

Modelos Matemáticos para o Retoque Digital de Imagens

André Luiz Ortiz da Silva

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 094

Modelos Matemáticos para o Retoque Digital de Imagens

André Luiz Ortiz da Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Docente: Prof. Dr. Maurílio Boaventura

São José do Rio Preto

23 de fevereiro de 2005

Silva, André Luiz Ortiz da.

Modelos matemáticos para o retoque digital de imagens /
André Luiz Ortiz da Silva. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2005
115 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maurílio Boaventura

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista.
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática aplicada. 2. Equações diferenciais parciais -
Soluções numéricas. 3. Processamento de imagens - Técnicas
digitais. 4. Processamento de imagens - Conservação e
restauração. 5. Retoque Digital. I. Boaventura, Maurílio.
II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 519.6

À Deus.

À meus pais, Toninho e Maria Helena.

À minha namorada Erica.

Às minhas irmãs Heloisa e Érica.

Dedico

Agradecimentos

A Deus, sobre todas as coisas.

Aos meus pais pelo carinho, amor, união e apoio a escolha de ingressar num curso Superior de Matemática, bem como a ajuda financeira necessária para poder manter-me durante os vários anos de minha vida e principalmente nos quatro anos de curso.

As irmãs Érica e Heloisa, e aos cunhados, pelo incentivo. A minha namorada Erica, pela paciência e incentivo durante este período de muita dedicação a pós-graduação.

Aos familiares que sempre apoiaram-me, dentre os quais cito meus tios Antonio Carlos e Ilidia, meus primos Wagner, Wander e Wilson.

Aos Professores do Ensino Fundamental e Médio das escolas que estudei nas cidades de Ribeirão Preto e São José do Rio Preto que desde cedo incentivaram-me para que conhecesse o mundo da matemática no Ensino Superior, dentre os quais cito os Professores Ademir Manfrin e Maria Isabel (Ibilceana).

Aos Professores do Curso de Matemática do IBILCE/UNESP principalmente aqueles que deram a base teórica e prática durante os disciplinas que cursei dentre os quais cito: os mestres Barbara, Hélia e Hermes; os Doutores Adalberto, Angela, Cleonice, Eliana, Ermínia, Elso, Fernando Ferrari, Gorete, Heloisa, Kiko, Manzato, Maria do Socorro, Maurílio, Paulo Ricardo, Sérgio, Toninho, Walter e demais.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada principalmente aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste sonho, dentre os quais cito os Professores Doutores Alagacone Sri Ranga, Eliana Xavier Linhares de Andrade, Manoel Ferreira Borges Neto, Masayoshi Tsuchida, Maurílio Boaventura e Sérgio Luis Lopes Verardi.

Agradeço em especial ao Professor Maurílio Boaventura pela orientação, incentivo, confiança e paciência, durante a iniciação científica, pós-graduação e na elaboração deste trabalho.

Gostaria de agradecer em especial aos Professores Doutores Cleonice Fátima Bracciali, Geraldo Nunes Silva e o amigo pós-graduando Fabiano Alan Martins pelo apoio durante a organização do XXVI CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional) que foi realizado no período de 08 a 11 de setembro de 2003 na cidade de São José do Rio Preto.

Aos amigos que conquistei nas diversas cidades onde morei e os quais passamos muitos momentos legais e que fazem-se presentes na minha vida até hoje dentre os quais cito os amigos Mateus Garcia (Cabeça), Rogério Bernardes Sarausa (Magrelo) e Ronieri Borges.

Aos amigos graduados no ano de 2002 em Licenciatura e Bacharelado em Matemática, que foram muito companheiros nos momentos bons e difíceis, dentre os quais cito Carina, Ciléia, Cláudia, Cristiane, Danilo (Truta), Danilo (Bigodinho), Evandro, Fabiano, Fábio, Flávio, Jamil, Zé (Vermelho), José Renato (Firmino), Juliano, Márcio, Paulo, Renato (Menisco), Ricardo, Robson, Sabrina, Wiliam (Boi), Wiliam e demais.

Aos amigos pós-graduados nos anos de: 2004, dentre os quais cito Cassius, Flávia, Fernando, Roberto (Bob), Tais, Tânia; 2005, dentre os quais cito, Alessandro, Cláudia, Daniel, Fabiano, Fernando, José Renato (Vermelho), Karina, Oreste, Paulo. Aos amigos a serem pós-graduados possivelmente no ano de 2006, dentre os quais cito Adriana, Altamir, Amábile, Betânia, Daniele, Danilo, Eduardo, Fábio, José Maricato, Motoki, Reginaldo, Ricardo e Rildo. Agradeço especialmente, aos amigos citados acima, que ajudaram a alcançar mais essa conquista e que foram muito companheiros nos momentos difíceis e alegres nas festas da “Casa Rosada”. Aos amigos de laboratório Getúlio e Sérgio Leugi Filho (Sérjão) . As doutorandas Andreia e Deisemara.

Às pessoas que no desenvolvimento deste trabalho contribuíram de diferentes formas para sua realização.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro durante os 24 meses que estive dedicado a somar os créditos das disciplinas, passar nos exames de Qualificação Geral e de Proficiência em Língua Estrangeira, neste caso Inglês, bem como utilizar os conhecimentos adquiridos para finalizar esse período realizando o trabalho que apresento no presente texto.

Resumo

Neste trabalho apresentamos conceitos teóricos fundamentais como os Princípios da Boa Continuação de Gestalt e da Conectividade de Kanizsa, os quais estão intimamente relacionados à percepção visual humana estudada por psicólogos. Tais conceitos são muito importantes no contexto do processamento de imagens, principalmente no que se refere ao processo de Retoque Digital de Imagens, influenciando e auxiliando pesquisadores a criar modelos matemáticos que imitem o sistema visual humano, com a intenção de deixar o processo mais real possível. Apresentamos também, diversos modelos matemáticos propostos para solucionar o problema de retoque digital, bem como técnicas para implementação computacional de tais modelos.

Palavras-chave: Retoque Digital, Imagens Digitais, Processamento Digital de Imagens, Difusão, Modelos Matemáticos, Equações Diferenciais Parciais.

Abstract

In this work we present fundamental theoretical concepts like the Gestalt's Good Continuation Principle and the Kanizsa's Connectivity Principle, which are closely related to human visual perception studied by psychologists. Such concepts are very important in the context of the image processing, mainly in those related to the inpainting process. These concepts are influencing and helping researchers to create mathematical models that imitate the human visual system, with the purpose to make the process as real as possible. We also present, various mathematical models developed to solve the inpainting problem and techniques for the computational implementation of theses models.

Keywords: Inpainting, Digital Images, Image Digital Processing, Diffusion, Mathematical Models, Partial Differential Equations.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	8
1.1 Imagens e a percepção visual humana	8
1.2 Conceitos Básicos Relacionados ao Processamento Digital de Imagens	14
1.2.1 Imagens Digitais	14
1.2.2 Elementos de uma imagem digital	15
1.3 Visão Computacional	17
1.4 Ciência Cognitiva	18
1.5 As Equações Diferenciais Parciais	18
1.6 Considerações Finais	21
2 Descrição dos Modelos Matemáticos	22
2.1 O Modelo de Bertalmío et al. (BSCB)	22
2.1.1 A importância da Difusão Anisotrópica	25
2.1.2 Considerações sobre o Modelo de Retoque BSCB	25
2.2 O Modelo de Chan e Shen (TV)	27
2.2.1 O Método da Variação Total	29
2.2.2 Descrição do Modelo de Retoque TV	29
2.2.3 Considerações sobre o Modelo de Retoque TV	32
2.3 O Modelo de Chan e Shen (CDD)	33
2.3.1 Considerações sobre o Modelo de Retoque CDD	36
2.4 O Modelo de Masnou e Morel	36
2.4.1 Curva Elástica de Euler e Curvatura no Processo de Retoque Digital . . .	38
2.4.2 Considerações sobre os Modelos Elásticos	42
2.5 O Modelo de Ballester et al. (BBCSV)	43

2.5.1	Considerações sobre o Modelo de Retoque BBCSV	46
2.6	O Modelo de Chan e Shen (CS)	47
2.6.1	Representação Geométrica dos Diferenciais: a curvatura k e a taxa de derivação σ	47
2.6.2	A aproximação axiomática para uma classe de EDP's de terceira ordem . .	49
2.6.3	Considerações sobre o Modelo de Retoque CS	51
2.7	Considerações Finais	51
3	Implementações Numéricas	52
3.1	O Método de Diferenças Finitas	53
3.2	Definição de Malha Regular Bidimensional	54
3.3	Discretização de u_t por Euler	56
3.4	Implementação Numérica do Modelo de Retoque BSCB	57
3.5	Implementação Numérica do Modelo de Retoque TV	59
3.6	Implementação Numérica do Modelo de Retoque CDD	61
3.7	Implementação Numérica do Modelo de Retoque Elástico CKS	67
3.7.1	Nossa Contribuição relacionada ao Modelo CKS	70
3.8	Implementação Numérica do Modelo BBCSV	71
3.9	Implementação Numérica do Modelo de Retoque CS	83
3.10	Considerações Finais	86
4	Resultados Experimentais	87
4.1	Considerações Finais	107
	Conclusão	108
	Referências Bibliográficas	111

Introdução

O processo de Retoque é uma prática tão antiga quanto a própria criação artística, o objetivo deste procedimento é reconstruir as partes perdidas ou danificadas de um trabalho, no sentido de torná-lo mais legível, restaurando-se a sua forma original. Este trabalho, por ser muito refinado, foi durante muito tempo executado apenas por artistas profissionais, através da aplicação de técnicas manuais.

Somente, nas últimas décadas, devido ao surgimento do conceito de imagem digital, houve a possibilidade da automatização desta tarefa. A idéia básica do Retoque Digital de Imagens é imitar os procedimentos manuais. As principais aplicações dos métodos relacionados ao Retoque Digital são em restauração de quadros, fotografias e filmes, remoção de texto e objetos em imagens digitalizadas, desocclusão, *zoom* e codificação.

Vale ressaltar, que na análise visual, retoque e desocclusão estão intimamente ligados, mas também são claramente diferentes. Ambos os procedimentos visam recuperar as informações visuais perdidas de uma dada imagem em duas dimensões, e matematicamente, podem ser classificadas nas mesmas categorias de problemas inversos. A diferença está nos objetivos e aproximações.

O objetivo principal da desocclusão é modelar como a visão humana age no sentido de completar objetos oclusos em uma determinada cena em duas dimensões, e entender suas ordens física na direção perpendicular ao plano da imagem, e assim reconstruir aproximadamente um mundo tridimensional significativo. Desta forma, os resultados da desocclusão são objetos completos, com as relativas ordens ou profundidades. Enquanto, o retoque, como já dito anteriormente, é a técnica de completar uma imagem em duas dimensões que tem certas regiões perdidas e o resultado é ainda uma imagem em duas dimensões, porém não existe a preocupação com relação a ordem dos objetos. Portanto, do ponto de vista visual, o retoque é um processo de baixo nível comparado a desocclusão.

A diferença fundamental citada acima naturalmente influencia os procedimentos que determinam a aproximação final. Por exemplo, para a desocclusão, segmentamos as regiões na imagem, e então conectamos logicamente aquelas que pertencem a projeção do mesmo objeto físico, para finalmente gerar a ordem ou profundidade de todos os objetos completados. Sendo que esse preenchimento de bordas é um passo crucial durante o processo inteiro. Durante esse procedimento, também usa-se frequentemente alguma informação de alto nível sobre objetos, como, por exemplo, no reconhecimento de faces humanas, a quase simetria. Por outro lado, no retoque, um procedimento ideal seria reconstruir uma imagem incompleta em cada detalhe buscando uma aparência “completa” e “natural”. Mais especificamente, a arte do retoque, não é somente completar as bordas quebradas, mas também conectar cada linha isocrômica quebrada a fim de que os objetos completados apresentem sua variação natural em intensidade.

Assim, a comparação acima, ajuda-nos a entender melhor a natureza real do problema de retoque num amplo contexto. Na literatura relacionada ao Retoque Digital, além dos que tratam do retoque de imagens, que será nosso objeto de estudo, podem ser encontrados vários grupos de trabalho. Existem, por exemplo, os que lidam com a restauração de filmes, outros estão relacionados a síntese de texturas e etc.

Relacionado a restauração de filmes, Kokaram et al. [30] usam estimação de movimento e modelos auto regressivos para interpolar perdas de dados em filmes. A idéia básica é utilizar as informações dos quadros adjacentes, por exemplo, para reconstruir uma cena, usam-se informações das cenas anterior e a posterior. Porém, uma das limitações dessa técnica é que ela não pode ser aplicada a filmes onde as regiões a serem realçadas tenham muitos quadros. Maiores detalhes podem ser encontrados em [29], [30] e também em [26]. Os autores, Hirani e Totsuka [24], combinam frequência e informações do domínio espacial no sentido de completar uma dada região com uma textura selecionada, produzindo resultados satisfatórios, mesmo que a técnica utilizada seja simples. Mas como o algoritmo lida principalmente com síntese de texturas, o mesmo requer que o usuário selecione a textura a ser copiada na região a ser tratada. Assim, para imagens onde a região a ser realçada cobre várias estruturas diferentes, o usuário deve efetuar um tremendo trabalho de segmentação das regiões e procurar correspondentes substituições em toda a extensão da imagem, mesmo que parte desta busca possa ser efetuada automaticamente, durante o processo é consumido muito tempo e requer a seleção não trivial de muitos parâmetros cruciais. Para maiores detalhes referentes a síntese de texturas, o leitor interessado poderá consultar [18], [23], [24] e [48].

Neste contexto de Retoque digital de imagens, o trabalho realizado por Bertalmío et al. [9] foi pioneiro, baseando-se numa bela intuição do transporte suave ao longo das linhas de mesmo nível de cinza. Os autores apresentaram um simples e eficaz modelo baseado em uma equação diferencial parcial de terceira ordem. Na literatura relacionada a esse contexto podem ser encontrados vários outros modelos que foram inspirados no trabalho apresentado em [9]. Dentre os quais podemos citar [3], [12] e [14]. Na desocclusão destacam-se Masnou e Morel [33], [34], [35]. Podemos citar ainda trabalhos que foram baseados diretamente ou indiretamente nos trabalhos relacionados a retoque e/ou desocclusão, tais como, Chan et al. [3], [15], [16] e, mais recentemente Batista [5] e Martins [32].

Outra área muito próxima e que merece destaque está relacionada a eliminação de ruídos em imagens digitais através de Modelos Matemáticos baseados em difusão, na qual destacam-se os trabalhos de Rudin et al. [46], Rudin e Osher [45], Silva Jr. [47], Barcelos et al. [4] e recentemente Oliveira [42].

Matematicamente, podemos considerar uma imagem como sendo uma função limitada $u : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow R$, $n = 2$, para imagens bidimensionais, ou $n = 3$, para imagens tridimensionais. Chamamos de domínio de Retoque, Ω , a região de dados perdidos, na qual desejamos recuperar informações. Neste trabalho, consideramos apenas imagens bidimensionais, sendo $u^0(x, y)$ a representação da imagem original, a ser tratada. O objetivo é retocar esta imagem a partir de uma imagem inicial na forma matricial, a qual adotamos como convenção a representação da maneira como apresentada na Figura I.1, fixamos a dimensão em 256×256 , para facilitar o procedimento e também, por conveniência, vamos emitir as variáveis (x, y) nas equações dos modelos.

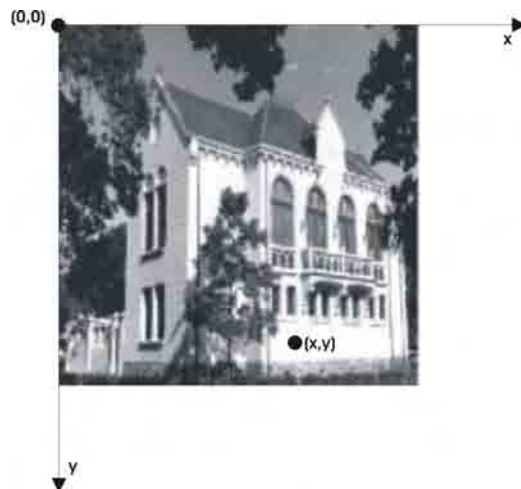


Figura I.1: Imagem digital, mostrando o elemento (x, y) como um dos seus representantes.

Texturas são regiões das imagens, onde as diferenças de tonalidade são muito sutis, de forma a dificultar a detecção dos contornos. Praticamente inexistem, na literatura, trabalhos envolvendo texturas e retoque digital. Um exemplo que deixa bem claro esse problema é uma colmeia, nela são encontradas muitas fendas de diferentes formas e tamanhos, como mostrado na Figura I.2 abaixo.

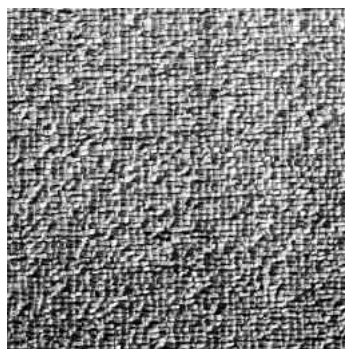


Figura I.2: Parte de uma colmeia representando uma região de textura.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo evolutivo dos modelos matemáticos, propostos recentemente, direcionados a aplicação de técnicas de retoque para imagens digitalizadas sem texturas, enfocando principalmente técnicas de implementação numérica para a solução das equações que modelam cada problema.

Este trabalho está organizado do seguinte modo:

No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos importantes relacionados aos vários assuntos que estamos abordando neste texto, assim consideramos sua leitura imprescindível para um melhor entendimento da ampla teoria que envolve o problema de Retoque Digital de Imagens. Abordamos aspectos da percepção visual humana relacionados aos psicólogos Gestalt e Kanizsa, principalmente, no que refere-se a apresentação dos Princípios da Boa Continuação e da Conectividade. Tratamos também das teorias da Visão Computacional e a Ciência Cognitiva, bem como apresentamos algumas definições relacionadas ao processamento digital de imagens. Por fim, apresentamos conceitos básicos relacionados a ferramenta matemática usada para modelagem que são as equações diferenciais parciais.

No Capítulo 2, consideramos somente imagens sem textura e neste sentido apresentamos toda a teoria necessária relacionada a cada modelo a fim de garantir um melhor entendimento das dificuldades encontradas pelos pesquisadores, sendo que a apresentação destes será realizada de forma cronológica visando esclarecer a correta evolução e aprimoramento das técnicas para o

problema do Retoque Digital de Imagens.

Neste sentido, o primeiro modelo que abordamos refere-se ao trabalho pioneiro de Bertalmío et al. [9], que como já mencionado anteriormente, basea-se numa bela intuição do transporte suave ao longo das linhas de mesmo nível de cinza, as quais chamamos de linhas isocrômicas, sendo que os autores apresentaram um simples e eficaz modelo dado através da seguinte equação evolucionária:

$$\begin{cases} u_t = \vec{\delta L}(u) \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} |\nabla u| & , \quad \text{se} \quad (x, y) \in \Omega \\ u = u^0 & , \quad \text{se} \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{cases},$$

onde o transporte de informações de tonalidades para dentro do domínio de retoque é efetuado através do produto escalar da medida de propagação $\vec{\delta L} = \nabla L(u) = \nabla(\Delta u)$ pelo vetor $\vec{d} = \nabla^\perp u$ que indica a direção da linha isocrômica e corresponde ao vetor tangente as essas linhas de nível não normalizado.

Na sequência, apresentamos o Modelo TV para Retoque de Chan e Shen [14], que foi desenvolvido inspirado no Modelo de Bertalmío et al. [9] e no clássico modelo variacional total (TV) de eliminação de ruído de Rudin et al. [46]. Sendo que, quando consideramos o caso de ausência de ruído, o Modelo TV para Retoque é dado por

$$\begin{cases} u_t = \text{div}(D \nabla u) & , \quad \text{se} \quad (x, y) \in \Omega \\ u = u^0 & , \quad \text{se} \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{cases},$$

onde $D = \frac{1}{|\nabla u|}$ é o coeficiente de condutividade.

A deficiência do Modelo de Retoque TV em realizar o Princípio da Conectividade devido ao alto custo das conexões de longa distância inspirou Chan e Shen [12] a desenvolverem o Modelo CDD utilizando também o mecanismo de difusão com o intuito de realizar o princípio citado acima e cuja equação evolucionária associada é:

$$\begin{cases} u_t = \text{div}(\tilde{D} \nabla u) & , \quad \text{se} \quad (x, y) \in \Omega \\ u = u^0 & , \quad \text{se} \quad (x, y) \notin \Omega \end{cases},$$

onde $\tilde{D} = D g(k)$ é o coeficiente de condutividade modificado, $k = \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ é a curvatura das linhas de nível e $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função contínua satisfazendo $g(0) = 0$ e $g(\pm\infty) = +\infty$.

Um outro trabalho que foi considerado é o relacionado ao modelo de Masnou [34], o qual consiste em minimizar o funcional

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \left(\alpha + \beta \left| \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^p \right) dx dy,$$

onde $p \geq 1, \alpha > 0$ e $\beta \geq 0$. Esse modelo apresenta grande complexidade algorítmica, envolvendo técnicas de programação dinâmica. Para contornar essa dificuldade Chan et al. [16] propuseram um outro modelo, equacionado da seguinte forma:

$$u_t = |\nabla u| \operatorname{div}(\vec{V}),$$

onde

$$\vec{V} = \phi(k) \vec{n} - \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t}.$$

sendo $\vec{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ e $\vec{t} = \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|}$ os vetores normal e tangente às linhas de nível normalizados, respectivamente.

Abordamos também, o trabalho apresentado em [3], onde foram estudados conceitos que consistem em minimizar o funcional:

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\operatorname{div}(\theta)|^p (a + b|\nabla \zeta * u|) dx dy + \alpha \int_{\tilde{\Omega}} (|\nabla u| - \theta \nabla u) dx dy,$$

onde $\theta \in W^{1,p}(\operatorname{div}, \tilde{\Omega})$, $|\theta| \leq 1$; $u \in BV(\tilde{\Omega}, B, u^0)$, $|u| \leq \|u^0\|_{L^\infty(B)}$; $a, \alpha > 0, b \geq 0$ e ζ é o Núcleo Gaussiano. $\tilde{\Omega}$ é uma dilatação do domínio de retoque Ω e $B := \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, sendo $\overline{\Omega}$ o fecho da região Ω . Vale notar que, $W^{1,p}$, BV e L^∞ representam os espaços de Sobolev, das funções de variação limitada e a classe de funções mensuráveis com norma $\|f\|_{L^\infty}$, respectivamente.

Para finalizar o Capítulo 2, estudamos o modelo de terceira ordem de Chan e Shen que é morfológica e rotacionalmente invariante e que foi desenvolvido com base em todos os outros trabalhos anteriores relacionados ao contexto de Retoque Digital de Imagens, cuja equação evolucionária é dada por:

$$u_t = \operatorname{div}(\vec{W}),$$

onde

$$\vec{W} = (f(k, \sigma) \vec{n} + a\sigma \vec{t}),$$

sendo k a curvatura das linhas de nível, $\vec{n}$ e $\vec{t}$ os vetores normal e tangente às linhas de nível normalizados, e,

$$f(k, \sigma) = a + bk^2, \sigma = \frac{\partial(\ln |\nabla u|)}{\partial \vec{t}}, k = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

com a e b constantes positivas.

No Capítulo 3, abordamos conceitos como o Método de Diferenças Finitas que é a ferramenta básica utilizada na discretização de derivadas parciais presente nas equações de evolução

dos métodos. Apresentamos também de forma detalhada da implementação numérica de cada um dos modelos apresentados no Capítulo 2, sendo destacada uma contribuição nossa quanto ao tratamento das T-junções decorrentes da aplicação do Modelo Elástico CKS, onde propomos iterações de difusão anisotrópica, objetivando eliminar totalmente os defeitos indesejáveis, facilitando a implementação computacional, sem que fosse necessário o uso de programação dinâmica. Propusemos, também neste capítulo, uma forma explícita para a implementação numérica do modelo BBCSV, diferente da forma implícita proposta por Ballester et al. [3], que, como será observado, no decorrer deste trabalho, acarreta uma diminuição significativa na implementação e também no custo computacional. Finalizando este capítulo, outra contribuição importante será apresentada que é com relação a implementação numérica do modelo CS, a qual realizamos baseados em ótimos resultados que obtivemos com a implementação do modelo Elástico CKS.

No Capítulo 4, tratamos, de forma comparativa, os resultados numéricos dos modelos com objetivo de avaliá-los quanto ao desempenho, quando aplicados à imagens teste, de diversos níveis de complexidade. Bem como, ressaltamos, que baseados nos resultados numéricos obtidos, podemos concluir que nossas contribuições quanto aos parâmetros presentes nos modelos são ótimas, e poderão ser uma referência muito forte nesta área de retoque digital de imagens, pois é difícil de encontrar comentários neste sentido na literatura relacionada.

Finalmente, na Conclusão, efetuamos algumas considerações a respeito dos modelos estudados, bem como, fazemos algumas observações que consideramos relevantes sobre o trabalho realizado e, assim, encerramos o presente texto com algumas perspectivas de projetos futuros.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Por volta de 1920, psicólogos da linha Gestalt propuseram um conjunto de princípios para explicar a organização da percepção visual humana e formulá-los em linguagem geométrica, sendo que neste processo uma das ferramentas de estudo são as imagens. Uma das principais leis propostas naquela época foi o “Princípio da Boa Continuação”; posteriormente, foram formulados outros conceitos, sendo que um dos mais importantes é o “Princípio da Conectividade” do psicólogo Kanizsa. Com o avanço tecnológico e o surgimento dos computadores, dentre as novas teorias que começam a ser estudadas destacam-se a Visão Computacional, o conceito de imagem digital, e mais recentemente a Inteligência Artificial, que visa entender o processo de raciocínio humano e construir entidades inteligentes. Com o passar dos anos, todos esses e outros conhecimentos adquiridos vieram a compor a chamada Ciência Cognitiva. De posse dessa teoria, vários matemáticos tentam modelar os problemas dessa ciência, que em nosso contexto estão relacionados ao Retoque Digital de Imagens, onde uma das ferramentas matemáticas necessárias são as Equações Diferenciais Parciais. Assim, dedicamos esse Capítulo a abordagem de conceitos que servirão de base para o entendimento e apresentação dos capítulos seguintes.

1.1 Imagens e a percepção visual humana

Antes de tratarmos a teoria que envolve essa simples palavra, “imagem”, apresentamos uma breve definição da mesma, bem como de região. As definições que aparecem nesta seção foram extraídas das referências [5], [19], [22], [27], [32], [50] e [51].

Definição 1.1. (Imagem) *Definimos imagem como sendo a arte de representar uma pessoa, um objeto, uma paisagem, uma figura ou uma abstração, através de desenhos, traços, figuras geométricas, modelagem ou fotografia.*

Definição 1.2. (Região) *Região é um subconjunto da imagem.*

Conhecendo essas definições, em uma imagem natural qualquer, como mostrada na Figura 1.1, podemos levantar as seguintes questões: Quais são os objetos presentes na imagem? Podemos reconstruir esses objetos?

Estas simples questões são complexas! De fato, elas são questões fundamentais estudadas por psicólogos da linha Gestalt, e infelizmente não estamos aptos a respondê-las.



Figura 1.1: Imagem Natural

Na Figura 1.1, todos podem observar uma lâmpada, o mar e as nuvens. Essas observações feitas através da visão humana como uma operação elementar, na verdade são construções complexas computacionalmente. Olhando-as em detalhes, quando observamos a lâmpada, por exemplo, estamos visualizando um conjunto de pontos de diferentes cores, que quando aglomerados definimos como uma lâmpada. Mas uma definição formal deveria ser capaz de capturar qualquer tipo possível de lâmpada. Porém, essa tarefa é impossível de ser realizada através de um computador, a menos que considerada em um ambiente estruturado, onde um número limitado de tipos de lâmpada ou outro objeto possam aparecer, e que também haja um controle da intensidade de luz para evitar possíveis dúvidas.

Através do simples exemplo acima, podemos afirmar, que a teoria relacionada a imagens, principalmente coloridas, é muito complexa. Assim, simplificando um pouco esse complexo universo para imagens em tons preto e branco, considere a Figura 1.2.

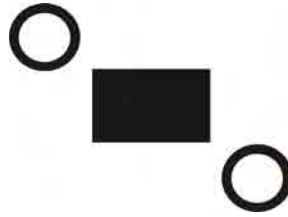


Figura 1.2: Um retângulo e dois anéis pretos

Estamos visualizando objetos pretos em um fundo branco. Neste caso, não temos problemas em identificar as formas que estão presentes na imagem. Porém, nem sempre esse procedimento é simples de ser efetuado. Os psicólogos da linha Gestalt identificaram um dos problemas de dualidade figura-fundo, como por exemplo, Edgar Rubin mostrou em uma imagem, como a Figura 1.3.



Figura 1.3: Duas faces em preto ou uma taça em branco?

Esses psicólogos formularam um conjunto de leis básicas relacionadas a percepção para descrever situações difíceis como a da Figura 1.3, onde podemos visualizar um objeto em preto com fundo branco, ou um objeto em branco com fundo preto. Assim, em alguns casos, a organização da percepção é determinada pela proximidade de objetos, em outros a agregação é determinada por similaridade, ou por distribuição espacial dos elementos, para formar um objeto.

Nas cenas naturais do dia-a-dia, um objeto nem sempre está totalmente visível, às vezes, está com alguma parte “escondida” pela sobreposição de outros objetos. Mas a percepção humana está, sob certas condições geométricas, apta a reconstruir o objeto inteiro, através da interpolação das partes faltantes. Assim, a restauração, o retoque e a desocclusão são fenômenos muito estudados por psicólogos. Esses conceitos encontram-se definidos a seguir.

Definição 1.3. (Restauração) *Conjunto de operações que visam reconstruir uma imagem, restabelecendo, na medida do possível, o seu aspecto original.*

Definição 1.4. (Retoque) *Refere-se a prática de artistas de restauração de pinturas antigas, onde o objetivo é simplesmente completar uma dada pintura, ou em nosso contexto uma imagem, através do preenchimento de uma determinada região, cujas informações foram perdidas, no sentido de recuperá-las.*

Definição 1.5. (Desocclusão) *É o processo de recuperar partes “escondidas” ou estragadas/faltantes de um objeto ou de uma área qualquer em uma imagem digital, estendendo sua ordem física na direção perpendicular ao plano da imagem.*

Partimos agora para a apresentação de alguns outros conceitos, necessários para podermos introduzir os princípios que dão base a teoria relacionada a percepção visual humana.

Definição 1.6. (Domínio de Retoque) *É a região que deverá ser tratada através do processo de retoque, que em nosso contexto denotamos por Ω .*

Definição 1.7. (Domínio de Desocclusão) *É a região que deverá ser tratada através do processo de desocclusão.*

Definição 1.8. (Nível de Cinza) *Nível de cinza é a intensidade de luz monocromática (brilho) nos pontos (x, y) da imagem definida pela função $f(x, y)$.*

Definição 1.9. (Borda) *Borda, beira ou extremidade. No contexto de imagem digital é o limite entre duas regiões com propriedades distintas de nível de cinza, a qual está diretamente relacionado à mudança brusca de nível de cinza em uma região.*

Definição 1.10. (Contorno) *É a linha que “fecha” ou “limita” exteriormente uma região, que em nosso contexto denotamos por $\partial\Omega$*

A habilidade da visão humana em realizar a “continuação” das bordas dos objetos é a regra central no processo de desocclusão e quando reconstruímos as linhas ausentes, é importante levar em consideração o “Princípio da Boa Continuação” descrito por psicólogos da linha Gestalt, o qual é definido a seguir.

Definição 1.11. (Princípio da Boa Continuação) *A organização da percepção tende a preservar a continuação suave da direção, em vez de causar mudanças bruscas.*

Uma outra definição que se faz necessária para o entendimento deste trabalho, é o conceito de T-junções.

Definição 1.12. (T-junções) *Neste trabalho são consideradas as T-junções de borda os pontos de intersecção da $\partial\Omega$ (contorno do domínio de retoque) e das bordas dos elementos que compõem a imagem e que estão chegando em Ω .*

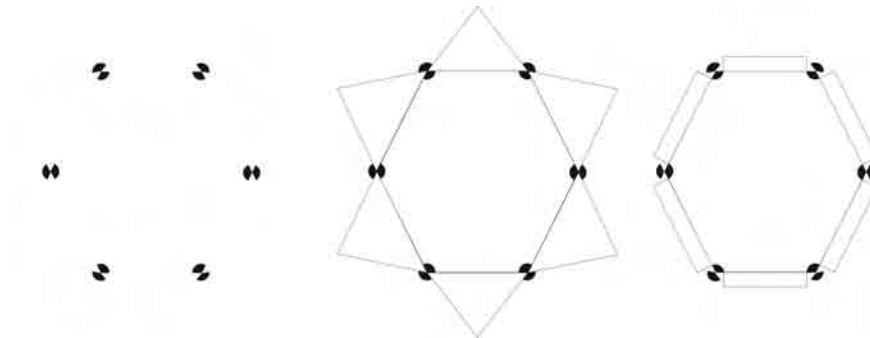


Figura 1.4: Exemplo de como o Processo de Completação Amodal está relacionado as T-junções.

Chamamos de Completação Amodal o processo em que a percepção humana “estende” as bordas visíveis por trás de objetos oclusos e entre as T-junções. Para exemplificar, consideremos a imagem a seguir.

Na Figura 1.4, por exemplo, pode-se ver no desenho a esquerda seis “borboletas” independentes, já o desenho no centro é obtido do primeiro adicionando um hexágono e seis triângulos brancos com bordas pretas. O interessante é que nossa percepção faz com que na reconstrução visual imaginemos discos pretos completos, mesmo que estes estejam parcialmente “escondidos” pelos retângulos em branco, onde podemos observar que essa continuação é feita entre T-junções. Por outro lado, no desenho a direita, uma reconstrução visual totalmente diferente é mostrada, onde imaginamos um hexágono preto obstruído pelos contornos formados entre as “borboletas”, o hexágono branco e os retângulos.

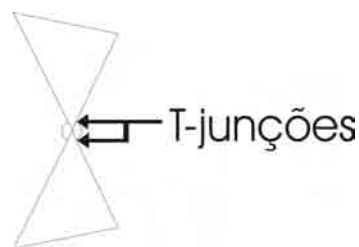


Figura 1.5: Representação das T-junções de parte da Figura 1.4.

No procedimento de Completação Amodal deve-se levar em consideração também outro conceito fundamental chamado “Princípio da Conectividade”, que é uma das definições do psicólogo Kanizsa [27], o qual apresentamos a seguir.

Definição 1.13. (Princípio da Conectividade) *Os seres humanos preferem ver o resultado de uma imagem completa, ou seja, ver todas as regiões incompletas totalmente conectadas, ao invés das partes separadas.*

Segundo os psicólogos, este processo de extensão ou continuidade das bordas deve ser o mais suave e linear (reto) possível, como abordado em [34]. Assim, para entender o *Princípio da Boa Continuação* aplicada a completção amodal, vamos desenhar cada ponto de linhas de nível, e seus vetores normais em duas forma geométricas, por exemplo, um círculo, onde o vetor unitário perpendicular não sofre mudanças repentinas, em outras palavras, os ângulos formados pelos vetores nos pontos vizinhos são pequenos, e um quadrado com mudanças bruscas de direção.

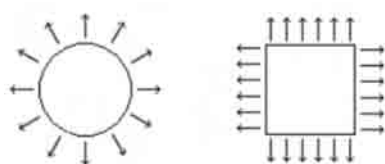


Figura 1.6: A esquerda, as normais ao círculo. A direita, as normais a um quadrado

Vamos interpretar o Princípio da Boa Continuação no seguinte sentido, continuamos as linhas de nível dentro do domínio de retoque, considerando-se que a variação angular dos vetores normais ao contorno é suave. Para colocar o princípio em prática é necessário definir uma energia associada para cada possível continuação, e esta ter como medida a mudança angular das normais ao longo do contorno. Esta mudança angular das normais é igual a mudança angular das tangentes e é representada pela curvatura no contorno. Essa energia é a soma das curvaturas calculadas em cada ponto do contorno, a qual foi introduzida por Euler no contexto da mecânica e é dita elástica. Este assunto será abordado posteriormente no Capítulo 2.

Outro fenômeno interessante é a presença subjetiva de contornos como ocorre nos triângulos de Kanizsa [28], que podem ser visualizados na Figura 1.7 a seguir.

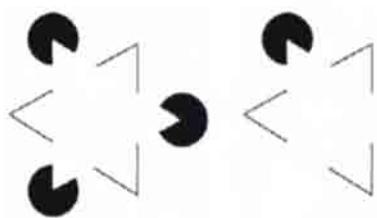


Figura 1.7: Triângulos de Kanizsa

A esquerda, vemos um triângulo branco sobre três círculos e um outro triângulo de modo que visualizamos somente parte de seus contornos, sem nenhuma diferença de nível de cinza, ou seja, branco em ambos os lados da borda. Como disse Kanizsa, “*esse triângulo está apresentando um fenômeno real com as propriedades da modalidade visual*”. Se, por exemplo, removemos dois círculos, como mostrado no desenho a direita, a percepção do triângulo branco diminui.

Os Modelos Matemáticos relacionados ao retoque digital de imagens visam obedecer todos os princípios discutidos anteriormente.

A seguir, vamos abordar alguns conceitos básicos relacionados ao processamento digital de imagens.

1.2 Conceitos Básicos Relacionados ao Processamento Digital de Imagens

As técnicas de processamento digital de imagens começaram a ter aplicações no início do século XX, com o envio de imagens por meio de cabos submarinos entre Londres e Nova Iorque para a publicação em jornais [22]. As quais eram codificadas no transmissor e decodificadas no receptor, onde havia a necessidade de melhoramento na qualidade destas. Mas o grande salto, nesta área, ocorreu com o surgimento dos computadores de grande porte no período da corrida espacial, aliado à necessidade de análise e melhoramento das imagens de televisão, enviadas por sondas espaciais nas missões para a Lua, para Marte (missões Marine) e também nos vôos tripulados para a Lua.

Atualmente, o processamento digital de imagens é utilizado em várias áreas de aplicação do conhecimento humano, dentre as quais destaca-se a percepção automática de máquinas através do processamento de impressões digitais; reconhecimento automático de face humana; reconhecimento de queimadas através de imagens de satélites e etc.

Assim, motivados por esse amplo universo de aplicações relacionadas a esse contexto, apresentamos nesta seção alguns conceitos relacionados ao Processamento Digital de Imagens que serão necessários posteriormente para um melhor entendimento do trabalho a ser desenvolvido nos capítulos seguintes.

1.2.1 Imagens Digitais

Definição 1.14 (Imagem Digital ou Imagem Monocromática). *O termo Imagem Digital, ou imagem monocromática, refere-se à função bidimensional de intensidade da luz monocromática $u(x, y)$, na qual x e y denotam as coordenadas espaciais e o valor ou amplitude da função $u(x, y)$ em qualquer ponto (x, y) é proporcional aos seus níveis de cinza (brilho), ou seja, é uma função bidimensional de intensidade de luz $u(x, y)$ discretizada em coordenadas espaciais.*

Definição 1.15 (Representação da Imagem Digital). *Uma imagem digital pode ser representada por uma matriz, cujos índices de linhas e colunas identificam um ponto (x, y) dessa*

imagem. O valor correspondente do ponto (x, y) na matriz, identifica o nível de cinza do mesmo. A representação de uma imagem digital pode ser vista na Figura I.1 apresentada na introdução deste trabalho.

1.2.2 Elementos de uma imagem digital

Além de alguns elementos já citados anteriormente relacionados à definição de imagem, apresentamos outros que são restritos apenas ao conceito de imagem digital, e os quais seguem-se.

Definição 1.16 (Pixel). *O pixel é o elemento básico da imagem, que no contexto da representação da imagem digital é cada elemento da matriz.*

Definição 1.17 (Vizinhança de um Pixel). *Um pixel p qualquer de uma imagem possui pixels vizinhos. Na situação em que este pixel está na posição (x, y) e não se encontre na borda da imagem, estes vizinhos serão um número de oito: dois vizinhos verticais, dois horizontais e quatro diagonais.*

Pode-se considerar também a vizinhança quatro, que contém somente os verticais e horizontais, cujas coordenadas são: $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y - 1)$ e $(x, y + 1)$. Agora, com relação a vizinhança oito, além dos vizinhos verticais e horizontais já citados, contém também os diagonais cujas coordenadas são: $(x - 1, y - 1)$, $(x - 1, y + 1)$, $(x + 1, y - 1)$ e $(x + 1, y + 1)$. Mostramos na Figura 1.8 (a) e (b), as vizinhanças quatro e oito, respectivamente.

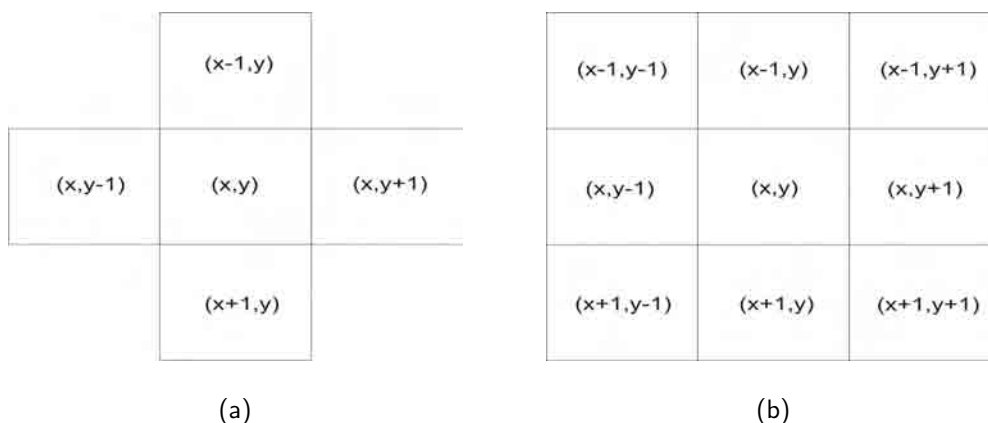


Figura 1.8: (a) Vizinhança 4 de um pixel (x, y) e (b) Vizinhança 8 de um pixel (x, y) .

Definição 1.18 (Máscara). *É uma imagem auxiliar que delimita a área do Domínio de Retoque ou de desocclusão.*

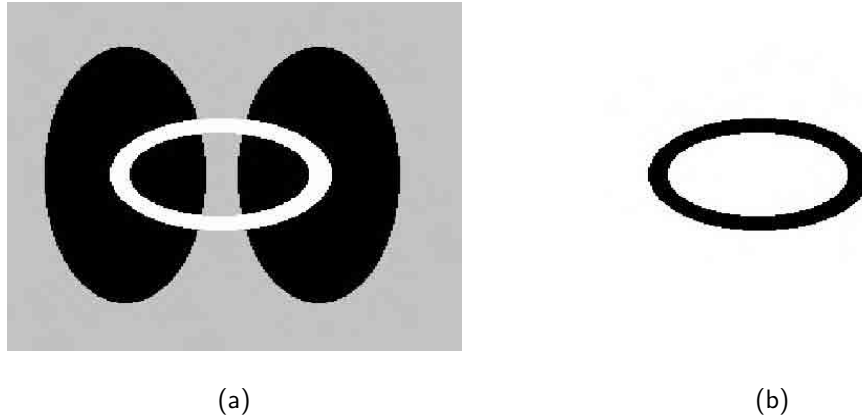


Figura 1.9: (a) Imagem original e (b) Máscara

Definição 1.19 (Ruído). *Tonalidade de cor alterada na captação e/ou na transmissão/recepção de uma imagem.*

A Figura 1.10, apresenta uma imagem original e com ruído. Esses ruídos, geralmente, também, encontram-se em transmissão à distância, onde os dados coletados, como, por exemplo, em satélites e telescópios, devido a limitações de origem técnicas ou mesmo ambientais causam interferências indesejadas nas imagens. Na verdade, estes ruídos, que são medidos através de sua intensidade, o SNR (“Signal to Noise Ratio”), pode ser entendido como alterações indevidas nas escalas de tonalidade de cores que formam as imagens e, é dado pela seguinte expressão:

$$SNR = \frac{\text{Variância da Imagem}}{\text{Variância do Ruído}} dB.$$



Figura 1.10: (a) Imagem original e (b) Imagem com $SNR \cong 12$ dB.

Na sequência, apresentamos as Subseções que tratam da Visão Computacional e da Ciência Cognitiva, dos quais grande parte foram extraídas do trabalho apresentado por Martins [32].

1.3 Visão Computacional

Visão computacional foi definida por Fu et al. [21] como sendo o processo de extrair, caracterizar e interpretar informações das imagens do mundo tridimensional.

Este processo pode ser subdividido em seis áreas principais, que são:

- percepção: processo que produz a imagem visual;
- pré-processamento: trata de técnicas tais como a redução de ruído ou realce de detalhes da imagem;
- segmentação: processo que particiona uma imagem em objetos ou ainda em regiões de interesse;
- descrição: trata dos cálculos de características adequadas para diferenciar um tipo de objeto de outro (como, por exemplo, tamanho ou forma);
- reconhecimento: processo que identifica os objetos propriamente ditos; e
- interpretação: atribui significado a um conjunto de objetos reconhecidos.

A Visão Computacional está presente em várias aplicações, tais como: controle de qualidade industrial, segurança e monitoramento, interface homem-máquina, análise de imagens médicas e robótica.

O principal objetivo da Visão Computacional é desenvolver técnicas capazes de simular a visão humana através de processos computacionais e robôs. Isto é desafiante porque a interpretação de uma imagem depende do contexto e do senso comum, e a visão humana é capaz de grandes abstrações, vendo até mesmo o que não foi explicitado, como exemplificado na Figura 1.4 da Subseção 1.1 deste Capítulo.

1.4 Ciência Cognitiva

A *Ciência Cognitiva*, segundo Teixeira [49], pode ser definida como sendo:

- i) o estudo interdisciplinar da mente (intelecto, pensamento, entendimento) e da inteligência (a faculdade de aprender ou compreender, percepção, apreensão e intelecto);
- ii) o estudo científico dos processos mentais.

Para que se possa entender melhor a mente humana são necessários vários outros conhecimentos de métodos e teorias, por isso, na Ciência Cognitiva estão reunidas também as ciências da Psicologia, Filosofia, Inteligência Artificial, Neurociência e a Linguística.

O objetivo da Ciência Cognitiva é entender a aquisição de conhecimentos ou das percepções dos seres humanos e de seus processos mentais.

A Neurociência colabora com o estudo referente ao cérebro; a Psicologia com as teorias de funcionamento da mente; a Filosofia, através da Lógica e da Epistemologia; a Linguística com o exame da linguagem e a Inteligência Artificial com os modelos de máquinas reais ou teóricas que podem simular o funcionamento do cérebro ou de suas partes.

Na prática, a Ciência Cognitiva descreve, explica e eventualmente simula as principais disposições e capacidades da cognição humana que são: a linguagem, o raciocínio, a percepção, a coordenação motora e a planificação.

As principais dificuldades desta ciência são: a grande complexidade do cérebro, a grande flexibilidade do pensamento humano e a limitação sobre o conhecimento deste. Entretanto a aproximação multidisciplinar e o uso da Inteligência Artificial para construir sistemas inteligentes abrem novas perspectivas para um melhor conhecimento do cérebro.

Na seção seguinte apresentamos alguns conceitos relacionados à Equações Diferenciais Parciais, (EDP's), que serão necessários posteriormente.

1.5 As Equações Diferenciais Parciais

Com os avanços tecnológicos, iniciou-se nas últimas duas décadas, o desenvolvimento de teorias que visavam uma análise estrutural das imagens de um ponto de vista computacional utilizando-se como ferramenta fundamental elementos matemáticos. Essa teoria baseia-se fundamentalmente em Equações Diferenciais Parciais, as quais são extremamente úteis no tópico de

processamento digital de imagens. Desta forma, esta seção é dedicada as definições e conceitos básicos sobre o assunto.

Seja u uma função, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I \subseteq \mathbb{R}^2$. A derivada parcial de u , em relação, à variável x , que é a primeira variável, poderá ser denotada por,

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_x \quad \text{ou} \quad \partial_x u.$$

De maneira análoga, as derivadas parciais de segunda ordem em relação, às variáveis x e/ou y , poderão ser denotadas por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{xy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{yy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad u_{yx}.$$

Definição 1.20. (Equação Diferencial Parcial (EDP), Cunha [17]) *Uma equação diferencial parcial é uma equação que envolve uma função incógnita de duas variáveis e suas derivadas. Logo, uma equação diferencial parcial de 2 variáveis independentes, $x_1, \dots, x_n$, é uma equação na forma:*

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) = 0.$$

Exemplo 1.1. (Equação de Poisson, Cunha [17]) *Chamamos de Equação de Poisson ou Potencial a equação diferencial definida numa região R do plano, tal que*

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in R.$$

sendo que quando temos $f(x, y) = 0$ chamamos de equação de Laplace.

Definição 1.21. (Ordem de uma EDP, Cunha [17]) *A ordem de uma equação diferencial parcial é dada pela ordem da derivada mais alta que ocorre na equação.*

Definição 1.22. (O Operador Gradiente) *Definimos o operador gradiente, denotado por ∇ em $\mathbb{R}^2$, da seguinte forma:*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Definição 1.23. (O Operador Divergente) *Para uma função u , o Operador Divergente é dado por:*

$$\text{div}(u) = \frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(u).$$

Agora, considerando-se um vetor $\vec{x} = (x^1, x^2)$ temos

$$\text{div}(\vec{x}) = \text{div}(x^1, x^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^1) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2).$$

Definição 1.24. (O Operador Laplaciano) *O Operador Laplaciano de uma função u é dado por*

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Definição 1.25. (O Operador Hessiano) *A Hessiana de uma função u é definida pela matriz:*

$$\nabla \otimes \nabla u = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}.$$

Denotamos, neste texto, o produto escalar por “.”. Um outro conceito que utilizamos muito no decorrer deste trabalho é o conceito de Operador Morfológicamente Invariante.

Definição 1.26. (Operador Morfológicamente Invariante) *Um operador T é dito morfológicamente invariante, se para cada função estritamente crescente $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tivermos $T(g(u^0)) = g(T(u^0))$.*

Assim, um modelo é dito morfológicamente invariante se mantém as características geométricas da imagem ao longo do tempo de evolução.

Dada uma função $u(x, y) : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow R$, como calculamos a curvatura de linha de nível num determinado ponto de seu domínio? Notemos que ∇u está na direção normal à linha de nível enquanto, $\nabla^\perp u$ está na direção tangente a mesma, como representado abaixo

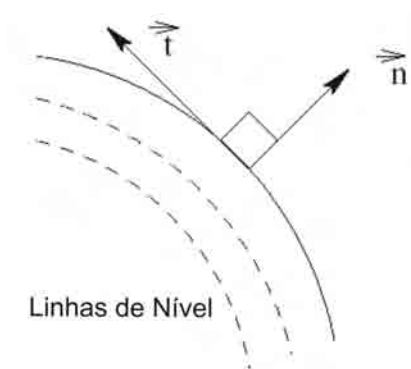


Figura 1.11: Vetores normal e tangente às linhas de nível.

Assim calculamos a curvatura de linha de nível num ponto $(x, y) \in I$ da seguinte forma

$$k = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

sendo que k é maior quando a curva é mais fechada [50].

1.6 Considerações Finais

Neste Capítulo, apresentamos conceitos fundamentais relacionados à Percepção Visual Humana; ao Processamento Digital de Imagens; a Visão Computacional; a Ciência Cognitiva e as equações diferenciais parciais, os quais serão importantíssimos para o desenvolvimento deste trabalho.

No próximo Capítulo abordamos a teoria relacionada aos Modelos Matemáticos para o Retoque Digital de Imagens, mostrando as principais características e peculiaridades de cada um.

Capítulo 2

Descrição dos Modelos Matemáticos

Este Capítulo é dedicado a apresentação dos Modelos Matemáticos, existentes na literatura relacionados ao Retoque Digital de Imagens. Apresentamos tais modelos de forma detalhada para facilitar o entendimento por parte do leitor.

2.1 O Modelo de Bertalmío et al. (BSCB)

O Modelo de Retoque via EDP's apresentado por Bertalmío, foi desenvolvido durante seu doutorado, referenciando-se ao trabalho de Bertalmío et al. [7], que posteriormente foi publicado em [9]. O estudo realizado baseou-se, em linhas gerais, numa bela intuição de transporte suave ao longo das linhas de mesmo nível de cinza, ou como denominamos neste texto, linhas isocrômicas.

Uma situação ilustrativa, por exemplo, pode ser a seguinte, imagine que queremos realçar suavemente uma borda quebrada, assim um requisito natural é que a intensidade de cor propagada ao longo da borda coincida, de modo que o padrão seja restaurado, como é mostrado em seguida na Figura 2.1.

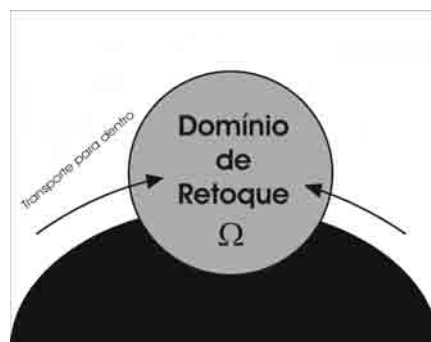


Figura 2.1: O modelo de Retoque BSCB [9].

A seguir descrevemos algumas idéias básicas relacionadas à metodologia usada por restauradores profissionais, que foram uma forma de inspiração para os autores, são elas:

- i) A figura global determina como completar a brecha, sendo o propósito do retoque restaurar integralmente o trabalho.
- ii) A estrutura da área vizinha ao domínio de retoque (Ω) é continuada até a brecha, as linhas de contorno em Ω são construídas através de um prolongamento daquelas chegando a $\partial\Omega$.
- iii) As diferentes regiões dentro de Ω , definidas pelas linhas de contorno, são preenchidas com cor, a partir de informações de $\partial\Omega$.
- iv) Por fim, os pequenos detalhes são pintados.

Motivados pelas regras manuais de retoque, com o objetivo de traduzir esses conceitos em uma linguagem matemática e algorítmica, os autores perceberam que necessitava-se continuar as linha de nível chegando até o contorno ($\partial\Omega$) do domínio de retoque, ou seja, propagar suavemente as informações das vizinhanças de fora para dentro de Ω . Desta forma, consideram $L(u)$ a medida de suavização e $\vec{d}(u)$ a direção de propagação, e com o objetivo de calcular a taxa de variação da medida de suavização ($\vec{\delta L}(u)$) ao longo de $\vec{d}$, obtiveram a seguinte equação evolucionária,

$$u_t = \vec{\delta L}(u) \cdot \vec{d}(u). \quad (2.1)$$

O próximo passo realizado foi definir a direção de propagação $\vec{d}$. Uma possibilidade era definir $\vec{d}$ como a normal a cada pixel de Ω , como mostrado na Figura 2.2, porém essa não é uma escolha muito boa, pois o que acontece é que as linhas de nível curvam-se no sentido de alinhar-se a $\vec{n}$, como pode ser visualizado na Figura 2.3, e isso não é bom pois a região a ser realçada é arbitrária.

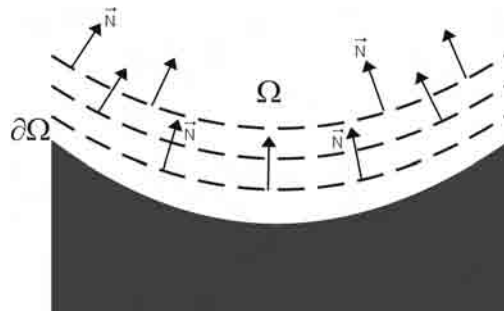


Figura 2.2: Direção de Propagação da normal a partir do contorno da região a ser tratada.

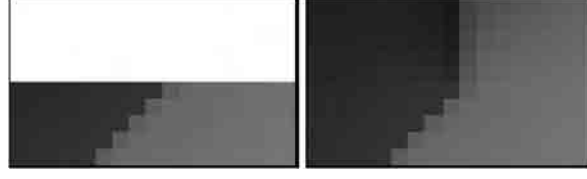


Figura 2.3: Escolha mal-sucedida da informação da direção de propagação. A figura a esquerda representa um detalhe da imagem original, onde o domínio de retoque é a parte branca. A figura a direita representa os detalhes após o retoque.

Desta forma chegou-se a conclusão que a melhor escolha para $\vec{d}$ é então a direção das linhas isocrômicas. Assim, usando uma estimativa do campo de direções dessas linhas, para qualquer ponto (i, j) dado, o vetor gradiente discretizado $\nabla u(i, j)$ obtém a direção da maior mudança espacial, enquanto $\vec{d} = \vec{t} = \nabla^\perp u$ obtém as direções procuradas.

Portanto, a escolha foi

$$u_t = \vec{\delta L}(u) \cdot \nabla^\perp u. \quad (2.2)$$

Mas, eles notaram que o campo de direções não estava normalizado, porém sua norma é a norma do gradiente de u , pois

$$\begin{aligned} \nabla u = (u_x, u_y) &\Rightarrow |\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}; \\ \nabla^\perp u = (-u_y, u_x) &\Rightarrow |\nabla^\perp u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\nabla^\perp u| = |\nabla u|.$$

Daí, multiplicando e dividindo por $|\nabla^\perp u|$ em (2.2), chegou-se a,

$$u_t = \vec{\delta L}(u) \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla^\perp u|} |\nabla^\perp u| = \vec{\delta L}(u) \cdot \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla^\perp u|} |\nabla u|.$$

Assim, o modelo apresentado por Bertalmío em [9] foi

$$u_t = \vec{\delta L}(u) \cdot \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} |\nabla u|, \quad (2.3)$$

onde $\vec{d} = \nabla^\perp u$ é o vetor tangente as linhas de nível não normalizado e neste caso, a $|\nabla u|$ será calculada através de uma versão limitada da mesma, a qual damos mais detalhes, posteriormente, no Capítulo 3.

Faremos a seguir, uma breve discussão sobre a importância da Difusão Anisotrópica intercalada ao Processo de Retoque Digital de Imagens.

2.1.1 A importância da Difusão Anisotrópica

Bertalmío, em sua tese de doutorado, justificou a utilização de uma difusão anisotrópica intercalada ao processo de transporte, ou seja, a cada poucos passos do modelo, aplica-se algumas iterações de difusão na imagem. O autor, afirma que a difusão é necessária “para garantir uma correta evolução do campo direcional”.

Recentemente, Batista [5], mostrou, através de exemplos, que uma difusão realmente é necessária, pois caso não seja executada, no caso do Modelo de Bertalmío, o transporte pode levar à não convergência do processo iterativo, dependendo da imagem u^0 a ser restaurada.

Assim, vamos considerar a seguinte equação de difusão anisotrópica,

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) & , \quad \text{se} \quad (x, y) \in \Omega \\ u = u^0 & , \quad \text{se} \quad (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad (2.4)$$

Neste trabalho aplicamos iterações de difusão intercaladas as iterações de todos modelos, menos com relação ao modelo TV, que como será visto posteriormente, já é baseado em difusão.

2.1.2 Considerações sobre o Modelo de Retoque BSCB

Reservamos essa parte do texto, para algumas considerações sobre a equação (2.3).

Geralmente, u_t é aproximado por diferenças finitas avançadas no tempo da seguinte forma,

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Substituindo o resultado acima na equação (2.3) e considerando-se a evolução temporal temos

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\vec{\delta L}(u^n) \frac{\vec{d}^n}{|\vec{d}^n|} \right) |\nabla u^n|.$$

Na forma acima, segundo Bertalmío et al., o método atinge o estado de equilíbrio, quando $u^{n+1} = u^n$, ou seja, $u^{n+1} - u^n = 0$, significando que

$$\vec{\delta L}(u) \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} |\nabla u| = 0 \iff \vec{\delta L}(u) \vec{d} = 0.$$

Porém, sabemos que $\vec{d} = \nabla^\perp u$ e $\vec{\delta L}(u) = \nabla L(u)$, daí

$$\nabla L(u) \cdot \nabla^\perp u = 0,$$

onde $\vec{t} = \frac{\vec{d}}{|\nabla u|} = \frac{\nabla^\perp u}{|\nabla u|} = \frac{(-u_y, u_x)}{|\nabla u|}$ é o vetor normal rotacionado 90 graus normalizado. Assim,

$$\nabla L(u) \cdot |\nabla u| \vec{t} = 0 \implies \vec{t} \nabla L(u) = 0, \text{ ou equivalentemente, } \frac{\partial L(u)}{\partial \vec{t}} = 0, \quad (2.6)$$

significando que ao longo das linhas isocrômicas, a medida de suavização é conservada. Então, em termos da avaliação dos dados do contorno, o processo de retoque envolve transporte suave de informações limitadas ao longo dessas linhas no domínio de retoque.

Entretanto, como observado em [15], devido a falta de comunicação ao longo as linhas isocrômicas, o transporte pode resultar em contradições dentro do domínio de retoque, parecidas com choques em modelos de tráfego. Para solucionar esse problema, como apresentado na seção anterior, os autores sugeriram, a introdução de passos intermediários de difusão anisotrópica.

A segunda questão com o modelo é em relação a medida de suavização $L(u)$ adotada. A escolha do Laplaciano é conveniente, mas a menos ideal em dois aspectos:

1) A equação de equilíbrio $\partial(\Delta u)/\partial \vec{t} = 0$ não é morfologicamente invariante, i. e., tomando

$$g(\lambda) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

uma transformação morfologicamente suave, tal que $g'(\lambda) > 0$. Então:

$$\Delta g(u) = g'(u) \Delta u + g''(u) (\nabla u)^2. \quad (2.7)$$

Logo,

$$\frac{\partial(\Delta g(u))}{\partial \vec{t}} = g'(u) \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \vec{t}} + g''(u) \frac{\partial(\nabla u)^2}{\partial \vec{t}}.$$

Portanto, não podemos garantir que

$$\frac{\partial(\Delta g(u))}{\partial \vec{t}} = 0.$$

2) Para que o retoque de u seja equilibrado, de acordo com (2.6), a medida de suavização $L(u)$ tem que ser uma constante ao longo dos linhas isocrômicas. Portanto, se p e q são dois pixels ao longo do contorno do domínio de retoque e pertencem ao mesma linha isocrômica, mas tem diferentes valores de L calculados através dos dados disponíveis em $u^0|_{\Gamma \setminus \Omega}$, então teoricamente o retoque não deveria ser equilibrado. Tal situação frequentemente ocorre em problemas de retoque em grandes escalas, o qual não é causado pelo ruído, mas sim, pela variação natural de L em si mesma ao longo de uma linha isocrômica.

2.2 O Modelo de Chan e Shen (TV)

Inspirados pelo trabalho de Bertalmío et al. [9] para Retoque Digital de Imagens, o qual foi apresentado na seção anterior, Chan e Shen desenvolveram, em [14], modelos matemáticos gerais para retoque local de imagens sem textura. Neste trabalho, os autores estudaram um modelo variacional ou Bayesiano (baseado em algum modelo clássico de sucesso), que é baseado no clássico modelo variacional total (TV) de Rudin et al. [46] para eliminação de ruído.

Antes de prosseguir com a descrição do trabalho citado acima, vamos primeiramente abordar alguns conceitos necessários para o entendimento da teoria através da qual o modelo foi elaborado.

Um conceito fundamental que vamos apresentar é o de localidade, neste sentido discutimos algumas características dos modelos de retoque de baixo nível (cujo significado explicamos mais adiante) do ponto de vista da percepção visual humana. A condição de localidade significa que os métodos não contam com as características globais ou reconhecimento de padrão, ou seja, o retoque é baseado somente em informações locais relacionadas ao domínio de retoque.

No contexto de imagens sem textura, um padrão é tal como uma simetria refletida. Por exemplo, muitas faces humanas são quase simétricas se refletidas ao longo da linha central “boca-nariz”. Embora aparentemente para a percepção visual humana, tais padrões são muito mais difíceis e caros para serem capturados através de inteligência digital, devido à grande variação em escalas e estruturas de imagens gerais.

Um outro exemplo clássico na análise visual como mostrado na Figura 2.4 pode esclarecer sobre a discussão anterior.



Figura 2.4: Exemplo de percepção visual humana local.



Figura 2.5: Exemplo de percepção visual humana global.

A fim de tratarmos a imagem da esquerda da Figura 2.4, o domínio de retoque, ou área oclusa, considerado é o quadrado cinzento na intersecção. Observações humanas podem usualmente facilitar, imaginando uma cruz e então completar com cor preta. Muitos concordariam que essa seria a melhor alternativa para esta imagem.

Consideremos agora a mesma imagem, porém, gravada em uma grandiosa estrutura, como pode ser visto na Figura 2.5. Alguns podem facilmente identificar a imagem global como sendo um tabuleiro de xadrez e assim preencher com cor branca para completar a simetria. Entretanto, isso depende da inferência da percepção humana no contexto global. Neste sentido, um método de retoque é considerado de alto nível quando o mesmo é capaz de executar o reconhecimento de padrão, caso contrário o chamamos de baixo nível. Abordamos neste trabalho somente os de baixo nível, uma vez que o retoque produzido é independente do modelo global, como no caso da Figura 2.4.

Estamos interessados a partir de agora em discutir outro conceito muito importante neste contexto que é chamado fator de escala ou raio espectral.

O fator de escala representa uma parte significativa no tratamento e na análise visual de uma imagem. Desta forma, devemos levá-la em consideração ao abordar o problema de retoque.



Figura 2.6: O efeito da escala de retoque L .

Vamos considerar a figura acima, para melhor esclarecer esse fato. No lado esquerdo, a escala de retoque L é muito maior que a denotada por l , e assim parece ser mais correto, se após o processo obtivermos “E” e “3” como duas letras separadas. Já no caso da imagem do lado direito, temos a escala L menor que l , o que nos faz acreditar que a figura é uma quebra da letra “B”. Portanto, podemos concluir que a unicidade ou não da solução vai depender da escala.

Como a escala age como um parâmetro controlador, Chan e Shen, afirmam que o modelo desenvolvido em [14] tem sua melhor performance em problemas de retoque cujo domínio é pequeno ou local, como por exemplo a imagem a direita da Figura 2.4.

O Modelo de Retoque TV também oferece explicações alternativas para alguns aspectos do processo de desocclusão humano na visão psicológica, incluindo as ilusões emaranhadas reunidas e analisadas por Kanizsa [27].

2.2.1 O Método da Variação Total

Como relatado no início desta seção, o modelo de Chan e Shen é baseado no método da variação total proposto por Rudin et al. [46] para eliminar ruídos em imagens digitalizadas, que consiste em resolver o problema de minimização:

$$\text{Minimizar} \quad \int_I |\nabla u| dx dy ,$$

sujeito as seguintes restrições

$$\int_I u dx dy = \int_I u^0 dx dy$$

e

$$\int_I |u - u^0|^2 dx dy = \eta^2 .$$

onde $\eta(i, j)$ é o o desvio padrão do ruído.

Esse problema de minimização está diretamente relacionado ao problema sem restrições:

$$\text{Minimizar} \quad \int_I |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_I |u - u^0|^2 dx dy . \quad (2.8)$$

A solução desse problema é obtida encontrando-se a solução no estado estacionário da equação diferencial parcial, a qual é a evolução da equação de Euler-Lagrange de (2.8). Assim, tal como foi mostrado em [47], o problema resume-se a resolver

$$u_t = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(u - u^0) ,$$

com

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\partial I \times \mathbb{R}^+} = 0 .$$

2.2.2 Descrição do Modelo de Retoque TV

Seguindo as mesmas idéias citadas na seção anterior, Chan e Shen em [14], propuseram o Modelo de Retoque TV que consiste em minimizar o seguinte funcional,

$$\int_I |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{I \setminus \Omega} |u - u^0|^2 dx dy ,$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange, que é inversamente proporcional a variação do ruído [11].

Então, na verdade, temos que resolver a equação de Euler-Lagrange, dada por

$$u_t = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda_\epsilon(u^0 - u) ,$$

onde λ_ϵ é o multiplicador de Lagrange estendido, dado por

$$\lambda_\epsilon = \begin{cases} \lambda, & \text{se } (x, y) \in I \setminus \Omega, \\ 0, & \text{se } (x, y) \in \Omega \end{cases},$$

com

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\partial I \times \mathbb{R}^+} = 0.$$

Do ponto de vista numérico, para evitar que tenhamos $|\nabla u| = 0$, estaremos substituindo o termo da curvatura

$$\nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

por

$$\nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right),$$

onde o modulo é definido por

$$|s|_a := \sqrt{s^2 + a^2}.$$

sendo a uma constante positiva pequena arbitrária, a qual consideramos 0.01.

Desta forma, estamos na verdade minimizando o seguinte funcional

$$\int_I |\nabla u|_a dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{I \setminus \Omega} |u - u^0|^2 dx dy, \quad (2.9)$$

Assim, consideremos

$$P = |\nabla u|_a + \frac{\lambda}{2} |u - u^0|^2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} + \frac{\lambda}{2} (u - u^0)^2.$$

Então, para $P(x, y, u, u_x, u_y)$ temos a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial u_y} = 0. \quad (2.10)$$

Daí,

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{2}{2} \lambda (u - u^0) = \lambda (u - u^0).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u_x} &= \frac{2u_x}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial u_x} &= \frac{u_{xx} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} - u_x \left(\frac{2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right)}{u_x^2 + u_y^2 + a^2} \\ &= \frac{u_{xx} |\nabla u|_a - u_x \left(\frac{u_x u_{xx} + u_y u_{yx}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial u_y} &= \frac{2u_y}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial u_y} &= \frac{u_{yy}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} - u_y \left(\frac{2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right)}{u_x^2 + u_y^2 + a^2} \\
&= \frac{u_{yy}|\nabla u|_a - u_y \left(\frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2}.
\end{aligned}$$

Assim, a equação (2.10) torna-se:

$$\lambda(u - u^0) - \left(\frac{u_{xx}|\nabla u|_a - u_x \left(\frac{u_x u_{xx} + u_y u_{yx}}{|\nabla u|_a} \right) + u_{yy}|\nabla u|_a - u_y \left(\frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Por outro lado,

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} = \frac{1}{|\nabla u|_a} (u_x, u_y) = \left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right).$$

Assim,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right) &= \frac{u_{xx}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} - u_x \left(\frac{2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right)}{u_x^2 + u_y^2 + a^2} \\
&= \frac{u_{xx}|\nabla u|_a - u_x \left(\frac{u_x u_{xx} + u_y u_{yx}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right) &= \frac{u_{yy}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} - u_y \left(\frac{2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right)}{u_x^2 + u_y^2 + a^2} \\
&= \frac{u_{yy}|\nabla u|_a - u_y \left(\frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right) = \left(\frac{u_{xx}|\nabla u|_a - u_x \left(\frac{u_x u_{xx} + u_y u_{yx}}{|\nabla u|_a} \right) + u_{yy}|\nabla u|_a - u_y \left(\frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2} \right). \quad (2.12)$$

Logo, de (2.11) e (2.12), temos:

$$\lambda_\epsilon(u - u^0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right) = 0.$$

Então, a minimização do funcional (2.9) é obtida resolvendo-se:

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right) - \lambda_\epsilon(u - u^0), \quad (2.13)$$

com

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\partial I \times \mathbb{R}^+} = 0.$$

Note que na equação (2.13) considera-se a possibilidade da imagem estar contaminada por ruído, porém como estamos interessados somente no caso de ausência de ruído, segundo Chan e Shen, o problema reduz-se a resolver o seguinte problema

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a} \right), \quad (2.14)$$

com

$$u \Big|_{\partial \Omega} = u^0 \Big|_{\partial \Omega}.$$

Desta forma, na verdade estamos aplicando sobre o domínio de retoque, um processo de difusão anisotrópica através da equação (2.14), a qual tem sido extensivamente estudada por [37], [45] e [46]. A aplicação dessa difusão no processo de tratamento de imagens é um tópico clássico, iniciado a partir do estudo efetuado por Perona e Malik em [44].

2.2.3 Considerações sobre o Modelo de Retoque TV

Apresentamos nesta seção algumas vantagens e desvantagens relacionadas ao Modelo TV.

Primeiramente, devido à formulação Bayesiana na qual o modelo foi desenvolvido, encontrou-se aplicações bem sucedidas em “zoom” digital e esquemas de codificação de imagens baseada nas bordas, como pode ser visto em [14]. Outra vantagem, é que se comparado, por exemplo, ao modelo de Bertalmío et al. [9], o programa numérico é bem mais simples e converge mais rápido.

Por outro lado, a primeira desvantagem é que o modelo TV, na verdade, realiza somente uma interpolação linear, ou seja, as quebras das linhas isocrômicas são interpoladas por linhas retas, assim podendo gerar quinas ao longo do contorno do domínio de retoque. A segunda questão é que o modelo frequentemente falha ao realizar a conexão de partes amplamente separadas do objeto, devido a dificuldade em efetuar comunicações de longa distância, ou seja, falha no princípio da conectividade.

2.3 O Modelo de Chan e Shen (CDD)

A deficiência do Modelo de Retoque TV ao realizar o Princípio de Conectividade, inspirou Chan e Shen [12] a desenvolver em um outro modelo baseado, também, no mecanismo de difusão com o intuito de realizar o Princípio de Conectividade, e desde que neste novo método, o coeficiente de condutividade depende da curvatura das linhas icocrômicas, estamos na verdade efetuando uma difusão guiada pela curvatura e, assim, o denominamos Modelo de Retoque CDD (“Curvature Driven Diffusion”). Outros modelos baseados em difusão presentes na literatura relacionada à análise de imagens, podem ser encontrados nos trabalhos de Malik e Perona [44] e Morel e Solomini [37].

Partimos primeiramente para uma breve discussão a respeito de como o Modelo de Retoque TV pode violar o Princípio de Conectividade. Como relatado em [12], a força da difusão depende somente do contraste ou força das linhas isocrômicas, que está refletida na expressão do coeficiente de condutividade

$$D = \frac{1}{|\nabla u|}.$$

Entretanto, percebeu-se que a força da difusão não deveria depender somente da informação geométrica de uma linha isocrômica, mas também da curvatura escalar k dada por

$$k = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right). \quad (2.15)$$

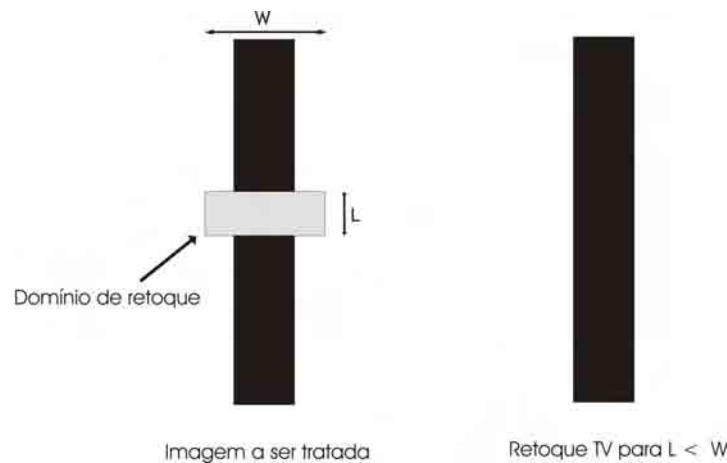


Figura 2.7: Resultado do Retoque TV depende do aspecto de proporção do domínio do objeto ocluso.

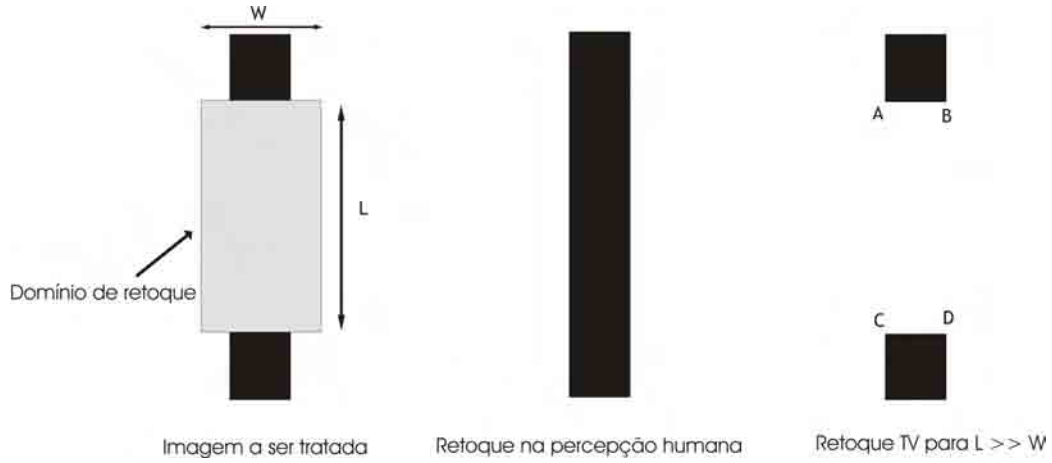


Figura 2.8: Quando $L > W$, o resultado apresentado pelo retoque TV pode falhar quanto ao Princípio da Conectividade da percepção visual humana.

Por exemplo, na Figura 2.7, podemos observar que quando $L < W$ obteve-se um bom resultado usando o Modelo de Retoque TV, ou seja, o tratamento da imagem foi bem sucedido efetuando a conexão tão esperada na percepção visual humana. Por outro lado, na Figura 2.8, onde temos $L > W$ chegamos a um resultado contrário ao esperado “psicologicamente”, sendo que as conexões não são efetuadas, mas isso deve-se ao fato de que a curvatura $k = \pm\infty$ nas quatro quinas A, B, C e D .

A combinação das análises qualitativas acima, quanto ao que foi realizado de errado com o resultado apresentado pelo Modelo de Retoque TV no exemplo da Figura 2.8 e quanto ao resultado que é característico na percepção visual humana, inspiraram o Modelo de Retoque CDD, o qual apresentamos a seguir.

Chan e Shen [12], modificaram o coeficiente de condutividade TV de

$$D = \frac{1}{|\nabla u|},$$

para

$$D = \frac{g(|k|)}{|\nabla u|}.$$

onde k é a curvatura e a função g funciona como um “penalizador” de grandes curvaturas e estimulador de pequenas curvaturas, tal que

$$g(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0; \\ \infty, & \text{se } k = \infty; \\ 0 < r < \infty, & \text{se } 0 < k < \infty, \end{cases},$$

onde r depende de s .

Com essa escolha, a difusão torna-se forte onde as linhas isocrônicas apresentam grandes curvaturas, esticando as linhas isocrônicas para dentro do domínio de retoque. Agindo desta forma, o Modelo CDD necessariamente confuz a um resultado que está próximo ao que as pessoas imaginariam, e que pode ser observado na imagem representada no centro da Figura 2.8. Assim o resultado final apresentado pelo Modelo de Retoque TV na imagem da direita da Figura 2.8 é considerado incorreto nesta nova difusão guiada pela curvatura pois nas quatro quinas A , B , C , e D as curvaturas são $\pm\infty$. Justificando assim a escolha de $g(\infty) = \infty$.

Agora, a condição $g(0) = 0$ é menos óbvia, assim suponhamos que a seguinte situação possa ocorrer $g(0) = a \neq 0$. Então o Modelo CDD torna-se na equação de segunda ordem do Modelo TV favorecendo as linhas isocrônicas e, assim, estaríamos novamente colocando o Princípio da Conectividade em risco.

No trabalho apresentado em [12], foi escolhida a seguinte função

$$g(k) = k^p, \quad k > 0, p \geq 1. \quad (2.16)$$

Portanto, na verdade, o modelo apresentado nesta seção é um outro refinamento da difusão anisotrópica TV. Sendo que para estimular conexões de longa distância, o mesmo emprega a informação da curvatura para efetuar a difusão. Então, do ponto de vista otimista, grandes curvaturas podem ser incorporadas no processo de difusão para eliminar as falsas bordas formadas durante a difusão TV.

Assim, o Modelo de Retoque CDD é dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{g(k)\nabla u}{|\nabla u|}\right), & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ u = u^0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}, \quad (2.17)$$

onde k é a curvatura dada pela expressão (2.15) e $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função contínua satisfazendo $g(0) = 0$ e $g(\pm\infty) = +\infty$.

O fluxo para a difusão guiada pela curvatura é

$$q = -D\nabla u = -\frac{g(|k|)}{|\nabla u|}\nabla u, \quad (2.18)$$

2.3.1 Considerações sobre o Modelo de Retoque CDD

O retoque CDD é um modelo de EDP de terceira ordem, e é de fato morfologicamente invariante desde que a curvatura k e o vetor normal $\vec{n}$ também o sejam. Mas uma desvantagem do modelo de retoque TV ainda permanece, as linhas isocrômicas são ainda aproximadas por linhas retas. Esta desvantagem levou Chan et al. [16], a reinvestigação da proposta formal de Masnou e Morel [35] em retoque baseado na energia elástica de Euler.

2.4 O Modelo de Masnou e Morel

Masnou e Morel no trabalho desenvolvido em [35] apresentaram um modelo para desocclusão ou “completação amodal” cujo objetivo, na verdade, é realizar um processo muito comum na visão humana, onde nossa percepção depende das condições geométricas para reconstruir o objeto inteiro através das partes perdidas na imagem. No exemplo ilustrado na Figura 2.9, vemos uma generalidade, ou seja, o mesmo retângulo preto em ambos os desenhos, apesar do fato que esse retângulo não esteja totalmente visível.

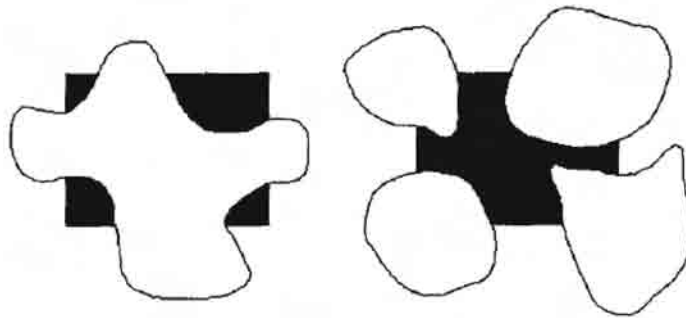


Figura 2.9: O mesmo retângulo pode ser visto em ambos desenhos através da completção amodal.

Basicamente, o método visa realizar a desocclusão através do uso das informações das linhas de nível, que oferecem uma representação confiável e completa de uma imagem. Podemos citar outros trabalhos que também enfatizaram a importância das linhas de nível para representação e entendimento de uma imagem, tal como Morel e Guichard [36], e também a abordagem numérica do método de linhas de nível desenvolvida por Osher e Sethian [43], os quais tem facilitado o entendimento teórico e a definição formal usada na implementação numérica e computacional dos modelos propostos.

Masnou e Morel [35] seguiram as idéias de um dos trabalhos pioneiros utilizando-se a

teoria das linhas de nível, que é o de Nitzberg et al. [40], os quais propuseram um método para remoção de oclusão utilizando as técnicas de segmentação de imagens e algoritmos computacionais. Em linhas gerais, o algoritmo proposto por eles consiste na detecção de bordas, ou seja, segmentação da imagem, detecção das T-junções e posteriormente conectar T-junções com aproximadamente o mesmo nível de cinza através da minimização das curvas elásticas, porém este método é aplicado somente a imagens simples com poucos objetos e cores, não sendo aplicado na restauração de imagens naturais. Outro fator desfavorável é o fato de que o método depende da detecção de bordas, pois estas são muito sensíveis a mudanças de contraste e também não fornecem uma completa representação da imagem. Neste sentido, a independência com relação as mudanças de contraste é crucial. De acordo com a escola de Gestalt, e particularmente Wertheimer [52], a visão humana é essencialmente sensível somente a ordens de nível de cinza na imagem. Assim, Masnou e Morel [35] apresentaram uma extensão dessas idéias e propuseram uma formulação variacional geral usando a equação da corda elástica visando realizar a desocclusão através da estrutura das linhas de nível, que é mais precisa e confiável do que as bordas. Apresentaram também um algoritmo prático para implementar algumas das idéias sugeridas, sendo que um dos objetivos do método é obedecer ao Princípio da Conectividade proposto por Kanizsa [27].

Afim de descrever o modelo consideraram uma função u como uma função de variação limitada (*bounded variation*), tal que,

$$\int_I |u(x, y)| dx dy < \infty,$$

ou seja, u finita e cuja *variação total* é definida por:

$$\text{TV}_I(u) = \int_I |\nabla u| dx dy,$$

onde, como já mencionado anteriormente, $|\nabla u|$ é a norma do gradiente de u .

Seguindo então as idéias citadas anteriormente, os autores propuseram efetuar o prolongamento das linhas de nível conectando as T-junções da fronteira dos objetos oclusos através da minimização do seguinte funcional:

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \left[1 + \left| \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right| \right] dx dy, \quad (2.19)$$

onde, segundo os autores, o primeiro termo tem o objetivo de “forçar” as linhas de nível restauradas a terem comprimento mínimo e o segundo tem objetivo de “forçar” que a variação angular total seja mínima ao longo destas linhas.

Vale ressaltar que a equação de Euler Lagrange associada a este funcional conduz a uma equação diferencial parcial de quarta ordem, altamente não-linear e mal posta. Isto fez com que os autores propusessem um algoritmo, baseado no uso de programação dinâmica, ao invés de resolver o problema de minimização da integral apresentada em (2.19).

Resumidamente, os passos do algoritmo de desoclusão referente a este modelo são:

1. cálculo da linha poligonal correspondente à borda da área de oclusão;
2. cálculo de cada T-junção existente na borda da oclusão; uma T-junção é determinada por suas coordenadas, o seu nível de cinza e a direção média da linha de nível correspondente;
3. triangularização da região de oclusão;
4. cálculo do conjunto ótimo de linhas de nível formadas pelos pares de T-junções a serem conectadas usando programação dinâmica;
5. desenho dos caminhos geodésicos correspondentes ; e
6. uso da propagação geodésica para restaurar a oclusão da imagem.

Maiores detalhes sobre esse algoritmo, podem ser encontrados em [32]. No trabalho de Chan et al. [16] através de investigações relacionadas ao funcional elástico conseguiram estabelecer um Modelo Elástico, o qual chamamos CKS e que introduzimos a seguir.

2.4.1 Curva Elástica de Euler e Curvatura no Processo de Retoque Digital

As funções elásticas de Euler foram primeiramente estudadas por Euler em 1744 para modelar o formato de uma fina e torcida haste livre. Assim, uma curva Γ é dita Elástica de Euler se esta é uma curva de equilíbrio do seguinte funcional elástico

$$E(c) = \int_c (a + bk^2) dt ,$$

onde $k(t)$ é a curvatura ao longo de uma curva c e a e b são duas constantes positivas.

A introdução desta classe de curvas suaves, ditas elásticas de Euler, no contexto da Visão Computacional deve-se a Mumford [39]. Masnou e Morel [35] aplicaram essas curvas propondo um modelo variacional para efetuar retoque digital como descrito na seção anterior. Posteriormente,

Chan et al. [16] desenvolveram uma fundamentação teórica referente ao modelo variacional de Masnou e Morel, considerando o seguinte funcional de Energia Elástica de Euler

$$\int_{\Omega} \phi(k) |\nabla u| \, dx \, dy, \quad (2.20)$$

onde k é a curvatura e $\phi(k) = a + bk^2$, a e b constantes positivas, satisfazendo $\phi(\pm\infty) = +\infty$ e as seguintes condições

$$u|_{I \setminus \Omega} = u^0|_{I \setminus \Omega}, \quad \int_{\partial\Omega} |\nabla u| = 0 \quad \text{e} \quad |k| < \infty,$$

em quase todos os pontos ao longo de $\partial\Omega$.

Além disso, assumiram que a imagem original completa u^0 está sujeita à condição

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u| = 0.$$

Teorema 2.1 (A derivação da equação de Euler-Lagrange). *Seja $\phi \in C^1(R, [0, \infty))$ uma dada função e*

$$R[u] = \int_{E \cup \Omega} \phi(k) |\nabla u| \, dx \, dy. \quad (2.21)$$

Então a primeira variação é dada por

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\nabla \cdot \vec{V},$$

onde o fluxo $\vec{V}$ é

$$\vec{V} = \phi(k) \vec{n} - \frac{\vec{t}}{|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k) |\nabla u|)}{\partial \vec{t}}.$$

sendo $E = I \setminus \Omega$, $\vec{n}$ e $\vec{t}$ os vetores normal e tangente, respectivamente.

Demonstração: Por conveniência, vamos escrever $\langle f \rangle = \int_{E \cup \Omega} f \, dx \, dy$. Daí,

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta \langle \phi(k) |\nabla u| \rangle \\ &= \langle \delta(\phi(k) |\nabla u|) \rangle \\ &= \langle \phi(k) \delta(|\nabla u|) \rangle + \langle |\nabla u| \delta \phi(k) \rangle \\ &= \langle \phi(k) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \delta(\nabla u) \rangle + \langle \phi'(k) |\nabla u| \delta k \rangle \\ &= \langle \phi(k) \vec{n} \delta(\nabla u) \rangle + \langle \phi'(k) |\nabla u| \delta k \rangle \\ &= -\langle \text{div}[\phi(k) \vec{n}] \delta u \rangle + \langle \phi'(k) |\nabla u| \delta k \rangle. \end{aligned}$$

Estamos interessados agora em calcular $\delta(k)$,

$$\begin{aligned}
 \delta k &= \delta \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right] = \operatorname{div} \left(\delta \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \operatorname{div} \left[\delta \left(\frac{1}{|\nabla u|} \nabla u \right) \right] \\
 &= \operatorname{div} \left[\frac{1}{|\nabla u|} \delta(\nabla u) + \nabla u \delta \left(\frac{1}{|\nabla u|} \right) \right] \\
 &= \operatorname{div} \left[\frac{1}{|\nabla u|} \nabla(\delta u) - \frac{\nabla u}{|\nabla u|^2} \nabla u \frac{\delta(\nabla u)}{|\nabla u|} \right] \\
 &= \operatorname{div} \left[\frac{1}{|\nabla u|} \nabla(\delta u) - (\nabla u \frac{\nabla u}{|\nabla u|^3}) \nabla(\delta u) \right] \\
 &= \operatorname{div} \left[\frac{1}{|\nabla u|} \{T_I - \vec{n} \otimes \vec{n}\} \nabla(\delta u) \right].
 \end{aligned}$$

Sendo que T_I denota a transformação identidade, e $P = \vec{n} \otimes \vec{n}$ é a projeção ortogonal na direção normal. Então substituindo esse último resultado, temos

$$\begin{aligned}
 \langle \phi'(k) | \nabla u | \delta k \rangle &= \langle \phi'(k) | \nabla u | \operatorname{div} \left[\frac{1}{|\nabla u|} \{T_I - \vec{n} \otimes \vec{n}\} \nabla(\delta u) \right] \rangle \\
 &= \langle -\nabla(\phi'(k) | \nabla u |) \left[\frac{1}{|\nabla u|} \{T_I - \vec{n} \otimes \vec{n}\} \nabla(\delta u) \right] \rangle \\
 &= \langle -\{T_I - \vec{n} \otimes \vec{n}\} \left\{ \frac{1}{|\nabla u|} \nabla(\phi'(k) | \nabla u |) \right\} \nabla(\delta u) \rangle \\
 &= \langle \operatorname{div} \left[(T_I - \vec{n} \otimes \vec{n}) \left\{ \frac{1}{|\nabla u|} \nabla(\phi'(k) | \nabla u |) \right\} \right] \delta u \rangle,
 \end{aligned}$$

onde aplicamos o fato de que $T_I - P$ é simétrica. Portanto,

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\operatorname{div}[\phi(k) \vec{n} - \frac{1}{|\nabla u|} (T_I - \vec{n} \otimes \vec{n}) \nabla(\phi'(k) | \nabla u |)]. \quad (2.22)$$

Mas,

$$T_I = \vec{n} \otimes \vec{n} + \vec{t} \otimes \vec{t}.$$

Então,

$$T_I - \vec{n} \otimes \vec{n} = \vec{t} \otimes \vec{t}. \quad (2.23)$$

Logo, substituindo (2.23) em (2.22) temos:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\operatorname{div}[\phi(k) \vec{n} - \frac{1}{|\nabla u|} \vec{t} \otimes \vec{t} \nabla(\phi'(k) | \nabla u |)]. \quad (2.24)$$

Usando então o fato de que $\vec{t} \otimes \vec{t} \nabla f = \vec{t} \partial f / \partial \vec{t}$, temos:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\operatorname{div}[\phi(k) \vec{n} - \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k) | \nabla u |)}{\partial \vec{t}} \vec{t}] = -\operatorname{div}(\vec{V}). \quad (2.25)$$

■

Logo, o problema resume-se em resolver a seguinte equação de evolução:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{V}), \quad (2.26)$$

onde $\vec{V}$ é o fluxo apresentado no teorema anterior.

Note que o Teorema 2.1, na verdade, mostra que o fluxo tem uma decomposição natural nos campos normal e tangente. Além disso, temos que este é morfologicamente invariante, como mostraremos a seguir.

Proposição 2.1. *O fluxo $\vec{V}$ é morfologicamente invariante.*

Demonstração: Seja g uma transformação morfológica qualquer de escala de cinza, tal que

$$g(\lambda) : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{e} \quad g'(\lambda) > 0.$$

Queremos mostrar que para qualquer imagem u , temos $\vec{V}_u = \vec{V}_{g(u)}$. Primeiro, é fácil mostrar que k , $\vec{n}$ e $\vec{t}$ são todos morfologicamente invariantes. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla g(u)|} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla g(u)|)}{\partial \vec{t}} \vec{t} &= \frac{1}{g'(u)|\nabla u|} \frac{\partial(g'(u)\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t} \\ &= \frac{g'(u)}{g'(u)|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t} \\ &= \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t}, \end{aligned}$$

onde usamos os seguintes fatos:

- i) $\nabla g(u) = g'(u)\nabla u \Rightarrow |\nabla g(u)| = |g'(u)\nabla u| = g'(u)|\nabla u|$, e
- ii) u e $g'(u)$ serem constantes na direção tangente.

$$\text{Portanto, } \vec{V}_{g(u)} = \vec{V}_u. \quad \blacksquare$$

Como mencionado anteriormente, o modelo apresentado nesta subseção unificou perfeitamente dois mecanismos de retoque aparentemente muito diferentes: o modelo de Bertalmio et al. [9] que transporta informações ao longo das linhas isocrômicas, e o modelo de Chan e Shen CDD (e TV) que difuz informações.

Estabelecemos no Teorema 2.1 que o fluxo $\vec{V}$ consiste de dois componentes: a parte normal

$$\vec{V}_n = \phi(k)\vec{n},$$

e a parte tangencial

$$\vec{V}_t = -\frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t}.$$

A primeira coincidência é que, o fluxo normal $\vec{V}_n$ corresponde exatamente ao modelo CDD de Chan e Shen com

$$g(k) = \phi(k).$$

A diferença requerida entre g e ϕ é devido ao fato que o esquema de retoque CDD é baseado em difusão somente. Por outro lado, a componente tangencial, usando o fato de no modelo BSCB termos que $\nabla^\perp u = |\nabla u| \vec{t}$, pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\vec{V}_t = -\left(\frac{1}{|\nabla u|^2} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \nabla^\perp u\right)$$

e, assim, seu divergente é

$$\text{div}(\vec{V}_t) = \nabla^\perp u \cdot \nabla \left(-\frac{1}{|\nabla u|^2} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \right),$$

desde que $\nabla^\perp u$ não seja influenciado pelo divergente, temos que a equação acima corresponde exatamente ao modelo de transporte de Bertalmio [9] com a medida de suavização dada por,

$$L_\phi = -\frac{1}{|\nabla u|^2} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}}.$$

2.4.2 Considerações sobre os Modelos Elásticos

O modelo de retoque elástico apresentado por Masnou e Morel é um modelo de quarta ordem, desta forma o cálculo numérico é muito mais difícil, assim os autores propuseram um algoritmo usando programação dinâmica ao invés de minimizar o funcional (2.19) como já citado anteriormente. Porém, o principal objetivo desta seção foi apresentar a fundamentação teórica e o modelo proposto por Chan et al. usando a função elástica de Euler-Lagrange, o qual na verdade unificou o mecanismo de transporte de Bertalmio et al. [9] com o modelo CDD de Chan e Shen.

2.5 O Modelo de Ballester et al. (BBCSV)

Apresentamos nesta seção o modelo variacional, proposto por Ballester et al. (BBCSV), para preenchimento de dados perdidos em imagens digitais que é baseado na interpolação conjunta de níveis de cinza e direções de linhas isocrômicas da imagem, estendendo suavemente de forma automática as informações dentro do domínio de retoque. Neste trabalho, Ballester et al. [3], seguindo as sugestões da sessão de conclusões de um trabalho anterior [8], introduziram um funcional energia, que é baseado numa interpretação do Princípio da Boa Continuação de Gestalt, que tem que ser minimizado com relação a duas variáveis: o campo vetorial θ , que representa as direções das linhas de nível de u , e o nível de cinza u .

O uso do campo vetorial de direções θ é um dos principais pontos do algoritmo apresentado pelos autores, o qual permite a continuidade suave dos conjuntos de nível no interior do domínio de retoque. Desta forma, estamos continuando as propriedades geométricas e fotométricas da imagem.

Podemos encontrar na literatura vários trabalhos relacionados a desocclusão e a continuação de linhas de nível. Uma contribuição pioneira é descrita por Nitzberg et al. [40], onde os autores apresentaram uma técnica para remoção de oclusões baseada na segmentação da imagem, com o objetivo de conectar as T-junções através de minimização elástica das curvas. Posteriormente, Masnou e Morel ([33] e [35]) estenderam essas idéias e apresentaram uma muito elegante e inspirada na formulação variacional para desocclusão e um algoritmo particular para implementar algumas de suas idéias, como já discutido no início da seção anterior. O trabalho a ser discutido nesta seção foi motivado, em parte pelos trabalhos citados acima na área de desocclusão, bem como pelos modelos apresentados anteriormente neste capítulo.

Partimos agora para a apresentação formal desse modelo. Seja uma imagem definida num domínio $R \subset \mathbb{R}^2$, a qual podemos supor ser um retângulo, $u^0 : R \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam Ω e $\tilde{\Omega}$ dois domínios abertos e limitados em $\mathbb{R}^2$ com fronteira Lipschitz e suponha ainda que $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega} \subset\subset R$. Para simplificar a apresentação admitimos também que $\tilde{\Omega}$ não toca a fronteira de R . Seja $B = \tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}$ uma faixa ao redor de Ω . Inicialmente, os autores, assumem também que a função u^0 dada em B seja suave no fecho, $\bar{B}$, de B . Seja θ^0 o campo vetorial de direções do gradiente de u^0 em B , isto é, θ^0 é o campo vetorial com valores em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo $\theta^0(x, y) \cdot \nabla u^0(x, y) = |\nabla u^0(x, y)|$ e $|\theta^0| \leq 1$.

Representamos o problema de retoque de imagens da seguinte forma: será que podemos

estender o par de funções (u^0, θ^0) da faixa B ao par de funções (u, θ) definido dentro de Ω ? A resposta é sim, porém para isso, devemos considerar que os dados obtidos na faixa B sejam parecidos com a solução (u, θ) . Desta forma, como relatado por Ballester et al. [3], o campo vetorial θ tem que satisfazer $|\theta| \leq 1$ em Ω e estar relacionado a u , da seguinte forma $\theta \cdot \nabla u = |\nabla u|$, ou seja, temos que impor que θ está relacionado ao campo vetorial de direções do gradiente de u . Observou-se, também, através do Princípio da Boa Continuação, que o funcional energia deve conter termos integrando $\text{div}(\theta)$, ou seja, a curvatura. Portanto, juntando todas as observações anteriores, os autores propuseram minimizar o seguinte funcional

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\text{div}(\theta)|^p (a + b|\nabla \zeta * u|) dx dy + \alpha \int_{\tilde{\Omega}} (|\nabla u| - \theta \nabla u) dx dy, \quad (2.27)$$

onde $\theta \in W^{1,p}(\text{div}, \tilde{D})$, $|\theta| \leq 1$; $u \in BV(\tilde{D}, B, u^0)$, $|u| \leq \|u^0\|_{L^\infty(B)}$; $a, \alpha > 0$, $b \geq 0$ e ζ é o Núcleo Gaussiano, $\tilde{\Omega}$ é uma dilatação do domínio de retouque Ω , $B := \tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}$ o fecho da região Ω e $\zeta * u$ é a convolução da imagem no tempo t , com Núcleo Gaussiano de escala σ [42]. O produto de convolução é utilizado para se encontrar a distribuição da soma de duas ou mais variáveis calculada por integração ou, no processamento de imagens mais especificamente, por uma média ponderada [41] de valores de uma vizinhança de um ponto arbitrário, e pode ser definido como:

Definição 2.1. (Produto de Convolução, Iório [25]) *Sejam $f, g \in SC_{per}$, o espaço das funções seccionalmente periódicas de período $2l$, a convolução de f e g é a função $f * g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(f * g)(x, y) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x - y) dy. \quad (2.28)$$

Note que uma função seccionalmente periódica, é uma função seccionalmente contínua, mas, que se repete em um certo período T . Utilizamos a seguinte definição de função seccionalmente contínua:

Definição 2.2. (Função Seccionalmente Contínua, Figueiredo [20]) *Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se existir uma partição $\pi = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$, tal que f seja contínua em cada subintervalo aberto (x_{j-1}, x_j) e as possíveis descon-tinuidades devem ocorrer necessariamente em pontos de π são todas de primeira espécie, ou seja, os limites a esquerda e a direita existem mas são diferentes.*

Definimos a função Gaussiana $\zeta(\sigma, x)$ da seguinte forma:

Definição 2.3. (Teixeira [49]) *A Função Gaussiana (ou função de distribuição normal) de variância σ^2 é a função dada por:*

$$\zeta(\sigma, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2 \frac{1}{2\sigma^2}\right), \quad (2.29)$$

onde o parâmetro σ é o desvio padrão de $\zeta(\sigma, x)$.

Podemos considerar $2t = \sigma^2$, o que implica na função Gaussiana:

$$\zeta(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-x^2 \frac{1}{4t}\right), \quad (2.30)$$

ou, como em nosso contexto, considerando o caso bidimensional,

$$\zeta(t, x, y) = \zeta(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right). \quad (2.31)$$

Maiores detalhes relacionados a formulação do funcional descrito acima podem ser encontrados em [3]. Desta forma, faremos apenas algumas observações contendo argumentos heurísticos, para ajudar no entendimento da escolha do funcional acima

A primeira delas é quanto restrição $a, b \geq 0$. Se u é a função característica da região cercada por uma curva C , então, o termo

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\operatorname{div}(\theta)|^p |\nabla u| \, dx \, dy \quad (2.32)$$

está relacionado a $\int_C |k|^p \, ds$, onde k é a curvatura. Se $p = 2$, este termo aparece na Elástica de Euler

$$\int_C (\alpha + \beta k^2) \, ds, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.33)$$

que foi primeiramente aplicada no contexto de remoção de oclusões em [40]. Como observado em [3], em termos de funções características, podemos escrever a Elástica de Euler da seguinte forma

$$\int |\nabla u| \left(\alpha + \beta \left| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \right| \right)^2 \, dx \, dy. \quad (2.34)$$

Em [6] foi mostrado que o funcional acima não é de baixa semicontinuidade. O funcional proposto por Masnou e Morel ([33] e [35]) pode ser interpretado como uma relaxação de (2.34). Vale ressaltar que o funcional apresentado nesta seção pode ser também considerado como uma formulação relaxada da energia elástica. Para isso, os autores introduziram a variável independente θ relacionada a u impondo que $\theta \nabla u = |\nabla u|$, sendo que esta restrição foi incorporada como um termo de penalização

$$\int_{\tilde{\Omega}} (|\nabla u| - \theta \cdot \nabla u) \, dx \, dy. \quad (2.35)$$

Outro fato importante é a restrição $a \geq 0$, caso contrário, não temos $\text{div}(\theta)$ limitado em L^p . Heuristicamente temos também que se não calcularmos corretamente θ , ou seja, se $\theta = 0$ para quase todo valor em $\tilde{\Omega}$, isso faz com que

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\text{div}(\theta)|^p dx dy$$

possa ser nulo, desde que $\text{div}(\theta) = 0$. Assim, para contornar esse problema a idéia é regularizar o campo vetorial em B , para isso o algoritmo é inicializado com o campo vetorial regularizado através da regularização de u^0 , usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \quad \text{em } Q = (0, \infty) \times B, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{em } S = (0, \infty) \times \partial B, \\ u &= u^0 \quad \text{para } (x, y) \in B, \end{aligned}$$

como mostrado em [2].

Vários resultados interessantes foram apresentados em [3], sendo que um dos principais é o Teorema que garante a Existência dos Minimizados para o funcional (2.27), e também o fato que para minimizar o funcional já citado, devemos na verdade, resolver as seguintes equações:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla_{\theta} E(\theta, u) \quad \in \tilde{\Omega} \quad (2.36)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_u E(\theta, u) \quad \in \Omega, \quad (2.37)$$

onde

$$\nabla_{\theta} E(\theta, u) = -p \nabla [h |\text{div}(\theta)|^{p-2} \text{div}(\theta)] - \alpha (\nabla u \chi_{\Omega} + \nabla u^0 \chi_B) = 0 \quad (2.38)$$

e

$$\nabla_u E(\theta, u) = -\text{div}\left(\zeta * \left(g \frac{\nabla \zeta * u}{|\nabla \zeta * u|}\right)\right) - \alpha \text{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \alpha \text{div}(\theta) = 0, \quad (2.39)$$

com $g = b |\text{div}(\theta)|^p$ e $h = a + b |\nabla \zeta * u|$, ζ é o Núcleo Gaussiano com variância pequena. As equações acima devem ainda ser completadas com as condições de contorno para θ e u , ou seja, a componente normal de θ em $\partial \tilde{\Omega}$ e a condição de Dirichlet para u em $\partial \Omega$, desde que $u = u^0$ em B .

2.5.1 Considerações sobre o Modelo de Retoque BBCSV

No trabalho realizado em [3] foram apresentados vários resultados teóricos importantes relacionados ao preenchimento conjunto de campos vetoriais e níveis de cinza, sendo que um dos

mais importantes é o Teorema que garante a existência dos Minimизadores para um determinado funcional proposto a ser minimizado.

2.6 O Modelo de Chan e Shen (CS)

Baseados na experiência obtida através do estudo de todos os trabalhos já apresentados neste capítulo, Chan e Shen [15] apresentaram um novo modelo de retoque de terceira ordem, fundamentado em um conjunto de princípios ou axiomas, que em nosso contexto chamamos de modelo CS. Sendo que do ponto de vista matemático, uma aproximação axiomática é um passo importante na evolução dos modelos matemáticos para retoque, colocando uma forte fundamentação matemática. Trabalhos anteriores realizados neste sentido, que também inspiraram os autores, podem ser encontrados em [1] e [10].

2.6.1 Representação Geométrica dos Diferenciais: a curvatura k e a taxa de derivação σ

Dada uma imagem u , suas diferenciais cartesianas até segunda ordem são dadas por

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \nabla \otimes \nabla u = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}.$$

As quais são fáceis de calcular se a imagem u é dada nas coordenadas x e y , porém menos ideal do ponto de vista invariante. Por exemplo, se o observador gira para algum ângulo, então ambos ∇u e $\nabla \otimes \nabla u$ mudam. Outro motivo mais simples para a palavra menos ideal é que para uma dada imagem u , as direções x e y não tem significância específica no que diz respeito a informação visual interessada.

Entretanto, próximo a um pixel retangular de uma dada imagem u , temos duas direções ortogonais que surgem naturalmente com a própria imagem: a normal $\vec{n}$ e a tangente $\vec{t}$. Sejam $z = \nabla u = p\vec{n}$, para $p \geq 0$, e $H = \nabla \otimes \nabla u$ denotando as diferenciais Cartesianas. Fazemos a seguinte transformação de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$ em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$(z, H) \rightarrow \left(p, \vec{n}, \frac{1}{p} [\vec{t}, \vec{n}]^T H [\vec{t}, \vec{n}] \right) = (p, \vec{n}, G). \quad (2.40)$$

Como citado por Chan e Shen, aparentemente a transformação é inversível e suave (onde $p \neq 0$). As transformadas diferenciais tem propriedades morfológica ou geométricas adequadas, tais como:

Propriedade 2.1. $p = |z| = |\nabla u|$ é rotacionalmente invariante enquanto $\vec{n}$ é morfologicamente invariante.

Propriedade 2.2. A matriz diferencial G de segunda ordem leva muito mais informação geométrica explícita sobre a imagem. O primeiro elemento da diagonal principal de G é:

$$\frac{1}{p} \vec{t}^T H \vec{t} := k,$$

é exatamente a curvatura escalar das linhas isocrômicas orientadas (pelo gradiente), a qual é uma quantidade geométrica caracterizando cada linha isocrômica individualmente e, assim, é rotacional e morfologicamente invariante. Os elementos fora da diagonal principal de G são:

$$\frac{1}{p} \vec{t}^T H \vec{n} := \sigma,$$

é também um escalar rotacional e morfologicamente invariante, o qual nem sempre foi explorado no clássico espaço-escala ou teoria de filtro, devido à restrição elíptica ([1] e [10]). Entretanto, como mostrado acima, para retoque, pode ser uma parte importante no mecanismo de transporte. No trabalho [16], Chan et al., chamam este escalar de taxa de derivação da imagem ou linha isocrômica associada. Podemos facilmente mostrar que

$$\sigma = \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial |\nabla u|}{\partial \vec{t}} = \frac{\partial (\ln |\nabla u|)}{\partial \vec{t}},$$

na qual as invariâncias rotacional e morfológica são imediatas. Para maiores detalhes, a taxa de derivação σ foi primeiramente mencionada no clássico trabalho de Rudin e Osher [45]. O último elemento da diagonal principal de G é:

$$\frac{1}{p} \vec{n}^T H \vec{n} = \frac{1}{|\nabla u|} \Delta u - k,$$

que somente é rotacional e geralmente não é morfologicamente invariante devido a (2.7). Considerando imagens u na forma quadrática geral

$$u = \frac{1}{2} x^T H x + z^T x + c,$$

podemos estabelecer o seguinte teorema, com a ajuda de (2.7) e mudança de variáveis que serão introduzidas em (2.40).

Teorema 2.2. Seja $f = f(\nabla u, \nabla \otimes \nabla u)$ uma função com derivadas até segunda ordem. Então f é morfologicamente invariante se, e somente se, pode ser escrita na forma

$$f = f(\vec{n}, k, \sigma).$$

Se, além disso, f é também rotacionalmente invariante, então

$$f = f(k, \sigma).$$

Em outras palavras, f é rotacional e morfologicamente invariante se, e somente se, é uma função de curvatura k e taxa de derivação σ .

2.6.2 A aproximação axiomática para uma classe de EDP's de terceira ordem

Inspirados pelos trabalhos anteriores, Chan et al. [16] procuraram por uma EDP de terceira ordem para retoque na forma divergente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\vec{V}).$$

Entretanto, o fluxo $\vec{V}$ deve ser somente de segunda ordem, ou seja,

$$\vec{V} = \vec{V}(\nabla u, \nabla \otimes \nabla u).$$

Podendo ser naturalmente decomposto nas direções normal e tangente:

$$\vec{V} = f \vec{n} + g \vec{t},$$

onde

$$f = f(\nabla u, \nabla \otimes \nabla u) \quad \text{e} \quad g = g(\nabla u, \nabla \otimes \nabla u).$$

Axioma 2.1 (Invariância Morfológica). *Este axioma requer que a equação de equilíbrio $\text{div}(\vec{V}) = 0$ seja morfolologicamente invariante. Desde que $\vec{n}$ e $\vec{t}$ são sempre morfolologicamente invariante, isto equivale a dizer que f e g são morfolologicamente invariantes. Então pelo Teorema 2.2, temos que*

$$f = f(\vec{n}, k, \sigma) \quad \text{e} \quad g = g(\vec{n}, k, \sigma).$$

Axioma 2.2 (Invariância Rotacional). *Este axioma requer que a equação de equilíbrio $\text{div}(\vec{V}) = 0$ seja rotacionalmente invariante. Desde que todos os escalares e operadores abaixo sejam rotacionalmente invariantes,*

$$\text{div}(\vec{n}), \quad \text{div}(\vec{t}), \quad \vec{n} \cdot \nabla, \quad \text{e} \quad \vec{t} \cdot \nabla,$$

equivale a dizer que f e g são rotacionalmente invariantes. Então pelo Teorema 2.2, temos que

$$f = f(k, \sigma) \quad \text{e} \quad g = g(k, \sigma). \quad (2.41)$$

Os dois axiomas a seguir são impostos nos fluxos normal $f \vec{n}$ e tangencial $g \vec{t}$, individualmente.

Axioma 2.3 (Princípio da Estabilidade para o difusão simples). *Como é conhecido na teoria de EDP's, a difusão atrasada é instável. Então este princípio procura uma estabilidade do termo de difusão simples*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(f \vec{n}) = \text{div}\left(\frac{f}{|\nabla u|} \nabla u\right).$$

A estabilidade requer $f > 0$, ou para a estabilidade forte $f \geq a > 0$.

Axioma 2.4 (Princípio da Linearidade para o transporte simples). *Pelo termo do transporte simples*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g \vec{t}),$$

sabendo das inconveniências do modelo de Bertalmio et al. [9], os autores propuseram agora a interpolação linear restrita, ou simplesmente, o princípio de linearidade. Primeiramente, note que,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g \vec{t}) &= \operatorname{div}((g|\nabla u|)\nabla^\perp u) = \nabla^\perp u \cdot \nabla(g|\nabla u|) \\ &= |\nabla u| \vec{t} \cdot \nabla(g|\nabla u|) = |\nabla u| \frac{\partial}{\partial \vec{t}}(g|\nabla u|). \end{aligned}$$

O princípio da linearidade significa que deve existir alguma medida de suavização L tal que

$$g|\nabla u| = \frac{\partial L}{\partial \vec{t}}, \quad (2.42)$$

e então a solução de equilíbrio u satisfaz

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \vec{t}^2} = 0.$$

Entretanto, ao longo de alguma linha isocrômica retocada, L pode ser linear, $L = a + bs$, onde s denota o parâmetro comprimento de arco da linha isocrômica, e a e b são duas constantes que são determinadas pelos valores de L nos dois pixels do contorno. Como discutido no início deste Capítulo, o modelo de transporte simples de Bertalmio et al. [9] requer um valor constante para a medida de suavização ao longo de toda linha isocrômica retocada. Mas para uma função imagem genérica u , as linhas isocrômicas, são geralmente diferentes daquelas de L .

Desde que g é de segunda ordem, de (2.42) temos que L deve envolver somente a diferencial de primeira ordem ∇u , ou $L = L(|\nabla u|)$. Além disso, desde que g , $|\nabla u|$ e $\partial/\partial \vec{t}$ são todos rotacionalmente invariantes, assim deve ser L por (2.42), o que significa que $L = L(|\nabla u|)$. Entretanto,

$$g = \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial L(|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} = L'(|\nabla u|) \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial |\nabla u|}{\partial \vec{t}} = L'(|\nabla u|) \sigma,$$

que junto com a equação (2.41) implica que

$$L'(|\nabla u|) = a,$$

sendo a constante.

Note que g/σ é uma função de k e σ somente, e da transformação (2.40), genericamente, $p = |\nabla u|$ é independente de k e σ . Entretanto,

$$L(|\nabla u|) = a|\nabla u| + b \quad e \quad g = a\sigma = a \frac{\partial(\ln |\nabla u|)}{\partial \vec{t}}.$$

Resumindo, temos estabelecido o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *De posse dos quatro axiomas anteriores, um modelo de retoque de terceira ordem na forma divergente deve ser dado por*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(f(k, \sigma) \vec{n} + a\sigma \vec{t}), \quad (2.43)$$

onde a é uma constante não-nula, $f(k, \sigma)$ uma função positiva e

$$k = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \quad e \quad \sigma = \frac{\partial(\ln |\nabla u|)}{\partial \vec{t}},$$

sendo k a curvatura escalar e σ a taxa de derivação.

Por exemplo, como inspirado pelo Modelo Elástico CKS apresentado na seção anterior, podemos escolher $f = a + bk^2$, sendo a e b constantes positivas, ou ainda $f = \exp(ck^2)$ para alguma constante positiva c . Como discutido ao apresentarmos o modelo CDD, tais escolhas penalizam grandes curvaturas fazendo com que o princípio da conectividade seja satisfeito.

2.6.3 Considerações sobre o Modelo de Retoque CS

Apresentamos nesta seção o trabalho desenvolvido por Chan e Shen [15], que é baseado em todos os modelos discutidos e também num conjunto de quatro axiomas de trabalhos, já existentes, para estabelecer uma nova classe de EDP's de terceira ordem para retoque que são morfológica e rotacionalmente invariantes, significando uma evolução dos demais modelos e resultando num modelo mais preciso.

2.7 Considerações Finais

Neste capítulo, apresentamos os modelos matemáticos mais importantes, existentes na literatura, relacionados ao contexto de retoque digital de imagens, bem como as teorias necessárias para o desenvolvimento dos trabalhos visando um maior entendimento por parte do leitor. No próximo capítulo, temos as implementações numéricas de todos os modelos apresentados neste Capítulo.

Capítulo 3

Implementações Numéricas

Apresentamos neste Capítulo uma completa abordagem relacionada as implementações numéricas das equações diferenciais parciais que modelam o problema de retoque digital de imagens.

Assim, estamos interessados na busca por funções, ou famílias de funções, as quais representam os conjuntos soluções para cada uma dessas equações. Em nosso caso, do ponto de vista prático, é inviável a busca de uma solução analítica para cada problema. Uma alternativa é obter aproximações numéricas para a solução em pontos de um domínio discretizado através do uso de métodos apropriados para cada tipo de situação e, em geral, é obtida após a aplicação de um processo iterativo.

Neste Capítulo apresentamos o Método de Diferenças Finitas, que utilizamos para discretizar as derivadas parciais presentes nas equações dos modelos introduzidos anteriormente. Também abordamos o conceito de malha e outros que se fazem necessários. Mas o principal objetivo é a apresentação da implementação numérica detalhada dos Modelos Matemáticos citados no Capítulo 2, relacionados ao Retoque Digital de Imagens. Vale ressaltar, ainda, que na Seção 3.8 propomos uma forma explícita para a discretização do Modelo BBCSV, ao contrário dos autores que a fizeram de maneira implícita, gerando um equacionamento não linear e exigindo um grande esforço computacional. Por fim, propomos na Seção 3.9 uma implementação numérica para o Modelo CS, análoga a do Modelo Elástico CKS para o Modelo CS, já que neste ponto os autores apenas apresentaram o método analítico, não propuseram formas de implementação e sendo assim, nenhum exemplo prático da aplicação desse modelo.

3.1 O Método de Diferenças Finitas

Segundo Cunha [17], o primeiro passo de qualquer método destinado a solução numérica de equações diferenciais é discretizar a região onde procuramos a solução. Assim, antes de apresentar o método propriamente dito, vamos definir uma *malha*, que é um conjunto finito de pontos, frequentemente chamados de nós da malha. Então, no caso unidimensional, seja x_0 um ponto de referência e Δx um número positivo. A *malha* de passo Δx associada a x_0 é o conjunto de pontos

$$x_i = x_0 \pm i\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots$$

e, assim, as aproximações de uma função $y(x)$ são calculadas nos pontos dessa malha.

No método de Diferenças Finitas, o segundo passo consiste na discretização das derivadas presentes nas equações diferenciais, as quais são aproximadas por diferenças entre valores da solução discretizada, onde a ferramenta matemática básica utilizada na definição de aproximações para as derivadas é a *Série de Taylor*, que nos dá várias informações sobre a função na vizinhança de um ponto x . Assim, para o caso unidimensional, isto é, funções de uma variável, temos as seguintes definições:

Definição 3.1. (Cunha [17]) *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 2. Então, a fórmula avançada para o cálculo de $y'(x)$ é dada por:*

$$y'(x) \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

sendo o erro cometido, dado por $-\frac{\Delta x}{2}y''(\xi)$, com $x < \xi < x + \Delta x$.

Definição 3.2. (Cunha [17]) *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 2. Então, a fórmula atrasada para o cálculo de $y'(x)$ é dada por:*

$$y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x},$$

sendo o erro cometido, dado por $\frac{\Delta x}{2}y''(\xi)$, com $x - \Delta x < \xi < x$.

Definição 3.3. (Cunha [17]) *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 3. Então, a fórmula centrada para o cálculo de $y'(x)$ é dada por:*

$$y'(x) \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2\Delta x},$$

sendo o erro cometido, dado por $\frac{\Delta x^2}{3!}y'''(\xi)$, com $x - \Delta x < \xi < x + \Delta x$.

Definição 3.4. (Cunha [17]) *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 4. Então, uma fórmula para o cálculo de $y''(x)$ é dada por:*

$$y''(x) \approx \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{\Delta x^2},$$

sendo o erro cometido, dado por $-\frac{\Delta x^2}{12}y^{iv}(\xi)$, com $x - \Delta x < \xi < x + \Delta x$.

3.2 Definição de Malha Regular Bidimensional

Como já mencionado anteriormente, geralmente, o primeiro passo de um método destinado a solução numérica de equações diferenciais é discretizar a região onde procuramos a solução. Nosso trabalho está focado em imagens bidimensionais que são representadas pela função $u : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e buscamos a solução $u(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Para isso, necessitamos discretizar o domínio da função intensidade de imagem $u(x, y)$, isto é, a região I , em uma malha de pontos igualmente espaçados Δx e Δy , associada a cada ponto (x_i, y_j) dada por:

$$(x_i, y_j) = (x_0 + i\Delta x, y_0 + j\Delta y), \quad i, j = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1)$$

onde considerando $\Delta x = \Delta y$, obtemos uma malha regular em (x, y) , como podemos observar na Figura 3.1 a seguir.

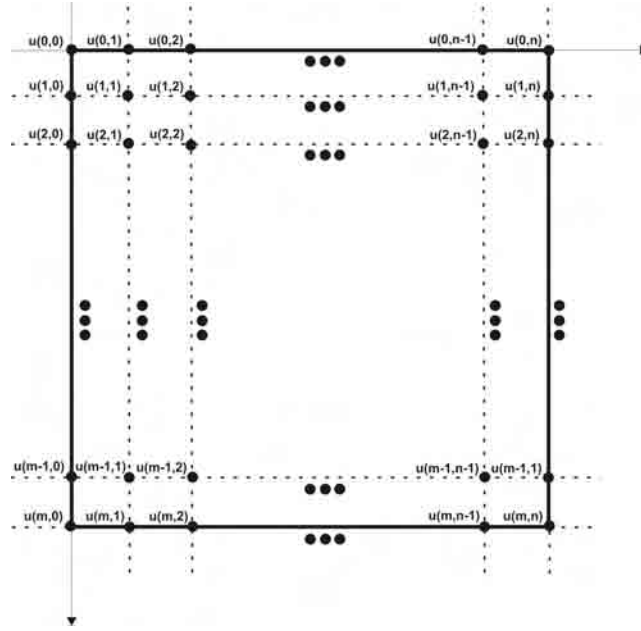


Figura 3.1: Malha Regular de discretização, com m linhas e n colunas.

Neste trabalho estamos analisando imagens de dimensão $m \times n$, onde m representa o número de linhas e n o número de colunas, a região I deve ser discretizada de forma regular com pontos igualmente espaçados, ou seja, de passo constante $\Delta x = \Delta y$, nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Agora, como esse espaçamento corresponde a distância entre os pixels horizontais e verticais, tomamos essa distância como sendo 1, que correspondente a 1 unidade de “pixel”. Desta forma, tomamos, neste trabalho $\Delta x = \Delta y = 1$. Adotando a disposição dos eixos x e y , como no esquema representado na Figura I.1, apresentada na introdução deste trabalho.

Generalizando as definições anteriores para o caso bidimensional, obtemos as seguintes equações de diferenças relativas às derivadas parciais da função $u(x, y)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx u(x+1, y) - u(x, y) = u_{i+1,j} - u_{i,j}, \quad \text{fórmula avançada} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx u(x, y) - u(x-1, y) = u_{i,j} - u_{i-1,j}, \quad \text{fórmula atrasada} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx \frac{u(x+1, y) - u(x-1, y)}{2} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2}, \quad \text{fórmula centrada.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \approx u(x, y+1) - u(x, y) = u_{i,j+1} - u_{i,j}, \quad \text{fórmula avançada} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \approx u(x, y) - u(x, y-1) = u_{i,j} - u_{i,j-1}, \quad \text{fórmula atrasada} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \approx \frac{u(x, y+1) - u(x, y-1)}{2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2}, \quad \text{fórmula centrada.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= u_{xy} = (u_x)_y \approx \frac{(u_x)_{j+1} - (u_x)_{j-1}}{2} \\ &\approx \frac{\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2} - \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2}}{2} \\ &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4} \\ &= \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4}. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u_{xx} \approx u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}. \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_{yy} \approx u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}. \end{aligned}$$

De posse dessas definições e de outras que são particulares de cada modelo matemático apresentados no capítulo anterior, partimos para a implementação numérica, mas antes disso apresentamos a seguir a discretização de u_t , que é um termo comum a todos os modelos.

3.3 Discretização de u_t por Euler

Devemos salientar que o processo evolutivo na escala temporal dos modelos, mostrados no Capítulo 2, baseiam-se fundamentalmente em um processo iterativo. Tal processo é dado da seguinte forma:

Seja $u_t = L(u)$ a equação relativa aos modelos apresentados. A solução para essa EDP deve ser encontrada para todos os pontos discretos da malha (x_i, y_j) no tempo t_n , ou seja, no estágio, n .

Utilizando o operador de diferenças avançadas no tempo temos:

$$u_t \Big|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad \text{e} \quad u_t \Big|_{i,j} = L(u_{i,j}^n),$$

então,

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = L(u_{i,j}^n) \quad \Rightarrow \quad u_{i,j}^{n+1} = \Delta t L(u_{i,j}^n) + u_{i,j}^n \quad (3.2)$$

Logo, através da equação (3.2) obtemos um processo iterativo para a evolução temporal dos modelos considerados.

Devemos destacar que a discretização de u_t por Euler resulta em métodos numéricos explícitos, e este fato proporciona um baixo custo computacional.

Partimos a seguir para a implementação numérica de cada um dos modelos apresentados no capítulo anterior, empregando técnicas de diferenças finitas, sendo que as derivadas presentes em cada termo do método foram aproximadas, sempre que possível, por diferenças centradas, que apresenta maior ordem de precisão, que as diferenças avançadas ou atrasadas.

3.4 Implementação Numérica do Modelo de Retoque BSCB

Primeiramente, apresentamos todos os pixels utilizados na discretização por diferenças finitas para o cálculo do valor de um pixel (i, j) qualquer.

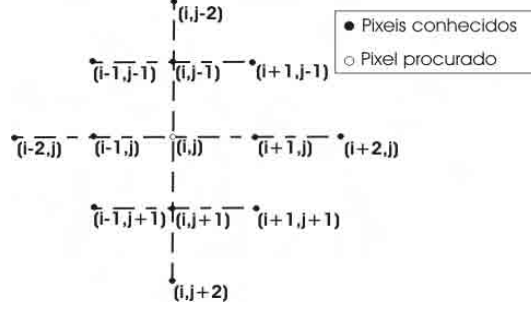


Figura 3.2: Pixels utilizados na discretização

Vamos agora considerar a evolução no tempo do Modelo BSCB, dada pela equação (2.3):

$$u_t^n = \overrightarrow{\delta L}(u^n) \frac{\overrightarrow{d}^n}{|\overrightarrow{d}^n|} |\nabla u^n|. \quad (3.3)$$

Utilizando o operador de diferenças avançadas no tempo temos

$$u_t^n \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtemos:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \overrightarrow{\delta L}(u^n) \frac{\overrightarrow{d}^n}{|\overrightarrow{d}^n|} |\nabla u^n|.$$

Assim, após algumas operações elementares chegamos a seguinte expressão:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\overrightarrow{\delta L}(u^n) \frac{\overrightarrow{d}^n}{|\overrightarrow{d}^n|} \right) |\nabla u^n|.$$

Daí, a equação acima em cada pixel (i, j) torna-se:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left(\overrightarrow{\delta L}(u_{i,j}^n) \frac{\overrightarrow{d}_{i,j}^n}{|\overrightarrow{d}_{i,j}^n|} \right) |\nabla u_{i,j}^n|.$$

Considerando-se que:

$$\overrightarrow{\delta L}(u_{i,j}^n) := (L(u_{i+1,j}^n) - L(u_{i-1,j}^n), L(u_{i,j+1}^n) - L(u_{i,j-1}^n)).$$

e adotando a medida de propagação ou suavização $L(u)$, como sendo uma discretização do Laplaciano em duas dimensões temos:

$$L(u_{i,j}^n) = \Delta u_{i,j}^n = \text{traço}(\nabla \otimes \nabla u_{i,j}^n) = u_{xx}^n \Big|_{i,j} + u_{yy}^n \Big|_{i,j}.$$

ou seja,

$$L(u_{i,j}^n) = u_{xx}^n|_{i,j} + u_{yy}^n|_{i,j}, \quad (3.5)$$

Daí, usando os operadores de diferenças finitas para discretizar as derivadas parciais temos:

$$\begin{aligned} u_{xx}^n|_{i,j} &= u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n, \\ u_{yy}^n|_{i,j} &= u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n. \end{aligned}$$

Discretizamos a direção das linhas isocrômicas como a seguir.

$$\frac{\vec{d}_{i,j}^n}{|\vec{d}_{i,j}^n|} := \frac{(-u_y^n|_{i,j}, u_x^n|_{i,j})}{\sqrt{(u_x^n|_{i,j})^2 + (u_y^n|_{i,j})^2}},$$

Novamente, fazendo uso dos operadores de diferenças finitas temos que:

$$\begin{aligned} u_x^n|_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2}, \\ u_y^n|_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2}. \end{aligned}$$

Daí, considerando-se

$$\beta_{i,j}^n = \vec{\delta L}(u_{i,j}^n) \cdot \frac{\vec{d}_{i,j}^n}{|\vec{d}_{i,j}^n|},$$

isto é, estamos considerando a projeção de $\vec{\delta L}(u)$ sobre o vetor $\vec{d}$ normalizado, ou seja, calculamos a mudança de L ao longo da direção tangente. Por fim, ao multiplicar β por uma versão limitada da inclinação da norma do gradiente da imagem, $|\nabla u|$, dada como na expressão (3.6) a seguir, estamos garantindo a estabilidade do método, pois como mencionado em [9], uma discretização por diferenças centradas tornaria-o instável,

$$|\nabla u_{i,j}^n| = \begin{cases} \sqrt{(u_{xbm}^n|_{i,j})^2 + (u_{xfM}^n|_{i,j})^2 + (u_{ybm}^n|_{i,j})^2 + (u_{yfM}^n|_{i,j})^2}, & \text{se } \beta_{i,j}^n > 0, \\ \sqrt{(u_{xbM}^n|_{i,j})^2 + (u_{xfm}^n|_{i,j})^2 + (u_{ybM}^n|_{i,j})^2 + (u_{yfm}^n|_{i,j})^2}, & \text{se } \beta_{i,j}^n < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

onde os sub-índices b e f denotam as diferenças atrasada e centrada, respectivamente, enquanto m e M representam o mínimo ou o máximo, entre a derivada e zero, ou mais precisamente,

$$\begin{aligned} u_{xbm}^n|_{i,j} &= \min(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n, 0), \\ u_{xfM}^n|_{i,j} &= \max(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n, 0), \\ u_{ybm}^n|_{i,j} &= \min(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{yfm}^n \Big|_{i,j} &= \max(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n, 0), \\
u_{xbM}^n \Big|_{i,j} &= \max(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n, 0), \\
u_{xfm}^n \Big|_{i,j} &= \min(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n, 0), \\
u_{ybM}^n \Big|_{i,j} &= \max(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n, 0), \\
u_{yfm}^n \Big|_{i,j} &= \min(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n, 0).
\end{aligned}$$

Note então que, a partir das discretizações apresentadas acima e com base na teoria apresentada anteriormente, pode-se construir um algoritmo eficiente para a realização do processo de retoque.

3.5 Implementação Numérica do Modelo de Retoque TV

Na Figura 3.3 apresentamos todos os pixels utilizados na discretização por diferenças finitas para o cálculo do valor de um pixel (i, j) qualquer.

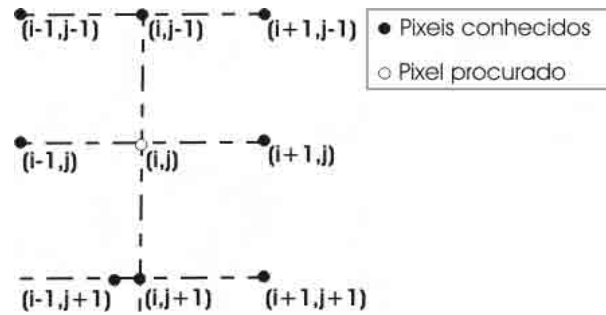


Figura 3.3: Pixels utilizados na discretização

Considerando a equação do Modelo TV $u_t = L(u) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a}\right)$. Temos que:

$$\begin{aligned}
L(u) &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_a}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{|\nabla u|_a}(u_x, u_y)\right) = \operatorname{div}\left(\frac{u_x}{|\nabla u|_a}, \frac{u_y}{|\nabla u|_a}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{|\nabla u|_a}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{|\nabla u|_a}\right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{|\nabla u|_a} \right) &= \frac{u_{xx} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} - u_x \left(\frac{2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right)}{u_x^2 + u_y^2 + a^2} \\
&= \frac{u_{xx} |\nabla u|_a - u_x \left(\frac{u_x u_{xx} + u_y u_{yx}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2} \\
&= \frac{u_{xx} |\nabla u|_a^2 - u_x u_y u_{yx} - u_x^2 u_{xx}}{|\nabla u|_a^3}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{|\nabla u|_a} \right) &= \frac{u_{yy} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2} - u_y \left(\frac{2u_x u_{xy} + 2u_y u_{yy}}{2\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + a^2}} \right)}{u_x^2 + u_y^2 + a^2} \\
&= \frac{u_{yy} |\nabla u|_a - u_y \left(\frac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{|\nabla u|_a} \right)}{|\nabla u|_a^2} \\
&= \frac{u_{yy} |\nabla u|_a^2 - u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy}}{|\nabla u|_a^3}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituindo os resultados obtidos nas expressões (3.8) e (3.9) em (3.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
L(u) &= \frac{u_{xx} |\nabla u|_a^2 - u_x u_y u_{yx} - u_x^2 u_{xx}}{|\nabla u|_a^3} + \frac{u_{yy} |\nabla u|_a^2 - u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy}}{|\nabla u|_a^3} \\
&= \frac{1}{|\nabla u|_a^3} \left[u_{xx} (u_x^2 + u_y^2 + a^2) - u_y u_x u_{yx} - u_x^2 u_{xx} + u_{yy} (u_x^2 + u_y^2 + a^2) \right. \\
&\quad \left. - u_y u_x u_{xy} - u_y^2 u_{yy} \right] \\
&= \frac{1}{|\nabla u|_a^3} \left[u_{xx} u_x^2 + u_{xx} u_y^2 + u_{xx} a^2 - u_y u_x u_{yx} - u_x^2 u_{xx} + u_{yy} u_x^2 + u_{yy} u_y^2 \right. \\
&\quad \left. + u_{yy} a^2 - u_y u_x u_{xy} - u_y^2 u_{yy} \right] \\
&= \frac{1}{|\nabla u|_a^3} \left[u_{xx} u_y^2 + u_{xx} a^2 - u_y u_x u_{yx} + u_{yy} u_x^2 + u_{yy} a^2 - u_y u_x u_{xy} \right] \\
&= \frac{1}{|\nabla u|_a^3} \left[u_{xx} (u_y^2 + a^2) - 2u_y u_x u_{xy} + u_{yy} (u_x^2 + a^2) \right] \\
&= \frac{1}{|\nabla u|_a^3} \left[u_{xx} |u_y|_a^2 - 2u_y u_x u_{xy} + u_{yy} |u_x|_a^2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$L(u) = \frac{1}{|\nabla u|_a^3} (|u_y|_a^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + |u_x|_a^2 u_{yy}). \tag{3.10}$$

Como observado em [15], primeiro, a equação do Modelo TV é morfologicamente invariante, desde que o lado direito da equação é exatamente a curvatura das linhas isocrômicas e é independente dos relativos valores de cinza. A segunda observação, é que para que toda evolução

no tempo seja morfologicamente invariante, o fator $|\nabla u|_a$ deve ser adicionado a fim de balancear a derivada temporal, resultando na seguinte equação evolucionária,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u|_a L(u), \quad (3.11)$$

que é exatamente o movimento da curvatura [37], e é também muito útil para acelerar a convergência numérica, como estudado por Marquina e Osher [31].

Repassando o fator $L(u)$, pelo obtido em (3.10), na equação 3.11, obtemos

$$u_t = \frac{1}{|\nabla u|_a^2} (|u_y|_a^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + |u_x|_a^2 u_{yy}). \quad (3.12)$$

Agora, utilizando a equação acima, bem como as condições de contorno dadas anteriormente e discretizando-a pelo método de Diferenças Finitas, o problema torna-se programável, e assim fácil de resolver.

3.6 Implementação Numérica do Modelo de Retoque CDD

Neste trabalho, como estamos interessados na situação em que a imagem original não contém ruído, apresentamos a seguir somente a discretização referente a equação (2.17):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}).$$

Na Figura 3.4 apresentamos todos os pixels utilizados na discretização por diferenças finitas para o cálculo do valor de um pixel (i, j) qualquer.

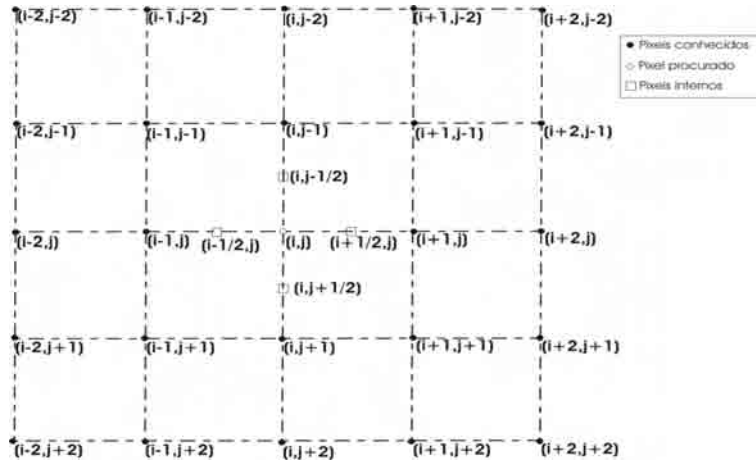


Figura 3.4: Pixels utilizados na discretização

Vale notar, que durante a implementação deste modelo Chan e Shen utilizaram também os sub-piveis, que são calculados através do valor médio entre dois pixels vizinhos.

Logo, usando o operador de diferenças avançadas no tempo, obtemos

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \operatorname{div}(\vec{q}^n),$$

onde Δt denota o passo no tempo e q é dado como na expressão (2.18):

$$\vec{q} = -g(|k|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = -g(|k|) \vec{n},$$

onde k é dado pela expressão (2.15), $\vec{q} = (q^1, q^2)$ e $\vec{n} = (n^1, n^2) = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}, \frac{u_y}{|\nabla u|} \right)$.

Assim,

$$q^1 = -g(|k|)n^1 \quad \text{e} \quad q^2 = -g(|k|)n^2.$$

Daí,

$$\operatorname{div}(\vec{q}_{i,j}) = q_x^1 \Big|_{i,j} + q_y^2 \Big|_{i,j} = \left(q_{i+\frac{1}{2},j}^1 - q_{i-\frac{1}{2},j}^1 \right) + \left(q_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - q_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \right).$$

Logo,

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \left[\left(q_{i+\frac{1}{2},j}^1 - q_{i-\frac{1}{2},j}^1 \right) + \left(q_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - q_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \right) \right].$$

Partimos agora para o cálculo dos termos q^1 e q^2 .

$$\text{i)} \quad q_{i+\frac{1}{2},j}^1 = -g(|k|) \Big|_{i+\frac{1}{2},j} n_{i+\frac{1}{2},j}^1,$$

sendo,

$$n_{i+\frac{1}{2},j}^1 = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j}. \quad (3.13)$$

Usando diferenças finitas centradas temos:

$$\nabla u_{i+\frac{1}{2},j} = \left(u_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j}, u_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right) \simeq \left(u_{i+1,j} - u_{i,j}, \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}) \right),$$

onde

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1}) \quad \text{e} \quad u_{i+\frac{1}{2},j-1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}).$$

Então,

$$\nabla u_{i+\frac{1}{2},j} \simeq \left(u_{i+1,j} - u_{i,j}, \frac{1}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}) \right). \quad (3.14)$$

Substituindo os devidos valores da equação (3.14) em (3.13), obtemos:

$$n_{i+\frac{1}{2},j}^1 = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + [\frac{1}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1})]^2}}. \quad (3.15)$$

Estamos interessados agora no cálculo de $k_{i+\frac{1}{2},j}$, assim,

$$\begin{aligned} k_{i+\frac{1}{2},j} &= \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i+\frac{1}{2},j} \simeq \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i+1,j} \\ &- \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i,j} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u_y}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1} - \left(\frac{u_y}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i+\frac{1}{2},j-1}\right], \end{aligned}$$

onde,

$$\nabla u_{i+1,j} = \left(u_x\Big|_{i+1,j}, u_y\Big|_{i+1,j}\right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+2,j} - u_{i,j}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1})\right),$$

$$\nabla u_{i,j} = \left(u_x\Big|_{i,j}, u_y\Big|_{i,j}\right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})\right),$$

$$\begin{aligned} \nabla u_{i+\frac{1}{2},j+1} &= \left(u_x\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1}, u_y\Big|_{i+\frac{1}{2},j+1}\right) \simeq \left((u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}), \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j+2} - u_{i+\frac{1}{2},j})\right) \\ &\simeq \left(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}, \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j+2} + u_{i,j+2}) - \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i,j})\right]\right) \\ &\simeq \left(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}, \frac{1}{4}(u_{i+1,j+2} + u_{i,j+2} - u_{i+1,j} - u_{i,j})\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla u_{i+\frac{1}{2},j-1} &= \left(u_x\Big|_{i+\frac{1}{2},j-1}, u_y\Big|_{i+\frac{1}{2},j-1}\right) \simeq \left((u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-2})\right) \\ &\simeq \left(u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}, \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i,j}) - \frac{1}{2}(u_{i+1,j-2} + u_{i,j-2})\right]\right) \\ &\simeq \left(u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}, \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i,j} - u_{i+1,j-2} - u_{i,j-2})\right). \end{aligned}$$

A seguir apresentamos os cálculos referentes a $q_{i-\frac{1}{2},j}^1$,

$$\text{ii)} \quad q_{i-\frac{1}{2},j}^1 = -g(|k|)\Big|_{i-\frac{1}{2},j} n_{i-\frac{1}{2},j}^1,$$

sendo,

$$n_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}\right)\Big|_{i-\frac{1}{2},j}. \quad (3.16)$$

Daí, temos que:

$$\nabla u_{i-\frac{1}{2},j} = \left(u_x\Big|_{i-\frac{1}{2},j}, u_y\Big|_{i-\frac{1}{2},j}\right) \simeq \left(u_{i,j} - u_{i-1,j}, \frac{1}{2}(u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1})\right),$$

onde,

$$u_{i-\frac{1}{2},j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1}) \quad \text{e} \quad u_{i-\frac{1}{2},j-1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}).$$

Então,

$$\nabla u_{i-\frac{1}{2},j} \simeq \left(u_{i,j} - u_{i-1,j}, \frac{1}{4}(u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i,j-1}) \right). \quad (3.17)$$

Substituindo os devidos valores da equação (3.17) em (3.16), obtemos:

$$n_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + [\frac{1}{4}(u_{i-1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i,j-1})]^2}}. \quad (3.18)$$

Vamos agora calcular $k_{i-\frac{1}{2},j}$:

$$\begin{aligned} k_{i-\frac{1}{2},j} &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j} \simeq \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j} \\ &\quad - \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-1,j} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j+1} - \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j-1} \right], \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla u_{i-1,j} &= \left(u_x \Big|_{i-1,j}, u_y \Big|_{i-1,j} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{i-2,j}), \frac{1}{2}(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) \right), \\ \nabla u_{i,j} &= \left(u_x \Big|_{i,j}, u_y \Big|_{i,j} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right), \\ \nabla u_{i-\frac{1}{2},j+1} &= \left(u_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j+1}, u_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j+1} \right) \simeq \left((u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}), \frac{1}{2}(u_{i-\frac{1}{2},j+2} - u_{i-\frac{1}{2},j}) \right) \\ &\simeq \left(u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}, \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_{i-1,j+2} + u_{i,j+2}) - \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i,j}) \right] \right) \\ &\simeq \left(u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}, \frac{1}{4} (u_{i-1,j+2} + u_{i,j+2} - u_{i-1,j} - u_{i,j}) \right), \\ \nabla u_{i-\frac{1}{2},j-1} &= \left(u_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j-1}, u_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j-1} \right) \simeq \left((u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j-2}) \right) \\ &\simeq \left(u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}, \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i,j}) - \frac{1}{2}(u_{i-1,j-2} + u_{i,j-2}) \right] \right) \\ &\simeq \left(u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}, \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i,j} - u_{i-1,j-2} - u_{i,j-2}) \right). \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio anterior,

$$\text{iii)} \quad q_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = -g(|k|) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} n_{i,j+\frac{1}{2}}^2,$$

sendo,

$$n_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

Assim,

$$\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}} = \left(u_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}, u_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j+\frac{1}{2}}), u_{i,j+1} - u_{i,j} \right),$$

onde

$$u_{i+1,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j}) \quad \text{e} \quad u_{i-1,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}).$$

Então,

$$\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}} \simeq \left(\frac{1}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}), u_{i,j+1} - u_{i,j} \right). \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19), obtemos:

$$n_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sqrt{\left[\frac{1}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j})\right]^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}}. \quad (3.21)$$

Passemos, então, ao cálculo de $k_{i,j+\frac{1}{2}}$. Desta forma:

$$\begin{aligned} k_{i,j+\frac{1}{2}} &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-1,j+\frac{1}{2}} \right] + \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j+1} - \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j}, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla u_{i,j+1} &= \left(u_x \Big|_{i,j+1}, u_y \Big|_{i,j+1} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}), \frac{1}{2}(u_{i,j+2} - u_{i,j}) \right), \\ \nabla u_{i,j} &= \left(u_x \Big|_{i,j}, u_y \Big|_{i,j} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right), \\ \nabla u_{i+1,j+\frac{1}{2}} &= \left(u_x \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}}, u_y \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+2,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}), (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j}) \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}, (u_{i+2,j+1} + u_{i+2,j}) - \frac{1}{2}(u_{i,j+1} + u_{i,j}) \right], u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{4}(u_{i+2,j+1} + u_{i+2,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j}), u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} \right), \\ \nabla u_{i-1,j+\frac{1}{2}} &= \left(u_x \Big|_{i-1,j+\frac{1}{2}}, u_y \Big|_{i-1,j+\frac{1}{2}} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i-2,j+\frac{1}{2}}), (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}) \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j+1} + u_{i,j}) - \frac{1}{2}(u_{i-2,j+1} + u_{i-2,j}) \right], u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j} \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{4}(u_{i,j+1} + u_{i,j} - u_{i-2,j+1} - u_{i-2,j}), u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j} \right). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\text{iv)} \quad q_{i,j-\frac{1}{2}}^2 = -g(|k|) \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} n_{i,j-\frac{1}{2}}^2,$$

sendo,

$$n_{i,j-\frac{1}{2}}^2 = \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

Dai,

$$\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}} = \left(u_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2}}, u_y \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}), u_{i,j} - u_{i,j-1} \right),$$

onde

$$u_{i+1,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j}) \quad \text{e} \quad u_{i-1,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j}).$$

Então,

$$\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}} \simeq \left(\frac{1}{4}(u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j}), u_{i,j-1} - u_{i,j} \right). \quad (3.23)$$

Substituindo os devidos valores da equação (3.23) em (3.22), obtemos:

$$n_{i,j-\frac{1}{2}}^2 = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\sqrt{\left[\frac{1}{4}(u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j})\right]^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2}}. \quad (3.24)$$

Vamos agora calcular $k_{i,j-\frac{1}{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} k_{i,j-\frac{1}{2}} &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right] + \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j} - \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j-1}, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla u_{i,j-1} &= \left(u_x \Big|_{i,j-1}, u_y \Big|_{i,j-1} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{i,j-2}) \right), \\ \nabla u_{i,j} &= \left(u_x \Big|_{i,j}, u_y \Big|_{i,j} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right), \\ \nabla u_{i+1,j-\frac{1}{2}} &= \left(u_x \Big|_{i+1,j-\frac{1}{2}}, u_y \Big|_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i+2,j-\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}), (u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}) \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_{i+2,j-1} + u_{i+2,j}) - \frac{1}{2}(u_{i,j-1} + u_{i,j}) \right], u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1} \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{4}(u_{i+2,j-1} + u_{i+2,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j}), u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1} \right), \\ \nabla u_{i-1,j-\frac{1}{2}} &= \left(u_x \Big|_{i-1,j-\frac{1}{2}}, u_y \Big|_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right) \simeq \left(\frac{1}{2}(u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-2,j-\frac{1}{2}}), (u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}) \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j-1} + u_{i,j}) - \frac{1}{2}(u_{i-2,j-1} + u_{i-2,j}) \right], u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1} \right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{4}(u_{i,j-1} + u_{i,j} - u_{i-2,j-1} - u_{i-2,j}), u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1} \right). \end{aligned}$$

Com relação a função g , Chan e Shen [15], adotaram $g(s) = s$, pois $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função contínua satisfazendo $g(0) = 0$ e $g(\pm\infty) = +\infty$.

Chan e Shen [15], também ressaltam que dependendo do tamanho da imagem, pode-se usar técnicas de aceleração. Uma técnica bastante simples é começar o processo CDD com uma boa aproximação inicial. Por exemplo, podemos aplicar primeiro o Modelo de Retoque TV e o resultado é então aproveitado como uma boa aproximação inicial no processo CDD.

3.7 Implementação Numérica do Modelo de Retoque Elástico CKS

Com relação a representação dos pixels utilizados na implementação numérica, observamos que é a mesma apresentada na Figura 3.4, sendo que durante a implementação deste modelo Chan et al. utilizaram também os sub-pixeis. Destacamos também que os autores seguiram as idéias propostas por Marquina e Osher [31] com o objetivo de obter uma convergência mais rápida do método, consideraram a equação (2.26) modificada da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div}(\vec{V}), \quad (3.25)$$

onde o fluxo é dado por

$$\vec{V} = \phi(k) \vec{n} - \frac{1}{|\nabla u|} \frac{\partial(\phi'(k)|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t}.$$

Agora, como considerado por Chan et al. [16], $\phi(k) = a + bk^2$, então $\phi'(k) = 2bk$ e assim,

$$\vec{V} = (a + bk^2) \vec{n} - \frac{2b}{|\nabla u|} \frac{\partial(k|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} \vec{t},$$

onde a e b são constantes positivas.

Considerando-se a representação de pixels (i, j) de uma imagem digital, e discretizando explicitamente por Euler a equação (3.25), temos:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t (|\nabla u_{i,j}^n| F(u_{i,j}^n))$$

onde $F(u_{i,j}^n) = \operatorname{div}(\vec{V}_{i,j}^n)$.

O fator de aceleração $|\nabla u_{i,j}^n|$ presente na equação anterior é aproximado usando diferenças centradas da seguinte forma:

$$|\nabla u_{i,j}| = \frac{1}{2} \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2}.$$

Vamos agora discretizar o termo $F(u_{i,j}) = \operatorname{div}(\vec{V}_{i,j})$. Sejam

$$\vec{V} = (V^1, V^2), \quad \vec{n} = (n^1, n^2) = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}, \frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \quad \text{e} \quad \vec{t} = (t^1, t^2) = \left(-\frac{u_y}{|\nabla u|}, \frac{u_x}{|\nabla u|} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} V^1 &= (a + bk^2)n^1 - \frac{2b}{|\nabla u|} \frac{\partial(k|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} t^1 \\ &= (a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} - \frac{2b}{|\nabla u|} \left[t^1 \frac{\partial}{\partial x}(k|\nabla u|) + t^2 \frac{\partial}{\partial y}(k|\nabla u|) \right] t^1 \\ &= (a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} + \frac{2b}{|\nabla u|^3} \left[-u_y \frac{\partial}{\partial x}(k|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y}(k|\nabla u|) \right] u_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 V^2 &= (a + bk^2)n^2 - \frac{2b}{|\nabla u|} \frac{\partial(k|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} t^2 \\
 &= (a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} - \frac{2b}{|\nabla u|} \left[t^1 \frac{\partial}{\partial x}(k|\nabla u|) - t^2 \frac{\partial}{\partial y}(k|\nabla u|) \right] t^2 \\
 &= (a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} - \frac{2b}{|\nabla u|^3} \left[-u_y \frac{\partial}{\partial x}(k|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y}(k|\nabla u|) \right] u_x.
 \end{aligned}$$

Portanto, o valor final da função $F(u_{i,j})$ é dado por:

$$F(u_{i,j}) = \text{div}(\vec{V}_{i,j}) = V_x^1 \Big|_{i,j} + V_y^2 \Big|_{i,j} = \left(V_{i+\frac{1}{2},j}^1 - V_{i-\frac{1}{2},j}^1 \right) + \left(V_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - V_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \right).$$

Chan et al. [16], através de experimentos numéricos usando a Figura 3.5 mostraram a vantagem da discretização de u_y nos pontos médios, comparada com as outras formas: as substituições avançada de $u_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j}$ por $u_y \Big|_{i,j}$ e média $\frac{1}{4}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$. Podemos perceber, que o esquema min-mod preserva mais os padrões de borda e assim o resultado é mais nítido.

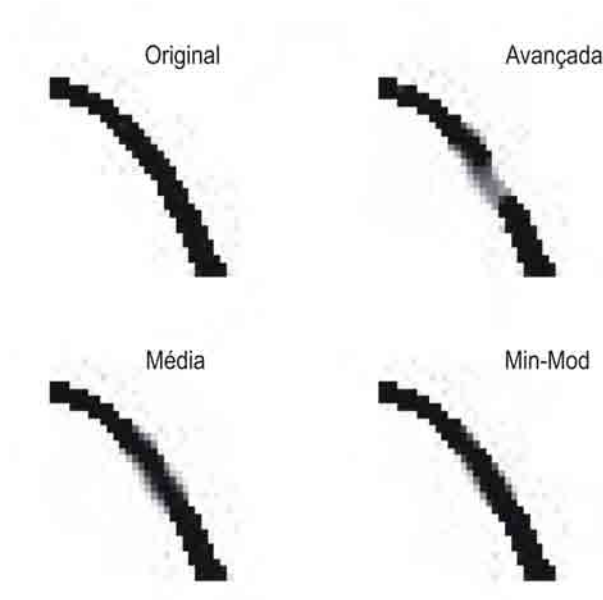


Figura 3.5: Resultados experimentais mostrando a vantagem da discretização Min-Mod.

Definimos a seguir esta função que será muito útil.

Definição 3.5. (A Função Min-Mod, [16]) *Sejam α e β dois pixels, então*

$$\text{minmod}(\alpha, \beta) = \frac{\text{sinal}(\alpha) + \text{sinal}(\beta)}{2} \text{mínimo}(|\alpha|, |\beta|).$$

Vamos agora calcular os $V's$. Aproximando as derivadas presentes por diferenças centradas.

Temos que:

$$i) \quad V_{i+\frac{1}{2},j}^1 = \left\{ (a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} + \frac{2b}{|\nabla u|^3} \left[-u_y \frac{\partial}{\partial x} (k|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} (k|\nabla u|) \right] u_y \right\} \Big|_{i+\frac{1}{2},j},$$

onde

$$\begin{aligned} k_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{minmod}(k_{i+1,j}, k_{i,j}); \\ u_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= u_{i+1,j} - u_{i,j}; \\ \frac{\partial}{\partial x} [k|\nabla u|] \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= k_{i+1,j} |\nabla u_{i+1,j}| - k_{i,j} |\nabla u_{i,j}|; \\ u_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right]; \\ \frac{\partial}{\partial y} [k|\nabla u|] \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(k_{i+1,j+1} |\nabla u_{i+1,j+1}| \right. \\ &\quad \left. - k_{i+1,j-1} |\nabla u_{i+1,j-1}|), \frac{1}{2}(k_{i,j+1} |\nabla u_{i,j+1}| - k_{i,j-1} |\nabla u_{i,j-1}|) \right]. \end{aligned}$$

$$ii) \quad V_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \left\{ (a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} + \frac{2b}{|\nabla u|^3} \left[-u_y \frac{\partial}{\partial x} (k|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} (k|\nabla u|) \right] u_y \right\} \Big|_{i-\frac{1}{2},j},$$

onde

$$\begin{aligned} k_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{minmod}(k_{i-1,j}, k_{i,j}); \\ u_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= u_{i,j} - u_{i-1,j}; \\ \frac{\partial}{\partial x} [k|\nabla u|] \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= k_{i,j} |\nabla u_{i,j}| - k_{i-1,j} |\nabla u_{i-1,j}|; \\ u_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) \right]; \\ \frac{\partial}{\partial y} [k|\nabla u|] \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(k_{i,j+1} |\nabla u_{i,j+1}| \right. \\ &\quad \left. - k_{i,j-1} |\nabla u_{i,j-1}|), \frac{1}{2}(k_{i-1,j+1} |\nabla u_{i-1,j+1}| - k_{i-1,j-1} |\nabla u_{i-1,j-1}|) \right]. \end{aligned}$$

$$iii) \quad V_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = \left\{ (a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} - \frac{2b}{|\nabla u|^3} \left[-u_y \frac{\partial}{\partial x} (k|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} (k|\nabla u|) \right] u_x \right\} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}},$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod}(k_{i,j+1}, k_{i,j}); \\
u_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= u_{i,j+1} - u_{i,j}; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[(k|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= k_{i,j+1} |\nabla u_{i,j+1}| - k_{i,j} |\nabla u_{i,j}|; \\
u_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right]; \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[(k|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(k_{i+1,j+1} |\nabla u_{i+1,j+1}| \right. \\
&\quad \left. - k_{i-1,j+1} |\nabla u_{i-1,j+1}|), \frac{1}{2}(k_{i+1,j} |\nabla u_{i+1,j}| - k_{i-1,j} |\nabla u_{i-1,j}|) \right]; \\
\text{iv)} \quad V_{i,j-\frac{1}{2}}^2 &= \left\{ (a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} - \frac{2b}{|\nabla u|^3} \left[-u_y \frac{\partial}{\partial x} (k|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} (k|\nabla u|) \right] u_x \right\} \Big|_{i-\frac{1}{2},j},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod}(k_{i,j}, k_{i,j-1}); \\
u_y \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= u_{i,j} - u_{i,j-1}; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[(k|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= k_{i,j} |\nabla u_{i,j}| - k_{i,j-1} |\nabla u_{i,j-1}|; \\
u_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}) \right]; \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[(k|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(k_{i+1,j} |\nabla u_{i+1,j}| \right. \\
&\quad \left. - k_{i-1,j} |\nabla u_{i-1,j}|), \frac{1}{2}(k_{i+1,j-1} |\nabla u_{i+1,j-1}| - k_{i-1,j-1} |\nabla u_{i-1,j-1}|) \right].
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo-se as devidas substituições dos termos encontrados em i), ii), iii) e iv) na equação discretizada abaixo, torna-se possível a implementação numérica do modelo.

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left\{ |\nabla u_{i,j}^n| \left[\left(V_{i+\frac{1}{2},j}^1 - V_{i-\frac{1}{2},j}^1 \right) + \left(V_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - V_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \right) \right] \right\}$$

3.7.1 Nossa Contribuição relacionada ao Modelo CKS

No trabalho desenvolvido por Chan et al. [16], os autores, comentam que no desenvolvimento do algoritmo para retoque, utilizaram algumas das idéias de Masnou e Morel [35] no que refere-se ao tratamento das T-junções decorrentes da aplicação desses Modelos Elásticos. Porém, como já dito anteriormente, o algoritmo foi desenvolvido usando programação dinâmica e apresenta alto custo computacional. Por exemplo, no caso do modelo de Masnou e Morel [35], esse

custo é da ordem de $(MN \log(M + M^3))$ onde M é o número de T-junções e N é o número de vértices de uma linha poligonal que é usada para representar o domínio de retoque. A aplicação do algoritmo sem o tratamento das T-junções conduz a resultados nada satisfatórios, surgindo pontos visíveis, que prejudicam a qualidade final da imagem, como pode ser observado na Figura 3.6 (a) a seguir.

Com o intuito de contornar esses inconvenientes, sem a necessidade do alto custo computacional gerado pelo tratamento das T-junções, propomos neste trabalho a utilização de iterações de difusão anisotrópica dada pela equação (2.4), após o processamento. Na Figura 3.6 (b), apresentamos uma imagem tratada usando-se o Modelo Elástico CKS sem e com o tratamento proposto.



Figura 3.6: (a) Retoque sem o tratamento proposto e (b) com o tratamento proposto.

Pode ser observado nas figuras anteriores que o tratamento sugerido eliminou os “pontinhos” resultantes das T-junções.

3.8 Implementação Numérica do Modelo BBCSV

No caso deste modelo, Ballester et al. [3] propuseram uma discretização implícita para resolver (2.36) e (2.37), onde, para resolver o sistema linear resultante desta discretização, foi necessário a aplicação do Método dos Gradientes Conjugados. Esse procedimento apresenta alta complexidade em termos computacionais. Apresentamos resumidamente a seguir a implementação proposta por Balester et al. [3].

As equações do modelo são dadas por:

$$\nabla_{\theta} E(\theta, \theta', u, v) = -p \nabla [h(\epsilon + |\operatorname{div}(\theta)|^{(p-2)}) \operatorname{div}(\theta)] - \alpha (\nabla u \chi_{\Omega} + \nabla u_0 \chi_B) = 0,$$

onde $p = 1$, $h = a + b|\nabla\zeta * u|$, $a, \alpha > 0$, $b \geq 0$ e ζ é o Núcleo Gaussiano e também

$$\chi_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \chi_B(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in B \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin B \end{cases}.$$

e

$$\nabla_u E(\theta, \theta', u, v) = -\operatorname{div} \left[k * \left(g \frac{\nabla\zeta * u}{\sqrt{\epsilon + |\nabla\zeta * v|^2}} \right) \right] - \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{\epsilon + |\nabla u|^2}} \right) + \alpha \operatorname{div}(\theta) = 0,$$

as quais, foram discretizadas de acordo com o tempo da seguinte forma

$$\theta^{n+1} - \theta^n = \Delta t \nabla_{\theta} E(\theta^{n+1}, \theta^n, u^n, u^n)$$

e

$$u^{n+1} - u^n = \Delta t \nabla_u E(\theta^{n+1}, \theta^{n+1}, u^{n+1}, u^n)$$

Daí, efetuando-se uma mudança de variáveis $\xi^{n+1} = \theta^{n+1} - \theta^n$, $v^{n+1} = u^{n+1} - u^n$ tem-se,

$$\xi^{n+1} = \Delta t \nabla_{\theta} E(\xi^{n+1} + \theta^n, \theta^n, u^n, u^n) \quad (3.26)$$

$$v^{n+1} = \Delta t \nabla_u E(\theta^{n+1}, \theta^{n+1}, v^{n+1} + u^n, u^n) \quad (3.27)$$

com

$$\theta^n \cdot n \Big|_{\partial\tilde{\Omega}} = \theta^{n+1} \cdot n \Big|_{\partial\tilde{\Omega}}$$

e

$$u^n \Big|_{\partial\Omega} = u^{n+1} \Big|_{\partial\Omega}$$

Assim, desde que os valores ξ^{n+1} e v^{n+1} no contorno são nulos, pode-se usar o método dos Gradientes Conjugados para resolver as equações (3.26) e (3.27).

Neste trabalho, efetuamos a discretização explícita diminuindo significativamente a complexidade computacional.

A seguir, apresentamos todos os pixels utilizados na discretização por diferenças finitas para o cálculo do valor de um pixel (i, j) qualquer.

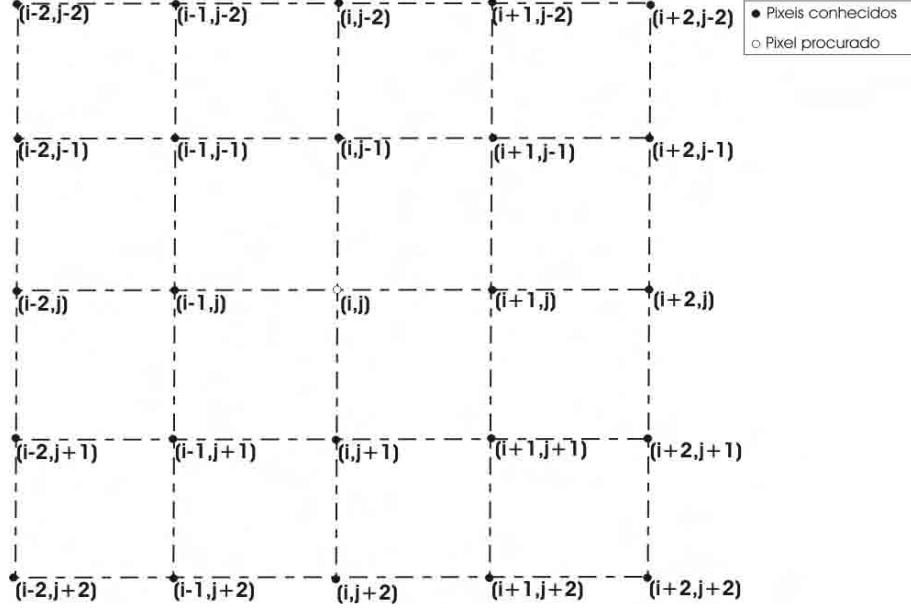


Figura 3.7: Pixels utilizados na discretização

Primeiramente, vamos considerar o termo (2.38), o qual reescrevemos a seguir

$$\nabla_{\theta} E(\theta, u) = -p \nabla [h |\operatorname{div}(\theta)|^{p-2} \operatorname{div}(\theta)] - \alpha (\nabla u \chi_{\Omega} + \nabla u_0 \chi_B) = 0, \quad (3.28)$$

onde estamos assumindo que $p = 1$, $h = a + b |\nabla \zeta * u|$, $a, \alpha > 0$, $b \geq 0$ e ζ é o Núcleo Gaussiano e também

$$\chi_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \chi_B(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in B \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin B \end{cases}.$$

Como mencionado na Seção 2.5 do Capítulo 2, vamos considerar $\theta : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como sendo o campo vetorial de direções do gradiente de u . Assim, $\theta = (\theta^1, \theta^2)$.

Daí, se $p = 1$ e $h = a + b |\nabla \zeta * u|$, temos:

$$\nabla_{\theta} E(\theta, u) = -\nabla \left[a + b |\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right] - \alpha (\nabla u \chi_{\Omega} + \nabla u_0 \chi_B). \quad (3.29)$$

Consideremos

$$m(\theta, u) = (a + b |\nabla \zeta * u|) \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} = a \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} + b |\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|}.$$

Daí,

$$\nabla m(\theta, u) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[a \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} + b |\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right], \frac{\partial}{\partial y} \left[a \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} + b |\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right] \right).$$

Consideremos

$$\frac{\partial}{\partial x} m(\theta, u) = \frac{\partial}{\partial x} \left[a \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} + b |\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right] = a \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right] + b \frac{\partial}{\partial x} \left[|\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right]. \quad (3.30)$$

Mas,

$$\operatorname{div}(\theta) = \operatorname{div}(\theta^1, \theta^2) = \theta_x^1 + \theta_y^2$$

e

$$|\operatorname{div}(\theta)| = \sqrt{[\operatorname{div}(\theta)]^2} = \sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right] &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{div}(\theta)] |\operatorname{div}(\theta)| - \operatorname{div}(\theta) \frac{\partial}{\partial x} [|\operatorname{div}(\theta)|]}{[|\operatorname{div}(\theta)|]^2} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\theta_x^1 + \theta_y^2) \sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} - (\theta_x^1 + \theta_y^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} \right]}{\left[\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} \right]^2} \\ &= \frac{(\theta_{xx}^1 + \theta_{xy}^2) \sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} - (\theta_x^1 + \theta_y^2)^{2\frac{1}{2}} 2 \frac{(\theta_{xx}^1 + \theta_{xy}^2)}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}}{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} \\ &= \frac{(\theta_{xx}^1 + \theta_{xy}^2)(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2 - (\theta_x^1 + \theta_y^2)^2 (\theta_{xx}^1 + \theta_{xy}^2)}{[(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{0}{[(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(|\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (|\nabla \zeta * u|) \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} + |\nabla \zeta * u| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right),$$

onde

$$\nabla \zeta * u = \left(\frac{\partial}{\partial x} (\zeta * u), \frac{\partial}{\partial y} (\zeta * u) \right).$$

Logo,

$$|\nabla \zeta * u| = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} (\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(|\nabla \zeta * u|) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[2 \frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta * u) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta * u) \right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}(|\zeta * u|) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta * u) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta * u) \right]}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.33)$$

Agora, substituindo diretamente os valores de $\text{div}(\theta)$ e $|\text{div}(\theta)|$, obtemos:

$$\frac{\text{div}(\theta)}{|\text{div}(\theta)|} = \frac{\theta_x^1 + \theta_y^2}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}. \quad (3.34)$$

Assim, substituindo as expressões (3.31), (3.32), (3.33) e (3.34) em (3.30), temos

$$\frac{\partial}{\partial x}m(\theta, u) = b \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta * u) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta * u) \right]}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}.$$

De maneira análoga temos,

$$\frac{\partial}{\partial y}m(\theta, u) = \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\text{div}(\theta)}{|\text{div}(\theta)|} + b |\nabla \zeta * u| \frac{\text{div}(\theta)}{|\text{div}(\theta)|} \right) = a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\text{div}(\theta)}{|\text{div}(\theta)|} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(|\nabla \zeta * u| \frac{\text{div}(\theta)}{|\text{div}(\theta)|} \right). \quad (3.35)$$

Mas, como já visto anteriormente quando calculamos $\frac{\partial}{\partial x}m(\theta, u)$, temos:

$$\text{div}(\theta) = \text{div}(\theta^1, \theta^2) = \theta_x^1 + \theta_y^2$$

e

$$|\text{div}(\theta)| = \sqrt{[\text{div}(\theta)]^2} = \sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right] &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[\operatorname{div}(\theta)]|\operatorname{div}(\theta)| - \operatorname{div}(\theta) \frac{\partial}{\partial y}[|\operatorname{div}(\theta)|]}{[|\operatorname{div}(\theta)|]^2} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(\theta_x^1 + \theta_y^2) \sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} - (\theta_x^1 + \theta_y^2) \frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} \right]}{\left[\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} \right]^2} \\
&= \frac{(\theta_{yx}^1 + \theta_{yy}^2) \sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} - (\theta_x^1 + \theta_y^2)^2 \frac{1}{2} 2 \frac{(\theta_{yx}^1 + \theta_{yy}^2)}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}}{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2} \\
&= \frac{(\theta_{yx}^1 + \theta_{yy}^2)(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2 - (\theta_x^1 + \theta_y^2)^2(\theta_{yx}^1 + \theta_{yy}^2)}{[(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{0}{[(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right) = 0. \quad (3.36)$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(|\nabla \zeta * u| \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (|\nabla \zeta * u|) \frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} + |\nabla \zeta * u| \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{div}(\theta)}{|\operatorname{div}(\theta)|} \right),$$

onde

$$\nabla \zeta * u = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u), \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right).$$

Logo,

$$|\nabla \zeta * u| = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.37)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} (|\nabla \zeta * u|) &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[2 \frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\zeta * u) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta * u) \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y} (|\zeta * u|) = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\zeta * u) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta * u) \right]}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.38)$$

Outro termo que necessitamos é

$$\frac{\text{div}(\theta)}{|\text{div}(\theta)|} = \frac{\theta_x^1 + \theta_y^2}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}. \quad (3.39)$$

Assim, substituindo as expressões (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39) em (3.35), temos

$$\frac{\partial}{\partial y} m(\theta, u) = b \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\zeta * u) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta * u) \right]}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{\theta_x^1 + \theta_y^2}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} m(\theta, u) = b \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta * u) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta * u) \right]}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{\theta_x^1 + \theta_y^2}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} m(\theta, u) = b \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\zeta * u) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta * u) \right]}{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{\theta_x^1 + \theta_y^2}{\sqrt{(\theta_x^1 + \theta_y^2)^2}}. \quad (3.41)$$

Utilizando diferenças finitas centradas temos

$$\theta_x^1 \Big|_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\theta_{i+1,j}^1 - \theta_{i-1,j}^1 \right)$$

e

$$\theta_y^2 \Big|_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\theta_{i,j+1}^2 - \theta_{i,j-1}^2 \right).$$

Um problema que surge em relação ao cálculo de produtos de convolução é que essa teoria foi desenvolvida para funções ou sinais contínuos e infinitos, quando na prática, trabalhamos com sinais discretos e finitos. Assim, para as implementações numéricas de convoluções, devemos adaptar domínios para nossa malha discretizada de pontos principalmente no que se refere a função u e posteriormente v as quais devemos convoluir com o núcleo Gaussiano.

No trabalho apresentado em [47], Silva Jr., apresentou uma forma simples de implementar numericamente o produto de convolução, utilizando a regra de Simpson para o cálculo de integrais envolvidas no problema, isto é:

Definição 3.6. (Regra de Simpson, [17]) *Seja $f(x)$ uma função e tomemos no intervalo $[a, b]$, os pontos,*

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{1}{2}(a + b) \quad e \quad x_2 = b$$

sendo $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ valores conhecidos. Então, a regra de Simpson para aproximação da integral $\int_a^b f(x) dx$ é dada por:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \quad x_0 < \beta < x_2,$$

sendo $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ e $-\frac{\Delta x^2}{90} f^{iv}(\beta)$ é a expressão do erro cometido na aproximação.

Assim, Silva Jr. [47], encontrou a seguinte expressão para o cálculo do produto de convolução, que em nosso caso, denotamos por $(\zeta * u)_{i,j} = CV_{i,j}$, no pixel (i, j) :

$$\begin{aligned} CV_{i,j} = & \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i-1,j-1} + \zeta_{-1,1} u_{i+1,j-1} + \zeta_{1,-1} u_{i-1,j+1} + \zeta_{-1,-1} u_{i+1,j+1} + 16\zeta_{0,0} u_{i,j} \\ & + 4[\zeta_{0,1} u_{i,j-1} + \zeta_{1,0} u_{i-1,j} + \zeta_{-1,0} u_{i+1,j} + \zeta_{0,-1} u_{i,j+1}] \}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde, de (2.31) temos para cada par discretizado (i, j) :

$$\zeta_{i,j} = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{i^2 + j^2}{4t}\right),$$

sendo t o instante de tempo no processo evolutivo temporal. Mais detalhes a respeito da implementação de produtos de convolução podem ser encontrados em [4] e [47].

Então, usando novamente o método de diferenças finitas, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u)_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x}(CV_{i,j}) = \frac{1}{2}(CV_{i+1,j} - CV_{i-1,j}) = d_1; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta * u)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(CV_{i,j}) = CV_{i+1,j} - 2CV_{i,j} + CV_{i-1,j} = d_{11}; \\ \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u)_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial y}(CV_{i,j}) = \frac{1}{2}(CV_{i,j+1} - CV_{i,j-1}) = d_2; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta * u)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(CV_{i,j}) = CV_{i,j+1} - 2CV_{i,j} + CV_{i,j-1} = d_{22}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\zeta * u)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(CV_{i,j}) = \frac{1}{4}(CV_{i+1,j+1} + CV_{i-1,j-1} - CV_{i-1,j+1} - CV_{i+1,j-1}) \\ &= d_{12}; \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(\zeta * u)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(CV_{i,j}) = \frac{1}{4}(CV_{i+1,j+1} + CV_{i-1,j-1} - CV_{i-1,j+1} - CV_{i+1,j-1}) \\ &= d_{21}. \end{aligned}$$

Usando a definição (3.42) obtemos:

$$\begin{aligned} CV_{i+1,j} = & \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i,j-1} + \zeta_{-1,1} u_{i+2,j-1} + \zeta_{1,-1} u_{i,j+1} + \zeta_{-1,-1} u_{i+2,j+1} + 16\zeta_{0,0} u_{i+1,j} \\ & + 4[\zeta_{0,1} u_{i+1,j-1} + \zeta_{1,0} u_{i,j} + \zeta_{-1,0} u_{i+2,j} + \zeta_{0,-1} u_{i+1,j+1}] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CV_{i-1,j} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i-2,j-1} + \zeta_{-1,1} u_{i,j-1} + \zeta_{1,-1} u_{i-2,j+1} + \zeta_{-1,-1} u_{i,j+1} + 16\zeta_{0,0} u_{i-1,j} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i-1,j-1} + \zeta_{1,0} u_{i-2,j} + \zeta_{-1,0} u_{i,j} + \zeta_{0,-1} u_{i-1,j+1}] \}; \\
CV_{i,j+1} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i-1,j} + \zeta_{-1,1} u_{i+1,j} + \zeta_{1,-1} u_{i-1,j+2} + \zeta_{-1,-1} u_{i+1,j+2} + 16\zeta_{0,0} u_{i,j+1} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i,j} + \zeta_{1,0} u_{i-1,j+1} + \zeta_{-1,0} u_{i+1,j+1} + \zeta_{0,-1} u_{i,j+2}] \}; \\
CV_{i,j-1} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i-1,j-2} + \zeta_{-1,1} u_{i+1,j-2} + \zeta_{1,-1} u_{i-1,j} + \zeta_{-1,-1} u_{i+1,j} + 16\zeta_{0,0} u_{i,j-1} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i,j-2} + \zeta_{1,0} u_{i-1,j-1} + \zeta_{-1,0} u_{i+1,j-1} + \zeta_{0,-1} u_{i,j}] \}; \\
CV_{i+1,j+1} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i,j} + \zeta_{-1,1} u_{i+2,j} + \zeta_{1,-1} u_{i,j+2} + \zeta_{-1,-1} u_{i+2,j+2} + 16\zeta_{0,0} u_{i+1,j+1} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i+1,j} + \zeta_{1,0} u_{i,j+1} + \zeta_{-1,0} u_{i+2,j+1} + \zeta_{0,-1} u_{i+1,j+2}] \}; \\
CV_{i-1,j-1} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i-2,j-2} + \zeta_{-1,1} u_{i,j-2} + \zeta_{1,-1} u_{i-2,j} + \zeta_{-1,-1} u_{i,j} + 16\zeta_{0,0} u_{i-1,j-1} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i-1,j-2} + \zeta_{1,0} u_{i-2,j-1} + \zeta_{-1,0} u_{i,j-1} + \zeta_{0,-1} u_{i-1,j}] \}; \\
CV_{i-1,j+1} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i-2,j} + \zeta_{-1,1} u_{i,j} + \zeta_{1,-1} u_{i-2,j+2} + \zeta_{-1,-1} u_{i,j+2} + 16\zeta_{0,0} u_{i-1,j+1} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i-1,j} + \zeta_{1,0} u_{i-2,j+1} + \zeta_{-1,0} u_{i,j+1} + \zeta_{0,-1} u_{i-1,j+2}] \}; \\
CV_{i+1,j-1} &= \frac{1}{36} \{ \zeta_{1,1} u_{i,j-2} + \zeta_{-1,1} u_{i+2,j-2} + \zeta_{1,-1} u_{i,j} + \zeta_{-1,-1} u_{i+2,j} + 16\zeta_{0,0} u_{i+1,j-1} \\
&\quad + 4[\zeta_{0,1} u_{i+1,j-2} + \zeta_{1,0} u_{i,j-1} + \zeta_{-1,0} u_{i+2,j-1} + \zeta_{0,-1} u_{i+1,j}] \}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla_{\theta} E(\theta, u) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} m(\theta, u), -\frac{\partial}{\partial y} m(\theta, u) \right) - \alpha (\nabla u \chi_{\Omega} + \nabla u \chi_B)$$

onde,

$$u \chi_{\Omega} = \begin{cases} u & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad \text{e} \quad u^0 \chi_B = \begin{cases} u^0 & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Logo,

$$\nabla u \chi_{\Omega} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (u \chi_{\Omega}), \frac{\partial}{\partial y} (u \chi_{\Omega}) \right) \quad \text{e} \quad \nabla u \chi_B = \left(\frac{\partial}{\partial x} (u \chi_B), \frac{\partial}{\partial y} (u \chi_B) \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta E(\theta, u) &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} m(\theta, u), -\frac{\partial}{\partial y} m(\theta, u) \right) - \alpha (\nabla u \chi_\Omega + \nabla u \chi_B) \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial x} m(\theta, u), -\frac{\partial}{\partial y} m(\theta, u) \right) - \alpha \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (u \chi_\Omega), \frac{\partial}{\partial y} (u \chi_\Omega) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^0 \chi_B), \frac{\partial}{\partial y} (u^0 \chi_B) \right) \right] \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial x} m(\theta, u) - \alpha \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \chi_\Omega) + \frac{\partial}{\partial x} (u^0 \chi_B) \right], -\frac{\partial}{\partial y} m(\theta, u) \right. \\
&\quad \left. - \alpha \left[\frac{\partial}{\partial y} (u \chi_\Omega) + \frac{\partial}{\partial y} (u^0 \chi_B) \right] \right), \tag{3.43}
\end{aligned}$$

onde usando diferenças finitas centradas, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} (u \chi_\Omega) \Big|_{i,j} &= \frac{1}{2} (u \chi_\Omega \Big|_{i+1,j} - u \chi_\Omega \Big|_{i-1,j}); \\
\frac{\partial}{\partial y} (u \chi_\Omega) \Big|_{i,j} &= \frac{1}{2} (u \chi_\Omega \Big|_{i,j+1} - u \chi_\Omega \Big|_{i,j-1}); \\
\frac{\partial}{\partial x} (u^0 \chi_B) \Big|_{i,j} &= \frac{1}{2} (u^0 \chi_B \Big|_{i+1,j} - u^0 \chi_B \Big|_{i-1,j}); \\
\frac{\partial}{\partial y} (u^0 \chi_B) \Big|_{i,j} &= \frac{1}{2} (u^0 \chi_B \Big|_{i,j+1} - u^0 \chi_B \Big|_{i,j-1}).
\end{aligned}$$

Portanto, a equação evolucionária é dada por:

$$\theta_t = \nabla_\theta E(\theta, u) \Rightarrow \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} = \nabla_\theta E(\theta, u) \Rightarrow \theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \nabla_\theta E(\theta, u)$$

Daí, para cada pixel (i, j) em $\tilde{\Omega}$, com $\theta = (\theta^1, \theta^2) = (\theta_1, \theta_2)$ e de (3.43), temos

$$\theta_1^{n+1} \Big|_{i,j} = \theta_1^n \Big|_{i,j} + \Delta t \left(-\frac{\partial}{\partial x} (m(\theta, u) \Big|_{i,j}) - \alpha \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \chi_\Omega \Big|_{i,j}) + \frac{\partial}{\partial x} (u^0 \chi_B \Big|_{i,j}) \right] \right) \tag{3.44}$$

e

$$\theta_2^{n+1} \Big|_{i,j} = \theta_2^n \Big|_{i,j} + \Delta t \left(-\frac{\partial}{\partial y} (m(\theta, u) \Big|_{i,j}) - \alpha \left[\frac{\partial}{\partial y} (u \chi_\Omega \Big|_{i,j}) + \frac{\partial}{\partial y} (u^0 \chi_B \Big|_{i,j}) \right] \right) \tag{3.45}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\theta_1^n n_1 \Big|_{\partial \tilde{\Omega}} = \theta_1^{n+1} n_1 \Big|_{\partial \tilde{\Omega}} \quad \text{e} \quad \theta_2^n n_2 \Big|_{\partial \tilde{\Omega}} = \theta_2^{n+1} n_2 \Big|_{\partial \tilde{\Omega}}$$

Partimos agora para a discretização do termo (2.39).

Temos que,

$$\nabla_u E(\theta, u) = -\text{div} \left[\zeta * \left(g \vec{P} \right) \right] - \alpha \text{div}(\vec{n}) + \alpha \text{div}(\theta) = 0$$

onde $\theta = (\theta^1, \theta^2)$, $\vec{n} = (n^1, n^2) = (\frac{u_x}{|\nabla u|}, \frac{u_y}{|\nabla u|})$ e

$$\vec{P} = (p^1, p^2) = \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u)}{|\nabla \zeta * u|}, \frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u)}{|\nabla \zeta * u|} \right),$$

sendo

$$\nabla \zeta * u = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u), \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right),$$

implicando que

$$|\nabla \zeta * u| = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x}(\zeta * u) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}(\zeta * u) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Daí, considerando-se $Y = (Y^1, Y^2) = \zeta * (g\vec{P})$ temos

$$Y^1 = \zeta * (gp^1) = \zeta * v^1$$

e

$$Y^2 = \zeta * (gp^2) = \zeta * v^2.$$

Logo,

$$\text{div}(Y) = \text{div}(Y^1, Y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(\zeta * v^1) + \frac{\partial}{\partial y}(\zeta * v^2).$$

Utilizando diferenças finitas, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\zeta * v^1) \Big|_{i,j} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} (CV_{i,j}^1) = \frac{1}{2} (CV_{i+1,j}^1 - CV_{i-1,j}^1) = r_1; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\zeta * v^2) \Big|_{i,j} \right] &= \frac{\partial}{\partial y} (CV_{i,j}^2) = \frac{1}{2} (CV_{i,j+1}^2 + CV_{i,j-1}^2) = r_2. \end{aligned}$$

Como feito anteriormente, definimos

$$\begin{aligned} CV_{i,j}^1 &= \frac{1}{36} \left\{ \zeta_{1,1} v_{i-1,j-1}^1 + \zeta_{-1,1} v_{i+1,j-1}^1 + \zeta_{1,-1} v_{i-1,j+1}^1 + \zeta_{-1,-1} v_{i+1,j+1}^1 + 16\zeta_{0,0} v_{i,j}^1 \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[\zeta_{0,1} v_{i,j-1}^1 + \zeta_{1,0} v_{i-1,j}^1 + \zeta_{-1,0} v_{i+1,j}^1 + \zeta_{0,-1} v_{i,j+1}^1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

e

$$\begin{aligned} CV_{i,j}^2 &= \frac{1}{36} \left\{ \zeta_{1,1} v_{i-1,j-1}^2 + \zeta_{-1,1} v_{i+1,j-1}^2 + \zeta_{1,-1} v_{i-1,j+1}^2 + \zeta_{-1,-1} v_{i+1,j+1}^2 + 16\zeta_{0,0} v_{i,j}^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[\zeta_{0,1} v_{i,j-1}^2 + \zeta_{1,0} v_{i-1,j}^2 + \zeta_{-1,0} v_{i+1,j}^2 + \zeta_{0,-1} v_{i,j+1}^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde

$$\zeta_{i,j} = \frac{1}{4\pi t} \exp \left(- \frac{i^2 + j^2}{4t} \right)$$

sendo t o instante de tempo decorrido no processo evolutivo temporal.

Daí,

$$CV_{i+1,j}^1 = \frac{1}{36} \left\{ \zeta_{1,1} v_{i,j-1}^1 + \zeta_{-1,1} v_{i+2,j-1}^1 + \zeta_{1,-1} v_{i,j+1}^1 + \zeta_{-1,-1} v_{i+2,j+1}^1 + 16\zeta_{0,0} v_{i+1,j}^1 \right. \\ \left. + 4 \left[\zeta_{0,1} v_{i+1,j-1}^1 + \zeta_{1,0} v_{i,j}^1 + \zeta_{-1,0} v_{i+2,j}^1 + \zeta_{0,-1} v_{i+1,j+1}^1 \right] \right\}$$

$$CV_{i-1,j}^1 = \frac{1}{36} \left\{ \zeta_{1,1} v_{i-2,j-1}^1 + \zeta_{-1,1} v_{i,j-1}^1 + \zeta_{1,-1} v_{i-2,j+1}^1 + \zeta_{-1,-1} v_{i,j+1}^1 + 16\zeta_{0,0} v_{i-1,j}^1 \right. \\ \left. + 4 \left[\zeta_{0,1} v_{i-1,j-1}^1 + \zeta_{1,0} v_{i-2,j}^1 + \zeta_{-1,0} v_{i,j}^1 + \zeta_{0,-1} v_{i-1,j+1}^1 \right] \right\}$$

$$CV_{i,j+1}^2 = \frac{1}{36} \left\{ \zeta_{1,1} v_{i-1,j}^2 + \zeta_{-1,1} v_{i+1,j}^2 + \zeta_{1,-1} v_{i-1,j+2}^2 + \zeta_{-1,-1} v_{i+1,j+2}^2 + 16\zeta_{0,0} v_{i,j+1}^2 \right. \\ \left. + 4 \left[\zeta_{0,1} v_{i,j}^2 + \zeta_{1,0} v_{i-1,j+1}^2 + \zeta_{-1,0} v_{i+1,j+1}^2 + \zeta_{0,-1} v_{i,j+2}^2 \right] \right\}$$

$$CV_{i,j-1}^2 = \frac{1}{36} \left\{ \zeta_{1,1} v_{i-1,j-2}^2 + \zeta_{-1,1} v_{i+1,j-2}^2 + \zeta_{1,-1} v_{i-1,j}^2 + \zeta_{-1,-1} v_{i+1,j}^2 + 16\zeta_{0,0} v_{i,j-1}^2 \right. \\ \left. + 4 \left[\zeta_{0,1} v_{i,j-2}^2 + \zeta_{1,0} v_{i-1,j-1}^2 + \zeta_{-1,0} v_{i+1,j-1}^2 + \zeta_{0,-1} v_{i,j}^2 \right] \right\}$$

Assim, como $g = b|\text{div}(\theta)|$ temos

$$v^1(\theta, u) = b \left(\theta_x^1 + \theta_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_1}{(d_1^2 + d_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$v^2(\theta, u) = b \left(\theta_x^1 + \theta_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_2}{(d_1^2 + d_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Por outro lado, como já visto anteriormente,

$$\text{div}(\vec{n}) = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}, .$$

Portanto,

$$\nabla_u E(\theta, u) = -r_1 - r_2 - \alpha \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} + \alpha(\theta_x^1 + \theta_y^2), . \quad (3.48)$$

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_u E(\theta, u) \Rightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \nabla_u E(\theta, u) \Rightarrow u^{n+1} = u^n + \Delta t \nabla_u E(\theta, u).$$

Então para cada pixel (i, j) em Ω , temos

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left(\nabla_u E(\theta, u) \Big|_{i,j} \right), \quad (3.49)$$

onde $\nabla_u E(\theta, u) = (3.48)$ e com a seguinte condição de contorno

$$u^n \Big|_{\partial\Omega} = u^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} .$$

Portanto, o problema resume-se em implementar as equações (3.44), (3.45) e (3.49), com respectivas condições de contorno. Observamos que essa implementação apresentou resultados bastante satisfatórios, comparáveis aos apresentados pela discretização implícita proposta pelos autores.

3.9 Implementação Numérica do Modelo de Retoque CS

De maneira praticamente análoga a desenvolvida para o Modelo Elástico CKS, nesta seção, apresentamos um esquema explícito no tempo para o modelo apresentado por Chan e Shen [15]. Assim, a representação dos pixels utilizados na implementação é a mesma apresentada pelo modelo Elástico CKS, que por sua vez é representada como mostrado na Figura 3.4. Consideremos assim a equação (2.43)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\vec{W}) , \quad (3.50)$$

onde $\vec{W}$ é dado por

$$\vec{W} = (f(k, \sigma) \vec{n} + a\sigma \vec{t}) .$$

Considerando-se a representação de pixels (i, j) de uma imagem digital, e discretizando explicitamente por Euler a equação (3.50), temos

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t F(u_{i,j}^n) ,$$

onde $F(u_{i,j}^n) = \text{div}(\vec{W}_{i,j}^n)$.

O fator de aceleração $|\nabla u_{i,j}^n|$, que foi útil na discretização do Modelo Elástico CKS, será novamente utilizado e é aproximado usando diferenças centradas, da seguinte forma:

$$|\nabla u_{i,j}| = \frac{1}{2} \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2} .$$

Daí, estamos considerando a seguinte equação modificada

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t (|\nabla u_{i,j}| F(u_{i,j}^n))$$

onde $F(u_{i,j}^n) = \text{div}(\vec{W}_{i,j}^n)$.

Apresentamos agora a discretização do termo $F(u_{i,j}) = \text{div}(\vec{W}_{i,j})$, visto que no trabalho apresentado em [15] nenhuma forma de discretização foi abordada.

Consideremos:

$$f(k, \sigma) = a + bk^2, \quad \sigma = \frac{\partial(\ln|\nabla u|)}{\partial \vec{t}}, \quad k = \nabla \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

$$\vec{W} = (W^1, W^2), \quad \vec{n} = (n^1, n^2) = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}, \frac{u_y}{|\nabla u|} \right) \quad \text{e} \quad \vec{t} = (t^1, t^2) = \left(-\frac{u_y}{|\nabla u|}, \frac{u_x}{|\nabla u|} \right)$$

Então,

$$\begin{aligned} W^1 &= (a + bk^2)n^1 + a \frac{\partial(\ln|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} t^1 \\ &= (a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} + a(t^1 \frac{\partial}{\partial x} \ln|\nabla u| + t^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln|\nabla u|) t^1 \\ &= (a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} - \frac{a}{|\nabla u|^2} (-u_y \frac{\partial}{\partial x} \ln|\nabla u| + u_x \frac{\partial}{\partial y} \ln|\nabla u|) u_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W^2 &= (a + bk^2)n^2 + a \frac{\partial(\ln|\nabla u|)}{\partial \vec{t}} t^2 \\ &= (a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} + a(t^1 \frac{\partial}{\partial x} \ln|\nabla u| - t^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln|\nabla u|) t^2 \\ &= (a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} + \frac{a}{|\nabla u|^2} (-u_y \frac{\partial}{\partial x} \ln|\nabla u| + u_x \frac{\partial}{\partial y} \ln|\nabla u|) u_x. \end{aligned}$$

Portanto, o valor final da função $F(u_{i,j})$ é dado por:

$$F(u_{i,j}) = \text{div}(\vec{W}_{i,j}) = W_x^1 \Big|_{i,j} + W_y^2 \Big|_{i,j} = \left[W_{i+\frac{1}{2},j}^1 - W_{i-\frac{1}{2},j}^1 \right] + \left[W_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - W_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \right].$$

Vamos agora calcular os valores dos W 's, utilizando diferenças centradas quando necessário.

Temos que,

$$\text{i)} W_{i+\frac{1}{2},j}^1 = \left[(a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} - \frac{a}{|\nabla u|^2} (-u_y \frac{\partial}{\partial x} \ln(|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} \ln(|\nabla u|)) u_y \right]_{i+\frac{1}{2},j},$$

onde

$$\begin{aligned} k_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{minmod}(k_{i+1,j}, k_{i,j}); \\ u_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= u_{i+1,j} - u_{i,j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \ln(|\nabla u_{i+1,j}|) - \ln(|\nabla u_{i,j}|); \\
u_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right]; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i+1,j+1}|) - \ln(|\nabla u_{i+1,j-1}|)), \frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i,j+1}|) \right. \\
&\quad \left. - \ln(|\nabla u_{i,j-1}|)) \right].
\end{aligned}$$

$$\text{ii) } W_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \left[(a + bk^2) \frac{u_x}{|\nabla u|} - \frac{a}{|\nabla u|^2} (-u_y \frac{\partial}{\partial x} \ln(|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} \ln(|\nabla u|)) u_y \right]_{i-\frac{1}{2},j},$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{minmod}(k_{i-1,j}, k_{i,j}); \\
u_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= u_{i,j} - u_{i-1,j}; \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= \ln(|\nabla u_{i,j}|) - \ln(|\nabla u_{i-1,j}|); \\
u_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}), \frac{1}{2}(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) \right]; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i-\frac{1}{2},j} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i,j+1}|) - \ln(|\nabla u_{i,j-1}|)), \frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i-1,j+1}|) \right. \\
&\quad \left. - \ln(|\nabla u_{i-1,j-1}|)) \right].
\end{aligned}$$

$$\text{iii) } W_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = \left[(a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} + \frac{a}{|\nabla u|^2} (-u_y \frac{\partial}{\partial x} \ln(|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} \ln(|\nabla u|)) u_x \right]_{i,j+\frac{1}{2}},$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod}(k_{i,j+1}, k_{i,j}); \\
u_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= u_{i,j+1} - u_{i,j}; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \ln(|\nabla u_{i,j+1}|) - \ln(|\nabla u_{i,j}|); \\
u_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right]; \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i+1,j+1}|) - \ln(|\nabla u_{i-1,j+1}|)), \frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i+1,j}|) \right. \\
&\quad \left. - \ln(|\nabla u_{i-1,j}|)) \right].
\end{aligned}$$

$$\text{iv)} W_{i,j-\frac{1}{2}}^2 = \left[(a + bk^2) \frac{u_y}{|\nabla u|} + \frac{a}{|\nabla u|^2} \left(-u_y \frac{\partial}{\partial x} \ln(|\nabla u|) + u_x \frac{\partial}{\partial y} \ln(|\nabla u|) \right) u_x \right]_{i-\frac{1}{2},j},$$

onde

$$\begin{aligned} k_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod}(k_{i,j}, k_{i,j-1}); \\ u_y \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= u_{i,j} - u_{i,j-1}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \ln(|\nabla u_{i,j}|) - \ln(|\nabla u_{i,j-1}|); \\ u_x \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \frac{1}{2}(u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}) \right]; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln(|\nabla u|) \right] \Big|_{i,j-\frac{1}{2}} &= \text{minmod} \left[\frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i+1,j}|) - \ln(|\nabla u_{i-1,j}|)), \frac{1}{2}(\ln(|\nabla u_{i+1,j-1}|) \right. \\ &\quad \left. - \ln(|\nabla u_{i-1,j-1}|)) \right]. \end{aligned}$$

De modo análogo ao feito com relação ao Modelo Elástico CKS, fazendo-se as devidas substituições dos termos encontrados em i), ii), iii) e iv) na equação discretizada abaixo, tornando possível a implementação numérica do modelo.

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left\{ |\nabla u_{i,j}^n| \left[\left(W_{i+\frac{1}{2},j}^1 - W_{i-\frac{1}{2},j}^1 \right) + \left(W_{i,j+\frac{1}{2}}^2 - W_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \right) \right] \right\}.$$

3.10 Considerações Finais

Neste Capítulo, apresentamos vários aspectos importantes referentes as implementações numéricas dos modelos matemáticos para Retoque Digital de Imagens. No Capítulo seguinte, aplicamos esses métodos a algumas imagens testes de vários níveis de complexidade.

Capítulo 4

Resultados Experimentais

Neste capítulo apresentamos alguns resultados obtidos com a aplicação dos modelos descritos nos capítulos anteriores para algumas imagens teste, com diversos níveis de complexidade. As imagens utilizadas são geralmente representadas por matrizes de dimensões 256×256 , onde cada elemento $u_{i,j}$ é um valor real correspondente a uma tonalidade de cinza da imagem $u(x, y)$, no ponto $x = x_i = i\Delta x$ e $y = y_j = j\Delta y$.

Antes de apresentarmos os resultados obtidos utilizando diferentes figuras, faremos algumas considerações. Os parâmetros, que aparecem em cada modelo foram escolhidos de forma a produzir os melhores resultados, já que não há parâmetros pré-definidos na literatura. Vale ressaltar que a escolha dessas constantes não é trivial e que devido ao fato de nenhum dos autores comentar sobre o assunto, somente após diversos testes efetuados, adotamos os seguintes parâmetros e passos de difusão, para cada modelo.

No Modelo BSCB adotamos 2 iterações de difusão a cada 15 do método.

No Modelo TV o próprio método já é baseado em difusão.

No Modelo CDD adotamos 1 iteração de difusão a cada 1 do método.

No Modelo Elástico CKS adotamos os seguintes valores $a = 0.001$, $b = 20 \times a$ e 15 iterações de difusão a cada 1 do método.

Para o Modelo BBCSV tomamos os seguintes valores $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$ e 2 iterações de difusão a cada 1 do método.

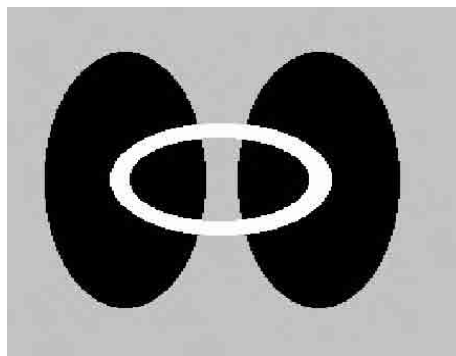
No Modelo CS adotamos os seguintes valores $a = 0.01$, $b = 20 \times a$ e 1 iteração de difusão a cada 1 do método.

Para a visualização das imagens, usamos o "software" MATLAB, onde, além da manipulação das imagens, também foram utilizadas algumas rotinas dentre as quais: conversão de imagens,

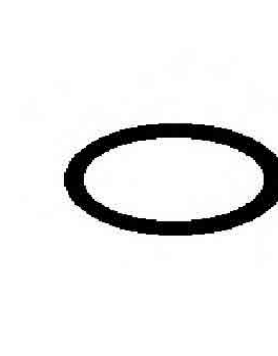
em formatos, quaisquer, para a extensão .dat e plote de gráficos referentes a linhas da imagem e as imagens.

Vale ressaltar também que todos os modelos foram implementados em linguagem C++, utilizando o compilador DEV-C++ e que todos os experimentos foram realizados utilizando-se uma máquina Pentium 4, com 1 GB de memória DDR, 3,06 MHz de velocidade e utilizando-se o sistema operacional Windows.

Nosso primeiro experimento Figura 4.1 trata-se de uma figura geométrica, onde estão representados dois discos pretos obstruídos por um anel branco sobre um fundo cinza. Neste caso, estamos interessados em retocar a imagem eliminando o anel branco. A seguir temos a figura original, a máscara e o retoque efetuado por cada um dos modelos estudados.

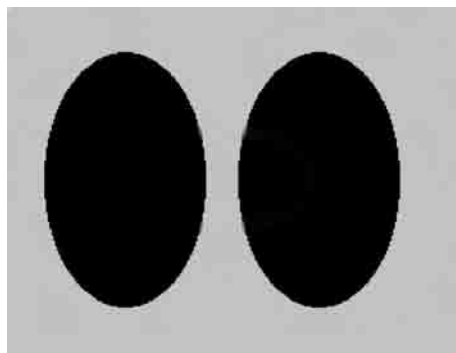


(a)

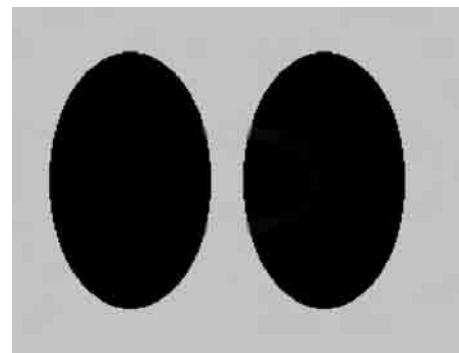


(b)

Figura 4.1: (a) Imagem original e (b) Máscara.

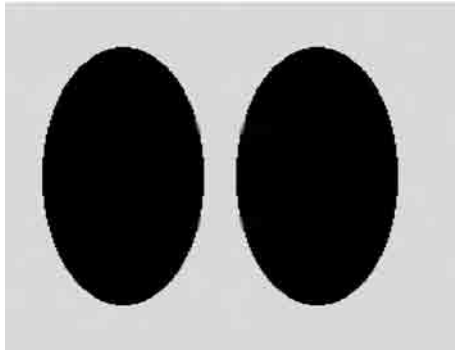


(c)

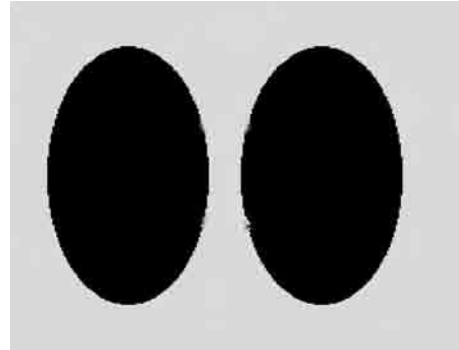


(d)

Figura 4.1: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.

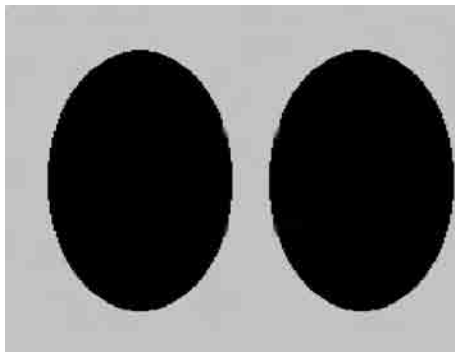


(e)

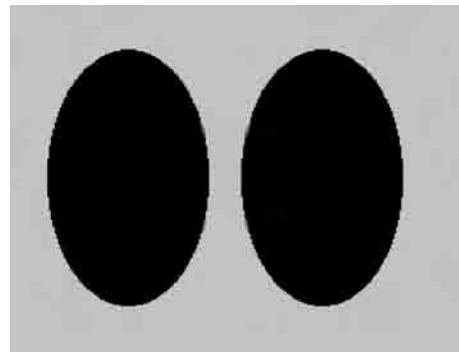


(f)

Figura 4.1: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



(g)



(h)

Figura 4.1: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.1, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos que todos os modelos apresentaram retoque satisfatório. Para esta imagem teste, utilizamos $\Delta t = 0.2$ e as performances apresentamos a seguir.

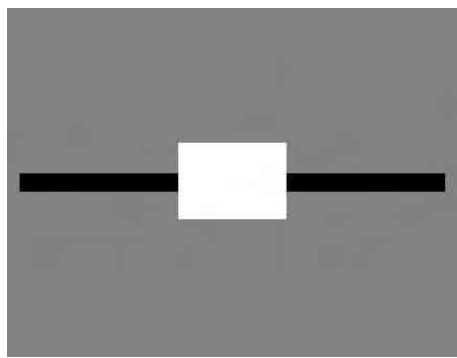
Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	16000	90
TV	2500	7
CDD	2000	35
Elástico CKS	250	11
BBCSV	1100	66
CS	450	21

Tabela 4.1: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.1.

Para esta imagem teste, o modelo Elástico CKS apresentou pequenas falhas no preenchimento dos discos. Os menores tempos foram obtidos com os modelos TV e CS.

Nossos dois experimentos seguintes estaremos explorando as diferentes maneiras de retoque, utilizando-se os modelos considerados neste trabalho, quando aplicados a uma imagem de mesma estrutura, porém com cores de fundo e níveis de cinza dos objetos diferentes.

O exemplo a seguir, trata-se de uma figura geométrica, onde estão representados uma barra escura obstruída por um retângulo branco sobre um fundo cinza. Neste caso, estamos interessados em retocar a imagem eliminando o retângulo branco. A seguir temos a figura original, a máscara e o retoque efetuado por cada um dos modelos estudados.

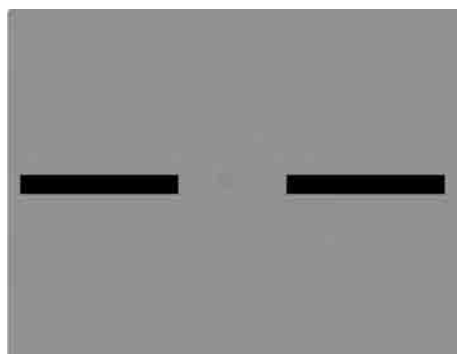


(a)

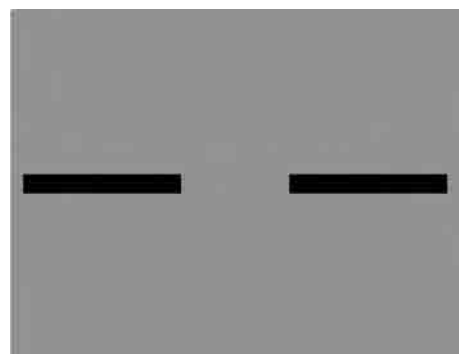


(b)

Figura 4.2: (a) Imagem original e (b) Máscara.



(c)



(d)

Figura 4.2: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.

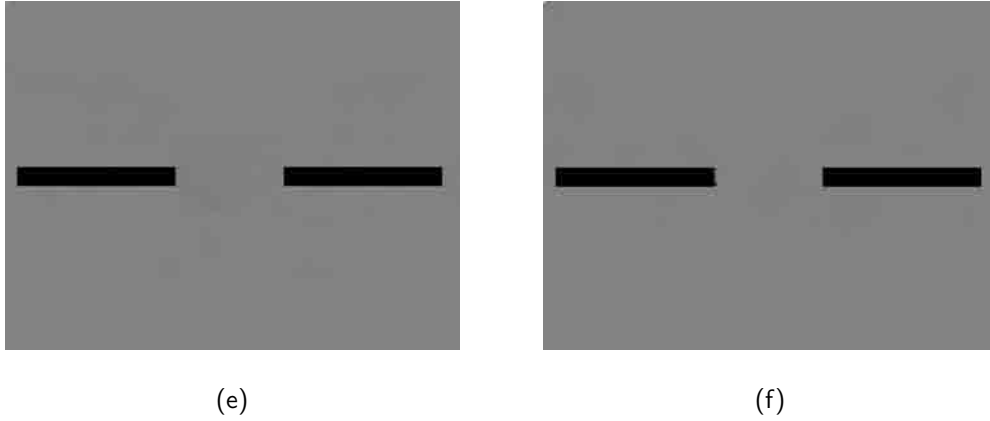


Figura 4.2: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.

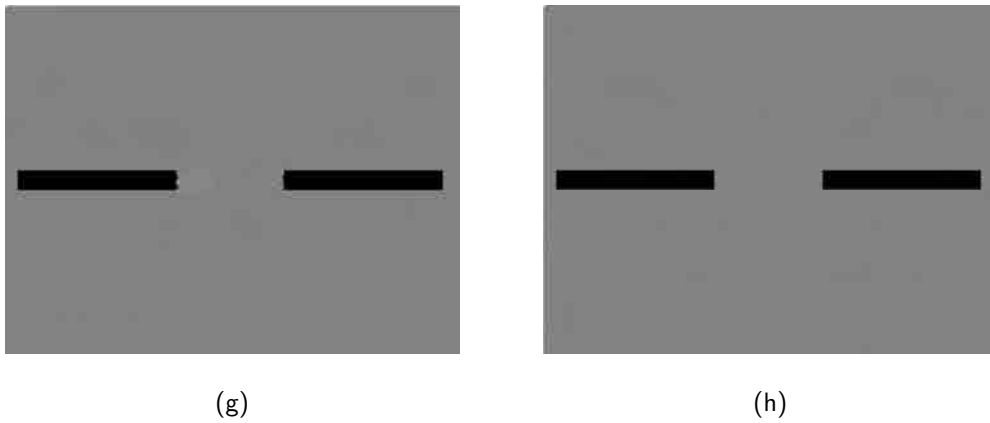


Figura 4.2: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.2, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos, que todos os modelos apresentaram retoque muito bom, eliminando o quadrado branco, o qual foi preenchido pela cor do fundo, porém o princípio da conectividade não foi satisfeito com a aplicação de nenhum modelo. Neste caso, utilizamos $\Delta t = 0.4$. As performances de cada método são apresentadas na seguinte tabela.

Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	25000	120
TV	4000	10
CDD	1200	23
Elástico CKS	100	5
BBCSV	500	27
CS	210	10

Tabela 4.2: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.2.

Podemos, então, concluir que para esta imagem teste, baseados no tempo computacional, que os melhores resultados foram obtidos aplicando-se os modelos TV, Elástico CKS e CS.

Dando continuidade aos experimentos, apresentamos a Figura 4.3 que trata-se de uma figura geométrica, mostrada na Figura 4.2, porém com diferentes tonalidades de cinza e o fundo passou agora a ser preto. Neste caso, estamos interessados em retocar a imagem eliminando o retângulo branco. A seguir temos a figura original, a máscara e o retoque efetuado por cada um dos modelos estudados.

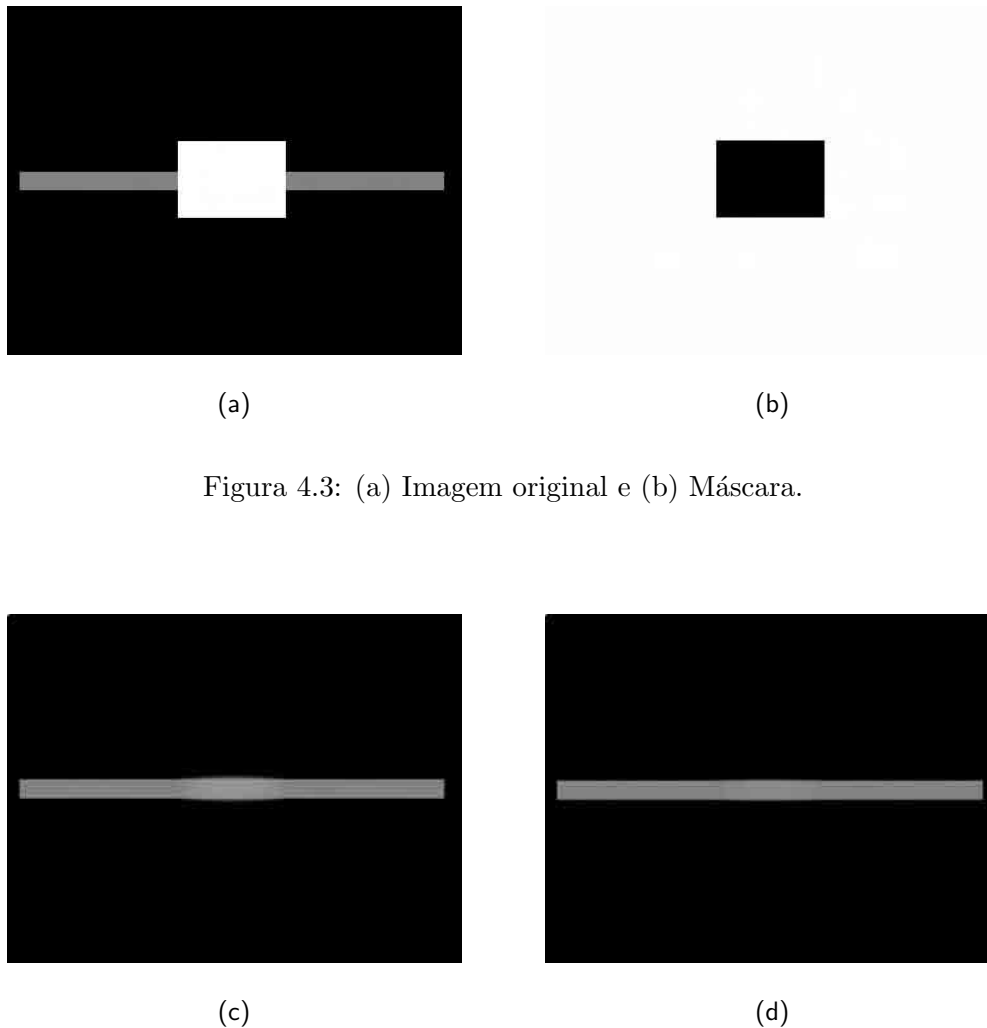


Figura 4.3: (a) Imagem original e (b) Máscara.

Figura 4.3: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.



Figura 4.3: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



Figura 4.3: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.3, percebemos através dos resultados experimentais obtidos, que todos os modelos apresentaram retoque satisfatório, eliminando o retângulo branco. Podemos perceber também que o princípio da conectividade foi satisfeito, pois as duas barras cinza foram conectadas. Mas vale notar que na Figura 4.3 (c) a conexão efetuada não foi tão reta quanto nos outros resultados. Neste teste, utilizamos $\Delta t = 0.4$. As performances de cada método são apresentadas a seguir.

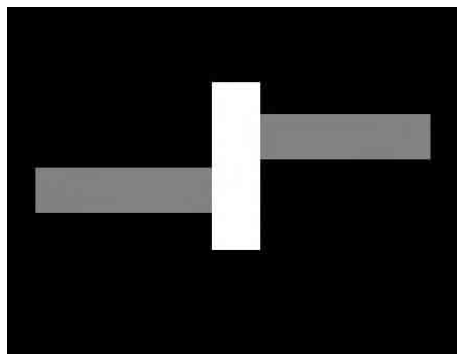
Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	40000	213
TV	4500	11
CDD	3000	58
Elástico CKS	230	10
BBCSV	1500	90
CS	600	29

Tabela 4.3: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.3.

Concluimos, neste caso, baseados no tempo computacional, que os melhores resultados foram obtidos aplicando-se os modelos TV e Elástico CKS.

Percebemos através dos resultados obtidos referentes as Figuras 4.2 e 4.3 que o retoque realizado pelos modelos estudados é dependente dos tons de cinza que compõe a imagem, fazendo com que resultados diferentes possam ocorrer. Assim o Princípio da Conectividade pode ou não ser satisfeito dependendo das cores que compõem a imagem. Essa dificuldade foi mencionada anteriormente no Capítulo 1, quando apresentamos o problema da dualidade figura-fundo no exemplo referente a Figura 1.3.

A Figura 4.4, refere-se também a uma figura geométrica, onde estão representadas duas barras cinzas, sendo que uma esta um pouco a frente e a acima da outra, obstruídas por um retângulo branco sobre um fundo preto. Estamos interessados em retocar a imagem eliminando o retângulo branco e com base nos tons de cinza que compõe a imagem, esperamos que os princípios da conectividade e da boa continuação sejam satisfeitos.



(a)



(b)

Figura 4.4: (a) Imagem original e (b) Máscara.

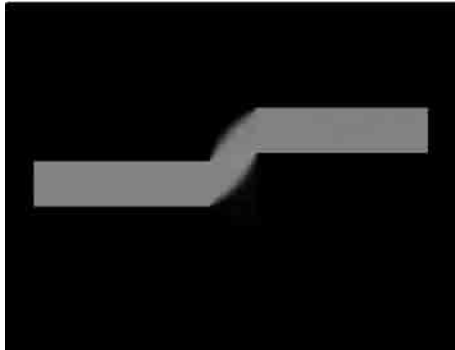


(c)

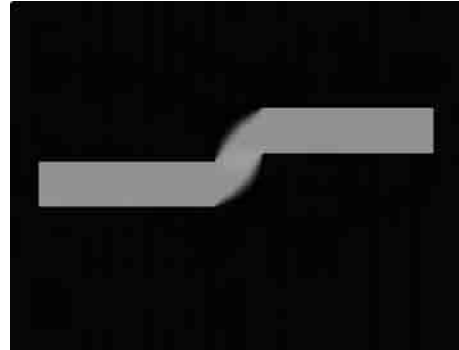


(d)

Figura 4.4: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.



(e)



(f)

Figura 4.4: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



(g)



(h)

Figura 4.4: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

Neste caso, observamos através dos resultados experimentais obtidos que todos os modelos apresentaram retoque satisfatório, eliminando o retângulo branco. Observamos que o princípio da conectividade foi satisfeito pois as duas barras cinza foram conectadas. Notamos que todos os modelos apresentaram uma continuação suave satisfazendo assim o Princípio da Boa continuação. Utilizamos $\Delta t = 0.4$. As performances são dadas na tabela abaixo.

Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	19000	94
TV	1800	5
CDD	1000	19
Elástico CKS	90	5
BBCSV	500	30
CS	200	9

Tabela 4.4: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.4.

Dando continuidade aos exemplos que tratam de figuras geométricas, o quinto exemplo, Figura 4.5, trata-se de uma barra diagonal constituída de tons de cinza, obstruída por retângulos em pretos e triângulos em branco sobre um fundo branco. Neste caso, estamos interessados em retocar a imagem eliminando as fendas e os objetos que obstruem a barra diagonal, esperando que o princípio da conectividade seja satisfeito em determinados momentos, bem como o princípio da boa continuação. A seguir temos a figura original, a máscara e o retoque efetuado por cada um dos modelos estudados.

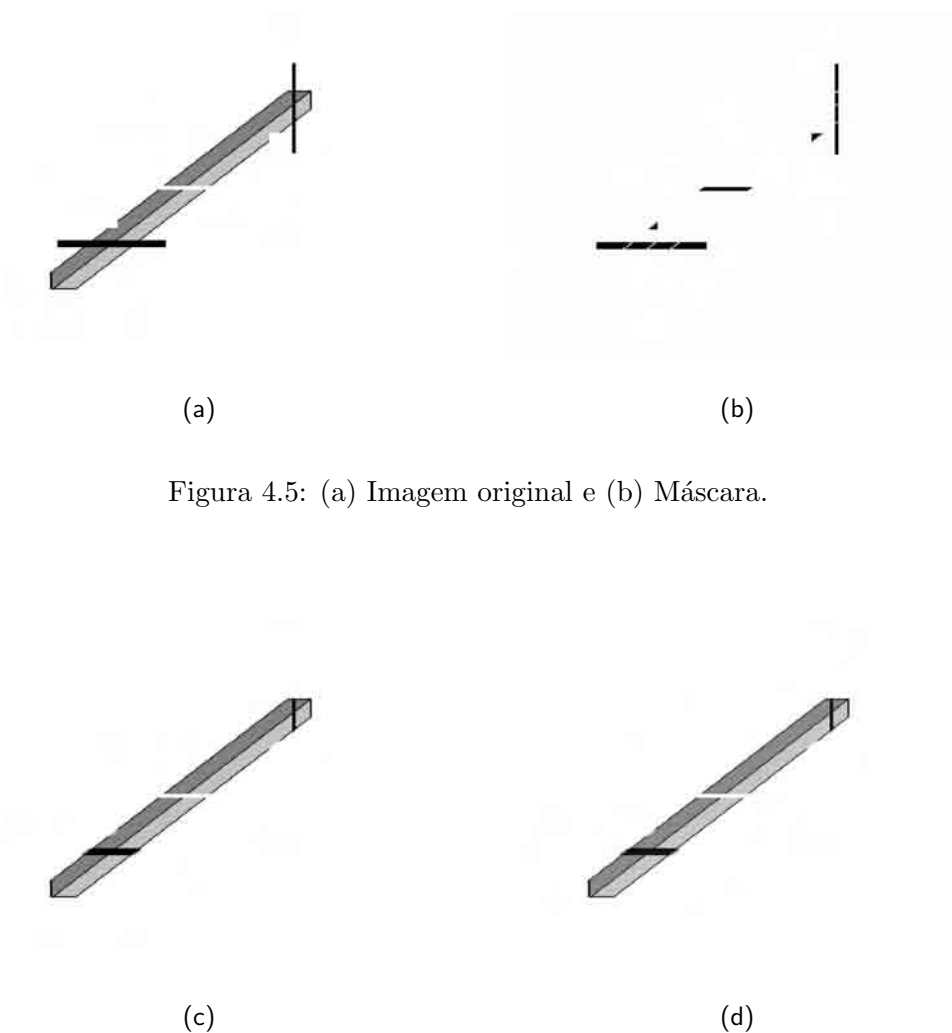


Figura 4.5: (a) Imagem original e (b) Máscara.

Figura 4.5: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.

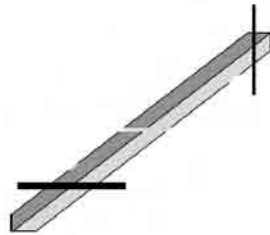


(e)

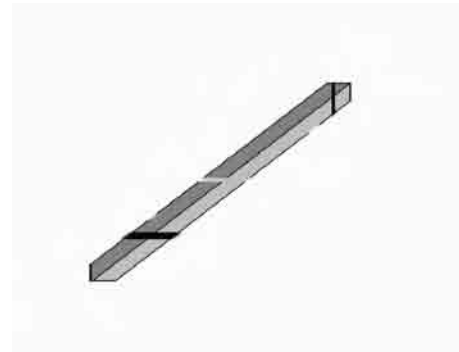


(f)

Figura 4.5: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



(g)



(h)

Figura 4.5: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

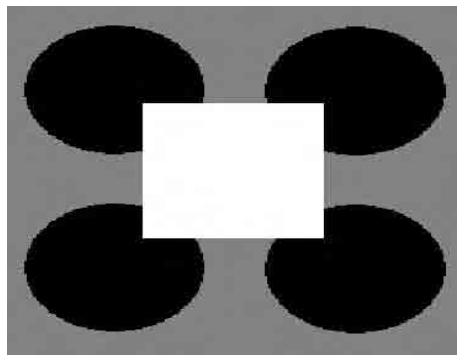
No caso da Figura 4.5, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos que todos os modelos não apresentaram retoque visualmente satisfatório, todos preencheram os triângulos brancos, porém alguns retocaram parcialmente ou não os retângulos pretos. Neste caso, utilizamos $\Delta t = 0.4$. As performances são apresentadas abaixo.

Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	2000	6
TV	100	1
CDD	600	5
Elástico CKS	100	2
BBCSV	300	13
CS	100	1

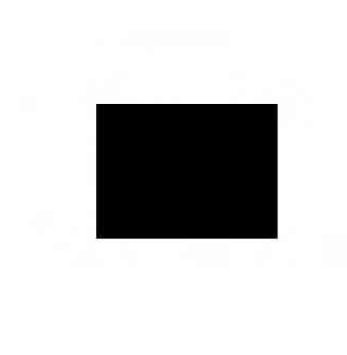
Tabela 4.5: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.5.

Neste caso, podemos então concluir que para esta imagem teste, baseados no tempo computacional e na imagem apresentada após o processamento, que o melhor resultado foi obtido aplicando-se os modelos CDD, CKS e CS.

O próximo experimento Figura 4.6 trata-se de uma figura geométrica, onde estão representados quatro discos pretos, obstruídos por um quadrado branco sobre fundo cinza. Neste caso, estamos interessados em retocar a imagem eliminando o quadrado branco. A seguir temos a figura original, a máscara e os retoques efetuados pelos diversos modelos estudados.

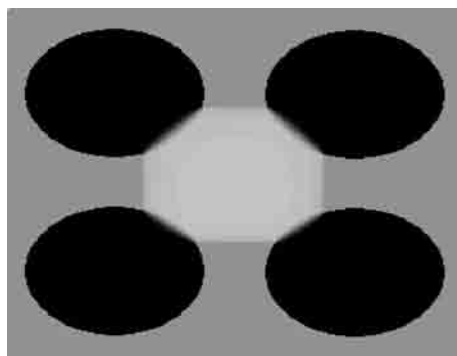


(a)

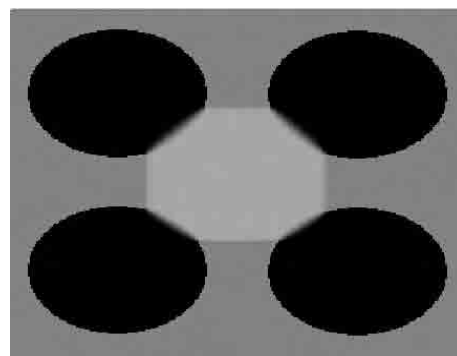


(b)

Figura 4.6: (a) Imagem original e (b) Máscara.

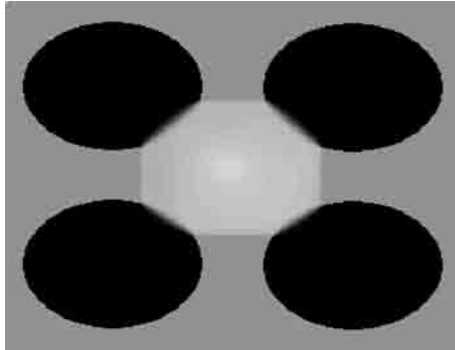


(c)

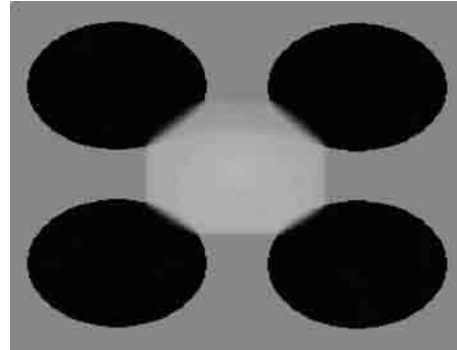


(d)

Figura 4.6: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.

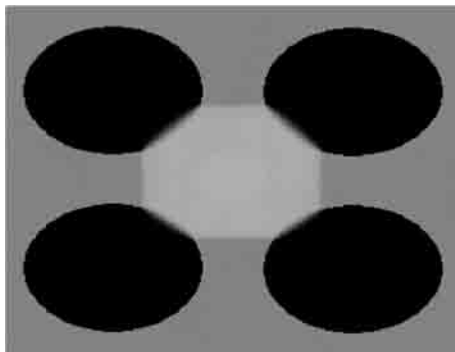


(e)

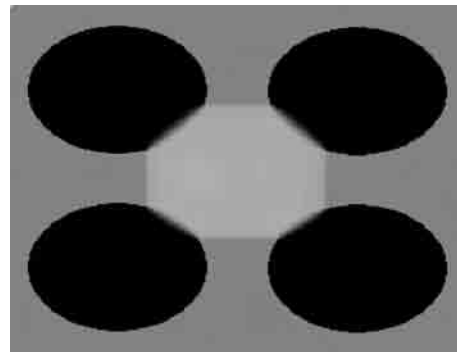


(f)

Figura 4.6: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



(g)



(h)

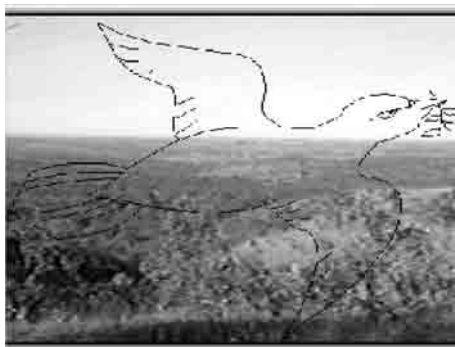
Figura 4.6: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.6, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos que todos os modelos apresentaram retoque visivelmente satisfatório, pois mesmo sendo a máscara de retoque muito grande, obtivemos bons resultados. Para esta imagem teste, utilizamos $\Delta t = 0.4$. Agora quanto a performance, temos a seguinte tabela.

Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	55000	511
TV	5000	14
CDD	4000	118
Elástico CKS	450	50
BBCSV	1500	168
CS	600	79

Tabela 4.6: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.6.

Apresentamos a seguir a Figura 4.7, que refere-se a uma figura real, neste caso uma paisagem com o desenho de um pássaro sobreposto. O objetivo é tratar a imagem, retirando-se o desenho do pássaro. A seguir temos a figura original, a máscara, bem como os resultados obtidos pelos modelos estudados.



(a)



(b)

Figura 4.7: (a) Imagem original e (b) Máscara.



(c)



(d)

Figura 4.7: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.



(e)



(f)

Figura 4.7: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.

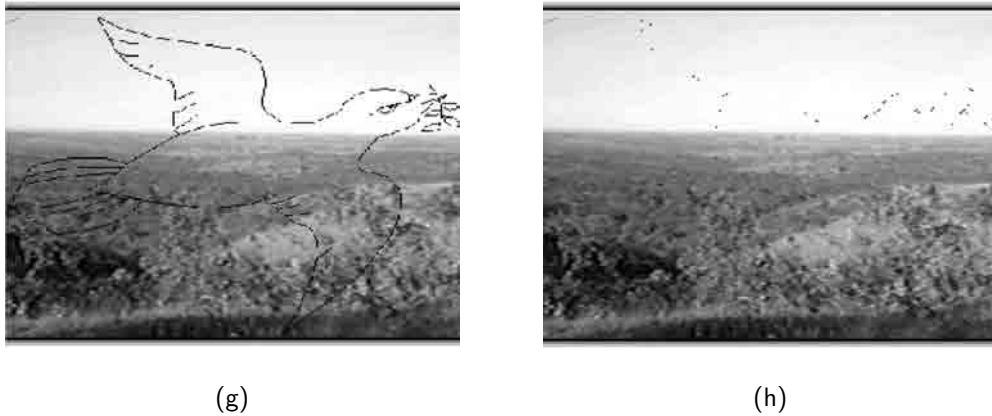


Figura 4.7: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.7, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos que apenas o modelo TV apresentou retoque satisfatório, eliminando completamente a figura do pássaro. Além disso, foi o que apresentou o menor tempo computacional, como pode ser observado na tabela abaixo. Para esta imagem teste utilizamos $\Delta t = 0.4$.

Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	100	1
TV	10	0.5
CDD	30	1
Elástico CKS	5	1
BBCSV	10	2
CS	50	1

Tabela 4.7: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.7.

Nosso experimento seguinte, Figura 4.8, trata-se de uma imagem real, no caso uma foto, que foi obstruída por uma grade preta. O objetivo é a retirada da grade preta de modo a obtermos um resultado mais natural. A seguir temos a figura original, a máscara e os resultados obtidos.

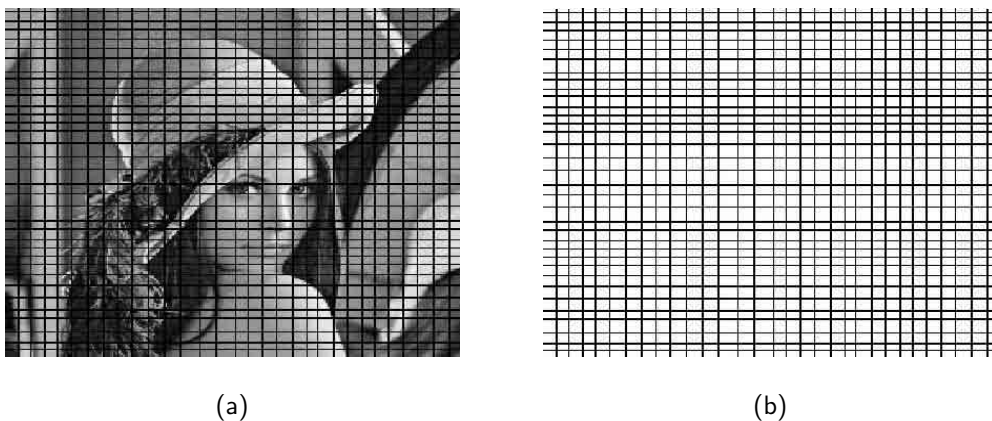


Figura 4.8: (a) Imagem original e (b) Máscara.



(c)



(d)

Figura 4.8: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.



(e)



(f)

Figura 4.8: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



(g)



(h)

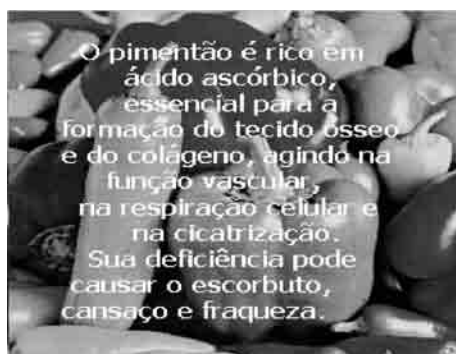
Figura 4.8: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.8, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos que somente os modelos BSCB e BBCSV não apresentaram retoque satisfatório, ou seja, não retiraram a grade preta que obstruí a imagem. Vale ressaltar também que o modelo TV não retirou completamente, pois como podemos observar na Figura 4.8 (d), dois riscos da grade são visíveis. Para esta imagem teste, utilizamos $\Delta t = 0.2$. Apresentamos a performance de cada modelo na tabela 4.8 abaixo.

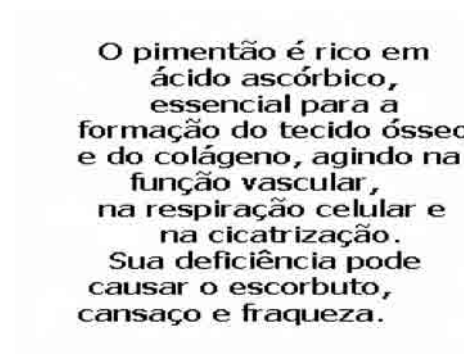
Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	1000	14
TV	1000	3
CDD	250	18
Elástico CKS	90	17
BBCSV	500	84
CS	60	11

Tabela 4.8: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.8.

Nosso penúltimo exemplo, Figura 4.9, refere-se também a uma imagem real, neste caso representada por vários pimentões que estão obstruídos por um texto branco sobreposto. A seguir temos a figura original, a máscara e os resultados obtidos após aplicação dos modelos.



(a)



(b)

Figura 4.9: (a) Imagem original e (b) Máscara.



(c)



(d)

Figura 4.9: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos BSCB e TV.



(e)



(f)

Figura 4.9: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos CDD e Elástico CKS.



(g)



(h)

Figura 4.9: (g) e (h) - Retoque através dos Modelos BBCSV e CS.

No caso da Figura 4.9, podemos perceber através dos resultados experimentais obtidos que todos os modelos atingiram o objetivo removendo, completamente o texto sobreposto, produzindo bons resultados. Para esta imagem teste, utilizamos $\Delta t = 0.4$. As performances são mostradas abaixo.

Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	400	4
TV	40	1
CDD	30	2
Elástico CKS	5	1
BBCSV	10	2
CS	5	1

Tabela 4.9: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.9.

O último exemplo, Figura 4.10, refere-se novamente a uma imagem real, ou seja, uma paisagem contendo um lago e um barco. Nosso objetivo é retirar o barco. A seguir temos a figura original, a máscara, bem como os resultados obtidos.



(a)



(b)

Figura 4.10: (a) Imagem original e (b) Máscara.



(c)



(d)

Figura 4.10: (c) e (d) - Retoque através dos Modelos TV e CDD.



Figura 4.10: (e) e (f) - Retoque através dos Modelos Elástico CKS e BBCSV.



Figura 4.10: (g) - Retoque através do Modelo CS

Através da Figura 4.10, podemos perceber que os modelos TV, CDD, CKS e CS apresentaram os melhores resultados visuais. Neste caso o modelo BSCB não produziu o resultado esperado, danificando completamente a imagem, que acreditamos ter ocorrido devido a diferenças brusca dos valores dos pixels presentes no domínio de retoque, assim o resultado visual não foi apresentado aqui. Para esta imagem teste, utilizamos $\Delta t = 0.4$. As performances dos modelos são apresentadas na Tabela 4.10.

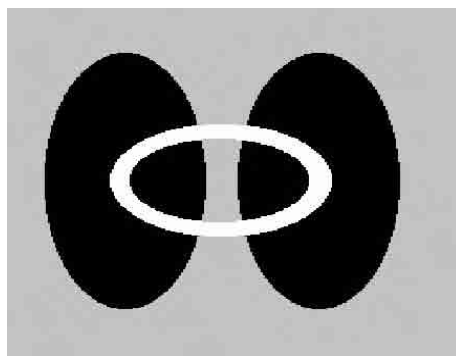
Modelo	Número de iterações	Tempo em segundos
BSCB	1	1
TV	5500	13
CDD	4000	45
Elástico CKS	310	9
BBCSV	2800	214
CS	600	16

Tabela 4.10: Resultados obtidos após processamento referentes a Figura 4.10.

4.1 Considerações Finais

Para finalizar este capítulo, destacamos que considerando-se figuras geométricas, às vezes, para evitar que mudanças nos níveis de cinza dentro do domínio de retoque influenciem na imagem como um todo, o que prejudica o resultado visual, usamos o artifício de atribuir o valor de cinza de um pixel do domínio de retoque para um pixel fora do domínio de retoque.

A seguir, na Figura 4.11, apresentamos um exemplo que facilita o entendimento do comentário anterior. Trata-se de uma figura geométrica, onde estão representados dois discos pretos obstruídos por um anel branco sobre um fundo cinza. Neste caso, estamos interessados em retocar a imagem eliminando o anel branco. A seguir temos a figura original, a máscara e o retoque efetuado sem e com o uso do artifício mencionado anteriormente.

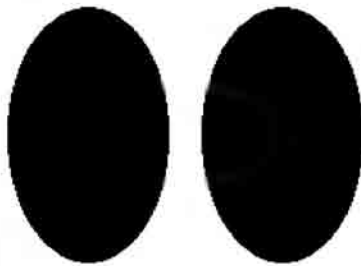


(a)

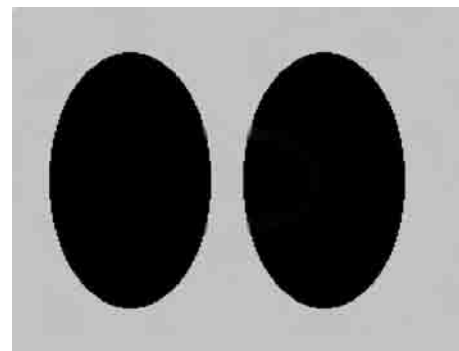


(b)

Figura 4.11: (a) Imagem original e (b) Máscara.



(c)



(d)

Figura 4.11: (c) e (d) - Retoque Final sem e com o uso do artifício.

Conclusão

Neste trabalho, inicialmente definimos e apresentamos algumas diferenças básicas entre os processos de Retoque e Desoclusão, bem como uma visão geral das diversas áreas e grupos de estudo relacionados ao contexto de processamento digital de imagens. Com este intuito, citamos vários trabalhos relevantes, que direta ou indiretamente, serviram de motivação para a realização deste texto.

Devido a dificuldade relacionada ao processo de retoque digital de imagens, no Capítulo 1, tratamos de conceitos teóricos fundamentais da percepção visual humana tais como os Princípios da Boa Continuação de Gestalt e da Conectividade de Kanizsa, que auxiliaram vários autores quanto ao entendimento de como o sistema visual humano age, para que de posse desses conhecimentos fosse possível criar modelos matemáticos baseados em Equações Diferenciais Parciais que modelem tal procedimento, podendo levar a resultados mais reais. Ainda no Capítulo 1, baseados em afirmações fundamentadas tanto heurística quanto teoricamente, destacamos a importância da difusão intercalada aos processos de retoque.

Seguindo este raciocínio, no Capítulo 2, abordamos de forma cronológica os modelos matemáticos relacionados ao tema em questão, visando facilitar o entendimento da evolução da teoria e dos métodos. Apresentamos também algumas de nossas contribuições, principalmente no que refere-se ao modelo Elástico CKS quanto a eliminação de T-junções decorrentes da aplicação do modelo, usando simplesmente algumas iterações de difusão após o processamento realizado através do modelo Elástico CKS, sendo que o exemplo apresentado na Figura 2.10, mostrou resultados muito satisfatórios quando aplicamos a difusão proposta. Este procedimento resultou num baixo custo computacional.

Na sequência, apresentamos no Capítulo 3, o Método de Diferenças Finitas que é muito usado para discretização das derivadas parciais presentes nas equações dos modelos. Também definimos o conceito de Malha regular no caso bidimensional que foi muito importante e fizemos

a discretização de u_t por Euler. As implementações dos Modelos BSCB, TV, CDD e Elástico CKS foram realizadas de acordo com o que os autores originais propuseram em seus trabalhos. Para o modelo BBCSV propusemos uma discretização explícita visando facilitar a implementação numérica e diminuir o custo computacional. Ressaltamos que os Ballester et al. propuseram uma discretização implícita, resultando em um equacionamento não linear, o que dificulta bastante o aspecto computacional, entretanto os resultados produzidos pela discretização explícita, por nós proposta, são semelhantes aos apresentados através da implementação implícita. Propusemos também uma implementação numérica para o modelo CS, baseada na realizada para o modelo Elástico CKS, já que os autores não comentaram e nem apresentaram uma forma de discretização.

Um problema que atinge os modelos apresentados é a escolha do tempo de parada para a evolução dos processos. Assim, adotamos o tempo de parada como sendo o melhor resultado visual obtido utilizando-se o menor número de iterações. Outro problema, agora um pouco mais difícil, enfrentado foi quanto a escolha de parâmetros particulares presentes nos modelos Elástico CKS, BBCSV e CS, os autores nada comentam sobre seus valores. Isto consumiu grande parte de nosso tempo, mas que felizmente, após diversos testes, conseguimos encontrar valores apropriados, apresentados no início do Capítulo 4, e que mostraram ótimos resultados.

Podemos concluir, a partir da análise comparativa dos resultados obtidos para as imagens testes apresentadas no Capítulo 4, que o modelo que apresentou, de um modo geral, melhor performance foi o modelo de retoque CS, que na verdade foi obtido com base na teoria relacionada aos outros modelos apresentados no Capítulo 2, e também em fundamentos teóricos estudados por Chan e Shen, ou seja, esse método trata-se de uma evolução natural de todos os outros métodos.

Destacamos ainda que, devido a estarmos trabalhando com métodos explícitos, o custo computacional apresentado pelos modelos é relativamente baixo e que nossas principais contribuições no contexto deste trabalho são:

- 1) Tratamento das T-junções, onde aplicamos iterações de difusão anisotrópica, objetivando eliminar totalmente os defeitos indesejáveis decorrentes das T-junções, facilitando a implementação computacional do Modelo Elástico CKS, sem que fosse necessário o uso de programação dinâmica;
- 2) Realizamos, também, uma forma explícita para a implementação numérica do modelo BBCSV, e não a forma implícita proposta por Ballester et al., o que, como já observado acarreta

uma diminuição significativa na implementação e também no custo computacional;

- 3) Outra contribuição importante foi a implementação numérica do modelo CS, que realizamos baseados em ótimos resultados que obtivemos com a implementação do modelo Elástico CKS; e
- 4) Vale também ressaltar, que baseados nos resultados numéricos obtidos, podemos concluir que nossas contribuições quanto aos parâmetros presentes nos modelos são ótimas, e poderão ser uma referência muito forte nesta área de retoque digital de imagens, pois é difícil de encontrar comentários neste sentido na literatura relacionada.

Finalizamos este trabalho, afirmando que análises criteriosas relacionadas ao tempo ótimo de retoque serão objetivo de estudos futuros, já que acreditamos que esse tempo está relacionado ao número de pontos presentes no domínio de retoque.

Referências Bibliográficas

- [1] Alvarez, L., Guichard, F., Lions, O. L. and Morel, J. M., *Axioms and fundamental equations of image processing*, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 123, pp. 199-257, 1993.
- [2] Andreu, F., Ballester, C., Caselles, V. and Mazón, J. M., *Minimizing total variation flow*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, pp. 867-872, 2000.
- [3] Ballester, C., Bertalmío, M., Caselles, V., Sapiro, G. and Verdera, J., *Filling-In by Joint Interpolation of Vector Fields and Gray Levels*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10, 8, pp. 1200-1211, 2001.
- [4] Barcelos, C.A.Z, Boaventura, M. e Silva Jr, *A Well Balanced Flow Equation for Noise Remove and Edge Detection*, IEEE Transactions on Image Processing, pp. 751-763, 2003.
- [5] Batista, M. A., *Retoque Digital*, Dissertação de mestrado, UFU - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG - Brasil, 2003.
- [6] Bellettini, G., Dal Maso, G., and Paolini, M., *Semicontinuity and relaxation properties of a curvature depending functional in 2D*, ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, Cl. Sci., vol. 20, no.4, pp. 247-297, 1993.
- [7] Bertalmío, M., Sapiro, G., Caselles, V. and Ballester, C., *Image inpainting*, Technical report, ECE-University of Minnesota, 1999.
- [8] Bertalmío, M., *Processing of flat and non-flat image information on arbitrary manifolds using Partial Differential Equations*, Thesis, University of Minnesota, 2001.
- [9] Bertalmío, M., Sapiro, G., Caselles, V. and Ballester, C., *Image Inpainting*, in Proc. SIGGRAPH 2000 Conf., pp. 417-424, 2000.
- [10] Caselles, V., Morel, J. M. and Sbert, C., *An axiomatic approach to image interpolation*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, pp. 376-386, 1998.

- [11] Chan, T. F., S. Osher and Shen, J., *The digital TV filter and nonlinear denoising.*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10, 2, pp. 231-241, 2001.
- [12] Chan, T. F. and Shen, J., *Non-texture inpainting by curvature driven diffusion (CDD)*, Journal of Visual Communication and Image Representation, vol. 12, 4, pp. 436-449, 2001.
- [13] Chan, T. F. and Shen, J., *Variational restoration of non-flat image features: models and algorithms*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 61, 4, pp. 1338-1361. 2000.
- [14] Chan, T. F. and Shen, J., *Mathematical Models for local non-texture inpaintings*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 62, 3, pp. 1019-1043, 2002.
- [15] Chan, T. F. and Shen, J., *Morphologically Invariant PDE Inpaintings*, Technical report, UCLA Dept. of Math., CAM pp. 01-15, 2001.
- [16] Chan, T. F., Kang, S. H. and Shen, J., *Euler's Elastica and Curvature based Inpaintings*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 63, 2, pp. 564-592, 2002.
- [17] Cunha, M. C., *Métodos Numéricos*, 2^a Ed., Editora da UNICAMP, (2000).
- [18] Efros, A. and Leung, T., *Texture synthesis by nonparametric sampling*, in Proc. IEEE Int. Conf. Computer Vision, Corfu, Greece, Sept. 1999, pp. 1033-1038.
- [19] Ferreira, A. B. H., *Dicionário Aurélio Escolar da Língua Portuguesa*, Nova Fronteira, (1988).
- [20] Figueiredo, D. G., *Análise I*, 2^a Edição, Rio de Janeiro, Editora LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.
- [21] Fu, K. S., Gonzalez, R. C. and Lee, C. S. G., *Robotics - Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, USA, (1987).
- [22] Gonzalez, R. C. e Woods, R. E., *Processamento de Imagens Digitais*, Edgard Blücher, 2000.
- [23] Heeger, D. and Bergen, J., *Pyramid based texture analysis/synthesis*, in Proc. SIGGRAPH '95 Conf., 1995, pp. 229-238.
- [24] Hirani, A. and Totsuka, T., *Combining frequency and spatial domain information for fast interactive image noise removal*, in Proc. SIGGRAPH '96 Conf., 1996, pp. 269-276.

- [25] Íório, V., *E. D. P. um Curso de Graduação*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1991.
- [26] Joyeux, L., Buisson, O., Besserer, B. and Boukir, S., *Detection and removal of line scratches in motion picture films*, in Proc. IEEE Int. Conf. Computer Vision Pattern Recognition, For Collins, CO, June 1999.
- [27] Kanizsa, G., *Organization in Vision*, Praeger, New York, 1979.
- [28] Kanizsa, G., *Gramatica del vedere. Saggi su percezione e gestalt*, Società Editrice Il Mulino, Bolonia, 1980.
- [29] Kokaram, A. C., Morris, R. D., Fitzgerald, W. J. and Rayner, P. J. W., *Detection of missing data in image sequences*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 11, pp. 1496-1508, Apr. 1995.
- [30] Kokaram, A. C., Morris, R. D., Fitzgerald, W. J. and Rayner, P. J. W., *Interpolation of missing data in image sequences*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 11, pp. 1509-1519, Apr. 1995.
- [31] Marquina, A., and Osher, S., *Lecture Notes in Computer Science*, volume 1682, chapter “A new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal”, pp. 429-434, 1999.
- [32] Martins, A. M., *Retoque Digital via Linhas de Nível*, Dissertação de mestrado, UFU - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG - Brasil, 2004.
- [33] Masnou, S., *Filtrage et Desocclusion d’Images par Méthodes d’Ensembles de Niveau*, Thèse, Univ. Paris-Dauphine, 1998.
- [34] Masnou, S., *Disocclusion: a Variational Approach Using Level Lines*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 11, 2, pp. 68-76, 2002.
- [35] Masnou, S. and Morel, J. M. *Level-Lines based disocclusion*, Proceedings of 5th IEEE Int’l Conf. on Image Process., Chicago, vol. 3, pp. 259-263, 1998.
- [36] Morel, J. M. and Guichard, F., *Partial differential equations and image iterativ filtering in state of art in numerical analisys*, Technical report, Oxford Univ. Press, 1997.

- [37] Morel, J. M. and Solimini, S., *Variational Methods in Image Segmentation*, volume 14 of Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [38] Mumford, D., and Shah, J., *Optimal Approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. Pure Applied. Math., pp. 577-685, 1994.
- [39] Mumford, D., *Elastica and Computer Vision - Algebraic Geometry and its Applications*, Springer-Verlang, 1994.
- [40] Nitzberg, M., Mumford, D. and Shiota, T., *Filtering, Segmentation, and Depth*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 622, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [41] Nitzberg, M., and Shiota, T., *Nonlinear Image Smoothing with Edge and Corner Enhancement*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell, vol. 14, numero 8, pp. 826-833, Aug. 1992.
- [42] Oliveira, C. G., *Análise da Difusão Anisotrópica em Processamento de Imagens: aplicação a uma Equação Diferencial Parcial de Quarta Ordem*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Ciências da Computação e Estatística - DCCE, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas IBILCE-UNESP, 2004.
- [43] Osher, S. and Sethi, J. A., *Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations*, J. Computer Phys. (79), pp. 12-49, 1988.
- [44] Perona, P., and Malik, J., *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., pp. 629-639, 1990.
- [45] Rudin, L. and Osher, S., *Total variation based image restoration with free local constraints*, Proc. 1st IEEE ICIP, pp. 31-35, 1994.
- [46] Rudin, L., Osher, S. and Fatemi, E., *Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms*, Physica D 60, pp. 259-268, 1992.
- [47] Silva Jr., E. C., *Um Novo Modelo de Difusão Não Linear com Preservação de Bordas para Segmentação e Eliminação de Ruídos em Imagens e Análise Comparativa com Modelos Correlatos*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Ciências da Computação e Estatística - DCCE, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas IBILCE-UNESP, 2002.

-
- [48] Simoncelli, E. and Portilla, J., *Texture characterization via joint statistics of wavelet coefficient magnitudes*, Proc. 5th IEEE Int. Conf. Image Processing, Oct, 4-7, 1998.
 - [49] Teixeira, J. F., *Mentes e Máquinas - Uma Introdução à Ciência Cognitiva*, Artes Médias, (1998).
 - [50] Teixeira, R., *Introdução aos Espaços de Escala*, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (2001).
 - [51] Verdera, J., *Some Interpolation Problems in Image Processing*, Thesis, Pompeu Fabra University, Barcelona, spain, november 2003.
 - [52] Wertheimer, M., *Untersuchung zur Lehre der Gestalt*, Psychol. Forshung, vol. 9, pp. 301-350, 1923.