retangular ou elíptica
θ_{med}	Temperatura adimensional média da célula de combustível ou do tarugo metálico
θ_N	Temperatura adimensional normalizada
θ_{Nmax}	Temperatura adimensional normalizada máxima
θ_{Nmed}	Temperatura adimensional normalizada média
θ_o	Temperatura de entrada adimensional para o problema convectivo.
θ_p	Temperatura de parede adimensional.
θ_{elip}	Potencial de temperatura transformado adimensional para uma célula ou tarugo
θ_{ret}	Potencial de temperatura transformado adimensional para uma célula ou tarugo



$\bar{\theta}_i$	Potencial temperatura transformado na coordenada u .
$\tilde{\tilde{\theta}}_{ij}, \tilde{\tilde{\theta}}_{im}$	Potencial temperatura transformado nas coordenadas u e v .
Θ	Temperatura modificada para o cálculo do calor específico do UO_2 [K]
κ	Limite de integração na direção u
ρ_{aspec}	Razão de aspecto da elipse e do retângulo
ρ	Densidade, [kg / m ³]
σ	Resistência à tração, [MPa]
τ	Variável tempo adimensional,
τ_c	Constante de tempo para o problema difusivo transiente.
Ω	Domínio referente a área de seção transversal em células e tarugos.
ψ_i	Autofunções relativas à coordenada u .
Ψ_i	Autofunções do problema auxiliar de autovalor, Equação 3.4.

Símbolos Especiais

∇	Operador Nabla
∂	Operador Del

Superescritos

–	Transformação integral com respeito a coordenada u .
~	Transformação integral com respeito a coordenada v .

Subscritos

i,j,k,m,n	Ordem do autovalor e de funções relacionadas.
-------------	---



INTRODUÇÃO, MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um dos mais importantes objetivos da ciência é, sem sombra de dúvidas, tornar a vida dos homens mais produtiva, confortável e segura. Portanto, é neste sentido que um grande número de pesquisadores e cientistas, nas mais diferentes regiões do mundo, procuram incessantemente as ferramentas para proporcionar este bem estar à humanidade.

Neste contexto, o ser humano sempre tentou retirar suas concepções e idéias a respeito do mundo a partir da observação da natureza. Mas o que acontece, na maioria das vezes, é que os fenômenos que ocorrem no meio natural são de tamanha complexidade que qualquer modelagem que procure representá-los de forma mais ou menos realista se tornará também complexa.

Além disso, o desenvolvimento da engenharia aeroespacial, de novos materiais supercondutores, da engenharia genética e da previsão meteorológica são novos desafios onde a observação natural se faz presente. Para simular os processos físicos envolvidos nestas áreas, uma extensa cadeia deve ser percorrida, destacando-se estudos e refinamentos das leis governantes, dos modelos matemáticos associados, da não linearidade das relações constitutivas, do acoplamento das equações de conservação, além do desenvolvimento de novas técnicas computacionais para tratamento analítico e numérico.

Assim, uma importante linha de pesquisa do meio científico é a obtenção de técnicas e procedimentos que possibilitem uma interpretação mais eficiente da natureza, com resultados mais confiáveis. Mais recentemente, com a evolução dos equipamentos e ferramentas computacionais, diversas técnicas numéricas foram e continuam sendo desenvolvidas, permitindo, assim, a construção de algoritmos mais robustos e a obtenção de soluções mais precisas para problemas que apresentam estruturas bastante complexas.

Neste contexto, técnicas híbridas analítico-numéricas vêm ganhando destaque em várias áreas de interesse da engenharia por garantirem precisão e confiabilidade nos resultados por elas obtidos. Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada -



TTIG (COTTA, 1998), é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser poderosa para a solução de problemas de transferência de calor e massa os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. No que diz respeito a processos puramente difusivos, a TTIG vem sendo aplicada com sucesso em problemas que apresentam domínios de geometria irregular ou não convencional (APARECIDO *et al.*, 1989), (MAIA *et al.*, 2001) e (MAIA, 2003), problemas difusivos tridimensionais e não-lineares (MIKHAILOV & COTTA, 1996) e (SERFATY, 1997), problemas com condições de contorno variáveis no espaço (COTTA & ÖZISIK, 1986), problemas difusivos que envolvem movimento de fronteiras (DINIZ *et al.*, 1996) e (DINIZ *et al.*, 1999), entre outros.

Assim, dando continuidade aos estudos de transferência de calor a partir da utilização da TTIG, apresenta-se neste trabalho um estudo da difusão de energia em regime transiente para domínios com geometrias retangulares e elípticas, obtendo-se como resultados parâmetros de interesse para engenharia.

1.2. MOTIVAÇÃO

As células de reatores nucleares usam como princípio básico a fissão do núcleo de determinados isótopos do Urânio e Plutônio, através de nêutrons com energias determinadas, gerando a cada fissão uma grande quantidade de energia e uma série de produtos radioativos. Como consequência do processo de fissão, novos nêutrons são emitidos e uma reação em cadeia é gerada.. Se esta reação puder ser controlada, pode-se utilizá-la para várias finalidades, como na irradiação e ativação de materiais; na produção materiais transurânicos (plutônio principalmente), como fonte de energia térmica, entre outras.

Para os reatores nucleares de potência, as células de combustível são projetadas de forma que a maior quantidade de energia possível, gerada na célula, possa ser transferida para o fluido de trabalho. A maximização da transferência de calor faz com que os níveis de temperatura que a célula atingirá em regime permanente sejam menores, aumentando sua vida útil e as garantias de segurança de operação, que estão relacionadas, entre outros parâmetros, com a temperatura de fusão do material do qual a célula, bem como todo o conjunto a qual ela está inserida, é constituído.

Além disso, se for possível maximizar a transferência de energia para fora do núcleo do reator, este pode ser construído em dimensões menores, baixando seus custos e exigindo menos combustível para uma mesma demanda energética. Nesse sentido, a utilização da



TTIG para o estudo dos perfis de temperatura e outros parâmetros de interesse mostra-se bastante pertinente devido à complexidade dos fenômenos envolvidos, uma vez que estes não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

Outro aspecto importante é o estudo das velocidades de resfriamento (ou aquecimento) em processos difusivos em meio sólido, representados por parâmetros inerentes ao fenômeno. É possível definir uma constante de tempo representativa do processo em estudo, em que praticamente toda a energia do sistema pode ser dissipada (ou absorvida) num intervalo de tempo correspondente ao espectro de um quarto a quatro vezes esta constante (MAIA, 2003). Esta informação é de grande relevância para a indústria metalúrgica, de conformação a quente e de tratamento térmico, onde a taxa de resfriamento de determinado material é parâmetro fundamental na definição das suas propriedades mecânicas finais (dureza, resistência à tração, ductilidade, tenacidade). Devido à física do problema e a forma geométrica dos componentes envolvidos, a utilização da TTIG mostra-se bastante interessante para a resolução deste problema.

1.3. OBJETIVOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

1.3.1. OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho tem por objetivo obter a solução de problemas difusivos de natureza parabólica em domínios de geometria elíptica e retangular que apresentam propriedades termofísicas variáveis, através da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG. Para facilitar o tratamento analítico, o termo difusivo da equação da energia será linearizado adequadamente fazendo uso da Transformada de Kirchhoff sobre o potencial temperatura e, quando necessário, as variáveis espaciais serão também convenientemente transformadas para facilitar a aplicação das condições de contorno do problema.

Posteriormente, para fins de comparação, os problemas propostos para o presente trabalho serão resolvidos analiticamente, quando possível, e numericamente, pelo método de elementos finitos, através do programa computacional *Ansys*[®]. Convém ressaltar que a maioria dos problemas propostos não possui solução analítica, o que justifica a aplicação da TTIG na solução destes problemas.



Diagramas para visualização do comportamento transiente e parâmetros físicos de interesse serão, então, determinados e analisados para domínios que caracterizam cilindros de geometria retangular e elíptica com diversas razões de aspecto.

1.3.2. PROBLEMAS PROPOSTOS

São propostos para análise os seguintes problemas difusivos em domínios geométricos caracterizados por cilindros de seção transversal retangular e elíptica:

A) PROBLEMA DIFUSIVO COM FONTES EM REGIME TRANSIENTE

Determinação de constantes de tempo e análise do comportamento transiente de problemas difusivos com fontes uniformemente distribuídas, propriedades termofísicas variáveis e condições de contorno de primeiro tipo para células de combustível nuclear de UO_2 . Também será estudado neste capítulo o problema de transferência de calor transiente com fontes variáveis, definidas em função do fluxo neutrônico modelado pela Lei da Difusão de Fick.

B) PROBLEMA DIFUSIVO SEM FONTES EM REGIME TRANSIENTE

Determinação de constantes de tempo e análise do comportamento transiente para problemas difusivos sem fontes, com propriedades termofísicas variáveis e submetidos a condições de contorno de primeiro tipo para células de combustível nuclear e tarugos metálicos aquecidos submetidos ao resfriamento para mudança de suas propriedades mecânicas.



HISTÓRICO TTIG E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. HISTÓRICO DA TTIG

Segundo Cotta (1998), as idéias gerais que levaram à criação da Técnica da Transformada Integral foram apresentadas por Koshlyakov em 1936. Grimmberg (1948), desenvolveu com mais detalhes esta teoria, quando abordou a solução de uma classe de problemas elétricos e magnéticos. Duas décadas após, os conceitos da transformada integral já apareciam em edições tais como as de Tranter (1962) e Özisik (1968).

Segundo Özisik & Murray (1974), durante o período da corrida espacial, a Rússia e outros países do Leste Europeu proporcionaram um grande avanço no desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos, tal como a transformada integral. Concomitantemente, Estados Unidos e Europa concentravam-se no desenvolvimento de métodos denominados puramente numéricos (diferenças finitas e elementos finitos). Posteriormente, os cálculos desenvolvidos no ocidente requisitavam um crescente esforço computacional, enquanto que as metodologias do Leste Europeu concentravam esforços em extensas manipulações analíticas. Isto permaneceu até meados da década de setenta.

É neste contexto que, em 1972, Mikhailov deu uma contribuição definitiva para a consolidação do método da transformada integral, quando propôs um núcleo de transformação geral que unificava as várias transformações individuais desenvolvidas até aquela época, obtendo a solução geral para a equação da difusão linear em regiões finitas.

Vários pesquisadores dedicaram-se ao estudo desta técnica, até que Mikhailov & Özisik (1984) apresentaram uma metodologia que sistematizava os conceitos da transformada integral para a solução de uma grande variedade de problemas lineares de difusão, divididos em sete grandes classes. A partir deste trabalho surgiam os formalismos da Técnica da Transformada Integral Clássica, a TTIC. Segundo Cotta (1993), comparando-se as características da abordagem da TTIC com técnicas numéricas utilizadas na época, observou-se uma série de vantagens:



- a) Metodologia sistemática de solução;
- b) Redução do tempo de processamento;
- c) Controle prescrito de erro;
- d) Aceleração da taxa de convergência numérica;
- e) Inexistência de malhas;
- f) Obtenção de soluções *benchmark*;
- g) Determinação numérica direta da função em um ponto (para valores definidos de tempo e espaço) sem necessidade de cálculo numérico de estados temporais anteriores ou de outros pontos do domínio espacial;
- h) Versatilidade do método em se associar com outros, devido às suas características analítico-numéricas.

Entretanto, antes da formalização da TTIC, Özisik & Murray (1974) aplicaram pela primeira vez a teoria da transformada integral em problemas de difusão com condições de contorno variáveis com a posição e com o tempo. O problema proposto se caracterizava pela presença de termos não transformáveis pela TTIC, que mesmo assim foram inseridos na fórmula de inversão, o que resultou em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para o potencial transformado. Para a recuperação do potencial original, foram obtidas soluções aproximadas deste sistema de equações diferenciais, nascendo aí a natureza híbrida analítico-numérica do procedimento adotado.

Outro trabalho que também iria contribuir para a evolução da teoria da transformada integral foi publicado por Mikhailov (1975). Tratava-se da solução de problemas difusivos com coeficientes dependentes do tempo. Estes termos também não eram transformáveis pela TTIC. Utilizando um problema auxiliar de autovalor dependente do tempo e aplicando o mesmo procedimento adotado por Özisik & Murray (1974), Mikhailov obteve um sistema infinito de equações diferenciais com coeficientes variáveis para o potencial transformado.

Neste contexto, Shah & London (1978) já chamavam a atenção para o fato da limitada aplicação dos métodos clássicos de solução em problemas de convecção. Após uma ampla coletânea e revisão de trabalhos relacionados ao problema clássico de Graetz, verificaram que as soluções de problemas de escoamento de fluidos, representados por modelos mais realísticos, eram sempre mais difíceis de serem encontradas, ou apresentavam soluções



incompletas. À luz deste fato, Shah & London apontavam a necessidade de um novo método capaz de resolver problemas com estas características, e que fosse consolidado junto ao corpo de conhecimento do futuro engenheiro.

O que vale ressaltar é que os trabalhos pioneiros de Özisik & Murray, (1974) e de Mikhailov (1975), criaram as condições necessárias para o desenvolvimento de uma nova metodologia capaz de solucionar problemas de difusão, até então, insolúveis pelas técnicas clássicas, estabelecendo assim os princípios da Técnica da Transformada Integral Generalizada - TTIG.

A partir de então, a TTIG começou a ser difundida rapidamente se destacando como uma ferramenta híbrida poderosa na solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos.

Em função do processo evolutivo encontrado no método de transformada integral, Cotta (1993), apresentou uma revisão dos formalismos clássicos, que são agora estendidos com ênfase para a solução de problemas não lineares e fortemente acoplados, e propôs técnicas para melhorar a eficiência da solução numérica. Posteriormente foi elaborado um livro específico para aplicações da TTIG em problemas difusivos e difusivos-convectivos (COTTA, 1998).

Uma grande vantagem do método consiste na eliminação das derivadas parciais de segunda ordem associadas aos potenciais originais. Assim, o esforço computacional predominante é despendido na solução do problema transformado, onde permanece apenas a dependência das derivadas de primeira ordem.

2.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.2.1. PROBLEMAS DIFUSIVOS RESOLVIDOS COM O AUXÍLIO DA TTIG

A seguir enumeram-se alguns trabalhos relevantes sobre difusão de calor resolvidos pela TTIG.

Serfaty (1997), estudou com o auxílio da TTIG, o problema difusivo não linear em regime transiente com propriedades térmicas dependentes da temperatura em geometrias uni, bi e tridimensionais cartesianas. Os resultados obtidos foram co-validados utilizando o método de elementos finitos. O autor relata que na comparação entre a técnica da TTIG e o programa comercial de elementos finitos, para o problema acima descrito, a TTIG mostra melhor desempenho, devido ao menor tempo computacional despendido para uma mesma



precisão global requerida. Outra vantagem mostrada pelo autor é a utilização da TTIG para fins práticos da engenharia, pois a técnica apresenta resultados de precisão adequada com a utilização de poucos termos na série e equipamentos computacionais de pequeno porte.

Machado & Dantas (2001), aplicaram a TTIG com sucesso na solução de problemas difusivos em meios com propriedades físicas e termos fontes descontínuos. Além de aplicar a técnica na equação da energia, como usualmente é feito, eles utilizaram a TTIG também na Função Indicador. Esta função, representada por uma equação diferencial parcial não homogênea, é responsável pelo modelamento da interface entre as propriedades (ou termos fontes) como uma função contínua, passando, assim, a admitir solução analítica. A utilização da técnica, além da facilidade de programação, evitou que a descontinuidade precisasse ser isolada, o domínio ser transformado ou a malha ser refinada, como ocorre nos métodos puramente numéricos a que geralmente se recorre para resolver este tipo de problema.

Meijas & Orlande (2001), resolveram com o auxílio da TTIG o problema de difusão tridimensional num prisma quadrado. A solução deste problema consiste em aplicar a técnica em apenas na direção longitudinal do prisma e, a partir de procedimentos numéricos, resolver o sistema de equações diferenciais parciais bidimensionais resultante. O tempo computacional gasto, bem como o erro máximo relativo, foram calculados e comparados com a solução do mesmo problema pelo método de diferenças finitas, onde se constatou que os resultados obtidos pela TTIG foram mais precisos com um tempo de processamento computacional menor.

No trabalho realizado por Maia *et al.* (2002), trata da análise do problema difusivo com fontes uniformemente distribuídas em células de combustível cilíndricas de seção transversal bicôncava, similares aos das células do glóbulo vermelho do sangue humano. Devido as grandes variações da temperatura no interior da célula, considera-se que a propriedade condutividade térmica apresenta uma dependência genérica com a temperatura. Desta forma, o problema difusivo analisado é não linear, sendo resolvido analiticamente através da TTIG. Para facilitar a aplicação da técnica, foi utilizada a transforma de Kirchhoff para linearização da equação da energia e mudanças de coordenadas adequadas para homogeneização das condições de contorno e para facilitar a representação das geometrias estudadas. Parâmetros de interesse foram calculados e comparados, quando possível, com aqueles apresentados pela literatura. Maia *et al.* (2003) generalizou estes estudos para cilindros de seção transversal retangular e elíptica.



No trabalho desenvolvido por Neves (2003), a TTIG foi empregada na resolução de problemas difusivos tridimensionais transientes não lineares caracterizados por paralelepípedos e cilindros circulares. Os materiais empregados neste trabalho foram o chumbo, o aço AISI 304 e o paládio, e os resultados obtidos foram comparados com o trabalho de Serfaty (1997), apresentando boa concordância. O autor relata que, quando o problema é analisado na geometria cilíndrica, o tempo computacional é bem maior que na análise para geometria cartesiana, e que um fator que contribui para este aumento é o cálculo das integrais que envolvem as funções de Bessel.

2.2.2. APLICAÇÕES EM GERAL

Como mencionado anteriormente, a TTIG já foi empregada em diversos problemas de transferência de calor e massa e mecânica dos fluidos, mostrando ser uma ferramenta eficiente na resolução destes problemas. Nesta subseção, apresentam-se sucintamente alguns dos trabalhos realizados nestas áreas, mostrando um panorama geral da utilização da TTIG atualmente.

Nestas últimas duas décadas, a TTIG vem se desenvolvendo significativamente, pois é uma técnica que associa a precisão das técnicas analíticas a um custo computacional competitivo com a grande versatilidade das técnicas numéricas, consolidando-se como uma opção para resolução de diversos problemas difusivos e convectivos complexos. Podem-se enumerar as seguintes situações onde a TTIG já foi utilizada com sucesso:

- a) Problemas que possuem coeficientes variáveis nas equações governantes;
- b) Problemas com coeficientes variáveis em suas condições de contorno;
- c) Problemas que apresentam contornos geométricos variáveis;
- d) Problemas auxiliares de autovalor de difícil solução;
- e) Problemas não lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependem do potencial a ser obtido.

Assim sendo, destacam-se a seguir alguns dos trabalhos mais relevantes que foram desenvolvidos utilizando a TTIG nas duas últimas décadas.

Diversos problemas submetidos a condições de contorno e de entrada variáveis foram tratados pela TTIG com sucesso. Destacam-se aqui os trabalhos de Cotta & Özisik (1986a)



para o problema de escoamento laminar em dutos circulares e em canais de placas paralelas, com condições de temperatura de parede variando com o tempo e, também, o trabalho de Cotta (1986), que apresentou a solução formal para um problema geral de difusão com condições de contorno que apresentam parâmetros dependendo de uma das coordenadas. Para dutos e canais de mesma geometria, Cotta & Özisik (1986b) obtiveram a solução do problema com variações periódicas da temperatura na entrada.

Pelas suas características, a TTIG é capaz de manipular termos não lineares que venham integrar a equação diferencial fundamental de um dado problema. Neste sentido, uma nova perspectiva se abriu para a solução de problemas que envolvem desenvolvimento simultâneo, camada limite e a equação de Navier-Stokes, visto que os termos convectivos são não lineares, tanto para escoamento laminar como para escoamento turbulento. Com respeito a esta linha de ação, destacam-se aqui os trabalhos de Lage & Rangel (1994), Bolivar *et al.* (1996), Brown *et al.* (1997), Lima *et al.* (1997) e Cotta & Pimentel (1998). Vale ainda destacar, o livro editado por Santos *et al.* (2002), no qual se apresenta uma análise de diversos problemas convectivos em dutos com desenvolvimento térmico e hidrodinâmico simultâneo para escoamento laminar e turbulento.

Problemas com condições de contorno variáveis na direção axial foram estudados por Santos *et al.* (1991), que, entre outras análises, utilizaram uma variação periódica na forma de degraus do coeficiente de transferência de calor, permitindo, assim, a simulação de dutos aletados externamente.

Para a aplicação da TTIG, é importante a escolha dos problemas auxiliares que tenham a melhor correspondência possível com o fenômeno estudado. Desta maneira, Mikhailov & Cotta (1994) utilizaram a TTIG para transformar problemas de autovalores caracterizados por equações diferenciais parciais, mais complexas e realistas em relação ao problema, em sistemas com equações algébricas, mais simples e de mais fácil resolução. A partir da comparação com resultados obtidos em trabalhos de outros autores, observou-se que a técnica também apresenta bons resultados quando utilizada nesta aplicação.

Com o objetivo de aperfeiçoar o processo de resolução de equações pela TTIG, Mikhailov & Cotta (1996) propuseram converter somatórias duplas e triplas de funções em somatórias simples que usualmente aparecem quando da aplicação da TTIG, permitindo a eliminação de termos redundantes sem comprometer a precisão do método.



No trabalho de Andrade (1996), é abordado o uso conjugado de métodos híbridos analítico-numéricos e computação simbólica no desenvolvimento de novas técnicas para o tratamento de sistemas de equações diferenciais parciais acopladas. As equações de Luikov para transferência simultânea de calor e massa em meios capilares porosos são analiticamente tratadas através do uso da TTIG e recursos de computação simbólica. Desta maneira, foram determinadas as distribuições de temperatura e umidade no interior do meio poroso, segundo os formalismos inerentes à TTIG na forma de séries de expansão de autofunções. Para efeito de implementação computacional, foram obtidas duas soluções numéricas, sendo a primeira com o uso da biblioteca *IMSL*[®] do *Microsoft Fortran*[®], e a segunda através do programa *Mathematica*[®]. É interessante notar neste trabalho que os resultados obtidos no programa *Mathematica*[®] e pelas rotinas *IMSL*[®] *Fortran* são numericamente idênticos e, quando comparados com trabalhos anteriores, mostraram boa concordância.

Soluções de problemas que envolvem mudança de fase e ablação são mais difíceis de serem obtidas, visto que as condições de contorno impõem geralmente um movimento de fronteiras. Devido às características híbridas da TTIG, diversos problemas difusivos em geometria plana e axi-simétricas foram resolvidos, destacando-se os trabalhos de Bogado Leite *et al.* (1980) e Diniz *et al.* (1999).

No trabalho de Macedo *et al.* (2000a), a TTIG é usada para resolver o problema de convecção forçada em regime turbulento para escoamento desenvolvido hidrodinamicamente e em desenvolvimento térmico em dutos circulares. Os efeitos da turbulência foram modelados algebricamente, e a técnica também foi usada, em associação com o Método da Contagem de Sinais, para a formulação dos problemas auxiliares de autovalores.

Seguindo uma linha semelhante, Macedo *et al.* (2000b), utilizaram a TTIG para o estudo da transferência de massa em regiões de entrada e plenamente desenvolvidas num escoamento turbulento em fluidos viscoelásticos no interior de dutos circulares. O estudo teve como objetivos a obtenção de parâmetros que caracterizam o referido escoamento. A partir do uso da TTIG foram calculados, como parâmetro de referência, os números de Sherwood em todas as regiões estudadas, os quais foram comparados com os resultados obtidos em trabalhos anteriores, mostrando excelente concordância.

Neto *et al.* (2001), utilizaram a TTIG para o cálculo de parâmetro térmicos em escoamentos tridimensionais em cavidades preenchidas com material poroso. O fenômeno foi modelado pela equação de Darcy para convecção natural em cavidades. Vários aspectos do algoritmo gerado foram analisados, como por exemplo: os esquemas de modelamento, o



procedimento proposto para modulação, os efeitos das perturbações nas condições iniciais, entre outros. Os resultados foram comparados com os obtidos na literatura e o autor sugere que o escoamento deveria ser equacionado por modelos mais gerais e completos.

Oliveira & Sphaier (2001), estudaram as interações fluido-estrutura que ocorrem em instalações industriais para prospecção de petróleo. Como se sabe, estas interações provocam estruturas tridimensionais (vórtices), induzindo o fenômeno de vibração e, conseqüentemente, a diminuição da vida útil da estrutura. Assim, os autores utilizaram a TTIG e o método da projeção aplicados na equação de Navier-Stokes em escoamento incompressível para estudar as interações tridimensionais ao redor de um cilindro nestas condições. Este procedimento transformou a equação diferencial parcial tridimensional governante do fenômeno, em uma equação diferencial parcial em coordenadas bidimensionais, diminuindo o tempo computacional para a resolução deste problema. O sistema de equações diferenciais resultante foi resolvido pelo método de elementos finitos e de diferenças finitas.

Guerrero *et al.* (2001), fizeram um estudo teórico a fim de se obter a solução da equação da quantidade de movimento para a atmosfera terrestre, considerando o decaimento radioativo e a difusão axial na condição de uma atmosfera neutra. Foram utilizados modelos de turbulência disponíveis na literatura e a equação resultante (bidimensional diferencial parcial transiente) foi transformada num sistema de equações diferenciais acoplado, pela aplicação TTIG. Segundo os autores, o sistema acoplado foi resolvido numericamente usando uma subrotina baseada no método das linhas. Para validação do algoritmo computacional, os autores analisaram algumas situações físicas representativas.

O trabalho apresentado por Aparecido (2002), trata do estudo de uma contração utilizada em túnel de vento com seção transversal retangular a partir da TTIG. O fenômeno foi modelado por equações diferenciais elípticas lineares em geometrias irregulares, obtendo-se parâmetros característicos do escoamento.

A TTIG foi utilizada por Alves *et al.* (2002) para o estudo da convecção natural numa cavidade com poros aquecida. A expansão em autofunções gerou um sistema de equações diferenciais que foi adequadamente truncado a fim de ser calculado por Análise de Estabilidade Linear (LSA). A partir desta análise, foram obtidos os números de Nusselt para diversas razões de aspecto.



No trabalho apresentado por Magno *et al.* (2002), foi utilizada a TTIG na solução das equações da quantidade de movimento e da energia para um fluido laminar, não newtoniano, regidos pela lei de potência, num escoamento em desenvolvimento térmico e hidrodinâmico.

Pereira *et al.* (2002), resolveram as equações para transferência de calor e para o problema hidrodinâmico num escoamento em alta rotação dentro de uma centrífuga para separação de isótopos de urânio, a fim de se encontrar as trajetórias das linhas de corrente dentro do aparelho. A TTIG foi utilizada com sucesso neste problema, sendo que três problemas auxiliares de autovalor foram requeridos para a eliminação das derivadas de ordem superior no escoamento estudado. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios e, mais uma vez, é ressaltado que a natureza analítica desta técnica é particularmente atrativa na convalidação de técnicas puramente numéricas, particularmente na modelagem para otimização de processos como centrifugação e separação de componentes.

Cotta *et al.* (2003), estudaram a transferência de massa em meio poroso saturado com fraturas finitas discretas, a partir da resolução do problema de difusão-convecção do transporte do contaminante ao longo da fratura e do problema de difusão bidimensional na contaminação dos poros da matriz utilizada. Para eliminar a dependência na direção transversal, foi utilizada como metodologia a formulação concentrada baseada na Integração de Hermite. As equações diferenciais parciais acopladas resultantes foram resolvidas pelo uso da TTIG, que fornece expressões analíticas para a dependência temporal e estimativas numéricas para os campos de concentração em função do tempo. Neste trabalho, algumas técnicas de filtragem analíticas foram testadas a fim de se analisar a taxas de convergência do algoritmo desenvolvido.

Os trabalhos desenvolvidos por Pelegrini *et al.* (2004) e Alves *et al.* (2004), tratam da determinação de parâmetros de transferência de calor para um escoamento pistonado na região de entrada térmica de dutos de seção transversal elíptica, submetidos à condição de Newman e Dirichlet. Os autores relatam que a dificuldade em retratar as condições de contorno deste tipo de geometria foi removida usando uma mudança de coordenadas adequada. Então, a TTIG foi utilizada na remoção das derivadas de segunda ordem na equação da energia e, assim, os parâmetros calculados a partir desta equação, para diversas razões de aspecto, foram comparados com os valores encontrados na literatura.

No trabalho de Maia *et al.* (2004), foi estudado o fenômeno da convecção laminar forçada no interior de dutos com seção transversal elíptica a baixos números de Reynolds. O fluido estudado era não Newtoniano, com propriedades físicas constantes e um alto número



de Peclet. Vários parâmetros físicos de interesse foram obtidos com o auxílio da TTIG, tais como a temperatura média e o número de Nusselt local e médio.

Muitas outras aplicações de problemas difusivos e difusivos-convectivos têm sido tratadas pela TTIG, como por exemplo, problemas de convecção natural em cavidades, analisados por Leal & Cotta (1997), o cálculo de parâmetros de transferência e calor para escoamento de fluidos de Herschel-Bulkley e de Bingham em canais de placas paralelas, obtidos por Nascimento *et al.* (2001) e os trabalhos de Scofano Neto & Cotta (1992), que determinaram os parâmetros de transferência de calor em trocadores duplo-tubo na região de desenvolvimento térmico.

2. TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

Considerar a seguinte equação da difusão de calor bidimensional em regime transiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

onde T é a temperatura, α é a difusividade térmica, x e y são as coordenadas cartesianas e t é o tempo.

A equação (2.1) é transformada pela seguinte propriedade transformacional:

Seja $T(x, y, t)$ a solução da equação (2.1) e $\bar{T}(x, y, s)$ a sua transformada de Laplace, então:

$$s \bar{T}(x, y, s) - T(x, y, 0) = \alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$


TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF E TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

3.1. INTRODUÇÃO

Neste Capítulo são apresentados os fundamentos das técnicas que foram empregadas no presente trabalho: a Técnica da Transformada de Kirchhoff, responsável pela linearização do termo difusivo da equação da energia, e a Técnica da Transformada Integral Generalizada, que remove as derivadas espaciais de segunda ordem da equação da energia. Apresenta-se ainda, neste Capítulo, um exemplo de aplicação da TTIG em problemas multidimensionais.

3.2. TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

Considere a seguinte equação da difusão de calor bidimensional em regime transiente, definido em uma região Ω com superfície de contorno Γ :

$$\nabla \cdot [k(T) \nabla T(x, y, t)] + \dot{q}''' = \rho c_p(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad \{x, y \in \Omega, \quad t > 0\} \quad (3.1)$$

onde, ρ é a densidade, $k(T)$ é a condutividade térmica, $c_p(T)$ é o calor específico do material e $\dot{q}'''$ é o termo fonte de energia. Será admitido no presente trabalho que a densidade do meio material apresenta uma variação desprezível durante o transiente em todo o domínio.

A Equação (3.1) é não linear, pois apresenta propriedades termofísicas variáveis com a temperatura. Equações deste tipo são difíceis de serem resolvidas e na maioria das vezes não permitem a obtenção de solução pelas técnicas analíticas clássicas. Desta maneira, procedimentos que permitem a linearização da equação, quando possível, podem facilitar bastante o tratamento analítico.



Diante deste contexto, foi aplicado no presente trabalho a Técnica da Transformada de Kirchhoff (ÖZISIK, 1993). Com o auxílio desta técnica, a Equação (3.1) pode ser transformada em uma equação diferencial mais simples. A técnica consiste em introduzir uma nova temperatura T^* relacionada com a temperatura T do problema original pela seguinte transformação:

$$T^*(x, y, t) = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T(x, y, t)} k(T') dT', \quad (3.2)$$

onde, T_0 representa uma temperatura de referência e $k_0 = k(T_0)$. T_0 e k_0 são introduzidos simplesmente para dar ao valor T^* a dimensão de temperatura e um valor definido. Segue como implicação da Equação (3.2) que:

$$dT^*(x, y, t) = \frac{1}{k_0} k(T) dT(x, y, t), \quad (3.3)$$

e que:

$$\nabla T^*(x, y, t) = \frac{1}{k_0} k(T) \nabla T(x, y, t). \quad (3.4)$$

Inserindo a Equação (3.3) e (3.4) na Equação (3.1), tem-se que:

$$\nabla^2 T^*(x, y, t) + \left(\frac{1}{k_0} \right) \dot{q}''' = \frac{1}{\alpha(T)} \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial t}, \quad (3.5)$$

onde, a propriedade $\alpha(T) = \frac{k(T)}{\rho c_p(T)}$ é a difusividade térmica.

Como se observa, o termo difusivo da equação da energia transformada por Kirchhoff é linear. Este procedimento facilita profundamente o tratamento analítico visto que os termos diferenciais espaciais de segunda ordem da equação foram linearizados. Posteriormente, no Capítulo 4, será apresentada uma transformação conveniente para o termo transiente da Equação (3.5).



3.3. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

As equações diferenciais que governam os processos de difusão dos problemas que aqui foram propostos apresentam uma estrutura que, em geral, não permitem a obtenção de solução analítica pelas técnicas clássicas conhecidas. Assim, para a obtenção de solução destes problemas decidiu-se, como já foi dito anteriormente, pela aplicação da técnica híbrida analítico-numérica TTIG, a Técnica da Transformada Integral Generalizada. Em síntese, a aplicação da TTIG envolve uma seqüência de procedimentos que pode ser sistematizada nas seguintes etapas:

- a) Escolher um problema auxiliar de autovalor, que guarda o máximo de informações do problema original relativo à geometria e aos operadores;
- b) Desenvolver o par “transformada” e “inversa”;
- c) Transformar a equação diferencial parcial original, através do uso de operadores apropriados, em um sistema de EDO's infinito e não linear, que pode ou não ser acoplado;
- d) Truncar e resolver o sistema de EDO's, segundo a precisão preestabelecida;
- e) Construir os potenciais originais, através do uso das fórmulas de inversão.

A seguir, apresentam-se os fundamentos teóricos relativos a TTIG.

3.3.1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As idéias básicas referentes à Técnica da Transformada Integral Generalizada derivam da versão clássica da Transformada Integral. De uma maneira geral, a Técnica da Transformada Integral Clássica - TTIC, que é uma extensão do método da separação de variáveis, consiste no estabelecimento do par transformada-inversa da função potencial em termos de uma base ortogonal de autofunções, que são obtidas a partir de um problema auxiliar de autovalor escolhido adequadamente. A transformação integral da equação diferencial original do problema é obtida através de operadores adequados que promovem a remoção das derivadas parciais espaciais de segunda ordem. Fazendo uso da fórmula de inversão, obtém-se um sistema infinito e desacoplado de equações diferenciais ordinárias para o potencial transformado, que pode ser resolvido analiticamente. Assim, através da própria



fórmula de inversão, obtém-se a solução analítica da função potencial. Este procedimento somente se aplica quando todos os termos da equação diferencial original são transformáveis, para que se produza o sistema de equações desacoplado relativo ao potencial transformado.

A partir dos trabalhos de Özisik & Murray (1974) e de Mikhailov (1975), a Técnica da Transformada Integral adquiriu uma estrutura semi-analítica que generalizou a aplicabilidade do método. Na realidade, a TTIG, faz uso de um procedimento similar àquele aplicado na TTIC. A distinção reside no fato de se persistir na aplicação da fórmula de inversão sobre os termos não transformáveis da equação diferencial original correspondente a um dado problema. Com isto, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado e infinito para o potencial transformado. O sistema é, então, resolvido numericamente truncando-se a expansão em uma dada ordem que garanta a precisão desejada, no processo de reconstrução da função potencial. Este procedimento é que caracteriza a natureza híbrida analítico-numérica da TTIG.

3.3.2. METODOLOGIA

A seguir apresentam-se os procedimentos matemáticos utilizados na TTIG. Considere um problema difusivo-convectivo multidimensional, transiente, não linear e com termo fontes, definido em uma região Ω com superfície de contorno Γ :

$$w(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \mathbf{u}(x,t,T) \cdot \nabla T(x,t) + L T(x,t) = P(x,t), \quad \{x \in \Omega, \quad t > 0\}, \quad (3.6)$$

com $w(x) > 0$ e condições inicial e de contorno dadas por:

$$T(x,0) = f(x), \quad \{x \in \Omega\}, \quad (3.7a)$$

$$B T(x,t) = \varphi(x,t), \quad \{x \in \Gamma, \quad t > 0\}. \quad (3.7b)$$

Aqui, os operadores diferenciais e de contorno são definidos por:

$$L = -\nabla \cdot k(T) \nabla + d(x), \quad (3.8a)$$

$$B = a(x) + b(x)k(x) \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (3.8b)$$

onde, η denota a componente normal da superfície Γ e $k(x) > 0$.



A Equação (3.6) representa problemas definidos como de Classe I, por Mikhailov & Özisik (1984), e que são capazes de representar uma grande variedade de problemas difusivos-convectivos. Em particular, quando o termo convectivo $u(x,t,T)$ se anula, a Equação (3.6) representa problemas puramente difusivos. Quando o vetor $u(x,t,T)$ é não nulo, o problema apresentado é não transformável pela TTIC.

Para estabelecer o par transformada-inversa o potencial $T(x,t)$ é escrito em termos de uma base ortogonal de autofunções obtidas a partir do seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$L\Psi_i(x) = \mu_i^2 w(x)\Psi_i(x), \quad \{x \in \Omega\}, \quad (3.9)$$

$$B\Psi_i(x) = 0, \quad \{x \in \Gamma, \quad t > 0\}. \quad (3.10)$$

Problemas representados pela Equação (3.9) com a condição de contorno dada pela Equação (3.10) são conhecidos como problemas de Sturm-Liouville, onde as autofunções $\Psi_i(x)$ e os autovalores μ_i correspondentes são aqui considerados conhecidos através da solução de tais equações. Assim, define-se o seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{T}_i(t) = \int_{\Omega} w(x)K_i(x)T(x,t)d\Omega, \quad \text{transformada}, \quad (3.11)$$

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x)\bar{T}_i(t), \quad \text{inversa}, \quad (3.12)$$

onde, o núcleo $K_i(x)$ representa as autofunções normalizadas.

$$K_i(x) = \frac{\Psi_i(x)}{N_i^{1/2}}, \quad (3.13)$$

com a integral de normalização dada por

$$N_i = \int_V w(x)\Psi_i^2(x)dV. \quad (3.14)$$

A transformação integral da equação diferencial que governa o problema é obtida efetuando o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(x)$ com a Equação (3.6).



Através deste procedimento e fazendo uso das condições de contorno dadas pelas Equações (3.7b) e (3.10) obtém-se

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \int_{\Omega} K_i(x) [u(x,t,T) \cdot \nabla T(x,t)] d\Omega + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

onde:

$$\bar{g}_i(t) = \int_{\Omega} K_i(x) P(x,t) d\Omega + \int_{\Gamma} k(x) \left[K_i(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial \eta} - T(x,t) \frac{\partial K_i(x)}{\partial \eta} \right] d\Gamma. \quad (3.16)$$

Fazendo uso da fórmula de inversão, Equação (3.12), o termo não transformável da Equação (3.15) é reescrito como,

$$\int_{\Omega} K_i(x) [u(u,t,T) \cdot \nabla T(x,t)] d\Omega = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^*(t,T) \bar{T}_j(t), \quad (3.17a)$$

$$a_{ij}^*(t,T) = \int_{\Omega} K_i(x) [u(u,t,T) \cdot \nabla K_j(x)] d\Omega. \quad (3.17b)$$

Assim, a Equação (3.15) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t,T) \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

com

$$a_{ij}(t,T) = \delta_{ij} \mu_i^2 + a_{ij}^*(t,T), \quad (3.19a)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \quad (3.19b)$$

A transformação integral da Equação (3.6), como foi descrito acima, exige também a transformação integral da condição inicial. Operando-se sobre a Equação (3.7a) com o operador $\int_{\Omega} w(x) K_i(x) d\Omega$, têm-se:

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = \int_{\Omega} w(x) K_i(x) f(x) d\Omega. \quad (3.20)$$



Como pode ser observado, a Equação 3.18 representa um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, acoplado e não linear para os potenciais transformados $\bar{T}_i(t)$. Para obtenção de solução numérica, a expansão do potencial $T(x,t)$ é truncada para uma dada ordem N suficientemente alta a fim de garantir a exatidão desejada. Na forma matricial, o sistema truncado de ordem N é reescrito como

$$y'(t) + A(t, y)y(t) = g(t), \quad \{t > 0\}, \quad (3.21a)$$

$$y'(0) = f, \quad (3.21b)$$

onde

$$y(t) = \{\bar{T}_1(t), \bar{T}_2(t), \dots, \bar{T}_N(t)\}^T, \quad (3.22a)$$

$$A(t, y) = \{a_{ij}(t, T)\}^T, \quad (3.22b)$$

$$g(t) = \{\bar{g}_1(t), \bar{g}_2(t), \dots, \bar{g}_N(t)\}^T, \quad (3.22c)$$

$$f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_N\}^T. \quad (3.22d)$$

Existem vários métodos de solução para problemas de valor inicial descritos pela Equação (3.21). Em particular, o integrador numérico *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL* (1994) desenvolvido a partir do método de Gear, tem demonstrado ser uma ferramenta computacional poderosa para a obtenção de resultados numéricos de sistemas com esta estrutura. Após o cálculo dos potenciais transformados $\bar{T}_i(t)$, aplica-se a fórmula de inversão para a reconstrução do potencial $T(x,t)$ que é a base de cálculo dos diversos parâmetros físicos de interesse do problema original. Estes procedimentos formais, que permitem a obtenção da solução para a classe de problemas representados pela Equação (3.6), constitui-se na base metodológica para a resolução dos problemas difusivos propostos para o presente trabalho.

3.3.3. FORMULAÇÃO PARA APLICAÇÕES MULTIDIMENSIONAIS

Em aplicações unidimensionais, o problema auxiliar de autovalor se reduz a uma equação diferencial ordinária e a função potencial é escrita de forma simples:



$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x) \bar{T}_i(t), \quad \{x \in \Omega, \quad t > 0\}, \quad (3.23)$$

onde, $K_i(x)$ são as autofunções normalizadas.

Para aplicações multidimensionais o problema de autovalor torna-se um sistema de equações diferenciais parciais que é resolvido através de expansões ordinárias em cada uma das coordenadas espaciais relacionadas ao problema difusivo. Para um problema que seja descrito em coordenadas cartesianas e que o operador difusivo L seja tridimensional, a função potencial poderá, então, ser dada na seguinte forma:

$$T(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_i(x) Y_j(y) Z_k(z) \bar{T}_{i,j,k}(t), \quad (3.24)$$

onde cada uma das somatórias está associada com a expansão do potencial em autofunções na coordenada espacial correspondente, sendo $X_i(x)$, $Y_j(y)$ e $Z_k(z)$ as autofunções normalizadas associadas aos respectivos problemas de autovalor. O sistema de equações diferenciais ordinárias para o potencial transformado $\bar{T}_{i,j,k}(t)$ é obtido quando se aplica a transformação integral a cada problema de autovalor, necessário para a remoção das derivadas espaciais de segunda ordem. Do ponto de vista computacional, o potencial $\bar{T}_{i,j,k}(t)$ é obtido através da solução do sistema resultante, truncando-se cada uma das expansões a uma dada ordem. A ordem deste sistema corresponde ao número total de termos da série e é dado pelo produto de cada ordem truncada individualmente.

3.3.4. EXEMPLO DE REMOÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS ESPACIAIS COM A TTIG

Para maior clareza dos procedimentos que serão utilizados durante a aplicação da TTIG para a remoção das derivadas espaciais de segunda ordem, será considerada, aqui, uma equação diferencial parcial que caracteriza um problema difusivo linear com fontes, em regime transiente e submetido à condição de temperatura prescrita no contorno e condição inicial nula. A equação da energia referente a este problema é dada por:

$$H(u,v) \frac{\partial T(u,v,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(u,v,\tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T(u,v,\tau)}{\partial v^2} + G(u,v), \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (3.25a)$$

$$T(u,v,0) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (3.25b)$$



$$\frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (3.25c)$$

$$\frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (3.25d)$$

$$\frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = 0\}, \quad (3.25e)$$

$$T(u, v, \tau) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = v_0\}, \quad (3.25f)$$

onde, a função $H(u, v)$ e $G(u, v)$ e os parâmetros u_0 e v_0 são conhecidos e bem definidos.

Devido a estrutura bidimensional da equação da difusão, a transformada integral será aplicada com o auxílio de um problema de autovalor para cada coordenada, conforme descrito na Seção 3.3.3. Em função das características apresentadas pelas condições de contorno do problema, define-se para a coordenada u , o seguinte problema auxiliar:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 < u < u_0\}, \quad (3.26a)$$

$$\left. \frac{d\psi(u)}{du} \right|_{u=0} = 0, \quad (3.26b)$$

$$\left. \frac{d\psi(u)}{du} \right|_{u=u_0} = 0, \quad (3.26c)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u), \quad (3.26d)$$

$$\mu_i = (i-1) \frac{\pi}{u_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26e)$$

As autofunções normalizadas associadas a este problema permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{T}_i(v, \tau) = \int_0^{u_0} K_i(u) T(u, v, \tau) du, \quad \text{transformada}, \quad (3.27a)$$



$$T(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{T}_i(v, \tau), \quad \text{inversa}, \quad (3.27b)$$

onde:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad (3.27c)$$

$$N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} u_0, & i = 1 \\ u_0/2, & i > 1 \end{cases}. \quad (3.27d)$$

A remoção da derivada parcial de segunda ordem em u da equação da difusão é feita por integração no domínio, conforme metodologia descrita na Seção 3.3.2. Para tal fim, efetua-se o produto interno da autofunção normalizada $K_i(u)$ com a equação da difusão. Com o auxílio de uma segunda relação obtida pelo produto interno do potencial $\theta(u, v, \tau)$ com a equação que define o problema de autovalor, Equação (3.26a), têm-se:

$$K_i(u) \left[H(u, v) \frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial \tau} \right] = K_i(u) \left\{ \left[\frac{\partial^2 T(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T(u, v, \tau)}{\partial v^2} \right] + G(u, v) \right\}, \quad (3.28a)$$

$$T(u, v, \tau) \left[\frac{d^2 K_i(u)}{du^2} + \mu_i^2 K_i(u) \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.28b)$$

onde o produto interno entre duas funções é definido como:

$$f(x) \cdot F(x, y) = \int_0^{x_0} f(x) F(x, y) dx. \quad (3.29)$$

Desenvolvendo e somando as Equações (3.28a) e (3.28.b), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mu_i^2 \int_0^{u_0} K_i(u) T(u, v, \tau) du - \int_0^{u_0} K_i(u) \frac{\partial^2 T(u, v, \tau)}{\partial v^2} du + \int_0^{u_0} K_i(u) H(u, v) \frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial \tau} du = \\ & = \int_0^{u_0} K_i(u) G(u, v) du + \bar{g}_i(v, \tau), \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\bar{g}_i(v, \tau) = \int_0^{u_0} \left[K_i(u) \frac{\partial^2 T(u, v, \tau)}{\partial u^2} - T(u, v, \tau) \frac{d^2 K_i(u)}{du^2} \right] du. \quad (3.30b)$$



Fazendo uso da fórmula de inversão e das propriedades de ortogonalidade das autofunções, os dois termos integrais do membro esquerdo da Equação (3.30a) podem ser desenvolvidos como segue:

$$\mu_i^2 \int_0^{u_0} K_i(u) T(u, v, \tau) du = \mu_i^2 \int_0^{u_0} K_i(u) \sum_{j=1}^{\infty} K_j(u) \bar{T}_j(v) du = \mu_i^2 \bar{T}_i(v), \quad (3.31a)$$

$$\int_0^{u_0} K_i(u) \frac{\partial^2 T(u, v, \tau)}{\partial v^2} du = \int_0^{u_0} K_i(u) \sum_{j=1}^{\infty} K_j(u) \frac{d\bar{T}_j^2(v, \tau)}{dv^2} du = \frac{d\bar{T}_i^2(v, \tau)}{dv^2}. \quad (3.31b)$$

O terceiro termo da Equação (3.30a) também é desenvolvido de forma similar:

$$\int_0^{u_0} K_i(u) H(u, v) \frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial \tau} du = \int_0^{u_0} K_i(u) H(u, v) \sum_{j=1}^{\infty} K_j(u) \frac{\partial \bar{T}_j(v, \tau)}{\partial \tau} du = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{T}_j(v, \tau)}{\partial \tau}, \quad (3.32a)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{u_0} K_i(u) K_j(u) H(u, v) du. \quad (3.32b)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (3.30a) é integrável e é escrito como

$$\int_0^{\kappa} K_i(u) G(u, v) du = C_i(v). \quad (3.33)$$

Desenvolvendo o termo transformado $\bar{g}_i(v, \tau)$ pelo teorema de Green, obtém-se

$$\bar{g}_i(v, \tau) = \left[K_i(u) \frac{\partial T(u, v, \tau)}{\partial u} - T(u, v, \tau) \frac{dK_i(u)}{du} \right]_{u=0}^{u=u_0}, \quad (3.34)$$

onde se observa que o coeficiente $\bar{g}_i(v, \tau)$ se anula, visto que todas as condições de contorno do problema difusivo e do problema auxiliar de autovalor são homogêneas.

Dos resultados acima obtidos, a equação transformada da energia é escrita como:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{T}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{T}_i(v, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{T}_i(v, \tau)}{\partial v^2} + C_i(v). \quad (3.35)$$

Assim, a derivada parcial de segunda ordem em u foi removida. Para proceder a transformação integral relativo a coordenada v , define-se o seguinte problema de autovalor:



$$\frac{d^2\phi(v)}{dv^2} + \lambda^2\phi(v) = 0, \quad \{0 < \phi < v_0\}, \quad (3.36a)$$

$$\left. \frac{d\phi(v)}{dv} \right|_{v=0} = 0, \quad (3.36b)$$

$$\phi(v_0) = 0, \quad (3.36c)$$

$$\phi_j(v) = \cos(\lambda_j v), \quad (3.36d)$$

$$\lambda_j = \frac{(2j-1)\pi}{2v_0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36e)$$

As autofunções normalizadas associadas a este problema são dadas por

$$Z_j(v) = \frac{\phi_j(v)}{M_j^{1/2}}, \quad (3.37a)$$

$$M_j = \int_0^{v_0} \phi_j^2(v) dv = \frac{v_0}{2}, \quad (3.37b)$$

e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\tau) = \int_0^{v_0} Z_j(v) \bar{T}_i(v, \tau) dv, \quad \text{transformada}, \quad (3.38a)$$

$$\bar{T}_i(v, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} Z_j(v) \tilde{\tilde{T}}_{ij}(\tau), \quad \text{inversa}. \quad (3.38b)$$

Observa-se que aplicando as Equações (3.27a) e (3.27b) nas Equações (3.38a) e (3.38b), o par transformada-inversa pode ser reescrito como:

$$\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\tau) = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_j(v) T(u, v, \tau) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (3.39a)$$

$$T(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \tilde{\tilde{T}}_{ij}(\tau), \quad \text{inversa}. \quad (3.39b)$$

Para a remoção da derivada de segunda ordem na coordenada v da equação transformada, efetua-se o produto interno da autofunção normalizada $Z_j(v)$ pela Equação (3.34). Uma equação auxiliar também é provida, efetuando-se o produto interno do potencial transformado $\bar{T}_i(v, \tau)$ pela equação do problema de autovalor correspondente:



$$Z_m(v) \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{T}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{T}_i(v, \tau) \right] = Z_m(v) \left[\frac{\partial^2 \bar{T}_i(v, \tau)}{\partial v^2} + C_i(v) \right], \quad (3.40a)$$

$$\bar{T}_i(v, \tau) \left[\frac{d^2 Z_m(v)}{dv^2} + \lambda_m^2 Z_m(v) \right] = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40b)$$

Desenvolvendo e somando as Equações (3.37a) e (3.37b), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{v_0} Z_m(v) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{T}_j(v, \tau)}{\partial \tau} dv + \mu_i^2 \int_0^{v_0} Z_m(v) \bar{T}_i(v, \tau) dv + \lambda_m^2 \int_0^{v_0} Z_m(v) \bar{T}_i(v, \tau) dv = \\ = \int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv + \tilde{g}_{im}(\tau), \end{aligned} \quad (3.41a)$$

onde,

$$\tilde{g}_{im}(\tau) = \int_0^{v_0} \left[Z_m(v) \frac{\partial^2 \bar{T}_i(v, \tau)}{\partial v^2} - \bar{T}_i(v, \tau) \frac{d^2 Z_m(v)}{dv^2} \right] dv. \quad (3.41b)$$

Fazendo uso da fórmula de inversão, Equação (3.38b), e das propriedades de ortogonalidade das autofunções $Z_m(v)$, o primeiro termo da Equação (3.41a) pode ser desenvolvido como segue:

$$\begin{aligned} \int_0^{v_0} Z_m(v) \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{T}_j(v, \tau)}{\partial \tau} dv = \int_0^{v_0} Z_m(v) \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{u_0} K_i(u) K_j(u) H(u, v) \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(v) \frac{d\tilde{T}_{jn}(\tau)}{d\tau} du dv = \\ = B_{ijmn} \frac{d\tilde{T}_{jn}(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.42a)$$

onde,

$$B_{ijmn} = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) H(u, v) du dv. \quad (3.42b)$$

Os outros dois termos integrais do membro esquerdo da equação são desenvolvidos como segue:

$$\mu_i^2 \int_0^{v_0} Z_m(v) \bar{T}_i(v, \tau) dv = \mu_i^2 \int_0^{v_0} Z_m(v) \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(v) \tilde{T}_{in}(\tau) dv = \mu_i^2 \tilde{T}_{im}(\tau), \quad (3.43a)$$



$$\lambda_m^2 \int_0^{v_0} Z_m(v) \bar{T}_i(v, \tau) dv = \lambda_m^2 \int_0^{v_0} Z_m(v) \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(v) \tilde{\bar{T}}_{ik}(\tau) dv = \lambda_m^2 \tilde{\bar{T}}_{im}(\tau). \quad (3.43b)$$

O primeiro termo do membro direito da Equação (3.41a) é integrável e é determinado por:

$$\int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{u_0} K_i(u) Z_m(v) G(u, v) du dv = D_{im}. \quad (3.44)$$

Fazendo uso do Teorema de Green, o coeficiente transformado $\tilde{g}_{im}(\tau)$ é desenvolvido na forma como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{im}(\tau) &= \left[Z_m(v) \frac{d\bar{T}_i(v, \tau)}{dv} - \bar{T}_i(v, \tau) \frac{dZ_m(v)}{dv^2} \right] \Big|_{v=0}^{v=v_0} = \\ &= \left\{ Z_m(v) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dZ_n(v)}{dv} \tilde{\bar{T}}_{ni}(\tau) \right] - \left[\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(v) \bar{T}_{ni}(\tau) \right] \frac{dZ_m(v)}{dv^2} \right\} \Big|_{v=0}^{v=v_0}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Observa-se novamente que a relação dada pela Equação (3.45) têm condições de contorno homogêneas. Portanto, o coeficiente $\tilde{g}_{im}(\tau)$ se anula.

Dos resultados acima, a Equação (3.41a) é escrita, então, como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijn} \frac{d\tilde{\bar{T}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\bar{T}}_{im}(\tau) = D_{im}. \quad (3.46)$$

A transformação via TTIG do termo transiente da equação da energia, como visto acima, não é possível. Assim, a Equação (3.46) representa um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias para o potencial $\tilde{\bar{T}}_{ij}(\tau)$. Devido a este termo não transformável, o sistema de equações diferenciais tem que ser resolvido numericamente, truncando-se a expansão do potencial para uma dada ordem N e M . É justamente neste fato que reside a natureza híbrida analítico-numérica e que caracteriza a generalização da técnica da transformada integral, como foi descrito na Seção 3.3.2.

Concluindo, o procedimento acima descrito exemplifica a remoção de derivadas parciais de ordem superior de um problema multidimensional, do ponto de vista da transformada integral.



PROBLEMA DIFUSIVO TRANSIENTE COM FONTES

4.1. INTRODUÇÃO

As células de combustível nos reatores nucleares de potência apresentam dimensões reduzidas e liberam altas taxas de energia térmica resultante da reação de fissão nuclear do elemento fissil. Do ponto de vista econômico, uma maior eficiência na transferência da energia gerada pelo elemento fissil para o fluido de trabalho, possibilita a construção de reatores de menores dimensões, bem como a economia de combustível para um mesmo nível de energia gerada. Entre os diversos fatores que influenciam o processo de transferência de calor, as dimensões geométricas e o formato desses elementos desempenham um papel preponderante. Assim, é interessante que se proceda a análise e o cálculo de parâmetros térmicos em células de combustível que apresentem outras geometrias. Neste sentido, serão analisadas nesta seção células cilíndricas de seção transversal elíptica e retangular.

A maioria dos reatores em operação utiliza o dióxido de urânio, UO_2 , como combustível nuclear. Assim, devido às reduzidas dimensões da célula e ao fato do UO_2 apresentar uma condutividade térmica relativamente baixa, as variações da temperatura no interior desses elementos são sempre elevadas. Assim, é importante que se leve em consideração na análise a variação das propriedades com a temperatura.

Outro aspecto interessante é o fato da taxa de liberação de energia não ser uniformemente distribuída no domínio da célula. Isto ocorre porque na região central há uma depleção do fluxo de nêutrons térmicos, que são os responsáveis diretos pela fissão do núcleo dos elementos físeis (no caso o isótopo 235 do urânio). Conseqüentemente, o termo fonte da equação da difusão apresenta uma dependência espacial. Desta forma, serão analisados no presente trabalho dois casos de interesse: o problema difusivo transiente com fontes uniformemente distribuídas e o problema difusivo transiente com fontes variáveis no domínio.

Sendo assim, este Capítulo trata da solução de problemas difusivos transientes em células de combustível cilíndricas de seção transversal retangular e elíptica que apresentam fontes uniformemente distribuídas ou variáveis em seu domínio. Serão considerados para a análise tanto meios difusivos com propriedades termofísicas constantes como com



propriedades variáveis e a Técnica da Transformada Integral Generalizada será aplicada sobre a equação da energia para a obtenção da solução. Para o caso particular de células que possuem domínios de geometria elíptica, será feita uma mudança de coordenadas adequada para facilitar a aplicação das condições de contorno antes da aplicação da TTIG. Devido a característica não linear da equação da difusão dos problemas propostos, será aplicada a Técnica da Transformada de Kirchhoff para a linearização do termo difusivo da equação da energia, antes da aplicação da TTIG. Com respeito ao problema que apresenta fontes variáveis no domínio, a função que define o termo fonte será dada pela solução da equação da difusão neutrônica, a qual também é obtida fazendo uso da TTIG, como é apresentado no Apêndice A.

É neste contexto que a distribuição de temperatura adimensional e parâmetros físicos de interesse serão determinados para diversas razões de aspecto das células. Posteriormente, perfis de temperatura dimensionais serão obtidos para alguns casos fazendo uso da transformação inversa de Kirchhoff.

4.2. PROBLEMA DIFUSIVO COM FONTES UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS

4.2.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Toda a análise dos problemas propostos será feita somente na região envolvida pelas pastilhas do elemento combustível. Será admitido aqui que o perfil de temperatura inicial é uniforme e que as condições de contorno são do primeiro tipo (temperatura prescrita na parede). Primeiramente, será considerado que as fontes estejam uniformemente distribuídas no domínio Ω da célula e temperatura prescrita na superfície de contorno Γ . Com estas considerações, a equação da difusão pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot k(T) \nabla T(x, y, t) + \dot{q}''' = \rho c_p(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega, \quad t > 0\}, \quad (4.1a)$$

$$T(x, y, t) = T_p, \quad \{(x, y) \in \Gamma, \quad t > 0\}, \quad (4.1b)$$

$$T(x, y, 0) = T_i = T_p, \quad \{(x, y) \in \Omega\}. \quad (4.1c)$$



onde, $k(T)$ é a condutividade térmica do material, ρ é a densidade, $c_p(T)$ é o calor específico e $\dot{q}'''$ representa o termo fontes, admitido constante. Aqui, T_p é a temperatura da superfície da pastilha e T_i , representa a condição de temperatura inicial do problema.

A) LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

Para facilitar a aplicação da Transformada Integral, a equação da difusão será adequadamente linearizada. Fazendo uso do procedimento discutido na Seção 3.1, a Transformada de Kirchhoff é aplicada sobre o potencial $T(x,y,t)$. A Equação (4.1) é reescrita, então, como:

$$\nabla^2 T^*(x,y,t) + \frac{\dot{q}'''}{k_0} = \frac{1}{\alpha(T^*)} \frac{\partial T^*(x,y,t)}{\partial t}, \quad \{(x,y) \in \Omega, \ t > 0\}, \quad (4.2a)$$

$$T_p^*(x,y,t) = \frac{1}{k_0} \int_{T_0}^{T_p} k(T') dT' = T_p^*, \quad \{(x,y) \in \Gamma, \ t > 0\}, \quad (4.2b)$$

$$T^*(x,y,0) = T_i^* = T_p^*, \quad \{(x,y) \in \Omega\}, \quad (4.2c)$$

com, $\alpha(T^*) = \frac{k(T^*)}{\rho c_p(T^*)}$ e $T^*(x,y,t)$, dada pela Equação (4.2). Os parâmetros T_p^* e T_i^* são, respectivamente, os potenciais temperatura de contorno e inicial transformados por Kirchhoff.

A não linearidade que ocorre no coeficiente do termo transiente será convenientemente removida através da transformação de coordenadas que adimensionaliza a equação da difusão de energia. Assim, na sua forma adimensional, a Equação (4.2) é reescrita como segue:

$$\nabla^2 \theta(X,Y,\tau) + 1 = \frac{\partial \theta(X,Y,\tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X,Y) \in \Omega, \ \tau > 0\}, \quad (4.3a)$$

$$\theta(X,Y,\tau) = \theta_p = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, \ \tau > 0\}, \quad (4.3b)$$

$$\theta(X,Y,0) = \theta_i = 0, \quad \{(X,Y) \in \Omega\}, \quad (4.3c)$$

com:



$$X = \frac{x}{L_{ref}}, \quad (4.3d)$$

$$Y = \frac{y}{L_{ref}}, \quad (4.3e)$$

$$\tau = \frac{t \alpha(T)}{L_{ref}^2}, \quad (4.3f)$$

$$\theta(X, Y, \tau) = \frac{[T^*(X, Y, \tau) - T_p^*]}{L_{ref}^2 \dot{q}''' } k_0. \quad (4.3g)$$

onde a temperatura transformada por Kirchhoff T_p^* representa a condição de temperatura prescrita no contorno e T_i^* representa a condição de temperatura inicial uniforme no domínio, a qual é admitida como sendo a mesma temperatura prescrita no contorno. Para o presente problema, foi admitido desprezível os efeitos de segunda ordem referente a variação local de τ com a difusividade térmica na transformação temporal de t para τ .

O parâmetro L_{ref} representa um comprimento de referência, que é aqui definido em função da geometria estudada como:

$$L_{ref}^r = \frac{A_s}{Per}, \quad (\text{para o cilindro de seção retangular}), \quad (4.4a)$$

$$L_{ref}^e = \frac{2 A_s}{Per}, \quad (\text{para o cilindro de seção elíptica}), \quad (4.4b)$$

onde, A_s representa a área da seção transversal do cilindro e Per o perímetro. Os comprimentos de referência foram definidos de forma diferente para cada geometria estudada em função das convenções encontradas na literatura.

Para caracterizar as diversas possibilidades de contornos de geometria retangular ou elíptica emprega-se o parâmetro razão de aspecto ρ_{aspec} , dado por:

$$\rho_{aspec} = \frac{L}{l}. \quad (4.5)$$



Os parâmetros geométricos de interesse são visualizados na Figura. 4.1. Observa-se que os dois problemas propostos apresentam simetria em relação ao eixo x e ao eixo y , de forma que é suficiente considerar somente o domínio em um quadrante, conforme destacado pela região sombreada.

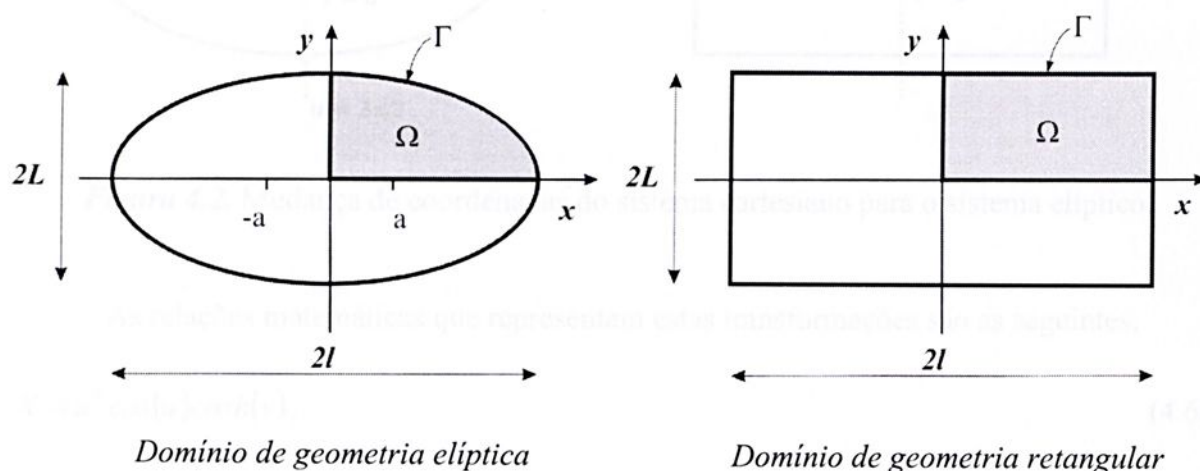


Figura 4.1. Formatos dos cilindros propostos para análise.

B) TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A seguir serão apresentados os procedimentos adotados para a transformação de coordenadas. Para o cilindro de seção elíptica o domínio no sistema cartesiano será transformado em domínio de seção retangular pela representação de suas coordenadas no sistema elíptico. Para as células de seção retangular não será realizada qualquer mudança de coordenada, pois sua geometria já é convenientemente representada pelas coordenadas cartesianas.

B.1) Transformação de Coordenadas na Seção Elíptica

A conveniência de se proceder a uma transformação de coordenadas se deve à dificuldade de se operar a equação da difusão em um domínio com formato elíptico, quando representado no sistema de coordenadas cartesianas. Neste sentido, o sistema ortogonal de coordenadas elípticas é utilizado para transformar o domínio original com contorno de formato elíptico no plano (X,Y) em um domínio com contorno de formato retangular no plano transformado (u,v) , como é mostrado, para maior clareza, na Figura 4.2.



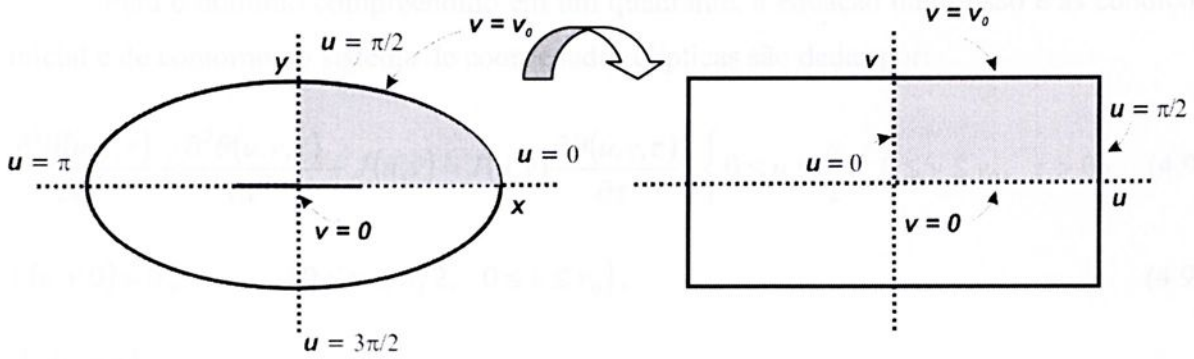


Figura 4.2. Mudança de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema elíptico.

As relações matemáticas que representam estas transformações são as seguintes:

$$X = a^* \cos(u) \cosh(v), \quad (4.6a)$$

$$Y = a^* \sin(u) \sinh(v), \quad (4.6b)$$

$$a^* = \frac{a}{L_{ref}}. \quad (4.6c)$$

onde, a é a distância focal da elipse que é dada por:

$$a = \frac{L}{\cosh(v_0)}, \quad (4.7a)$$

$$v_0 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{L}{l}\right). \quad (4.7b)$$

onde, L e l são, respectivamente, os comprimentos dos semi-eixos menor e maior da elipse e v_0 é o parâmetro que define o contorno no plano (u, v) . Os coeficientes métricos e o jacobiano da transformação são determinados pelas seguintes relações:

$$h_u(u, v) = h_v(u, v) = a^* [\sin^2(u) + \sinh^2(v)]^{1/2}, \quad (4.8a)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = a^* [\sin^2(u) + \sinh^2(v)]. \quad (4.8b)$$



Para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições inicial e de contorno no sistema de coordenadas elípticas são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} + J(u, v) = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (4.9a)$$

$$\theta(u, v, 0) = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0 \right\}, \quad (4.9b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \left\{ u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (4.9c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \left\{ u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (4.9d)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (4.9e)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0, \quad \tau > 0 \right\}. \quad (4.9f)$$

B.2) Transformação de Coordenadas na Seção Retangular

Como já foi dito anteriormente, para os cilindros de seção retangular a representação do contorno é natural no sistema de coordenadas cartesianas. Mas com o intuito de manter uniformidade de representação das variáveis espaciais, a transformação identidade é aplicada no presente problema:

$$X = u, \quad (4.10a)$$

$$Y = v, \quad (4.10b)$$

$$J(u, v) = 1. \quad (4.10c)$$

Assim, para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno são reescritas como:

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} + J(u, v) = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \left\{ 0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (4.11a)$$

$$\theta(u, v, 0) = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0 \right\}, \quad (4.11b)$$



$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (4.11c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = 0, \quad \tau > 0\}, \quad (4.11d)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{u = u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (4.11e)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = v_0, \quad \tau > 0\}. \quad (4.11f)$$

com:

$$u_0 = \frac{L}{L_{ref}}, \quad (4.12a)$$

$$v_0 = \frac{l}{L_{ref}}. \quad (4.12b)$$

C) APLICAÇÃO DA TTIG

Os perfis de temperatura característicos do problema proposto serão obtidos a partir da aplicação da transformada integral sobre sua equação característica. Devido a sua característica espacial bidimensional, o potencial $\theta(u, v, \tau)$ será escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Assim, a aplicação da transformada integral, para cada um dos problemas propostos, será feita em partes.

C.1) Aplicação da TTIG para o Cilindro de Seção Elíptica

Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 < u < \pi/2\}, \quad (4.13a)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad (4.13b)$$

$$\psi'(\pi/2) = 0. \quad (4.13c)$$



Os autovalores e as autofunções associados a este problema são:

$$\mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.14a)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u). \quad (4.14b)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v, \tau) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) \theta(u, v, \tau) du, \quad \text{transformada}, \quad (4.15a)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, \tau), \quad \text{inversa}. \quad (4.15b)$$

onde $\bar{\theta}_i(v, \tau)$ é o potencial transformado em u e $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad (4.16a)$$

$$N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1 \\ \pi/4, & i > 1 \end{cases} \quad (4.16b)$$

Efetando o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação da difusão dada pela Equação (4.9a) e fazendo uso das condições de contorno dadas pelas Equações (4.9c), (4.9d) e (4.9e) e da equação que define o problema auxiliar de autovalor, Equação (4.11b), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, \tau)}{\partial v^2} + C_i(v), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17a)$$

onde:

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) J(u, v) du, \quad (4.17b)$$



$$C_i(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) J(u, v) du. \quad (4.17c)$$

Para proceder a transformação integral relativo à coordenada v , considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 < v < v_0\}, \quad (4.18a)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad (4.18b)$$

$$\phi(v_0) = 0. \quad (4.18c)$$

Os autovalores e as autofunções para este novo problema auxiliar são:

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)l}{2v_0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19a)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v). \quad (4.19b)$$

As autofunções $\phi_m(v)$ são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\theta}_{im}(\tau) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, \tau) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (4.20a)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(\tau), \quad \text{inversa}. \quad (4.20b)$$

Aqui, $Z_m(v)$ são as autofunções normalizadas e são dadas por:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad (4.21a)$$

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}. \quad (4.21b)$$

onde M_m são as integrais de normalização.



A transformação integral sobre a coordenada v é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(v)$ com a equação diferencial transformada na coordenada u , Equação (4.17a). Em seguida, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em v , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(\tau)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.22a)$$

onde:

$$B_{ijmn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (4.22b)$$

$$D_{im} = - \int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) Z_m(v) J(u, v) du dv, \quad (4.22c)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du. \quad (4.23)$$

O potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(\tau)$ pode ser obtido resolvendo, numericamente, o sistema de equações gerado pela Equação 4.22a, quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijmn} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0. \quad (4.24)$$

O potencial temperatura $\theta_{elip}(u, v, \tau)$ para o cilindro de seção elíptica é obtido, então, através da fórmula de inversão dada pela Equação (4.20b), por:

$$\theta_{elip}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(\tau). \quad (4.25)$$



C.2) Aplicação da TTIG para o Cilindro de Seção Retangular

A equação da energia que modela o problema difusivo para o cilindro de seção transversal retangular apresenta a mesma estrutura do problema difusivo correspondente ao cilindro de seção elíptica. Assim, a aplicação da técnica conduz a seguinte relação para o potencial $\theta_{ret}(u, v, \tau)$:

$$\theta_{ret}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau). \quad (4.26)$$

com:

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijn} \frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) + D_{im} = 0, \quad (4.27a)$$

$$B_{ijn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (4.27b)$$

$$D_{im} = - \int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv = - \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} K_i(u) Z_m(v) J(u, v) du dv. \quad (4.27c)$$

Devido a natureza das condições de contorno do problema da célula de seção retangular, os problemas auxiliares de autovalor propostos são dados por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad (4.28a)$$

$$N_i = \int_0^{u_0} \psi_i^2(u) du = \frac{u_0}{2}, \quad (4.28b)$$

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad (4.28c)$$

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}, \quad (4.28d)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u), \quad (4.28e)$$

$$\mu_i = \frac{(2i-1)\pi}{2u_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.28f)$$



$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v), \quad (4.28g)$$

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2v_0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.28h)$$

4.2.2. PARÂMETROS FÍSICOS DE INTERESSE

A) TEMPERATURA MÉDIA E ENERGIA INTERNA ESPECÍFICA

A temperatura média no domínio em um dado instante τ é dada por:

$$\theta_{méd}(\tau) = \frac{[T_m(X, Y, \tau) - T_p] k_m}{L_{ref}^2 \dot{q}'''} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \theta(X, Y, \tau) dA, \quad (4.29a)$$

$$\theta_{méd}(\tau) = \frac{4}{A_s} \int_0^{v_0} \int_0^{\kappa} \theta(u, v, \tau) J(u, v) du dv, \quad (4.29b)$$

onde, $\kappa = \pi/2$ é utilizado para o problema de difusão em cilindros elípticos e $\kappa = u_0$ é utilizado para o problema de difusão em cilindros retangulares. Para fins de análise da evolução da temperatura média no domínio é definido o parâmetro temperatura média normalizada $\theta_{Nméd}(\tau)$ dada por:

$$\theta_{Nméd}(\tau) = \frac{\theta_{méd}(\tau)}{\theta_{méd}(\infty)}. \quad (4.29c)$$

Para problemas em que o meio difusivo apresenta propriedades termofísicas constantes é possível obter uma relação simples para a energia interna. Assim, estabelecendo como referência para energia interna o estado na condição inicial, a taxa de variação da energia interna específica média em um dado instante é dada por:

$$u(\tau) = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \rho c_p T(X, Y, \tau) dA = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \frac{\dot{q}''' L_{ref}^2}{k} \rho c_p \theta(X, Y, \tau) dA, \quad (4.30a)$$

$$u^*(\tau) = \frac{4}{A_s^*} \int_0^{v_0} \int_0^{\kappa} \theta(u, v, \tau) J(u, v) du dv = \theta_{méd}(\tau), \quad (4.30b)$$

onde, $u^*(\tau)$ é a energia interna específica adimensionalizada, dada por:



$$u^*(\tau) = \frac{u(\tau)}{u(\infty)}. \quad (4.30c)$$

com $u(\infty)$ representando a energia interna específica em regime permanente.

B) CONSTATANTE DE TEMPO

Para a análise dos problemas em questão é conveniente que se estabeleça um parâmetro apropriado capaz de verificar o comportamento transiente da difusão de calor em função da razão de aspecto do cilindro de seção elíptica ou retangular.

Para tanto, é definido a função potencial temperatura normalizada $\theta_N(u, v, \tau)$ em termos da temperatura máxima do domínio no regime permanente, $\theta_{máx}(\infty)$:

$$\theta_N(u, v, \tau) = \frac{\theta(u, v, \tau)}{\theta_{máx}(\infty)}. \quad (4.31)$$

Conseqüentemente a esta definição, o potencial normalizado máximo que ocorre no domínio, para um dado instante τ , é dado por:

$$\theta_{N máx}(\tau) = \frac{\theta_{máx}(\tau)}{\theta_{máx}(\infty)}. \quad (4.32)$$

Da Equação (4.31), observa-se que o potencial $\theta_{N máx}(\tau_{máx})$ estará compreendido no intervalo $[0,1]$. Assim, define-se a constante de tempo τ_c como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a temperatura $\theta_{N máx}(\tau)$ esteja a $1/e$ do seu valor em regime permanente (MAIA, 2003), ou seja:

$$\frac{\theta_{máx}(\tau_{máx})}{\theta_{máx}(\infty)} = \left[1 - \frac{1}{e}\right] = 0,63212. \quad (4.33)$$

A partir da definição da temperatura média, pode-se também definir uma constante de tempo com base na evolução da temperatura média, que é dada por:

$$\frac{\theta_{méd}(\tau_{méd})}{\theta_{méd}(\infty)} = \left[1 - \frac{1}{e}\right] = 0,63212. \quad (4.34)$$



4.2.3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A) VERIFICAÇÃO DA CONVERGÊNCIA EM FUNÇÃO DOS TERMOS DA SÉRIE

Quando os processos de resolução de equações envolvem expansões em séries, é importante que se proceda a um estudo de quantos termos esta expansão deverá ter para atender os critérios de precisão preestabelecida servindo, assim, de parâmetro efetivo para tomada de decisões e análises.

Portanto, nesta seção apresenta-se um estudo da taxa de convergência das séries resultantes da aplicação da TTIG na equação da energia. Sabe-se que um número de termos elevado aumenta a exatidão dos resultados obtidos, mas em compensação o tempo de processamento computacional envolvido se torna bastante elevado e muitas vezes impraticável.

Para o presente trabalho, os coeficientes B_{ijmn} e D_{im} , necessários para o cálculo do potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}$, foram obtidos a partir de integração pelo método de quadratura de Gauss, descrito com mais detalhes no Anexo A. Os valores das autofunções e do jacobiano da transformação foram também calculados nos pontos de quadratura.

O potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}$ foi calculado resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias dado pela Equação (4.24a), com o auxílio da rotina computacional *DIVPAG* da Biblioteca *IMSL FORTRAN*.

Para avaliar a evolução da convergência da série em função do número de termos, foi feita uma análise do comportamento da temperatura máxima em função do tempo e do número de termos da série que representa a equação da energia para células elípticas de várias razões de aspecto. Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 4.1 a 4.4, sendo que esta análise foi feita para os tempos adimensionais $\tau = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$.



Tabela 4.1. Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,000989	0,001003	0,001001	0,001000	0,001000
0,30	0,000986	0,001005	0,001001	0,001000	0,001000
0,50	0,000982	0,001007	0,001001	0,001000	0,001000
0,70	0,000976	0,001010	0,001002	0,001001	0,001001
0,90	0,000961	0,001011	0,001005	0,001002	0,001002

Tabela 4.2. Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,00999	0,01001	0,01000	0,01000	0,01000
0,30	0,00998	0,01000	0,01000	0,01000	0,01000
0,50	0,00998	0,01001	0,01000	0,01000	0,01000
0,70	0,00996	0,01001	0,01000	0,01000	0,01000
0,90	0,00993	0,01002	0,00999	0,00999	0,00999

Tabela 4.3. Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,08946	0,08947	0,08947	0,08947	0,08947
0,30	0,09179	0,09181	0,09180	0,09180	0,09180
0,50	0,09407	0,09410	0,09409	0,09409	0,09409
0,70	0,09556	0,09561	0,09559	0,09559	0,09559
0,90	0,09616	0,09625	0,09622	0,09622	0,09622



Tabela 4.4. Convergência da temperatura no centro da célula de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,2066	0,2066	0,2066	0,2066	0,2066
0,30	0,2230	0,2230	0,2230	0,2230	0,2230
0,50	0,2371	0,2371	0,2371	0,2371	0,2371
0,70	0,2454	0,2455	0,2455	0,2455	0,2455
0,90	0,2487	0,2488	0,2488	0,2488	0,2488

Observa-se dessas tabelas que a convergência é, de um modo geral, mais lenta no início do transiente, sendo necessário o uso de até 30 termos da série em cada coordenada para a obtenção de quatro dígitos de precisão, quando $\tau < 10^{-3}$. No entanto, para tempos da ordem de $\tau < 10^{-1}$, a série já alcança convergência de quatro dígitos com $N = M = 20$ termos, ou menos. É interessante observar que a convergência da série se torna mais lenta, também, quando a razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 1$.

A verificação da convergência para cilindros de seção retangular é apresentada nas Tabelas 4.5 a 4.8, sendo que esta análise também foi feita para os tempos adimensionais $\tau = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$.

Tabela 4.5. Convergência da temperatura no centro da célula de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,0009474	0,001031	0,0009904	0,001011	0,001011
0,30	0,0009458	0,001032	0,0009910	0,001012	0,001012
0,50	0,0009450	0,001033	0,0009919	0,001013	0,001013
0,70	0,0009447	0,001033	0,0009929	0,001013	0,001013
0,90	0,0009446	0,001033	0,0009936	0,001014	0,001014



Tabela 4.6. Convergência da temperatura no centro da célula de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,00965	0,01021	0,00987	0,01004	0,01004
0,30	0,00970	0,01014	0,00993	0,01004	0,01004
0,50	0,00974	0,01010	0,00996	0,01002	0,01002
0,70	0,00976	0,01008	0,00996	0,01002	0,01002
0,90	0,00977	0,01008	0,00997	0,01002	0,01002

Tabela 4.7. Convergência da temperatura no centro da célula de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,0972	0,1004	0,0990	0,0997	0,0997
0,30	0,0992	0,1001	0,0998	0,0999	0,0999
0,50	0,0996	0,1001	0,0999	0,1000	0,1000
0,70	0,0997	0,1001	0,1000	0,1000	0,1000
0,90	0,0998	0,1001	0,1000	0,1000	0,1000

Tabela 4.8. Convergência da temperatura no centro da célula de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,5202	0,5249	0,5233	0,5240	0,5240
0,30	0,6416	0,6424	0,6422	0,6423	0,6423
0,50	0,7285	0,7290	0,7288	0,7289	0,7289
0,70	0,7762	0,7765	0,7764	0,7765	0,7765
0,90	0,7944	0,7947	0,7946	0,7947	0,7946

Como pode ser observada, a convergência das séries relativa ao problema de geometria retangular apresenta um comportamento similar àquele relativo ao problema de geometria elíptica. O único fato que difere diz respeito à convergência mais lenta para os cilindros de seção retangular que apresentam pequenas razões de aspecto.



B) APRESENTAÇÃO DOS PARÂMETROS DE INTERESSE

Para os cilindros de domínios de geometria retangular e elíptica, são apresentadas nas Figuras 4.3 a 4.6 as evoluções da temperatura máxima e da temperatura média para diversas razões de aspecto. Observa-se que a evolução da temperatura é mais rápida nas células de razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 0$. Vale lembrar que a evolução da temperatura média representa a evolução da energia interna adimensional para os problemas que apresentam propriedades termofísicas constantes, como foi visto na Seção 4.2.2.

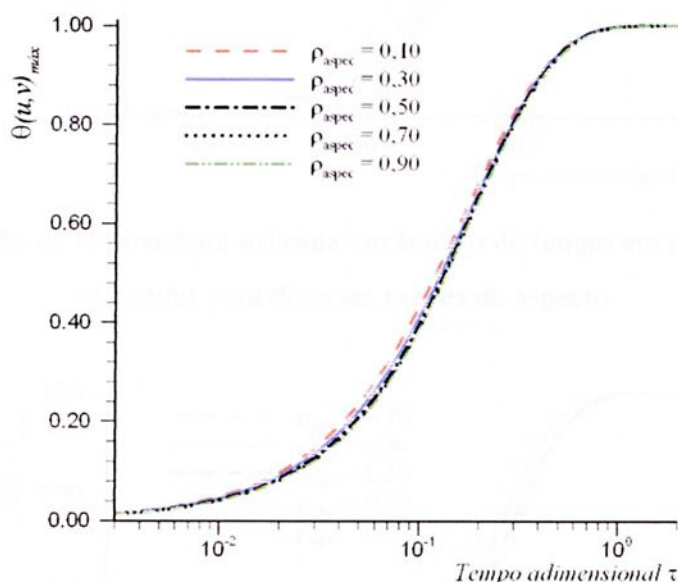


Figura 4.3. Evolução da temperatura máxima em função do tempo em um cilindro de seção elíptica para diversas razões de aspecto.

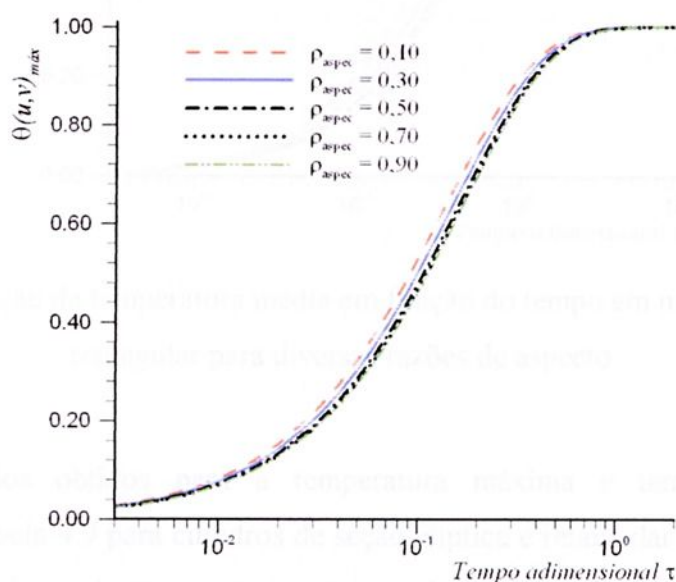


Figura 4.4. Evolução da temperatura média em função do tempo em um cilindro de seção elíptica para diversas razões de aspecto.

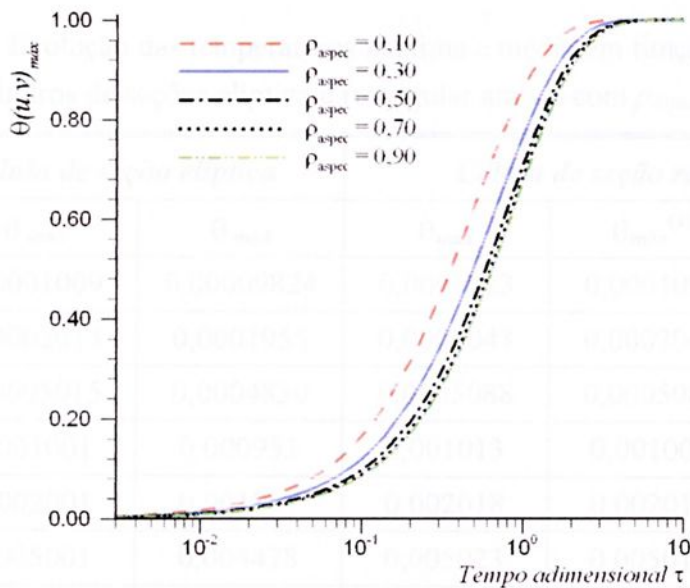


Figura 4.5. Evolução da temperatura máxima em função do tempo em um cilindro de seção retangular para diversas razões de aspecto.

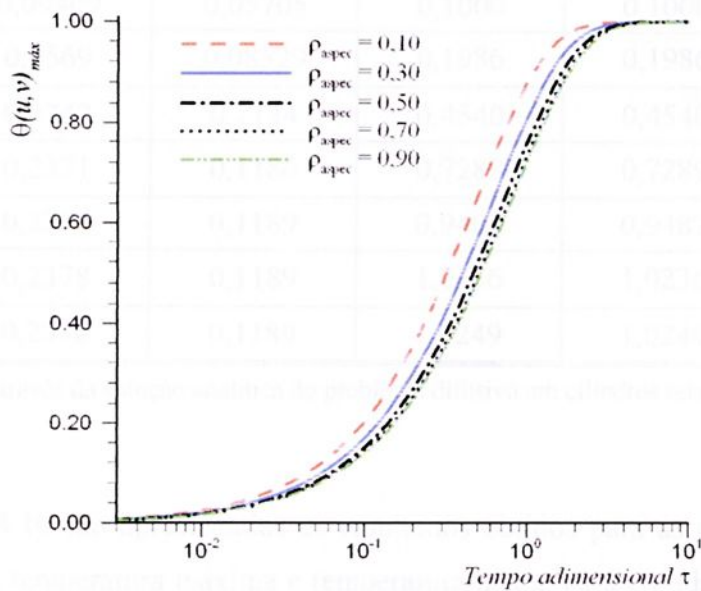


Figura 4.6. Evolução da temperatura média em função do tempo em um cilindro de seção retangular para diversas razões de aspecto.

Os resultados obtidos para a temperatura máxima e temperatura média são apresentados na Tabela 4.9 para cilindros de seção elíptica e retangular com razão de aspecto $\rho_{\text{aspec}} = 0,50$. Os valores da temperatura máxima obtidos para a célula de seção retangular foram comparados com a solução analítica apresentada por Ozisik, (1993). Como pode ser observado, há uma excelente concordância entre os resultados obtidos.



Tabela 4.9. Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo para cilindros de seções elíptica e retangular ambos com $\rho_{aspec} = 0,50$.

τ	<i>Célula de seção elíptica</i>		<i>Célula de seção retangular</i>		
	$\theta_{\text{máx}}$	$\theta_{\text{méd}}$	$\theta_{\text{máx}}$	$\theta_{\text{máx}}^{(1)}$	$\theta_{\text{méd}}$
0,0001	0,0001009	0,00009824	0,0001023	0,0001023	0,00009831
0,0002	0,0002013	0,0001955	0,0002043	0,0002042	0,0001963
0,0005	0,0005015	0,0004830	0,0005088	0,0005086	0,0004889
0,0010	0,001001	0,000953	0,001013	0,001008	0,0009727
0,0020	0,002001	0,001867	0,002018	0,002015	0,001929
0,0050	0,005001	0,004478	0,005023	0,005019	0,004733
0,0100	0,01000	0,008538	0,01002	0,01001	0,009257
0,0200	0,02000	0,01592	0,02002	0,02003	0,01792
0,0500	0,04966	0,03429	0,05002	0,05002	0,04194
0,1000	0,09409	0,05705	0,1000	0,1000	0,07762
0,2000	0,1569	0,08529	0,1986	0,1986	0,1384
0,5000	0,2242	0,1134	0,4540	0,4540	0,2695
1,0000	0,2371	0,1186	0,7289	0,7289	0,3922
2,0000	0,2378	0,1189	0,9487	0,9487	0,4836
5,0000	0,2378	0,1189	1,0236	1,0236	0,5140
10,000	0,2378	0,1189	1,0249	1,0249	0,5145

⁽¹⁾ Resultados obtidos através da solução analítica do problema difusivo em cilindros retangulares (OZISIK,1993).

Na Tabela 4.10 são apresentados os resultados obtidos para as constantes de tempo relacionados com a temperatura máxima e temperatura média para cilindros de seção elíptica e retangular com diversas razões de aspecto.



Tabela 4.10. Constantes de tempo em função da razão de aspecto para cilindros de seções elíptica e retangular.

ρ_{aspec}	Célula de seção elíptica		Célula de seção retangular	
	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$
0,10	0,172	0,135	0,506	0,465
0,20	0,177	0,140	0,601	0,529
0,30	0,181	0,146	0,694	0,588
0,40	0,184	0,151	0,767	0,641
0,50	0,187	0,157	0,818	0,685
0,60	0,188	0,160	0,853	0,718
0,70	0,189	0,163	0,875	0,742
0,80	0,190	0,164	0,888	0,757
0,90	0,190	0,165	0,895	0,765

Como pode ser visualizado nas Figuras. 4.7. e 4.8., a constante de tempo sofre uma maior influência da razão de aspecto nos cilindros de seção retangular. Mas para todos os casos analisados observa-se que a constante de tempo relacionada com a temperatura média é inferior quando comparado com a constante de tempo relacionada com a temperatura máxima.

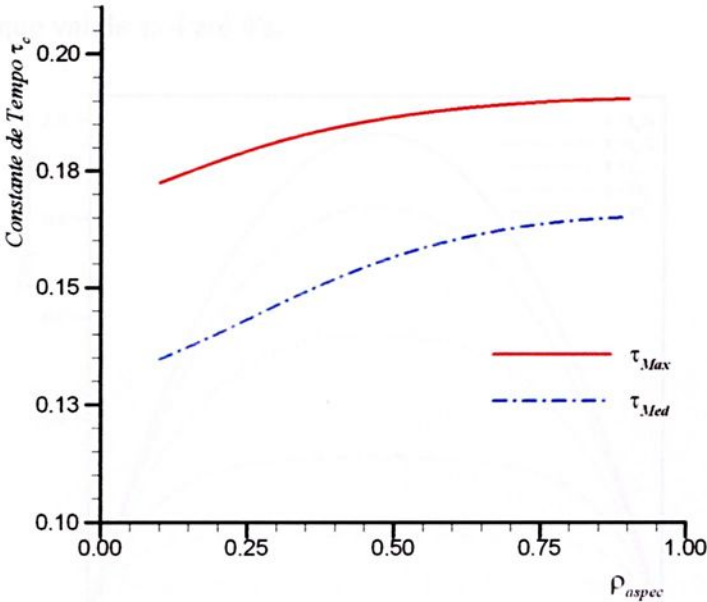


Figura 4.7. Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção elíptica em função da razão de aspecto.



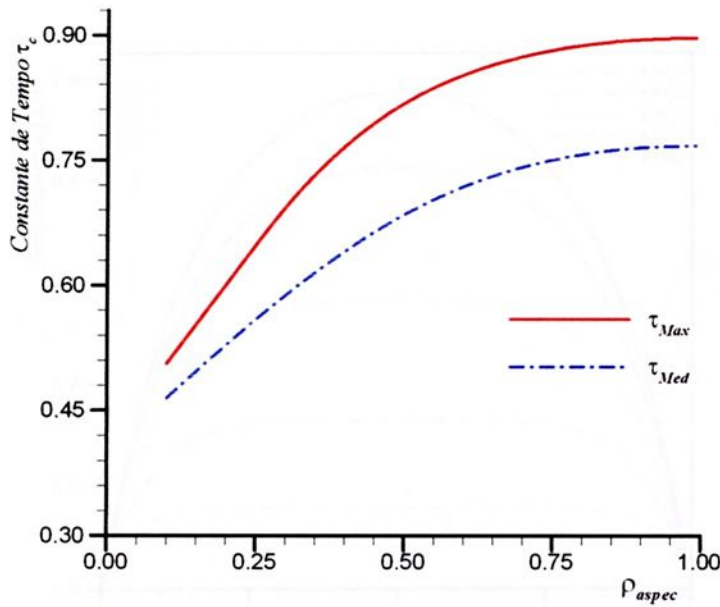


Figura 4.8. Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção retangular em função da razão de aspecto.

Observa-se também que tanto a constante de tempo máxima quanto a média aumentam de valor em função da razão de aspecto. Isso decorre devido à menor relação perímetro / área transversal observada na célula de combustível com o aumento deste parâmetro (ρ_{aspec}).

A seguir é mostrada, nas Figuras 4.9 e 4.10, a evolução do perfil de temperatura para cilindros elípticos e retangulares, ao longo do eixo x em função do tempo adimensional. Nota-se que quase todo o espectro de energia, representado pela temperatura média, está contido no intervalo de tempo que vai de $\tau_c/4$ até $4\tau_c$.

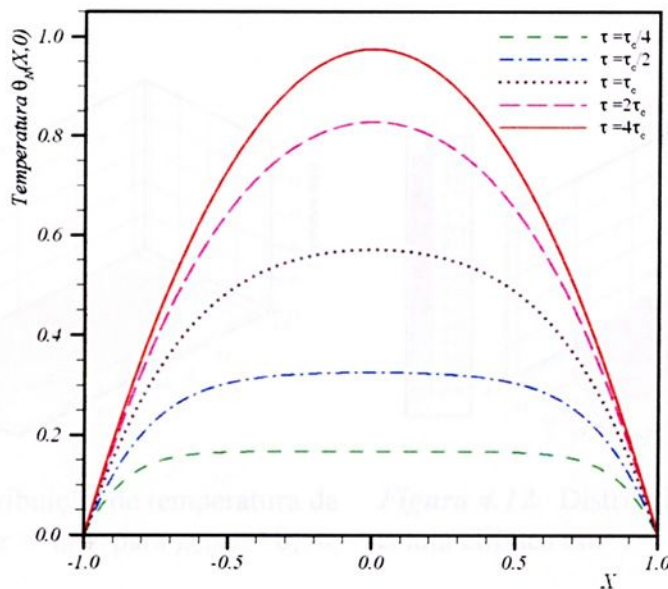


Figura 4.9. Evolução da temperatura normalizada para um cilindro de seção elíptica ao longo do eixo x em função do tempo adimensional.



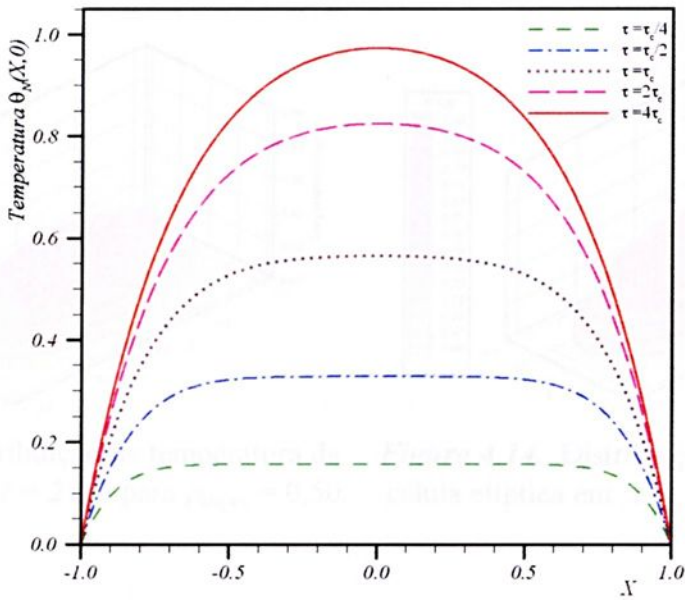


Figura 4.10. Evolução da temperatura normalizada para um cilindro de seção retangular ao longo do eixo x em função do tempo adimensional.

A seguir, para uma melhor visualização da evolução dos perfis de temperatura para o problema proposto, são apresentadas nas Figuras 4.11 a 4.16 as superfícies tridimensionais geradas pelo potencial temperatura θ_N , em diversos instantes τ , de células de combustível cilíndricas com seção transversal elíptica, de razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

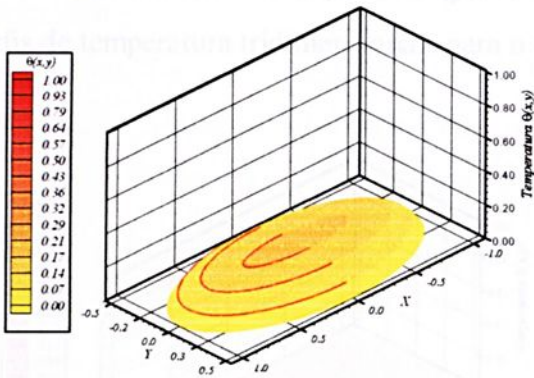


Figura 4.11. Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

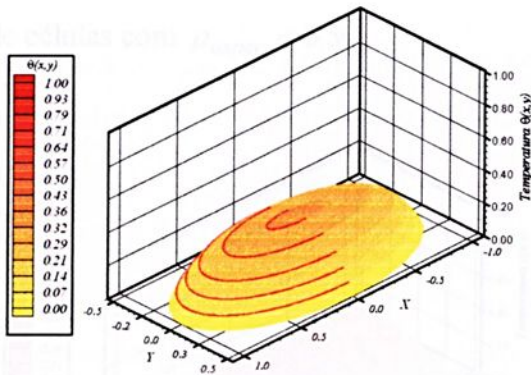


Figura 4.12. Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.



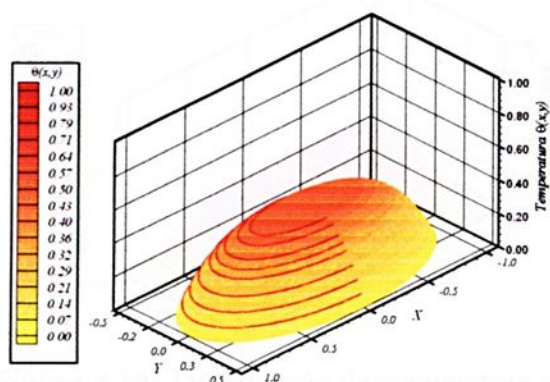


Figura 4.13. Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

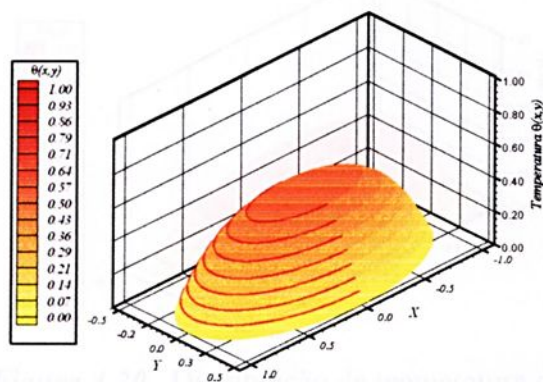


Figura 4.14. Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

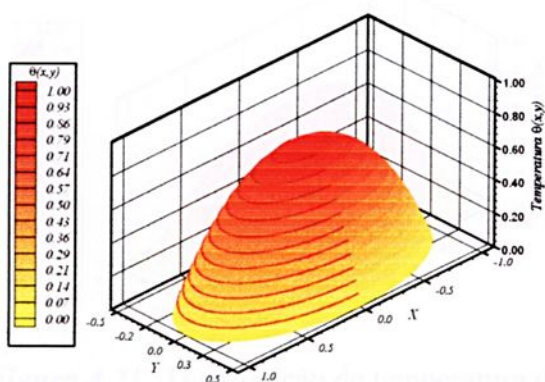


Figura 4.15. Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

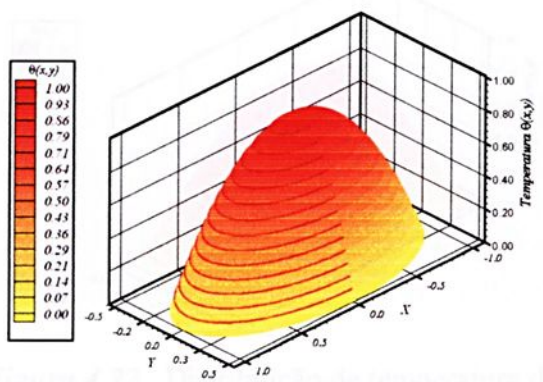


Figura 4.16. Distribuição de temperatura da célula elíptica em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

Para cilindros de seção retangular, as Figuras 4.17 a 4.22 mostram a evolução dos perfis de temperatura tridimensionais para o caso de células com $\rho_{aspec} = 0,50$.

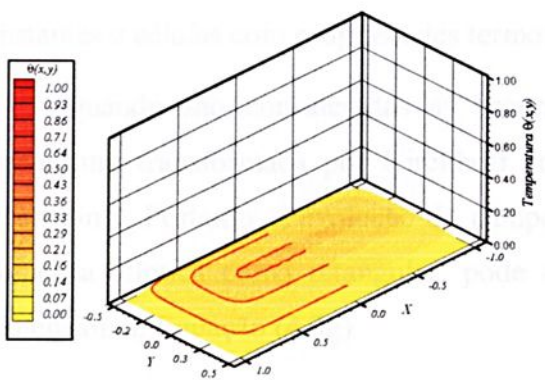


Figura 4.17. Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = \tau_c/4$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

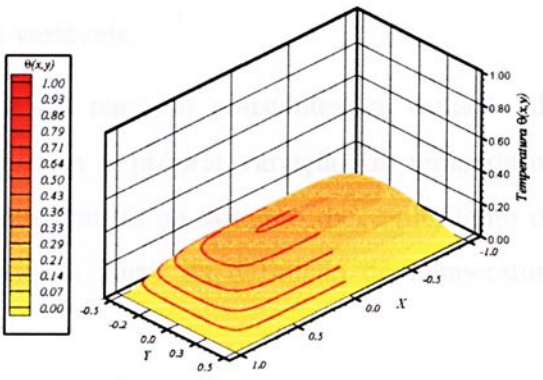


Figura 4.18. Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = \tau_c/2$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

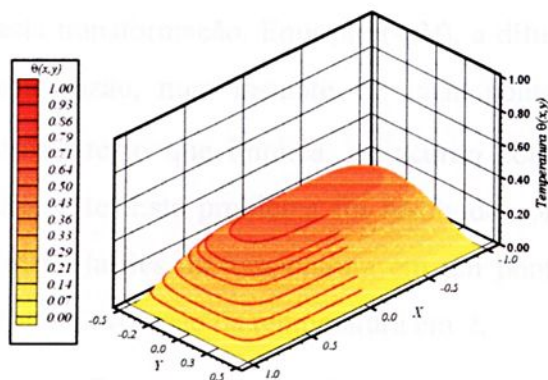


Figura 4.19. Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = 2\tau_c/3$ para $\rho_{aspec}=0,50$.

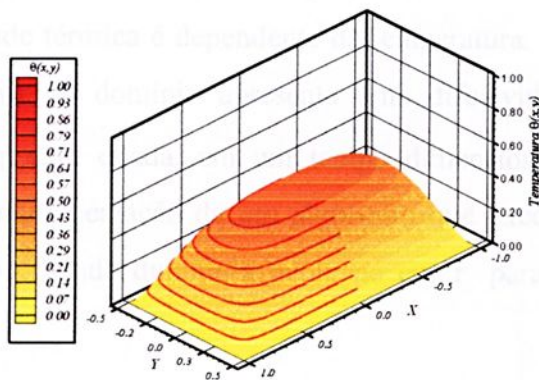


Figura 4.20. Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = \tau_c$ para $\rho_{aspec}=0,50$.

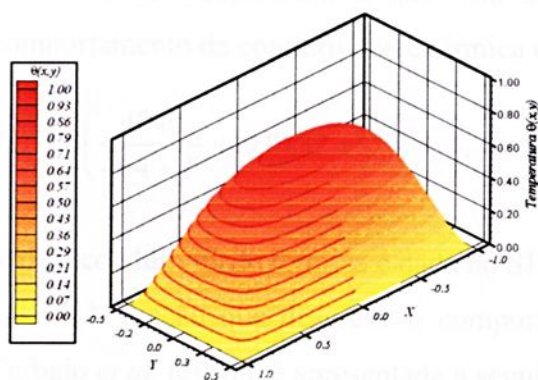


Figura 4.21. Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = 2\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

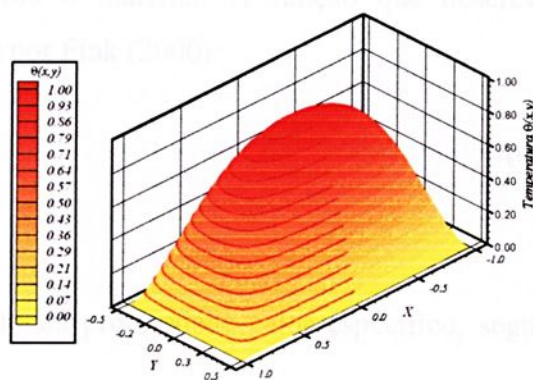


Figura 4.22. Distribuição de temperatura da célula retangular em $\tau = 4\tau_c$ para $\rho_{aspec} = 0,50$.

4.2.4. PARÂMETROS FÍSICOS DIMENSIONAIS – TRANSFORMADA INVERSA DE KIRCHHOFF

Nesta Seção são apresentados os resultados dimensionais para uma célula de UO_2 especificada. Foram considerados dois modelos: células com propriedades termofísicas constantes e células com propriedades termofísicas variáveis.

Quando são consideradas as propriedades do material constantes, a variação da temperatura transformada por Kirchhoff coincide com a própria variação da temperatura dimensional. Portanto, a evolução do campo de temperatura no domínio da célula, tanto de geometria elíptica como retangular, pode ser obtida a partir da definição de temperatura adimensional, Equação (4.3g).

Para o modelo em que se consideram as propriedades variáveis é necessário proceder a transformada inversa de Kirchhoff. No entanto, atenção especial foi dada para a



transformação da coordenada temporal τ em t , pois na definição da equação que determina esta transformação, Equação (4.3f), a difusividade térmica é dependente da temperatura. Por esta razão, num instante τ , cada ponto (x,y) do domínio apresenta uma difusividade diferente, o que implica, de acordo com a equação citada, em um tempo dimensional t diferente. Este problema foi resolvido com a implementação de um algoritmo que executa interpolações da temperatura em um ponto especificado durante a evolução em τ para se obter a evolução da temperatura em t .

Para o cálculo dos parâmetros de interesse, é necessário que se conheça o comportamento das propriedades físicas do UO_2 . A seguir, apresentam-se estas propriedades, especificamente a condutividade térmica e o calor específico, que variam devido às grandes variações de temperatura à que está submetido o material. A função que descreve o comportamento da condutividade térmica é dada por Fink (2000):

$$k(T) = \left(\frac{4040}{464 + T} + 0,0132 e^{0,00188 T} \right), \tag{4.35}$$

onde a condutividade térmica é dada no SI.

A função que descreve o comportamento da propriedade calor específico, segundo Carbajo *et al.* (2001), é apresentada a seguir:

$$c_p(T) = c_2 + 2c_3\Theta + 3c_4\Theta^2 + 4c_5\Theta^3 + 5c_6\Theta^4 - c_7\Theta^{-2}, \tag{4.36}$$

onde, $\Theta = T/1000$, T é a temperatura dada em Kelvin, e o calor específico é dado no SI. Esta correlação vale para temperaturas entre $298 \leq T \leq 3120$ K. Os valores das constantes c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 e c_7 são apresentados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11. Constantes usadas na correlação para o cálculo do calor específico do UO_2 .

constante	
c_1	-78,4303
c_2	193,238
c_3	162,8647
c_4	-104,0014
c_5	29,2056
c_6	-1,9507
c_7	2,6441



A Tabela 4.12 apresenta as condições iniciais e de contorno para o problema estudado, além do valor do termo fonte, para os cilindros de seção transversal elíptica e retangular. A taxa de geração térmica, foi determinada de forma que o nível de temperatura no centro da célula atingisse, em regime permanente, valores típicos que são da ordem de 1800 K.

Tabela 4.12. Parâmetros Térmicos e Geométricos da pastilha de UO₂ estudada.

Temperatura na condição inicial	T_i	700	K
Temperatura na condição de contorno	T_n	700	K
Termo Fonte para a célula de seção Elíptica	$\dot{q}_e'''$	580	MW
Termo Fonte para a célula de seção Retangular	$\dot{q}_r'''$	640	MW

Toda a análise foi feita para cilindros de seção elíptica e retangular com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$ e com área da seção transversal correspondente a área da seção de uma pastilha típica de um reator PWR, ou seja: área = 78.5 mm². Para se impor um mesmo patamar de temperatura para ambas as células, os valores do termo fonte são, necessariamente, um pouco diferentes devido as suas características geométricas.

Nas Figuras 4.23 e 4.24 é visualizada, respectivamente, a distribuição de temperatura $T(x,y)$ para a célula de combustível com seção transversal elíptica e retangular, para uma razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

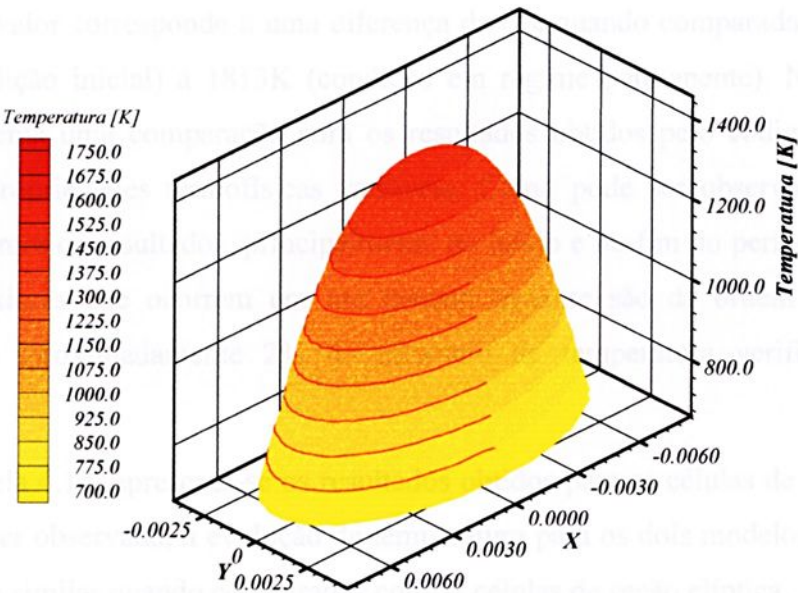


Figura 4.23. Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para a célula de combustível nuclear de seção transversal elíptica para $\rho_{aspec} = 0,50$ e $\tau = \tau_c$.

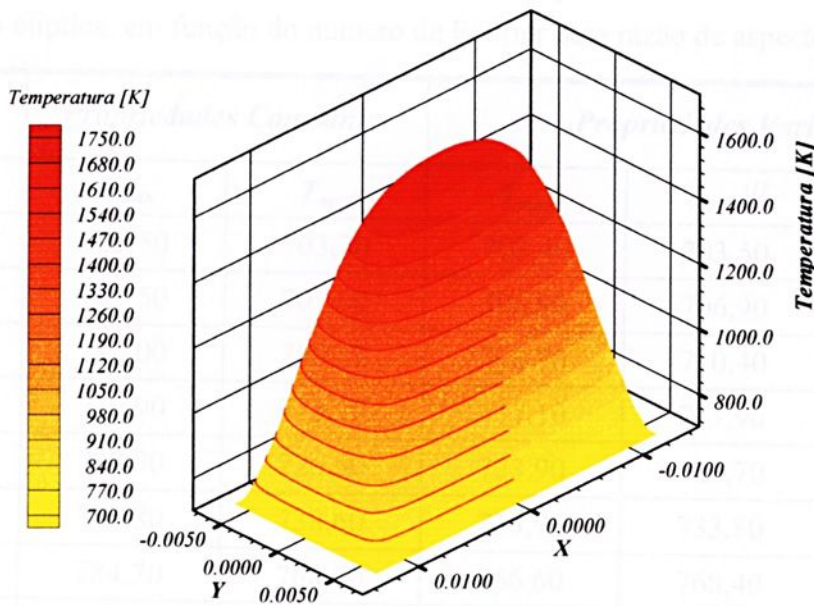


Figura 4.24. Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para a célula de combustível nuclear de seção transversal retangular para $\rho_{aspec} = 0,50$ e $\tau = \tau_c$.

Na Tabela 4.13, apresentam-se os resultados obtidos para os modelos de células de seção elíptica com propriedades constantes e de células com propriedades variáveis. Observa-se, que a temperatura em regime permanente para a célula de propriedades constantes supera em 70K a temperatura obtida para o modelo de célula com propriedades variáveis. Este valor corresponde a uma diferença de 6% quando comparada com o intervalo de 700K (condição inicial) a 1813K (condição em regime permanente). Na mesma tabela ainda se apresenta uma comparação com os resultados obtidos pelo código *Ansys*[®] para o problema de propriedades termofísicas variáveis. Como pode ser observado, há uma boa concordância entre os resultados, principalmente no início e no fim do período transiente. As diferenças máximas que ocorrem em um mesmo instante são da ordem de 20K, o que corresponde a aproximadamente 2% do intervalo de temperatura verificado durante o transiente.

Na Tabela 4.14, apresenta-se os resultados obtidos para as células de seção retangular e, como pode ser observada, a evolução da temperatura para os dois modelos apresentam um comportamento similar quando comparados com as células de seção elíptica.



Tabela 4.13. Valores da temperatura dimensional para uma célula de combustível de UO_2 de seção elíptica, em função do número de Fourier para razão de aspecto $\rho_{\text{aspec}} = 0,50$.

<i>t(s)</i>	<i>Propriedades Constantes</i>		<i>Propriedades Variáveis</i>		
	<i>T_{max}</i>	<i>T_{med}</i>	<i>T_{max}</i>	<i>T_{max}⁽¹⁾</i>	<i>T_{med}</i>
0,02	703,50	703,30	703,40	703,50	703,30
0,04	707,50	707,00	706,90	706,90	706,40
0,06	710,00	709,30	710,30	710,40	709,50
0,10	719,90	718,10	717,10	717,90	715,30
0,13	729,90	726,50	723,90	723,70	721,00
0,19	744,80	738,60	733,90	733,80	729,10
0,38	784,70	768,70	766,60	768,40	753,50
0,57	834,50	802,90	798,30	801,70	775,30
0,95	923,20	857,20	858,70	865,50	813,00
1,34	994,90	896,90	915,20	924,00	845,40
1,91	1128,00	964,60	992,80	1006,40	886,80
3,81	1457,70	1114,60	1202,10	1220,30	987,40
5,72	1648,20	1195,20	1355,50	1377,90	1053,60
9,54	1813,30	1263,20	1556,30	1580,20	1131,50
13,35	1863,30	1283,60	1670,40	1684,00	1170,60
19,07	1881,30	1291,00	1755,50	1764,00	1196,40
38,14	1884,80	1292,40	1811,10	1812,90	1210,20
49,59	1884,80	1292,40	1813,40	1813,60	1210,60
51,49	1884,80	1292,40	1813,50	1813,60	1210,60
53,40	1884,80	1292,40	1813,60	1813,60	1210,60
55,31	1884,80	1292,40	1813,60	1813,60	1210,60

⁽¹⁾ Valores Obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do programa *Ansys*®.



Tabela 4.14. Valores da temperatura dimensional para uma célula de combustível de UO_2 de seção retangular, em função do número de Fourier para razão de aspecto $\rho_{\text{aspec}} = 0,50$.

Propriedades Constantes			Propriedades Variáveis		
$t(s)$	T_{max}	T_{med}	T_{max}	$T_{\text{max}}^{(1)}$	T_{med}
0,02	700,80	700,80	700,80	700,80	700,70
0,03	701,70	701,60	701,60	701,60	701,50
0,05	702,30	702,20	702,40	702,40	702,20
0,08	704,60	704,30	704,00	704,10	703,70
0,11	706,90	706,40	705,60	705,60	705,20
0,16	710,30	709,50	708,00	708,20	707,30
0,32	719,40	717,40	715,80	715,80	714,10
0,47	730,70	726,90	723,50	723,60	720,50
0,79	751,10	743,20	738,80	739,20	732,60
1,11	768,10	756,00	753,90	754,90	743,90
1,58	802,10	780,20	776,00	777,80	759,60
3,17	914,10	850,50	846,20	853,50	804,60
4,75	1020,50	909,00	910,90	925,40	842,00
7,91	1206,30	1001,40	1024,70	1051,40	902,40
11,08	1355,60	1070,10	1121,90	1161,30	950,20
15,83	1521,60	1142,60	1243,50	1296,50	1006,20
31,66	1762,60	1242,90	1510,00	1569,40	1115,20
47,49	1835,80	1272,80	1649,10	1690,30	1164,40
79,14	1859,10	1282,30	1759,10	1768,20	1197,50
110,80	1860,60	1282,90	1787,10	1787,80	1204,40
136,13	1861,00	1283,00	1793,10	1793,50	1205,70
139,29	1861,00	1283,00	1793,40	1793,50	1205,70

⁽¹⁾ Valores Obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do programa *Ansys*®.

Na Tabela 4.15 são apresentados os resultados obtidos para a constante de tempo relativo ao problema das células de seção elíptica e retangular com propriedades termofísicas variáveis.

Figura 4.25 Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspecto. Propriedades físicas constantes e variáveis em células de seção elíptica e retangular



Tabela 4.15. Constantes de tempo para temperatura máxima e média em função da razão de aspecto para células de seção elíptica e retangular com propriedades termofísicas variáveis.

ρ_{aspec}	Elíptico – Prop. variáveis $Fo = t \, \bar{\alpha} / L^2$		Retangular – Prop. variáveis $Fo = t \, \bar{\alpha} / L^2$	
	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$
0,10	0,1790	0,1383	0,5210	0,4774
0,20	0,2038	0,1549	0,6817	0,5829
0,30	0,2422	0,1805	0,9096	0,7227
0,40	0,2907	0,2133	1,1908	0,8964
0,50	0,3400	0,2496	1,4798	1,0888
0,60	0,3717	0,2816	1,6826	1,2631
0,70	0,3741	0,3021	1,7277	1,3784
0,80	0,3671	0,3097	1,6834	1,4263
0,90	0,3545	0,3083	1,6634	1,4254

Na Figura 4.25 é visualizado uma comparação entre os resultados obtidos para a constante de tempo relacionada com a temperatura máxima, quando se considera o modelo de propriedades termofísicas constantes e o modelo de propriedades termofísicas variáveis. Observa-se que para as células delgadas, $\rho_{aspec} \rightarrow 0$, a influência da variação das propriedades se torna menos relevante visto que, nestes casos, a variação da temperatura na direção do eixo maior é menos acentuado.

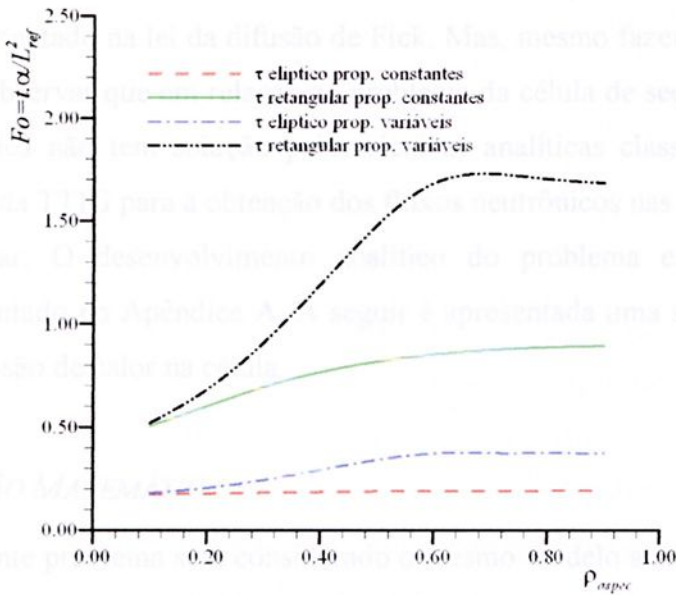


Figura 4.25. Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspecto: Propriedades físicas constantes e variáveis em células de seção elíptica e retangular.



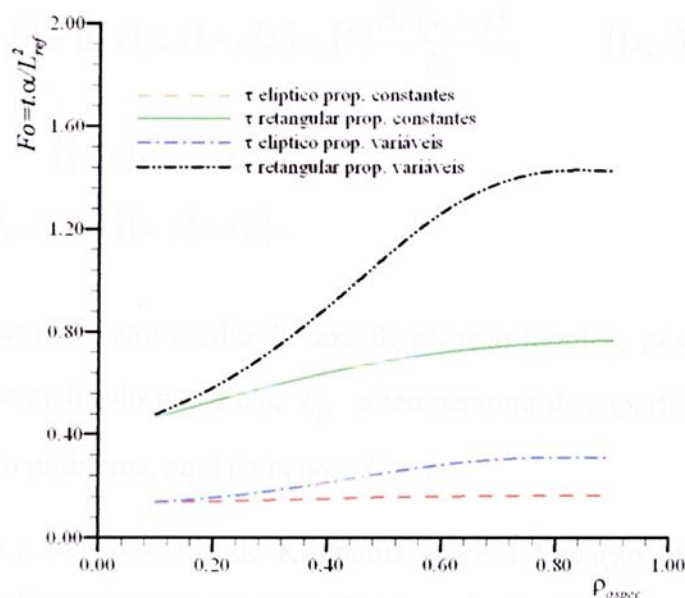


Figura 4.26. Constante de tempo para temperatura média em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em cilindros elípticos e retangulares.

4.3. PROBLEMA DIFUSIVO COM FONTES VARIÁVEIS

Nesta seção, será feita a análise do problema da célula cujo termo fonte é obtido a partir da solução da equação da difusão neutrônica no combustível.

A difusão de nêutrons no interior de um reator nuclear é de natureza bastante complexa (GLASSTONE, 1994). Por isso, será utilizado no presente trabalho um modelo simplificado fundamentado na lei da difusão de Fick. Mas, mesmo fazendo uso desse modelo simplificado, vale observar que em relação ao problema da célula de seção elíptica a equação da difusão neutrônica não tem solução pelas técnicas analíticas clássicas. Dessa maneira, também é feito uso da TTIG para a obtenção dos fluxos neutrônicos nas células de geometrias elíptica e retangular. O desenvolvimento analítico do problema específico da difusão neutrônica é apresentado no Apêndice A. A seguir é apresentada uma síntese da formulação do problema da difusão de calor na célula.

4.3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para o presente problema será considerado o mesmo modelo analisado na Seção 4.2.1, porém com a presença de um termo fonte do tipo $\dot{q}'''(x,y) = \overline{\dot{q}'''} \phi(x,y)$. Desta forma a Equação (4.1a) é reescrita como segue:

$$\nabla \cdot [k(T) \nabla T(x, y, t)] + \bar{\dot{q}}''' \phi(x, y) = \rho(T) c_p(T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}, \quad \{(x, y) \in \Omega, \quad t > 0\}, \quad (4.39a)$$

$$T(x, y, t) = T_p, \quad \{(x, y) \in \Gamma, \quad t > 0\}, \quad (4.39b)$$

$$T(x, y, 0) = T_i = T_p, \quad \{(x, y) \in \Omega\}, \quad (4.39c)$$

onde, $\bar{\dot{q}}'''$ representa o valor médio da taxa de geração térmica, $\phi(x, y)$ o fluxo neutrônico adimensional e normalizado na célula, T_p a temperatura da superfície da pastilha e T_i , a condição inicial do problema, aqui dada por $T_i = T_p$.

Aplicando a transformada de Kirchhoff sobre a Equação (4.39) e fazendo uso do procedimento de adimensionalização especificado na Seção 4.2.1, a equação da energia na sua forma adimensional é dada por:

$$\nabla^2 \theta(X, Y, \tau) + \phi(X, Y) = \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X, Y) \in \Omega, \quad \tau > 0\}, \quad (4.40a)$$

$$\theta(X, Y, \tau) = \theta_p = 0, \quad \{(X, Y) \in \Gamma, \quad \tau > 0\}, \quad (4.40b)$$

$$\theta(X, Y, 0) = \theta_i = 0, \quad \{(X, Y) \in \Omega\}, \quad (4.40c)$$

com:

$$\theta(X, Y, \tau) = \frac{[T^*(X, Y, \tau) - T_p^*]}{L_{ref}^2 \bar{\dot{q}}'''} k_0. \quad (4.40d)$$

4.3.2. APLICAÇÃO DA TTIG

Considerando os mesmos problemas auxiliares de autovalor que foram explicitados para o problema de células com fontes uniformemente distribuídas, estabelece-se o par transformada-inversa para se proceder a transformação integral sobre as coordenadas u e v . Assim, efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas com a equação da energia e fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes aos problemas auxiliares de autovalor em u e v , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(\tau)$:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0, \quad i, m = 1, 2, 3... \quad (4.41a)$$

onde:

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv; \quad (4.41b)$$

$$D_{im} = - \int_0^{v_0} Z_m(v) C_i(v) dv = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) Z_m(v) J(u, v) \phi(u, v) du dv. \quad (4.41c)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du. \quad (4.41)$$

A Equação (4.41a) define um sistema infinito e acoplado de equações diferenciais lineares para o potencial transformado $\tilde{\theta}_{im}(\tau)$ que pode ser resolvido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) + D_{im} = 0. \quad (4.42)$$

O potencial temperatura $\theta(u, v, \tau)$ para as células de combustível é obtido, então, através da fórmula de inversão

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(\tau). \quad (4.43)$$

onde as autofunções normalizadas $K_i(u)$ e $Z_m(v)$ são aquelas correspondentes ao problema especificado: célula cilíndrica de seção transversal elíptica ou retangular.

4.3.3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A convergência das séries que definem o potencial temperatura para o problema de células com fontes variáveis apresenta o mesmo comportamento. Assim, como foi observado anteriormente, é suficiente considerar expansões com 25 termos em cada direção para a



convergência de quatro a cinco dígitos na região que engloba praticamente todo o transiente térmico, ou seja, $\tau > 10^{-2}$.

Na Tabela 4.16 são apresentados os resultados obtidos para as constantes de tempo em função do comprimento de difusão neutrônica adimensional L_D^{2*} , conforme definido no Apêndice A. Observa-se que, quanto menor o comprimento de difusão, ou seja, quanto maior a queda de disponibilidade de nêutrons no interior da célula, as constantes de tempo referentes a temperatura máxima, tanto no caso da célula de seção elíptica ou retangular, aumentam de valor. Por outro lado, as constantes de tempo referentes a temperatura média diminuem com o comprimento de difusão. Isto se dá devido à redistribuição energética que ocorre na célula em decorrência da variação espacial do termo fonte.

Tabela 4.16. Constantes de tempo em função da razão do comprimento de difusão neutrônica para cilindros de seções elíptica e retangular.

L_D^{2*}	<i>Célula de seção elíptica</i>		<i>Célula de seção retangular</i>	
	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$
∞	0,1866	0,1565	0,8183	0,6848
2,00	0,1877	0,1559	0,8393	0,6745
1,00	0,1889	0,1554	0,8568	0,6657
0,50	0,1911	0,1543	0,8843	0,6514



PROBLEMA DIFUSIVO TRANSIENTE SEM FONTES

5.1. INTRODUÇÃO

As propriedades mecânicas, magnéticas, elétricas e térmicas de diversos materiais podem ser modificadas sem a necessidade da alteração de sua composição química, bastando uma alteração em sua estrutura molecular.

Desta maneira, é de grande interesse o estudo dos fatores que influenciam a mudança da estrutura interna num dado material, para que se possa, a partir do controle das variáveis envolvidas, obter materiais com propriedades que possibilitem sua aplicação nas mais variadas condições de serviço. É neste contexto que se manifesta o constante desenvolvimento das técnicas de produção, visando obter compostos cada vez mais “ambientalmente corretos”, com propriedades mecânicas superiores, menor peso específico e melhores resistências à corrosão, oxidação, desgaste, entre outros.

Uma maneira amplamente utilizada para mudar a estrutura interna de um material, sem modificação de sua composição química, é a aplicação de tratamento térmico, que, segundo Chiaverini (1996), consiste no conjunto de operações de aquecimento e resfriamento a que são submetidos os materiais, sob condições controladas de temperatura, tempo de exposição ao tratamento, atmosfera onde se processa a transformação e velocidade de resfriamento, com o objetivo de alterar suas propriedades ou conferir-lhes características determinadas.

Assim, o conhecimento e o controle dos parâmetros térmicos envolvidos são de grande importância, uma vez que os níveis de temperatura e as taxas de resfriamento são determinantes para a especificação das propriedades que o material atingirá após o tratamento.

Outro problema difusivo interessante é a análise da evolução dos perfis de temperatura para células de combustível após o “desligamento” de suas fontes. Neste caso, ao contrário de um processo típico de resfriamento de tarugos na indústria metalúrgica, o problema em questão tem uma condição inicial dada pelo perfil de temperatura da célula no instante que se “desliga” as fontes.



Então, dando continuidade ao estudo de problemas difusivos, este Capítulo trata da obtenção de solução de problemas difusivos transientes através da TTIG em domínios bidimensionais representados por cilindros de seção transversal elíptica e retangular, com propriedades termofísicas variáveis. Serão considerados para a análise, problemas com condições de temperatura prescrita no contorno, submetidos a dois tipos de condições iniciais:

- a) condição inicial uniforme, $\theta(u,v,0)=1$, para o caso do resfriamento de tarugos submetidos à tratamento térmico;
- b) condição inicial dada pela solução do problema de células de combustível em regime permanente com fontes, $\theta(u,v,0)=\theta_i(u,v)$.

Neste contexto, a distribuição de temperatura e parâmetros físicos de interesse serão, então, determinados para diversas razões de aspecto dos cilindros de seção elíptica e retangular, e comparados com resultados analíticos, quando possível. Para os casos em que não é possível a obtenção de resultados analíticos, os potenciais e outros parâmetros serão obtidos pelo *software* comercial de elementos finitos *Ansys*®.

5.2. PROBLEMA DIFUSIVO TRANSIENTE SEM FONTES:

CONDIÇÃO INICIAL $\theta(u,v,0)=1$

5.2.1. ANÁLISE

Para o problema proposto, será considerado um meio difusivo que, devido às grandes variações de temperatura no domínio, a condutividade térmica, calor específico e a difusividade térmica apresentam variações significativas. Na presente análise, a densidade será considerada constante, pois esta propriedade varia pouco com a temperatura na região estudada. O modelo com distribuição de temperatura inicial uniforme em todo o domínio representa de forma bastante satisfatória o problema de resfriamento de tarugos submetidos a tratamento térmico.

Neste modelo, a equação da difusão em meios cilíndricos com seção de domínio Ω e contorno Γ , é dada por:

$$\nabla \cdot [k(T) \nabla T(x,y)] = \rho c_p(T) \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t}, \quad \{(x,y) \in \Gamma, \quad t > 0\}, \quad (5.1a)$$



$$T(x, y, t) = T_p, \quad \{(x, y) \in \Gamma, \quad t > 0\}, \quad (5.1b)$$

$$T(x, y, 0) = T_i, \quad \{(x, y) \in \Omega\}. \quad (5.1c)$$

onde, T_p representa a condição de temperatura prescrita no contorno e T_i representa a condição de temperatura inicial uniforme no domínio.

Para facilitar a aplicação da TTIG, a equação da energia será convenientemente linearizada, via transformada de Kirchhoff e transformações adequadas de coordenadas, da forma como segue:

$$\nabla^2 \theta(X, Y, \tau) = \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X, Y) \in \Omega, \quad \tau > 0\}, \quad (5.2a)$$

onde as variáveis independentes X , Y e τ são definidas pelas Equações (4.3d), (4.3d) e (4.3f). Para o valor de θ .

$$\theta(X, Y, \tau) = \frac{T^*(X, Y, \tau) - T_p^*}{T_i^* - T_p^*}. \quad (5.2b)$$

com o índice (*) denotando que o potencial temperatura foi transformado por Kirchhoff.

Reescrevendo a equação da energia e as condições de contorno e inicial do problema no sistema de coordenadas (u, v) característico de cada geometria, têm-se:

A) TARUGOS CILÍNDRICOS DE SEÇÃO ELÍPTICA

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (5.3a)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}; \quad (5.3b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\} \quad (5.3c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0, \quad \tau > 0\}; \quad (5.3d)$$



$$\theta(u, v, \tau) = 1, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0, \quad \tau > 0\}. \quad (5.3e)$$

B) TARUGOS CILÍNDRICOS DE SEÇÃO RETANGULAR

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}; \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}; \quad (5.4b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = 0, \quad \tau > 0\}; \quad (5.4c)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{u = u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}; \quad (5.4d)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = v_0, \quad \tau > 0\}. \quad (5.4e)$$

onde $J(u, v)$ representa o Jacobiano da transformação do sistema de coordenadas.

5.2.2. APLICAÇÃO DA TTIG

Para a obtenção dos perfis de temperatura a transformada integral será aplicada sobre a equação da difusão. Devido a sua característica bidimensional, o potencial $\theta(u, v, \tau)$ será escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, a aplicação da transformada integral será feita por partes, para cada um dos problemas propostos.

A) APLICAÇÃO DA TTIG PARA O CILINDRO DE SEÇÃO ELÍPTICA

Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 < u < \pi/2\}, \quad (5.5a)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(\pi/2) = 0. \quad (5.5b)$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são

$$\mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6a)$$



$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u). \quad (5.6b)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v, \tau) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) \theta(u, v, \tau) du, \quad \text{transformada}, \quad (5.7a)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, \tau), \quad \text{inversa}. \quad (5.7b)$$

onde $\bar{\theta}_i(v, \tau)$ é o potencial transformado em u e $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad (5.8a)$$

$$N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1, \\ \pi/4, & i > 1. \end{cases} \quad (5.8b)$$

Efetuada o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação da difusão dada pela Equação (5.3a) e fazendo uso das condições de contorno dadas pelas Equações (5.3b), (5.3c), (5.3d) e (5.3e) e da equação que define o problema auxiliar de autovalor, Equação (5.5a), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, \tau)}{\partial v^2}, \quad i = 1, 2, 3... \quad (5.9a)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) J(u, v) du. \quad (5.9b)$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada v , considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\}, \quad (5.10a)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi(v_0) = 0. \quad (5.10b)$$



Os autovalores e as autofunções para este novo problema auxiliar são:

$$\lambda_m = (2m-1)l/2v_0, \quad m = 1, 2, 3... \quad (5.11a)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v). \quad (5.11b)$$

As autofunções $\phi_m(v)$ são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, \tau) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (5.12a)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau), \quad \text{inversa}. \quad (5.12b)$$

Aqui, $Z_m(v)$ são as autofunções normalizadas dadas por:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad (5.13a)$$

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}. \quad (5.13b)$$

A transformação integral sobre a coordenada v é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(v)$ com a equação diferencial transformada na coordenada u , Equação (5.9a). Em seguida, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em v , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado $\bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijn} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = 0, \quad i, m = 1, 2, 3... \quad (5.14a)$$

$$B_{ijn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (5.14b)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:



$$\bar{\bar{\theta}}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du . \quad (5.14c)$$

O sistema de equações diferenciais dado pela Equação (5.14a) pode ser resolvido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = 0 \quad (5.15)$$

Assim, o potencial temperatura $\theta_{elip}(u, v, \tau)$ para o tarugo de seção elíptica pode ser determinado através da fórmula de inversão dada pela Equação (5.12b):

$$\theta_{elip}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau) \quad (5.16)$$

B) APLICAÇÃO DA TTIG PARA O CILINDRO DE SEÇÃO RETANGULAR

Para o problema da difusão nos tarugos de seção retangular utilizou-se o mesmo procedimento empregado no problema de domínios de geometria elíptica. Devido à semelhança física dos problemas relatados, as autofunções e os autovalores definidos nas Equações (4.28a), (4.28b), (4.28c) e (4.28d), serão empregados para a obtenção dos potenciais transformados. Dessa forma, a aplicação da TTIG conduz a seguinte relação para o potencial $\theta_{ret}(u, v, \tau)$:

$$\theta_{ret}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau) \quad (5.17)$$

com:

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\bar{\bar{\theta}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \bar{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = 0, \quad (5.18a)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (5.18b)$$

A Equação (5.18a) também representa um sistema de equações diferenciais ordinárias, que pode ser resolvido pela rotina DIVIPAG da biblioteca IMSL, parte integrante do programa computacional *FORTTRAN*.



5.2.3. PARÂMETROS FÍSICOS DE INTERESSE

A) TEMPERATURA MÉDIA E ENERGIA INTERNA ESPECÍFICA

A temperatura média no domínio em um dado instante τ é dada por:

$$\theta_m(\tau) = \frac{[T_m(\tau) - T_p]}{T_i - T_p} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \frac{[T(X, Y, \tau) - T_p]}{T_i - T_p} dA, \quad (5.19a)$$

$$\theta_m(\tau) = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \theta(X, Y, \tau) dA = \frac{1}{A_s} \int_0^{v_0} \int_0^{\kappa} \theta(u, v, \tau) J(u, v) du dv. \quad (5.19b)$$

$\kappa = \pi/2 \Rightarrow$ para o problema de difusão em tarugos elípticos,

$\kappa = u_0 \Rightarrow$ para o problema de difusão em tarugos retangulares,

sendo que a distribuição de temperatura $\theta(u, v, \tau)$ e o Jacobiano da transformação $J(u, v)$ são aqueles correspondentes a cada problema proposto.

Estabelecendo como referência para a energia interna o estado em regime permanente, a energia interna específica em um dado instante pode ser dada por:

$$u(\tau) = \frac{1}{\rho V} \int_V \rho c_p [T(X, Y, \tau) - T(X, Y, \infty)] dV = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} c_p [T(X, Y, \tau) - T_p] dA \quad (5.20)$$

Se o problema apresenta propriedades termofísicas constantes, a energia interna relativa, definida como sendo a relação entre a energia interna no instante τ e a energia interna no instante inicial, pode ser determinada pela temperatura média adimensional:

$$u^*(\tau) = \frac{u(\tau)}{u(0)} = \frac{u}{u_i} = \theta_{med}(\tau) \quad (5.21)$$

B) CONSTANTE DE TEMPO

Para a análise dos problemas abordados é conveniente que se estabeleça um parâmetro apropriado capaz de verificar o comportamento transiente da difusão de calor em função da razão de aspecto do cilindro de seção elíptica e retangular. Para tanto, são definidos aqui duas constantes de tempo: a constante τ_{max} como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a temperatura máxima no domínio esteja a $1/e$ do seu valor em regime permanente, e a constante de tempo τ_{med} como sendo o parâmetro que determina o tempo



necessário para que a temperatura média esteja a $1/e$ do regime permanente. Assim, as constantes de tempo são:

$\theta_{max}(\tau_{max}) = 1/e = 0,36788,$ (5.22a)

$\theta_{med}(\tau_{med}) = 1/e = 0,36788.$ (5.22b)

onde θ_{max} é a temperatura que ocorre no centro da célula.

5.2.4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A) VERIFICAÇÃO DA CONVERGÊNCIA EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE TERMOS DA SÉRIE

Para a determinação dos potenciais transformados $\tilde{\theta}_{jn}$ foi necessário, preliminarmente, calcular os coeficientes B_{ijmn} referentes a cada problema proposto. A integração envolvida no cômputo desses coeficientes foi feita pelo método de quadratura de Gauss. Conseqüentemente, todas as autofunções e o jacobiano da transformação foram calculados nos pontos de quadratura.

A análise de convergência das séries que determinam o potencial temperatura foi feita de maneira análoga àquela adotada no Capítulo anterior. Os resultados obtidos para os tarugos cilíndricos de seção transversal elíptica são apresentados nas Tabelas 5.1 a 5.4.

Tabela 5.1. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,9998	0,9990	1,0000	1,0000	1,0000
0,30	0,9959	1,0002	1,0000	1,0000	1,0000
0,50	0,9937	1,0007	1,0000	1,0000	1,0000
0,70	0,9909	1,0017	0,9998	1,0000	1,0000
0,90	0,9873	1,0041	0,9988	1,0004	0,9998



Tabela 5.2. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,9985	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,30	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,70	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,90	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 5.3. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,7023	0,7023	0,7023	0,7023	0,7023
0,30	0,7510	0,7510	0,7510	0,7510	0,7510
0,50	0,8010	0,8010	0,8010	0,8010	0,8010
0,70	0,8336	0,8336	0,8336	0,8336	0,8336
0,90	0,8467	0,8469	0,8470	0,8470	0,8470

Tabela 5.4. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$.

	Número $N = M$ de termos da série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,003006	0,003006	0,003006	0,003006	0,003006
0,30	0,003337	0,003337	0,003337	0,003337	0,003337
0,50	0,004040	0,004041	0,004041	0,004041	0,004041
0,70	0,004631	0,004632	0,004632	0,004632	0,004632
0,90	0,004901	0,004903	0,004903	0,004903	0,004903



Como pode ser observado, no início do transiente os resultados oscilam em função do número $N = M$ de termos da série. Para $N = M$ par os resultados tendem a ficar abaixo do valor esperado, e para $N = M$ ímpar acima. Este fato é devido a dificuldade das autofunções gerarem um alto valor do gradiente de temperatura na região próxima ao contorno. Como consequência, os potenciais transformados convergem lentamente no início do transiente. Assim, devido a natureza harmônica das autofunções os resultados oscilam de forma mais acentuada. É interessante observar, no entanto, que para $N = M$ próximos (por exemplo: $N = M = 14$ e $N = M = 15$) o valor médio dos resultados obtidos no início do transiente corresponde àquele esperado.

Mas, de uma maneira geral, os resultados obtidos para temperatura máxima alcançam convergência de quatro dígitos de precisão, quando $N = M = 25$, exceto para o início do transiente ($\tau = 10^{-3}$), em tarugos de seção elíptica com razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 1$. À medida que τ aumenta, observa-se que a série converge com um número bem menor de termos.

O estudo das taxas de convergência para tarugos de seção retangular são apresentados nas Tabelas 5.5 a 5.8, sendo que esta análise também foi feita para os instantes adimensionais $\tau = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$.

A oscilação dos resultados no início do transiente é mais acentuada para estes casos. Uma convergência de pelo menos quatro dígitos é verificada com $N = M = 25$ somente a partir de $\tau = 10^{-2}$. Mas, à medida que τ aumenta, observa-se também que a série converge com um número bem menor de termos, principalmente quando a razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 0$.

Tabela 5.5. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$.

	Número $N = M$ de termos da série					
ρ_{aspec}	14	15	24	25	34	35
0,10	0,9732	1,0245	0,9872	1,0121	0,9915	1,0082
0,30	0,9725	1,0249	0,9897	1,0095	0,9949	1,0048
0,50	0,9723	1,0249	0,9918	1,0074	0,9973	1,0025
0,70	0,9722	1,0249	0,9930	1,0062	0,9984	1,0013
0,90	0,9722	1,0248	0,9935	1,0057	0,9989	1,0004



Tabela 5.6. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$

	Número $N = M$ de Termos da Série					
ρ_{aspec}	14	15	24	25	34	35
0,10	0,9807	1,0177	0,9917	1,0077	0,9963	1,0034
0,30	0,9919	1,0067	0,9994	1,0005	1,0000	1,0000
0,50	0,9974	1,0019	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,70	0,9991	1,0005	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,90	0,9996	1,0001	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 5.7. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$

	Número $N = M$ de termos da série					
ρ_{aspec}	14	15	24	25	34	35
0,10	0,9678	0,9757	0,9721	0,9722	0,9722	0,9722
0,30	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927
0,50	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984
0,70	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
0,90	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabela 5.8. Convergência da temperatura no centro do tarugo de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$

	Número $N = M$ de termos da série					
ρ_{aspec}	14	15	24	25	34	35
0,10	0,1657	0,1657	0,1657	0,1657	0,1657	0,1657
0,30	0,2944	0,2944	0,2944	0,2944	0,2944	0,2944
0,50	0,3964	0,3964	0,3964	0,3964	0,3964	0,3964
0,70	0,4488	0,4488	0,4488	0,4488	0,4488	0,4488
0,90	0,4680	0,4680	0,4680	0,4680	0,4680	0,4680



B) APRESENTAÇÃO DE PARÂMETROS DE INTERESSE

Os perfis de temperatura máxima e médio são apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2 para tarugos de seção transversal elíptica de diversas razões de aspecto. Como também observado no capítulo anterior, a evolução da temperatura é mais rápida nos tarugos de razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 0$. Vale ainda observar que a razão de aspecto dos tarugos exerce uma maior influência na evolução da temperatura máxima do que na temperatura média.

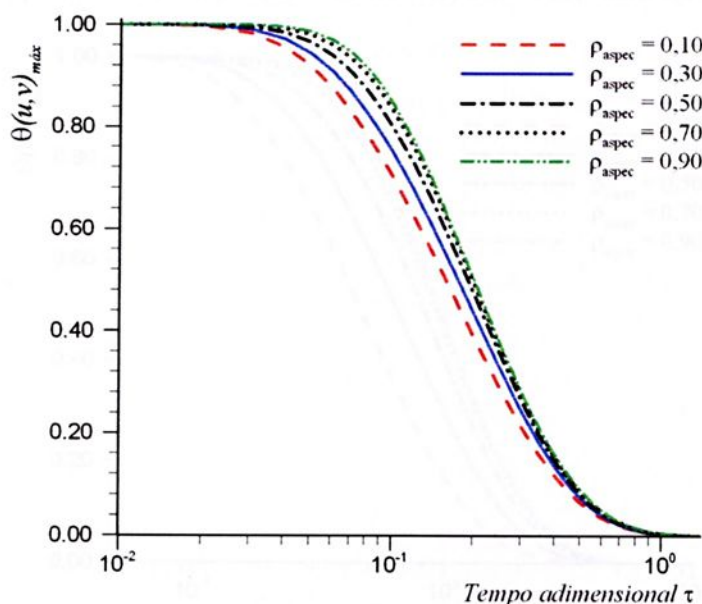


Figura 5.1. Evolução da temperatura máxima em função do tempo em um tarugo de seção elíptica para diversas razões de aspecto.

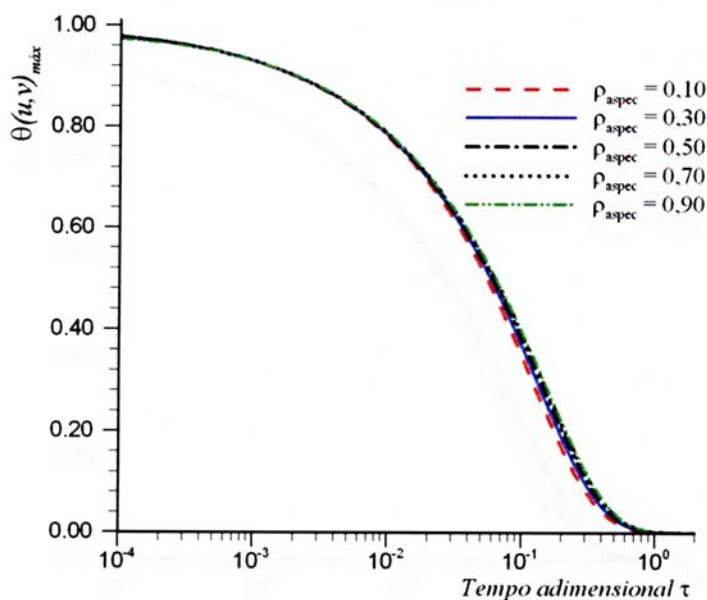


Figura 5.2. Evolução da temperatura média em função do tempo em um tarugo de seção elíptica para diversas razões de aspecto.



Nas Figuras 5.3 e 5.4, são visualizados os perfis de temperatura máxima e médio, para tarugos de seção transversal retangular com diversas razões de aspecto. É interessante observar que a razão de aspecto nos domínios de geometria retangular exerce uma influência muito mais acentuada sobre a evolução da temperatura quando comparado os mesmos resultados obtidos para domínios de geometria elíptica. Vale lembrar que a evolução da temperatura média representa a evolução da energia interna adimensional para os problemas que apresentam propriedades termofísicas constantes, como foi visto na Seção 5.2.3.

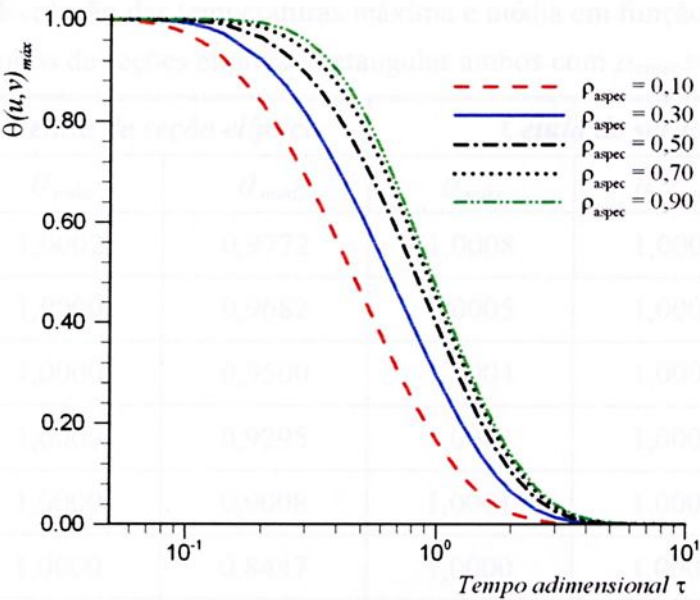


Figura 5.3. Evolução da temperatura máxima em função do tempo em um tarugo de seção retangular para diversas razões de aspecto.

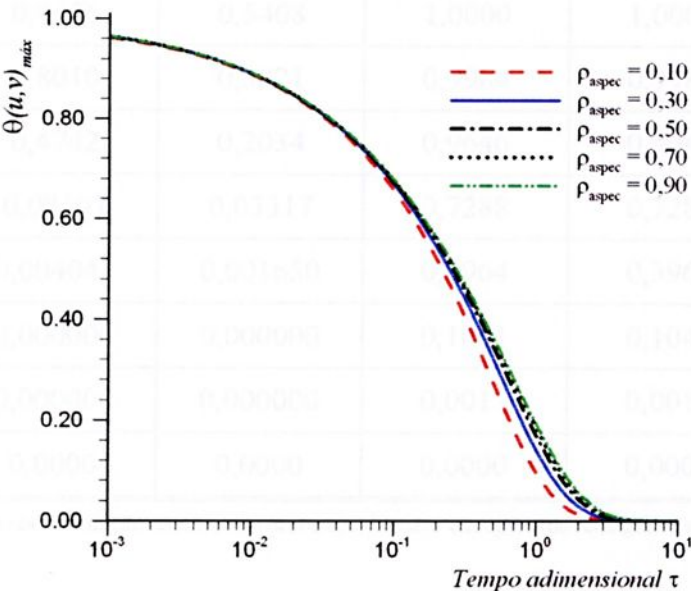


Figura 5.4. Evolução da temperatura média em função do tempo em um tarugo de seção retangular para diversas razões de aspecto.



Os resultados obtidos para os perfis de temperatura máxima e temperatura média em tarugos de seção elíptica e retangular com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$ são apresentados na Tabela 5.9. O problema difusivo transiente em cilindros retangulares permite a obtenção de solução analítica pelo método da separação de variáveis (ÖZISIK, 1993) e, para fins de comparação, os resultados obtidos para a temperatura máxima também são apresentados na Tabela 5.9. Como pode ser observado, há uma excelente concordância entre os mesmos.

Tabela 5.9. Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo para tarugos de seções elíptica e retangular ambos com $\rho_{aspec} = 0,50$.

τ	Célula de seção elíptica		Célula de seção retangular		
	$\theta_{máx}$	$\theta_{méd}$	$\theta_{máx}$	$\theta^{(1)}_{máx}$	$\theta_{méd}$
0,0001	1,0002	0,9772	1,0008	1,0000	0,9833
0,0002	1,0000	0,9682	1,0005	1,0000	0,9805
0,0005	1,0000	0,9500	1,0004	1,0000	0,9734
0,0010	1,0000	0,9295	1,0003	1,0000	0,9640
0,0020	1,0000	0,9008	1,0001	1,0000	0,9500
0,0050	1,0000	0,8447	1,0000	1,0000	0,9216
0,0100	1,0000	0,7830	1,0000	1,0000	0,8900
0,0200	0,9997	0,6984	1,0000	1,0000	0,8461
0,0500	0,9656	0,5408	1,0000	1,0000	0,7618
0,1000	0,8010	0,3821	0,9984	0,9984	0,6715
0,2000	0,4742	0,2034	0,9646	0,9649	0,5520
0,5000	0,08107	0,03317	0,7288	0,7288	0,3443
1,0000	0,004041	0,001650	0,3964	0,3964	0,1689
2,0000	0,000000	0,000000	0,1041	0,1041	0,0424
5,0000	0,000000	0,000000	0,0017	0,0017	0,0007
10,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

(1) Resultados obtidos através da solução analítica do problema difusivo em cilindros retangulares (ÖZISIK, 1993).

Na Tabela 5.10 são apresentados os resultados obtidos para as constantes de tempo relacionados com a temperatura máxima e temperatura média para tarugos de seção elíptica e



retangular com diversas razões de aspecto. Assim, como foi ressaltado anteriormente, a constante de tempo sofre uma maior influência da razão de aspecto nos tarugos com domínios de geometria retangular. Mas para todos os casos analisados observa-se, como era esperado, que a constante de tempo relacionada com a temperatura média é inferior quando comparado com a constante de tempo relacionada com a temperatura máxima.

Tabela 5.10. Constantes de tempo em função da razão de aspecto para cilindros de seções elíptica e retangular.

ρ_{aspec}	Célula de seção elíptica		Célula de seção retangular	
	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$
0,10	0,209	0,0922	0,609	0,357
0,20	0,219	0,0957	0,725	0,389
0,30	0,230	0,0995	0,850	0,417
0,40	0,238	0,103	0,967	0,438
0,50	0,245	0,106	1,058	0,455
0,60	0,249	0,108	1,122	0,470
0,70	0,251	0,110	1,162	0,477
0,80	0,254	0,111	1,187	0,483
0,90	0,254	0,111	1,199	0,490
0,99	0,255	0,111	1,203	0,490

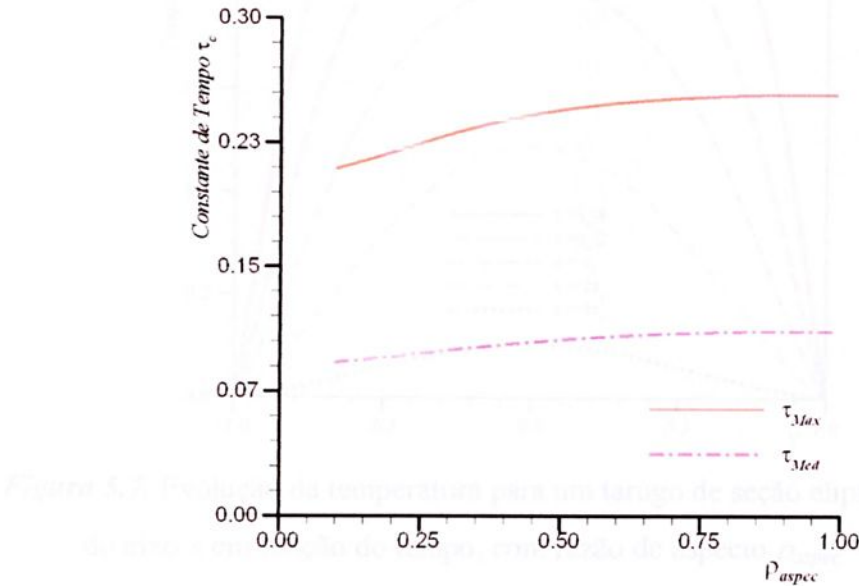


Figura 5.5. Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção elíptica em função da razão de aspecto.

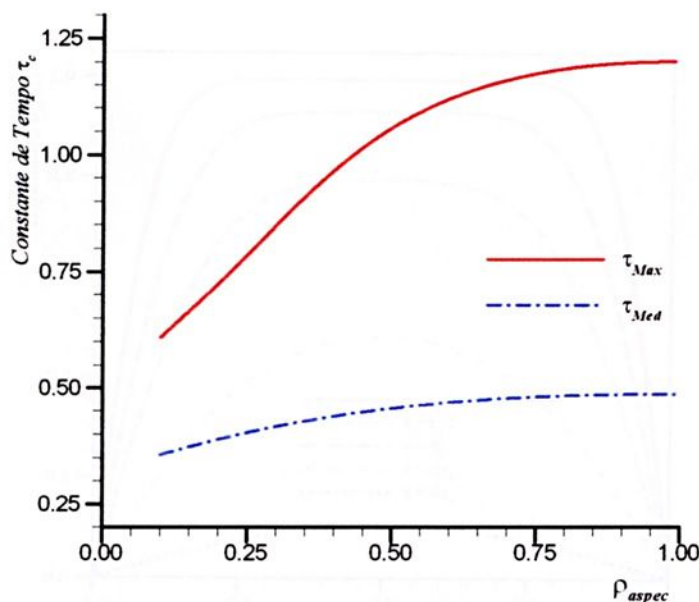


Figura 5.6. Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção retangular em função da razão de aspecto.

Nas Figuras 5.7 e 5.8, apresenta-se uma visualização da evolução do perfil de temperatura sobre o eixo principal de um tarugo com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$. Nota-se que o intervalo de temperatura estudado está quase todo inserido no tempo entre $\tau_c/4$ até $4\tau_c$.

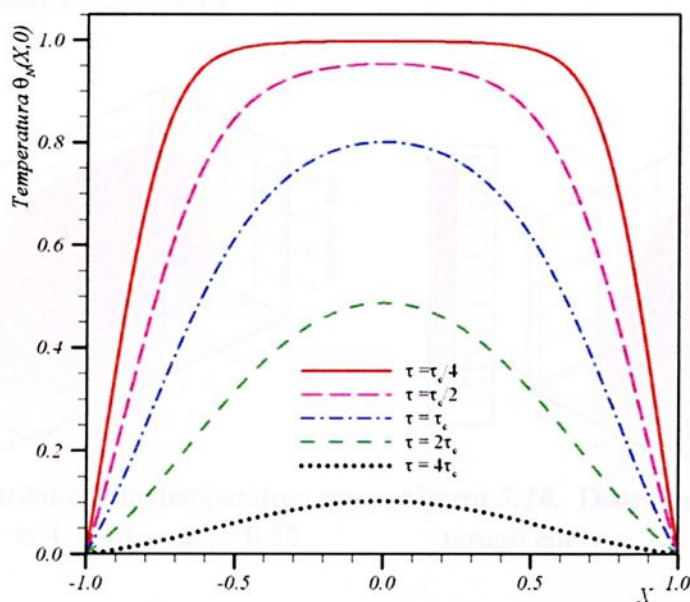


Figura 5.7. Evolução da temperatura para um tarugo de seção elíptica ao longo do eixo x em função do tempo, com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

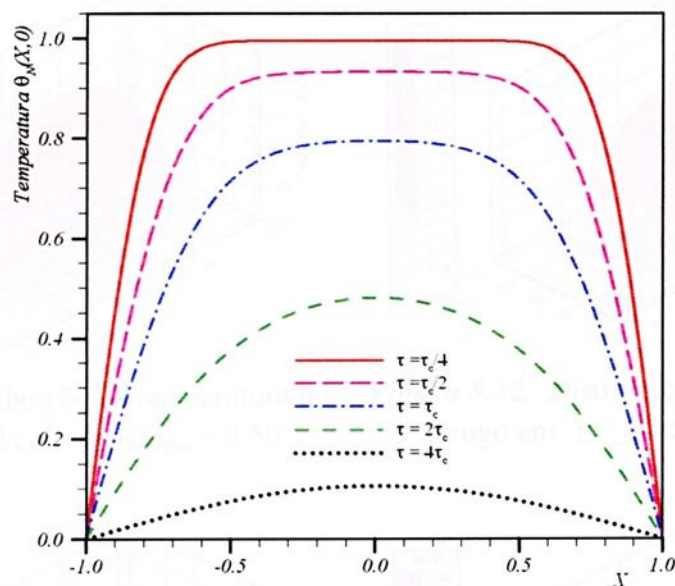


Figura 5.8. Evolução da temperatura para um tarugo de seção retangular ao longo do eixo x em função do tempo, com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

Nas Figuras 5.9 a 5.14 são visualizados as superfícies tridimensionais geradas pelo potencial temperatura adimensional θ em diversos instantes τ , para tarugos de seção elíptica com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

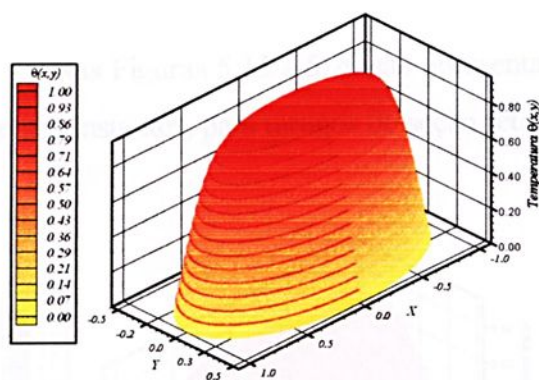


Figura 5.9. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/4$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

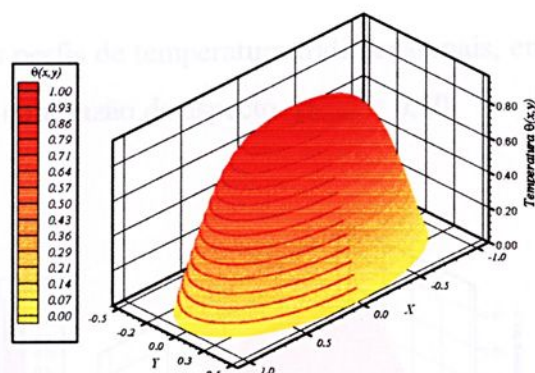


Figura 5.10. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/2$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

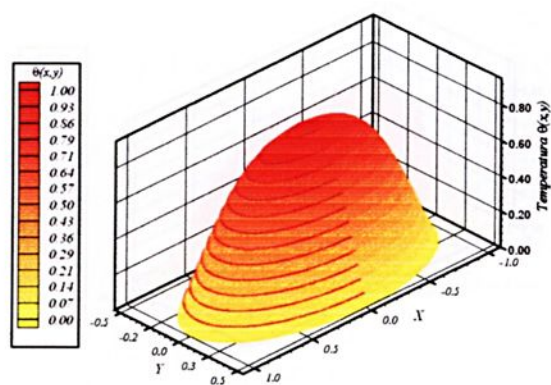


Figura 5.11. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c/3$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

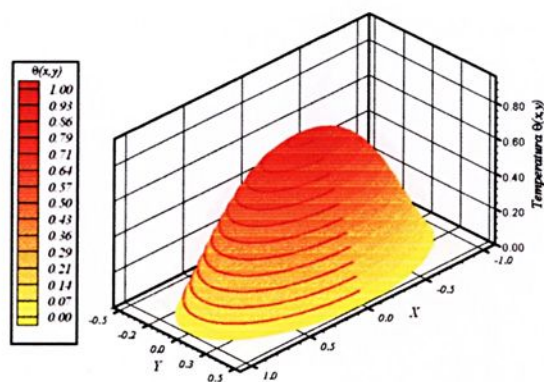


Figura 5.12. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

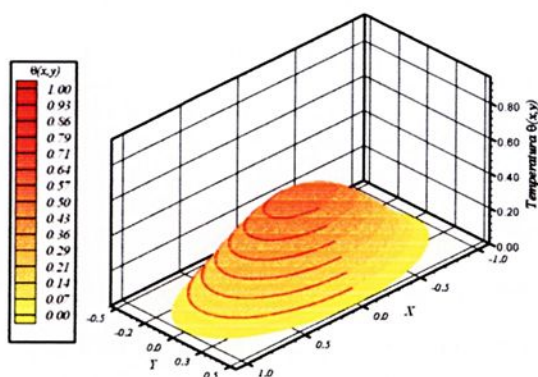


Figura 5.13. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

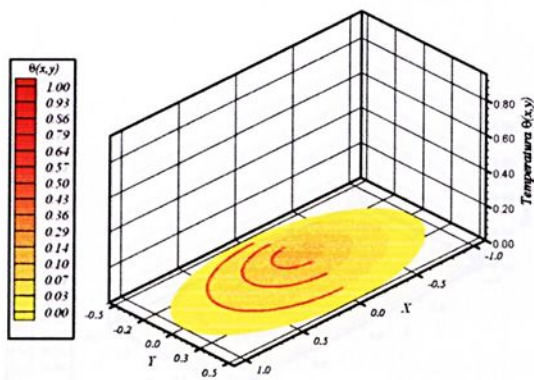


Figura 5.14. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 4\tau_c$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

Nas Figuras 5.15 a 5.20 são apresentadas os perfis de temperatura tridimensionais, em diversos instantes, para tarugos de seção retangular com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

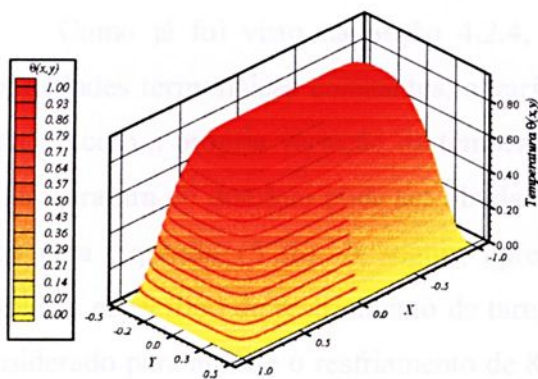


Figura 5.15. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/4$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

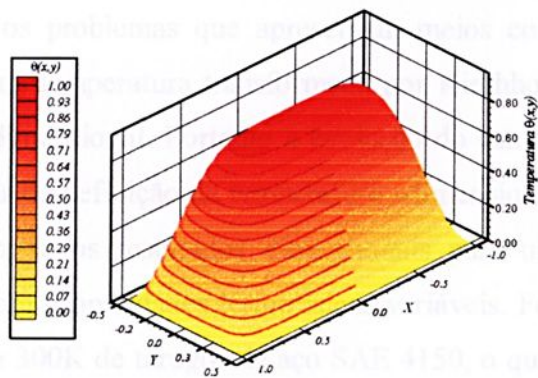


Figura 5.16. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c/2$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

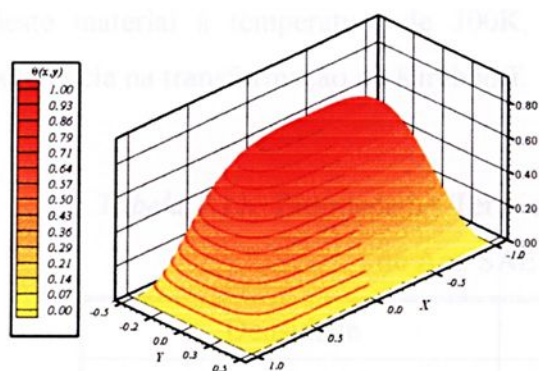


Figura 5.17. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c/3$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

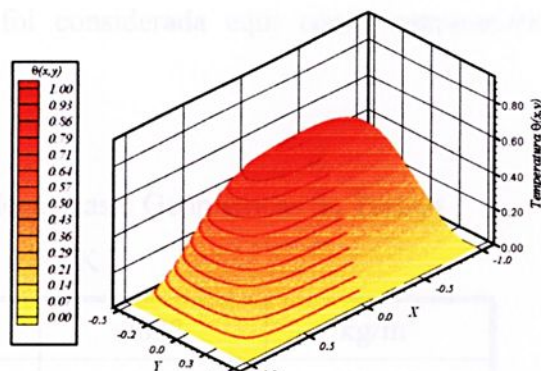


Figura 5.18. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = \tau_c$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

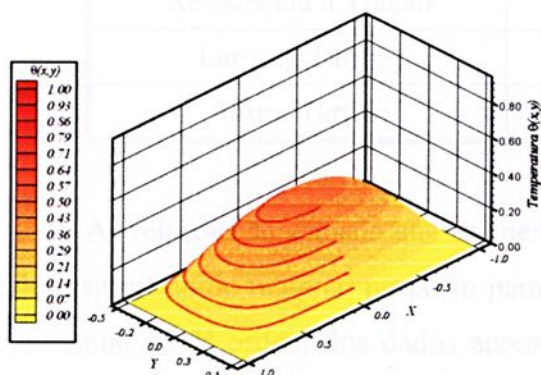


Figura 5.19. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 2\tau_c$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

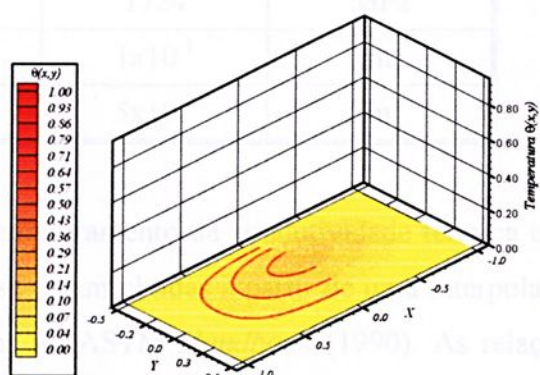


Figura 5.20. Distribuição de temperatura no tarugo em $\tau = 4\tau_c$ com $\rho_{aspec} = 0,50$.

5.2.5. PARÂMETROS FÍSICOS DIMENSIONAIS – TRANSFORMADA INVERSA DE KIRCHHOFF

Como já foi visto na Seção 4.2.4, para os problemas que apresentam meios com propriedades termofísicas constantes, a variação da temperatura transformada por Kirchhoff coincide com a própria variação da temperatura dimensional. Portanto a evolução do campo de temperatura no domínio pode ser obtida a partir da definição de temperatura adimensional dada pela Equação (5.2b). A seguir, apresentam-se os resultados dimensionais para um problema específico de resfriamento de tarugos com propriedades termofísicas variáveis. Foi considerado para análise o resfriamento de 800K a 300K de tarugos de aço SAE 4150, o qual apresenta 0,50% de carbono, 0,65% de cromo, 0,23% de molibdênio e 0,60% de silício como elementos de liga. Na Tabela 5.11 são apresentadas as propriedades térmicas e mecânicas



deste material à temperatura de 300K, que foi considerada aqui como temperatura de referência na transformação de Kirchhoff.

Tabela 5.11. Propriedades Térmicas, Mecânicas e Geométricas do Tarugo de Aço SAE 4150 a 300K.

Densidade	ρ	7822	kg/m ³
Calor Específico	c_p	444	J/kg.K
Condutividade Térmica	k	37,7	W/m.K
Difusividade Térmica	α	10,9	m ² /s
Resistência à Tração	σ	1724	MPa
Largura Tarugo	L	1x10 ⁻¹	m
Altura Tarugo	l	5x10 ⁻²	m

As relações funcionais que definem o comportamento da condutividade térmica e do calor específico do material proposto para análise foram obtidas a partir de uma interpolação polinomial de 3ª ordem dos dados apresentados no *ASTM Handbook* (1990). As relações obtidas são as seguintes:

$$k(T) = 3,58333 \times 10^{-8} T^3 - 8,825 \times 10^{-5} T^2 + 0,05352 T + 28,62 \quad (5.25)$$

$$c_p(T) = 1,18333 \times 10^{-6} T^3 - 0,00175 T^2 + 1,271 T + 188,8 \quad (5.26)$$

com $k(T)$ e $c_p(T)$ dados no SI. Como a densidade do material varia pouco com a temperatura (*ASTM HANDBOOK*, 1990), foi admitido $\rho = \text{constante}$ no presente trabalho.

Utilizando os mesmos procedimentos numéricos que foram descritos na Seção 4.2.4 para a determinação do campo de temperatura, apresentam-se, a seguir, os perfis de temperatura tridimensionais para tarugos de seção transversal elíptica e retangular, com razão de aspecto $\rho_{\text{aspec}} = 0,50$.



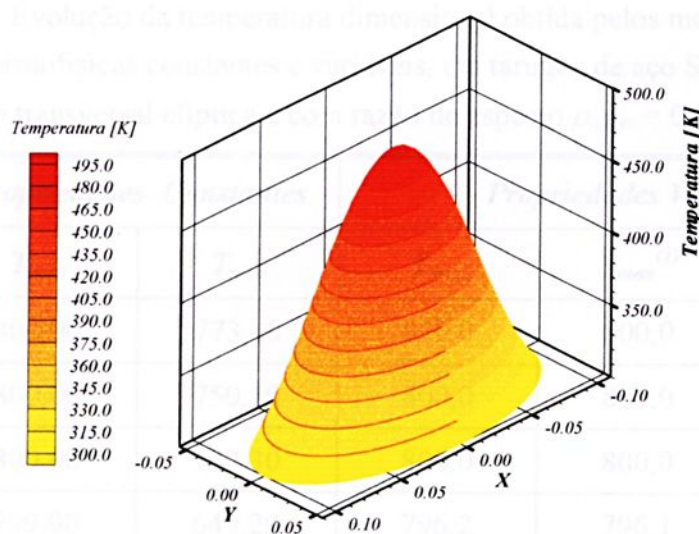


Figura 5.21. Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para um tarugo de seção transversal elíptica para $\rho_{aspec}=0,50$ e $\tau = \tau_c$.

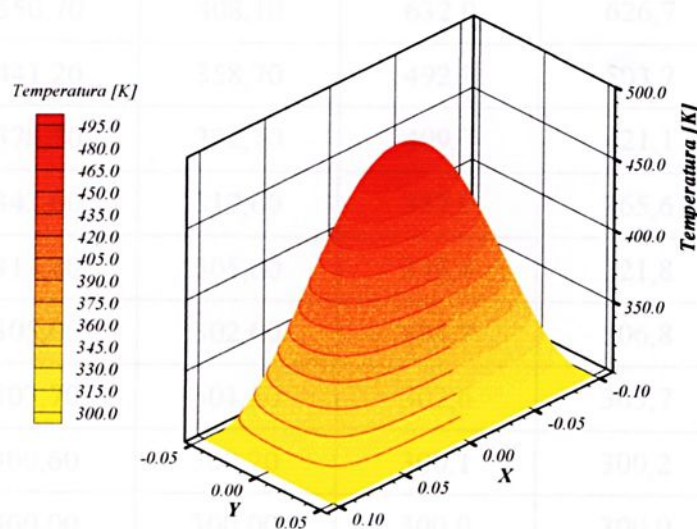


Figura 5.22. Distribuição de temperatura $T(x,y)$ para um tarugo de seção transversal retangular para $\rho_{aspec}=0,50$ e $\tau = \tau_c$.

A seguir, apresentam-se nas Tabelas 5.12 e 5.13 uma comparação dos resultados obtidos quando se considera o modelo com propriedades termofísicas constantes (avaliadas na temperatura média) e o modelo com propriedade termofísicas variáveis, para tarugos de seção elíptica e retangular, ambos com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$. Como pode ser observada, a evolução da temperatura para os dois modelos apresentam um comportamento similar quando comparados com os cilindros de seção elíptica.

Tabela 5.12. Evolução da temperatura dimensional obtida pelos modelos com propriedades termofísicas constantes e variáveis, em tarugos de aço SAE 4150, de seção transversal elíptica e com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

	<i>Propriedades Constantes</i>		<i>Propriedades Variáveis</i>		
<i>t(s)</i>	<i>T_{max}</i>	<i>T_{med}</i>	<i>T_{max}</i>	<i>T_{max}⁽¹⁾</i>	<i>T_{med}</i>
0,39	800,00	773,40	800,0	800,0	772,1
1,94	800,00	750,20	800,0	800,0	738,4
3,88	800,00	722,30	800,0	800,0	713,4
19,40	799,90	649,20	796,2	796,1	612,3
38,80	754,00	533,90	767,3	760,8	538,6
58,2	628,50	447,70	709,5	697,3	481,3
77,6	550,70	408,10	632,0	626,7	436,5
116,4	441,20	358,70	492,8	503,7	376,0
155,2	378,20	332,10	409,7	421,1	342,6
194,0	343,00	317,60	357,9	365,6	322,6
271,5	313,80	305,60	316,4	321,8	306,5
349,1	305,00	302,00	304,7	306,8	301,9
387,9	303,70	301,50	302,6	303,7	301,0
581,9	300,60	300,20	300,1	300,2	300,0
775,8	300,00	300,00	300,0	300,0	300,0

(1) Valores Obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do programa *Ansys*®.



Tabela 5.13. Evolução da temperatura dimensional obtida pelos modelos com propriedades termofísicas constantes e variáveis, em tarugos de aço SAE 4150, de seção transversal retangular e com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

<i>t(s)</i>	<i>Prop. Constantes</i>		<i>Propriedades Variáveis</i>		
	<i>T_{max}</i>	<i>T_{med}</i>	<i>T_{max}</i>	<i>T_{max}⁽¹⁾</i>	<i>T_{med}</i>
1,1	799,40	706,50	800,0	800,0	755,9
4,8	799,60	643,50	800,0	800,0	703,0
10,2	799,20	635,70	800,0	799,8	665,7
15,2	793,80	602,70	799,7	798,7	636,7
19,8	766,10	553,30	797,2	795,5	613,5
30,7	747,10	533,40	789,3	784,5	579,7
40,8	705,80	499,90	772,4	762,2	543,2
51,2	625,10	448,80	745,7	733,4	516,8
71,3	539,90	404,20	683,1	672,7	469,7
90,3	525,20	397,20	613,1	610,3	430,5
103,1	417,10	348,50	579,6	580,2	414,2
153,5	359,60	324,30	448,7	460,5	358,5
205,2	326,30	310,70	376,2	385,1	328,6
307,2	303,40	301,40	317,5	323,3	307,6
512,8	300,00	300,00	301,2	301,5	300,4

⁽¹⁾ Valores Obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do programa *Ansys*®.

É interessante observar a discrepância dos resultados obtidos pelos dois modelos na região próxima ao instante que define a constante de tempo (aproximadamente 500K), principalmente para os tarugos de seção retangular. Por sua vez, apresenta-se ainda nas referidas tabelas uma comparação entre os resultados obtidos através da metodologia aplicada no presente trabalho com os resultados obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do código *Ansys*®. Como pode ser verificado existe uma boa concordância entre os mesmos, com desvios máximos nunca superiores a 2,5% durante o transiente.



Na Tabela 5.14 são apresentados os resultados obtidos para as constantes de tempo relativas a temperatura máxima e média para tarugos de seção elíptica e retangular.

Tabela 5.14. Constantes de tempo para temperatura máxima e média em função da razão de aspecto para propriedades físicas constantes e variáveis.

ρ_{ASPEC}	<i>Elíptico – prop. variáveis</i> $Fo = t \bar{\alpha} / L^2$		<i>Retangular – prop. variáveis</i> $Fo = t \bar{\alpha} / L^2$	
	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$
0,10	0,2654	0,1265	0,7729	0,4858
0,20	0,2775	0,1315	0,9199	0,5327
0,30	0,2903	0,1370	1,0774	0,5731
0,40	0,3006	0,1422	1,2245	0,6066
0,50	0,3078	0,1466	1,3345	0,6332
0,60	0,3128	0,1501	1,4094	0,6534
0,70	0,3160	0,1527	1,4593	0,6677
0,80	0,3180	0,1544	1,4891	0,6769
0,90	0,3189	0,1551	1,5042	0,6818

Como pode ser verificada, a razão de aspecto para os tarugos de seção retangular exerce uma maior influência no comportamento das constantes de tempo. Da mesma forma como foi apresentada na Seção 4.2.4, o tempo adimensional $Fo = t \bar{\alpha} / L^2$ também é definido com a difusividade térmica $\bar{\alpha}$ calculada na temperatura média.

Para fins de verificação da influência da variação das propriedades físicas do material (aço SAE 4150) com a temperatura, apresenta-se na Figura 5.23 uma comparação entre os resultados obtidos para as constantes de tempo relativas à temperatura máxima, para tarugos de seção elíptica e retangular. Como já foi observado anteriormente, há uma discordância significativa quando se considera o modelo de propriedades termofísicas constantes. Na figura 5.24 apresenta-se a mesma comparação para tarugos de seção retangular.



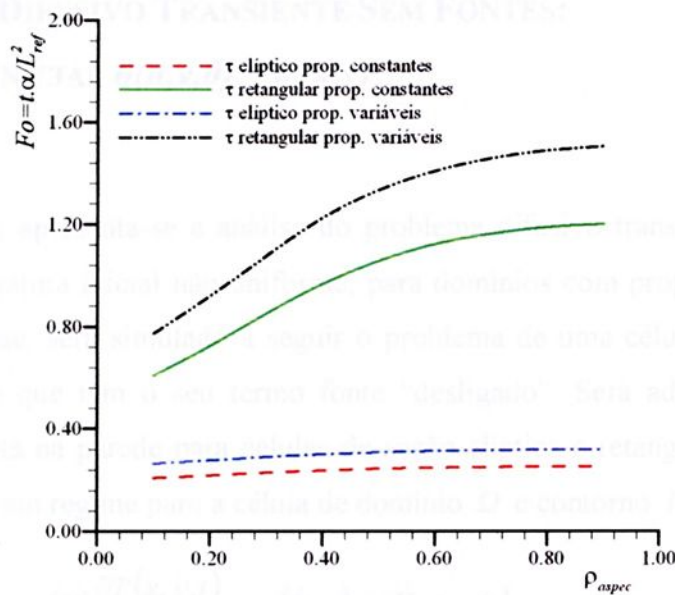


Figura 5.23 Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em tarugos elípticos e retangulares.

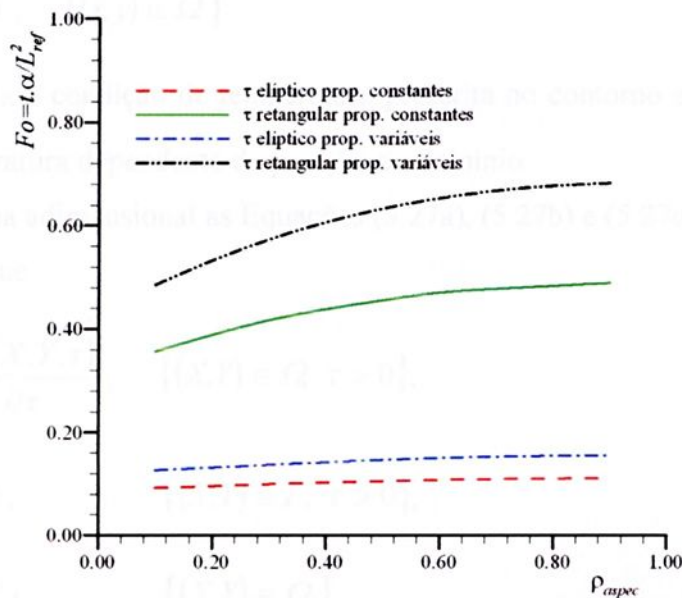


Figura 5.24. Constante de tempo para temperatura média em função da razão de aspecto, para propriedades físicas constantes e variáveis, em tarugos elípticos e retangulares



5.3. PROBLEMA DIFUSIVO TRANSIENTE SEM FONTES:

CONDIÇÃO INICIAL $\theta(u,v,0) = \theta_i(u,v)$

5.3.1. ANÁLISE

Nesta seção, apresenta-se a análise do problema difusivo transiente sem fontes com condição de temperatura inicial não uniforme, para domínios com propriedades termofísicas variáveis. Em síntese, será simulado a seguir o problema de uma célula de combustível em regime permanente que tem o seu termo fonte “desligado”. Será admitida a condição de temperatura prescrita na parede para células de seção elíptica e retangular. Neste modelo, a equação da difusão em regime para a célula de domínio Ω e contorno Γ é dada por:

$$\nabla \cdot [k(T) \nabla T(x,y)] = \rho c_p(T) \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t}, \quad \{(x,y) \in \Gamma, t > 0\}, \quad (5.27a)$$

$$T(x,y,t) = T_p, \quad \{(x,y) \in \Gamma, t > 0\}, \quad (5.27b)$$

$$T(x,y,0) = T_i(x,y), \quad \{(x,y) \in \Omega\}. \quad (5.27c)$$

onde, T_p representa a condição de temperatura prescrita no contorno e $T(x,y)$ representa a condição de temperatura dependente da posição no domínio.

Na sua forma adimensional as Equações (5.27a), (5.27b) e (5.27c) podem ser reescritas na forma como segue:

$$\nabla^2 \theta(X,Y,\tau) = \frac{\partial \theta(X,Y,\tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X,Y) \in \Omega, \tau > 0\}, \quad (5.28a)$$

$$\theta(X,Y,\tau) = \theta_p = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, \tau > 0\}, \quad (5.28b)$$

$$\theta(X,Y,0) = \theta(X,Y), \quad \{(X,Y) \in \Omega\}, \quad (5.28c)$$

A definição das variáveis X, Y, τ e θ é a mesma que foi considerada na Seção 4.2.1. Vale ressaltar que a transformação de Kirchhoff também foi aplicada sobre a Equação (5.27a) para a linearização do termo difusivo. Da mesma forma, para facilitar a aplicação das condições de contorno foi feita uma mudança de variáveis para o problema de células de geometria elíptica. Assim, a equação da energia na sua forma adimensional para o problema de células de seção elíptica e retangular é reescrita como segue:



A) CÉLULAS DE SEÇÃO ELÍPTICA

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.29a)$$

$$\theta(u, v, 0) = \theta_i(u, v), \quad \left\{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0 \right\}, \quad (5.29a)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \left\{ u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.29b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \left\{ u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.29c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.29d)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0, \quad \tau > 0 \right\}. \quad (5.29e)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = a^* \left[\sin^2(u) + \sinh^2(v) \right] \quad (5.29f)$$

B) CÉLULAS DE SEÇÃO RETANGULAR

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \left\{ 0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.30a)$$

$$\theta(u, v, 0) = \theta_i(u, v), \quad \left\{ 0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0 \right\}, \quad (5.30b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \left\{ u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.30c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq u_0, \quad v = 0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.30d)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \left\{ u = u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0 \right\}, \quad (5.30e)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \left\{ 0 \leq u \leq u_0, \quad v = v_0, \quad \tau > 0 \right\}. \quad (5.30f)$$

$$J(u, v) = 1. \quad (5.30g)$$



5.3.2. APLICAÇÃO DA TTIG

Os procedimentos adotados para a aplicação da TTIG são análogos aos da seção anterior. Desta maneira, apresentam-se, a seguir, apenas as equações resultantes.

A) APLICAÇÃO DA TTIG PARA A CÉLULA DE SEÇÃO ELÍPTICA

Fazendo-se uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções normalizadas correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em u e v , definidas nas Equações. (4.16a) e (4.16.b), obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado $\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijn} \frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = 0, \quad i, m = 1, 2, 3... \quad (5.31a)$$

$$B_{ijn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (5.31b)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du. \quad (5.31c)$$

O sistema de equações diferenciais dado pela Equação (5.31a) para o potencial transformado $\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)$ pode ser resolvido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem M e N , o que fornece a seguinte relação:

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijn} \frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = 0 \quad (5.32)$$

Assim, através da solução da Equação (5.32), o potencial temperatura $\theta_{elip}(u, v, \tau)$ é obtido fazendo uso da fórmula de inversão dada pela Equação (4.20b):

$$\theta_{elip}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) \quad (5.33)$$



B) APLICAÇÃO DA TTIG PARA CÉLULAS DE SEÇÃO RETANGULAR

A equação para o potencial transformado para o problema de células de seção retangular é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\tilde{\tilde{\theta}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau) = 0, \quad (5.34a)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_o} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{u_o} \int_0^{v_o} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u,v) du dv, \quad (5.34b)$$

onde as autofunções normalizadas $K_i(u)$ e $Z_m(v)$ são as mesmas definidas para os problemas já analisados com geometria retangular. Com o mesmo procedimento empregado anteriormente, o sistema de equações diferenciais, dado pela Equação (5.32a), pode ser resolvido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem $M = N$. Assim, o potencial temperatura pode ser obtido através da fórmula de inversão dada pela Equação (4.20b):

$$\theta_{ret}(u,v,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\tilde{\theta}}_{im}(\tau). \quad (5.35)$$

5.3.3. PARÂMETROS FÍSICOS DE INTERESSE

A temperatura média em um dado instante τ é dada pela mesma relação definida na Seção 4.2.2. Para a determinação das constantes de tempo é conveniente definir as temperaturas normalizadas máxima e média como segue:

$$\theta_N(u,v,\tau) = \frac{\theta(u,v,\tau)}{\theta_{max}(0)}, \quad (5.36a)$$

$$\theta_{N\ med}(\tau) = \frac{\theta_{med}(\tau)}{\theta_{med}(0)}, \quad (5.36b)$$

onde $\theta_{max}(0)$ é a temperatura adimensional máxima em $\tau=0$ (a temperatura no centro da célula) e $\theta_{med}(0)$ é a temperatura média computada em $\tau=0$. Assim, a constante de tempo τ_{max} relativa a temperatura máxima será determinada pela relação:

$$\theta_{N\ max}(\tau_{max}) = \frac{1}{e} = 0,36788 \quad (5.37a)$$



onde $\theta_{N_{max}}(\tau)$ é a temperatura normalizada no centro da célula no instante τ . A constante de tempo relativa à temperatura média é dada pela relação:

$$\theta_{N_{med}}(\tau_{med}) = \frac{1}{e} = 0,36788. \tag{5.37b}$$

Em particular, para o caso em que as propriedades termofísicas são constantes com a temperatura, a energia interna na sua forma adimensional é determinada pela temperatura média num dado instante τ , conforme foi visto no Capítulo 4.

5.3.4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O comportamento da temperatura máxima normalizada obtida no centro do cilindro, em função do número de termos da série é apresentado a seguir. Nas Tabelas 5.15 a 5.18, são apresentados os resultados obtidos para os instantes adimensionais $\tau = 10^{-3}$, 10^{-2} , 10^{-1} e 10^0 .

Tabela 5.15. Convergência da temperatura no centro de células de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$

	Número $N = M$ de Termos da Série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,2061	0,2061	0,2061	0,2061	0,2061
0,30	0,2225	0,2225	0,2225	0,2225	0,2225
0,50	0,2368	0,2368	0,2368	0,2368	0,2368
0,70	0,2452	0,2453	0,2453	0,2453	0,2453
0,90	0,2486	0,2487	0,2487	0,2487	0,2487

Tabela 5.16. Convergência da temperatura no centro de células de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$

	Número $N = M$ de Termos da Série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,1971	0,1971	0,1971	0,1971	0,1971
0,30	0,2135	0,2135	0,2135	0,2135	0,2135
0,50	0,2278	0,2278	0,2278	0,2278	0,2278
0,70	0,2363	0,2363	0,2363	0,2363	0,2363
0,90	0,2397	0,2397	0,2397	0,2397	0,2397



Tabela 5.17. Convergência da temperatura no centro de células de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$

	Número $N = M$ de Termos da Série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,1176	0,1176	0,1176	0,1176	0,1176
0,30	0,1317	0,1317	0,1317	0,1317	0,1317
0,50	0,1437	0,1437	0,1437	0,1437	0,1437
0,70	0,1507	0,1507	0,1507	0,1507	0,1507
0,90	0,1534	0,1534	0,1534	0,1534	0,1534

Tabela 5.18. Convergência da temperatura no centro de células de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$

	Número $N = M$ de Termos da Série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
0,30	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
0,50	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007
0,70	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
0,90	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009

Como pode ser observado, os resultados obtidos para temperatura máxima alcançam uma convergência de quatro dígitos quando se utiliza apenas 15 termos para cada direção da série que determina o potencial temperatura.

Nas Tabelas 5.19 a 5.22, apresentam-se os resultados obtidos para a temperatura máxima em células de seção retangular nos instantes $\tau = 10^{-3}$, 10^{-2} , 10^{-1} , 10^0 . Observa-se que a convergência é mais lenta no início do transiente e, também, para as células que apresentam uma razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 0$.



Tabela 5.19. Convergência da temperatura no centro de células de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-3}$

	<i>Número $N = M$ de Termos da Série</i>				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,6005	0,6051	0,6035	0,6042	0,6039
0,30	0,8341	0,8349	0,8347	0,8348	0,8347
0,50	1,0236	1,0239	1,0238	1,0239	1,0238
0,70	1,1312	1,1314	1,1314	1,1314	1,1314
0,90	1,1733	1,1736	1,1735	1,1735	1,1735

Tabela 5.20. Convergência da temperatura no centro de células de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-2}$

	<i>Número $N = M$ de Termos da Série</i>				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,5918	0,5959	0,5947	0,5952	0,5949
0,30	0,8254	0,8258	0,8257	0,8257	0,8257
0,50	1,0148	1,0149	1,0149	1,0149	1,0149
0,70	1,1224	1,1224	1,1224	1,1224	1,1224
0,90	1,1645	1,1645	1,1645	1,1645	1,1645

Tabela 5.21. Convergência da temperatura no centro de células de seção elíptica em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^{-1}$

	<i>Número $N = M$ de Termos da Série</i>				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,5042	0,5057	0,5055	0,5056	0,5056
0,30	0,7358	0,7358	0,7358	0,7358	0,7358
0,50	0,9249	0,9249	0,9249	0,9249	0,9249
0,70	1,0324	1,0324	1,0324	1,0324	1,0324
0,90	1,0745	1,0745	1,0745	1,0745	1,0745



Tabela 5.22. Convergência da temperatura no centro de células de seção retangular em função da razão de aspecto e do número de termos da série, para $\tau = 10^0$

	Número $N = M$ de Termos da Série				
ρ_{aspec}	10	15	20	25	30
0,10	0,0813	0,0813	0,0813	0,0813	0,0813
0,30	0,1935	0,1935	0,1935	0,1935	0,1935
0,50	0,2960	0,2960	0,2960	0,2960	0,2960
0,70	0,3560	0,3560	0,3560	0,3560	0,3560
0,90	0,3799	0,3799	0,3799	0,3799	0,3799

Nas Figuras 5.25 e 5.26, são apresentadas as evoluções da temperatura máxima e da temperatura média (que representa a energia interna específica a cada instante de tempo adimensional quando as propriedades não são variáveis), para células de seção elíptica em diversas razões de aspecto.

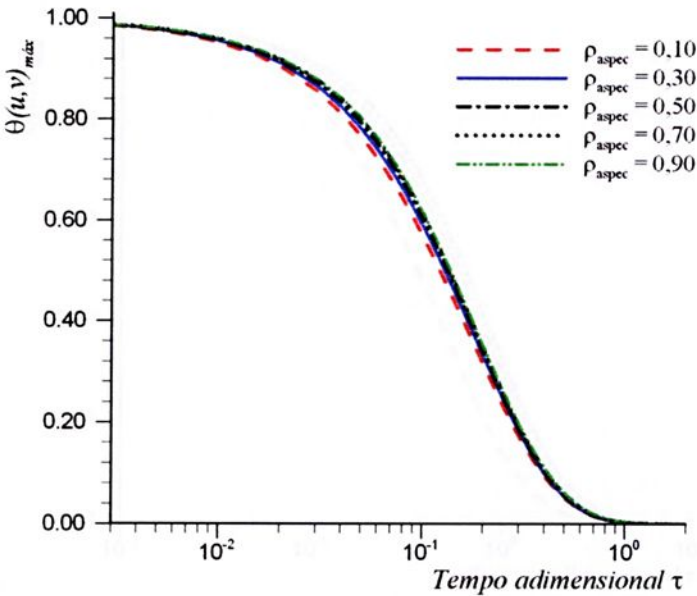


Figura 5.25. Evolução da temperatura máxima em função de τ para células de seção elíptica com diversas razões de aspecto.



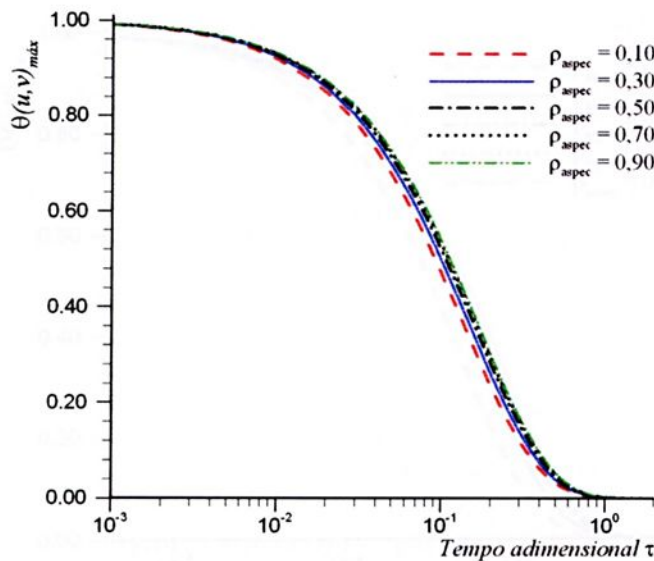


Figura 5.26. Evolução da temperatura média em função de τ para células de seção elíptica com diversas razões de aspecto.

Nas Figuras 5.27 e 5.28 são visualizadas as evoluções da temperatura máxima e da temperatura média para células de seção retangular para diversas razões de aspecto.

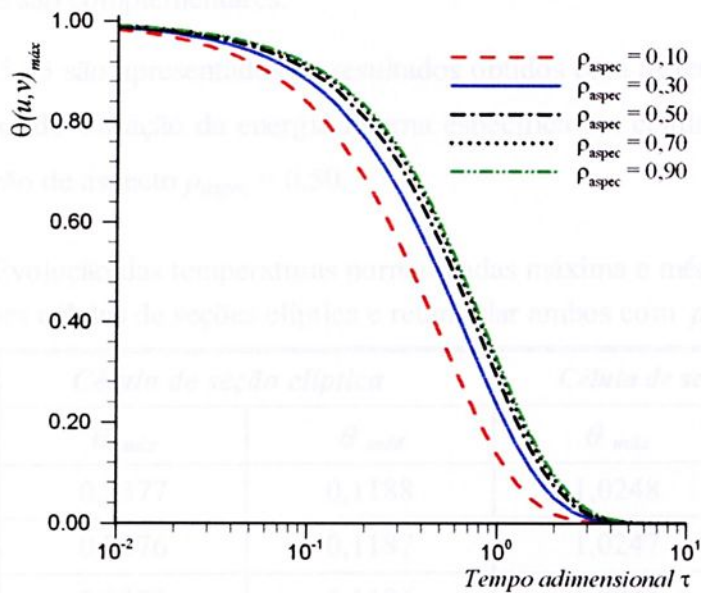


Figura 5.27. Evolução da temperatura máxima em função de τ para células de seção retangular com diversas razões de aspecto.

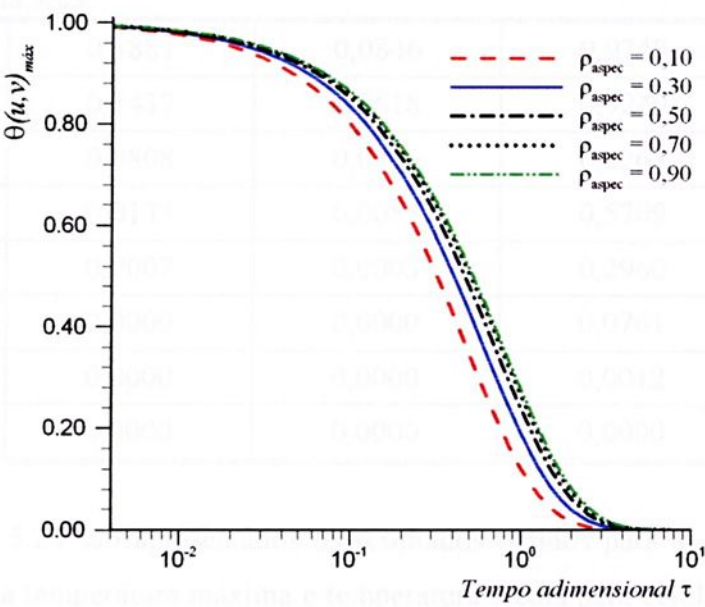


Figura 5.28. Evolução da temperatura média em função de τ para células de seção retangular com diversas razões de aspecto.

Como pode ser verificada, a razão de aspecto nas células de seção retangular exerce uma maior influência no comportamento na evolução das temperaturas máxima e média. Vale ainda observar que os resultados obtidos para a temperatura nos problemas de células com fontes e sem fontes são complementares.

Na Tabela 5.23 são apresentados os resultados obtidos para as temperaturas máxima e média e para a taxa de variação da energia interna específica em células de seção elíptica e retangular com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

Tabela 5.23. Evolução das temperaturas normalizadas máxima e média em função do tempo para células de seções elíptica e retangular ambos com $\rho_{aspec} = 0,50$.

τ	Célula de seção elíptica		Célula de seção retangular	
	$\theta_{\text{máx}}$	$\theta_{\text{méd}}$	$\theta_{\text{máx}}$	$\theta_{\text{méd}}$
0,0001	0,2377	0,1188	1,0248	0,5144
0,0002	0,2376	0,1187	1,0247	0,5143
0,0005	0,2373	0,1184	1,0244	0,5140
0,0010	0,2368	0,1179	1,0239	0,5136
0,0020	0,2358	0,1170	1,0229	0,5126
0,0050	0,2328	0,1144	1,0198	0,5098
0,0100	0,2278	0,1103	1,0148	0,5053
0,0200	0,2178	0,1030	1,0048	0,4966



continuação Tabela 5.23.

0,0500	0,1881	0,0846	0,9748	0,4726
0,1000	0,1437	0,0618	0,9249	0,4369
0,2000	0,0808	0,0336	0,8263	0,3762
0,5000	0,0135	0,0055	0,5709	0,2451
1,0000	0,0007	0,0003	0,2960	0,1223
2,0000	0,0000	0,0000	0,0761	0,0309
5,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0001
10,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Na Tabela 5.24 são apresentados os resultados obtidos para as constantes de tempo relacionadas com a temperatura máxima e temperatura média para células de seção elíptica e retangular com diversas razões de aspecto.

Tabela 5.24. Constantes de tempo em função da razão de aspecto para células de seções elíptica e retangular.

ρ_{aspec}	<i>Célula de seção elíptica</i>		<i>Célula de seção retangular</i>	
	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$	$\tau_{m\acute{a}x}$	$\tau_{m\acute{e}d}$
0,10	0,172	0,135	0,506	0,465
0,20	0,177	0,140	0,601	0,529
0,30	0,181	0,146	0,694	0,588
0,40	0,184	0,152	0,767	0,641
0,50	0,187	0,157	0,818	0,685
0,60	0,188	0,160	0,853	0,718
0,70	0,189	0,163	0,875	0,742
0,80	0,190	0,164	0,888	0,757
0,90	0,190	0,165	0,895	0,765

Nas Figuras 5.29 e 5.30 apresenta-se a visualização das constantes de tempo calculadas para temperatura máxima e média, em função da razão de aspecto. É importante observar que as constantes de tempo para este problema são idênticas àquelas encontradas no problema difusivo com fontes, calculado no Capítulo 4. Outro aspecto importante é que a constante de tempo sofre uma maior influência da razão de aspecto nos cilindros de seção retangular.



Mas para todos os casos analisados observa-se, como era esperado, que a constante de tempo relacionado com a temperatura média é inferior quando comparado com a constante de tempo relacionada com a temperatura máxima.

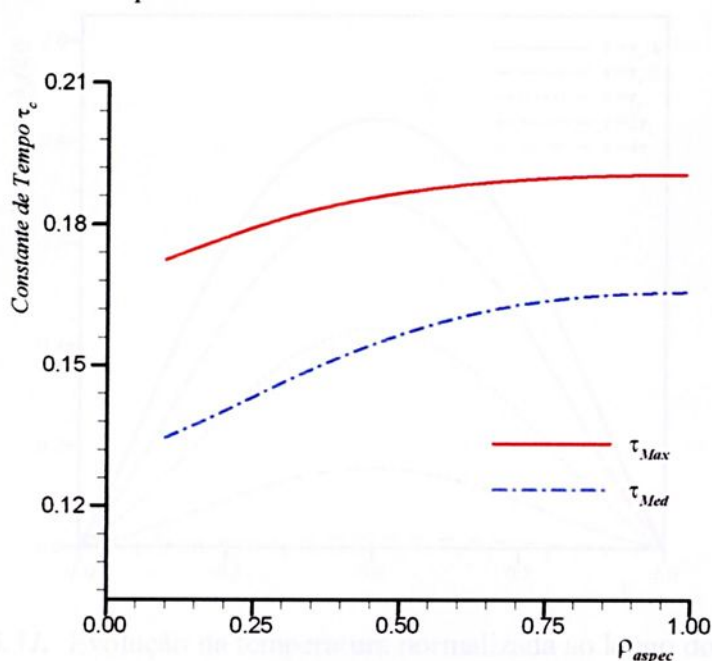


Figura 5.29. Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção elíptica em função da razão de aspecto.

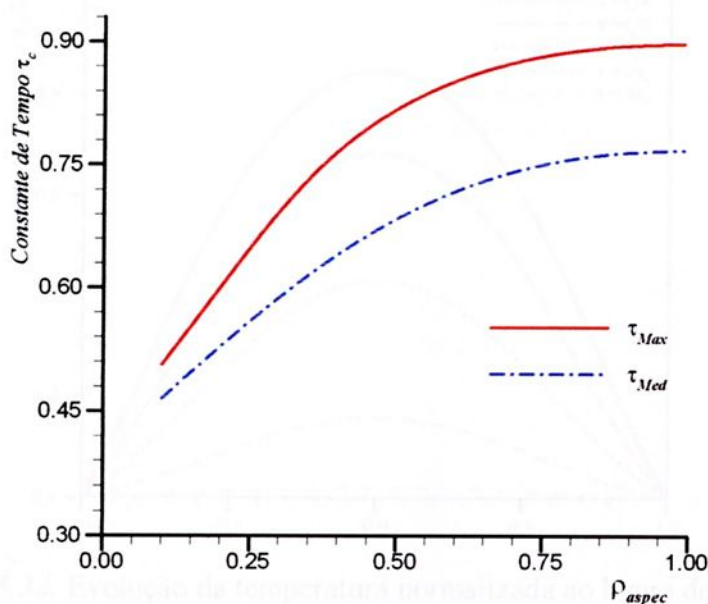


Figura 5.30. Constantes de tempo máxima e média para cilindros de seção retangular em função da razão de aspecto.

Nas Figuras 5.31 e 5.32 apresentam-se uma visualização do perfil da temperatura normalizada sobre o eixo X para células de seção elíptica e retangular com razão de aspecto



$\rho_{aspec} = 0,50$. Nota-se que o intervalo de temperatura estudado está quase todo inserido no tempo entre $\tau_c/4$ até $4\tau_c$.

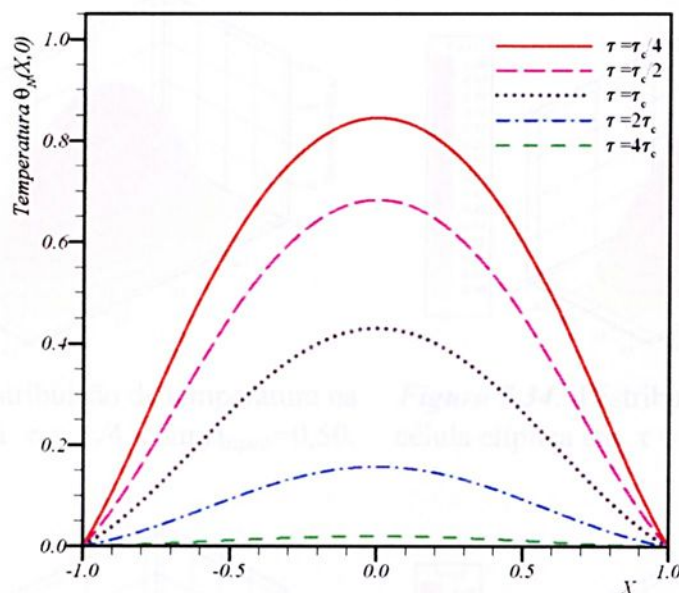


Figura 5.31. Evolução da temperatura normalizada ao longo do eixo x para células de seção elíptica com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

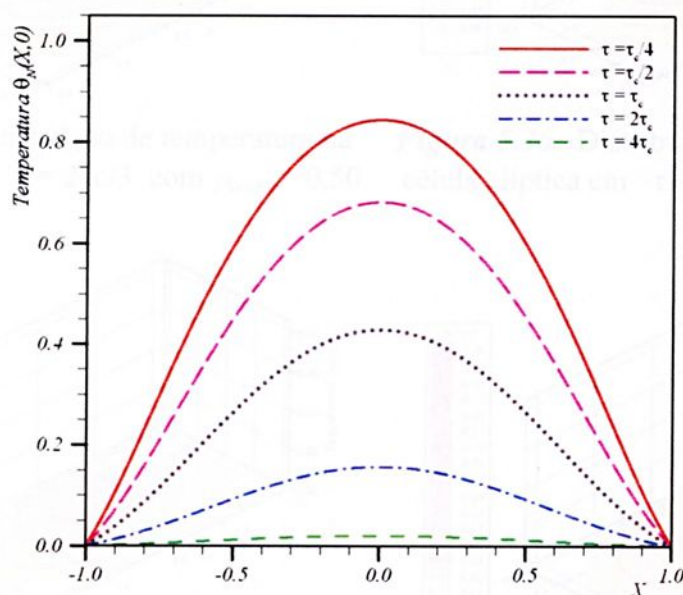


Figura 5.32. Evolução da temperatura normalizada ao longo do eixo x para células de seção retangular com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

Para uma melhor visualização da evolução do campo de temperatura dos problemas propostos, são apresentadas nas Figuras 5.33 a 5.38 as superfícies tridimensionais geradas

pelo potencial temperatura θ_N , em diversos instantes τ , para células de combustível de seção elíptica, com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

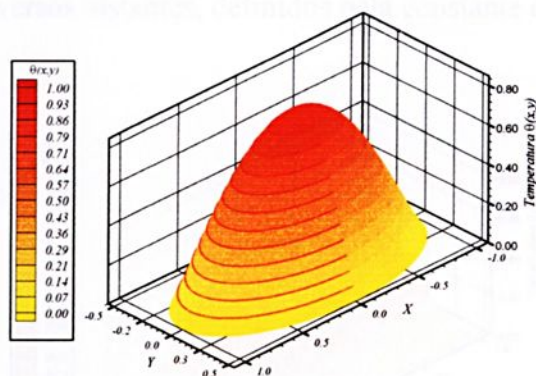


Figura 5.33. Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = \tau_c/4$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

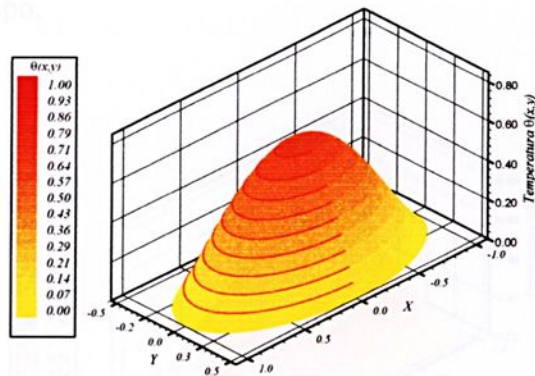


Figura 5.34. Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = \tau_c/2$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

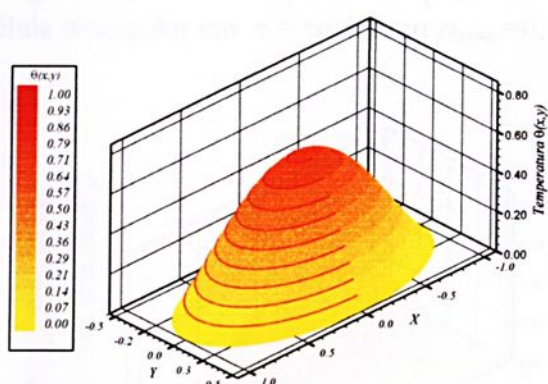


Figura 5.35. Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = 2\tau_c/3$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

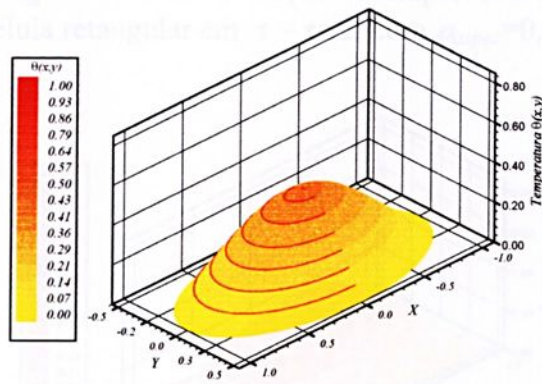


Figura 5.36. Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = \tau_c$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

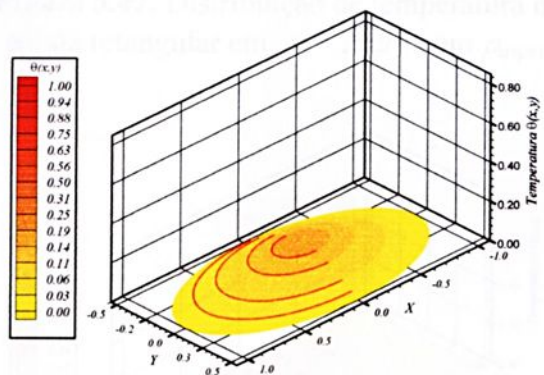


Figura 5.37. Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = 2\tau_c$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

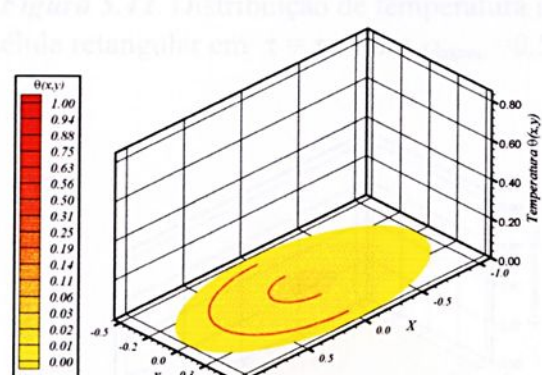


Figura 5.38. Distribuição de temperatura na célula elíptica em $\tau = 4\tau_c$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

Para o caso de células de seção retangular, são apresentadas as Figuras 5.39 a 5.44, onde os perfis de temperatura tridimensionais mostram a evolução desta grandeza para diversos instantes, definidos pela constante de tempo.

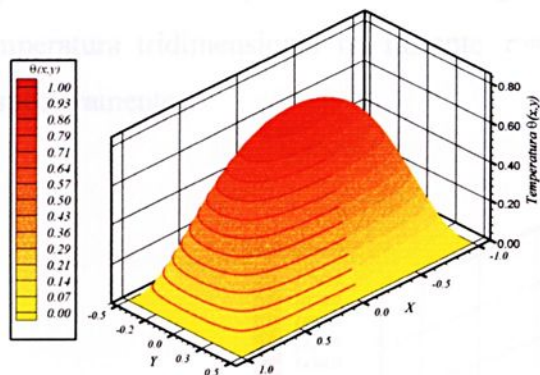


Figura 5.39. Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = \tau_c/4$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

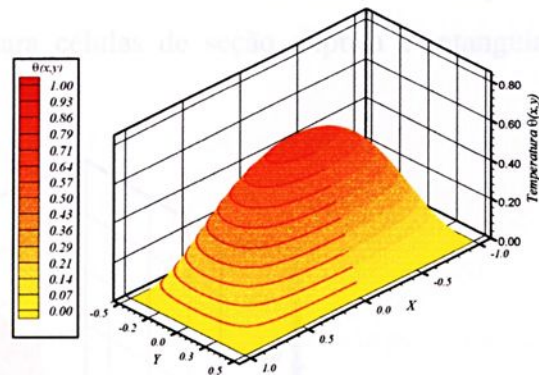


Figura 5.40. Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = \tau_c/2$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

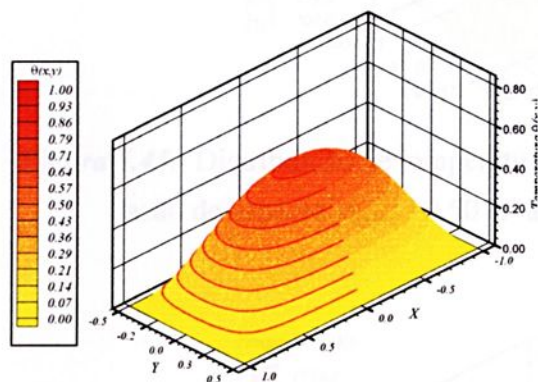


Figura 5.41. Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = 2\tau_c/3$ com ρ_{aspec}

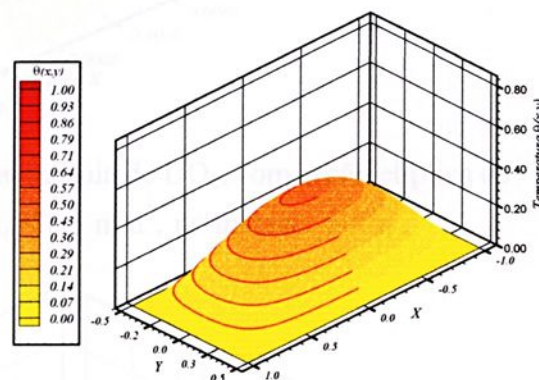


Figura 5.42. Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = \tau_c$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

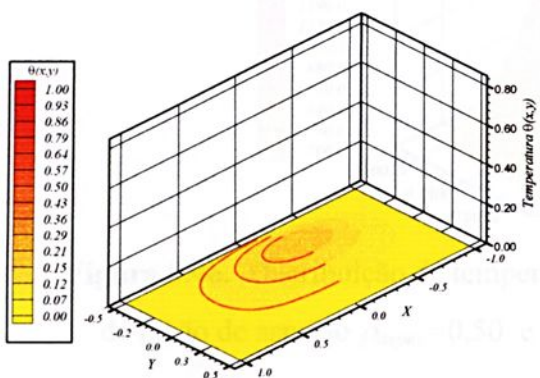


Figura 5.43. Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = 2\tau_c$ com $\rho_{aspec}=0,50$.

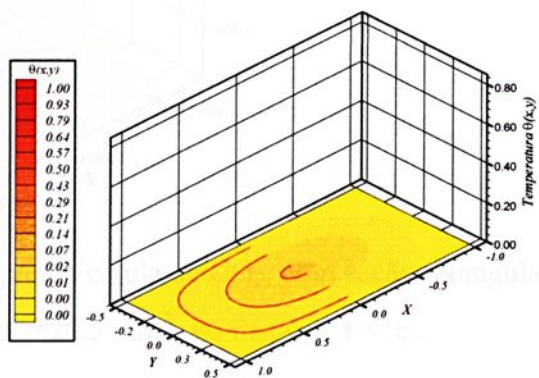


Figura 5.44. Distribuição de temperatura na célula retangular em $\tau = 4\tau_c$ com ρ_{aspec}

5.3.5. PARÂMETROS FÍSICOS DIMENSIONAIS – TRANSFORMADA INVERSA DE KIRCHHOFF

Apresentam-se, aqui, os resultados obtidos para uma célula de UO_2 com dimensões especificadas na Seção 4.2.4. Nas Figuras 5.45 e 5.46 são visualizados o campo de temperatura tridimensional no instante $\tau = \tau_c$, para células de seção elíptica e retangular, respectivamente.

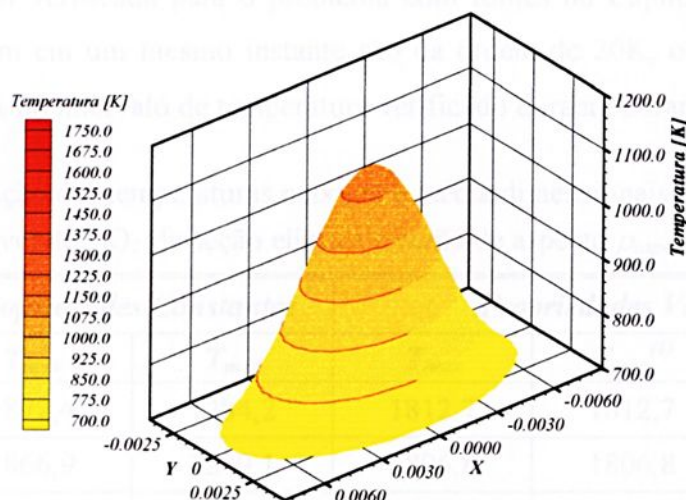


Figura 5.45. Distribuição de temperatura para a célula de UO_2 , com seção elíptica de razão de aspecto $\rho_{aspec}=0,50$ e área $A_s=78.5 \text{ mm}^2$, no instante $\tau = \tau_c$.

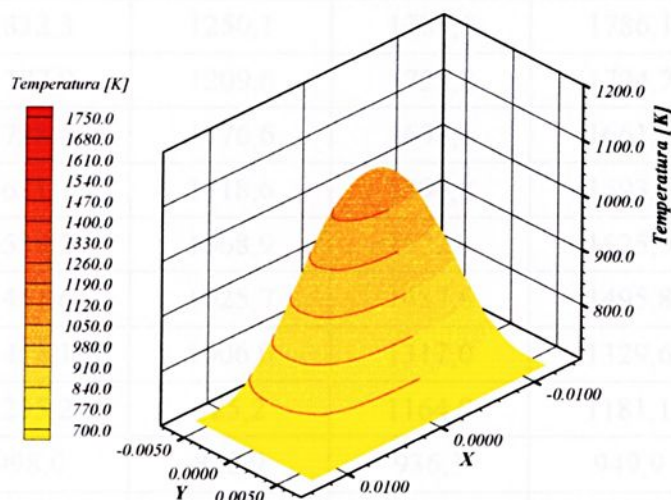


Figura 5.46. Distribuição de temperatura para a célula de UO_2 , com seção retangular de razão de aspecto $\rho_{aspec}=0,50$ e área $A_s=78.5 \text{ mm}^2$, no instante $\tau = \tau_c$.

Para as células de seção elíptica, apresenta-se na Tabela 5.25 uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo com propriedades constantes e pelo modelo com propriedades termofísicas variáveis. As condições iniciais para os dois modelos foram especificadas de



acordo com a solução obtida pelo problema com fontes em regime permanente, para cada modelo considerado. Por isso, as temperaturas máximas iniciais apresentam uma diferença superior a 70K. Em relação ao modelo que se considera as propriedades termofísicas variáveis, quando se compara os resultados obtidos pela metodologia empregada no presente trabalho com aqueles que foram obtidos pelo código *Ansys*[®], observa-se que há uma boa concordância entre os mesmos, principalmente no início e no fim do período transiente. Da mesma forma que foi verificada para o problema com fontes no Capítulo 4, as diferenças máximas que ocorrem em um mesmo instante são da ordem de 20K, o que corresponde a aproximadamente 2% do intervalo de temperatura verificado durante o transiente.

Tabela 5.25. Evolução das temperaturas máxima e média dimensionais para uma célula de combustível de UO₂ de seção elíptica e razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

<i>t(s)</i>	<i>Propriedades Constantes</i>		<i>Propriedades Variáveis</i>		
	<i>T_{max}</i>	<i>T_{med}</i>	<i>T_{max}</i>	<i>T_{max}⁽¹⁾</i>	<i>T_{med}</i>
0,02	1872,4	1284,2	1812,7	1812,7	1208,4
0,06	1866,9	1279,1	1806,8	1806,8	1202,4
0,10	1861,9	1274,8	1800,7	1800,8	1196,7
0,13	1852,0	1266,2	1794,7	1795,6	1191,1
0,17	1842,2	1258,0	1788,6	1789,4	1185,7
0,19	1832,3	1250,1	1785,6	1786,1	1183,0
0,58	1777,9	1209,6	1723,2	1724,7	1133,8
0,96	1728,4	1176,6	1658,5	1661,3	1090,3
1,35	1631,1	1118,6	1590,8	1593,3	1050,0
1,73	1538,2	1068,9	1522,3	1525,9	1013,3
1,92	1451,6	1025,7	1487,6	1495,8	995,9
2,89	1411,1	1006,0	1317,0	1329,6	921,5
3,85	1235,2	925,2	1164,9	1181,1	861,5
5,77	998,0	822,9	936,3	949,9	782,5
9,62	821,8	749,9	758,9	762,7	722,0
13,47	736,8	715,0	715,5	715,6	706,0
17,31	708,2	703,4	704,4	704,4	701,8
19,24	706,0	702,5	702,4	702,4	701,0
38,48	700,0	700,0	700,0	700,0	700,0

⁽¹⁾ Valores Obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do programa *Ansys*[®].



Na Tabela 5.26, apresenta-se a mesma análise para as células de seção retangular. Como pode ser observada, a evolução da temperatura para os dois modelos apresentam um comportamento similar quando comparados com as células de seção elíptica.

Tabela 5.26. Valores da temperatura dimensional para uma célula de combustível de UO_2 de seção retangular, em função do número de Fourier para razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

<i>t(s)</i>	<i>Propriedades Constantes</i>		<i>Propriedades Variáveis</i>		
	<i>T_{max}</i>	<i>T_{med}</i>	<i>T_{max}</i>	<i>T_{max}⁽¹⁾</i>	<i>T_{med}</i>
0,01	1860,40	1282,10	1792,80	1792,50	1204,50
0,07	1858,00	1279,80	1792,80	1791,80	1201,70
0,13	1851,20	1273,60	1789,40	1789,60	1199,20
0,67	1827,40	1253,40	1761,40	1762,80	1174,20
1,34	1759,40	1202,80	1725,70	1727,80	1145,60
2,68	1691,80	1159,00	1651,70	1654,50	1094,50
4,02	1582,60	1096,30	1574,90	1577,40	1048,60
5,36	1530,90	1068,80	1496,70	1507,90	1007,20
6,70	1434,20	1019,80	1418,90	1430,20	969,60
8,04	1346,90	977,70	1342,70	1358,20	935,40
9,38	1268,80	941,40	1270,00	1290,30	904,60
10,72	1199,30	910,00	1201,10	1224,50	877,20
12,06	1109,70	870,50	1137,00	1156,20	852,80
13,40	1083,40	859,10	1078,20	1092,70	831,40
16,08	1035,40	838,60	978,10	987,20	797,00
18,76	923,90	791,60	901,70	908,40	770,70
21,44	870,70	769,60	844,40	849,30	751,80
24,12	830,00	752,90	804,20	807,90	738,00
26,80	798,90	740,20	775,60	778,60	728,10
40,20	743,50	717,60	717,00	717,50	706,60
66,99	705,60	702,30	701,00	701,00	700,40
133,98	700,10	700,00	700,00	700,00	700,00

⁽¹⁾ Valores Obtidos pela técnica de Elementos Finitos com o auxílio do programa *Ansys*®.



Na Tabela 5.27 são apresentados os resultados obtidos para a constante de tempo relativo ao problema das células de seção elíptica e retangular com propriedades termofísicas variáveis.

Tabela 5.27. Constantes de tempo para temperatura máxima e média em função da razão de aspecto para células de seção elíptica e retangular com propriedades termofísicas variáveis.

ρ_{aspec}	<i>Elíptico – Prop. variáveis</i> $Fo = t \bar{\alpha} / L_{ref}^2$		<i>Retangular – Prop. variáveis</i> $Fo = t \bar{\alpha} / L_{ref}^2$	
	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$	$\tau_{máx}$	$\tau_{méd}$
0,10	0,173	0,152	0,508	0,469
0,20	0,181	0,158	0,612	0,539
0,30	0,191	0,166	0,726	0,611
0,40	0,203	0,175	0,839	0,688
0,50	0,219	0,185	0,955	0,766
0,60	0,242	0,197	1,093	0,848
0,70	0,271	0,210	1,257	0,943
0,80	0,303	0,224	1,425	1,038
0,90	0,333	0,238	1,578	1,127

Novamente, como pode ser observada, a razão de aspecto nas células de seção retangular exerce uma maior influência sobre o comportamento das constantes de tempo. As constantes de tempo apresentadas na Tabela 5.25 são dadas em termos do tempo adimensional $Fo = t \bar{\alpha} / L_{ref}^2$ onde $\bar{\alpha}$ é a difusividade térmica calculada na temperatura média $\bar{T} = (T_i + T_{\infty}) / 2$.

Na Figura 5.47, apresenta-se uma visualização dos resultados obtidos para a constante de tempo relacionada com a temperatura máxima, quando se considera o modelo de propriedades termofísicas constantes e o modelo de propriedades termofísicas variáveis. Como podem ser observadas, as curvas obtidas apresentam um comportamento um pouco diferente daquele obtido para o problema de células com fontes. Na Figura 5.48, apresenta-se, também, uma visualização das curvas obtidas para a constante de tempo relativa a temperatura média.



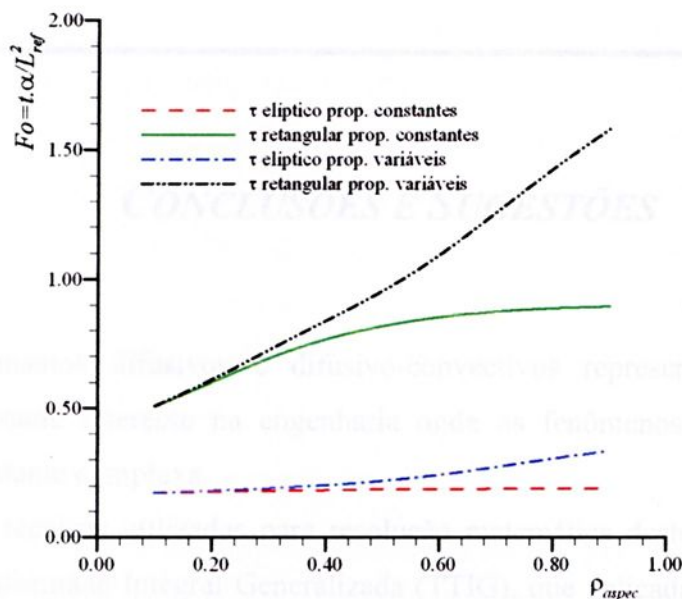


Figura 5.47. Constante de tempo para temperatura máxima em função da razão de aspecto: propriedades físicas constantes e variáveis em células de seção elíptica e retangular

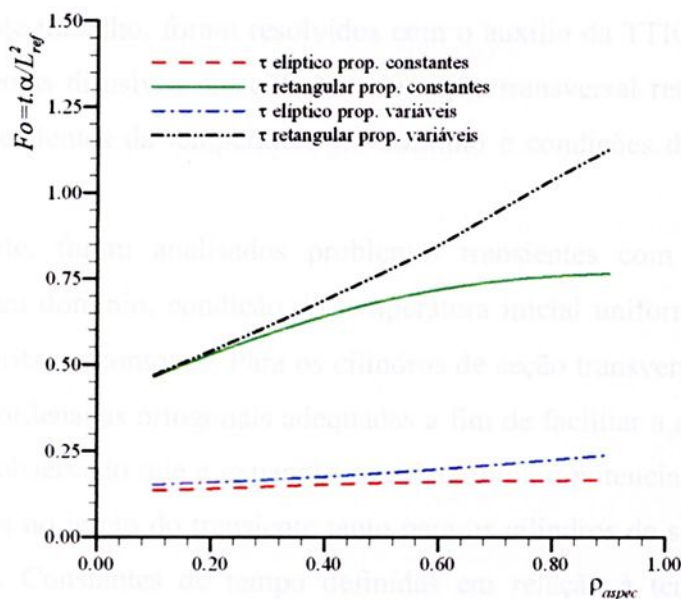


Figura 5.48. Constante de tempo para temperatura média em função da razão de aspecto: propriedades físicas constantes e variáveis em células de seção elíptica e retangular

Em ambos os casos, verificam-se que a variação das propriedades exerce uma maior influência sobre os resultados para as células de seção retangular, principalmente, quando a razão de aspecto $\rho_{aspec} \rightarrow 1$.



CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os mecanismos difusivos e difusivo-convectivos representam um conjunto de problemas de grande interesse na engenharia onde os fenômenos são, via de regra, de representação bastante complexa.

Uma das técnicas utilizadas para resolução matemática deste tipo de problema é a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG), que aplicada à equação da energia, remove as derivadas espaciais de segunda ordem, transformando a equação que representa o fenômeno num problema de estrutura mais simples, que pode ser resolvido analítica ou numericamente por técnicas já conhecidas.

No presente trabalho, foram resolvidos com o auxílio da TTIG e da Transformada de Kirchoff, problemas difusivos em cilindros de seção transversal retangular e elíptica, com propriedades dependentes da temperatura no domínio e condições de contorno de primeiro tipo.

Inicialmente, foram analisados problemas transientes com fontes uniformemente distribuídas em seu domínio, condição de temperatura inicial uniforme e com condições de temperatura prescrita no contorno. Para os cilindros de seção transversal elíptica foi utilizado um sistema de coordenadas ortogonais adequadas a fim de facilitar a aplicação das condições de contorno. Foi observado que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente tanto para os cilindros de seção retangular como a de seção elíptica. Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima e à temperatura média foram também calculadas para diversas razões de aspecto de cilindros de seção elíptica e retangular. Foi avaliado, também, a influência sobre os resultados quando o termo fonte apresenta uma distribuição não uniforme no domínio. Para tal, foi considerado o problema da depleção do fluxo neutrônico no interior das células de combustível.

Perfis de temperatura dimensionais para uma célula de combustível nuclear de UO_2 foram obtidos a partir da aplicação da transformação inversa de Kirchhoff. Foi verificado que os resultados apresentam boa concordância quando comparados com aqueles obtidos pelo programa computacional *Ansys*[®].



Posteriormente, foram analisados problemas transientes sem fontes para dois casos distintos de condição inicial: temperatura inicial uniforme no domínio e o caso de condição inicial dada pela solução do problema em regime permanente com fontes. De maneira análoga, foi observado que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente para ambos os casos. Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima e à temperatura média foram também calculadas para diversas razões de aspecto de cilindros de seção elíptica e retangular.

A partir das dificuldades e dos desafios encontrados no decorrer deste trabalho, apresentam-se algumas sugestões para estudos posteriores:

- a) Analisar a convergência da série do potencial transformado em função da natureza dos problemas auxiliares de autovalor utilizados;
- b) Resolver os problemas aqui tratados sem proceder a linearização do termo transiente;
- c) Analisar o comportamento transiente quando se considera o efeito da variação da propriedade densidade com a temperatura;
- d) Resolver os problemas propostos no presente trabalho para condições de contorno de terceiro tipo;
- e) Determinar os parâmetros físicos pertinentes para problemas com outras geometrias.

Finalizando, observa-se que a TTIG foi aplicada com sucesso para a obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais que não admitem soluções pelas técnicas analíticas clássicas. Vale ressaltar, que a aplicação da transformada de Kirchhoff para a linearização do termo difusivo da equação da energia simplificou, notadamente, o tratamento analítico do problema e que o procedimento adotado para a linearização do termo transiente, atendeu satisfatoriamente as expectativas, visto que, as propriedades termofísicas dos problemas propostos apresentavam uma forte dependência com a temperatura e desvios máximos não superiores a 3% foram verificados para os perfis de temperatura quando comparados com os resultados obtidos pelo programa computacional *Ansys*[®].



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, L. S. B.; COTTA, R. M.; PONTES, J. Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 45, p. 1185-1195. 2002.

ALVES, T. A. *et al.* Transferência de calor para escoamento pistonado em dutos de seção elíptica. In: 25th IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS, 2004, Recife. *Anais*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. 10p. 1 CD ROM.

ANDRADE, F.E. *Solução de equações diferenciais acopladas pela técnica de transformada integral e computação simbólica*. 1996. 48 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

APARECIDO, J. B.; COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Analytical solutions to two-dimensional diffusion type problems in irregular geometries. *Journal of the Franklin Institute*. v. 326, p. 421-434, 1989.

APARECIDO, J. B. Flowfield solution for a family of wind tunnel contraction using generalized integral transform technique. In: 23th IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS, 2002, Giulianova, Italy. *Proceedings*. Giulianova: University of L'Aquila, 2002. 10p. 1 CD-ROM.

ASTM INTERNATIONAL HANDBOOK COMMITTEE, METALS HANDBOOK. *Properties and Selection: Irons, Steels and High Performance Alloys*, 10.ed., 1990.

BOGADO LEITE, S., ÖZISIK, M.N., VERGHESE, K. On the solution of linear diffusion problems in media with moving boundaries. *Nuclear Science Engineering*. v. 76, p. 345-350. 1980.



BOLIVAR, M. A. H.; LAGE, P. L. C.; COTTA, R. M. Generalized integral transform solution to the laminar thermal boundary-layer problem for a flow past a cylinder. In: 6th BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL ENGINEERING AND SCIENCES, 1996, Florianópolis. *Proceedings*. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1996. p. 723-728.

BROWN, D. M. *et al.* Analysis of steady forced convection in thermally developing turbulent duct flows. *International Journal of Numerical Methods in Heat and Fluid Flow*. v. 7, p. 425-437. 1997.

CARBAJO, J. J. *et al.* A review of the thermophysical properties of MOX and UO₂ fuels. *Journal of Nuclear Materials*. v. 299, p. 181-198. 2001.

CHIAVERINI, Vicente. *Aços e Ferros Fundidos*. São Paulo: Associação Brasileira de Metalurgia e Materiais (ABM), 7.ed., 1996. 599p.

COTTA, R. M. Steady-state diffusion with space-dependent boundary condition parameters. In: 1th BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL ENGINEERING AND SCIENCES, 1986, Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: 1986. p. 163-166.

COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Transient forced convection in laminar channel flow with stepwise variations of wall temperature. *Canadian Journal of Chemical Engineering*. v. 64, p. 734-743. 1986a.

COTTA, R. M.; ÖZISIK, M.N. Laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 29, n° 10, p. 1495-1501. 1986b.

COTTA, R. M. *Integral transform method in computational heat and fluid flow*. Boca Raton: CRC Press, 1993. 337p.

COTTA, R. M. *The integral transform method in thermal and fluids science and engineering*. New York: Begell House Inc, 1998. 430 p.

COTTA, R. M.; PIMENTEL, L.C.G. Developing turbulent duct flow: hybrid solution via integral transforms and algebraic models. *International Journal of Numerical Methods in Heat and Fluid Flow*. v. 8, n° 1, p. 10-26. 1998.



- COTTA, R. M.; UNGS, M.J.; MIKHAILOV, M.D. Contaminant transport in finite fractured porous medium: integral transforms and lumped-differential formulations. *Annals of Nuclear Energy*. v. 30, n° 3, p. 261-285. 2003.
- DINIZ, A. J.; MAIA, C. R. M.; ZAPAROLLI, E. L. Solução analítica para problemas de transferência de calor com mudança de fase em geometria axi-simétrica. In: 6th BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL ENGINEERING AND SCIENCES, 1996, Florianópolis. *Anais*. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1996. p. 957-962.
- DINIZ, A. J.; CAMPOS SILVA, J. B.; ZAPAROLLI, E. L. Analytical Solution of Ablation Problem with Non Linear Coupling Equation. *Hybrid Methods in Engineering Modeling Programming Analysis Animation*. v. 1, p. 265-277. 1999.
- FINK, J. K. Thermophysical properties of uranium dioxide. *Journal of Nuclear Materials*. v. 279, p. 1-18. 2000.
- GLASSTONE, S.; SESONSKE, A. *Nuclear reactor engineering: reactor systems engineering*. London: Chapman & Hall, 4.ed. 1994.
- GRIMNBERG, G. A. *Selected problems of mathematical theory of electrical and magnetic effects*. Nauk: Akad, 1948.
- GUERRERO, J. S .P. *et al.* Study of pollutant transport in surface boundary layer by generalized integral transform technique. In: 2th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 2001, Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001. 1 CD ROM.
- IMSL Library, *Gnb Buildin*, 7500 Ballaire Blod, Houston, Texas 77036, Edition 7, 1979.
- LAGE, P. L. C.; RANGEL, R. H. Generalized integral transform technique solution for boundary layer flow over a sphere. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*. v. 18, p. 721-731. 1994.
- LEAL, M. A.; COTTA, R. M. Steady and Transient Integral Transform Solutions of Natural Convection in Enclosures Transient integral transform solution of natural convection in enclosures. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ADVANCES IN COMPUTATIONAL HEAT TRANSFER, 1997, Turkey. *Proceedings*. Turkey: 1997. p. 418-432.



- LIMA, J.A.; PEREZ GUERRERO, J.S.; COTTA, R.M. Hybrid solution of the averaged navier-stokes equations for turbulent flow. *Computational Mechanics*. v. 19, p.297-307. 1997.
- MACEDO, E. N.; MANESCHYA, C.E.; QUARESMA, J. N. N. Forced convection in thermally developing turbulent flow of drag-reducing fluids within circular tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 43, p. 3785-3794. 2000a.
- MACEDO, E. N.; MANESCHYA, C.E.; QUARESMA, J. N. N. Analysis of the mass transfer entry region for drag-reducing viscoelastic fluids in turbulent pipe flow. *International Communication of Heat and Mass Transfer*. v. 27, nº 1, p. 59-68. 2000b.
- MACHADO, H. A.; DANTAS, A. L. B. Solution of heat conduction problems with discontinuities via integral transforms. In: 2th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 2001, Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001. 1 CD ROM.
- MAGNO, R. N. O.; MACEDO, E. N.; QUARESMA, J. N. N. Solutions for the internal boundary layer equations in simultaneously developing flow of power-law fluids within parallel plates channels. *Chemical Engineering Journal*. v. 87, p. 339-350. 2002.
- MAIA, C. R. M.; APARECIDO, J. B.; MILANEZ, L. F. Critical specific power in fuel rods with biconcave cross-section. In: XII INTERNATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE, 2002, Grenoble, França. *Proceedings*. Grenoble: 2002. 1 CD ROM.
- MAIA, C. R. M.; APARECIDO, J. B.; MILANEZ, L. F. Limiting thermal energy generation rate. In: 24th IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2003, Ouro Preto. *Proceedings*. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2003. 1 CD ROM.
- MAIA, C. R. M. *Solução de Problemas Difusivos e Difusivos-Convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada*. 2003. 126 f. Dissertação (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- MAIA, C. R. M.; APARECIDO, J. B.; MILANEZ, L. F.; Thermally developing forced convection of non-newtonian fluids inside elliptical ducts. *Heat Transfer Engineering*. v. 25, nº 7, p. 13-22. 2004.



- MEIJAS, M. M.; ORLANDE, H. R. B. A Hibrid numerical-analytical method for the solution of 3d transient diffusion problems. In: 2th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 2001, Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001. 1 CD ROM.
- MIKHAILOV, M. D. On the solution of the heat equation with time dependent coefficient. *International Journal Heat and Mass Transfer*. v. 18, p. 344-345. 1975.
- MIKHAILOW, M. D; ÖZISIK, M. N. *Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion*. New York: John Wiley, 1984. 357p.
- MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M. Integral transform solution of eigenvalue problems. *International Communication of Heat and Mass Transfer*. v. 23, p. 299-303. 1994.
- MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M. Ordering rules for double and triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. *International Communication of Heat and Mass Transfer*. v. 23, p. 299-303. 1996.
- NASCIMENTO, U. C. S.; MACEDO, E. N.; QUARESMA, J. N. N. Thermal entry region analysis through the finite integral transform technique in laminar flow of bingham fluids within concentric annular ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 45, p. 923-929. 2001.
- NETO, H. L.; QUARESMA, J. N. N.; COTTA, R. M. integral transform algorithm for heat and fluid flow in three dimensional porous media. In: 2th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 2001 Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001. 1 CD ROM.
- NEVES, O. A. *Difusão Tridimensional Não Linear Transiente*. 2003. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira.
- OLIVEIRA, M. C.; SPHAIER, S. H. Numerical simulation of three dimensional flow over cylinders using an hybrid method. In: 2th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL HEAT AND MASS TRANSFER, 2001 Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001. 1 CD ROM.



ÖZISIK, M. N. *Boundary value problems of heat conduction*. Scranton: International Textbook, 1968.

ÖZISIK, M. N.; MURRAY, R. L. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary conditions. *Journal Heat Transfer*. v.96, p.48-51. 1974.

ÖZISIK, M. N. *Heat conduction*. New York: John Wiley & Sons, 2.ed., 1993.

PELEGRINI, M.F. *et al.* Heat transfer in slug flow in elliptical ducts. In: 10th BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL SCIENCES AND ENGINEERING, 2004, Rio de Janeiro. *Proceedings*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004. 1 CD ROM.

PEREIRA, L. M. *et al.* Compressible flow and heat transfer in ultracentrifuges: hibrid analysis via integral transforms. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 45, n° 1, p. 99-112. 2002.

SHAH, R. K.; LONDON, A. L. Laminar flow forced convection in ducts. *Advances in Heat Transfer, Supplement 1*. New York: Academic Press Inc., 1978. 477p.

SANTOS, C. A. C.; COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Heat transfer enhancement in laminar flow with externally finned tubes. *International Journal of Heat and Technology*. v. 9, p. 46-68. 1991.

SANTOS, C. A. C., QUARESMA, J. N. M.; LIMA, J. A. *Convective heat transfer in ducts: the integral transform approach*. Rio de Janeiro: Mechanical Sciences Series, Brazilian Society of Mechanical Sciences, 2002. 345 p.

SCOFANO NETO, F.; COTTA, R. M. Counterflow double pipe heat exchanger analysis using a mixed lumped-differential formulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 35, n° 7, p. 1723-1731. 1992.

SERFATY, R. *Problemas Não Lineares Multidimensionais em Difusão Convecção-Difusão: Benchmarks Via Transformada Integral*. 1997. 103 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

TRANter, C. J. *Integral transform in mathematical physics*. New York: John Wiley, 1962.



DIFUSÃO NEUTRÔNICA NUMA CÉLULA DE UO_2

A.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Adotar que o termo fonte que representa a geração de energia numa célula de reator nuclear é uniforme em todo o domínio, tem como vantagem a simplificação dos cálculos envolvidos na obtenção dos perfis de temperatura e outras propriedades de interesse para este problema.

Entretanto, como foi mencionado na Seção 4.2 deste trabalho, o termo fonte presente na equação da energia é proporcional ao fluxo de nêutrons térmicos no interior da célula. Assim, devido à absorção destes nêutrons no processo de fissão nuclear, há diminuição da sua disponibilidade nas regiões mais interiores da célula de combustível.

Este fenômeno pode ser representado pela teoria da difusão, a qual é baseada na lei de Fick. Este procedimento, o qual é algumas vezes chamado de aproximação por difusão, foi usado no projeto da maioria dos primeiros reatores nucleares de potência, e, embora métodos mais sofisticados tenham sido desenvolvidos, ele é ainda hoje utilizado para fornecer estimativas das propriedades dos reatores. A partir dela, serão determinadas as grandezas referentes à difusão neutrônica, e por conseqüência, à geração de energia.

Em particular, para o problema de células de seção elíptica, a estrutura da equação diferencial que rege o processo de difusão, não permite que esta possa ser resolvida por técnicas analíticas clássicas. Assim, optou-se pela utilização da TTIG para a obtenção da distribuição do fluxo neutrônico, inclusive para as células de seção retangular.

A.2. PROBLEMA DIFUSIVO COM FONTES UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS

A.2.1. INTRODUÇÃO

Considere inicialmente que os nêutrons estejam em equilíbrio térmico com os átomos da vizinhança e que eles sejam monoenergéticos. Considere agora a difusão de nêutrons perpendicularmente a um elemento de área no domínio considerado. Se a densidade de



nêutrons $n(x, y)$ for uniforme, o número de nêutrons cruzando este elemento de um lado será igual ao número de nêutrons cruzando a partir do outro lado. Quando isso não ocorre, os nêutrons passam a fluir da região de maior densidade para região de menor densidade. Este fluxo dos nêutrons pode ser representado pela lei de difusão de Fick:

$$J = -D \frac{d\phi}{d\eta}, \quad (\text{A.1})$$

onde J é a densidade de fluxo, a qual representa o número de nêutrons que atravessa uma área definida dA por unidade de tempo, e D é o coeficiente de difusão.

Aplicando a equação da continuidade num volume Ω arbitrário no interior do reator, a variação temporal do número de nêutrons neste volume pode ser determinada pela seguinte equação:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a \phi - \text{div } J, \quad (\text{A.2})$$

onde:

1. – variação temporal do número de nêutrons num volume Ω ,
2. – taxa de produção de nêutrons em Ω ,
3. – taxa de absorção de nêutrons em Ω ,
4. – difusão de nêutrons através da superfície de Ω ,

Aqui, S representa o termo fonte de nêutrons e Σ_a é a seção de choque de absorção, que pode ser definida como uma medida da probabilidade do neutron ser absorvido pelo meio.

A equação da difusão neutrônica é obtida inserindo Lei de Fick dentro da equação da continuidade. Em regime permanente, esta equação terá a seguinte forma:

$$D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \quad (\text{A.3})$$

Por conveniência, divide-se a Equação A.3 pelo coeficiente de difusão D :



$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{L_d^2} \varphi + \frac{S}{D} = 0 \quad (\text{A.4})$$

onde L_d^2 é denominado de comprimento de difusão e é dado por

$$L_d^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \quad (\text{A.5})$$

O processo de fissão nuclear promove o espalhamento de nêutrons de diversos estados de energia. Os nêutrons de baixa energia, ou seja, os nêutrons térmicos, podem ser absorvidos pelo elemento físsil, mas os nêutrons de alta energia, resultantes do processo de fissão, esta probabilidade é muito pequena. Portanto, para os nêutrons térmicos, o termo fonte da equação da conservação de nêutrons será considerado nulo no interior da célula e a geração de energia térmica será aqui admitida como sendo unicamente devida à taxa de absorção destes nêutrons.

A1.2. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO NEUTRÔNICA NUMA CÉLULA DE UO_2

O problema da difusão neutrônica numa célula de combustível nuclear, quando representado pela Lei de Fick, tem estrutura elíptica que pode ser resolvida pela TTIG. Assim, esta subseção traz a resolução deste problema, ressaltando que, por questões de similaridade, será apresentada apenas a solução para a célula de seção transversal elíptica, onde será realizada uma transformação de coordenadas como demonstrado nos capítulos anteriores. Desta maneira, apresenta-se a equação da difusão e as condições de contorno adimensionalizadas e homogêneas, pertinentes a este problema. Os procedimentos utilizados no tratamento destas equações são também análogos aos da Seção 4.2.

A partir das transformações realizadas, obtém-se a equação da continuidade adimensionalizada e suas respectivas condições de contorno, dadas a seguir:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) + J(u, v)[\varphi(u, v) + 1] = 0, \quad \{0 < u < \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = 0, \quad \{u = 0, \quad u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (\text{A.6b})$$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0\}, \quad (\text{A.6c})$$

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0\}, \quad (\text{A.6d})$$

onde $\varphi(u, v)$ é o fluxo adimensional e normalizado de nêutrons, $J(u, v)$ é o Jacobiano da transformação para o sistema de coordenadas elípticas e v_0 é o parâmetro que define o contorno elíptico da célula.

Devido a estrutura bidimensional da equação da difusão, a transformada integral será aplicada com o auxílio de um problema de autovalor para cada coordenada, conforme descrito na Seção 3.3. Em função das características apresentadas pelas condições de contorno do problema, define-se para a coordenada u , o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 < u < \pi/2\}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\left. \frac{d\psi}{du}(u) \right|_{u=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{du}(u) \right|_{u=\pi/2} = 0, \quad (\text{A.7b,c})$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u), \quad \mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.7d,e})$$

As autofunções normalizadas associadas a este problema permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\varphi}_i(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) \varphi(u, v) du, \quad \text{transformada}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\varphi}_i(v), \quad \text{inversa}, \quad (\text{A.8b})$$

onde

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1 \\ \pi/4, & i > 1 \end{cases}. \quad (\text{A.8c,d})$$



A remoção da derivada parcial de segunda ordem em u da equação da difusão é feita por integração no domínio, conforme metodologia apresentada na Seção 3.1. Para tal fim, efetua-se o produto interno da autofunção normalizada $K_i(u)$ com a equação da difusão. Com o auxílio de uma segunda relação obtida pelo produto interno do potencial $\varphi(u,v)$ com a equação que define o problema de autovalor, Equação (A.7bc), têm-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \bar{\varphi}_j(v) + C_i(v) = \frac{d^2 \bar{\varphi}_i(v)}{dv^2} + \mu_i^2 \bar{\varphi}_i(v), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.9})$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada v , define-se o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 < \phi < v_0\}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\left. \frac{d\phi}{dv}(v) \right|_{v=0} = 0, \quad \phi(v_0) = 0, \quad (\text{A.10b,c})$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v), \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)l}{2v_0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.10d,e})$$

As autofunções normalizadas associadas a este problema são dadas por

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}, \quad (\text{A.11a,b})$$

e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{\varphi}_{im} = \int_0^{v_0} Z_m(v) \bar{\varphi}_i(v) dv, \quad \text{transformada}, \quad (\text{A.12a})$$

$$\bar{\varphi}_i(v) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(v) \tilde{\varphi}_{im}, \quad \text{inversa}. \quad (\text{A.12b})$$

Observa-se que das Equações A.8a e A.8b, o par transformada-inversa estabelecido através do segundo problema de autovalor, pode ser reescrito como



$$\tilde{\tilde{\varphi}}_{im} = \int_0^{v_0} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \varphi(u,v) du dv, \quad \text{transformada,} \quad (\text{A.13a})$$

$$\varphi(u,v) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\tilde{\varphi}}_{im}, \quad \text{inversa.} \quad (\text{A.13b})$$

Para a remoção da derivada de segunda ordem em da equação transformada, efetua-se o produto interno da autofunção normalizada $Z_m(v)$ com a Equação A.9. Uma equação auxiliar também é provida, efetuando-se o produto interno do potencial transformado $\bar{\theta}_i(v)$ com a equação do problema de autovalor correspondente:

Assim, a equação da energia transformada em u e v é dada, finalmente, por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{ijmn} \tilde{\tilde{\varphi}}_{jn} + D_{im} = (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\tilde{\varphi}}_{im}, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.14})$$

A Equação A.9 gera um sistema infinito de equações algébricas para $\tilde{\tilde{\varphi}}_{im}$. Apesar de todos os termos envolvidos no problema serem transformáveis, o sistema de equações não é desacoplado, devido ao termo de absorção da equação resultante, que torna esparsa a matriz solução deste sistema.

Finalmente, o sistema de equações infinito acima pode ser resolvido truncando-se a série num número de termos suficientemente grande para obtenção da exatidão requerida.

A.3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os termos que geram o sistema de soluções para o problema acima foram convenientemente indexados para que pudessem ser resolvidos pela rotina DLSARG da Biblioteca IMSL. Foi verificado que a série que determina o potencial transformado $\tilde{\tilde{\varphi}}_{im}$ converge rapidamente. Para $M = N = 20$ termos, foi verificado uma convergência de 4 dígitos, no mínimo, para o fluxo neutrônico no centro da célula de combustível.

A Figura A.1 mostra o comportamento espacial do fluxo de nêutrons dentro da célula de combustível de seção transversal elíptica, para uma razão de aspecto de $\rho_{aspec} = 0,50$ e um comprimento de difusão neutrônico adimensionalizado $L_d^{2*} = 1,0$.



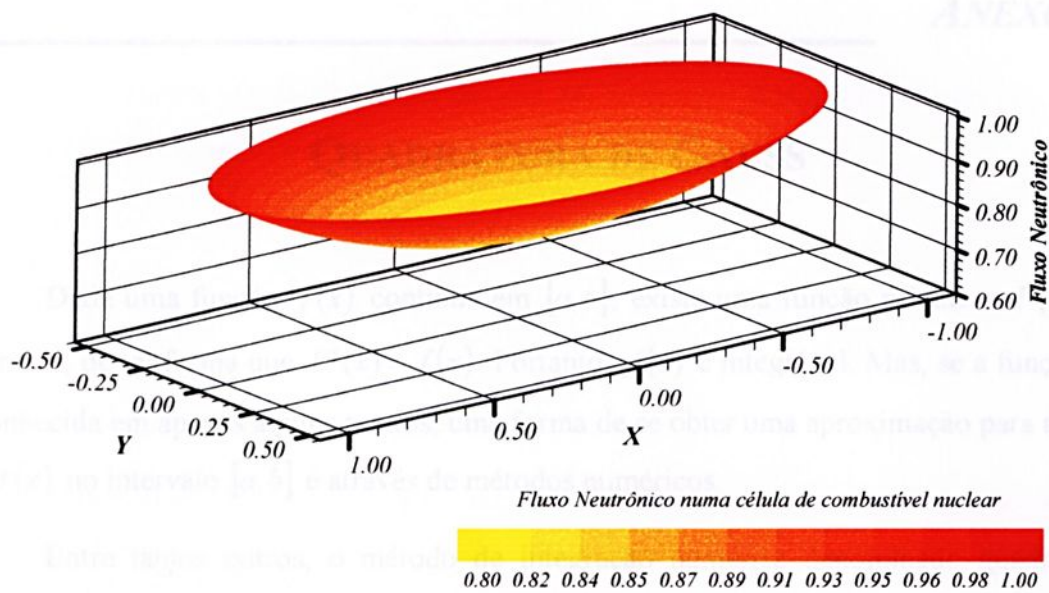


Figura A.1. Comportamento tridimensional do fluxo de difusão neutrônica para uma célula de razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$ e $L_d^* = 1.0$.

Quanto menor o comprimento de difusão, mais proeminente é a queda de disponibilidade de nêutrons no centro da célula, como pode ser observado na Tabela A.1.

Tabela A.1. Fluxo mínimo e médio de nêutrons no interior de uma célula de combustível de seca elíptica com razão de aspecto $\rho_{aspec} = 0,50$.

<i>L</i>	<i>Fluxo Mínimo</i>	<i>Fluxo Médio</i>
∞	1,0000	1,0000
2,0	0,9432	0,9714
1,0	0,7993	0,8973
0,5	0,4595	0,7067



QUADRATURA DE GAUSS

Dada uma função $f(x)$ contínua em $[a, b]$, existe uma função primitiva $F(x)$, neste intervalo, de tal forma que $F'(x) = f(x)$. Portanto, $f(x)$ é integrável. Mas, se a função $f(x)$ é conhecida em apenas alguns pontos, uma forma de se obter uma aproximação para a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é através de métodos numéricos.

Entre tantos outros, o método de integração numérica denominado quadratura de Gauss fornece flexibilidade em escolher não somente os coeficientes da função peso, mas também a localização onde as funções são avaliadas. Como resultado, ao método da quadratura de Gauss resulta em duas vezes mais pontos de precisão que as fórmulas de Newton-Cotes. O método da quadratura de Gauss consiste, basicamente, na escolha de n pontos adequados e equidistantes x_i e pesos correspondentes g_i , de modo que a fórmula para a quadratura seja exata para o polinômio de maior grau $2n - 1$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + R_n(f). \quad (\text{AN.1})$$

Acima, $R_n(f) = 0$, caso f seja um polinômio $p \leq 2n - 1$, e x_i está associado com os zeros de polinômios ortogonais, sendo denominados de pontos de quadratura, ou seja, o ponto onde a função é integrada, e g_i , que é a função peso relacionada com os polinômios ortogonais.

Uma grande vantagem do método de quadratura de Gauss é a grande precisão que se pode obter para os pontos de quadratura.

A quadratura de Gauss exige o cálculo dos valores do integrando para pontos variados. Logo, dados tabelados não são apropriados para integração por esse método.



AN1. QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

Se a função escolhida para o cálculo da Integração por quadratura de Gauss for os polinômios de Legendre, a expressão resultante será:

$$A_i = \int_a^b w(x) l_i(x) dx, \quad (\text{AN.2})$$

onde $l_i(x)$ são os polinômios de Legendre sobre as raízes $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $\phi_{n+1}(x)$.

Assim, o procedimento para se calcular uma integral usando Quadratura de Gauss, é o seguinte:

- determinar o polinômio ortogonal $\phi_{n+1}(x)$, segundo o produto escalar conveniente, isto é, com a função peso $w(x)$ e no intervalo $[a, b]$.
- calcular as raízes $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $\phi_{n+1}(x)$.
- determinar os polinômios de Legendre $l_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, usando os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ obtidos em b).
- calcular $A_i = \int_a^b w(x) l_i(x) dx$, $i = 0, 1, \dots, n$.
- calcular o valor de $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$.
- calcular, finalmente,

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \cong \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (\text{AN.3})$$

A integração por quadratura de Gauss-Legendre é exata para polinômios de Legendre de ordem n . Para $n = 2$:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (\text{AN.4})$$

Na quadratura de Gauss-Legendre a integração é feita no intervalo $[-1, 1]$. A modificação para um intervalo qualquer $[a, b]$ é obtida pela substituição:



$$x = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2} \quad (\text{AN.5})$$

Para $n = 2$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right)dz \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) \right] \quad (\text{AN.6})$$

A seguir são mostrados na Tabela AN.1 os valores dos pontos e pesos utilizados para a integração pelo método da Quadratura de Gauss utilizando-se os polinômios de Legendre até a quinta ordem.

Tabela AN.1. Pontos (x_i) e pesos (g_i) adequados para a integração de Gauss-Legendre até a 5ª ordem:

ordem	x_i	w_i
2	$\pm 0,57735$	1,000000
3	0	0,888889
	$\pm 0,774597$	0,555556
4	$\pm 0,339981$	0,652145
	$\pm 0,861136$	0,347855
5	0	0,568889
	$\pm 0,538469$	0,478629
	$\pm 0,90618$	0,236927

Para grandes intervalos de integração, a quadratura de Gauss-Legendre pode ser mais efetiva subdividindo-se o intervalo de integração em intervalos menores e adicionando os resultados das integrações dos subintervalos, sem precisar aumentar o número de pontos adequados.





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Campus de Ilha Solteira
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
CEP 15385-000 - Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br

