Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Número de Milnor associado a curvas reduzidas

Hellen Monção de Carvalho Santana

Orientadora: Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto
Março - 2016

Número de Milnor associado a curvas reduzidas

Hellen Monção de Carvalho Santana

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

São José do Rio Preto
Março - 2016

Santana, Hellen Monção de Carvalho.
Número de Milnor associado a curvas reduzidas / Hellen Monção de Carvalho Santana. - - São José do Rio Preto, 2016
81 f.

Orientador: Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Singularidades (Matemática). 4. Curvas. 5. Funções (Matemática). I. Morgado, Michelle Ferreira Zanchetta. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 513.74

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Hellen Monção de Carvalho Santana

Número de Milnor associado a curvas reduzidas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Orientadora
Prof[a]. Dr[a]. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador
Prof[a]. Dr[a]. Bruna Oréfice Okamoto
UFSCAR - São Carlos

Segundo Examinador
Prof. Dr. Parham Salehyan
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 7 de Março de 2016.

Ao meu incomparável esposo, Paulo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas oportunidades que eu recebi até aqui e pelas bênçãos nos momentos que eu mais precisei.

Ao meu esposo Paulo, pela compreensão, pela atenção sincera e por acreditar em mim com tanta certeza. Eu não conseguiria sem você, este trabalho é nosso.

Aos meus pais, Cleide e Marcos, pela educação, pelos conselhos e por tudo que vocês têm feito por mim.

Aos meus irmãos, Vinícius e Juliane, por me fazerem rir depois de uma semana difícil.

À minha avó Idalina, pela criação, por toda sabedoria que a senhora compartilha comigo, por me receber na sua casa com tanto carinho durante a minha graduação e mestrado, e por ser a melhor companheira que eu poderia ter nesses anos.

À minha amiga e tia Neuzinha, por estar comigo em todos os momentos.

À professora Michelle, pela orientação, confiança e incentivo. Muito obrigada por pensar positivo.

Aos professores que eu tive, por terem enriquecido minha vida. Em especial, registro aqui a minha profunda gratidão à professora Maria Clara Faleiros, que me ensinou a ler e a escrever; à professora Isabel Cristina Macias Franco, que acreditou e confiou em mim e me presenteou com a oportunidade de receber uma educação de qualidade; à professora Maria Ângela Halley que, ao lado do seu corpo docente, realizou o meu sonho de me graduar com qualidade em uma universidade pública; e ao professor Clotilzio Moreira dos Santos, por toda matemática que me ensinou.

Aos colegas de mestrado, pela solidariedade e pelas risadas, em especial ao Alex, o grande amigo que a Matemática me deu, ao Pedro, pelas sugestões e conversas, e à Rafaela, pela parceria, ajuda, amizade e carinho.

À CAPES pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

"Não há ninguém comparável a ti, ó Senhor; tu és grande, e grande é o poder do teu nome".

Jeremias 10:6.

"A vida é um fardo pesado, mas não vos mostreis tão delicados. Todos não passamos de belos jumentos e belas jumentas de carga. Que temos em comum com o cálice de rosa que verga sob o peso de uma gota de orvalho? É verdade: amamos a vida não porque estejamos habituados à vida, mas estamos habituados a amar. Há sempre algo de loucura no amor, mas também há sempre algo de razão na loucura. E eu, que estou de bem com a vida, creio que aqueles que mais entendem de felicidade são as borboletas e as bolhas de sabão e tudo o que entre os homens se lhes assemelhe. Ver girar essas pequenas almas leves, loucas, graciosas e que se movem é o que arranca de Zaratustra lágrimas e canções. (...) Eu aprendi a andar. Desde então, passei por mim mesmo a correr. Eu aprendi a voar. Desde então, não quero que me empurrem para mudar de lugar. Agora sou leve, agora vôo, agora vejo por baixo de mim mesmo, agora um Deus dança em mim".

Friedrich Nietzsche - Assim Falou Zaratustra.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar curvas reduzidas. Associado a elas, Buchweitz e Greuel definem um número, chamado número de Milnor de curvas reduzidas, pois no caso de curvas planas este coincide com o número de Milnor definido por Milnor. Este número é obtido através de um importante objeto algébrico: o módulo dual de Grothendieck. Com o intuito de facilitar a obtenção deste número, mostraremos que ele está relacionado com outro número, chamado delta, mais fácil de ser calculado. Por fim, mostraremos que, de maneira análoga, Nuño-Ballesteros e Tomazella definem um número associado a germes de função finita definidos em curvas reduzidas. Este número está relacionado com o grau deste germe e com o número de Milnor da curva reduzida associada.

Palavras Chave: Módulo dual de Grothendiek. Curva reduzida. Número de Milnor. Germe de função finita.

Abstract

The aim of this work is to study reduced curves. Associate to them, Buchweitz and Greuel define a number, called Milnor number once that in the case of plane curves, this number coincides to the Milnor number defined by Milnor. This number is obtained through an important algebraic object: dual module of Grothendieck. In order to make it easier to obtain this number, we will prove that it is related to another number, called delta, easier to be computed. At last, we prove that, in the same way, Nuño-Ballesteros and Tomazella define a number associate to finite function germs defined over reduced curves. This number is related to the degree of this germ and to the Milnor number of the reduced curve associated to it.

Key Words: Dual module of Grothendiek. Reduced curve. Milnor number. Finite function germ.

Sumário

Introdução

No estudo da topologia dos pontos singulares de uma hipersuperfície complexa, o trabalho de Milnor aparece com grande relevância. No caso de germe de hipersuperfície com singularidade isolada x obtido como imagem inversa de 0 por um germe de função holomorfa $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$, Milnor introduz, em [27], com uma abordagem topológica, um número associado a essa hipersuperfície, o qual, mais tarde, foi chamado número de Milnor.

Seja (X,x) um germe de espaço complexo tal que $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\dots,f_k\rangle}$. Quando (X,x) é uma curva plana, ou seja, $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^2,x}}{\langle f\rangle}$ e $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^2,x}$, seu número de Milnor pode ser calculado algebricamente pela dimensão complexa de $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^2,x}}{\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\rangle}$.

No caso em que (X,x) é uma interseção completa, ou seja, $\dim \mathscr{O}_{X,x} = n-k$, Hamm obteve resultados semelhantes aos de Milnor e, no caso em que (X,x) possui singularidade isolada (ICIS), Hamm definiu, assim como Milnor, um número associado a (X,x). Em [22], provou-se que o número definido por Hamm coincide, no caso de germes de hipersuperfície, com o número de Milnor introduzido anteriormente.

Semelhante ao caso de curvas planas, Greuel mostrou, em [9], que no caso de ICIS, podemos calcular o número de Milnor algebricamente através da dimensão complexa de $\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$, onde os elementos de $\Omega^1_{X,x}$ são germes de 1-formas holomorfas. Em [4], Buchweitz e Greuel utilizam estes objetos para definir um número associado a curvas reduzidas e a descrição anterior é o caminho para mostrar que quando a curva reduzida é uma ICIS este número coincide com o de Hamm. Assim, dada uma curva reduzida (X,x) define-se um número a ela associado, denotado por $\mu(X,x)$, através da dimensão complexa do quociente $\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$.

Como nosso objetivo é estudar curvas reduzidas e números associados a elas, o trabalho está distribuído como segue.

No capítulo 1, apresentaremos definições e resultados de teoria básica necessários no decorrer dos próximos capítulos, fixando notações e facilitando a compreensão do conteúdo deste trabalho.

No capítulo 2, trabalharemos especificamente para definir o módulo dual de Grothendieck $\omega_{X,x}$, desenvolvendo as ferramentas algébricas necessárias, como o estudo do grupo exterior, germes de funções holomorfas, de formas exteriores e de espaços complexos.

No capítulo 3, tendo estudado o módulo dual de Grothendiek, estaremos aptos a definir o número $\mu(X,x)$ associado a uma curva reduzida (X,x). Na seção 1, vamos apresentar em detalhes, via caracterização de Greuel, a prova de que esse número coincide com o número introduzido por Hamm, quando a curva reduzida (X,x) for uma ICIS. Na seção 2, apresentaremos outro número interessante associado a uma curva reduzida (X,x), denotado por $\delta(X,x)$ ou, simplesmente, δ. No caso de curvas planas, Milnor provou em [27] a seguinte igualdade $\mu(X,x) = 2\delta - r + 1$, onde r é o número de componentes irredutíveis de (X,x). Mais tarde, Bassein provou, em [3], que a mesma fórmula se verifica quando (X,x) for uma curva reduzida suave. Buchweitz e Greuel provaram, em [4], que essa igualdade também é válida para curvas reduzidas e apresentaremos essa demonstração em detalhes. Terminaremos a seção 2 relacionando o número δ da curva reduzida (X,x) com os números δ_i associados as suas componentes irredutíveis (X_i,x). Além disso, usaremos a fórmula $\mu(X,x) = 2\delta(X,x) - r + 1$ para relacionar o número de Milnor da curva $\mu(X,x)$ com os números de Milnor $\mu(X_i,x)$ das componentes irredutíveis de (X,x).

Na seção final do capítulo 3, trataremos do número de Milnor de germes de função finita definida sobre uma curva reduzida (X,x). Esse número, denotado por $\mu(f)$, foi introduzido em [26] por D. Mond e D. van Straten e está intimamente relacionado ao grau da função f, $\deg(f)$, e ao número de Milnor da curva (X,x), $\mu(X,x)$. Inicialmente, estabeleceremos relações entre $\mu(f), \deg(f)$ e $\mu(X,x)$ para o caso em que (X,x) é uma curva regular. Em seguida, vamos apresentar a generalização dessas relações, que foram feitas por Nuño-Ballesteros e Tomazella em [24], de maneira detalhada. Terminaremos o capítulo, apresentando uma fórmula do tipo Lê-Greuel, caracterizando o número $\mu(f)$ no caso em que (X,x) for uma ICIS.

Capítulo 1

Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é introduzir definições e resultados de teoria básica necessários no decorrer dos próximos capítulos, fixando notações e facilitando a compreensão do conteúdo deste trabalho.

1.1 Álgebra Comutativa

1.1.1 Dimensão de Krull

A dimensão de Krull pode ser definida para aneis e módulos. Neste trabalho, estamos interessados na dimensão de Krull de módulos e espaços vetoriais (módulos sobre corpos). Desta forma, começaremos esta seção definindo um módulo e exemplificando com o principal módulo utilizado.

As principais referências para detalhes são [25] e [29].

Seja A um anel.

Definição 1.1.1 *Um A-**módulo** é um grupo aditivo abeliano M com uma aplicação*

$$f : A \times M \to M,$$

tal que para todos $a, b \in A$ e todos $m, n \in M$, utilizando a notação $f(a, m) = am$, temos:

1. $a(m + n) = am + an$
2. $(a + b)m = am + bm$
3. $a(bm) = (ab)m.$

*Se A possuir unidade 1_A, também valerá a propriedade $1_A m = m$, para todo $m \in M$. Neste caso, M é chamado A- **módulo unitário**.*

*Se o anel A for um corpo, então M é chamado A- **espaço vetorial**.*

Definição 1.1.2 *Sejam M um A- módulo e N um subconjunto de M. O conjunto N é chamado A-* ***submódulo de*** *M se para quaisquer $x, y \in N$ e quaisquer $a_1, a_2 \in A$, temos $a_1x + a_2y \in N$.*

Exemplo 1.1.3 *Seja $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos e considere as indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ sobre $\mathbb{C}$. O anel de polinômios sobre $x_1, \ldots, x_n$, denotado por $\mathbb{C}[x] := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, é um anel de integridade com as operações de adição e multiplicação de polinômios. A partir dele podemos, portanto, construir o seu corpo de frações, chamado corpo das séries de potências convergentes, que será denotado por $\mathbb{C}\{x\}$. Os aneis $\mathbb{C}[x]$ e $\mathbb{C}\{x\}$ são $\mathbb{C}$-módulos e mais ainda, sendo $\mathbb{C}$ um corpo, são $\mathbb{C}$- espaços vetoriais.*

Definição 1.1.4 *Sejam $I \subset A$ um ideal de A e M um A- módulo. Define-se o* ***produto*** *de I por M, denotado por IM, como sendo o A- submódulo de M dado por*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i m_i, x_i \in I, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A seguir, indicamos, sem demonstração, dois isomorfismos que serão utilizados no próximo capítulo.

Teorema 1.1.5 *Sejam A um anel e R um A- módulo e considere o conjunto $Hom_A(A, R) = \{f : A \to R; f$ é homomorfismo$\}$. Então $Hom_A(A, R)$ é um A- módulo e $R \simeq Hom_A(A, R)$.*

Demonstração: A demonstração pode ser vista em [17, página 203].

Teorema 1.1.6 *Sejam A um anel e R um A- módulo. Então $R \otimes_A A \simeq R$, onde $\otimes_A$ denota o produto tensorial em A.*

Demonstração: A demonstração pode ser vista em [17, página 236].

Definição 1.1.7 *Sejam um anel comutativo A e um A- módulo M. Dizemos que M é um A-* ***módulo finitamente gerado*** *se existem elementos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tais que, para qualquer elemento $x \in M$, existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in A$ tais que $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.*

Exemplo 1.1.8 *Claramente, $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um $\mathbb{C}$- módulo finitamente gerado pelo conjunto $\{1, x_1, \ldots, x_n\}$.*

Seguindo, vamos definir cadeias ascendentes e descendentes. Inicialmente, vejamos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.9 *Seja Δ um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\leqslant$, isto é: $\leqslant$ é uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica. Sobre Δ as sequintes condições são equivalentes:*

(1). Para toda sequência crescente $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$ em Δ, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_r$, $\forall\, r \geq n+1$, isto é, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$ é estacionária;

(2).Todo subconjunto não vazio de Δ possui um elemento maximal.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que (2) é falso: existe um subconjunto não-vazio T de Δ que não possui elemento maximal. Assim, qualquer $x_1 \in T$ precede algum elemento $x_2 \in T$, pois x_1 não é maximal. Da mesma maneira, x_2 precede algum $x_3 \in T$, pois x_2 não é maximal. Continuando este processo, podemos construir uma sequência $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$ não-estacionária em T, o que contraria (1). Isto nos dá um absurdo e, portanto, (2) se verifica.

Reciprocamente, dado um conjunto de elementos de T, $\{x_m\}_{m\geq 1}$, por (2), este conjunto possui um elemento maximal, digamos x_n. Então, se construirmos uma sequência crescente com o conjunto $\{x_m\}_{m\geq 1}$, está será estacionária em x_n. Portanto, (1) se verifica. ■

Definição 1.1.10 *Seja M um A- módulo. Se Δ é o conjunto de submódulos de M, ordenado pela relação de inclusão $\subseteq$, então* (1) *é chamada **condição de cadeia ascendente** e* (2) *é chamada **condição maximal**. Se, nas mesmas condições Δ for ordenado pela relação $\supseteq$, então* (1) *é chamada **condição de cadeia descendente** e* (2) *é chamada **condição minimal**.*

Antes de vermos o exemplo de um módulo que satisfaz as condições de cadeia, vejamos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.11 *Seja M um A- módulo. Então M satisfaz a condição de cadeia ascendente se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado.*

Demonstração: Seja N um submódulo de M e Δ o conjunto de todos os submódulos de N finitamente gerados. Visto que o submódulo nulo é um elemento de Δ, temos $\Delta \neq \emptyset$. Pela Proposição 1.1.9, se M satisfaz a condição de cadeia ascendente, todo subconjunto não-vazio de M possui um elemento maximal. Então Δ possui um elemento maximal, digamos N_0. Se $N_0 \neq N$, considere o submódulo $N_0 + Ax$, onde $x \in N$ e $x \notin N_0$. Este é um submódulo de M, finitamente gerado e $N_0 \subset N_0 + Ax$, o que nos dá uma contradição, visto que tomamos N_0 como elemento maximal. Logo, $N = N_0$ e, assim, N é finitamente gerado.

Reciprocamente, seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ uma cadeia ascendente de submódulos de M. Então $N = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ é um submódulo de M e, pela hipótese, é finitamente gerado. Sejam $x_1, \ldots, x_r$ os seus geradores. Para cada $i = 1, \ldots, r$, temos $x_i \in M_{n_i}$, para algum $n_i \in \mathbb{N}$. Tome $n = max\{n_i, i = 1, \ldots, r\}$, então cada $x_i \in M_n$. Logo, $M_n = M$ e, assim, a cadeia é estacionária. ■

Exemplo 1.1.12 *O anel $\mathbb{Z}$, como $\mathbb{Z}$- módulo, satisfaz a condição de cadeia ascentente. De fato, $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais, logo seus ideais e, portanto, todos os submódulos de $\mathbb{Z}$ são finitamente gerados. Logo, pela Proposição 1.1.11, $\mathbb{Z}$ satisfaz a condição de cadeia ascendente. Por outro lado, $\mathbb{Z}$ não satisfaz a condição de cadeia descendente. De fato, seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$. A cadeia*

$$\langle a \rangle \supset \langle a^2 \rangle \supset \cdots \supset \langle a^n \rangle \supset \cdots$$

não é estacionária e, portanto, $\mathbb{Z}$ não satisfaz a condição de cadeia descendente.

Definição 1.1.13 *Seja A um anel. O anel A é chamado* ***anel noetheriano*** *se A satisfaz a condição de cadeia ascendente.*

Seja M um A- módulo. O A-módulo M é chamado ***módulo noetheriano*** *se M satisfaz a condição de cadeia ascendente.*

Exemplo 1.1.14 *Todo domínio euclidiano é domínio de ideais principais(Veja [6].) Agora, se $\mathbb{C}$ é corpo, $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um domínio euclidiano e, assim, todos os ideais desse anel são principais e, portanto, finitamente gerados. Logo, $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ satisfaz a condição de cadeia ascendente, pela Proposição 1.1.11. Portanto, $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é noetheriano.*

Os conceitos de anel e módulo noetherianos estão relacionados segundo o próximo resultado.

Proposição 1.1.15 *Sejam A um anel noetheriano e M um A- módulo finitamente gerado. Então M é um módulo noetheriano.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [2, página 76]. ∎

Para que o próximo conceito que vamos introduzir fique bem definido, precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 1.1.16 *Sejam A um anel de $I \subset A$ um ideal de A. Se A é um anel noetheriano, então o anel quociente $\frac{A}{I}$ é um anel noetheriano.*

Demonstração: Mostremos que todo ideal de $\frac{A}{I}$ é finitamente gerado. Seja $\tilde{J}$ um ideal de $\frac{A}{I}$. Então $\tilde{J} = \frac{J}{I}$, onde J é um ideal de A. Como A é anel noetheriano, A satisfaz a condição de cadeia ascendente e, assim, pela Proposição 1.1.11, todo ideal de A é finitamente gerado, ou seja, $J = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Logo, $\tilde{J} = \langle \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n} \rangle$, onde $\overline{x_i}$ denota a classe do elemento x_i no quociente $\frac{A}{I}$. Portanto, $\tilde{J}$ é finitamente gerado. Como $\tilde{J}$ é um ideal arbitrário de $\frac{A}{I}$, concluímos que todo ideal de $\frac{A}{I}$ é finitamente gerado. Logo, pela Proposição 1.1.11, $\frac{A}{I}$ satisfaz a condição de cadeia ascendente. Portanto, $\frac{A}{I}$ é anel noetheriano. ∎

Definição 1.1.17 *Seja A um anel noetheriano. A **dimensão de Krull** de A, denotada por $dim(A)$, é dada por*

$$dim(A) := sup\{d; A \supsetneq I_1 \supsetneq \cdots \supsetneq I_d,\ I_i \subset A \ primo\}.$$

*Seja M um A- módulo finitamente gerado. Definimos ainda a **dimensão de Krull** de M, denotada por $dim(M)$, como sendo*

$$dim(M) = dim\left(\frac{A}{Ann_A(M)}\right),$$

onde $Ann_A(M) = \{x \in A; xM = 0\}$ é o conjunto anulador de M em A.

Observação 1.1.18 *É fácil ver que o conjunto anulador de M em A, $Ann_A(M)$, é um ideal de A. Como A é anel noetheriano, pela Proposição 1.1.16, temos que $\frac{A}{Ann_A(M)}$ é noetheriano, o que torna bem definido o conceito de dimensão de Krull do A- módulo M.*

Exemplo 1.1.19 *Se $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ou $A = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$, $dim(A) = n$. Veja [25, página 35].*

As duas próximas proposições relaciona a dimensão de Krull de um anel A com a dimensão de Krull de um anel especial relacionado a A e estes resultados serão úteis no próximo capítulo.

Proposição 1.1.20 *Sejam A e B aneis noetherianos, tais que $A \subset B$. Se todo elemento de $\frac{B}{A}$ é raiz de um polinômio mônico no corpo de frações de $\frac{B}{A}$, então $dim(A) = dim(B)$.*

Demonstração: Pode ser vista em [23, página 31].

Proposição 1.1.21 *Seja A um anel com dimensão de Krull igual a 1 e denote por $\overline{A}$ o conjunto das raízes de polinômios em A. Se A for um anel de integridade, então a dimensão de Krull de $\overline{A}$ é igual a 1.*

Demonstração: A demonstração pode ser vista em [23, página 30].

Ao longo deste trabalho, precisaremos da noção de *dimensão de Krull* vista acima e da dimensão usual de um $\mathbb{K}$- espaço vetorial V, dada pelo número de elementos da base de V e denotada por $dim_{\mathbb{K}}(V)$.

Trabalhando com aplicações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita, o Teorema do Núcleo e da Imagem é um resultado muito conhecido e é utilizado para relacionar a dimensão do domínio da aplicação linear com as dimensões do seu núcleo e da sua imagem. No caso de espaços vetoriais de dimensão infinita, esse resultado também se verifica e nos será muito útil no Capítulo 3. Vamos enunciá-lo no próximo teorema:

Teorema 1.1.22 *Sejam X e Y $\mathbb{K}$- espaços vetoriais de dimensão infinita e considere a aplicação linear $T : X \to Y$. Então $dim_{\mathbb{K}}(X) = dim_{\mathbb{K}}(Ker(T)) + dim_{\mathbb{K}}(Im(T))$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [32, página 29]. ■

Corolário 1.1.23 *Seja R um anel e sejam A, B e C, $\mathbb{K}$- espaços vetoriais. Considere a sequência $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tal que as aplicações f e g são injetoras e lineares. Então*

$$dim_{\mathbb{K}}(coKer(g \circ f)) = dim_{\mathbb{K}}(coKer(f)) + dim_{\mathbb{K}}(coKer(g)).$$

Demonstração:

Aplicando o Teorema 1.1.24 sobre os quocientes $coKer(f) = \frac{B}{Im(f)}$, $coKer(g) = \frac{C}{Im(g)}$ e $coKer(g \circ f) = \frac{C}{Im(g \circ f)}$, obtemos

$$dim_{\mathbb{K}}(B) = dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{Im(f)}\right) \tag{1.1}$$

$$dim_{\mathbb{K}}(C) = dim_{\mathbb{K}}(Im(g)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g)}\right) \tag{1.2}$$

$$dim_{\mathbb{K}}(C) = dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g \circ f)}\right) \tag{1.3}$$

Somando as Equações (1.1) e (1.2), obtemos

$$dim_{\mathbb{K}}(B) + dim_{\mathbb{K}}(C) = dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{Im(f)}\right) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g)}\right). \tag{1.4}$$

Substituindo a Equação (1.3) na Equação (1.4), obtemos

$$dim_{\mathbb{K}}(B) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g \circ f)}\right) =$$
$$= dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{Im(f)}\right) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g)}\right).$$

Agora, aplicando o Teorema do Núcleo e da Imagem nas aplicações f, g e $g \circ f$, e lembrando que essas aplicações são injetoras, obtemos

$dim_{\mathbb{K}}(A) = dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$, $dim_{\mathbb{K}}(B) = dim_{\mathbb{K}}(Im(g))$ e $dim_{\mathbb{K}}(A) = dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f))$.

Assim, $dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f))$. Logo,

$$dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g)) = dim_{\mathbb{K}}(B) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f)).$$

Desta forma,

$$dim_{\mathbb{K}}(B) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g \circ f)}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{Im(f)}\right) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g)}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{K}}(B) + dim_{\mathbb{K}}(Im(g \circ f)) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{Im(f)}\right) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g)}\right).$$

Portanto,

$$dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g \circ f)}\right) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{B}{Im(f)}\right) + dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{C}{Im(g)}\right),$$

ou seja,

$$dim_{\mathbb{K}}(coKer(g \circ f)) = dim_{\mathbb{K}}(coKer(f)) + dim_{\mathbb{K}}(coKer(g)).$$

■

Outro resultado interessante envolvendo espaços vetoriais de dimensão infinita e que também será muito utilizado no Capítulo 3 é o seguinte:

Teorema 1.1.24 *Sejam S e V $\mathbb{K}$- espaços vetoriais de dimensão infinita tais que $S \subset V$. Então $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(S) + dim_{\mathbb{K}}(\frac{V}{S})$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [29, página 93]. ■

Para terminar esta seção, veremos dois tipos especiais de aneis, que serão utilizados no próximo capítulo.

Definição 1.1.25 *Seja (A, m) um anel local noetheriano, ou seja, A é um anel noetheriano e m é o seu único ideal maximal. A é **regular** se $dim(A) = dim_{\frac{A}{m}}(\frac{m}{m^2})$.*

Exemplo 1.1.26 *Considere o anel local noetheriano $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ cujo único ideal maximal é $\mathscr{M} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Temos $dim(\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}) = n$ e $\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}^2} = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, a_i \in \mathbb{C}\}$, o que nos dá que $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}^2}) = n$, visto que $\frac{\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}}{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle} = \mathbb{C}$. Portanto, $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é regular. Ver [2, página 124].*

Definição 1.1.27 *Um anel A é chamado **normal** se A não possui elementos nilpotentes e se todo elemento de A é raiz de um polinômio mônico no corpo de frações de A.*

Exemplo 1.1.28 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. E $\mathbb{K}$ é um domínio e, portanto, não possui elementos nilpotentes. Além disso, $\mathbb{K}$ é seu próprio corpo de frações. Assim, dado $a \in \mathbb{K}$, existe $p(X) = X - a \in \mathbb{K}[X]$, tal que $p(a) = 0$, ou seja, todo elemento de $\mathbb{K}$ é raiz de um polinômo mônico em $\mathbb{K}[X]$. Portanto, $\mathbb{K}$ é anel normal.*

A seguir, indicamos, sem demonstração, um importante resultado que será usado no capítulo seguinte, relacionando os conceitos de normalidade e regularidade de um anel.

Proposição 1.1.29 *Seja A um anel local noetheriano com dimensão de Krull igual 1. Então A é normal se, e somente se, A é regular.*

Demonstração: A demonstração pode ser vista em [21, página 208]

1.1.2 Funções de Hilbert e multiplicidade

O objetivo desta seção é definir e tornar facilitar o cálculo da multiplicidade de um anel. Isso nos será útil quando estivermos trabalhando com o grau de uma função.

As principais referências para detalhes são [25] e [2].

Definição 1.1.30 *Um anel A é **graduado** se existe uma família $\{A_n, n \geq 0\}$ de subgrupos do grupo aditivo A tal que $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subseteq A_{m+n},\ m, n \geq 0$.*

Definição 1.1.31 *Seja $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ um anel graduado. Um elemento $x \in A$ é dito **homogêneo**, se $x \in A_i$, para algum i. Um ideal I de A é chamado homogêneo, se for gerado por elementos homogêneos.*

Exemplo 1.1.32 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. O anel $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios sobre $\mathbb{K}$ é um anel graduado. De fato, seja A_d o conjunto dos polinômios homogêneos de grau d, ou seja,*

$$A_d = \langle x^{|\alpha|} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]; \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}, \mid \alpha \mid = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d \rangle,$$

onde $x^{|\alpha|} = x_1^{|\alpha_1|} x_2^{|\alpha_2|} \ldots x_n^{|\alpha_n|}$.

Temos $A_d \subset A,\ A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots A_d \oplus$ e $A_{d_1} A_{d_2} \subseteq A_{d_1+d_2}$.

Portanto, A é um anel graduado.

Definição 1.1.33 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um anel A é chamado $\mathbb{K}$**- álgebra graduada** se A for um anel graduado, para uma família $\{A_n, n \geqslant 0\}$, tal que A_n é um $\mathbb{K}$- espaço vetorial para todo $n \geq 0$, com $A_0 = \mathbb{K}$, e é chamado $\mathbb{K}$**- álgebra noetheriana** se cada A_n for um anel noetheriano, com $A_0 = \mathbb{K}$.*

Proposição 1.1.34 *Sejam $A = \oplus_{v \geq 0} A_v$ uma $\mathbb{K}$- álgebra noetheriana e graduada e $M = \oplus_{v \geqslant 0} M_v$ um A- módulo finitamente gerado. Então:*

1. *existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $M_v = \langle 0 \rangle, v > m$;*

2. *$dim_{\mathbb{K}} M_v < \infty, \forall\ v \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

1. Por hipótese, M é finitamente gerado. Logo, $M = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$ e, para todo $m \in M,\ m = a_1 x_1 + \cdots + a_s x_s$.

   Seja k_i o menor índice tal que $x_i \in M_{k_i}$ e defina $v = min\{k_i, 1 \leq i \leq s\}$. Então, se $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_v \oplus \cdots \oplus M_l \oplus \cdots$, temos $M_n = \langle 0 \rangle, \forall\ n > v$, ou seja, $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_v$, como queríamos demonstrar.

2. Como M é um A- módulo finitamente gerado e A é noetheriano, pela Proposição 1.1.15, M é um módulo noetheriano, ou seja, M satisfaz a condição de cadeia ascendente. Logo, pela Proposição 1.1.11, todo submódulo de M é finitamente gerado. Então, cada M_i é finitamente gerado. Assim,

$$M_n = \sum_{i=1}^{v} A_{n-e_i} m_i, \forall\, m_i \in M_{e_i}, n \in \mathbb{Z}.$$

Mas, para todo $v \geq 0$, A_v é finitamente gerado como A_0- módulo e $A_0 = \mathbb{K}$.

Assim, M_n é finitamente gerado como $\mathbb{K}$- espaço vetorial. Portanto,

$$dim_{\mathbb{K}} M_v < \infty, \forall\, v \in \mathbb{Z}.$$

■

Definição 1.1.35 *Considerando M nas condições da proposição anterior, a função $H(M,-) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por*

$$H(M,n) = dim_{\mathbb{K}}(M_n), n \in \mathbb{Z},$$

*onde $M_n = 0$, para $n < 0$, é chamada **função de Hilbert** de M.*

*A **série de Hilbert-Poincaré** HP_M de M é definida como sendo*

$$HP_M(t) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} H(M,v) t^v.$$

Para a demonstração do próximo resultado, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.1.36 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $A = \bigoplus_{v \geq 0} A_v$ uma $\mathbb{K}$- álgebra graduada. Sejam ainda M um A- módulo finitamente gerado, como na Proposição 1.1.34, $d > 0$, $f \in A_d$ e o homomorfismo $\varphi : M(-d) \to M$ dada por $m \mapsto fm$. Então $Ker(\varphi)$ e $coKer(\varphi)$ são $\frac{A}{\langle f \rangle}$-módulos graduados.*

Em particular,

$$H(M,n) - H(M,n-d) = H(coKer(\varphi),n) - H(Ker(\varphi),n-d)$$

e

$$HP_M(t) - t^d HP_M(t) = HP_{coKer(\varphi)}(t) - t^d HP_{Ker(\varphi)}(t).$$

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [25, página 94].

Teorema 1.1.37 *Seja $A = \oplus_{v \geq 0} A_v$ uma K- álgebra graduada. Suponha que A é gerada como K- álgebra por $x_1, \ldots, x_r \in A$. Então, para qualquer A- módulo graduado finitamente gerado, temos*

$$M = \oplus_{v\geq 0} M_v \ e \ HP_M(t) = \frac{Q(t)}{1-t}^r,$$

para algum $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre r.

Se $r = 0$, então $A = A_0 = K$. Assim, $M = \oplus_{v\geq 0} M_v$ é um $\mathbb{K}$- espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e, pela Proposição 1.1.34, existe um número natural n suficientemente grande tal que $M_n = \langle 0 \rangle$. Então

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1}.$$

Desta forma, a função $H(M, -)$ possui como imagem um conjunto finito, digamos $\{d_1, \ldots, d_{n-1}\}$. Portanto,

$$HP_M(t) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i t^i \in \mathbb{Z}[t].$$

Suponha agora $r > 0$ e defina $\varphi : M(-1) \to M$ por $m \mapsto x_1 m$. Aplicando o lema anterior, obtemos

$$HP_M(t) - tHP_M(t) = HP_{coKer(\varphi)}(t) - tHP_{Ker(\varphi)}(t)$$

e

$Ker(\varphi)$ e $coKer(\varphi)$ são $\frac{A}{\langle x_1 \rangle}$- módulos. Agora,

$$A \simeq A_0[x_1, \ldots, x_r] \Rightarrow \frac{A}{\langle x_1 \rangle} \simeq A_0[\overline{x_2}, \ldots, \overline{x_r}],$$

onde $\overline{x_i} = x_i (mod \langle x_1 \rangle)$.

Pela hipótese de indução temos,

$$HP_{coKer(\varphi)}(t) = \frac{Q_1(t)}{(1-t)^{r-1}}, Q_1(t) \in \mathbb{Z}[t] \text{ e } HP_{Ker(\varphi)}(t) = \frac{Q_2(t)}{(1-t)^{r-1}}, Q_2(t) \in \mathbb{Z}[t].$$

Desta forma,

$$(1-t)HP_M(t) = HP_M(t) - tHP_M(t) = HP_{coKer(\varphi)}(t) - tHP_{Ker(\varphi)}(t) =$$

$$= \frac{Q_1(t)}{(1-t)^{r-1}} - \frac{Q_2(t)}{(1-t)^{r-1}} = \frac{Q_1(t) - tQ_2(t)}{(1-t)^{r-1}} = \frac{Q(t)}{(1-t)^{r-1}},$$

onde $Q(t) = Q_1(t) - tQ_2(t) \in \mathbb{Z}[t]$. ■

Observação 1.1.38 *Cancelando os fatores comuns no numerador e denominador de*

$$HP_M(t) = \frac{Q(t)}{(1-t)^{r-1}},$$

obtemos

$$HP_M(t) = \frac{G(t)}{(1-t)^s},\ 0 \leq s \leq r,$$

onde

$$G(t) = \sum_{v=0}^{d} g_v t^v \in \mathbb{Z}[t],\ \textit{tal que } g_d \neq 0 \textit{ e } G(1) \neq 0.$$

Definição 1.1.39 *1. O polinômio $Q(t)$ é chamado* ***primeira série de Hilbert*** *de M;*

2. O polinômio $G(t)$ é chamado ***segunda série de Hilbert*** *de M;*

3. Seja $d = grau(G(t))$ e seja s a ordem do polo de $HP_M(t)$ em $t = 1$. O ***polinômio de Hilbert*** *de M é dado por*

$$P_M(n) = \sum_{v=0}^{d} g_v \binom{s-1+n-v}{s-1} \in \mathbb{Q}[n].$$

Teorema 1.1.40 *O polinômio P_M possui coeficientes racionais, possui grau $s-1$ e satisfaz $P_M(n) = H(M,n)$, para $n \geq d$. Portanto, existe $a_v \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$P_M(n) = \sum_{v=0}^{s-1} a_v \binom{m}{n} = \frac{a_{s-1}n^{s-1}}{(s-1)!} + \textit{ termos de menor grau},$$

onde $a_{s-1} = G(1)$.

Demonstração: Sabemos que

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{v=0}^{\infty} t^v, 0 < t < 1.$$

Derivando s- vezes, obtemos

$$\frac{1}{(1-t)^s} = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{s-1+v}{s-1} t^v.$$

Assim, pela Observação 1.1.38,

$$HP_M(t) = \frac{G(t)}{(1-t)^s} = G(t) \sum_{v=0}^{\infty} \binom{s-1+v}{s-1} t^v.$$

Suponhamos $G(t) = g_0 + g_1 t + \cdots + g_d t^d$.
Substituindo na equação anterior, temos

$$HP_M(t) = \left(\sum_{v=0}^{d} g_v t^v \right) \left(\sum_{v=0}^{\infty} \binom{s-1+v}{s-1} t^v \right) =$$

$$= \cdots + \left(g_0\binom{s-1+n}{s-1} + g_1\binom{s-1+n-1}{s-1}t + \cdots + g_d\binom{s-1+n-d}{s-1}\right)t^n + \cdots.$$

Mas, por definição, $HP_M(t) = \sum H(M,n)t^n$. Logo,

$$H(M,n) = \sum_{r=0}^{d} g_r\binom{s-1+n-r}{s-1} = P_M(n), n-d \geq 0,$$

pela definição 1.1.39.

Assim,

$$P_M(n) = \sum_{r=0}^{d} g_v\frac{n^{s-r}}{(s-1)!} + termos\ de\ menor\ grau =$$

$$= G(1)\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + termos\ de\ menor\ grau.$$

■

Exemplo 1.1.41 *Seja* $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_s]$*, onde os* x_i *são indeterminadas independentes e* $A = \bigoplus_{v\geq 0}^{\infty} A_v$*. Assim, cada* A_n *é um* $\mathbb{K}$*- espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{K}$*, da forma*

$$A_n = \langle x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_s^{m_s}; m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n\rangle.$$

Por indução, podemos mostrar que o número de geradores de A_n *é* $\binom{s+n-1}{s-1}$*. Então,*

$$dim_{\mathbb{K}}(A_n) = \binom{s+n-1}{s-1} = H(A,n).$$

Assim,

$$HP_A(t) = \sum_{n\geq 0} H(A,n)t^n = \sum_{n\geq 0}\binom{s+n-1}{s-1}t^n = \frac{1}{(1-t)^s}.$$

Definição 1.1.42 *Sejam* I *um ideal de um anel* A *e* $r(I) = \{a \in A; a^n \in I, n > 0\}$ *o radical de* I*. Neste caso, dizemos que* I *é um ideal* $r(I)$*-* ***primário****.*

Sejam A um anel e I um ideal de A. Podemos obter o **anel graduado associado** ao anel A sobre o anel $\frac{A}{I}$ dado por

$$G_I(A) = \frac{A}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \cdots \oplus \frac{I^n}{I^{n+1}} \oplus \cdots.$$

Similarmente, para um A- módulo M e um ideal $I \subset A$,, podemos obter o $G_I(A)$-**módulo graduado associado** a M :

$$G_I(M) = \frac{M}{IM} \oplus \frac{IM}{I^2M} \oplus \cdots \oplus \frac{I^nM}{I^{n+1}M} \oplus \cdots.$$

Definição 1.1.43 *Sejam A um anel, $I \subset A$ um ideal de A e M um A- módulo. A* ***função de Hilbert-Samuel*** *de M com respeito a I é dada por*

$$\chi_M^I(n) := \sum_{i=0}^{n} H(G_I(M), i) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{M}{I^{n+1}M}\right).$$

Quando I for o ideal maximal de A, denotaremos a função de Hilbert-Samuel por χ_M. Além disso, já que A pode ser visto como A- módulo, podemos também calcular a função de Hilbert-Samuel de A com respeito a algum ideal de A.

Teorema 1.1.44 *Seja $(A, \mathscr{M})$ um anel local noetheriano e I um ideal $\mathscr{M}$- primário. Se M é um A- módulo finitamente gerado com dimensão de Krull igual a d, então a função de Hilbert-Samuel $\chi_M^I(n)$ é um polinômio sobre $\mathbb{Z}$ de grau d da forma*

$$\chi_M^I(n) = \frac{e_0}{d!}n^d + (\textit{termos em } n \textit{ potências de ordem } \leq d-1)$$

.

Demonstração: Pelo Teorema 1.1.40, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq n_0$,

$$H(G_I(M), n) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}e_{d-1-i}\binom{n+i}{i},$$

onde $e_k \in \mathbb{Z}$.

Seja

$$C_{n_0-1} = \sum_{j=0}^{n_0-1} H(G_I(M), j) - \sum_{j=0}^{n_0-1} P_{G_I(M)}(j).$$

Então, para $n \geq n_0$,

$$\chi_M^I(n) = \sum_{j=0}^{n} H(G_I(M), j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_0-1} H(G_I(M), j) + \sum_{j=n_0}^{n} P_{G_I(M)}(j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n_0-1} H(G_I(M), j) - \sum_{j=0}^{n_0-1} P_{G_I(M)}(j) + \sum_{j=n}^{n} P_{G_I(M)}(j)$$

$$= C_{n_0-1} + \sum_{j=0}^{n} P_{G_I(M)}(j),$$

onde, usando a definição de $P_{G_I(M)}$, temos

$$\sum_{j=0}^{n} P_{G_I(M)}(j) = \sum_{j=0}^{n}\left(g_0\binom{s-1+j}{s-1} + g_1\binom{s-1+j-1}{s-1} + \cdots + g_d\binom{s-1+j-d}{s-1}\right) =$$

$$g_0\sum_{j=0}^{n}\binom{s-1+j}{s-1} + g_1\sum_{j=0}^{n}\binom{s-1+j-1}{s-1} + \cdots + g_d\sum_{j=0}^{n}\binom{s-1+j-d}{s-1} =$$

$$g_0\binom{s-1+n+1}{s} + g_1\binom{s-1+n}{s} + \cdots + g_{d-1}\binom{s-1+n-(d-1)}{s},$$

com grau no máximo d e C_{n_0-1} com grau $d-1$. Portanto,

$$\chi_M^I(n) = \sum_{i=0}^{d} e_{d-i}\binom{n+i}{i}, \text{ onde } e_d = C_{n_0}.$$

Portanto, $\chi_M^I(n)$ é um polinômio de grau d. ∎

Definição 1.1.45 *O inteiro e_0 acima é chamado* ***multiplicidade de Hilbert-Samuel*** *de M e será denotado por $e(I,M)$. Quando M for o ideal maximal, denotaremos $e(I,M)$ simplesmente por $e(I)$.*

O próximo teorema é o objetivo principal desta seção e ele nos dará uma fórmula que facilitará o cálculo da multiplicidade de um ideal específico. Para demonstrá-lo, precisaremos de mais alguns conceitos. Uma referência para detalhes é [25].

Definição 1.1.46 *Seja M um A- módulo. A sequência $x_1,\ldots,x_n \in A$ é uma* ***sequência*** *M**- regular** se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *$\langle x_1,\ldots,x_n\rangle M \neq M$;*
2. *$x_i \neq 0,\ i = 1,\ldots,n$ e a multiplicação por x_i é uma aplicação injetora em $\frac{M}{\langle x_1,\ldots,x_{i-1}\rangle}$.*

Exemplo 1.1.47 *Se $A = \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$, então $x_1,\ldots,x_n$ é uma sequência A- regular. De fato, $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle A \neq A$, pois $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle A$ não contém polinômios de grau 1. Além disso, se $a \in A$,*

$$x_i a \in \langle x_1,\ldots,x_{i-1}\rangle A \Leftrightarrow a \in \langle x_1,\ldots,x_{i-1}\rangle.$$

Portanto, a multiplicação por x_i é uma aplicação injetora em $\frac{A}{\langle x_1,\ldots,x_{i-1}\rangle}$.

Definição 1.1.48 *Sejam $(A,\mathscr{M})$ um anel local noetheriano, onde $\mathscr{M}$ é seu ideal maximal. Dizemos que A é* ***anel de Cohen-Macaulay*** *se, dado um subconjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}$ de A, a seguinte implicação se verifica: se $\{a_1,\ldots,a_n\}$ gera um ideal $\mathscr{M}$- primário, então $\{a_1,\ldots,a_n\}$ é uma sequência A- regular.*

Exemplo 1.1.49 *O anel $A = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um anel local, cujo ideal maximal é $\mathscr{M} = \{f \in A; f(0) = 0\}$ e $\mathscr{M}$ é $\mathscr{M}$- primário, pois $r(\mathscr{M}) = \{f \in A; f^n \in \mathscr{M}, n \in \mathbb{N}\} = \{f \in A; f^n(0) = 0, n \in \mathbb{N}\} = \{f \in A; f(0) = 0\} = \mathscr{M}$. Agora, o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ gera $\mathscr{M}$ e, pelo Exemplo 1.1.47, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma sequência A- regular. Portanto, A é anel de Cohen-Macaulay.*

Exemplo 1.1.50 *Se A é um anel que não possui elementos nilpotentes tal que $dim(A) = 1$, então A é Cohen-Macaulay. Veja [10].*

Definição 1.1.51 *Sejam A um anel, $a_1, \ldots, a_n \in A$, M um A- módulo e considere $I = \sum_{i=1}^{n} a_i A$, com $IM \neq M$. Dizemos que $a_1, \ldots, a_n$ é uma* ***sequência quase*** *M**- regular** se a seguinte condição se verifica:*

Se $F(X_1, \ldots, X_n) \in M[X_1, \ldots, X_n]$ é um elemento homogêneo de grau n e $F(a) \in I^{n+1}M$, então todos os coeficientes de F são elementos de IM.

Para finalizar, daremos o resultado que relaciona dimensão e multiplicidade. Na demonstração, estão esquematizados os passos para chegar em tal resultado, fazendo referência às afirmações que não provaremos.

Teorema 1.1.52 *Seja $(A, \mathscr{M})$ um anel local noetheriano . Se A é anel de Cohen-Macaulay, então $dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{A}{I}\right) = e(I)$, para qualquer ideal $\mathscr{M}$- primário I de A.*

Demonstração: Seja I um ideal $\mathscr{M}$- primário. Como A é noetheriano e I é um ideal de A, então I é finitamente gerado (Proposição 1.1.11). Sejam $a_1, \ldots, a_d \in A$ os seus geradores. Como A é anel de Cohen-Macaulay, $\{a_1, \ldots, a_d\}$ é uma sequência $\mathscr{M}$- regular. Logo, a sequência $\{a_1, \ldots, a_d\}$ é quase $\mathscr{M}$- regular (ver [25, Teorema 16.2, página 125]).

Além disso, $G_{\mathscr{M}}(A) \simeq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_d]$, como álgebras graduadas, onde $\mathbb{K} = \frac{A}{\mathscr{M}}$, ou seja, $\frac{\mathscr{M}^i}{\mathscr{M}^{i+1}} \simeq A_i$, onde A_i é o conjunto de polinômios em d indeterminadas em $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_d]$ de grau i (ver [25, Teorema 16.2, página 125]).

Assim $dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathscr{M}^i}{\mathscr{M}^{i+1}}\right) = dim_{\mathbb{K}}(A_i)$. Por indução, mostra-se que $dim_{\mathbb{K}}(A_i) = \binom{i+d-1}{d-1}$ (ver [25, página 138]).

Agora, a função de Hilbert-Samuel $\chi_A(n)$ (em $\mathscr{M}$) é dada por

$$\sum_{i=0}^{n} H(G_{\mathscr{M}}(A), i) = \sum_{i=0}^{n} dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathscr{M}^i}{\mathscr{M}^{i+1}}\right).$$

Daí,

$$\chi_A(n) = \sum_{i=0}^{n} dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathscr{M}^i}{\mathscr{M}^{i+1}}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+d-1}{d-1} = \binom{n+d}{d}.$$

Por outro lado, a função de Hilbert-Samuel $\chi_A^I(n)$ (em I) é dada por

$$\chi_A^I(n) = dim_{\mathbb{K}}\left(\tfrac{A}{I}\right) \chi_A(n) \text{ (ver [25, página 138]).}$$

Logo, $\chi_A^I(n) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{A}{I}\right)\binom{n+d}{d}$.

Visto que $e(I)$ é o primeiro coeficiente da função de Hilbert-Samuel em I, concluímos que $e(I) = dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{A}{I}\right)$. ■

1.1.3 Categorias

A principal referência para detalhes é [17].

Definição 1.1.53 *Uma **categoria** é um trio ordenado $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ composto por um conjunto $\mathscr{O}$, cujos elementos são chamados de **objetos**, um conjunto M de aplicações entre objetos de $\mathscr{O}$, chamadas de **morfismos** e denotadas por $f : A \to B$, onde $A, B \in \mathscr{O}$ (com A chamado de **domínio** da f e denotado por $d(f)$, e B chamado de **codomínio** da f e denotado por $c(f)$) e uma operação $\circ$ em M, satisfazendo às seguintes condições: sejam f, g, h morfismos em M,*

1. *Condição de Ligamento: Se $f \circ g$ está definida, então $d(f \circ g) = d(g)$ e $c(f \circ g) = c(f)$.*
2. *Condição de Associatividade: Se $f \circ g$ e $h \circ f$ estão definidas, então $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.*
3. *Condição de Existência da Identidade: Para cada objeto A, existe um morfismo e tal que $d(e) = A = c(e)$ e*
   - *(a) $f \circ e = f$, sempre que $f \circ e$ está bem definida;*
   - *(b) $e \circ g = g$, sempre que $e \circ g$ está bem definida.*

Observação 1.1.54 *Considere o conjunto $D = \{(f, g); f, g \in M$ e $d(f) = c(g)\}$. Esse é um subconjunto do conjunto M, formado pelas composições de aplicações $f \circ g$.*

Exemplo 1.1.55 *Considere $\mathscr{O}$ como sendo o conjunto de todos os grupos abelianos, M como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupos abelianos e $\circ$ denota a composição usual de homomorfismos de grupos.*

O trio $(\mathscr{O}, M, \circ)$ é uma categoria, chamada categoria de grupos abelianos. De fato:

1. *Sejam $f, g \in M$ tais que $f \circ g$ está definida. Então existem grupos abelianos A, B, C tais que $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$. Logo, $d(f \circ g) = d(g)$ e $c(f \circ g) = c(f)$. Portanto, a condição de ligamento se verifica.*
2. *Sejam $f, g, h \in M$, tais que $f \circ g$ e $h \circ f$ estão definidas. Então existem grupos A, B, C, D tais que $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{h} D$. Assim, dado $x \in A$, temos $(h \circ (f \circ g))(x) = h(f(g(x))) = (h \circ f)(g(x)) = ((h \circ f) \circ g)(x)$. Logo, a condição de associatividade se verifica.*

3. *Seja A um grupo abeliano. Considere a aplicação identidade $id : A \to A$. Temos: $d(id) = A = c(id)$. Além disso, dada $f \in M$, temos $f \circ id = f$ e $id \circ f = f$. Portanto, a condição de existência da identidade se verifica.*

Notação: *Denotaremos a categoria de grupos abelianos por $\mathscr{A}b$.*

Exemplo 1.1.56 *Seja R um anel. Considere $\mathscr{O}$ como sendo o conjunto de todos os R-módulos, M como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de R- módulos e $\circ$ denota a composição usual de homomorfismos de R- módulos*

O trio $(\mathscr{O}, M, \circ)$ é uma categoria, chamada categoria de R- módulos. De fato:

1. *Sejam $f, g \in M$ tais que $f \circ g$ está definida. Então existem R-módulos A, B, C tais que $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$. Logo, $d(f \circ g) = d(g)$ e $c(f \circ g) = c(f)$. Portanto, a condição de ligamento se verifica.*

2. *Sejam $f, g, h \in M$, tais que $f \circ g$ e $h \circ f$ estão definidas. Então existem R-módulos A, B, C, D tais que $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{h} D$. Assim, dado $x \in A$, temos $(h \circ (f \circ g))(x) = h(f(g(x))) = (h \circ f)(g(x)) = ((h \circ f) \circ g)(x)$. Logo, a condição de associatividade se verifica.*

3. *Seja A um R-módulo. Considere a aplicação identidade $id : A \to A$. Temos: $d(id) = A = c(id)$. Além disso, dada $f \in M$, temos $f \circ id = f$ e $id \circ f = f$. Portanto, a condição de existência da identidade se verifica.*

Definição 1.1.57 *Uma categoria $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ possui o **elemento zero** se $\mathscr{C}$ possui um elemento 0 tal que, para qualquer objeto X de $\mathscr{C}$, os conjuntos $\{f \in M; d(f) = 0$ e $c(f) = X\}$ e $\{g \in M; d(g) = X$ e $c(g) = 0\}$ possuem apenas um elemento.*

Exemplo 1.1.58 *Seja $\mathscr{A}b$ a categoria de grupos abelianos. $\mathscr{A}b$ possui elemento zero. De fato, existe o grupo abeliano $\{0\}$ tal que*

$$\{f \in M; d(f) = 0 \text{ e } c(f) = X\} = \{0\} = \{g \in M; d(g) = X \text{ e } c(g) = 0\}.$$

Notação: Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ e considere os objetos de $\mathscr{A}$, A e B. Denotaremos por $\mathscr{C}(A, B)$ o conjunto de morfismos f de M tais que $d(f) = A$ e $c(f) = B$.

Definição 1.1.59 *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $\{A_i; i \in I\}$ uma família de objetos de $\mathscr{C}$. Um **produto** para a família $\{A_i; i \in I\}$ é um objeto P de $\mathscr{C}$ com uma família de morfismos $\{\pi_i : P \to A_i; i \in I\}$ tais que, para qualquer objeto $B \in \mathscr{C}$ e qualquer família de morfismos $\{\varphi_i : B \to A_i; i \in I\}$, existe um único morfismo $\varphi : B \to P$ tal que $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$, para todo $i \in I$.*

Definição 1.1.60 *Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ uma categoria. A categoria $\mathscr{C}$ é **aditiva** se:*

1. *$\mathscr{C}$ possui elemento zero;*

2. *Quaisquer dois objetos de $\mathscr{C}$ possuem produto;*

3. *Dados objetos A, B de $\mathscr{C}$, os conjuntos de morfismos $\mathscr{C}(A, B)$ são grupos abelianos tais que a composição $\mathscr{C}(A, B) \times \mathscr{C}(B, C) \to \mathscr{C}(A, C)$ é bilinear.*

Definição 1.1.61 *Seja $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ uma categoria aditiva. $\mathscr{C}$ é **abeliana** se para cada morfismo $\phi : A \to B$ entre objetos de $\mathscr{C}$, existe uma sequência*

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} B \xrightarrow{c} \tilde{K}$$

com as seguintes propriedades:

1. *$j \circ i = \phi$;*

2. *K e $\tilde{K}$ são, respectivamente, o kernel e o cokernel de ϕ;*

3. *I é o kernel de k e é o cokernel de c.*

Exemplo 1.1.62 *A categoria de grupos abelianos é uma categoria abeliana. Ver [18, página 7].*

Definição 1.1.63 *Sejam duas categorias $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ e $\mathscr{D} = (\mathscr{O}', M', \circ')$. Um **funtor** $\mathscr{T} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é um par ordenado de aplicações (também denotadas por $\mathscr{T}$) composto por uma função objeto $\mathscr{T} : \mathscr{O} \to \mathscr{O}'$, que associa a cada objeto C de $\mathscr{C}$, um objeto $\mathscr{T}(C)$ de $\mathscr{D}$, e por uma função morfismo $\mathscr{T} : M \to M'$ que associa a cada morfismo $f : C \to \tilde{C}$ de $\mathscr{C}$, um morfismo $\mathscr{T}(f) : \mathscr{T}(C) \to \mathscr{T}(\tilde{C})$ de $\mathscr{D}$.*

*O funtor $\mathscr{T}$ é chamado **covariante** se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $f \circ g$ está definida em $\mathscr{C}$, então $\mathscr{T}(f \circ g) = \mathscr{T}(f) \circ' \mathscr{T}(g)$, $\forall\, f, g \in M$;*

2. *Para cada $A \in \mathscr{O}$, temos $\mathscr{T}(id_A) = id_{\mathscr{T}(A)}$.*

*O funtor $\mathscr{T}$ é chamado **contracovariante** se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $f \circ g$ está definida em $\mathscr{C}$, então $\mathscr{T}(f \circ g) = \mathscr{T}(g) \circ' \mathscr{T}(f)$, $\forall\, f, g \in M$;*

2. *Para cada $A \in \mathscr{O}$, temos $\mathscr{T}(id_A) = id_{\mathscr{T}(A)}$.*

Exemplo 1.1.64 *Considere as categorias de R-módulos $\mathscr{C} = (\mathscr{O}, M, \circ)$ e de grupos abelianos $\mathscr{D} = (\mathscr{O}', M', \circ')$.*

Dado um R- módulo A, considere ainda o par de aplicações $\mathscr{F} = (Hom_R(A,-), \widehat{Hom}_R(A,-))$, *dadas por:* $Hom_R(A,-) : \mathscr{O} \to \mathscr{O}'$, *que associa a cada R-módulo B, o grupo abeliano* $Hom_R(A,B)$; *e* $\widehat{Hom}_R(A,-) : M \to M'$, *que associa a cada homomorfismo de R-módulos* $f : C \to B$, *um homomorfismo de grupos abelianos* $\widehat{Hom}_R(A,f) : Hom_R(A,C) \to Hom_R(A,B)$ *da seguinte forma: a cada homomorfismo de R-módulos* $g \in Hom_R(A,C)$ *associa-se o homomorfismo* $f \circ g$. *Mostremos que* $\mathscr{F}$ *é um funtor covariante. De fato:*

1. *Se* $f \circ g$ *está definida em* $\mathscr{C}$, *então existem R-módulos* B, C, D *tais que* $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$. *Temos:*
$$\widehat{Hom}_R(A, f \circ g) : Hom_R(A,B) \to Hom_R(A,D)$$
dada por $h \mapsto (f \circ g) \circ h, \forall\, h \in Hom_R(A,B)$. *Mas:*
$$\widehat{Hom}_R(A,f) : Hom_R(A,B) \to Hom_R(A,C)$$
é dada por $h \mapsto f \circ h$ *e* $\widehat{Hom}_R(A,g) : Hom_R(A,C) \to Hom_R(A,D)$ *é dada por* $h' \mapsto g \circ h'$. *Assim, para qualquer* $h \in Hom_R(A,B)$, $f \circ h \in Hom_R(A,C)$, *e podemos aplicar* $\widehat{Hom}_R(A,g)$ *sobre esta aplicação, logo:* $\widehat{Hom}_R(A,g)(f \circ h) = g \circ (f \circ h)$. *Como a operação de composição de aplicações é associativa, temos que*
$$\widehat{Hom}_R(A, f \circ g) = \widehat{Hom}_R(A,f) \circ \widehat{Hom}_R(A,g).$$

2. *Para cada* $A \in \mathscr{O}$, *seja* id_A *a aplicação identidade sobre o R-módulo A. Então,* $\widehat{Hom}_R(A, id_A) : Hom_R(A,A) \to Hom_R(A,A)$ *é dada por* $f \mapsto f \circ id_A = f$. *Logo,* $\widehat{Hom}_R(A, id_A)$ *é a aplicação identidade sobre* $Hom_R(A,A)$.

Observação 1.1.65 *O funtor do exemplo anterior será bastante útil em seções posteriores e o denotaremos por* $(Hom_R A, -)$, *onde A é um R-módulo. Vale lembrar que o funtor é um par de aplicações: a aplicação objeto e a aplicação morfismo. Costuma-se utilizar apenas uma notação para ambas aplicações, a fim de simplificar a escrita. Sendo assim, nos referiremos às aplicações objeto e morfismo do funtor em questão através da notação* $(Hom_R A, -)$.

Proposição 1.1.66 *Sejam* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *categorias aditivas e* $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *um funtor entre elas. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *T preserva soma de quaisquer dois objetos;*

2. *T preserva produto de quaisquer dois objetos;*

3. *Para cada* $A, A' \in \mathscr{A}$, $T : \mathscr{A}(A,A') \to \mathscr{B}(T(A), T(A'))$.

Definição 1.1.67 *Se um funtor T satisfaz qualquer uma das condições da proposição anterior, dizemos que T é um funtor* ***aditivo***.

1.2 Formas holomorfas

Definição 1.2.1 *Seja $p \in \mathbb{C}^n$. O* ***espaço tangente*** *de $\mathbb{C}^n$ em p, denotado por $(T_p\mathbb{C}^n)$, é o conjunto dos vetores aplicados em p.*

Note que $T_p\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n$.

Definição 1.2.2 *Dado o espaço tangente $T_p\mathbb{C}^n$. O* ***espaço dual*** *de $T_p\mathbb{C}^n$, denotado por $(T_p\mathbb{C}^n)^*$, é o conjunto das funções lineares $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.*

Observação 1.2.3 *Seja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função complexa e $z \in \mathbb{C}^n$. Como a aplicação d_zf é linear, então $d_zf \in (T_p\mathbb{C}^n)^*$.*

O conjunto $\{d_pz_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, onde $z_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é a projeção na i-ésima coordenada é uma base para $(T_p\mathbb{C}^n)^*$ pois $d_pz_i \in (T_p\mathbb{C}^n)^*$ e

$$d_pz_i(e_j) = \frac{\partial z_i}{\partial z_j} = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases},$$

onde $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ com 1 na posição j.

Definição 1.2.4 *Considere $(\mathbb{C}^n)^k = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n$, k vezes. Uma função $\varphi : (\mathbb{C}^n)^k \to \mathbb{C}$ é* ***k-linear*** *se φ é linear em cada variável. Se $\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$ para algum i, j, dizemos que φ é* ***alternada****.*

Denotaremos o conjunto das aplicações ***k-lineares alternadas*** *por $\Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$.*

Exemplo 1.2.5 *Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ aplicações lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$ definido*

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Observação 1.2.6 *Diretamente por propriedade de determinantes, podemos concluir que de fato $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ é k- linear alternada. Em particular $d_pz_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_pz_{i_k} \in \Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$.*

Proposição 1.2.7 *O conjunto $\{d_pz_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_pz_{i_k},\ i_1 < i_2, \ldots < i_k\}$, onde $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, forma uma base para $\Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$.*

Demonstração: Os elementos do conjunto são linearmente independentes, pois se

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} a_{i_1i_2\cdots i_k} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k} = 0,\ i_j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

é aplicado a $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$, $j_1 < \cdots < j_k$ e $j_l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que

$$a_{j_1\cdots j_k} = \sum a_{i_1i_2\cdots i_k}(dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0,$$

para todo $j_1 \cdots j_k$ pois,

$$(dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \ det(dz_{i_j}(e_{j_l})) =$$

$$\begin{vmatrix} dz_1(e_1) & dz_1(e_2) & \cdots & dz_1(e_n) \\ dz_2(e_1) & dz_2(e_2) & \cdots & dz_2(e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dz_n(e_1) & dz_n(e_2) & \cdots & dz_n(e_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Vamos mostrar que se $f \in \Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$, então f é uma combinação linear de

$$f = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k}.$$

De fato,

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k} = g$$

é um elemento de $\Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$. Além disso, $g(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, para todo $i_1, \ldots, i_k$.

Basta fazer $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k}$. ■

Definição 1.2.8 *Uma k-* ***forma exterior em*** *$\mathbb{C}^n$ $(k \geq 1)$ é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{C}^n$ associa $w(p) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$.*

Pela proposição anterior, w pode ser escrito na forma

$$w(p) = \sum a_{i_1 \cdots i_k}(p)(d_p z_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_p z_{i_k}), \ i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

onde $a_{i_1 \cdots i_k}$ são aplicações de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$.

Definição 1.2.9 *Nas condições acima, se as funções $a_{i_1 \cdots i_k}$ forem holomorfas, w é chamada de k-* ***forma holomorfa****.*

Definição 1.2.10 *Sejam w uma k- forma holomorfa e φ uma s- forma holomorfa:*

$$\omega = \sum_I a_I dz_I, \ I = (i_1, \ldots, i_k), \ i_1 < \ldots < i_k,$$

$$\varphi = \sum_J b_J dz_J, \ J = (j_1, \ldots, j_s), \ j_1 < \ldots < j_s.$$

Definimos a operação chamada ***produto exterior*** *ou* ***produto wedge*** *da seguinte forma:*

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,\, J} a_I b_J dz_I \wedge dz_J.$$

Se $I = J$ podemos definir a soma:

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I) dz_I.$$

Observe que $\omega \wedge \varphi$ é uma $(k+s)$-forma holomorfa.

Propriedades:

Se ω é uma k-forma holomorfa, φ uma s-forma holomorfa e σ uma r- forma holomorfa, temos:

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \sigma = \omega \wedge (\varphi \wedge \sigma)$;

2. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$;

3. $\omega \wedge (\varphi + \sigma) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \sigma$ quando $r = s$.

Demonstração: Sejam $\omega = \sum_I a_I dz_I,\ I = (i_1, \ldots, i_k)$, $\varphi = \sum_J b_J dz_J,\ J = (j_1, \ldots, j_s)$ e $\sigma = \sum_L c_L dz_L,\ L = (l_1, \ldots, l_r)$.

1. $$(\omega \wedge \varphi) \wedge \sigma = \left(\sum_{I,J} a_I b_J dz_I \wedge dz_J \right) \wedge \sum_L dz_L = \sum_{I,J,L} (a_I b_J) c_L (dz_I \wedge dz_J) \wedge dz_L =$$

$$= \sum_{I,J,L} a_I (b_J c_L) dz_I \wedge (dz_J \wedge dz_L) = \sum_I a_I dz_I \wedge \left(\sum_{J,L} b_J c_L dz_J \wedge dz_L \right) = \omega \wedge (\varphi \wedge \sigma).$$

2. $$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= \sum_{I,J} a_I b_J dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k} \wedge dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \cdots \wedge dz_{j_s} \\ &= \sum_{I,J} b_J a_I (-1) dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{k-1}} \wedge dz_{j_1} \wedge dz_{i_k} \wedge dz_{j_2} \wedge \cdots \wedge dz_{j_s} \\ &= \cdots = \sum_{I,J} b_J a_I (-1)^k dz_{j_1} \wedge dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{k-1}} \wedge dz_{i_k} \wedge dz_{j_2} \wedge \cdots \wedge dz_{j_s}. \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo raciocínio para dz_{j_p}, $\forall\ j_p \in J$, como J tem s elementos, obtemos

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{I,J} b_J a_I (-1)^k dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \cdots \wedge dz_{j_s} \wedge dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k} = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega.$$

3. $$\begin{aligned} \omega \wedge (\varphi + \sigma) &= \textstyle\sum_I a_I z_I \wedge (\sum_J (b_J + c_J) dz_J) \\ &= \sum_I a_I (b_J + c_J) dz_I \wedge dz_J) = \sum_{I,J} (a_I b_J + a_I c_J) dz_I \wedge dz_J \\ &= \sum_{I,J} (a_I b_J) dz_I \wedge dz_J + \sum_{I,J} (a_I c_J) dz_I \wedge dz_J = (\omega \wedge \varphi) + (\omega \wedge \sigma). \end{aligned}$$

■

Notação: Denotemos por $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ o conjunto das k-formas holomorfas em $\mathbb{C}^n$.

Proposição 1.2.11 *$\Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ é um $\mathbb{C}$-módulo.*

Demonstração: Sejam duas k- formas holomorfas $\omega_1 = \sum_I a_I dz_I$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$ e $\omega_2 = \sum_I b_I dz_I$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$ e defina a operação de adição dada por $\omega_1 + \omega_2 = \omega = \sum_I (a_I \oplus b_I) dz_I$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$, onde $\oplus$ denota a adição usual de funções. Assim, pelas propriedades de $\oplus$ é fácil ver que $(\Omega^k_{\mathbb{C}^n}, +)$ é grupo abeliano. Defina a aplicação $\phi : \mathbb{C} \times \Omega^k_{\mathbb{C}^n} \to \Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ por $\phi(k, \omega_1) = \sum_I (k \cdot a_I) dz_I$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$, onde " $\cdot$ " denota o produto de uma função por um escalar. Pelas propriedades associativa e distributiva de " $\cdot$ ", temos que a aplicação ϕ satisfaz as condições da definição de módulo. Portanto, $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ é $\mathbb{C}$- módulo. ■

Observação 1.2.12 *Mostra-se também que $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ é um $\mathbb{C}\{x\}$- módulo. Na Proposição 1.2.11, vimos que $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ é grupo abeliano com a operação de adição de k- formas. Defina a aplicação $\varphi : \mathbb{C}\{x\} \times \Omega^k_{\mathbb{C}^n} \to \Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ por $\varphi(f, w) = f \wedge w$, definida em 1.2. Pelas propriedades demonstradas, é fácil ver que φ satisfaz as condições da definição de módulo.*

1.3 Diferencial de Kähler

A principal referência para detalhes é [10].

Definição 1.3.1 *Sejam A um anel comutativo e B e M A- módulos. Uma A-**derivação** de B em M é uma aplicação $d : B \to M$ que satisfaz, para todo $x, y \in B$:*

1. *$d(mx + y) = md(x) + d(y)$, $\forall\ m \in A$, o que significa que d é uma aplicação A-linear;*

2. *$d(xy) = yd(x) + xd(y)$.*

Exemplo 1.3.2 *Considere o corpo das séries de potências $\mathbb{C}\{x\} := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\Omega^1_{\mathbb{C}^n}$ o conjunto das 1- formas holomorfas sobre $\mathbb{C}^n$. Já vimos que $\mathbb{C}\{x\}$ e $\Omega^1_{\mathbb{C}^n}$ são $\mathbb{C}$- módulos. Considere a aplicação $d : \mathbb{C}\{x\} \to \Omega^1_{\mathbb{C}^n}$ definida, para cada $f \in \mathbb{C}\{x\}$, por $d(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Pelas regras de derivação da soma e do produto de funções, temos, para $f, g \in \mathbb{C}\{x\}$, $d(f+g) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+g)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = d(f) + d(g)$ e $d(fg) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} dx_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) g + f \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \right) = d(f)g + fd(g)$.*

Desta forma, d é $\mathbb{C}$- derivação de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ em $\Omega^1_{\mathbb{C}^n}$.

Observação 1.3.3 *O conjunto $Der_A(B, M) := \{d : B \to M; d \text{ é uma } A\text{- derivação de } B \text{ em } M\}$ é A- módulo com as operações $(d_1 + d_2)(b) = d_1(b) + d_2(b)$ e $(a.d)(b) = a.(d(b))$, com $d_1, d_2 \in Der_A(B, M)$, $a \in A$ e $b \in B$.*

Definição 1.3.4 *Seja $f \in \mathbb{C}\{x\}$. O **jacobiano** de f, denotado por Jf, é definido por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$.*

Teorema 1.3.5 *Existem um par (B, d), onde B é um $\mathbb{C}\{x\}$-módulo finitamente gerado e uma $\mathbb{C}$-derivação $d : \mathbb{C}\{x\} \to B$ de $\mathbb{C}\{x\}$ em B, tal que, para cada $\mathbb{C}\{x\}$-módulo M finitamente gerado, o morfismo $\mathbb{C}\{x\}$-linear $\theta_M : Hom_{\mathbb{C}}(B, M) \to Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\}, M)$, dado por $\theta(\varphi) = \varphi \circ d$, é um isomorfismo de A-módulos.*

Demonstração: Seja B o conjunto dos jacobianos de cada aplicação $f \in \mathbb{C}\{x\}$, isto é,

$$B := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i; f \in \mathbb{C}\{x\} \right\}$$

Sobre B, considere a operação $\oplus$ dada por:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \right) \oplus \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+g)(x)}{\partial x_i} dx_i,$$

onde $f, g \in \mathbb{C}\{x\}$ e $+$ denota a operação de adição de aplicações. Visto que $\mathbb{C}\{x\}$ é grupo abeliano com a operação $+$, é fácil ver que B é grupo abeliano com a operação $\oplus$.

Além disso, a multiplicação por um escalar $c \in \mathbb{C}$ é dada por $c \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (c.f(x))}{\partial x_i} dx_i$, onde $f \in \mathbb{C}\{x\}$ e "." denota a multiplicação de um escalar $c \in \mathbb{C}$ por uma aplicação.

Com estas operações, podemos mostrar que B é um $\mathbb{C}$-módulo, pois, para $b, c \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathbb{C}\{x\}$,

1.
$$c. \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx_i \right) = c. \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+g)(x)}{\partial x_i} dx_i \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (c.(f+g)(x))}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (c.f(x) + c.g(x))}{\partial x_i} dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (c.f(x))}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (c.g(x))}{\partial x_i} dx_i.$$

2.
$$(b+c) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (b+c) f(x)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (bf(x) + cf(x))}{\partial x_i} dx_i =$$
$$= b \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \right) + c \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \right).$$

3.
$$c\left(b\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i\right)\right)=c\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(bf(x))}{\partial x_i}dx_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial((cb)f(x))}{\partial x_i}dx_i=$$
$$=(cb)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i.$$

Além disso, a aplicação $\mathbb{C}\{x\}\times B\to B$ dada por

$$\left(f(x),\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i\right)\mapsto f(x).\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i:=\sum_{i=1}^{n}f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i,$$

faz de B um $\mathbb{C}\{x\}$-módulo. A verificação disto é simples, utilizando as operações entre aplicações e seguindo o processo feito na enumeração acima.

Observamos ainda que para $c\in\mathbb{C},\ f\in\mathbb{C}\{x\}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i\in B$, temos:

$$c(f.\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i)=((cf)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i)=(cf)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i=$$

$$=(fc)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i=f(c.\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx_i).$$

Como B é $\mathbb{C}$-módulo e $\mathbb{C}\{x\}$-módulo, temos que B é módulo sobre a $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}\{x\}$.

Por construção $B=\mathbb{C}\{x\}dx_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}\{x\}dx_n$, logo B é um $\mathbb{C}\{x\}$-módulo finitamente gerado.

Considere a aplicação $d:\mathbb{C}\{x\}\to B$ dada por $f\mapsto Jf=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i$. Pelo Exemplo 1.3.2, d é uma $\mathbb{C}$-derivação de $\mathbb{C}\{x\}$ em B.

Dado M um $\mathbb{C}\{x\}$-módulo finitamente gerado, resta mostrar que θ_M é isomorfismo. De fato, sejam $\phi,\psi\in Hom_{\mathbb{C}\{x\}}(B)$ e $h\in A$, temos:

1. $\theta_M(\phi+\psi)=(\phi+\psi)\circ d=\phi\circ d+\psi\circ d=\theta_M(\phi)+\theta_M(\psi)$ e

2. $\theta_M(h\circ\phi)=(h\circ\phi)\circ d=h\circ(\phi\circ d)=h\circ\theta_M(\phi)$.

Logo, θ_M é homomorfismo de A-módulos.

Agora, se $\theta(\phi)=0$, onde 0 é a aplicação nula, temos $\theta(\phi)=\phi\circ d=0$, e assim, $(\phi\circ d)(x_i)=0,\forall\ i=1,\dots,n$, o que implica: $\phi(dx_i)=0$. Como $\{dx_1,\dots,dx_n\}$ gera B, temos que $\phi\equiv 0$. Portanto, $Ker(\theta)=\{0\}$. Logo, θ é injetora.

Para mostrarmos a sobrejetividade, considere $\delta\in Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x\},M)$ e defina $\phi\in Hom_{\mathbb{C}}(B,M)$

por $\phi(dx_i) = \delta(x_i)$. Temos, para $f \in A$,

$$\theta(\phi)(f) = \phi(df) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \phi(dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \delta(x_i) = \delta(f).$$

Assim, θ é sobrejetora. Concluímos, portanto, que θ é isomorfismo de $\mathbb{C}$-módulos. ∎

Definição 1.3.6 *O $\mathbb{C}\{x\}$-módulo B que satisfaz o teorema anterior será denotado por $\Omega^1_{\mathbb{C}\{x\}}$ e o par $(\Omega^1_{\mathbb{C}\{x\}}, d)$ é chamado módulo do diferencial de Kähler.*

Observação 1.3.7 *No desenvolvimento desta seção, vimos que o módulo diferencial de Kähler, $\Omega^1_{\mathbb{C}\{x\}}$, é finitamente gerado em $\mathbb{C}\{x\}$ e uma base para este módulo é $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$. Logo, utilizando a Proposição 1.2.7, temos que $\Omega^1_{\mathbb{C}\{x\}} = \Lambda^1(T_x\mathbb{C}^n)^*$. Com isso, uma 1- forma holomorfa em $\mathbb{C}^n$, $w \in \Omega^1_{\mathbb{C}^n}$, associa a cada ponto $x \in \mathbb{C}^n$, uma 1- forma linear alternada $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$, onde $f \in \mathbb{C}\{x\}$, ou seja, $w(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$.*

Capítulo 2

Módulo dual de Grothendieck

Neste capítulo, desenvolvemos a teoria necessária para a definição do principal objeto relacionado com a definição do número de Milnor de curvas reduzidas e de funções definidas nelas: o módulo dual de Grothendieck.

2.1 O grupo Exterior

Nesta seção, sejam R um anel e $\mathscr{A}$ a categoria de R- módulos.

2.1.1 Funtores derivados

Definição 2.1.1 *Uma* ***cadeia complexa*** $\mathscr{C}$ *em* $\mathscr{A}$ *é uma coleção de objetos* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathscr{A}$ *com morfismos* $\delta_n : C_n \to C_{n-1}$ *em* $\mathscr{A}$ *que satisfazem* $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$*. Os morfismos* δ_n *são chamados* ***diferenciais*** *ou* ***operadores de fronteira****.*

Notação: $\mathscr{C} : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \overset{\delta_{n+1}}{\longrightarrow} C_n \overset{\delta_n}{\longrightarrow} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$ ou $\{C_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exemplo 2.1.2 *Sejam* R *um anel,* A, B *dois* R*-módulos e* $A \oplus B$ *a soma direta dos* R*-módulos* A *e* B*. A sequência*

$$0 \overset{f}{\to} A \overset{i}{\to} A \oplus B \overset{\pi}{\to} B \overset{g}{\to} 0,$$

vista como $\mathscr{C} = \{C_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, onde* $C_0 = B$*,* $C_1 = A \oplus B$*,* $C_2 = A$ *e* $C_j = 0$*,* $\forall\ j \neq 0, 1, 2$*,* $\delta_0 = g$*,* $\delta_1 = \pi$*,* $\delta_2 = i$*, e* $\delta_j = f, \forall\ j \neq 0, 1, 2$*, é uma cadeia complexa, onde* i *é a aplicação inclusão,* π *é a aplicação projeção,* f *é a aplicação que associa* 0 *ao elemento neutro do seu contradomínio e* g *é a aplicação nula. É claro que* $i \circ f = 0, \pi \circ i = 0$ *e* $g \circ \pi = 0$*. Portanto, a sequência acima é uma cadeia complexa.*

Definição 2.1.3 *Um* ***morfismo entre cadeias complexas*** $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$*,* $\mathscr{C} = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *e* $\mathscr{D} = \{D_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, é uma coleção de morfismos* $\varphi = \{\varphi_n : C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, satisfazendo*

$\varphi_n \circ d_{n+1} = \partial_{n+1} \circ \varphi_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$. *Em outras palavras, esses morfismos formam diagramas comutativos com as cadeias complexas de* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}: \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
\mathscr{D}: \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definição 2.1.4 *Sejam* $\mathscr{C} = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *e* $\mathscr{D} = \{D_n, \partial_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *cadeias complexas e* $\varphi, \psi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *dois morfismos entre elas. Uma* ***homotopia*** $h : \varphi \to \psi$ *entre* φ *e* ψ *é uma coleção de morfismos* $h_n : C_n \to D_{n+1}$ *tal que*

$$\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n, \ \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}: \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n - \psi_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & \cdots \\
\mathscr{D}: \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nessas condições, os morfismos de cadeias φ *e* ψ *são ditos* ***homotópicos*** *e serão denotados por* $\varphi \simeq_h \psi$.

Dada uma cadeia complexa $\mathscr{C} = \{C_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, como $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$, temos $Im(\delta_{n+1}) \subset Ker(\delta_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Assim, fica bem definido o seguinte objeto:

Definição 2.1.5 *O* n***-ésimo objeto homológico*** *da cadeia complexa* $\mathscr{C} = \{C_n, \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *denotado por* $H_n(\mathscr{C})$, *é definido como sendo o quociente* $\frac{Ker(\delta_n)}{Im(\delta_{n+1})}$.

Definição 2.1.6 *Uma* ***cocadeia complexa*** $\mathscr{C}$ *em* $\mathscr{A}$ *é uma coleção de objetos* $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathscr{A}$ *com morfismos* $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ *em* $\mathscr{A}$ *que satisfazem* $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. *Os morfismos* δ^n *são chamados* ***operadores de cofronteira****.*

Notação: $\mathscr{C}: \ \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$ ou $\{C^n, \delta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definição 2.1.7 *Um* ***morfismo entre cocadeias complexas*** $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $\mathscr{C} = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *e* $\mathscr{D} = \{D^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *é uma coleção de morfismos* $\varphi = \{\varphi^n : C^n \to D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, *satisfazendo* $\varphi^{n+1} \circ d^n = \partial^n \circ \varphi^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$. *Em outras palavras, esses morfismos formam diagramas comutativos com as cocadeias complexas de* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{D}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}: \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "\varphi^n"] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & \cdots \\
\mathscr{D}: \cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial^n"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Além disso, φ gera uma cadeia complexa como segue:

$$\varphi(\mathscr{C}): \quad \cdots \longrightarrow \varphi^{n-1}(C^{n-1}) \stackrel{\partial^{n-1}}{\longrightarrow} \varphi^{n}(C^{n}) \stackrel{\partial^{n}}{\longrightarrow} \varphi^{n+1}(C^{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

Definição 2.1.8 *Sejam $\mathscr{C} = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\mathscr{D} = \{D^n, \partial^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cocadeias complexas e $\varphi, \psi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dois morfismos entre elas. Uma* ***homotopia*** *$h : \varphi \to \psi$ entre φ e ψ é uma coleção de morfismos $h^n : C^n \to D^{n-1}$ tal que*

$$\psi^n - \varphi^n = \partial^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n, \ \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}: \cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d] & C^{n} \arrow[r, "d^{n}"] \arrow[d, "\varphi^n-\psi^n"'] \arrow[dl, "h^n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\mathscr{D}: \cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & D_n \arrow[r, "\partial^{n}"] & D^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nessas condições, os morfismos de cocadeias φ e ψ são ditos ***homotópicos*** *e serão denotados por $\varphi \simeq_h \psi$.*

Dada uma cocadeia complexa $\mathscr{C} = \{C^n, \delta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, como $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, temos $Im(\delta^n) \subset Ker(\delta^{n+1})$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Assim, fica bem definido o seguinte objeto:

Definição 2.1.9 *O n-* ***ésimo objeto cohomológico*** *da cocadeia complexa $\mathscr{C} = \{C^n, \delta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, denotado por $H^n(\mathscr{C})$, é definido como sendo o quociente $\frac{Ker(\delta^n)}{Im(\delta^{n-1})}$.*

Observação 2.1.10 *O n- ésimo objeto cohomológico é preservado por morfismos de cocadeias homotópicas, isto é, dados $\varphi, \psi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ cocadeias de morfismos tais que $\varphi \simeq_h \psi$, então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(\varphi(\mathscr{C})) = H^n(\psi(\mathscr{D}))$. Ver [28, Proposição 9, página 6].*

2.1.2 Resolução projetiva

Seja $\mathscr{C} = \{C_n, d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma cadeia complexa em $\mathscr{A}$.

Definição 2.1.11 *A cadeia complexa $\mathscr{C}$ é* ***positiva*** *se $C_n = 0$, para todo $n < 0$.*

Notação: $\mathscr{C}: \quad \cdots \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0.$

Exemplo 2.1.12 *A cadeia complexa $0 \stackrel{id}{\to} A \stackrel{i}{\to} A \oplus B \stackrel{\pi}{\to} B \stackrel{g}{\to} 0$ é positiva.*

Definição 2.1.13 *Um objeto P em uma categoria é dito é um* ***objeto projetivo*** *se dados objetos A, B nesta categoria, para cada epimorfismo $\epsilon : A \to B$ e cada morfismo $\gamma : P \to B$, existe um morfismo $\beta : P \to A$ tal que $\gamma \circ \epsilon = \beta$.*

Exemplo 2.1.14 *Sejam $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $\mathscr{A}$ a categoria de R- módulos. O R- módulo $I = \langle 3, 2 + \sqrt{-5}\rangle$ é projetivo. A demonstração desta afirmação encontra-se em [19, página 1] e vamos omiti-la por ser bastante técnica e não corresponder aos objetivos deste trabalho.*

Definição 2.1.15 *Seja $\mathscr{C}$ uma cadeia positiva. A cadeia complexa $\mathscr{C}$ é dita **projetiva** se C_n é um objeto projetivo, para cada $n \geqslant 0$ e é dita **acíclica** se $H_n(\mathscr{C}) = 0$, para $n \geqslant 1$.*

Para o próximo resultado, precisaremos ainda da seguinte definição:

Definição 2.1.16 *Uma sequência de homomorfismos de R- módulos*

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

*é chamada **sequência exata**, se $Im(f_k) = Ker(f_{k+1}), \forall\, k \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 2.1.17 *Uma cadeia positiva*

$$\mathscr{C}: \quad \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

é acíclica se, e somente se, existem aplicações f, g tais que a seguinte sequência é exata

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{f} H_0(\mathscr{C}) \xrightarrow{g} 0.$$

Demonstração: Suponha que a cadeia complexa $\mathscr{C}$ é acíclica. Então $H_n(\mathscr{C}) = 0, \forall\, n \geqslant 1$. Daí,

$$Im(d_{n+1}) = Ker(d_n), \forall\, n \geqslant 1.$$

Agora, $H_0(\mathscr{C}) = \frac{Ker(d_0)}{Im(d_1)} = \frac{C_0}{Im(d_1)}$, pois $Ker(d_0) = C_0$, já que d_0 é a aplicação nula.

Sejam $f : C_0 \to H_0(\mathscr{C})$ a aplicação dada por $f(x) = x + Im(d_1)$ e $g : H_0(\mathscr{C}) \to 0$ a aplicação nula. Assim, pela construção, $Im(d_1) = Ker(f)$ e $Im(f) = H_0(\mathscr{C}) = Ker(g)$. Portanto, a sequência

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{f} H_0(\mathscr{C}) \xrightarrow{g} 0$$

é exata.

Por outro lado, suponha que a sequência

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{f} H_0(\mathscr{C}) \xrightarrow{g} 0,$$

denotada por $\mathscr{C}_1$, é exata.

Definindo $d_0 : C_0 \to 0$ como sendo a aplicação nula, temos $d_0 \circ d_1 = 0$ e, como $\mathscr{C}_1$ é exata, $Im(d_{n+1}) = Ker(d_n)$. Assim

$$d_n \circ d_{n+1} = 0, \forall\, n \geqslant 1 \text{ e } H_n(\mathscr{C}) = \frac{Ker(d_n)}{Im(d_{n+1})} = 0, \forall\, n \geqslant 1.$$

Portanto, $\mathscr{C}$ é uma cadeia acíclica. ■

Definição 2.1.18 *Uma **resolução projetiva** de um objeto A em $\mathscr{A}$ é um par, denotado por $(\mathscr{P}, \psi)$, composto por uma cadeia projetiva acíclica (em $\mathscr{A}$)*

$$\mathscr{P}: \quad \cdots \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0$$

com um morfismo $\psi : P_0 \to A$, que faz a seguinte sequência ser exata:

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0.$$

Notação: A sequência anterior pode ser vista como uma cadeia complexa, denotada por $\mathscr{P}_A$. Por simplicidade, nos referimos à $\mathscr{P}_A$ como sendo uma resolução projetiva de A.

Definição 2.1.19 *Diz-se que uma categoria $\mathscr{A}$ possui **projetivos suficientes** se para cada objeto A existem um objeto projetivo P_0 e um epimorfismo $P_0 \to A$.*

Lema 2.1.20 *Seja P um objeto projetivo da categoria $\mathscr{A}$. Qualquer subconjunto P_1 de P é um objeto projetivo de $\mathscr{A}$.*

Demonstração: Sejam A e B objetos em $\mathscr{A}$. Considere um epimorfismo $\epsilon : A \to B$ e um morfismo $\gamma : P_1 \to B$. Defina a aplicação $\phi : P \to B$ da seguinte maneira: $\phi|_{P_1} = \gamma$ e $\phi(x) = y_0$, $\forall\, x \in P \setminus P_1$, onde y_0 é um elemento fixo de B. Por hipótese, P é projetivo, portanto existe um morfismo $f : P \to A$ tal que $f \circ \epsilon = \gamma$. Considere a restrição $f|_{P_1} : P_1 \to A$. Temos $f|_{P_1} \circ \epsilon = \gamma|_{P_1} = \phi$. Portanto, P_1 é um objeto projetivo. ■

Proposição 2.1.21 *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana com projetivos suficientes. Então podemos construir uma resolução projetiva para qualquer objeto A de $\mathscr{A}$.*

Demonstração: Sejam A um objeto de $\mathscr{A}$ e $n : A \to 0$ a aplicação nula. Como $\mathscr{A}$ possui projetivos suficientes, existe um objeto projetivo P_0 de $\mathscr{A}$ e um epimorfismo $\epsilon_0 : P_0 \to A$, o que nos dá que $P_0 \xrightarrow{\epsilon_0} A \xrightarrow{n} 0$ é uma sequência exata, já que $Im(\epsilon_0) = A = Ker(n)$.

Seja $P_1 := Ker(\epsilon_0)$ e considere a aplicação inclusão $i := \epsilon_1 : P_1 \to P_0$. Pelo Lema 2.1.20, temos que P_1 é um objeto projetivo. Como $Im(\epsilon_1) = Ker(\epsilon_0)$, a sequência $P_1 \xrightarrow{\epsilon_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon_0} A \to 0$ é exata. Seguindo este procedimento, podemos construir uma sequência exata

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

onde os objetos P_i são projetivos.

Como esta sequência é exata e os objetos são projetivos, ela é uma cadeia projetiva, que denotemos por $\mathscr{P}$. Agora, vejamos que $\mathscr{P}$ é acíclica. Usando a Proposição 2.1.17, temos de mostrar que

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to H_0(\mathscr{P}) \to 0$$

é exata. Como $H_0(\mathscr{P}) = Ker(\epsilon_0)/Im(\epsilon_1) = 0$, basta mostrar que

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

é exata, o que se verifica pelo modo como construímos esta sequência.

Portanto, $\mathscr{P}$ é uma resolução projetiva de A. ■

2.2 Funtores derivados à direita

Sejam R um anel, $\mathscr{A}$ a categoria de R- módulos com projetivos suficientes e $\mathscr{B}$ uma categoria abeliana qualquer. No que segue, as construções e demonstrações serão feitas admitindo que todo objeto da categoria $\mathscr{A}$ possui uma resolução projetiva e isto é garantido pela Proposição 2.1.21.

Proposição 2.2.1 *Seja $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor contravariante. Sejam $\mathscr{P}_A$ a resolução projetiva de um objeto A de $\mathscr{A}$, onde*

$$\mathscr{P}_A : \ \cdots \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} A \longrightarrow 0,$$

e $T(\mathscr{P}_A)$ a sequência

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\delta_0)} T(P_0) \xrightarrow{T(\delta_1)} T(P_1) \xrightarrow{T(\delta_2)} \cdots.$$

Então, $T(\mathscr{P}_A)$ é uma cocadeia complexa de objetos de $\mathscr{B}$.

Demonstração: Basta mostrar que $T(\delta_n) \circ T(\delta_{n-1}) = 0$, para todo $n \geqslant 0$.

Como $\mathscr{P}_A$ é uma cadeia complexa, $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0,\ n \geqslant 0$. Sendo T um funtor contravariante entre categorias,

$$T(\delta_n) \circ T(\delta_{n-1}) = T(\delta_{n-1} \circ \delta_n) = T(0) = 0,\ n \geqslant 0.$$

Portanto, $T(\mathscr{P}_A)$ é uma cocadeia complexa de objetos de $\mathscr{B}$. ■

Notação: Usaremos a notação $R_n^{\mathscr{P}_A}T(A) := H^n(T(\mathscr{P}_A))$, para $n \geqslant 0$.

Proposição 2.2.2 *Sejam A e B objetos da categoria $\mathscr{A}$ e $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$ suas resoluções projetivas, respectivamente. Então, a menos de homotopia, existe um único isomorfismo entre o conjunto de morfismos entre A e B e o conjunto dos morfismos de cadeias entre $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$.*

Demonstração: Dado um morfismo $\alpha : A \to B$, devemos mostrar que existe um único morfismo de cadeia complexa $\phi : \mathscr{P}_A \to \mathscr{Q}_B$, a menos de homotopia, onde

$$\mathscr{P}_A: \ \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} A \longrightarrow 0 \quad e$$

$$\mathscr{Q}_B: \ \cdots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{d_0} B \longrightarrow 0.$$

Essa construção será feita por indução. Como $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$ são cadeias projetivas, então elas são sequências exatas com objetos projetivos. Logo, δ_0 e d_0 são epimorfismos e P_i e Q_i são objetos projetivos, qualquer que seja $i \geqslant 0$.

Os morfismos α e δ_0 determinam o morfismo $\alpha \circ \delta_0 : P_0 \to B$ e, sendo $d_0 : Q_0 \to B$ um epimorfismo e P_0 um objeto projetivo, existe um morfismo induzido $\phi_0 : P_0 \to Q_0$, tal que $d_0 \circ \phi_0 = \alpha \circ \delta_0$.

Os morfismos ϕ_0 e δ_1, por sua vez, determinam o morfismo $\phi_0 \circ \delta_1 : P_1 \to Q_0$. Note que

$$d_0 \circ (\phi_0 \circ \delta_1) = (d_0 \circ \phi_0) \circ \delta_1 = (\alpha \circ \delta_0) \circ \delta_1 = \alpha \circ (\delta_0 \circ \delta_1) = \alpha \circ 0 = 0.$$

Assim, $Im(\phi_0 \circ \delta_1) \subset Ker(d_0) = Im(d_1)$. Logo, $d_1 : Q_1 \to Im(d_1)$ é um epimorfismo e, considerando o morfismo $\phi_0 \circ \delta_1 : P_1 \to Q_0$, onde P_1 um objeto projetivo, existe um morfismo $\phi_1 : P_1 \to Q_1$ tal que $d_1 \circ \phi_1 = \phi_0 \circ \delta_1$.

Suponha que existam $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ tais que $\phi_i : P_i \to Q_i$ são morfismos que satisfazem $d_i \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ \delta_i, \ \forall \ i \leq n-1$.

Os morfismos ϕ_{n-1} e δ_n determinam o morfismo $\phi_{n-1} \circ \delta_n : P_n \to Q_{n-1}$ e

$$d_{n-1} \circ (\phi_{n-1} \circ \delta_n) = (d_{n-1} \circ \phi_{n-1}) \circ \delta_n = (\phi_{n-2} \circ \delta_{n-1}) \circ \delta_n = \phi_{n-2} \circ (\delta_{n-1} \circ \delta_n) = \phi_{n-2} \circ 0 = 0.$$

Assim, $Im(\phi_{n-1} \circ \delta_n) \subset Ker(d_{n-1}) = Im(d_n)$. Logo, $d_n : Q_n \to Im(d_n)$ é um epimorfismo e considerando o morfismo $\phi_{n-1} \circ \delta_n : P_n \to Im(Q_{n-1})$, onde P_n é um objeto projetivo, temos que existe um morfismo $\phi_n : P_n \to Q_n$ tal que $d_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ \delta_n$.

Desta forma, construímos um morfismo entre as cadeias $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$ dada pela família de morfismos $\phi_\alpha = \{\phi_n : P_n \to Q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Sejam agora dois morfismos ϕ_α, ψ_α entre as cadeias $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$ determinados pelo morfismo $\alpha : A \to B$ como nos diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_A: \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & P_0 \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\phi_0"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathscr{Q}_B: \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_A: \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & P_0 \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\psi_0"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathscr{Q}_B: \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & B
\end{tikzcd}$$

Vamos construir uma homotopia entre eles. Para isso, construiremos morfismos $h_n : P_n \to Q_{n+1}$ tais que $\phi_n - \psi_n = d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \delta_n$, por indução sobre n.

Inicialmente, note que

$$d_0 \circ (\phi_0 - \psi_0) = d_0 \circ \phi_0 - d_0 \circ \psi_0 = \alpha \circ \delta_0 - \alpha \circ \delta_0 = 0.$$

Assim, $Im(\phi_0 - \psi_0) \subset Ker(d_0) = Im(d_1)$.

Considerando o epimorfismo $d_1 : Q_1 \to Im(d_1)$ e o morfismo $\phi_0 - \psi_0 : P_0 \to Im(d_1)$, onde P_0 é um objeto projetivo, temos que existe um morfismo $h_0 : P_0 \to Q_1$ tal que $d_1 \circ h_0 = \phi_0 - \psi_0$.

Vamos supor que existam $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ de modo que

$$\phi_r - \psi_r = d_{r+1} \circ h_r + h_{r-1} \circ \delta_r, \ \forall\, r \leq n-1.$$

Note que

$$d_n \circ (\phi_n - \psi_n - h_{n-1} \circ \delta_n) = (\phi_{n-1} - \psi_{n-1} - d_n \circ h_{n-1}) \circ \delta_n = h_{n-2} \circ \delta_{n-1} \circ \delta_n = 0.$$

Portanto, $Im(\phi_n - \psi_n - h_{n-1} \circ \delta_n) \subset Ker(d_n) = Im(d_{n+1})$.

Assim, considerando o epimorfismo $d_{n+1} : Q_{n+1} \to Im(d_{n+1})$ e o morfismo $\phi_n - \psi_n - h_{n-1} \circ \delta_n : P_n \to Q_n$, dado que P_n é projetivo, existe um morfismo $h_n : P_n \to Q_{n+1}$ tal que

$$d_{n+1} \circ h_n = \phi_n - \psi_n - h_{n-1} \circ \delta_n, \text{ ou seja, } \phi_n - \psi_n = h_{n-1} \circ \delta_n + d_{n+1} \circ h_n.$$

Portanto, $\phi_\alpha \simeq_h \psi_\alpha$. ■

Sejam A e B objetos da categoria $\mathscr{A}$ e $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$ suas resoluções projetivas, respectivamente. Considere $\alpha : A \to B$ um morfismo entre esses objetos. Pela Proposição 2.2.2, existe um morfismo de cadeia $\phi_\alpha : \mathscr{P}_A \to \mathscr{Q}_B$, $\phi_\alpha = \{\phi_n : P_n \to Q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que nos dá um diagrama comutativo com os morfismos das resoluções projetivas $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_A : & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\phi_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\mathscr{Q}_B : & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1"] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplicando o funtor contravariante T nas resoluções projetivas, obtemos:

$$\begin{tikzcd}
T(\mathscr{Q}_B) : & 0 \arrow[r] & T(B) \arrow[r, "T(\partial_0)"] \arrow[d, "T(\alpha)"] & T(Q_0) \arrow[r, "T(\partial_1)"] \arrow[d, "T(\phi_0)"] & T(Q_1) \arrow[r] \arrow[d, "T(\phi_1)"] & \cdots, \\
T(\mathscr{P}_A) : & 0 \arrow[r] & T(A) \arrow[r, "T(d_0)"] & T(P_0) \arrow[r, "T(d_1)"] & T(P_1) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde T determina, sobre os morfismos $\alpha : A \to B$ e $\phi_n : P_n \to Q_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, os morfismos $T(\alpha) : T(B) \to T(A)$ e $T(\phi_n) : T(Q_n) \to T(P_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Note que,

$$R_n^{\mathscr{P}_A}T(A) = H^n(T(\mathscr{P}_A)) = \frac{Ker(T(d_n))}{Im(T(d_{n-1}))} \subset T(P_n).$$

Como T é funtor contravariante, temos

$$T(\phi_{n-1}) \circ T(\partial_{n-1}) = T(\partial_{n-1} \circ \phi_{n-1}) = T(\phi_{n-2} \circ d_{n-1}) = T(d_{n-1}) \circ T(\phi_{n-2}).$$

Assim, $T(\phi_{n-1})(Im(T(\partial_{n-1}))) \subset Im(d_{n-1})$. Além disso, $T(\phi_n(Ker(\partial_n))) \subset Ker(T(d_n))$, pois

$$\alpha \in Ker(\partial_n) \Rightarrow T(\partial_n)(\alpha) = 0 \Rightarrow T(\phi_n)(T(\partial_n)(\alpha)) = 0.$$

Por outro lado,

$$T(\phi_n)(T(\partial_n)(\alpha)) = T(\partial_n \circ \phi_n)(\alpha) = T(\phi_{n-1} \circ d_n)(\alpha) = (T(d_n) \circ T(\phi_{n-1}))(\alpha).$$

Logo, $T(\phi_{n-1}(\alpha)) \in Ker(d_n)$.

Deste modo, $T(\phi_n)(R_n^{\mathscr{P}_A}(T(A))) \subset R_n^{\mathscr{Q}_B}(T(B))$, pois, se $\alpha \in Ker(\partial_n)$,

$$T(\phi_n)(\alpha + Im(T(\partial_{n-1}))) = T(\phi_n)(\alpha) + T(\phi_n)(Im(T(d_{n-1}))).$$

Notação: Para cada n, denotemos por $H_n(T(\phi_\alpha))$ a restrição da aplicação $T(\phi_n)$ ao conjunto $R_n^{\mathscr{Q}_B}T(B)$.

Proposição 2.2.3 *Seja T um funtor contravariante da categoria $\mathscr{A}$ e considere as aplicações R_nT dada por $R_nT(A) = R_n^{\mathscr{P}_A}T(A), \forall\ A$ objeto em $\mathscr{A}$, e H_n que associa a cada morfismo $\phi : A \to B$ em $\mathscr{A}$ ($\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_B$ resoluções projetivas de A e B, respectivamente), o morfismo $H_n(T(\phi)) : R_n^{\mathscr{Q}_B}T(B) \to R_n^{\mathscr{P}_A}T(A)$, como na discussão anterior. O par (R_nT, H_n) é um funtor covariante, que por simplicidade será denotado por R_nT.*

Demonstração: Claramente R_nT é um funtor. Mostremos que ele é covariante. Sejam A, B e C objetos da categoria $\mathscr{A}$ e $g : A \to B$ e $f : B \to C$ morfismos de $\mathscr{A}$, tais que $f \circ g$ está definida. Sejam $\mathscr{P}_A, \mathscr{Q}_B$ e $\mathscr{R}_C$ as resoluções projetivas de A, B e C, respectivamente. O morfismo f determina um morfismo de cadeias complexas $\phi_f : \mathscr{P}_A \to \mathscr{Q}_B$ e o morfismo g determina um morfismo de cadeias complexas $\psi_g : \mathscr{Q}_B \to \mathscr{R}_C$. Mostremos que

$$H_n(T(\phi_f) \circ T(\psi_g)) = H_n(T(\phi_f)) \circ H_n(T(\psi_g)).$$

Como T é funtor contravariante,

$$H_n(T(\phi_f) \circ T(\psi_g)) = H_n(T(\psi_g \circ \phi_f)) = \psi_n \circ \phi_n|_{R_n^{\mathscr{R}_C}T(C)} = (T(\phi_n) \circ T(\psi_n))|_{R_n^{\mathscr{R}_C}T(C)}.$$

Visto que $T(\psi_n))|_{R_n^{\mathscr{R}_C}(T(C))} \subset R_n^{\mathscr{Q}_B}(T(B))$, podemos escrever

$$(T(\phi_n) \circ T(\psi_n))|_{R_n^{\mathscr{R}_C}T(C)} = T(\phi_n)|_{R_n^{\mathscr{Q}_B}T(B)} \circ T(\psi_n)|_{R_n^{\mathscr{R}_C}(T(C))} = H_n(T(\phi_f)) \circ H_n(T(\psi_g)).$$

Portanto,

$$H_n(T(\phi_f) \circ T(\psi_g)) = H_n(T(\phi_f)) \circ H_n(T(\psi_g)). \tag{2.1}$$

Seja a aplicação identidade sobre o objeto A, $id_A : A \to A$. A partir desse morfismo, podemos construir um morfismo de cadeia complexa $\phi_{id_A} = \{id_n : P_n \to P_n, P_n \in \mathscr{P}_A\}$. Como T é um funtor contravariante,

$$H_n(T(\phi_{id_A})) = T(\phi_{id_A})|_{R_n^{\mathscr{P}_A}(T(A))} = (id_n)_{T(A)}|_{R_n^{\mathscr{P}_A}(T(A))} = id_{H_nT}. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), temos que R_nT é um funtor covariante. ■

Proposição 2.2.4 *Seja $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor aditivo contravariante. Se $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{Q}_A$ são duas resoluções projetivas de um objeto A de $\mathscr{A}$, então, para $n \geqslant 0$, $R_n^{\mathscr{P}_A}T(A)$ coincide com $R_n^{\mathscr{Q}_A}T(A)$.*

Demonstração: O morfismo identidade id_A sobre A induz, como na construção obtida na Proposição 2.2.2, os morfismos $\varphi_{id_A} : \mathscr{P}_A \to \mathscr{Q}_A$ e $\phi_{id_A} : \mathscr{Q}_A \to \mathscr{P}_A$ como a seguir:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "id_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\phi_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "id_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Os morfismos φ_{id_A} e ϕ_{id_A} pertence ao conjunto imagem do morfismo id_A, segundo o isomorfismo da Proposição 2.2.2. Logo, $\phi_{id_A} \simeq_h \varphi_{id_A}$. Então, existe uma cadeia de aplicações $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\phi_n - \varphi_n = d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n$. Daí, como T é contravariante e aditivo, $T(\phi_n - \varphi_n) = T(d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n) \Rightarrow T(\phi_n) - T(\varphi_n) = T(h_n) \circ T(d_{n+1}) + T(\partial_n) \circ T(h_{n-1})$. Por propriedade de funtor contravariante, $T(h_j) = h^{j+1}$, $T(\partial_j) = \partial^{j-1}$ e $T(d_j) = d^{j-1}$. Daí, $T(\phi_n) - T(\varphi_n) = T(h_n) \circ T(d_{n+1}) + T(\partial_n) \circ T(h_{n-1}) = h^{n+1} \circ d^n + \partial_{n-1} \circ h^n$. Logo, $T(\phi) \simeq_h T(\varphi)$.

Portanto, pela Observação 2.1.10, $R_n^{\mathscr{P}_A}T(A) = R_n^{\mathscr{Q}_A}T(A)$. ■

Observação 2.2.5 *As duas últimas proposições nos permitem concluir que o funtor R_nT está bem definido. Na Proposição 2.2.2, vimos que o morfismo $H_n(T(\phi_\alpha))$ depende apenas do morfismo α entre objetos da categoria, mas não do morfismo de cadeia complexa ϕ_α, visto que todos os candidatos a "ϕ_α" são homotópicos. Além disso, segundo a Proposição 2.2.4, os objetos $R_n^{\mathscr{P}_A}T(A)$ independem da resolução projetiva escolhida para o objeto A de $\mathscr{A}$. Logo, o funtor R_nT possui objetos e morfismos bem definidos.*

Definição 2.2.6 *Seja $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor contravariante. Para $n \geqslant 0$, o funtor covariante R_nT é chamado* n***-ésimo funtor derivado à direita*** *de T.*

Um conceito importante para o desenvolvimento da teoria é um caso particular da definição anterior, como segue:

Definição 2.2.7 *Sejam R um anel, $\mathscr{C}$ a categoria abeliana dos R-módulos e B um objeto de $\mathscr{C}$. O n-ésimo funtor derivado à direita do funtor contravariante $Hom_R(-,B)$ é chamado* n***-ésimo funtor exterior*** *e é denotado por $Ext_R^n(-,B)$.*

Em outras palavras, $Ext_R^n(-,B)$ é um funtor covariante, que associa a cada R-módulo A, o grupo abeliano $Ext_R^n(A,B)$, chamado **grupo exterior** de A e B, e a cada homomorfismo de R-módulos $f : A \to C$, o homomorfismo de grupos abelianos $Ext_R^n(A,f) : Ext_R^n(A,B) \to Ext_R^n(C,B)$.

Neste contexto, usando as notações anteriores, dados dois R-módulos A, B, o grupo exterior $Ext_R^n(A,B)$ é calculado da seguinte forma: tome uma resolução projetiva de A

$$\mathscr{P}_A : \ \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

o funtor $Hom_R(-,B)$ determina a cocadeia complexa

$$Hom_R(\mathscr{P}_A, B) : \ 0 \to Hom_R(A,B) \to Hom_R(P_0,B) \to Hom_R(P_1,B) \to \cdots,$$

e $Ext_R^n(A,B)$ é o n-ésimo objeto cohomológico $R_n(Hom_R(A,B))$ da cadeia

$$0 \to Hom_R(P_0,B) \to Hom_R(P_1,B) \to \cdots.$$

Proposição 2.2.8 *Sejam R um anel e A e B, R- módulos. Então $Ext^0(A,B) \simeq Hom_R(A,B)$.*

Demonstração: Seja $\mathscr{P}_A$ uma resolução projetiva de A,

$$\mathscr{P}_A : \ \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} A \longrightarrow 0.$$

Logo, $\mathscr{P}_A$ é uma sequência exata. Assim, o funtor $Hom(-,B)$ determina sobre $\mathscr{P}_A$ a sequência exata

$$Hom(\mathscr{P}_A, B) : \ 0 \overset{Hom(\mathscr{P}_A,\delta_0)}{\longrightarrow} Hom(P_0,B) \overset{Hom(\mathscr{P}_A,\delta_1)}{\longrightarrow} Hom(P_1,B) \longrightarrow \cdots.$$

Por definição,

$$Ext^0(A,B) = R_0(Hom_R(A,B)) = \frac{Ker(Hom(\mathscr{P}_A,\delta_1))}{Im(Hom(\mathscr{P}_A,\delta_0))} = Ker(Hom(\mathscr{P}_A,\delta_1)).$$

Os elementos de $Ker(Hom(\mathscr{P}_A, \delta_1))$ são morfismos da forma $f \circ \delta_0 \in Hom(P_0, B)$ tais que $f \circ \delta_0 \circ \delta_1 = 0$, onde $f \in Hom_R(A, B)$. Como $\delta_0 \circ \delta_1 = 0$, qualquer $f \in Hom(A, B)$ é tal que $f \circ \delta_0 \in Ker(Hom(\mathscr{P}_A, \delta_1))$. Assim, $Ker(Hom(\mathscr{P}_A, \delta_1)) = Hom(P_0, B)$.

Defina $\varphi : Hom(A, B) \to Hom(P_0, B)$ como sendo $\varphi(f) = f \circ \delta_0$, que é claramente um isomorfismo. Logo, $Ker(Hom(\mathscr{P}_A, \delta_1)) = Hom(P_0, B) \simeq Hom(A, B)$ e, portanto,

$$Ext^0(A, B) \simeq Hom(A, B).$$

■

2.3 Espaços complexos

A principal referência para detalhes é [10].

2.3.1 Germes de aplicações e formas holomorfas

Definição 2.3.1 *Seja X um espaço topológico. Um **feixe** $\mathscr{F}$ de aneis sobre X, consiste do seguinte:*

*1) Para cada aberto U de X, existe um anel $\mathscr{F}(U)$ chamado conjunto de **seções** de $\mathscr{F}$ sobre U.*

*2) Para cada par de abertos $V \subseteq U$ de X, existe uma aplicação, chamada de **aplicação de restrição**,*

$$r_U^V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V), \text{ que pode ser denotada por } r_U^V(s) = s_{|V}$$

satisfazendo:

i) $r_U^U = id_{\mathscr{F}(U)}$ para cada aberto U de X;

ii)$r_V^W \circ r_U^V = r_U^W$ para cada $W \subseteq V \subseteq U$ abertos de X.

3) Para cada aberto U de X e cada cobertura $\cup_{i \in I} U_i$ de U por abertos de X tem-se:

i) para quaisquer $s_1, s_2 \in \mathscr{F}(U)$, se $s_{1|_{U_i}} = s_{2|_{U_i}}$ $\forall\, i \in I$, então $s_1 = s_2$;

ii) para cada $i \in I$, tomamos $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$. Se $s_{i|_{U_i \cap U_j}} = s_{j|_{U_i \cap U_j}}$ para todo $i, j \in I$, então existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s_{|_{U_i}} = s_i$ para todo $i \in I$.

*Quando $\mathscr{F}$ satisfaz as condições 1 e 2, $\mathscr{F}$ é chamado **pré-feixe** de aneis sobre X.*

Definição 2.3.2 *Seja $\mathscr{A}$ um feixe de aneis sobre o espaço topológico X. Um feixe $\mathscr{F}$ sobre X é chamado **feixe de $\mathscr{A}$- módulos** se, para cada aberto U de X, $\mathscr{F}(U)$ é um $\mathscr{A}(U)$-módulo e as aplicações restrições são morfismos de $\mathscr{A}(U)$- módulos.*

Exemplo 2.3.3 Em $\mathbb{C}^n$, considerando a topologia usual, definimos o feixe $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ da seguinte maneira:

Dado $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto, $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa}\}$. Para $V \subseteq U$ abertos, consideremos as restrições naturais $r_U^V : \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(V)$, com $r_U^V(s) = s_{|V}$.

Vamos verificar que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ é um feixe de aneis sobre $\mathbb{C}^n$. Claramente $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ é anel com as operações usuais de adição e multiplicação de funções e as restrições naturais r_U^V satisfazem 2 i) e 2 ii). Mostremos que valem as propriedades 3 i) e 3 ii).

Sejam U um subconjunto aberto de X e $\bigcup_{i \in I} U_i$ uma cobertura de U por abertos de X.

Sejam f e g seções sobre U com a propriedade $f|_{U_i} = g|_{U_i}, \forall\, i \in I$. Assim, $f(x) = g(x), \forall\, x \in U_i$. Seja $x \in U$. Como $\bigcup_{i \in I} U_i$ é cobertura de U, $x \in U_i$, para algum $i \in I$. Logo, $f(x) = g(x)$. Portanto, $f = g$.

Considere $f_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U_i)$ uma família de seções com a propriedade $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Defina a aplicação $f : \bigcup_{i \in I} U_i \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = f_i(x)$, se $x \in U_i$. Note que f está bem definida, pois se $x \in U_i \cap U_j, f_i(x) = f_j(x)$.

Sejam $\mathscr{F}$ um feixe de um espaço topológico X e $a \in X$. Considere pares da forma (U, s), onde U é aberto de X contendo a e $s \in \mathscr{F}(U)$. Sobre o conjunto dos pares do tipo (U, s), podemos definir uma relação $\sim$ da seguinte forma:

$(U, s) \sim (V, t)$ se existe uma vizinhança aberta W de a tal que $a \in W \subset U \cap V$ e $s|_W = t|_W$ ou, equivalentemente, $r_U^W(s) = r_V^W(t)$.

Esta relação é uma relação de equivalência e suas classes de equivalência serão denotadas por $[U, s]_a$, para cada $a \in X$.

Definição 2.3.4 $[U, s]_a$ *é chamada* ***germe*** *de* $\mathscr{F}$ *no ponto* a*. O conjunto de todos os germes de* $\mathscr{F}$*, denotado por* $\mathscr{F}_a$*, é chamado* ***stalk*** *de* $\mathscr{F}$ *em* a*.*

O stalk do feixe $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ será denotado por $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$, ou seja, é o conjunto dos germes de funções holomorfas de $\mathbb{C}^n$ em x.

Observação 2.3.5 *Note que* $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x} \simeq \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$*, pois dado um elemento* f *de* $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$*,* f *é um germe de função holomorfa em* x*, o que significa que existe uma série de potências convergente em* x *que coincide com* f *em uma vizinhança de* x*.*

Proposição 2.3.6 $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ *é um anel local, ou seja, possui um único ideal maximal.*

Demonstração: Faremos esta demonstração para o caso em que $x = 0$ e o caso em que $x \neq 0$ se verifica por translação de pontos. É fácil ver que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ é anel com as operações usuais de adição e multiplicação de funções. Agora, seja $\mathscr{M}$ o conjunto dos germes $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ tais que f não é unidade em $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Então $\mathscr{M} = \{f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}; f(0) = 0\}$. Verifiquemos essa igualdade. Se f é unidade em $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, existe $g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ tal que $f.\frac{1}{g} = 1$, daí, $f(0).(\frac{1}{g})(0) = 1$ e concluímos que $f(0) \neq 0$. Por outro lado, se $f(0) \neq 0$, a aplicação $\frac{1}{f}$ é holomorfa em torno de 0 e, assim, $\frac{1}{f} \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, com $f.\frac{1}{f} = 1$. Portanto, f é unidade.

Agora, é fácil ver que $\mathscr{M}$ é um ideal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Mostremos que $\mathscr{M}$ é o único ideal maximal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Seja I ideal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ tal que $\mathscr{M} \subset I$. Mostremos que $\mathscr{M} = I$ ou $I = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Se existir $g \in I$ tal que $g \notin \mathscr{M}$, então g é uma unidade de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ e, com isso, $I = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Portanto, $\mathscr{M}$ é ideal maximal. Se existir um ideal maximal $\mathscr{M}_1$, ou $\mathscr{M}_1$ contém uma unidade de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, e neste caso, $\mathscr{M}_1 = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ou $\mathscr{M}_1$ não possui unidade de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ e, neste caso, $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}$. Logo, $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ é um anel local. ■

Observação 2.3.7 *O anel local $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ é um anel noetheriano. Ver [11, página 7].*

Exemplo 2.3.8 Em $\mathbb{C}^n$, considerando a topologia usual, podemos definir também um feixe, denotado por $\mathscr{F}_{\Omega^k_{\mathbb{C}^n}}$, da seguinte maneira: para cada aberto $U \subseteq \mathbb{C}^n$, associamos o $\mathbb{C}$- módulo $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}(U)$ e para $V \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ abertos, consideremos as restrições naturais $\rho^U_V : \Omega^k_{\mathbb{C}^n}(U) \to \Omega^k_{\mathbb{C}^n}(V)$, com $\rho^U_V(w) = w_{|V}$.

É fácil ver que $\mathscr{F}_{\Omega^k_{\mathbb{C}^n}}$ é um feixe de $\mathbb{C}$- módulos.

Notação: O stalk do feixe $\mathscr{F}_{\Omega^k_{\mathbb{C}^n}}$ em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ será denotado por $\Omega^k_{\mathbb{C}^n,x}$, ou seja, é o $\mathbb{C}$- módulo formado pelos germes das k- formas holomorfas de $\mathbb{C}^n$ em x.

Observação 2.3.9 *Pela descrição dos elementos de $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}$ (ver página 15), temos que os elementos de $\Omega^k_{\mathbb{C}^n,x}$ são da forma*

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)(d_p z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_p z_{i_k}), i_j \in \{1, \ldots, n\},$$

tais que $a_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ é um germe de função holomorfa de $\mathbb{C}^n$ em x.

No caso particular em que $k = 1$, pela Observação 1.3.7, os elementos de $\Omega^1_{\mathbb{C}^n,x}$ são germes de 1-formas holomorfas que associam a cada ponto $p \in \mathbb{C}^n$, a 1- forma linear alternada $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} dx_i$, onde $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$.

2.3.2 Germes de espaço complexo

A seguir, abordamos conceitos para poder estender $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ e $\mathscr{F}_{\Omega^k_{\mathbb{C}^n}}$ sobre um conjunto especial de $\mathbb{C}^n$.

Definição 2.3.10 *Sejam $\mathscr{A}$ um feixe de aneis, e $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ feixes de $\mathscr{A}$- módulos. $\mathscr{F}_1$* ***é $\mathscr{A}$- submódulo de*** *$\mathscr{F}_2$, se, para todo $U \subset X$, $\mathscr{F}_1(U)$ é $\mathscr{A}(U)$- submódulo de $\mathscr{F}_2(U)$ e as aplicações restrições de $\mathscr{F}_1$ são obtidas via restrição usual das aplicações restrição de $\mathscr{F}_2$.*

Um feixe $\mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$- módulos é dito ***feixe de ideais sobre*** *$\mathscr{A}$ se $\mathscr{F}$ é $\mathscr{A}$- submódulo de $\mathscr{A}$.*

Definição 2.3.11 *Seja $\mathscr{I}$ um feixe de ideais sobre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$. Diz-se que $\mathscr{I}$ é do* ***tipo finito sobre*** $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ *se, para todo $p \in \mathbb{C}^n$ existem uma vizinhança U de p e germes de funções holomorfas $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n(U)}$ tais que $\mathscr{I}(U) = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$.*

Observação 2.3.12 *Note que o stalk $\mathscr{I}_p$ é o conjunto dos germes de funções holomorfas f tais que $f \in \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$.*

Definição 2.3.13 *Sejam $\mathscr{I}$ um ideal do tipo finito sobre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ e $X = \{p \in \mathbb{C}^n; \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,p}}{\mathscr{I}_p} \neq 0\}$. Defina $\mathscr{O}_X$ como sendo o feixe que associa a cada aberto $X \cap U$ de X o anel quociente $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(X\cap U)}{\mathscr{I}(X\cap U)}$. O par $(X, \mathscr{O}_X)$ é chamado* ***espaço complexo*** *e $\mathscr{I}$ é chamado* ***ideal associado a*** *X.*

Notação: O stalk do feixe $\mathscr{O}_X$ em $x \in X$ será denotado por $\mathscr{O}_{X,x}$.

Note que $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\ldots,f_k \rangle}$, pois

$$\mathscr{O}_{X,x} = \left\{ [U \cap X, f]_x; f \in \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(X \cap U)}{\mathscr{I}(X \cap U)} \right\} = \left\{ [U \cap X, f]_x; f \in \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(X \cap U)}{\langle f_1, \ldots, f_k \rangle} \right\} \tag{2.3}$$

Exemplo 2.3.14 *Sejam $f_1(x,y,z) = x^4 - y^3$ e $f_2(x,y,z) = x^5 - z^3$ germes de funções holomorfas em $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^3,0}$ e considere o feixe de ideais $\mathscr{I}$ sobre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^3}$ que associa a cada aberto U de $\mathbb{C}^3$ o ideal $\mathscr{I}(U) = \langle f_1, f_2 \rangle \mathscr{O}_{\mathbb{C}^3}(U)$. O feixe $\mathscr{I}$ é claramente do tipo finito. Seja $X = \{p \in \mathbb{C}^3; \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^3,p}}{\langle f_1, f_2 \rangle} \neq 0\} = \{p \in \mathbb{C}^3; f_1(p) = f_2(p) = 0\}$. Portanto,*

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3; x = t^3, y = t^4, z = t^5, t \in \mathbb{C}\}.$$

Sobre X defina o feixe de aneis $\mathscr{O}_X$ que associa a cada aberto $U \cap X$ o anel quociente $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^3}(X\cap U)}{\mathscr{I}(X\cap U)}$. Pela construção, $(X, \mathscr{O}_X)$ é um espaço complexo.

Proposição 2.3.15 *Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço complexo. Então $\mathscr{O}_{X,x}$ é um anel local.*

Demonstração: Vimos que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ é um anel local (Proposição 2.3.6). Seja $\mathscr{M}_x$ o único ideal maximal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$. Como $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\mathscr{I}_x}$ (Equação (2.3)), temos que $\frac{\mathscr{M}_x}{\mathscr{I}_x}$ é o único ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$. Logo, temos o desejado. ■

Proposição 2.3.16 *O anel local $\mathscr{O}_{X,x}$ é noetheriano.*

Demonstração: Como $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\mathscr{I}_x}$ (Equação (2.3)), os ideais de $\mathscr{O}_{X,x}$ são da forma $\frac{J}{\mathscr{I}_x}$, onde J é um ideal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$. Já que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ é um anel noetheriano (Observação 2.3.7), J é um ideal finitamente gerado. Logo, $\frac{J}{\mathscr{I}_x}$ é um ideal finitamente gerado. Portanto, $\mathscr{O}_{X,x}$ é um anel noetheriano. ■

Sobre $X = \{p \in \mathbb{C}^n; \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,p}}{\mathscr{I}_p} \neq 0\}$, onde $\mathscr{I}$ é um ideal do tipo finito, podemos também definir o feixe $\mathscr{F}_{\Omega^k_X}$, que associa a cada aberto $U \cap X$ de X o $\mathbb{C}$- módulo $\Omega^k_{\mathbb{C}^n}(U \cap X)$.

Notação: O stalk do feixe $\mathscr{F}_{\Omega^k_X}$ em um ponto $x \in X$ será denotado por $\Omega^k_{X,x}$.

Observação 2.3.17 *Como antes, podemos concluir que os elementos de $\Omega^k_{X,x}$ são da forma*

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)(d_pz_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_pz_{i_k}), i_j \in \{1,\ldots,n\},$$

tais que $a_{i_1,\ldots,i_k}(x) \in \mathscr{O}_{X,x}$.

Assim, no caso particular em que $k = 1$, os elementos de $\Omega^1_{X,x}$ são germes de 1-formas holomorfas, que associam a cada ponto $p \in X$, a 1- forma linear alternada $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} dx_i$, onde $f \in \mathscr{O}_{X,x}$.

Deste modo, se $\varphi \in Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{X,x}, \Omega^1_{X,x})$, então φ é um homomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$-módulos que associa a cada germe $f \in \mathscr{O}_{X,x}$, uma 1- forma holomorfa $\varphi(f)$ em $\Omega^1_{X,x}$. Portanto, para cada $p \in X$, $\varphi(f)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_f(p)}{\partial x_i} dx_i$, para alguma $h_f \in \mathscr{O}_{X,x}$.

Para a definição do número de Milnor dada por Buchweitz e Greuel em [4], precisaremos definir certas aplicações entre aneis locais. No que segue, apresentaremos a noção de normalização de espaços complexos, a qual nos será útil na construção dessas aplicações.

Definição 2.3.18 *Sejam $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço complexo e $x \in X$. Diz-se que $(X, \mathscr{O}_X)$ é* ***normal*** *em um ponto x se o anel $\mathscr{O}_{X,x}$ for normal, ou seja, não possui elementos nilpotentes e todo elemento de $\mathscr{O}_{X,x}$ é raiz de um polinômio no corpo de frações de $\mathscr{O}_{X,x}$. Diz-se ainda que $(X, \mathscr{O}_X)$ é* ***normal*** *se $(X, \mathscr{O}_X)$ for normal em todos os seus pontos.*

Definição 2.3.19 *Seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço complexo. Uma* ***normalização*** *de $(X, \mathscr{O}_X)$ é o par $((\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}), (\eta, \eta^\sharp))$ composto por um espaço complexo normal $(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}})$ e um par de aplicações $(\eta, \eta^\sharp)$, onde $\eta : \overline{X} \to X$ e $\eta^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{\overline{X}}$ são aplicações que satisfazem às seguintes condições:*

1. *η é uma aplicação entre espaços topológicos contínua, finita e sobrejetora;*

2. *$\eta^{-1}(NNor(X))$ não é denso em $\overline{X}$; onde $NNor(X) = \{x \in X; \mathscr{O}_{X,x}$ não é normal$\}$;*

3. *$\eta : \overline{X} \setminus \eta^{-1}(NNor(X)) \to X \setminus NNor(X)$ é biholomorfa, isto é, η é holomorfa, bijetora e a inversa η^{-1} de η é holomorfa.*

4. *$\eta^\sharp : \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{\overline{X}}$ é tal que, para todo $x \in X$, $\eta^\sharp_x : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é um morfismo de aneis dado por $\eta^\sharp_x(f) = f \circ \eta$, $f \in \mathscr{O}_{X,x}$.*

Por simplicidade, nos referiremos à normalização de $(X, \mathscr{O}_X)$ como sendo o espaço complexo normal $(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}})$.

Observação 2.3.20 *Sempre existe uma normalização de um espaço complexo. De fato, seja $(X, \mathscr{O}_X)$ um espaço complexo. Então para cada $x \in X$, existem $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{O}_X$ tais que $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{I}$, onde $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$. Uma normalização de $(X, \mathscr{O}_X)$ é o espaço complexo normal $(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}})$ tal que para cada $\overline{x} \in \overline{X}$, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{J}$, onde $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{J}$ é o fecho integral do anel quociente $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{I}$, ou seja, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é o fecho integral de $\mathscr{O}_{X,x}$. Além disso, via aplicação η, os elementos de $\mathscr{O}_{X,x}$ podem ser vistos como elementos de $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. A justificativa destas afirmações serão omitidas e podem ser encontradas em [10, página 96].*

A aplicação $\eta : \overline{X} \to X$ da definição de normalização define um feixe de aneis $\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X}}$ sobre X da seguinte maneira: a cada aberto $U \cap X$ de X associe o anel

$$\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X}}(U \cap X) = \{f : \eta^{-1}(U \cap X) \to \mathbb{C}; f \in \mathscr{O}_{\overline{X}}\}.$$

Notação: O stalk de $\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X}}$ em $x \in X$ será denotado por $\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, onde $\overline{x} = \eta^{-1}(x)$.

Observação 2.3.21 *Como $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é o fecho integral de $\mathscr{O}_{X,x}$, para cada $\overline{x} \in \overline{X}$, todo elemento do stalk $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é raiz de um polinômio no seu corpo de frações . ([25, página 64]).*

Observação 2.3.22 *Veja que*

$$\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \left\{ [\eta^{-1}(U \cap X), f]_x; f \in \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U \cap X)}{\mathscr{I}_x}} \right\} \text{ e } \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \left\{ [U \cap \overline{X}, f]_{\overline{x}}; f \in \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U \cap X)}{\mathscr{I}_x}} \right\}.$$

Os conjuntos $U \cap \overline{X}$ e $\eta^{-1}(U \cap X)$ são abertos que contém $\overline{x}$ e, por propriedade de espaço topológico, existe um aberto W que contém $\overline{x}$ tal que $W \subset (U \cap \overline{X}) \cap \eta^{-1}(U \cap X)$. Assim, dada $f \in \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}(U \cap X)}{\mathscr{I}_x}}$, se tomarmos as classes $[U \cap \overline{X}, f]_{\overline{x}}$ e $[\eta^{-1}(U \cap X), f]_x$, existe $W \subset (U \cap \overline{X}) \cap \eta^{-1}(U \cap X)$ tal que $f|_{W \cap (U \cap \overline{X})} = f|_{W \cap \eta^{-1}(U \cap X)}$.

Portanto, $[U \cap \overline{X}, f]_x \simeq [\eta^{-1}(U \cap X), f]_x$ e, assim, $\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$.

De maneira semelhante ao que foi feito para definir o feixe de aneis $\eta_* \mathscr{O}_{\overline{X}}$ em X, podemos definir o feixe de $\mathbb{C}$- módulos $\eta_* \mathscr{F}_{\Omega^k_{\overline{X}}}$ sobre X. A cada aberto $U \cap X$, associe o $\mathbb{C}$-módulo $\Omega^k_{\overline{X}}(\eta^{-1}(U \cap X))$. O stalk do feixe $\eta_* \mathscr{F}_{\Omega^k_{\overline{X}}}$ em um ponto $x \in X$ será denotado por $\eta_* \Omega^k_{\overline{X},\overline{x}}$, onde $\overline{x} = \eta^{-1}(x)$, e seus objetos são da forma

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)(d_p z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_p z_{i_k}), i_j \in \{1, \ldots, n\},$$

tais que $a_{i_1,\ldots,i_k}(x) \in \eta_* \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$.

Considere, por outro lado, o feixe $\Omega^k_{\overline{X}}$ de $\mathbb{C}$- módulos sobre $\overline{X}$ que associa a cada aberto $\overline{U}$ de $\overline{X}$ o $\mathbb{C}$- módulo $\Omega^k_{\overline{X}}(\overline{U})$. Se $\overline{x} \in \overline{X}$, o stalk de $\Omega^k_{\overline{X}}$ em $\overline{x}$ é denotado por $\Omega^k_{\overline{X},\overline{x}}$ e seus elementos são da forma

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)(d_p z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_p z_{i_k}), i_j \in \{1, \ldots, n\},$$

tais que $a_{i_1,\ldots,i_k}(x) \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$.

Observação 2.3.23 *Como* $\eta_*\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, *para cada* $\overline{x} \in \overline{X}$ *(observação anterior), concluímos que*

$$\eta_*\Omega^k_{\overline{X},\overline{x}} = \Omega^k_{\overline{X},\overline{x}}, \forall\, \overline{x} \in \overline{X}.$$

Observação 2.3.24 *Quando* $(X, \mathscr{O}_X)$ *for um espaço complexo normal, temos* $\mathscr{O}_{X,x} = \overline{\mathscr{O}_{X,x}} = \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *(Observação 2.3.20). Então,* $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} = \Omega^1_{X,x}$ *e a aplicação* η *será a aplicação identidade sobre* X.

No que segue, estamos interessados no comportamento local de espaços complexos. Em geral, dados X e Y subespaços topológicos de M e $x \in M$, podemos definir a seguinte relação, que é uma relação de equivalência:

$$X \sim_x Y \text{ se, e somente se, existe um aberto } W \text{ de } M, \text{ com } x \in W, \text{ tal que}$$
$$W \cap X = W \cap Y.$$

Notação: A classe de equivalência de X com relação a $\sim_x$ é denotada por (X, x).

Definição 2.3.25 *O* ***germe do espaço complexo*** $(X, \mathscr{O}_X)$ *em* x *é o par* $((X, x), \mathscr{O}_{X,x})$.

Por simplicidade de notação, escreveremos (X, x) significando $((X, x), \mathscr{O}_{X,x})$. O anel $\mathscr{O}_{X,x}$ será chamado **anel local associado** a (X, x). O stalk $\mathscr{I}_x$ do feixe de ideais $\mathscr{I}$ associado a X é chamado **ideal associado a** (X, x).

Definição 2.3.26 *Sejam* $(X, \mathscr{O}_X)$ *um espaço complexo e* x *um ponto de* X *tal que* $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\ldots,f_{n-k}\rangle}$. *Se dim*$(\mathscr{O}_{X,x}) = k$, *o germe de espaço complexo* (X, x) *é chamado* ***interseção completa*** *de dimensão* k. *Se* $f_1, \ldots, f_{n-k}$ *é uma sequência* $\mathscr{O}_{X,x}$*- regular, então* (X, x) *é chamado* ***interseção completa com singularidade isolada (ICIS)***

Definição 2.3.27 *Uma* ***curva*** *é um germe de espaço complexo* (X, x) *tal que o anel local associado* $\mathscr{O}_{X,x}$ *possui dimensão de Krull igual a* 1. *Uma curva* (X, x) *é dita* ***reduzida*** *se* $\mathscr{O}_{X,x}$ *não contém elementos nilpotentes.*

A seguir, faremos uma discussão a respeito da estrutura do anel $\mathscr{O}_{X,x}$ e do anel $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ associado à normalização de $(X, \mathscr{O}_X)$. Para isso, precisaremos da noção de regularidade e irredutibilidade de um germe de espaço complexo.

Definição 2.3.28 *Seja* (X, x) *um germe de espaço complexo.* (X, x) *é dito* ***regular*** *se o anel local associado* $\mathscr{O}_{X,x}$ *for um anel regular.*

Definição 2.3.29 *Seja* (X, x) *um germe de espaço complexo. O germe* (X, x) *é chamado* ***irredutível*** *se o anel local* $\mathscr{O}_{X,x}$ *associado for um anel de integridade. Se* $\mathscr{O}_{X,x}$ *não for anel de integridade, o germe* (X, x) *é chamado* ***redutível***.

Observação 2.3.30 *Se (X,x) for redutível, existem germes $(X_1,x),\dots,(X_n,x)$ irredutíveis tais que $(X,x)=(X_1,x)\cup(X_2,x)\cup\dots\cup(X_n,x)$ e $\mathscr{O}_{X,x}=\mathscr{O}_{X_1,x}\oplus\mathscr{O}_{X_2,x}\oplus\cdots\oplus\mathscr{O}_{X_n,x}$. (Ver [10, página 61]).*

Os germes (X_i,x) são chamado ***componetes irredutíveis*** *de (X,x).*

Proposição 2.3.31 *Seja (X,x) uma curva reduzida e irredutível. Então $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}\simeq\mathbb{C}\{t\}$, $\forall\ x\in X$, onde $\overline{x}=\eta^{-1}(x)$.*

Demonstração: Se (X,x) é uma curva reduzida, o anel local associado $\mathscr{O}_{X,x}$ não possui elementos nilpotentes. Além disso, pela Observação 2.3.21, todo elemento do anel $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é raiz de um polinômio no seu corpo de frações. Portanto, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é um anel normal.

Por outro lado, temos que o anel $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é local (Proposição 2.3.15) e é noetheriano (Observação 2.3.16). Além disso, pela Observação 2.3.21, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é o conjunto das raízes de polinômios no corpo de frações de $\mathscr{O}_{X,x}$ e, como (X,x) é uma curva irredutível, $\mathscr{O}_{X,x}$ é um domínio, logo, pelo Teorema 1.1.21, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ tem dimensão de Krull igual a 1. Então, pela Proposição 1.1.29, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é regular, ou seja, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}^2}\right)=dim\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}=1$, onde $\mathscr{M}$ é o ideal maximal de $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Como $\mathscr{M}=\langle\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}\rangle$, onde $\overline{x_i}$ é a classe da indeterminada x_i em $\mathscr{O}_{X,x}$, então $\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}^2}=\{a_1\overline{x_1}+\cdots+a_n\overline{x_n},a_i\in\mathbb{C}\}$. Como $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}^2}\right)=1$, temos $\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}^2}=\{a_k\overline{x_k},a_k\in\mathbb{C}\}$. Denotemos $\overline{x_k}=t$. Então $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}\simeq\mathbb{C}\{t\}$. ■

Corolário 2.3.32 *Seja (X,x) uma curva reduzida e irredutível, então $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}\simeq\mathbb{C}\{t\}dt$, $\forall\ x\in X$, onde $\overline{x}=\eta^{-1}(x)$.*

Demonstração: Pela Observação 1.3.7, $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ é o conjunto de 1- formas do tipo $\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$, onde $f\in\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Pela Proposição 2.3.31, se (X,x) é uma curva reduzida e irredutível, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}\simeq\mathbb{C}\{t\}$. Logo, $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ é o conjunto de 1- formas do tipo $\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial t}dt$, onde $f\in\mathbb{C}\{t\}$. Logo, $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}\simeq\mathbb{C}\{t\}dt$. ■

Com esta caracterização de $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, podemos também obter uma expressão interessante para $\mathscr{O}_{X,x}$. É o que nos mostra a próxima observação:

Observação 2.3.33 *Seja (X,x) uma curva reduzida. Então existem $f_1,\dots,f_k\in\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ tais que $\mathscr{O}_{X,x}=\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\dots,f_k\rangle}$.*

Desde que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}\simeq\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ (Observação 2.3.5), defina $\psi:\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}\to\mathscr{O}_{X,x}$ por $\psi(x_i)=\overline{x_i}$, onde $\overline{x_i}$ é a classe da indeterminada x_i no quociente $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\dots,f_k\rangle}$.

Temos que $\mathscr{O}_{X,x}\subseteq\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Além disso, pela Proposição 2.3.31, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}\overset{\alpha}{\simeq}\mathbb{C}\{t\}$. Logo, para cada elemento $f\in\mathscr{O}_{X,x}$, existe um polinômio em $\mathbb{C}\{t\}$ correspondente a f. Então considere a aplicação $\varphi:\mathscr{O}_{X,x}\to\mathbb{C}\{t\}$ que associa a cada classe $\overline{x_i}\in\mathscr{O}_{X,x}$ o seu polinômio correspondente $p_i(t)$ em $\mathbb{C}\{t\}$.

Visto que $f_i\in Ker(\psi)$ e $\varphi(0)=0$, temos

$$0=\varphi\circ\psi(f_i(x_1,\dots,x_n))=\varphi(f_i(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}))=f_i(p_1(t),\dots,p_n(t)),$$

para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. *Desta forma, em uma vizinhança da origem, existe uma parametrização para os zeros de* $f_1, \ldots, f_k$. *Além disso, visto que* φ *é a composição da inclusão de* $\mathscr{O}_{X,x}$ *em* $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *e o isomorfismo* α, *temos que* φ *é injetora e, portanto,* $\mathscr{O}_{X,x} \simeq \varphi(\mathscr{O}_{X,x})$.

Como $\mathscr{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$, *então* $\varphi(\mathscr{O}_{X,x}) = \mathbb{C}\{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$ *e, portanto,*

$$\mathscr{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}.$$

Seja $m = min\{ord(p_i(t)), i = 1, \ldots, n\}$. *Como* (X, x) *é uma curva definida em um corpo de característica zero, podemos obter uma parametrização, chamada* ***Parametrização de Newton-Puiseux****, dada por*

$$\begin{cases} x_1 & = & t^m \\ x_2 & = & p_2(t) \\ \vdots & & \\ x_n & = & p_n(t) \end{cases}$$

Podemos agora obter um exemplo de curva reduzida:

Exemplo 2.3.34 *Considere o germe de espaço complexo* $(X, 0)$ *vindo do Exemplo 2.3.14. Mostremos que* $(X, 0)$ *é uma curva reduzida. Para isso, mostraremos que* $\mathscr{O}_{X,0}$ *não possui elementos nilpotentes e que sua dimensão de Krull é* 1. *Como* $\mathbb{C}\{x, y, z\}$ *não contém elementos nilpotentes e, pela observação anterior,* $\mathscr{O}_{X,0} \simeq \mathbb{C}\{t^3, t^4, t^5\} = \mathbb{C}\{x, y, z\}$, *então* $\mathscr{O}_{X,0}$ *não possui elementos nilpotentes.*

Mostremos que $dim(\mathscr{O}_{X,0}) = 1$. *Pela observação anterior,* $\mathscr{O}_{X,0} \simeq \mathbb{C}\{t^3, t^4, t^5\}$, *então basta mostrarmos que* $dim(\mathbb{C}\{t^3, t^4, t^5\}) = 1$.

Considere o quociente $Q = \frac{\mathbb{C}\{t\}}{\mathbb{C}\{t^3,t^4,t^5\}}$. *Os elementos de* Q *são da forma* $a_0 + a_1 t + a_2 t^2, a_i \in \mathbb{C}$ *e existe o polinômio* $p(X) = X - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \in Q[X]$ *tal que* $p(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 0$. *Logo, todo elemento de* Q *é raiz de um polinômio em* $Q[X]$. *Além disso, vimos, no Exemplo 1.1.14, que* $\mathbb{C}\{t\}$ *e* $\mathbb{C}\{t^3, t^4, t^5\}$ *são aneis noetherianos. Logo, pela Proposição 1.1.20,* $dim(\mathbb{C}\{t^3, t^4, t^5\}) = dim(\mathbb{C}\{t\})$. *Pelo Exemplo 1.1.19, temos que* $dim(\mathbb{C}\{t\}) = 1$. *Então,* $dim(\mathbb{C}\{t^3, t^4, t^5\}) = 1$.

Portanto, $\mathscr{O}_{X,0}$ *não possui elementos nilpotentes e* $dim(\mathscr{O}_{X,0}) = 1$, *logo* $(X, 0)$ *é curva reduzida.*

Vamos agora à definição do módulo dual de Grothendieck:

Definição 2.3.35 *Seja* (X, x) *um germe de espaço complexo. O* k***-ésimo módulo dual de Grothendieck*** *associado a* (X, x), *denotado por* $\omega^k_{X,x}$, *é o k-ésimo grupo exterior entre* $\mathscr{O}_{X,x}$ *e* $\Omega^{k+1}_{\mathbb{C}^n,x}$, *isto é,*

$$\omega^k_{X,x} = Ext^k_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{X,x}, \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}^n,x}).$$

Analogamente, o k-**ésimo módulo dual de Grothendieck** associado a $(\overline{X}, \overline{x})$, denotado por $\omega^k_{\overline{X},\overline{x}}$, é o k-ésimo grupo exterior entre $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ e $\Omega^{k+1}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}$, isto é,

$$\omega^k_{\overline{X},\overline{x}} = Ext^k_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}).$$

Notação: $\eta_*\omega^k_{\overline{X},\overline{x}} = Ext^k_{\eta_*\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \eta_*\Omega^{k+1}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}})$.

Quando $k = 0$, denotemos $\omega^k_{X,x}$, $\omega^k_{\overline{X},\overline{x}}$ e $\eta_*\omega^k_{\overline{X},\overline{x}}$ simplesmente por $\omega_{X,x}$, $\omega_{\overline{X},\overline{x}}$ e $\eta_*\omega_{\overline{X},\overline{x}}$, respectivamente.

Observação 2.3.36 *Observamos que, dada as igualdades* $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \eta_*\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *(Observação 2.3.22), e* $\Omega^k_{\mathbb{C}^n,\overline{x}} = \eta_*\Omega^k_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}$ *(Observação 2.3.23), obtemos* $\omega^k_{\overline{X},\overline{x}} = \eta_*\omega^k_{\overline{X},\overline{x}}$.

Além disso, se $(X, \mathscr{O}_X)$ *for um espaço complexo normal, pela Observação 2.3.24, temos que* $\omega_{\overline{X},\overline{x}} = \omega_{X,x}$*, para todo* $x \in X$.

Observação 2.3.37 *Pela Proposição 2.2.8,* $Ext^0_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{X,x}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,x}) \simeq Hom_{\mathbb{C}^n,x}(\mathscr{O}_{X,x}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,x})$*, logo,* $\omega_{X,x} \simeq Hom_{\mathbb{C}^n,x}(\mathscr{O}_{X,x}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,x})$*. Além disso, da maneira como os stalks* $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *e* $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ *foram definidos, temos que* $\mathscr{O}_{X,x} \subset \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *e* $\Omega^1_{X,x} \subset \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$.

Assim, $Hom_{\mathbb{C}^n,x}(\mathscr{O}_{X,x}, \Omega^1_{X,x}) \subset Hom_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$*. Logo,* $\omega_{X,x} \subset \omega_{\overline{X},\overline{x}}$.

Capítulo 3

Número de Milnor associado a curvas reduzidas

Neste capítulo, vamos estudar um número associado a curvas reduzidas, definido por Buchweitz e Greuel em [4], que coincide com o número de Milnor definido por Hamm em [13] quando esta curva é de uma interseção completa com singularidade isolada. Por esse motivo, este número é chamado número de Milnor de curvas reduzidas.

Por outro lado, dada $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ com singularidade isolada, Milnor define um número associado a f, chamado número de Milnor de f em 0. Veremos que dada $f \in \mathscr{O}_{X,0}$ podemos obter um número associado a f em 0 que coincide com o número de Milnor de f em 0 quando $X = \mathbb{C}^n$ e isso será feito de maneira análoga ao que vamos desenvolver para o número de Milnor de curvas reduzidas.

3.1 Número de Milnor de curvas reduzidas

Começaremos descrevendo aplicações que serão necessárias para a definição do número de Milnor de curvas reduzidas. Ressaltamos que estas construções valem no caso geral, ou seja, considerando germes de espaço complexo.

Sejam (X, x) um germe de espaço complexo e $(\overline{X}, \overline{x})$ o germe de espaço complexo associado à normalização do espaço complexo associado ao germe (X, x).

Considere a aplicação $D : \mathscr{O}_{X,x} \to \Omega^1_{X,x}$ dada por $D(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Esta aplicação é chamada **derivação exterior sobre** $\mathscr{O}_{X,x}$. Podemos definir também a derivação exterior sobre $\mathscr{O}_{\overline{X}.\overline{x}}$ como sendo a aplicação $\overline{D} : \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \to \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ dada por $\overline{D}(f \circ \eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \eta \right) dx_i$.

Observação 3.1.1 *De maneira análoga a $\mathbb{C}$- derivação de $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ em $\Omega^1_{\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}}$ do Exemplo 1.3.2, obtemos uma $\mathbb{C}$- derivação de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ em $\Omega^1_{\mathbb{C}^n,x}$. A derivação exterior* *sobre* $\mathscr{O}_{X,x}$ *é a restrição, em* $\mathscr{O}_{X,x}$*, desta* $\mathbb{C}$*- derivação de* $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ *em* $\Omega^1_{\mathbb{C}^n,x}$.

Vimos, na Observação 2.3.23, que $\eta_*\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} = \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$. Assim, podemos construir $\alpha : \Omega^1_{X,x} \to \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, como sendo a aplicação que associa a cada germe

$$\sum a_{i_1\cdots i_k}(x)(d_pz_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_pz_{i_k}),\ \text{com } i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}\ e\ a_{i_1\cdots i_k} \in \mathscr{O}_{X,x},$$

o germe $\sum(a_{i_1\cdots i_k} \circ \eta)(\overline{x})(d_pz_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_pz_{i_k})$, com $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *e* $(a_{i_1\cdots i_k} \circ \eta) \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$.

Com esses objetos, em [4], Buchweitz e Greuel mostram que existe um isomorfismo entre dois objetos associados a germes de espaço complexos normais: o módulo dual de Grothendieck e o conjunto dos germes de 1- formas holomorfas definidas sobre este germe. É o que será provado na próxima proposição.

Proposição 3.1.2 $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \simeq \omega_{\overline{X},\overline{x}}$.

Demonstração: Por definição, temos $\omega_{\overline{X},\overline{x}} = Ext^0_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}})$. Mas, pela Proposição 2.2.8, $Ext^0_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}) \simeq Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}})$. Assim,

$$\omega_{\overline{X},\overline{x}} \simeq Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}).$$

Agora, mostremos que $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}) = Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$. Os elementos do conjunto $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}})$ são aplicações da forma $\gamma : \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \to \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}$, onde, pela Observação 2.3.17, para cada $p \in X$, $\gamma(f)(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_f(p)}{\partial x_i} dx_i$, $f \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, $g_f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}$, ou seja, $g_f : U \to \mathbb{C}$, com U sendo uma vizinhança de $\overline{x}$ em $\mathbb{C}^n$. Se considerarmos a restrição $h_f := g_f|_{U\cap\overline{X}}$ de g_f ao conjunto $U \cap \overline{X}$, temos $h_f \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, e com isso, a aplicação γ pode ser vista como um elemento de $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$ através desta restrição. Por outro lado, os elementos do conjunto $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$ são aplicações da forma $\lambda : \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \to \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, onde, pela Observação 2.3.17, para cada $p \in X$, $\lambda(f)(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{h}_f(p)}{\partial x_i} dx_i$, $f \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, $\tilde{h}_f \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, ou seja, $\tilde{h}_f : V \cap \overline{X} \to \mathbb{C}$, com V sendo uma vizinhança de $\overline{x}$ em $\mathbb{C}^n$. Dado um aberto U de $\mathbb{C}^n$ que contém $\overline{x}$, por propriedade de espaço topológico, existe um aberto W em $\mathbb{C}^n$, com $\overline{x} \in W$, tal que $W \subset (V \cap \overline{X}) \cap U$. Logo, $\tilde{h}_f|_W \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}$ e, com isso, $\tilde{h}_f$ pode ser visto como um elemento de $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}})$. Portanto, $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}) = Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$.

Por outro lado, considere a aplicação

$$\phi : \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}} \times Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}) \to Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$$

definida por $\phi(h, \varphi) = h.\varphi$, onde $(h.\varphi) : \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \to \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ é dada por $(h.\varphi)(f) = h \wedge \varphi(f)$.

Agora, $(h \wedge \varphi(f)) \in \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, de onde concluímos que, para definir o produto $(h.\varphi)$, basta termos germes h restritos a $\overline{X}$. Concluímos então que $Hom_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}) = Hom_{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}})$.

Assim,

$$\omega_{\overline{X},\overline{x}} \simeq Hom_{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}).$$

Mas, pelo Teorema 1.1.5, $Hom_{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}, \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}) \simeq \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$. Portanto, $\omega_{\overline{X},\overline{x}} \simeq \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$. ■

Seja ψ o isomorfismo da proposição anterior, $\psi : \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{\overline{X},\overline{x}}$.

Agora, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{X,x} \arrow[r, "\eta^\sharp_x"] \arrow[d, "D_1"'] & \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \arrow[d, "D_2"] \\
\Omega^1_{X,x} \arrow[r, "\alpha"] & \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}
\end{tikzcd}$$

onde D_1 e D_2 são derivações exteriores sobre $\mathscr{O}_{X,x}$ e $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, respectivamente, $\eta^\sharp_x$ é a aplicação entre os aneis locais dada pela normalização do espaço complexo associado ao germe (X, x), como na Observação 2.3.20,

Proposição 3.1.3 *O diagrama anterior é comutativo.*

Demonstração: Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$. Então

$$(D_2 \circ \eta^\sharp_x)(f) = D_2(\eta^\sharp_x(f)) = D_2(f \circ \eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \circ \eta \right) dx_i$$

Por outro lado,

$$(\alpha \circ D_1)(f) = \alpha(D_1(f)) = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \circ \eta \right) dx_i.$$

Portanto, $D_2 \circ \eta^\sharp_x = \alpha \circ D_1$. ■

Seja $\sigma \in \omega_{\overline{X},\overline{x}}$. Pela Proposição 3.1.2, σ é uma derivação exterior sobre $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Como o diagrama anterior é comutativo, existe uma derivação exterior ξ sobre $\mathscr{O}_{X,x}$ tal que $\sigma \circ \eta^\sharp_x = \alpha \circ \xi$. Desta forma, podemos definir a aplicação $\varphi : \omega_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{X,x}$ dada por $\varphi(\sigma) = \xi$, para cada $\sigma \in \omega_{\overline{X},\overline{x}}$.

Assim, obtemos a sequência de aplicações

$$\mathscr{O}_{X,x} \xrightarrow{D} \Omega^1_{X,x} \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \xrightarrow{\psi} \omega_{\overline{X},\overline{x}} \xrightarrow{\varphi} \omega_{X,x}. \tag{3.1}$$

Com isto, podemos definir a aplicação $d : \mathscr{O}_{X,x} \to \omega_{X,x}$ dada por $d = \varphi \circ \psi \circ \alpha \circ D$, necessária para a definição do número de Milnor de curvas reduzidas.

Observação 3.1.4 *Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$. Então*

$$d(f) = (\varphi \circ \psi \circ \alpha \circ D)(f) = \varphi(\psi(\alpha(D(f)))) = \varphi\left(\psi\left(\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i\right)\right)\right) =$$
$$\varphi\left(\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\eta\right)dx_i\right)\right).$$

Como ψ é isomorfismo, podemos considerar

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\eta\right)dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\eta\right)dx_i.$$

Assim, $d(f) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\eta\right)dx_i\right)$. Pela definição de φ, existe uma derivação exterior $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dx_i$ sobre $\mathscr{O}_{X,x}$ tal que $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\circ\eta\right)dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dx_i$, $g \in \mathscr{O}_{X,x}$. Agora, $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dx_i$ é uma 1- forma holomorfa, pois associa a cada ponto p de X, a 1- forma alternada $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g(p)}{\partial x_i}\right)dx_i$. Portanto, $d\mathscr{O}_{X,x} \subset \Omega^1_{X,x}$.

Definição 3.1.5 *Seja (X,x) uma curva reduzida. O **número de Milnor** de (X,x) é definido por $\mu(X,x) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right)$.*

No caso em que não houver dúvidas a respeito de qual curva reduzida estamos nos referindo, denotaremos o número de Milnor desta curva simplesmente por μ.

Observação 3.1.6 *Note que $\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$ está definido para todo germe de espaço complexo (X,x), porém não necessariamente esse quociente possui dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.*

Quando (X,x) for uma curva reduzida, mostraremos, na próxima seção, que $\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$ é um $\mathbb{C}$- módulo de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, justificando a definição de número de Milnor neste caso.

No caso de germe de hipersuperfície obtido como imagem inversa de 0 por germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, ou seja, para germe de espaço complexo $(X,0)$ com $X = f^{-1}\{0\}$, Milnor (em [27]) mostra que $(X,0)$ tem uma estrutura de fibrado e, quando $(X,0)$ tem singularidade isolada, introduz um importante número, que vamos denotar por $\mu^M_{X,0}$, associado a esta estrutura de fibrado.

No caso em que $(X,0)$ é uma curva plana, ou seja, quando $n = 2$, Milnor (em [27]) caracteriza algebricamente este número como sendo

$$\mu^M_{X,0} = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^2,x}}{\langle\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\rangle}\right).$$

A caminho de generalizar esta definição, Hamm (em [12]) estuda o caso em que (X, x) é uma interseção completa, mostrando que este tem uma estrutura de fibrado.

No caso em que (X, x) é uma interseção completa com singularidade isolada (ICIS), da descrição via fibrado, Hamm define um número associado a (X, x), que vamos denotar por por $\mu^H_{X,x}$.

Prova-se, em [22, página 77. item 5.11.b], que esta definição coincide com a definição de Milnor quando a ICIS for definida em $\mathbb{C}^2$.

Em [9], Greuel mostrou que, se (X, x) for uma curva de interseção completa com singularidade isolada, então também podemos calcular o número de Milnor de (X, x) algebricamente, como no caso de curvas planas, através da fórmula

$$\mu^H_{X,x} = dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \right). \tag{3.2}$$

Nesta direção, com o objetivo de obter um número associado a um germe de espaço complexo (X, x) que nos casos particulares abordados coincidam, Buchweitz e Greuel (em [4]) definiram o número associado a (X, x), $\mu(X, x)$, quando (X, x) é uma curva reduzida. Veremos, via descrição de Greuel (Equação (3.2)), que se (X, x) é uma curva reduzida de interseção de completa, então $\mu(X, x) = \mu^H(X, x)$. Com este objetivo, primeiro vamos caracterizar o $\mathbb{C}$- módulo $\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}$.

Para $f_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x},\ i = 1, \ldots, k$ e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um sistema de coordenadas locais (em x) de $\mathbb{C}^n$, usaremos a seguinte notação:

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_k := \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\rangle dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \right).$$

Proposição 3.1.7 *Seja (X, x) um germe de espaço complexo, com $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\ldots,f_k\rangle}$, $f_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$. Então $\Omega^n_{X,x} = \left\langle \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{df_1 \wedge \ldots \wedge df_k} \right\rangle \mathscr{O}_{X,x}$.*

Demonstração: Um elemento w de $\left\langle \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{df_1 \wedge \ldots \wedge df_k} \right\rangle \mathscr{O}_{X,x}$ é da forma

$$F dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + df_1 \wedge \ldots \wedge df_k, \text{ onde } F \in \mathscr{O}_{X,x}.$$

Como $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ e $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$ são n- formas holomorfas, w é uma n- forma holomorfa sobre (X, x). Logo,

$$\left\langle \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{df_1 \wedge \ldots \wedge df_k} \right\rangle \mathscr{O}_{X,x} \subseteq \Omega^n_{X,x}.$$

Analisemos a construção do conjunto $\Omega^n_{X,x}$. Vimos, na Proposição 1.2.7 que uma base para $\Lambda^1(T_x\mathbb{C}^n)^*$ é $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ e uma base para $\Lambda^n(T_x\mathbb{C}^n)^*$ é $\{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\}$. Assim, $\Lambda^n(T_x\mathbb{C}^n)^* = \Lambda^1(T_x\mathbb{C}^n)^* \wedge \ldots \wedge \Lambda^1(T_x\mathbb{C}^n)^*$, que vamos denotar por $(\Lambda^1(T_x\mathbb{C}^n)^*)^n$.

Então, dada $\varphi \in \Omega^n_{X,x}$, temos $\varphi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, onde $\varphi_i \in \Omega^1_{X,x}$. Agora, via Observação 2.3.17, dado um ponto p de X, cada $\varphi_i(p)$ pode ser vista como derivadas de germes g_i de $\mathscr{O}_{X,x}$ aplicadas em p, isto é, $\varphi_i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(p)}{\partial x_j} dx_j$. Visto que um elemento $g \in \mathscr{O}_{X,x}$ é da forma $g = h + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$, onde $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$, temos que $\varphi_i(p)$ é da forma

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial h_i(p)}{\partial x_j} dx_j + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle dx_j + \sum_{r=1}^k \left\langle \frac{\partial f_r(p)}{\partial x_j} \right\rangle \right) dx_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(p) = \varphi_1(p) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(p) &= \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{\partial h_i(p)}{\partial x_j} + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &+ \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial f_r(p)}{\partial x_j} \right\rangle dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \right), \forall\, p \in X. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi = \sum_{j=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n + \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \left\langle \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right\rangle dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \right)$.

Como $\sum_{j=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle \right) \in \mathscr{O}_{X,x}$, então $\varphi \in \left\langle \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{df_1 \wedge \ldots \wedge df_k} \right\rangle \mathscr{O}_{X,x}$.

Logo, $\Omega^n_{X,x} \subseteq \left\langle \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{df_1 \wedge \ldots \wedge df_k} \right\rangle \mathscr{O}_{X,x}$, e portanto, $\Omega^n_{X,x} = \left\langle \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{df_1 \wedge \ldots \wedge df_k} \right\rangle \mathscr{O}_{X,x}$. ■

Precisaremos ainda do seguinte lema:

Lema 3.1.8 *Seja (X, x) uma curva reduzida de interseção completa, onde*

$$X = \{p \in \mathbb{C}^n; f_1(p) = \cdots = f_{n-1}(p) = 0\} \text{ e } \mathscr{O}_{X,x} = \tfrac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle}.$$

Então a aplicação $df_1 \wedge \ldots \wedge df_{n-1} : \omega_{X,x} \to \Omega^n_{X,x}$, denotada por $df_\wedge$ e definida por $df_\wedge(w) = df_1 \wedge \ldots df_{n-1} \wedge w$, é um isomorfismo.

Demonstração: Pode ser vista em [22, página 58].

Do lema anterior, por (X, x) ser uma curva de interseção completa, existe uma aplicação $df_\wedge : \omega_{X,x} \to \Omega^n_{X,x}$ que é um isomorfismo e, pelo Teorema 1.1.6, existe um isomorfismo $\phi : \Omega^n_{\mathbb{C}^n,x} \to \Omega^n_{\mathbb{C}^n,x} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X,x}$. Logo, existe um isomorfismo

$$\phi \circ df_\wedge : \omega_{X,x} \to \Omega^n_{\mathbb{C}^n,x} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X,x}. \tag{3.3}$$

Notação: $Df_\wedge = \phi \circ df_\wedge$

Observação 3.1.9 *Note que $\Omega^1_{X,x}$ pode ser imerso em $\omega_{X,x}$. Pela Observação 2.3.17, se $\varphi \in \Omega^1_{X,x}$, então $\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$, para alguma $g \in \mathscr{O}_{X,x}$. Considere a derivação exterior*

$D : \mathscr{O}_{X,x} \to \Omega^1_{X,x}$ sobre $\mathscr{O}_{X,x}$. Então a 1- forma φ é imagem do germe g pela derivação exterior D, pois $D(g)(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(p)}{\partial x_i}(p)dx_i = \varphi(p), p \in X$. Como $D \in \omega_{X,x}$, via derivação exterior, podemos ver os elementos de $\Omega^1_{X,x}$ como elementos de $\omega_{X,x}$.

Além disso, os elementos de $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ também podem ser vistos como elementos de $\omega_{X,x}$. A justificativa para este fato pode ser vista em [30, página 68].

Com isso, podemos considerar a restrição da aplicação $Df_\wedge$ ao conjunto $\Omega^1_{X,x}$. A aplicação $Df_\wedge|_{\Omega^1_{X,x}}$ possui como kernel um conjunto especial, que será importante na demonstração do próximo teorema. O resultado a seguir exibe esse kernel e calcula a sua dimensão sobre $\mathbb{C}$.

Lema 3.1.10 *O conjunto $\{\omega \in \Omega^1_{X,x}; f \wedge \omega = 0$, para alguma $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x},\ f \neq 0\}$, denotado por $\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}$, é o kernel da aplicação $Df_\wedge|_{\Omega^1_{X,x}}$ e $dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right)$.*

Demonstração: A demonstração de que $Ker(Df_\wedge|_{\Omega^1_{X,x}}) = \mathscr{T}\Omega^1_{X,x}$, pode ser vista em [33, página 3] e a demonstração de que $dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right)$ encontra-se em [9, Proposição 1.11].

Teorema 3.1.11 *Seja (X, x) uma curva reduzida de interseção completa. Então*

$$\mu(X, x) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right).$$

Demonstração: Do isomorfismo $Df_\wedge$(Equação (3.3)), podemos definir o homomorfismo

$$\overline{Df_\wedge} : \frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \to \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}$$

da seguinte maneira: $\overline{Df_\wedge}(\alpha + d\mathscr{O}_{X,x}) = Df_\wedge(\alpha) + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}),\ \alpha \in \omega_{X,x}$.

Claramente, $\overline{Df_\wedge}$ está bem definida. Mostremos que $\overline{Df_\wedge}$ é isomorfismo. De fato,

1. Como $Df_\wedge$ é isomorfismo, $Ker(Df_\wedge) = \{0\}$. Além disso, $Ker(\overline{Df_\wedge}) = \frac{Ker(Df_\wedge)}{d\mathscr{O}_{X,x}}$. Logo $Ker(\overline{Df_\wedge}) = d\mathscr{O}_{X,x}$. Portanto, $\overline{Df_\wedge}$ é injetora.

2. Mostremos que $\overline{Df_\wedge}$ é sobrejetora. Seja $\beta + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) \in \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}$, ou seja, $\beta \in \Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}$.

   Como $Df_\wedge$ é isomorfismo, existe $\alpha \in \omega_{X,x}$ tal que $Df_\wedge(\alpha) = \beta$. Logo, existe $\alpha + d\mathscr{O}_{X,x} \in \frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$ tal que

$$\overline{Df_\wedge}(\alpha + d\mathscr{O}_{X,x}) = Df_\wedge(\alpha) + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) = \beta + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}).$$

   Portanto, $\overline{Df_\wedge}$ é sobrejetora.

Logo, $\overline{Df_\wedge}$ é isomorfismo.

Agora, vamos definir aplicações ξ, φ e ψ de tal forma que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}\Omega^1_{X,x} \xrightarrow{\varphi} \frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \xrightarrow{\xi} \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})} \xrightarrow{\psi} \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})} \longrightarrow 0$$

é exata. Para isso, temos de mostrar que φ é injetora, $Im(\varphi) = Ker(\xi)$, $Im(\xi) = Ker(\psi)$ e ψ é sobrejetora.

1. Defina $\varphi : \mathscr{T}\Omega^1_{X,x} \longrightarrow \frac{\Omega^1 X,x}{d\mathscr{O}_{X,x}}$ por $\varphi(\beta) = \beta + d\mathscr{O}_{X,x}$, $\beta \in \mathscr{T}\Omega^1_{X,x}$. Mostremos que φ é injetora.

   Se $\beta + d\mathscr{O}_{X,x} = d\mathscr{O}_{X,x}$, então $\beta \in d\mathscr{O}_{X,x}$. Logo, $\beta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$, para alguma $f \in \mathscr{O}_{X,x}$. Como $\beta \in \mathscr{T}\Omega^1_{X,x}$, existe $g \neq 0$, $g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$, tal que $g \wedge \beta = 0$. Então,

$$0 = g\wedge\beta = g\wedge\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \sum_{i=1}^{n} g.\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

   Daí, $g.\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \forall\ i = 1,\dots,n$ e, como $g \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \forall\ i = 1,\dots,n$. Portanto, $\beta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = 0$ e, com isso, φ é injetora.

2. Pela Observação 3.1.9, temos $\Omega^1_{X,x} \subset \omega_{X,x}$. Logo, $\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \subset \frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$. Desta forma, podemos definir ξ como sendo a restrição do morfismo $\overline{Df_\wedge}$ ao conjunto $\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$.

   Mostremos agora que $Im(\varphi) = Ker(\xi)$. Pelo Lema 3.1.10, $\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}$ é o kernel da aplicação $Df_\wedge|_{\Omega^1_{X,x}} : \Omega^1_{X,x} \to \Omega^n_{X,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}$. Logo,

$$Ker\left(\overline{Df_\wedge}|_{\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}}\right) = \frac{Ker(Df_\wedge|_{\Omega^1_{X,x}})}{d\mathscr{O}_{X,x}} = \frac{\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} = Im(\varphi).$$

3. Defina ainda

$$\psi : \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})} \longrightarrow \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}$$

   por $\psi(h + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})) = h + Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})$, onde $h \in \Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}$.

   A aplicação ψ está bem definida, pois se $h_1 + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) = h_2 + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})$, então $h_1 - h_2 \in Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) \subset Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})$, pela Observação 3.1.4. Logo $h_1 + Df_\wedge(\Omega^1_{X,x}) = h_2 + Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})$ e, portanto, $\psi(h_1 + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})) = \psi(h_2 + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}))$.

   Claramente, ψ é uma aplicação sobrejetora.

Mostremos agora que $Im(\xi) = Ker(\psi)$. De fato,

$$\begin{aligned} Ker(\psi) &= \{h + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) \in \tfrac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}; h + Df_\wedge(\Omega^1_{X,x}) = Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})\} \\ &= \{h + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) \in \tfrac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}; h \in Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})\} \\ &= \{h + Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x}) \in \tfrac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}; h = Df_\wedge(w),\ w \in \Omega^1_{X,x}\} \\ &= \{Df_\wedge(w) + Df_\wedge(\mathscr{O}_{X,x});\ w \in \Omega^1_{X,x}\} = \{Df_\wedge(w + d\mathscr{O}_{X,x})\} = Im(\overline{Df_\wedge}). \end{aligned}$$

Logo, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}\Omega^1_{X,x} \xrightarrow{\varphi} \frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \xrightarrow{\xi} \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})} \xrightarrow{\psi} \frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})} \longrightarrow 0$$

é exata.

Note que as aplicações ξ, φ e ψ são claramente lineares. Assim, aplicando o Teorema 1.1.22 em cada uma dessas aplicações, obtemos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1 X,x}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}(Ker(\varphi)) + dim_{\mathbb{C}}(Im(\varphi)) - dim_{\mathbb{C}}(Ker(\xi)) - dim_{\mathbb{C}}(Im(\xi)) +$$

$$+ dim_{\mathbb{C}}(Ker(\psi)) + dim_{\mathbb{C}}(Im(\psi)) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right).$$

Como φ é injetora, $Ker(\varphi) = \{0\}$ e, assim, $dim_{\mathbb{C}}(Ker(\varphi)) = 0$. Além disso, como a sequência apresentada é exata, temos $Im(\varphi) = Ker(\xi)$ e $Im(\xi) = Ker(\psi)$, daí $dim_{\mathbb{C}}(Im(\varphi)) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(\xi))$ e $dim_{\mathbb{C}}(Im(\xi)) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(\psi))$. Ainda, como ψ é sobrejetora, $Im(\psi) = \left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right)$, logo $dim_{\mathbb{C}}(Im(\psi)) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right)$. Portanto,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1 X,x}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right) = 0.$$

Pelo Lema 3.1.10, temos que

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{T}\Omega^1_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(\Omega^1_{X,x})}\right).$$

Logo,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1 X,x}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes\mathscr{O}_{X,x}}{Df_\wedge(d\mathscr{O}_{X,x})}\right).$$

Pelo isomorfismo $\overline{Df_{\wedge}}$,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^n_{\mathbb{C}^n,x}\otimes \mathscr{O}_{X,x}}{Df_{\wedge}(d\mathscr{O}_{X,x})}\right)=dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right)=\mu.$$

Portanto,

$$\mu = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right).$$

■

3.2 O número δ e o número de Milnor

Da maneira como foi definido, o número de Milnor de uma curva reduzida não é fácil de ser calculado. Nesta seção, vamos definir um número associado a um germe de espaço complexo, mais simples para ser calculado, e mostraremos que este número está relacionado ao número de Milnor de curvas reduzidas.

Sejam (X,x) um germe de espaço complexo e $(\overline{X},\overline{x})$ o germe de espaço complexo associado à normalização do espaço complexo associado a (X,x). Podemos definir um número associado a (X,x) dado pela dimensão sobre $\mathbb{C}$ do quociente $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$. Este número será denotado por $\delta(X,x)$.

Quando não houver dúvidas a respeito de qual germe de espaço complexo estamos nos referindo, $\delta(X,x)$ será denotado simplesmente por δ.

Observação 3.2.1 *Quando (X,x) for uma curva reduzida, o número δ é finito. De fato, pelo Teorema 2.3.31, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \simeq \mathbb{C}\{t\}$. Além disso, pela Observação 2.3.33, $\mathscr{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{t^m, p_2(t), \ldots, p_n(t)\}$. Logo, $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}} \simeq \frac{\mathbb{C}\{t\}}{\mathbb{C}\{t^m,p_2(t),\ldots,p_n(t)\}}$. Como os elementos de $\frac{\mathbb{C}\{t\}}{\mathbb{C}\{t^m,p_2(t),\ldots,p_n(t)\}}$ são polinômios de grau no máximo $m-1$, temos que $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) \leqslant m-1$. Portanto, δ é finito.*

Exemplo 3.2.2 *Seja $(X,0)$ um germe de espaço complexo, onde*

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3; x = t^3, y = t^4, z = t^5\}.$$

No Exemplo 2.3.34, mostramos que $(X,0)$ é uma curva reduzida e vimos que $\mathscr{O}_{X,0} \simeq \mathbb{C}\{t^3,t^4,t^5\}$. Além disso, pela Proposição 2.3.31, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \simeq \mathbb{C}\{t\}$.

Desta forma,

$$\delta(X,x) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}}{\mathbb{C}\{t^3,t^4,t^5\}}\right) = 2.$$

Faremos agora uma comparação entre as dimensões de dois $\mathbb{C}$-espaços vetoriais através do conceito de pareamento perfeito, o qual, ao lado de outras ferramentas algébricas, nos permitirá estabelecer uma relação entre o número δ e o número de Milnor de uma curva reduzida.

Definição 3.2.3 *Sejam U e V $\mathbb{C}$- espaços vetoriais. Um **pareamento** entre U e V é uma aplicação $\mathbb{C}$- bilinear $B : U \times V \to \mathbb{C}$.*

Exemplo 3.2.4 *Considere os $\mathbb{C}$- espaços vetoriais $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$ e $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$. Observe que o quociente $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$ está bem definido, pois $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \subset \omega_{X,x}$, pela Observação 3.1.9.*

Defina a aplicação

$$B : \frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}} \times \frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}} \to \mathbb{C}$$

dada por

$$B([f],[w]) = \sum res_{\overline{x}}(f \wedge w),$$

onde $[f] = f + \mathscr{O}_{X,x}$, com $f \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ e $[w] = w + \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, com $w \in \omega_{X,x}$ e $res_{\overline{x}}(f \wedge w)$ denota o resíduo de $\tilde{f}$ e $\tilde{w}$, onde $\tilde{f}$ é um representante do germe f e $\tilde{w}$ é um representante do germe w. (Para detalhes sobre o conceito de resíduos, ver [31]).

Pelo Teorema de Cauchy, temos que $\sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\tilde{f} \wedge \tilde{w})d\gamma$, onde γ é uma curva retificável que não passa por nenhum dos pontos de $\overline{x}$. Pelas propriedades de integração, B é uma aplicação $\mathbb{C}$-bilinear e, portanto, um pareamento.

Observamos que não entraremos em detalhes sobre o conceito de resíduos. Porém este será um elo importante entre o número δ e o número de Milnor de curvas reduzidas, através do seguinte resultado, que omitiremos a demonstração.

Teorema 3.2.5 *$\omega_{X,x} \simeq \omega^R_{X,x}$, onde $\omega^R_{X,x} = \{w \in \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}; \sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) = 0, \forall\ f \in \mathscr{O}_{X,x}\}$.*

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser vista em [30, ver página 68].

Definição 3.2.6 *Um pareamento $B : U \times V \to \mathbb{C}$ é **perfeito** se as aplicações lineares induzidas $\overline{B} : U \to Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ e $\widetilde{B} : V \to Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$, dadas por $\overline{B}(u) = B(u, -)$, onde $B(u, -)$ é um homomorfismo $B(u, -) : V \to \mathbb{C}$ definido por $B(u, -)(v) = B(u, v), v \in V$ e $\widetilde{B}(v) = B(-, v)$, onde $B(-, v)$ é um homomorfismo $B(-, v) : U \to \mathbb{C}$ definido por $B(-, v)(u) = B(u, v), u \in U$, são isomorfismos.*

Definição 3.2.7 *Um pareamento $B : U \times V \to \mathbb{C}$ é **não-degenerado** se as seguintes condições estão satisfeitas:*

$$B(u, v) = 0, \forall\ v \in V \Rightarrow u = 0 \text{ e } B(u, v) = 0, \forall\ u \in U \Rightarrow v = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\forall\ u \in U, u \neq 0,\ \exists\ v \in V, v \neq 0 \mid B(u, v) \neq 0 \text{ e } \forall\ v \in V, v \neq 0,\ \exists\ u \in U, u \neq 0 \mid B(u, v) \neq 0.$$

Teorema 3.2.8 *Sejam U e V $\mathbb{C}$- espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Se $B : U \times V \to \mathbb{C}$ é um pareamento não-degenerado, então os homomorfismos induzidos $\overline{B} : U \to Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ e $\widetilde{B} : V \to Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$ são isomorfismos.*

Demonstração: Mostremos que as aplicações $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ são injetoras. Seja $u \in U$ tal que $\overline{B}(u) = 0$. Então o homomorfismo $B(u, -)$ é a aplicação nula. Logo, $B(u, -)(v) = B(u, v) = 0, \forall\ v \neq 0$. Como B é um pareamento não-degenerado, temos que $u = 0$. Portanto, $\overline{B}$ é injetora. Analogamente, mostra-se que $\widetilde{B}$ é injetora.

As aplicações induzidas $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ são claramente lineares. Aplicando o Teorema 1.1.22 sobre essas aplicações, e lembrando que $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ são injetoras, temos

$$dim_{\mathbb{C}}(U) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B})) \text{ e } dim_{\mathbb{C}}(V) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\widetilde{B})). \tag{3.4}$$

Por outro lado, como $Im(\overline{B}) \subseteq Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ e $Im(\widetilde{B}) \subseteq Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$, temos

$$dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B})) \leq dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})) \text{ e } dim_{\mathbb{C}}(Im(\widetilde{B})) \leq dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})). \tag{3.5}$$

Como, pelo Teorema 1.1.5, $Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \simeq V$ e $Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C}) \simeq U$, temos:

$$dim_{\mathbb{C}}(V) = dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})) \text{ e } dim_{\mathbb{C}}(U) = dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})). \tag{3.6}$$

Pelas Equações (3.4), (3.5) e (3.6), temos

$$\begin{gathered} dim_{\mathbb{C}}(U) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B})) \leq dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})) = dim_{\mathbb{C}}(V) \text{ e} \\ dim_{\mathbb{C}}(V) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\widetilde{B})) \leq dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})) = dim_{\mathbb{C}}(U). \end{gathered}$$

Portanto, $dim_{\mathbb{C}}(V) = dim_{\mathbb{C}}(U)$. Com isso, temos que $dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})) = dim_{\mathbb{C}}(U)$ e $dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})) = dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Logo, $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ são aplicações lineares injetoras entre espaços de mesma dimensão sobre $\mathbb{C}$ e, com isso, $\overline{B}$ e $\widetilde{B}$ são isomorfismos. ■

Em outras palavras, temos:

Corolário 3.2.9 *Se $B : U \times V \to \mathbb{C}$ é um pareamento não-degenerado de $\mathbb{C}$- espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, então B é um pareamento perfeito.*

Exemplo 3.2.10 *O pareamento $B : \frac{\mathscr{O}_{\overline{X}, \overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}} \times \frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X}, \overline{x}}} \to \mathbb{C}$ é perfeito. Pelo corolário anterior, para mostrarmos isso, basta mostrar que B é um pareamento não-degenerado e $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X}, \overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$ e $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X}, \overline{x}}}$ são espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.*

Se $f \in \mathscr{O}_{\overline{X}, \overline{x}}$ e $w \in \Omega^1_{\overline{X}, \overline{x}}$, então f e w são holomorfas e, desta forma, $f \wedge w$ é holomorfa. Portanto, $\sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) = 0$. Pela contra-positiva desta implicação, *se* $\sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) \neq 0$, *então* $f \notin \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ *ou* $w \notin \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$. *Seja* $f + \mathscr{O}_{X,x} \neq 0$ *em* $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$ *e suponha* $\sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) \neq 0$, *então,* $w \notin \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, *ou seja,* $w \neq 0$ *em* $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$. *Portanto,*

$$\forall\, f + \mathscr{O}_{X,x} \neq 0, \exists\, w + \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \neq 0 \mid \sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) \neq 0. \tag{3.7}$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.2.5, temos $\omega^R_{X,x} \simeq \omega_{X,x}$, *onde*

$$\omega^R_{X,x} = \{w \in \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}; \sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) = 0, \forall\, f \in \mathscr{O}_{X,x}\}.$$

Com isso, via contra-positiva, temos que se $\sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) \neq 0$, *então* $f \notin \mathscr{O}_{X,x}$ *ou* $w \notin \omega_{X,x}$.

Seja $w \neq 0$ *em* $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$ *e suponha* $\sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) \neq 0$. *Então* $f \neq 0$ *em* $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$. *Portanto,*

$$\forall\, w + \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \neq 0, \exists\, f + \mathscr{O}_{X,x} \neq 0 \mid \sum res_{\overline{x}}(f \wedge w) \neq 0. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), temos que B *é um pareamento não-degenerado.*

Além disso, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = \delta$ *é finito no caso de curvas reduzidas, pela Observação 3.2.1.*

Falta mostrar que $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$ *tem dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$. *Como o pareamento* B *é não degenerado, a aplicação* $\overline{B} : \frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}} \to Hom_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}, \mathbb{C}\right)$ *é uma aplicação injetora, como vimos na demonstração do Teorema 3.2.8. Assim, aplicando o Teorema 1.1.22 sobre a aplicação linear* $\overline{B}$, *obtemos* $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{B})) + dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B}))$. *Mas* $\overline{B}$ *é injetora, então* $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B}))$.

Agora, como $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$ *tem dimensão finita,* $Hom_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}, \mathbb{C}\right)$ *tem dimensão finita e*

$$dim_{\mathbb{C}}\left(Hom_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}, \mathbb{C}\right)\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = \delta.$$

Assim, como $Im(\overline{B}) \subset Hom_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}, \mathbb{C}\right)$, *temos* $dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B})) \leqslant dim_{\mathbb{C}}(\left(Hom_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}, \mathbb{C}\right)\right) = \delta$ *e visto que* $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{B}))$, *concluímos que* $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = \delta$.

Dessa forma, $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}$ *e* $\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$ *têm dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$ *e, portanto,* B *é um pareamento perfeito.*

Observação 3.2.11 *Vimos na demonstração do Teorema 3.2.8 que se* $B : U \times V \to \mathbb{C}$ *é um pareamento não-degenerado entre espaços vetoriais de dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$, *então* $dim_{\mathbb{C}}(U) = dim_{\mathbb{C}}(V)$. *Desta forma, usando o pareamento* B *do exemplo anterior, temos que* $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right)$.

Munido dessas ferramentas, podemos provar as seguites igualdades:

Proposição 3.2.12 *Seja (X, x) uma curva reduzida e r o número de componentes irredutíveis de (X, x). Então*

1. $\mu = 2\delta - r + 1$

2. *Se (X, x) é irredutível, $\mu = 0$ se, e somente se, (X, x) é regular.*

Demonstração:

1. Considere a aplicação $D : \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \to \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, dada por $D(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. O kernel de D, $Ker(D) = \{f \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}; D(f) = 0\}$, é dado pelo conjunto das funções constantes sobre $\overline{X}$.

   Mas, sendo $(\overline{X}, \overline{x}) = (\overline{X}_1, \overline{x}) \cup \ldots \cup (\overline{X}_r, \overline{x})$, temos $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}$, pela Proposição 2.3.31.

   Dessa forma, uma função constante em $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é um elemento $f_1 \oplus \cdots \oplus f_r$ tal que cada f_i é função constante em $\mathbb{C}\{t_i\}$. Logo, $Ker(D) = \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$ e, com isso, $dim_{\mathbb{C}}(Ker(D)) = r$.

   A aplicação D é claramente sobrejetora, pela caracterização de $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ (Observação 3.1.9).

   Pela Observação 3.1.4, a aplicação induzida por D, $\overline{D} : \frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}} \to \frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$, é dada por $\overline{D}(f + \mathscr{O}_{X,x}) := D(f) + D(\mathscr{O}_{X,x}) = D(f) + d\mathscr{O}_{X,x}$.

   Como D é sobrejetora, $\overline{D}$ é sobrejetora. Assim, a sequência

$$0 \longrightarrow Ker(\overline{D}) \xrightarrow{i} \frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}} \xrightarrow{\overline{D}} \frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \longrightarrow 0 \tag{3.9}$$

   é exata, onde i é a aplicação inclusão.

   Claramente i e $\overline{D}$ são aplicações lineares, logo, aplicando o Teorema 1.1.22 sobre elas, obtemos

$$dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}(Ker(i)) + dim_{\mathbb{C}}(Im(i)) - dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})) - dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{D})) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right).$$

   Como a Sequência (3.9) é exata, temos $dim_{\mathbb{C}}(Ker(i)) = 0, dim_{\mathbb{C}}(Im(i)) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D}))$ e $dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{D})) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right)$. Logo,

$$dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) = 0$$

Vamos calcular a dimensão de $Ker(\overline{D})$ sobre $\mathbb{C}$. Note que $Ker(\overline{D}) = \frac{Ker(D)}{\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)}$. Pelo Teorema 1.1.24,

$$dim_{\mathbb{C}}(Ker(D)) = dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{Ker(D)}{\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)) + dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})).$$

Como $Ker(D)$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D) \subset Ker(D)$ tem dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, assim

$$dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(D)) - dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)) = r - dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)).$$

Com isso, para calcular a dimensão de $Ker(\overline{D})$ sobre $\mathbb{C}$, basta calcularmos a dimensão de $\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)$ sobre $\mathbb{C}$.

Para isso, considere aplicação $\zeta : \mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D) \to \mathbb{C}$ que associa, a cada germe de função constante $f \in \mathscr{O}_{X,x}$, onde $f(x) = z, \forall\ x \in X, z$ fixo em $\mathbb{C}$, o número $z \in \mathbb{C}$. Claramente, esta aplicação está bem definida e é um isomorfismo. Logo, $dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Portanto, $dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})) = r - dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_{X,x} \cap Ker(D)) = r - 1$.

Desta forma,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) - dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{D})) = \delta - r + 1. \tag{3.10}$$

Agora, pelas Observações 3.1.4 e 3.1.9, temos $d\mathscr{O}_{X,x} \subset \omega_{X,x}$. Além disso, pela Observação 3.1.9, $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \subset \omega_{X,x}$. Defina então a aplicação $\varphi : \frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \to \frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}$ dada por $\varphi(w + d\mathscr{O}_{X,x}) = w + \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$.

Esta é uma aplicação que está bem definida, pois $d\mathscr{O}_{X,x} \subset \Omega^1_{X,x} \subset \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$, é claramente sobrejetora e $Ker(\varphi) = \dfrac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}$.

Portanto, a sequência

$$0 \to \frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \xrightarrow{i} \frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}} \xrightarrow{\varphi} \frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}} \to 0 \tag{3.11}$$

é exata, onde i denota a aplicação inclusão.

Além disso, é fácil ver que φ é uma aplicação linear. Assim, aplicando o Teorema

1.1.22 nessa aplicação, obtemos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) - dim_{\mathbb{C}}(Ker(\varphi)) - dim_{\mathbb{C}}(Im(\varphi)) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = 0$$

Pela Observação 3.2.11, temos que $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = \delta$.

Desta forma,

$$0 = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{d\mathscr{O}_{X,x}}\right) - \mu + \delta. \tag{3.12}$$

Substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.12), temos $\delta - r + 1 - \mu + \delta = 0$. Portanto, $\mu = 2\delta - r + 1$. ■

2. Suponha que a curva reduzida (X, x) é regular. Então, por definição, $\mathscr{O}_{X,x}$ é regular e, como $dim(\mathscr{O}_{X,x}) = 1$, pela Proposição 1.1.29, $\mathscr{O}_{X,x}$ é normal. Logo, $\mathscr{O}_{X,x} = \overline{\mathscr{O}_{X,x}} = \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Portanto, $\delta = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = 0$.

   Desde que (X, x) é irredutível, temos que $r = 1$ e, utilizando o item anterior,

   $$\mu = 2\delta + r - 1 = 2.0 + 1 - 1 = 0.$$

   Por outro lado, se $\mu = 0$, usando o item anterior e supondo que a curva (X, x) é irredutível, temos $\delta = 0$. Logo, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = 0$ e, assim, $\mathscr{O}_{X,x} = \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Portanto, $\mathscr{O}_{X,x}$ é normal e, como $dim(X, x) = 1$, pela Proposição 1.1.29, $\mathscr{O}_{X,x}$ é regular. Logo, (X, x) é regular. ■

Também podemos estabelecer uma relação semelhante à demonstrada na Proposição 3.2.12 trabalhando com as componentes irredutíveis da curva reduzida (X, x). É o que faremos na demonstração do próximo resultado. A partir dele, outras relações interessantes podem ser verificadas e as provaremos nos corolários à frente.

Primeiro, consideremos a seguinte notação: dadas (C_i, x) curvas reduzidas, onde $\mathscr{O}_{C^i,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i}, i = 1, 2,\ (C_1.C_2) := dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1+I_2}\right)$.

Teorema 3.2.13 *Seja (X, x) uma curva reduzida tal que $(X, x) = \cup_{i=1}^r (X^i, x)$, com $X^i \cap X^j = \{x\}, i \neq j$. Sendo $(X_i, x) = \cup_{j=i+1}^r (X^j, x)$, considere a notação $\delta_i = \delta(X^i, x)$.*

Então

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \delta_i + \sum_{i=1}^{r-1} (X^i.X_i).$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre o número de componentes de (X, x). Começaremos com o caso $r = 2$. Então $(X, x) = (X^1, x) \cup (X^2, x)$ e temos $(X_1, x) = (X^2, x)$. Precisamos mostrar que $\delta = \delta_1 + \delta_2 + (X^1.X^2)$. Seja I_i o ideal associado a (X^i, x), então $I_1 \cap I_2$ é o ideal associado a (X, x). Considere a sequência

$$0 \xrightarrow{\varphi_0} \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2} \xrightarrow{\varphi_1} \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1} \oplus \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2} \xrightarrow{\varphi_2} \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 + I_2} \xrightarrow{\varphi_3} 0, \tag{3.13}$$

onde φ_0 é a aplicação identidade, $\varphi_1(f + I_1 \cap I_2) = (f + I_1) \oplus (f + I_2)$, $\varphi_2((f + I_1) \oplus (g + I_2)) = (f - g) + (I_1 + I_2)$ e φ_3 é a aplicação nula. As aplicações φ_1 e φ_2 estão claramente bem definidas. Mostremos que esta sequência é exata. Para isso, mostremos que φ_1 é injetora, $Im(\varphi_1) = Ker(\varphi_2)$ e φ_2 é sobrejetora.

1. Veja que $\varphi_1(f + I_1 \cap I_2) = 0$, se $(f + I_1) \oplus (f + I_2) = I_1 \oplus I_2$, isto é, se $f \in I_1$ e $f \in I_2$, ou ainda, $f \in I_1 \cap I_2$. Logo, $Ker(\varphi_1) = I_1 \cap I_2$ e assim, φ_1 é injetora.

2. Mostremos que $Im(\varphi_1) = Ker(\varphi_2)$. Veja que $Im(\varphi_1) = \{(f + I_1) \oplus (f + I_2); f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}\}$. Assim, como

$$\varphi_2((f + I_1) \oplus (f + I_2)) = (f - f) + I_1 + I_2 = I_1 + I_2, \forall\, f \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x},$$

temos $Im(\varphi_1) \subset Ker(\varphi_2)$.

Seja agora, $(f + I_1) \oplus (g + I_2) \in Ker(\varphi_2)$. Então $f - g \in I_1 + I_2$, isto é, existem $h_1 \in I_1$ e $h_2 \in I_2$ tais que

$$f - g = h_1 + h_2.$$

Seja $h = f - h_1$. Então

$$h + I_2 = f - h_1 + I_2 = g + h_2 + I_2 = g + I_2.$$

Por outro lado,

$$h + I_1 = f - h_1 + I_1 = f + I_1.$$

Logo,

$$(f + I_1) \oplus (g + I_2) = (h + I_1) \oplus (h + I_2) \in Im(\varphi_1).$$

Portanto, $Im(\varphi_1) = Ker(\varphi_2)$.

3. A aplicação φ_2 é sobrejetora, pois para qualquer $f + (I_1 + I_2) \in \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1+I_2}$, existe $(f + I_1) \oplus (0 + I_2)$ tal que

$$\varphi_2((f + I_1) \oplus (0 + I_2)) = (f - 0) + (I_1 + I_2) = f + I_1 + I_2,$$

onde 0 é denota a aplicação nula.

Logo, a Sequência (3.13) é exata.

É fácil ver que as aplicações φ_1 e φ_2 são lineares. Então, aplicando o Teorema 1.1.22, obtemos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1} \oplus \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 + I_2}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}(Ker(\varphi_1)) + dim_{\mathbb{C}}(Im(\varphi_1)) - dim_{\mathbb{C}}(Ker(\varphi_2)) - dim_{\mathbb{C}}(Im(\varphi_2)) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 + I_2}\right) = 0,$$

pois a Sequência (3.13) é exata.

Assim,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}\right) - dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}\right) + (X^1.X^2) = 0. \tag{3.14}$$

Por outro lado, como $(X, x) = (X^1, x) \cup (X^2, x)$, temos $(\overline{X}, \overline{x}) = (\overline{X^1}, \overline{x}) \cup (\overline{X^2}, \overline{x})$ e, pela Observação 2.3.30, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \mathscr{O}_{\overline{X^1},\overline{x}} \oplus \mathscr{O}_{\overline{X^2},\overline{x}}$. Agora, pela Observação 2.3.20, $\mathscr{O}_{\overline{X^i},\overline{x}} = \overline{\mathscr{O}_{X^i,x}}, i = 1, 2$. Logo, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \overline{\mathscr{O}_{X^1,x}} \oplus \overline{\mathscr{O}_{X^2,x}} = \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}} \oplus \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}}$.

Pelo Teorema 1.1.24, temos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}} \oplus \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}} \oplus \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}}}{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) + \delta.$$

Como δ é um número, temos $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}} \oplus \overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}}\right) - \delta$.

Logo,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1 \cap I_2}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}}\right) - \delta \tag{3.15}$$

Ainda pelo Teorema 1.1.24,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\overline{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i}}}{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i}\right) + \delta_i \tag{3.16}$$

Substituindo a Equação (3.16) na Equação (3.15), obtemos

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1\cap I_2}\right)=dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}\right)+\delta_1+dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}\right)+\delta_2-\delta. \tag{3.17}$$

Substituindo a Equação (3.17) na Equação (3.14), obtemos

$$0=dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1\cap I_2}\right)-dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}\right)-dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}\right)+(X^1.X^2)=$$

$$=dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}\right)+\delta_1+dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}\right)+\delta_2-\delta-dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_1}\right)-dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_2}\right)+(X^1.X^2).$$

Daí,

$$\delta_1+\delta_2-\delta+(X^1.X^2)=0\Rightarrow\delta=\delta_1+\delta_2+(X^1.X^2).$$

Suponha agora que se $(X_0,x)=\bigcup_{i=2}^{r}(X^i,x)$, então $\delta(X_0,x)=\sum_{i=2}^{r}\delta_i+\sum_{i=2}^{r-1}(X^i.X_i)$.

Mostremos que se $(X,x)=(X^1,x)\cup(X_0,x)=\bigcup_{i=1}^{r}(X^i,x)$, temos

$$\delta(X,x)=\sum_{i=1}^{r}\delta_i+\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i).$$

Observe que $(X_0,x)=(X_1,0)$. Já que $(X,x)=(X^1,x)\cup(X_0,x)$, pelo caso anterior, temos

$$\delta=\delta(X^1,x)+\delta(X_0,x)+(X^1.X_0)=\delta(X^1,x)+\sum_{i=2}^{r}\delta_i+\sum_{i=2}^{r-1}(X^i.X_i)+(X^1.X_0)=$$

$$=\delta_1+\sum_{i=2}^{r}\delta_i+\sum_{i=2}^{r-1}(X^i.X_i)+(X^1.X_1)=\sum_{i=1}^{r}\delta_i+\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i).$$

■

Corolário 3.2.14 *Sejam (X,x) uma curva reduzida e (X^i,x) suas componentes irredutíveis, tais que $X^i\cap X^j=\{x\},\forall\, i\neq j$. Considere a notação $\mu_i=\mu(X^i,x)$. Então*

1. $\mu-1=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i-1)+2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i)$;
2. $\mu\geqslant\sum_{i=1}^{r}\mu_i+r-1$.

Demonstração:

1. Pela Proposição 3.2.12, $\mu=2\delta-r+1$. Por outro lado, pelo Teorema 3.2.13,

$$\delta=\sum_{i=1}^{r}\delta_i+\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i).$$

Assim,

$$\mu = 2\left(\sum_{i=1}^{r}\delta_i + \sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i)\right) - r + 1 = 2\sum_{i=1}^{r}\delta_i + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) - r + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu - 1 = \sum_{i=1}^{r} 2\delta_i - r + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i).$$

Aplicando a Proposição 3.2.12 em cada δ_i, $1 \leq i \leq r$, obtemos $\mu_i = 2\delta_i - r_i + 1$, onde $r_i = 1$, pois (X^i, x) é irredutível. Assim,

$$\mu - 1 = \sum_{i=1}^{r} 2\delta_i - r + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) = \sum_{i=1}^{r}[(\mu_i - 1) + 1] - r + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r}(\mu_i - 1) + r - r + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) = \sum_{i=1}^{r}(\mu_i - 1) + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i).$$

Portanto,

$$\mu - 1 = \sum_{i=1}^{r}(\mu_i - 1) + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i).$$

2. Pelo item anterior,

$$\mu - 1 = \sum_{i=1}^{r}(\mu_i - 1) + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) = \sum_{i=1}^{r}\mu_i - \sum_{i=1}^{r}1 + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \sum_{i=1}^{r}\mu_i - r + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) + 1.$$

Desde que $(X^i.X_i) \geqslant 1, \forall\, i = 1, \ldots, r$, então

$$\mu = \sum_{i=1}^{r}\mu_i - r + 2\sum_{i=1}^{r-1}(X^i.X_i) + 1 \geqslant \sum_{i=1}^{r}\mu_i - (r-1) + 2\sum_{i=1}^{r-1}1 = \sum_{i=1}^{r}\mu_i + r - 1.$$

Falta mostrar que $(X^i.X_i) \geqslant 1$. Sendo I_k o ideal associado a (X^k, x), temos

$$X^i.X_i = X^i.(X^{i+1} \cup \ldots \cup X^r) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I_i + I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r}\right).$$

Então, para que $(X^i, X_i) \geqslant 1$, basta mostrarmos que $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x} \neq \langle I_i + I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r \rangle$. Para isso, vamos introduzir a seguinte notação: dado um ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$, denotemos por $V(I)$ o conjunto $\{p \in \mathbb{C}^n, g_1(p) = \cdots = g_s(p) = 0\}$.

Como $I_1 \cap \ldots \cap I_r \subseteq I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r \subseteq I_i + I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r$, temos

$$V(I_i + I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r) \subset V(I_1 \cap \ldots \cap I_r) = X \neq \mathbb{C}^n,$$

pois X é uma curva.

Daí, $V(I_i + I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r) \neq \mathbb{C}^n$. Portanto, $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x} \neq \langle I_i + I_{i+1} \cap \ldots \cap I_r \rangle$. ■

3.3 Número de Milnor de germe de função em curva reduzida

Nesta seção trataremos do grau e do número de Milnor de um tipo especial de germe de função definido sobre uma curva reduzida e os relacionaremos com o número de Milnor destas curvas.

No que segue, (X, x) denota uma curva reduzida, com $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\ldots,f_k \rangle}$, $f_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$.

Definição 3.3.1 *Um **germe de função finita** sobre (X, x) é um germe $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ tal que algum representante g de f satisfaz*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ g^{-1}(z) \text{ é um conjunto finito.}$$

Sejam $c_X : \Omega^1_{X,x} \to \omega_{X,x}$ dada pela composta $\varphi \circ \psi \circ \alpha$ da Sequência (3.1) e $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. Defina a aplicação $\phi_f : \mathscr{O}_{X,x} \to \Omega^1_{X,x}$ por $\phi_f(h) = \sum_{i=1}^{n} h.\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i$ e considere a composta $c_X \circ \phi_f : \mathscr{O}_{X,x} \to \omega_{X,x}$, que denotaremos por θ_f.

Com isso, podemos considerar a seguinte definição, introduzida em [26] por D. Mond e D. van Straten:

Definição 3.3.2 *Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. O **número de Milnor** f é definido por*

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\omega_{X,x}}{\theta_f(\mathscr{O}_{X,x})} \right).$$

Observação 3.3.3 *O quociente $\frac{\omega_{X,x}}{\theta_f(\mathscr{O}_{X,x})}$ está definido para qualquer germe de função f em $\mathscr{O}_{X,x}$, mas apenas no caso em que o germe f é finito esse quociente possui dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, pois o relacionaremos com o grau da f que, neste caso, existe e é finito.*

O próximo passo é definir o grau de um germe de função finita sobre (X, x), completando os objetos necessários para o desenvolvimento desta seção.

Proposição 3.3.4 *Se $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ é um germe de função finita, então $\langle f \rangle$ é um ideal $\mathscr{M}_x$-primário, onde $\mathscr{M}_x$ é o ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$.*

Demonstração: Se $f \in \mathscr{O}_{X,x}$, então f denota a classe de um germe em $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ no quociente $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I}$, digamos $f + I$, onde $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$. Seja $\mathscr{M} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ o ideal maximal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$. Para mostrar que $\langle f \rangle$ é um ideal $\mathscr{M}$- primário, temos de mostrar que $\mathscr{M} = r(\langle f \rangle)$, lembrando que

$$r(\langle f \rangle) = \{h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}; h^n \in \langle f \rangle, \text{ para algum } n \geq 0\}.$$

O conjunto $r(\langle f \rangle)$ é um ideal de $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ e, como $\mathscr{M}$ é o único ideal maximal de $\mathscr{O}_{X,x}$, temos que $r(\langle f \rangle) \subset \mathscr{M}$.

Suponha que $\forall\, x_i \in \mathscr{M}$, $x_i \notin r(\langle f \rangle)$. Então,

$$\forall\, x_i \in \mathscr{M}, \forall\, n_i \in \mathbb{N}, x_i^{n_i} \notin \langle f \rangle.$$

Como $\langle f \rangle$ não contém nenhuma das funções coordenadas x_i e $f \in \langle f \rangle$, temos que f é constante, digamos $f(p) = z, \forall\, p \in \mathbb{C}^n$. Logo, $f^{-1}(z) = \mathbb{C}^n$, que é um conjunto infinito. Como f é uma função finita, temos um absurdo. Logo, existe algum x_k em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e algum número natural n_k tal que $x_k^{n_k} \in \langle f \rangle$.

Suponha agora que, para $i \neq k$, $\forall\, x_i \in \mathscr{M}$, $x_i \notin r(\langle f \rangle)$. Então,

$$\forall\, x_i \in \mathscr{M}, \forall\, n_i \in \mathbb{N}, x_i^{n_i} \notin \langle f \rangle,\ i \neq k.$$

Como f não é uma função constante, $f \in \langle f \rangle$ e x_k é a única função coordenada em $\langle f \rangle$, temos que $f = \sum a_s (x_k^{n_k})^s$. Então, dado $z \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(z) = \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n; f((p_1, \ldots, p_n)) = \sum a_s (p_k^{n_k})^s = z\}$. A menos da k- ésima entrada, todas as entradas do ponto p estão livres em $\mathbb{C}$ e assim $f^{-1}(z)$ é um conjunto infinito. Como f é uma função finita, temos um absurdo.

Continuando este raciocínio, vemos que, dado um ponto $z \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(z)$ só poderá ser finita se:

$$\forall\, x_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}, \exists\, n_i \in \mathbb{N} \mid x_i^{n_i} \in \langle f \rangle.$$

Portanto, $\{x_1, \ldots, x_n\} \in r(\langle f \rangle)$, ou seja, $\mathscr{M} \subset r(\langle f \rangle)$.

Com isso, concluímos que $\langle f \rangle$ é um ideal $\mathscr{M}$- primário.

Como $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{I}$, temos que $r(\langle f + I \rangle) = \frac{r(\langle f \rangle)}{I} = \frac{\mathscr{M}}{I} = \mathscr{M}_x$. Portanto, $r(\langle f + I \rangle)$ é um ideal $\frac{\mathscr{M}}{I}$- primário. ■

Com a proposição anterior, podemos calcular a multiplicidade do ideal $\langle f \rangle$, e isso justifica a próxima definição.

Definição 3.3.5 *Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. O **grau do germe** f é definido por* $\deg(f) := e(\langle f \rangle, \mathscr{O}_{X,x})$, *onde $e(\langle f \rangle, \mathscr{O}_{X,x})$ é a multiplicidade do ideal $\langle f \rangle$.*

Calcular a multiplicidade de um ideal não é uma tarefa fácil, em geral. Por conta disso, veremos uma maneira relativamente mais simples para calcular o grau de um germe de função nestas condições na próxima proposição. Esse resultado nos será indispensável quando estivermos relacionando os números de Milnor destes germes de função e das curvas reduzidas associadas.

Proposição 3.3.6 *Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. Então* $\deg(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right)$.

Demonstração: Como (X, x) é uma curva reduzida, o anel local $\mathscr{O}_{X,x}$ não possui elementos nilpotentes e $dim(\mathscr{O}_{X,x}) = 1$. Pelo Exemplo 1.1.50, $\mathscr{O}_{X,x}$ é anel de Cohen-Macaulay. Daí, pelo Teorema 1.1.52,

$$\deg(f) = e(\langle f\rangle, \mathscr{O}_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right).$$

■

Aplicando essa proposição, podemos calcular o grau dos germes de função finita cuja derivada é não nula na origem.

Proposição 3.3.7 *Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita sobre uma curva regular (X, x). Então* $\deg(f) = 1$ *se, e somente se, f é uma função regular, isto é, f possui derivada não nula na origem.*

Demonstração: Se (X, x) é uma curva regular, então $dim(\mathscr{O}_{X,x}) = 1$ e $\mathscr{O}_{X,x}$ é um anel regular. Logo, pela Proposição 1.1.29, $\mathscr{O}_{X,x}$ é um anel normal. Com isso, temos, pela Proposição 2.3.31, que $\mathscr{O}_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{t\}$, onde t é uma indeterminada. Assim,

$$f = a_k t^k + \text{ termos de ordem superior, com } k \geqslant 1 \text{ e } a_k \neq 0.$$

Com essa expressão de f, temos $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right) = k$.

Suponha que $\deg(f) = 1$. Então, pela Proposição 3.3.6, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right) = \deg(f) = 1$. Então, f é uma função polinomial de grau 1. Logo, f é uma função regular.

Reciprocamente, se f é uma função regular sobre a curva regular (X, x), então $f \in \mathbb{C}\{t\}$ e $\frac{\partial f(0)}{\partial t} \neq 0$. Desta forma, $f = a_1 t +$ termos de ordem superior.

Portanto, $\deg(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}}{\langle f\rangle}\right) = 1$. ■

A primeira relação que podemos obter entre o número de Milnor de germes de função finita sobre curvas reduzidas e o número de Milnor destas curvas associadas é para o caso em que a curva é regular.

Proposição 3.3.8 *Se $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ é um germe de função finita e (X, x) é uma curva regular, então* $\deg(f) = \mu(f) + 1$.

Demonstração: Como vimos na demonstração da proposição anterior, podemos ver f como $f(t) = a_k t^k +$ termos de ordem superior, para algum $k \geqslant 1$ e $a_k \neq 0$ e concluímos que

$$\deg(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}}{\langle f\rangle}\right) = k.$$

Além disso, sendo (X,x) uma curva regular, temos, pela Proposição 1.1.29, que (X,x) é normal. Logo, pelas Observações 2.3.24 e 2.3.36, temos que $\Omega^1_{X,x} = \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ e $\omega_{X,x} = \omega_{\overline{X},\overline{x}}$. Assim, as aplicações $\alpha : \Omega^1_{X,x} \to \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}$ e $\varphi : \omega_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{X,x}$ correspondem à aplicação identidade e, pela Proposição 3.1.2, temos que $\psi : \omega_{X,x} \to \Omega^1_{X,x}$ é isomorfismo.

Portanto, $\theta_f = \varphi \circ \psi \circ \alpha \circ \phi_f = \psi \circ \phi_f$ e, com isso,

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\theta_f(\mathscr{O}_{X,x})}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{(\psi\circ\phi_f)(\mathscr{O}_{X,x})}\right).$$

Mas, visto que ψ é isomorfismo, temos $dim_{\mathbb{C}}((\psi\circ\phi_f)(\mathscr{O}_{X,x})) = dim_{\mathbb{C}}(\phi_f(\mathscr{O}_{X,x}))$ e $dim_{\mathbb{C}}(\omega_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_{X,x})$, logo

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{(\psi\circ\phi_f)(\mathscr{O}_{X,x})}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{X,x}}{\phi_f(\mathscr{O}_{X,x})}\right) = k-1, \tag{3.18}$$

pois $\Omega^1_{X,x} \simeq \mathbb{C}\{t\}dt$ (Corolário 2.3.32) e, como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = ka_kt^{k-1}+$ termos de ordem superior, $\phi_f(\mathscr{O}_{X,0}) \simeq \phi_f(\mathbb{C}\{t\}) = \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g.\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)dx_i; g\in\mathbb{C}\{t\}\right\}$ é formado por funções polinomiais de grau maior ou igual a $k-1$. Logo, $\mu(f) = k-1$.

De $\deg(f) = k$ e $\mu(f) = k-1$, obtemos que $\deg(f) = \mu(f)+1$, no caso de (X,x) ser uma curva reduzida regular. ■

Visto a fórmula $\deg(f) = \mu(f)+1$ para curvas reduzidas regulares, trabalharemos agora para generalizar esta fórmula para curvas reduzidas quaisquer. Inicialmente, provemos o seguinte resultado:

Lema 3.3.9 *Sejam (X,x) uma curva reduzida e $\eta : \overline{X} \to X$ a aplicação vinda da normalização de (X,x) obtida na Observação 2.3.20. Se $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ é um germe de função finita, então*

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})}\right) = \deg(f) - r,$$

onde $\overline{f} = f\circ\eta$ e r é o número de componentes irredutíveis de (X,x).

Demonstração: Considere (X_i,x) as componentes irredutíveis de (X,x). Temos $\mathscr{O}_{\overline{X}_i,\overline{x}} = \overline{\mathscr{O}_{X_i,x}}$ (Observação 2.3.20) e, assim, para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$, $\mathscr{O}_{\overline{X}_i,\overline{x}} \simeq \mathbb{C}\{t_i\}$, pela Proposição 2.3.31.

Para cada i, podemos considerar a restrição $\overline{f_i} := \overline{f}|_{(\overline{X}_i,\overline{x})}$ de forma que $\overline{f}_i \in \mathbb{C}\{t_i\}$, isto é, $\overline{f_i}(t_i) = a_{k_i}t^{k_i}+$ termos de ordem superior, para algum $k_i \geqslant 1$ e $a_{k_i} \neq 0$.

Logo,

$$\deg(\overline{f_i}) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t_i\}}{\langle\overline{f_i}\rangle}\right) = k_i,\ \ i = 1,\ldots,r.$$

Mostremos que $\deg(\overline{f}) = k_1 + \ldots + k_n$.

Visto que $(\overline{X}, \overline{x}) = (\overline{X}_1, \overline{x}) \cup \ldots \cup (\overline{X}_r, \overline{x})$, temos, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\overline{X}_r,\overline{x}}$, pela Observação 2.3.30.

Com isso,

$$\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\langle \overline{f} \rangle} = \frac{\mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\overline{X}_r,\overline{x}}}{\langle \overline{f} \rangle} = \frac{\mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}}}{\langle \overline{f_1} \rangle} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathscr{O}_{\overline{X}_r,\overline{x}}}{\langle \overline{f_r} \rangle}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\deg(\overline{f}) &= dim_{\mathbb{C}}\left(\tfrac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\langle \overline{f} \rangle}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\tfrac{\mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}}}{\langle \overline{f_1} \rangle}\right) + \cdots + \dim_{\mathbb{C}}\left(\tfrac{\mathscr{O}_{\overline{X}_r,\overline{x}}}{\langle \overline{f_r} \rangle}\right)\\ &= \deg(\overline{f_1}) + \cdots + \deg(\overline{f_r}) = k_1 + \cdots + k_r.\end{aligned}$$

Como, $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} = \mathscr{O}_{\overline{X}_1,\overline{x}} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\overline{X}_r,\overline{x}} \simeq \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}$(Proposição 2.3.31) e ϕ_f é homomorfismo, então

$$\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}) \simeq \phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_1\}) \oplus \cdots \oplus \phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_r\}).$$

Além disso, $\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \simeq \mathbb{C}\{t_1\}dt_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}dt_r$ (Corolário 2.3.32). Assim

$$\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})} \simeq \frac{\mathbb{C}\{t_1\}dt_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}dt_r}{\phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_1\}) \oplus \cdots \oplus \phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_r\})} = \frac{\mathbb{C}\{t_1\}dt_1}{\phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_1\})} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{C}\{t_r\}dt_r}{\phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_r\})}.$$

Logo,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t_1\}dt_1}{\phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_1\})}\right) + \cdots + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t_r\}dt_r}{\phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_r\})}\right).$$

Pela Equação (3.18) na Proposição (3.3.8), $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{t_i\}dt_i}{\phi_{\overline{f}}(\mathbb{C}\{t_i\})}\right) = k_i - 1$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Logo,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})}\right) = (k_1 - 1) + \cdots + (k_r - 1) = k_1 + \cdots + k_r - r = \deg(\overline{f}) - r.$$

Para concluir o resultado agora, basta mostrarmos que $\deg(f) = \deg(\overline{f})$, isto é,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f \rangle}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\langle \overline{f} \rangle}\right).$$

Defina $\psi : \frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f \rangle} \to \frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\langle \overline{f} \rangle}$ por $\psi(g + \langle f \rangle) = g \circ \eta + \langle \overline{f} \rangle$, onde $g \in \mathscr{O}_{X,x}$. Provemos que ψ é um isomorfismo. Vejamos que ψ está bem definida e que é bijetora.

1. ψ está bem definida, pois , dados $g, h \in \mathscr{O}_{X,x}$, temos

$$g + \langle f \rangle = h + \langle f \rangle \Rightarrow g - h \in \langle f \rangle \Rightarrow g - h = f.\varphi,\ \varphi \in \mathscr{O}_{X,x}.$$

Deste modo,

$$(g-h)\circ\eta = (f.\varphi)\circ\eta \Rightarrow g\circ\eta - h\circ\eta = (f\circ\eta).(\varphi\circ\eta) = \overline{f}.\overline{\varphi}, \quad \overline{\varphi}\in\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}.$$

Logo, $g\circ\eta - h\circ\eta \in \langle\overline{f}\rangle$, ou seja, $g\circ\eta + \langle\overline{f}\rangle = h\circ\eta + \langle\overline{f}\rangle$.

Portanto, $\psi(g+\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}) = \psi(h+\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})$.

2. ψ é injetora, pois dados $g,h\in\mathscr{O}_{X,x}$, temos

$$\psi(g+\langle f\rangle) = \psi(h+\langle f\rangle) \Rightarrow g\circ\eta + \langle\overline{f}\rangle = h\circ\eta + \langle\overline{f}\rangle \Rightarrow g\circ\eta - h\circ\eta = \overline{f}.\overline{\varphi},\ \overline{\varphi}\in\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}.$$

Assim, $(g-h)\circ\eta = (f\circ\eta).(\varphi\circ\eta),\ \varphi\in\mathscr{O}_{X,x}$. Então,

$$(g-h)\circ\eta = (f.\varphi)\circ\eta \Rightarrow g-h = f.\varphi.$$

Portanto, $g+\langle f\rangle = h+\langle f\rangle$.

3. ψ é sobrejetora, pois, dado $\overline{g}+\langle\overline{f}\rangle$ em $\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\langle\overline{f}\rangle}$, $\overline{g}\in\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, temos $\overline{g} = g\circ\eta,\ g\in\mathscr{O}_{X,x}$ e, assim, existe $g+\langle f\rangle\in\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}$ tal que $\psi(g+\langle f\rangle) = \overline{g}+\langle\overline{f}\rangle$.

Deste modo, $\deg(\overline{f}) = \deg(f)$. Portanto,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})}\right) = \deg(\overline{f}) - r = \deg(f) - r.$$

■

Agora, vamos ao teorema que busca generalizar a fórmula vista no caso de germes de funções finitas sobre curvas regulares. O resultado utiliza o número de Milnor de curvas para contornar o "problema" de (X,x) não ser regular e foi provado em [24], por Ballesteros e Tomazella.

Teorema 3.3.10 *Seja $f\in\mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. Então,*

$$\mu(f) = \mu(X,x) + \deg(f) - 1.$$

Demonstração: Seja $\eta:\overline{X}\to X$ a aplicação vinda da normalização de (X,x) obtida na Observação 2.3.20 e denotemos $\overline{f} = f\circ\eta$. Mostremos que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{O}_{X,x} & \xrightarrow{\eta_1^\sharp} & \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}} \\
{\scriptstyle\phi_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{\overline{f}}} \\
\Omega^1_{X,x} & \xrightarrow{\eta_2^\sharp} & \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}
\end{array}$$

onde $\eta_1^\sharp(g) = \overline{g}, g \in \mathscr{O}_{X,x}$, $\eta_2^\sharp(w) = w \circ \eta, w \in \Omega^1_{X,x}, \phi_f(g) = \sum_{i=1}^n g.\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i, g \in \mathscr{O}_{X,x}$ e $\phi_{\overline{f}}(\overline{g}) = \sum_{i=1}^n \overline{g}.\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \eta\right) dx_i$, com $g \in \mathscr{O}_{X,x}$.

Para $g \in \mathscr{O}_{X,x}$, temos $(\phi_{\overline{f}} \circ \eta_1^\sharp)(g) = \phi_{\overline{f}}(\overline{g}) = \sum_{i=1}^n \overline{g}.\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}\right) dx_i$ e

$$\eta_2^\sharp(\phi_f(g)) = \sum_{i=1}^n \left(g.\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \circ \eta = \sum_{i=1}^n (g \circ \eta).\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \eta\right) dx_i = \sum_{i=1}^n \overline{g}.\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \eta\right) dx_i.$$

Portanto, $(\phi_{\overline{f}} \circ \eta_1^\sharp)(g) = (\eta_2^\sharp \circ \phi_f)(g)$.

Considere ainda a aplicação $\overline{c} : \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{X,x}$, dada pela composição das aplicações ψ e φ da Sequência (3.1), ou seja, $\overline{c} = \varphi \circ \psi$.

Como o diagrama é comutativo,

$$coKer(\overline{c} \circ \eta_2^\sharp \circ \phi_f) = \frac{\omega_{X,x}}{Im(\overline{c} \circ \eta_2^\sharp \circ \phi_f)} = \frac{\omega_{X,x}}{Im(\overline{c} \circ \phi_{\overline{f}} \circ \eta_1^\sharp)} = coKer(\overline{c} \circ \phi_{\overline{f}} \circ \eta_1^\sharp).$$

Lembrando que, considerando a aplicação $c_X : \Omega^1_{X,x} \to \omega_{X,x}$ dada por $\varphi \circ \psi \circ \alpha$ da Sequência (3.1), temos $\theta_f = c_X \circ \phi_f = \varphi \circ \psi \circ \alpha \circ \phi_f$. Note que a aplicação α da Sequência (3.1) é exatamente $\eta_2^\sharp$. Daí, $\varphi \circ \psi \circ \alpha \circ \phi_f = \varphi \circ \psi \circ \eta_2^\sharp \circ \phi_f = \overline{c} \circ \eta_2^\sharp \circ \phi_f$ e, assim,

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\theta_f(\mathscr{O}_{X,x})}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{(\overline{c} \circ \eta_2^\sharp \circ \phi_f)(\mathscr{O}_{X,x})}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}(coKer(\overline{c} \circ \eta_2^\sharp \circ \phi_f)) = dim_{\mathbb{C}}(coKer(\overline{c} \circ \phi_{\overline{f}} \circ \eta_1^\sharp)).$$

Mostremos que as aplicações $\eta_1^\sharp$, $\phi_{\overline{f}}$ e $\overline{c}$ são injetoras.

1. Seja $g \in \mathscr{O}_{X,x}$ tal que $\eta_1^\sharp(g) = 0$ em $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$. Então $\overline{g} \in \langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_r} \rangle$, ou seja, existem $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r} \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, tais que $\overline{g} = \overline{g_1}\overline{f_1} + \cdots + \overline{g_r}\overline{f_r}$.

   Com isso, $g \circ \eta = (g_1 \circ \eta).(f_1 \circ \eta) + \cdots + (g_r \circ \eta).(f_r \circ \eta) = (g_1.f_1) \circ \eta + \cdots + (g_r.f_r) \circ \eta$. Seja $z \in X$. Como η é sobrejetora, existe $y \in \overline{X}$ tal que $\eta(y) = z$. Logo,

   $$g \circ \eta(y) = (g_1.f_1) \circ \eta(y) + \cdots + (g_r.f_r) \circ \eta(y) \Rightarrow g(z) = (g_1.f_1)(z) + \cdots + (g_r.f_r)(z), \forall\ z \in X.$$

   Portanto, $g \in \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$, ou seja, $g = 0$ em $\mathscr{O}_{X,x}$.

2. Seja $\overline{g} \in \mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ tal que $\phi_{\overline{f}}(\overline{g}) = 0$. Então $\sum_{i=1}^n \overline{g}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} \circ \eta\right) dx_i$ é uma 1- forma holomorfa nula. Logo, para cada i, $\overline{g}.\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} dx_i = 0$. Como η é sobrejetora, dado $z \in X$, existe $y \in \overline{X}$ tal que $\eta(y) = z$. Assim,

   $$\overline{g}.\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow (g \circ \eta)(y).\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \eta\right)(y) = g(\eta(y)).\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\eta(y)) = g(z).\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) = 0,$$

   $\forall\ i = 1, \ldots, n$. Como f é um germe de função finita, f não é constante. Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \neq 0$, para algum $i = 1, \ldots, n$ e, neste caso, $g(z) = 0$. Como podemos fazer esse mesmo raciocínio em qualquer ponto de X, concluímos que g é o germe da aplicação nula e, assim, $\overline{g} = 0$. Portanto, $\phi_{\overline{f}}$ é injetora.

Portanto, $\overline{g} = 0$. Logo, $\phi_{\overline{f}}$ é injetora.

3. Para mostrar que a aplicação $\overline{c} = \varphi \circ \psi$ é injetora, temos de mostrar que $\psi : \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{\overline{X},\overline{x}}$ e $\varphi : \omega_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{X,x}$ são aplicações injetoras. Como ψ é um isomorfismo, ψ é injetora. Mostremos que φ é injetora. Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \omega_{\overline{X},\overline{x}}$, tais que $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = \xi$. Então $\eta_2^\sharp \circ \xi = \sigma_1 \circ \eta_1^\sharp$ e $\eta_2^\sharp \circ \xi = \sigma_2 \circ \eta_1^\sharp$. Subtraindo uma equação da outra, obtemos

$$\sigma_1 \circ \eta_1^\sharp - \sigma_2 \circ \eta_1^\sharp = 0 \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2) \circ \eta_2^\sharp = 0.$$

Como $\eta_1^\sharp$ não é aplicação nula, temos que $\sigma_1 = \sigma_2$. Logo, φ é injetora.

Assim, pelo Corolário 1.1.23,

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}(coKer(\overline{c})) + dim_{\mathbb{C}}(coKer(\phi_{\overline{f}})) + dim_{\mathbb{C}}(coKer(\eta_1^\sharp)) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{Im(\overline{c})}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{Im(\phi_{\overline{f}})}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{Im(\eta_1^\sharp)}\right).$$

Como a aplicação $\eta_1^\sharp$ pode ser vista como sendo a inclusão de $\mathscr{O}_{X,x}$ em $\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}$, $Im(\eta_1^\sharp) = \mathscr{O}_{X,x}$. Agora, é fácil ver que $\overline{c} = \varphi \circ \psi$ é uma aplicação linear, pois φ e ψ têm como lei de formação composição de morfismos. Assim, aplicando o Teorema 1.1.22 sobre $\overline{c} : \Omega^1_{\overline{X},\overline{x}} \to \omega_{X,x}$, obtemos $dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}) = dim_{\mathbb{C}}(Ker(\overline{c})) + dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{c}))$. Mas $\overline{c}$ é uma aplicação injetora, então $dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{c}))$. Além disso, pelo Teorema 1.1.24, $dim_{\mathbb{C}}(\omega_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}(Im(\overline{c})) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{Im(\overline{c})}\right)$ e $dim_{\mathbb{C}}(\omega_{X,x}) = dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right)$. Logo, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{Im(\overline{c})}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right)$.

Pela Observação 3.2.11, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) = \delta$. Desta forma,

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{Im(\overline{c})}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{Im(\phi_{\overline{f}})}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{Im(\eta_1^\sharp)}\right) =$$

$$= dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\omega_{X,x}}{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{X,x})}\right) + dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}}}{\mathscr{O}_{X,x}}\right) =$$

$$= \delta + \deg(f) - r + \delta,$$

pois, pelo Lema 3.3.9, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{X,x})}\right) = \deg(f) - r$. Logo, $\mu(f) = 2\delta + \deg(f) - r$.

Pela Proposição 3.2.12, temos $\mu(X,x) = 2\delta - r + 1$, ou seja, $2\delta = \mu(X,x) + r - 1$, logo

$$\mu(f) = 2\delta + \deg(f) - r = \mu(X,x) + r - 1 + \deg(f) - r.$$

Portanto,

$$\mu(f) = \mu(X,x) + \deg(f) - 1.$$

■

Corolário 3.3.11 *Seja $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. Então:*

1. $\mu(f) = 0 \Leftrightarrow (X,x)$ *é uma curva regular e f é uma função regular;*

2. $\mu(f) \geqslant 2(r-1)$, *onde r é o número de componentes irredutíveis de (X,x);*

3. $\mu(f) \geqslant 2\delta$.

Demonstração:

1. Se $\mu(f) = 0$, pelo Teorema 3.3.10, $\mu(X,x) + \deg(f) = 1$. Então, $\mu(X,x) = 0$ e $\deg(f) = 1$ ou $\mu(X,x) = 1$ e $\deg(f) = 0$. Mas, pelo Lema 3.3.9,

$$\deg(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})}\right) + r \geqslant r \geqslant 1,$$

onde r é o número de componentes irredutíveis de (X,x). Logo, $\deg(f) \neq 0$ e assim, $\mu(X,x) = 0$ e $\deg(f) = 1$. Como $\mu(X,x) = 0$, pela Proposição 3.2.12, (X,x) é uma curva regular e, como $\deg(f) = 1$, pela Proposição 3.3.7, f é regular.

Reciprocamente, se f é uma função regular, pela Proposição 3.3.7, $\deg(f) = 1$ e, se (X,x) é uma curva regular, pela Proposição 3.2.12, $\mu(X,x) = 0$. Logo, pelo Teorema 3.3.10, $\mu(f) = \mu(X,x) + \deg(f) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$.

2. Pelo Corolário 3.2.14,

$$\mu(X,x) \geq \sum_{i=1}^{r} \mu_i + r - 1 \geq r - 1.$$

Além disso, pelo Lema 3.3.9, $\deg(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\Omega^1_{\overline{X},\overline{x}}}{\phi_{\overline{f}}(\mathscr{O}_{\overline{X},\overline{x}})}\right) + r \geqslant r$. Logo, pelo Teorema 3.3.10,

$$\mu(f) = \mu(X,x) + \deg(f) - 1 \geq r - 1 + r - 1 = 2(r-1).$$

3. Pela Proposição 3.2.12, $\mu(X,x) = 2\delta + r - 1$. Além disso, $\deg(f) \geqslant r$, pelo Lema 3.3.9 e $\mu(f) = \mu(X,x) + \deg(f) - 1$, pelo Teorema 3.3.10. Desta forma,

$$\mu(f) = \mu(X,x) + \deg(f) - 1 = 2\delta - r + 1 + \deg(f) - 1 \geqslant 2\delta - r + 1 + r - 1 = 2\delta.$$

Portanto, $\mu(f) \geqslant 2\delta$. ■

Para finalizar, descreveremos o número de Milnor de um germe de função finita definido em uma curva reduzida de intereseção completa com singularidade isolada (ICIS), com uma caracteriazação algébrica mais simples. A base para esta caracterização são dois resultados cujas demonstrações serão omitidas, pois essas demonstrações envolvem uma teoria topológica extensa, não sendo este o objetivo do trabalho. Com isso, o resultado desejado sai como um corolário.

Proposição 3.3.12 *Se $(X,0)$ é um germe de interseção completa com singularidade isolada e de dimensão 0, com $\mathscr{O}_{X,0} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{\langle F_1,\ldots,F_n\rangle}$, então $\mu(X,0) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{\langle F_1,\ldots,F_n\rangle}\right) - 1$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [22, página 78].

O próximo resultado é a famosa fórmula de Lê-Greuel.

Teorema 3.3.13 *Sejam $f_1,\ldots,f_{n-1},f_n \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$ e suponha que (X_1,x) e (X,x) são interseções completas, onde*

$$X = \{p \in \mathbb{C}^n; f_1(p) = \cdots = f_{n-1}(p) = 0\} \text{ e}$$
$$X_1 = \{p \in \mathbb{C}^n; f_1(p) = \cdots = f_{n-1}(p) = f_n(p) = 0\}.$$

Então,

$$\mu(X,x) + \mu(X_1,x) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle f_1,\ldots,f_{n-1}, J(f_1,\ldots,f_{n-1},f_n)\rangle}\right),$$

onde $J(f_1,\ldots,f_{n-1},f_n)$ denota o ideal gerado pelo determinante da matriz jacobiana de $(f_1,\ldots,f_{n-1},f_n)$.

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser vista em [22, página 77].

Corolário 3.3.14 *Seja (X,x) uma curva reduzida de interseção completa, com ideal associado $I = \langle g_1,\ldots,g_{n-1}\rangle$, onde g_i são germes de funções finitas em $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}$. Considere $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ um germe de função finita. Então*

$$\mu(f) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle g_1,\ldots,g_{n-1}, J(g,f)\rangle}\right),$$

onde $J(g,f)$ denota o ideal gerado pelo determinante da matriz jacobiana de $(g_1,\ldots,g_{n-1},f)$.

Demonstração: Se (X,x) é uma curva reduzida de interseção completa e $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ é finita, então o germe (X_1,x) tem dimensão 0, onde $\mathscr{O}_{X_1,x} = \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle g_1,\ldots,g_{n-1},f\rangle}$.

Pela Proposição 3.3.12, $\mu(X_1,x) = \deg(F) - 1$, onde $F = (g_1,\ldots,g_{n-1},f)$. Assim,

$$\mu(X_1,x) = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle g_1,\ldots,g_{n-1},f\rangle}\right) - 1 = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle g_1,\ldots,g_{n-1}\rangle}}{\langle f\rangle}\right) - 1 = dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right) - 1.$$

Pela Proposição 3.3.6, $dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{X,x}}{\langle f\rangle}\right) = deg(f)$. Logo, $\mu(X_1, x) = deg(f) - 1$.
Utilizando a fórmula de Lê-Greuel do Teorema 3.3.13,

$$dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,x}}{\langle g_1, \dots, g_{n-1}, J(f,g)\rangle}\right) = \mu(X,x) + \mu(X_1,x) = \mu(X,x) + deg(f) - 1 = \mu(f),$$

onde a última igualdade se verifica pelo Teorema 3.3.10. ■

Referências Bibliográficas

[1] ALTMAN, A.; KLEIMAN, S. *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1970.

[2] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introducción al álgebra conmutativa*, ed. Reverté, S.A., 1973.

[3] BASSEIN, R. *On Smoothable Curve Singularities: Local Methods*, Math. Ann. 230, 273-277, Princeton, 1977.

[4] BUCHWEITZ, R.-O.; GREUEL; G.-M. *The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities*, Inventiones Mathematicae, Springer Verlag, 1980.

[5] CHIRKA, E. M. *Complex Analytic Sets*, Spinger, 1989.

[6] GARCIA, A; LEQUAIN, Y. *Elementos de Algebra*, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[7] GARRET, P. *Abstract Algebra*, University of Minnesota, 2007.

[8] GRAUERT, H.; REMMERT, R. *Coherent Analytic Sheaves*, Springer-Verlag, 1984.

[9] GREUEL, G.-M. *Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollsltändigen Durchschnitten*, Math. Ann. 214, 235-266, 1975.

[10] GREUEL, G.-M.; LOSSEN, C.; SHUSTIN, E. *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[11] GUNNING, R. C. *Introducton to Holomorphic Functions of Several Variables*, Volume II Local Theory, Princeton University, 1990.

[12] HAMM, H. *Topology of isolated singularities of complex spaces*, Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970), 213?217. Lecture Notes in Math., Vol. 209, Springer, Berlin, 1971.

[13] HAMM, H. *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*, Math. Ann. 191 (1971) 235?252.

[14] HARTSHORNE, R. *Local Cohomology*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1967.

[15] HERNANDES, M. E. R. *Invariantes Analíticos para curvas irredutíveis*, USP-São Carlos, 2005.

[16] HILTON, P. J.; STAMMBACHA, U. *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag, 1971.

[17] HUNGERFRD, T. W. *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[18] JARDIM, M. *Tópicos da Geometria: Categorias Derivadas*. Disponível em $< http : //www.ime.unicamp.br/\ ra123307/docs/jardim - categories >$. Acesso em: 10/ 02/ 2016.

[19] KATZ, D. *Comments on Projective Modules*. Disponível em $< https : //www.math.ku.edu/\ dlk/ >$. Acesso em: 12/06/2015.

[20] LIMA, P. H. A. A. *Multiplicidade de Ideais e Números de Segre*, USP-São Carlos, 2008.

[21] KEMPER, G. *A Course in Commutative Algebra*, Springer-Verlag, 2011.

[22] LOOIJENGA, E. J. N. *Isolated Singular Points in Complete Intersections*, Cambridge University Press, 1984.

[23] LORENZINI, D. *An Invitation to Arithmetic Geometry*, Vol. 9, Graduate Texts in Mathematics, American Mathematical Society, 1996.

[24] NUÑO-BALLESTEROS, J.J.; TOMAZELA, J.N. *The Milnor Number of a Function on a Space Curve Germ*, Mathematics Subject Classification, 2000.

[25] MATSUMURA, H. *Comutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[26] MOND, D.; STRATEN, D. *Milnor Number equals Tjurina Number for Functions on Space Curves*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 63, No.1, 177-187, 2001.

[27] MILNOR, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton, 1968.

[28] MURFET, D. *The Rising Sea*. Disponível em $< http : //therisingsea.org/?page_id = 3 >$. Acesso em: 28/ 03/ 2015.

[29] ROMAN, S. *Advanced Linear Algebra*, Springer Verlag, New York, 2008.

[30] SERRE, J.-P. *Algebraic Groups and Class Fields*, Springer Verlag, 1988.

[31] SOARES, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1989.

[32] TAYLOR, A. E.; LAY, D. C. *Introduction to Functional Analysis*, Krieger publishing Company, Florida, 1980.

[33] VENKATESH, A. *Notes on Selected Problems*. Disponível em $< http : //math.stanford.edu/\ akshay/math121/ >$. Acesso em: 11/ 11/ 2015.

[34] WILKINS, D. R. *Covering Maps and the Monodromy Theorem- Notes for Undergratuate Courses*, 2008.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 22 /03 /2016

____

Assinatura do autor