

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia e Ciências- campus de Guaratinguetá

SUÉLIO ALVES DE MOURA

**GRÁFICOS DE CONTROLE PARA DADOS DE CONTAGEM INFLACIONADOS E
DEFLACIONADOS DE ZEROS :**

Guaratinguetá

2026

SUÉLIO ALVES DE MOURA

**GRÁFICOS DE CONTROLE PARA DADOS DE CONTAGEM INFLACIONADOS E
DEFLACIONADOS DE ZEROS :**

Tese, apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá, para obtenção do título de Doutorem Engenharia e Ciências.

Área de Concentração: Produção

Orientador: Profa. Dra. Marcela Aparecida
Guerreiro Machado de Freitas

Coorientador: Profº Dr. Marcelo Bourguignon
Pereira

Guaratinguetá

2026

M929g Moura, Suelio Alves de
Gráficos de controle para dados de contagem
inflacionados e deflacionados de zeros / Suelio Alves de
Moura - Guaratinguetá, 2026.
110 f : il.
Bibliografia: f. 104-106

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2026.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Marcela Aparecida Gurerreiro
Machado de Freitas
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Bourguignon Pereira

1. Gráficos em engenharia. 2. Controle de processo -
Métodos estatísticos. 3. Controle de qualidade. I. Título.

CDU 658.511.3(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Esta pesquisa apresenta impacto científico, técnico e inovador ao propor gráficos de controle para dados de contagem com inflação e deflação de zeros, considerando diferentes regimes de dispersão. A contribuição central está no uso do modelo Geométrico Modificado com Zeros Generalizado (GZMG), que permite obter expressões fechadas para a soma das variáveis aleatórias e limites analíticos para o monitoramento da média do processo. Do ponto de vista técnico, econômico e social, os gráficos propostos podem apoiar decisões mais confiáveis em processos industriais, sistemas de qualidade, monitoramento de falhas, inspeção de não conformidades, manutenção, logística e ambientes da Indústria 4.0. Ao gerar limites mais aderentes à variabilidade real dos dados, a metodologia contribui para reduzir alarmes falsos, evitar intervenções desnecessárias e melhorar a eficiência operacional. A implementação em R favorece a reprodutibilidade, a transferência tecnológica e o uso educacional da proposta. Além disso, a pesquisa contribui para o desenvolvimento sustentável ao apoiar práticas de melhoria contínua, uso racional de recursos e prevenção de desperdícios, fortalecendo a inserção local, regional, nacional e internacional da produção científica em Engenharia e Ciência de Dados.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This research has scientific, technical, and innovative impact by proposing control charts for count data with zero inflation and zero deflation, considering different dispersion regimes. The main contribution lies in the use of the Generalized Zero-Modified Geometric (GZMG) model, which allows closed-form expressions for the sum of random variables and analytical control limits for monitoring the process mean. From a technical, economic, and social perspective, the proposed charts may support more reliable decision-making in industrial processes, quality systems, failure monitoring, inspection of nonconformities, maintenance, logistics, and Industry 4.0 environments. By generating limits that better reflect the actual variability of the data, the methodology contributes to reducing false alarms, avoiding unnecessary interventions, and improving operational efficiency. The implementation in R favors reproducibility, technology transfer, and educational use of the proposal. In addition, the research contributes to sustainable development by supporting continuous improvement practices, rational use of resources, and waste prevention, strengthening the local, regional, national, and international insertion of scientific production in Engineering and Data Science.

SUELIO ALVES DE MOURA

**Gráficos de Controle para Dados de Contagem Inflacionados e deflacionados
de zeros.**

Tese apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Data da defesa: 07/04/2026

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO DI**
Data: 07/04/2026 19:32:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO DE FREITAS
Orientador - UNESP

Documento assinado digitalmente
 **GISLAINE CRISTINA BATISTELA**
Data: 07/04/2026 22:00:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. GISLAINE CRISTINA BATISTELA
UNESP

FABRICIO
MACIEL
GOMES:0462
8884790

Assinado digitalmente por FABRICIO
MACIEL GOMES:04628884790
ND: C=BR, O=ICP-Brasil, OU=Presencial,
OU=45218757000194, OU=Secretaria da
Receita Federal do Brasil - RFB, OU=RFB
e-CPF A1, OU=(em branco), CN=
FABRICIO MACIEL GOMES:04628884790
Razão: Eu sou o autor deste documento
Localização:
Data: 2026.04.09 15:08:26-03'00'
Foxit PDF Reader Versão: 2025.2.1

Prof. Dr. FABRÍCIO MACIEL GOMES
EEL/USP

Documento assinado digitalmente
 **FELIPE SCHOEMER JARDIM**
Data: 17/04/2026 18:00:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. FELIPE SCHOEMER JARDIM
UFF

Documento assinado digitalmente
 **FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS**
Data: 09/04/2026 17:29:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. FERNANDO AUGUSTO SILVA MARINS
UNESP

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais, José Batista de Moura e Maria de Fátima Alves de Moura.

AGRADECIMENTOS

“Tudo posso naquele que me fortalece!” - Fl. 4; 13

Primeiramente, agradeço a DEUS, Pai Celestial e Criador, pelo dom da vida e por todas as bênçãos que sempre têm derramado sobre mim. Confio nos seus planos, pois sei que tem reservado o melhor para aqueles que acreditam e esperam pelo seu tempo de agir. Sentir a proteção materna da Virgem Maria e a luz suave do Espírito Santo fez com que o meu caminhar, em todos os momentos, se tornasse mais leve.

À minha família que é sinônimo de amor, proteção e porto seguro. Assim defino a minha família. Sou muito feliz e realizado por ter os melhores pais do mundo, minha mainha Maria de Fátima Moura e meu painho José Moura. Duas pessoas simples, humildes, guerreiras e de coração gigante, que sempre batalharam para dar o melhor aos seus seis filhos: eu, Silvio Batista, Silvania Moura, Ciélio Moura, Sileide Moura e Samuel Moura.

À minha orientadora, professora Dra. Marcela Aparecida Guerreiro Machado de Freitas. A ela, dizer somente obrigado seria pouco. São vários anos de orientação acadêmica e orientação de vida. Deus foi muito bom comigo quando colocou você no meu caminho. Agradeço por todos os conselhos que me ofereceu durante esse tempo. Sem a sua orientação, dedicação, auxílio e paciência, eu não teria conseguido prosseguir.

Ao professor Dr. Marcelo Bouguignon Pereira por ter sido o meu co-orientador durante essa jornada. Agradeço demais pelo seu apoio, pela paciência, pelos seus conselhos. Tornou-se não só o meu co-orientador, mas sim um amigo que levarei para a vida toda.

À minha noiva Ludmila por ter me encorajado nesses últimos anos e nunca ter duvidado da minha capacidade. Muito obrigado pelo seu apoio, companheirismo, paciência e compreensão pelos momentos que não conseguimos ficar juntos devido às rotinas longas de estudos que a pesquisa sempre exigia de mim.

Ao meu pai acadêmico e mentor, professor Dr. Sérgio Côrtes, por ter me dado toda a força e suporte necessários para lutar pela realização desse meu sonho profissional, ser doutor com doutorado. Ele que me apresentou a UNESP, quando em 2019, indicou-me para ministrar um curso de treinamento na ferramenta de *software* SAS para os professores do Mestrado Profissional em Engenharia de Produção.

Ao meu avô paterno, José Batista Leite, *in memoriam*. Ser doutor com doutorado, foi um sonho inicialmente plantado por ele no meu coração. Ele mesmo, com a sua simplicidade, mostrou-me que não teria outro caminho para sair da vida de agricultor a não ser pela educação, pelos estudos. Quando eu não estava capinando na roça com o meu pai, estava em cima de um bicicleta, vendendo o famoso e popular “dindim”, pela Zona Rural do Sítio Gameleira, lá em Pombal no sertão paraibano. O meu avô, com seus sábios ensiamentos de sempre, mostrou-me o caminho dos estudos.

À minha cunhada e amiga, Danielly Macêdo, por ter me ajudado com a escrita do trabalho e por seus conselhos muito importantes e motivadores.

Aos meus colegas e amigos de trabalho da Coordenação de Informações de Dados na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES), pela paciência, força e apoio em todos os momentos que precisei me ausentar de alguma reunião para atender às demandas da minha pesquisa. Agradeço, em especial, o meu querido coordenador, Edmilson Coelho, e ao meu gerente de produto, João Paulo. Vocês são maravilhosos.

Aos professores, Ricardo de Olinda e Thiago Almeida, pela parceria junto ao Laboratório de Análise Preditiva, Data Science e Geoprocessamento (LAPGEO) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), local onde todas as simulações deste trabalho foram processadas computacionalmente.

Aos funcionários da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campos de Guaratinguetá pela dedicação e alegria no atendimento.

São muitos os meus agradecimentos. Sendo assim, infelizmente, não consigo citar todos os que contribuíram para a realização deste trabalho aqui neste texto. No entanto, para sempre, levarei-os em meu coração. Somente as bênçãos divinas poderão recompensar cada um. A todos, minha eterna gratidão. Amém!

“Mesmo que já tenha feito uma longa caminhada, sempre haverá mais um caminho a percorrer.” - (Santo Agostinho).

*“[...] Ando devagar porque já tive pressa
Levo esse sorriso porque já chorei demais
Hoje me sinto mais forte, mais feliz, quem sabe?
Só levo a certeza de que muito pouco eu sei
Ou nada sei.” (Almir Sater)*

RESUMO

A distribuição de Poisson é amplamente utilizada para modelar dados de contagem, especialmente em estudos de qualidade na indústria, como no caso do número de defeitos ou não conformidades em uma unidade. No entanto, ao se aplicar o gráfico- c , baseado nessa distribuição, é comum a ocorrência de alarmes falsos, pois muitos pontos acabam fora dos limites de controle. Nesse sentido, fenômenos cada vez mais observados são a inflação de zeros (excesso de contagens iguais a zero) e, em menor escala, a deflação de zeros (escassez de zeros em relação ao esperado). Sendo assim, o presente trabalho objetiva estudar o desempenho dos gráficos de controle de Shewhart na detecção de mudanças nas médias do processo com inflação ou deflação de zeros através do modelo Geométrico Modificado com Zeros Generalizado (GZMG). Com isso, mostrou-se que o modelo GZMG consegue acomodar todos os tipos de dispersão possíveis, isto é, equidispersão, subdispersão e sobredispersão. No que se refere à dispersão, consideram-se três regimes: equidispersão (variância igual à média), subdispersão (variância menor que a média) e sobredispersão (variância maior que a média). Assim, com base nesse modelo, propõem-se novos gráficos de controle estatístico, capazes de monitorar diferentes padrões de dispersão. Dessa forma, trata-se de uma pesquisa quantitativa, axiomática normativa e descritiva. Foram realizadas simulações de Monte Carlo para diferentes cenários, considerando X_i como variável aleatória discreta, em que a função de probabilidade de massa dado por $T = \sum_{i=1}^n X_i$ apresenta expressão fechada e conhecida. Com base na média do GZMG, foram construídos gráficos de controle de Shewhart voltados ao monitoramento da média do processo com inflação ou deflação de zeros. O desempenho dos gráficos foi avaliado pelo número médio de amostras até o sinal (ARL). Estudos com dados simulados e reais evidenciam a aplicabilidade dos métodos propostos e mostram a superioridade do gráfico GZMG em relação aos modelos concorrentes no monitoramento de processos com inflação/deflação de zeros e diferentes regimes de dispersão.

Palavras-Chave: número médio de amostras; gráficos de controle; dados de contagem; equidispersão; subdispersão; sobredispersão.

ABSTRACT

The Poisson distribution is widely used to model count data, especially in quality studies in industry, such as the number of defects or nonconformities in a unit. However, when applying the c -chart, based on this distribution, false alarms are common, as many points end up outside the control limits. In this context, increasingly observed phenomena are zero inflation (an excess of zero counts) and, to a lesser extent, zero deflation (a scarcity of zeros relative to expectations). Therefore, this study aims to evaluate the performance of Shewhart control charts in detecting shifts in process means with zero inflation or deflation using the Generalized Zero-Modified Geometric (GZMG) model. The intention is to demonstrate that the GZMG model can accommodate all types of dispersion: equidispersion, underdispersion, and overdispersion. Regarding dispersion, three regimes are considered: equidispersion (variance equal to the mean), underdispersion (variance less than the mean), and overdispersion (variance greater than the mean). Based on this model, new statistical control charts are proposed, capable of monitoring different dispersion patterns. Thus, this is a quantitative, axiomatic-normative, and descriptive study. Monte Carlo simulations were performed for different scenarios, considering X_i as a discrete random variable, where the probability mass function of $T = \sum_{i=1}^n X_i$ has a known closed-form expression. Based on the GZMG mean, Shewhart control charts were constructed to monitor the process mean under zero inflation or deflation. The performance of the charts was evaluated using the average run length (ARL). Studies with simulated and real data demonstrate the applicability of the proposed methods and show the superiority of the GZMG chart over competing models in monitoring processes with zero inflation/deflation and different dispersion regimes.

Keywords: average run length; control charts; count data; equidispersion; underdispersion; overdispersion.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Evolução das publicações de artigos referentes a gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros, 2015 a 2025	26
Figura 2	Efeito de π sobre a proporção de zeros, a variância (via I_X) e a largura dos limites.	36
Figura 3	Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG- u para diferentes valores de m e n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)	45
Figura 4	Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG- u para diferentes valores de m e n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)	47
Figura 5	Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG- u para diferentes valores de m e n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)	48
Figura 6	Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG- u para diferentes valores de m e n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)	49
Figura 7	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)	54
Figura 8	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)	55
Figura 9	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)	57
Figura 10	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)	58
Figura 11	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)	59
Figura 12	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)	60
Figura 13	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)	61
Figura 14	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)	62

Figura 15	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)	63
Figura 16	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)	64
Figura 17	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)	66
Figura 18	Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)	67
Figura 19	Comparação de desempenho dos GZMG- u e ZIP, Gupta, Gupta e Tripathi (1996), ambos construídos a partir de amostras de distribuição de GZMG (Fase 2)	90
Figura 20	Comparação de desempenho dos GZMG- u e ZIP, Gupta, Gupta e Tripathi (1996), ambos construídos a partir de amostras de distribuição de ZIP (Fase 2)	91
Figura 21	Comparação de desempenho dos GZMG- u e Poisson, em que $\omega = 0$ para (1), ambos construídos a partir de amostras de distribuição de Poisson (Fase 2)	92
Figura 22	Comparação de desempenho dos GZMG- u e COM-Poisson, ambos construídos a partir de amostras de distribuição de COM-Poisson (Fase 2) . . .	93
Figura 23	Comparação de desempenho dos GZMG- u e Geométrica, ambos construídos a partir de amostras de distribuição Geométrica (Fase 2)	95
Figura 24	Comparação de desempenho dos GZMG- u , ZIP, Gupta, Gupta e Tripathi (1996), Poisson, COM-Poisson e Geométrico, ambos construídos a partir de amostras de distribuição de GZMG- u (Fase 2)	96
Figura 25	Comparação dos gráficos GZMG- u , ZIP, Poisson, Geométrico e COM-Poisson aplicados aos totais da variável <code>visits</code> da base NMES1988. . .	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Palavras-chave utilizadas na pesquisa consideradas no Scopus ao longo da série histórica de 2015 a 2025 e número de publicações.	26
Tabela 2 – Publicações de artigos sobre gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros por área de conhecimento.	28
Tabela 3 – Relação entre dispersão, intervalo de π , tipo de zeros e implicações práticas (com $I_X = 1 + \delta(1 + \pi)$ e $\pi \in (-1/\delta, 1)$)	33
Tabela 4 – Limites de controle para gráficos de número total de eventos e número médio de eventos baseados na distribuição geométrica modificada por zeros.	34
Tabela 5 – Limites de controle para gráficos de número total de eventos e número médio de eventos baseados na distribuição geométrica modificada por zeros reparametrizada	35
Tabela 6 – Resumo: dispersão, sinal de π , tipo de zeros e efeito esperado nos limites de controle (GZMG- u reparametrizado)	36
Tabela 7 – Modelos estatísticos identificados e classificação quanto a zeros e dispersão (17 artigos)	38
Tabela 8 – Valores médios (desvio padrão em parênteses) de ARL_0 do gráfico GZMG, para os diferentes cenários estudados	51
Tabela 12 – Maiores valores médios de ARL_1 observados para $\pi = -0.2$	68
Tabela 13 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)	69
Tabela 14 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)	70
Tabela 15 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)	71
Tabela 16 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)	72
Tabela 17 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)	73
Tabela 18 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)	74
Tabela 19 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)	75
Tabela 20 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)	76
Tabela 21 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)	77

Tabela 22 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)	78
Tabela 23 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)	79
Tabela 24 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)	80
Tabela 25 – Resumo comparativo do GZMG para alguns valores médios de ARL_1 para diferentes configurações de m , θ e α	81
Tabela 26 – Valores médios (desvio padrão em parênteses) de ARL_0 dos gráficos de controle do tipo u quando o verdadeiro processo de geração de dados é distribuído por $GZMG(n, \pi, \delta)$, para alguns valores de $m = 100$ e $n = 50, 100, 500$ (ou $\bar{n} = 50, 100, 500$) e $\theta = 3, 5$	83
Tabela 30 – Síntese comparativa nos cenários simulados: modelo, regime dominante de dispersão/zeros e tendência observada de desempenho (ARL)	97
Tabela 31 – Comparação entre os limites de controle obtidos para cada modelo na escala dos totais, com $\alpha = 0.1$	98

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GZMG	Modelo Geométrico Modificado por Zeros
ARL	Comprimento Médio de Execução
MC	Monte Carlo
f.m.p.	Função de Massa de Probabilidade
Gráfico- <i>c</i>	Gráficos para tamanhos de amostras iguais
Gráfico- <i>u</i>	Gráficos para tamanhos de amostras desiguais
CEP	Controle Estatístico de Processo
LC	Linha Central
LSC	Limite Superior de Controle
LIC	Limite Inferior de Controle
UCL	Upper Control Limit
CL	Center Line
LCL	Lower Control Limit

LISTA DE SÍMBOLOS

X_i	Variável aleatória discreta
n	Tamanho da amostra
m	Quantidade de amostras selecionadas
np	Cartas de controle para o número de não conformidades fixo
p	Cartas de controle para a proporção de não conformidades
c	Cartas de controle para a contagem de não conformidades por unidade
u	Cartas de controle para a taxa de não conformidades por unidade
h	Cartas de controle para o tempo entre eventos não conformes
ω	Tamanho dos deslocamentos
ARL_0	Número médio de amostras em controle
ARL_1	Número médio de amostras fora de controle
$\overline{X}$	Gráficos de controle para monitorar a média do processo
μ_s	Média de não conformidades
μ_{X_1}	Magnitudes dos deslocamentos
θ	Taxa média de não conformidade
α	Probabilidade de alarme falso
I_X	Índice de dispersão
π	Proporção observada de zeros
δ	Controla a intensidade média do processo de contagem
σ_X^2	Variância do processo
μ_X	Média do processo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Contextualização e questão de pesquisa	19
1.2	Objetivos	22
1.3	Delimitação temporal e de escopo	22
1.4	Limitações assumidas	23
1.5	Justificativa e relevância	23
1.6	Estrutura do trabalho	29
2	PROPOSTAS DE GRÁFICOS DE CONTROLE	31
2.1	Modelo geométrico modificado por zeros	31
2.2	Novo gráfico de controle	33
2.3	Uma abordagem sistemática de revisão de literatura	37
2.3.1	Análise sistemática de revisão de literatura	37
2.3.2	Contextualização e motivação	37
2.3.3	Análise dos modelos identificados	41
3	AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO	43
3.1	Desempenho do gráfico de controle	44
3.2	ARL em controle	45
3.3	ARL fora de controle	53
3.3.1	ARL fora de controle - $m = 50, \theta = \{3, 5\}, \alpha = 0.1$ e 0.01	54
3.3.2	ARL fora de controle - $m = 100, \theta = \{3, 5\}, \alpha = 0.1$ e 0.01	58
3.3.3	ARL fora de controle - $m = 200, \theta = \{3, 5\}, \alpha = 0.1$ e 0.01	62
3.4	O impacto dos dados de contagem inflacionados de zeros em alguns gráficos de controle padrão	81
3.4.1	Modelo geométrico modificado por zeros	82
3.5	Procedimento de uso do gráfico GZMG	85
3.5.1	Roteiro de aplicação do gráfico GZMG-u (reparametrizado em μ)	86
4	APLICAÇÕES	89
4.1	Dados simulados	89
4.1.1	Dados gerados com base no modelo GZMG	89
4.1.2	Dados de Poisson Inflado de Zeros, ZIP	90
4.1.3	Dados de Poisson	92
4.1.4	Dados de COM-Poisson	93
4.1.5	Dados de Geométrica	94

4.1.6	Dados de GZMG	95
4.2	Dados reais	97
4.3	Conclusões do capítulo	100
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
5.1	Contribuições científica e prática.	102
5.2	Trabalhos futuros	104
	Referências	105
	GLOSSÁRIO	108
	DADOS CURRICULARES	111

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E QUESTÃO DE PESQUISA

O Controle Estatístico de Processo (CEP) é uma ferramenta que tem por finalidade desenvolver e aplicar métodos estatísticos como parte de estratégia para prevenção de defeitos, melhoria da qualidade de produtos e serviços, além de redução de custos. Já o gráfico de controle é uma das técnicas principais do CEP, que se baseia em plotar medidas associadas a alguma característica de qualidade do processo versus o tempo (ou o número de amostras). Esses gráficos constituem uma das ferramentas do controle estatístico de qualidade mais conhecidas e difundidas na atualidade (Montgomery 2019). Uma abordagem para a detecção de mudanças no aumento no número médio de contagens consiste em considerar os tradicionais gráficos de Shewhart proposto por (Shewhart 1925).

Quando fontes não usuais de variabilidade estão presentes, os pontos serão plotados fora dos limites de controle, conforme (Montgomery 2019). Em geral, o gráfico de controle é formado por uma linha central (*LC*), que representa o valor médio da estatística que está sendo monitorada, e por duas linhas externas denominadas de limite superior de controle (*LSC*) e limite inferior de controle (*LIC*), determinados de modo a satisfazer algum critério de desempenho. Se a característica de qualidade considerada não puder ser convenientemente apresentada numericamente, é comum na prática classificar cada item (ou unidade) inspecionada como conforme ou não-conforme, de acordo com as especificações.

Ainda no que se refere à classificação, é relevante afirmar que os dados de contagem são muito comuns no cotidiano, como o número de acidentes, o número de defeitos em um item fabricado, o número de roubos em um determinado período, entre outros (Farrington e Andrews 2004; Shmueli e Burkom 2010). Um modelo de contagem primário é a distribuição de Poisson. Essa distribuição apresenta uma restrição forte: sua média é igual à sua variância, o que limita seu emprego em muitas situações práticas. Outros modelos – como o Binomial Negativo, Conway-Maxwell-Poisson, distribuição de Touchard, entre outros – podem ser usados para acomodar condições diferentes da equidispersão. No entanto, as funções de probabilidade de massa (f.m.p.'s) dos dois últimos modelos, por exemplo, dependem de constantes de normalização, mas ambos permitem cenários de sub e superdispersão.

Por outro lado, a subdispersão não é permitida para a distribuição binomial negativa, embora tenha uma expressão de forma fechada para sua f.m.p.. Além disso, em diversas circunstâncias práticas, é comum observar um excesso de zeros assim como deflação de zeros, principalmente em processos de alta qualidade. Isso, leva a modelos inflacionados de zeros. No entanto, ao se aplicar o gráfico-*c*, baseado nessa distribuição, é comum a ocorrência de alarmes falsos, pois muitos pontos acabam fora dos limites de controle. Nesse sentido, fenômenos cada vez mais observados são a inflação de zeros (excesso de contagens iguais a zero) e a deflação de zeros

(escassez de zeros em relação ao esperado), especialmente em processos de alta qualidade.

No Capítulo 2 desta tese, será apresentada a definição do índice de dispersão, que é a razão entre a variância e a média, afim de se identificar a presença da equidispersão (variância é igual a média), subdispersão (variância menor que a média, configurando a deflação de zeros) e sobredispersão (variância maior que a média, caracterizando a inflação de zeros). Por exemplo, se o número médio de defeitos é 2 e a variância observada é 5, o processo é sobredisperso; se a variância for 1, trata-se de subdispersão; quando média e variância são iguais, há equidispersão.

Dito isso, é relevante destacar que monitorar um processo com distribuição de Poisson inflacionados de zeros usando cartas de controle não é um assunto novo. Na literatura, é possível encontrar contribuições de diferentes pesquisadores. (45), por exemplo, estudaram o modelo de Poisson inflacionado de zeros no contexto de controle de processos estatísticos; (Sim e Lim 2008) e (Katemee e Mayureesawan 2012; Katemee 2012) apresentaram cartas de controle de atributos para monitorar esse tipo de processo. Os autores (Katemee e Mayureesawan 2013) consideraram cartas de controle para monitorar processos de Poisson generalizados inflacionados de zeros e (35) estenderam o monitoramento de processos de Poisson inflacionados gerais.

Ademais, (20) sugeriram uma carta CUSUM para monitorar dados de Poisson inflacionados de zeros. (Fatahi *et al.* 2012) e (Leong e Tan 2015) usaram EWMA de Poisson inflacionado de zeros para monitorar, respectivamente, eventos raros relacionados à saúde e vigilância de doenças. Recentemente, (Alevizakos e Koukouvinos 2020) também incluíram DEWMA para monitorar esse tipo de processo. (Tian *et al.* 2018) empregaram uma carta de controle para monitorar partículas (com contagens excessivas de zeros) na fabricação de semicondutores.

Além do modelo de Poisson inflacionado de zeros, tem-se o modelo binomial inflacionado de zeros. (Yawsaeng e Mayureesawan 2012) propuseram cartas de controle para modelos binomiais inflacionados de zeros e (36), uma carta CUSUM para monitorar o mesmo tipo de modelo.

(3) contribuíram com uma visão geral das cartas de controle para processos de alta qualidade e (Mahmood e Xie 2019) escreveram sobre as tendências passadas e atuais do monitoramento de processos inflacionados de zeros. Naturalmente, nem sempre os parâmetros dessas distribuições são conhecidos. Diferentes estudos têm sido conduzidos a fim de medir os efeitos da estimativa dos parâmetros no desempenho das cartas de controle para processos inflacionados de zeros, como o de (He *et al.* 2003) e (Rakitzis e Castagliola 2016).

Apesar das diversas abordagens propostas, a literatura carece de modelos que considerem simultaneamente inflação e deflação de zeros, sobredispersão e subdispersão, mantendo expressão de forma fechada para as somas, condição essencial para a construção exata de limites de controle. Nesse sentido, o artigo publicado por (BOAVENTURA 2023) apresenta uma contribuição importante no campo do controle estatístico de processos. Os autores propõem o uso da distribuição de Bell como base para a construção de dois novos gráficos de controle: o Bell- c e o Bell- u . A motivação central do estudo está na limitação dos gráficos tradicionais, como os baseados na distribuição de Poisson, para lidar com dados de contagem que apresentam sobredispersão. Dessa forma, a distribuição de Bell surge como uma alternativa relevante por

oferecer maior flexibilidade para modelar variâncias superiores à média, preservando, ao mesmo tempo, propriedades matemáticas desejáveis, como pertencer à família exponencial.

Uma das principais contribuições técnicas apresentadas em (BOAVENTURA 2023) está na formulação de expressões de forma fechada para a distribuição da soma de variáveis aleatórias provenientes da distribuição de Bell. Essa característica permite calcular limites de controle exatos para os gráficos propostos, eliminando a necessidade de simulações ou aproximações assintóticas, frequentemente utilizadas em outras abordagens. Os resultados empíricos apresentados no artigo demonstram que os gráficos Bell apresentam desempenho superior em termos de detecção de mudanças em relação a outras abordagens baseadas na Poisson e até mesmo em relação a modelos mais recentes, como os baseados na COM-Poisson.

Diferentemente das abordagens anteriores, este trabalho propõe um modelo unificado, com estrutura analítica fechada para a soma e aplicável a diferentes regimes de dispersão (equidispersão, subdispersão e sobredispersão), contemplando ainda inflação e deflação de zeros, requisitos-chave para limites de controle exatos.

Apesar dos avanços, o artigo não aborda a modelagem ou o monitoramento de dados inflacionados de zeros classificados como equidispersão e subdispersão, lacuna que será preenchida neste trabalho. Ao desenvolver gráficos $\bar{X}$ para distribuições inflacionadas com forma fechada para somas, o presente trabalho avança não apenas na construção teórica de novos modelos, mas também na implementação de rotinas computacionais acessíveis, que visam facilitar a aplicação prática dessas técnicas por profissionais e pesquisadores.

Assim, a proposta desta tese se insere em um campo de pesquisa recente e em expansão, contribuindo tanto para o avanço científico quanto para aplicações tecnológicas e educacionais no controle estatístico da qualidade. Nesse sentido, o presente estudo tem como propósito elucidar os seguintes questionamentos de pesquisa:

- 1) Os gráficos de controle obtidos do modelo Geométrico Modificado com Zeros Generalizado (GZMG) são eficientes para o monitoramento de processos em que os dados são inflacionados e deflacionados de zeros?
- 2) Os limites de controle propostos conseguem reduzir o número médio de amostras até o sinal em que no processo está presente a equidispersão, subdispersão ou sobredispersão nos dados?
- 3) Seja a f.m.p. da soma $T = \sum_{i=1}^n X_i$, após novas reparametrizações nessa função e reescrevendo-a em função da esperança $E(X) = \mu$, é possível o monitoramento direto da média do processo com inflação e deflação de zeros por meio dos gráficos de controle do tipo $\bar{X}$ (Shewhart)?

Diante do exposto, a principal motivação para escrever este trabalho consiste em uma característica comum observada em algumas distribuições de contagem selecionadas, especificamente

a função de densidade de probabilidade de $T = \sum_{i=1}^n X_i$, que apresenta expressões de forma fechada, onde X_i é uma variável aleatória discreta (contagem).

1.2 OBJETIVOS

Neste trabalho, estabeleceu-se como objetivo geral desenvolver e avaliar gráficos de controle baseados em modelos probabilísticos capazes de representar processos de contagem com diferentes padrões de dispersão e ocorrência de zeros. No intuito de alcançar o objetivo geral, estabeleceram-se os seguintes objetivos específicos:

Objetivos teóricos:

- i) Caracterizar a família de modelo geométrico modificado por zeros generalizado, enfatizando propriedades de soma em forma fechada.
- ii) Estabelecer reparametrizações em função da média μ para facilitar interpretação e uso prático.
- iii) Comparar os gráficos de controle GZMG com aqueles mais usuais na literatura para dados de contagem. Por exemplo, ZIP, Poisson, COM-Poisson e Geométrico.

Objetivos metodológicos:

- iii) Propor gráficos de controle do tipo $\bar{X}$ que acomodem equidispersão, subdispersão e sobredispersão, com inflação e deflação de zeros.
- iv) Derivar limites de controle exatos a partir da expressão fechada da soma $T = \sum_{i=1}^n X_i$.
- v) Desenvolver códigos computacionais em R para construção e avaliação dos gráficos.

Objetivos aplicados:

- vi) Avaliar o desempenho via simulações de Monte Carlo, por meio do número médio de amostras até o sinal (ARL), sob diferentes cenários de mudança na média.
- vii) Ilustrar a aplicabilidade com conjuntos de dados simulados e exemplos representativos.

1.3 DELIMITAÇÃO TEMPORAL E DE ESCOPO

Esta pesquisa concentra-se em simulações computacionais e aplicações exemplificativas, sem extensão a dados industriais reais em larga escala.

As expressões de forma fechada de $T = \sum_{i=1}^n X_i$ são obtidas considerando uma sequência de variáveis aleatórias de contagem X_i como: 1- modelo geométrico modificado por zeros; 2- modelo geométrico de parâmetro inflacionado; 3- modelo de Bernoulli de parâmetro inflacionado.

É relevante notar que as distribuições de contagem comumente usadas, como a geométrica, binomial negativa, binomial e Poisson, são casos especiais de algumas das distribuições mencionadas acima. Portanto, nesta pesquisa, propor gráficos de controle de maneira exata para monitorar a média do processo para qualquer uma dessas distribuições incluirá automaticamente pelo menos as conhecidas cartas de controle np , p , c , u , g e h .

Ademais, a pesquisa em questão pode ser denominada quantitativa pois baseia-se na medição, e é aplicável a fenômenos que podem ser expressos em quantidades (Kothari 2013).

De acordo com (Miguel *et al.* 2012), as pesquisas quantitativas podem ser classificadas em axiomáticas que são mais racionalistas, e em empíricas que são baseadas em observações e experiências da realidade. Este trabalho se enquadra na categoria axiomática, a qual ainda se classifica em axiomática normativa e descritiva. A normativa é a mais adequada para a presente trabalho, já que esse tipo de pesquisa visa desenvolver normas, a fim de melhorar resultados propostos na literatura ou busca solução para um problema novo. Normalmente, na pesquisa axiomática normativa, não só novos modelos podem ser propostos para problemas idealizados, mas também é possível desenvolver estratégias diferentes para solucionar problemas já existentes na literatura.

1.4 LIMITAÇÕES ASSUMIDAS

Os resultados dependem da suposição de independência entre observações e de estacionariedade sob controle. Violações - como autocorrelação, tendências ou sazonalidade - podem alterar o desempenho dos gráficos. A validade dos limites requer a correta especificação do modelo GZMG e dos parâmetros (μ, π) ; misspecificações (como, intensidade de inflação/deflação de zeros) ou deriva temporal podem enviesar LC/LSC/LCL. A calibração via $k \in \{2.58, 1.65\}$ mira metas teóricas de ARL_0 , mas diferenças de amostra finita e erro de estimação podem produzir desvios; quando n_t varia e se adota $\bar{n}$, os limites tornam-se aproximações convenientes. O estudo se concentra em simulações e aplicações ilustrativas, não cobrindo dados industriais em larga escala, casos com outliers severos ou comparação exaustiva com CUSUM/EWMA. Por fim, a avaliação se restringe a faixas específicas de (m, n, θ, π) e pressupõe estabilidade do sistema de medição, recomendando cautela ao extrapolar os achados para outros regimes.

1.5 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

Em (Katemee 2012) os autores enfatizam que se os tamanhos amostrais forem constantes, o gráfico de controle tradicional de Shewhart para não conformidades (*gráfico-c*) pode ser utilizado para monitorar o número de não conformidades por unidade de produto. Nesse contexto, a amostragem dos produtos ocorre por meio de coletas repetidas, em que cada amostra pode apresentar zero ou um número diferente de zero de não conformidades. Caso a distribuição das não conformidades siga uma distribuição de Poisson, pode-se observar, em alguns processos, um excesso de contagens iguais a zero. Nessa situação, a distribuição passa a ser denominada

“Poisson Inflacionada de Zeros (ZIP)”, e a estimativa da média amostral tende a subestimar a média real da distribuição de Poisson. Quando a variância estimada é maior que a média, fenômeno conhecido como sobredispersão, os limites estimados no *gráfico-c* tornam-se mais estreitos do que os limites corretos da distribuição de Poisson (Sim e Lim 2008). Esses limites mais estreitos elevam a taxa de alarmes falsos quando o *gráfico-c* é utilizado para detectar estados fora de controle.

Do ponto de vista prático e educacional, os gráficos propostos favorecem a adoção por engenheiros e analistas de qualidade ao combinarem interpretação direta (via parametrização em μ), limites de controle exatos (sem depender de aproximações assintóticas) e rotinas em R de fácil replicação, contribuindo para formação e treinamento em CEP aplicado a processos de contagem.

Nesse sentido, no que tange à confecção dos limites de controle, na presente pesquisa, os limites de controle de probabilidade (exatos) (expressos como os quantis de T) foram determinados (facilmente) e usados para desenhar a carta $\bar{X}$, que é a mais utilizada para monitorar médias de processos sem a necessidade de esforços de simulação para determinar os limites de controle de probabilidade, como geralmente é necessário para outras distribuições quando a f.m.p. de T é desconhecida ou não possui expressões de forma fechada. Além disso, o uso dos limites de controle assintóticos expressos como $E(X) \pm 3 \times \sqrt{\text{Var}(X)/n}$ pode provocar distorções na avaliação do desempenho, pois podem estar longe dos verdadeiros limites de controle de probabilidade, mesmo garantidos pelo teorema do limite central de que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ segue uma distribuição normal à medida que $n \rightarrow \infty$.

O monitoramento estatístico de processos com dados de contagem inflacionados de zeros tem atraído atenção crescente na literatura especializada, dada sua relevância em processos industriais de alta qualidade, como setores de saúde pública (RAKITZIS A. C.; CASTAGLIOLA 2014). Situações em que há predominância de observações zeros e ocorrência esporádica de eventos tornam inadequado o uso de cartas de controle tradicionais, como as baseadas na distribuição de Poisson, devido à sua limitação em lidar com sobredispersão e excesso de zeros.

Do ponto de vista prático, (16) apresentaram uma proposta de carta de controle para dados semicontínuos inflacionados de zeros, com aplicações em setores como marketing e saúde. Além disso, (33) aplicaram cartas EWMA modificadas em contextos hospitalares e industriais, reforçando a demanda por metodologias mais adaptativas. Esses avanços mostram um movimento claro em direção à adaptação de ferramentas estatísticas às novas características dos dados encontrados nos sistemas modernos.

A síntese bibliométrica indica tendência de crescimento no tema, com ênfase em cenários com excesso de zeros e diferentes regimes de dispersão. Nesse contexto, soluções com expressão fechada para as somas mostram-se particularmente valiosas por permitirem calibração exata e avaliação rigorosa de desempenho.

Apesar dessas contribuições, algumas lacunas ainda persistem. Entre elas, destaca-se a escassez de modelos que explorem distribuições alternativas a Poisson, como a distribuição

de Bell, que permite modelar sobredispersão com maior flexibilidade. (BOAVENTURA 2023) propuseram novas cartas de controle para dados de contagem baseadas na distribuição de Bell, com enfoque especial na obtenção de expressões fechadas para a soma de variáveis aleatórias discretas. Essas expressões permitem calcular limites de controle exatos, evitando as distorções causadas por aproximações assintóticas, mesmo sob o respaldo do Teorema do Limite Central.

O estudo de (BOAVENTURA 2023) também demonstrou que a proposta supera cartas tradicionais como c e u , além de modelos mais recentes baseados em distribuições COM-Poisson, ao lidar com sobredispersão em cenários reais. No entanto, o modelo não contempla explicitamente processos inflacionados de zero, abrindo espaço para extensões como as previstas nesta tese, que se propõe a desenvolver gráficos de controle $\bar{X}$ para distribuições com inflação de zeros e estrutura de soma em forma fechada. Essa abordagem visa ampliar a aplicabilidade prática por meio de rotinas computacionais acessíveis, contribuindo para o avanço teórico, tecnológico e educacional do controle estatístico para processos de contagem.

No que diz respeito à contribuição acadêmica dos gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros, foi realizada uma pesquisa bibliográfica (Gil 2002) na base de dados *Scopus*. A pesquisa foi feita em 1 de abril de 2025, utilizando os termos “control chart” e “zero inflated count data”. Com isso, encontraram-se os 33 documentos mais citados dentro do período descrito (2015 a 2025). Estreitando a pesquisa para “control chart” e “model equidispersion, underdispersion, overdispersion” obteve-se apenas 1 documento, em formato de artigo.

A base de dados *Scopus* foi utilizada como fonte principal, pois, fornece uma visão geral sobre diversos assuntos e produção de pesquisas em ciência, tecnologia, medicina, humanidades e outras áreas, proporcionando uma gama mais ampla de análises estatísticas, uma ferramenta interdisciplinar colaborativa.

A fim de verificar a existência do monitoramento em controle de processos de maneira exata - ou seja, exatamente a distribuição da soma da variável aleatória discreta de contagem - realizou-se uma pesquisa base *Scopus*, utilizando os termos “control chart” e “probability density function has closed-form expressions”. Com isso, não foi encontrado nenhum documento. Para verificar se há algum modelo probabilístico de processo que considere o controle de processos de maneira exata, realizou-se outra pesquisa, desta vez com os termos “control chart” e “1- zero-modified geometric model; 2- inflated-parameter geometric model; and 3-inflated-parameter Bernoulli model”, por meio da qual também não se obteve nenhum documento. A Tabela 1 apresenta os termos pesquisados e a quantidade de publicações relacionadas ao assunto.

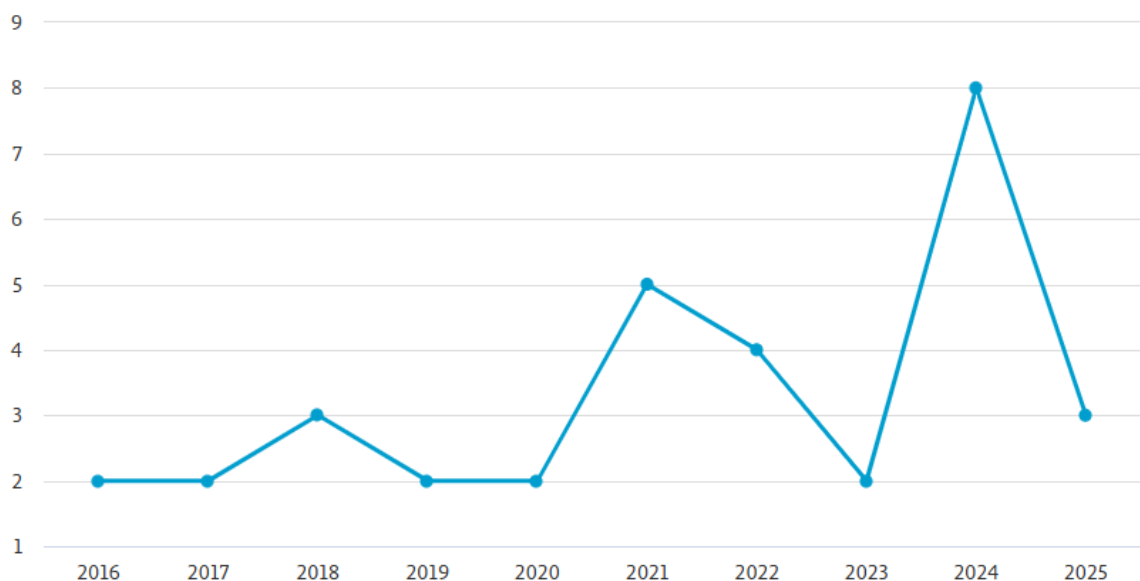
Tabela 1 – Palavras-chave utilizadas na pesquisa consideradas no Scopus ao longo da série histórica de 2015 a 2025 e número de publicações.

Palavras-chave	Número de Publicações
“control chart” and “zero inflated count data”	33
“control chart” and “model equidispersion, underdispersion, overdispersion”	1
“control chart” and “probability density function has closed-form expressions”	0
“control chart” and “1- zero-modified geometric model; 2- inflated-parameter geometric model and 3-inflated-parameter Bernoulli model”	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Por meio dos resultados da Tabela 1, notou-se que o tema de gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros em que a função de densidade de probabilidade de $T = \sum_{i=1}^n X_i$ tem expressões de forma fechada, em que X_i é uma variável aleatória discreta (contagem), ainda pode ser explorado. Neste caso, podem ser considerados os modelos: 1- zero-modified geometric; 2- inflated-parameter geometric e; 3-inflated-parameter Bernoulli pode ser relevante não só para fins acadêmicos, como também para utilização do controle estatístico de processos por usuários fora do meio acadêmico que possuam pouco conhecimento da área. Na Figura Figura 1, a seguir, apresenta-se a evolução do número de citações por ano ao longo da série histórica de 2015 a 2025, referente aos resultados obtidos por meio da base Scopus, com os termos “control chart” e “zero inflated count data”. Enfatiza-se que, dos 33 documentos identificados, 31 são artigos, 1 é artigo em procedimentos de publicação e 1 dos documentos corresponde a um capítulo de livro.

Figura 1 – Evolução das publicações de artigos referentes a gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros, 2015 a 2025



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 1 apresenta a evolução temporal do número de publicações relacionadas a gráficos de controle aplicados a dados de contagem inflacionados de zeros no período de 2015 a 2025. Observa-se que, embora o tema ainda represente um nicho específico dentro do controle estatístico da qualidade, vem despertando interesse crescente ao longo dos anos, tendo em vista a necessidade de monitorar processos em que as características de equidispersão, subdispersão e sobredispersão se fazem presentes nos dados.

Durante o período de 2016 a 2020, a quantidade de publicações manteve-se relativamente estável, com variações modestas entre dois e três artigos por ano. Esse comportamento inicial sugere uma fase de maturação conceitual do tema, ainda restrita a grupos de pesquisa específicos. A partir de 2021, contudo, nota-se um aumento expressivo no número de estudos, que culminou em um pico significativo em 2024, com oito publicações identificadas. Esse salto evidencia um momento de efervescência acadêmica, possivelmente impulsionado pela consolidação de abordagens mais flexíveis, como os modelos inflacionados de zero com estruturas em forma fechada e o avanço de técnicas computacionais, como, apesar de não fazer parte do escopo da presente pesquisa, o *machine learning* e aprendizado profundo aplicados ao controle de processos.

Apesar da leve retração observada em 2025, o patamar de publicações permanece acima da média dos anos iniciais da série, sugerindo que o campo segue em expansão. Tal panorama reforça a atualidade e relevância do presente estudo, que se propõe a contribuir com esse movimento ao propor novos modelos e gráficos de controle ajustados a realidades complexas frequentemente negligenciadas pelas abordagens clássicas.

Vale ressaltar ainda que a aplicação dos gráficos de controle também é diversa, porém se concentra mais nas áreas de Ciências da Decisão, Engenharia e Matemática, que juntas são responsáveis por aproximadamente 54.55% das publicações, como pode ser observado na Tabela 2.

Tabela 2 – Publicações de artigos sobre gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros por área de conhecimento.

Área de conhecimento	Número de Publicações
Ciência da Decisão	9
Engenharia	5
Matemática	4
Negócios, Gestão e Contabilidade	3
Ciência da Computação	3
Física e Astronomia	2
Economia, Econometria e Finanças	1
Engenharia Química	1
Ciências Sociais	1
Multidisciplinar	1
Medicina	1
Profissões de saúde	1
Ciência dos Materiais	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A Tabela 2 apresenta as áreas em que os artigos sobre gráficos de controle para dados de contagem inflados de zeros foram publicados. A importância do tema para o desenvolvimento do conhecimento científico pode ser identificada por meio da correlação entre as áreas de pesquisa e o número de artigos que foram publicados sobre o assunto em cada um deles.

Nos tópicos a seguir, considerando a base de dados *Scopus*, bem como o intervalo de 2015 a 2025, apresenta-se o único documento encontrado por meio dos termos “control chart” and “probability density function has closed-form expressions” and “model equidispersion, underdispersion, overdispersion”, assim como os tipos de gráficos de controle e sugestões de pesquisas futuras deste estudo:

- **Ano:** publicado online em 2024, com versão final prevista para 2025, o artigo de (Alevizakos e Tasias 2024) representa uma contribuição recente e importante para o campo do controle estatístico de qualidade aplicado a dados inflacionados de zeros.
- **Autores:** o estudo foi conduzido por **Vasileios Alevizakos** e **Konstantinos A. Tasias**, pesquisadores que vêm atuando na interface entre estatística aplicada e engenharia de processos.
- **Título:** intitulado *Monitoring of zero-inflated COM-Poisson processes*, o artigo explora formas de monitoramento de processos com contagens que apresentam excesso de zeros e níveis variados de dispersão.
- **Gráfico de controle abordado:** a proposta central do artigo envolve o desenvolvimento de duas cartas de controle adaptadas à distribuição *Zero Inflated Conway Maxwell Poisson* (ZICMP):

- a **ZICMP-Shewhart**, voltada para cenários com sobredispersão;
- a **ZICMP-EWMA**, mais eficaz em situações com subdispersão.

Essas cartas se destacam pela flexibilidade do modelo ZICMP, que abrange distribuições conhecidas como Poisson inflacionada de zeros, geométrica e Bernoulli, permitindo ampla aplicabilidade prática.

- **Proposta de pesquisas futuras:** os autores sugerem diferentes frentes para continuidade da pesquisa:
 - expansão para **gráficos de controle multivariados**, visando capturar dependências entre variáveis inflacionadas de zeros;
 - investigação de **mudanças negativas ou simultâneas** nos parâmetros do processo. Tais mudanças podem ser as quedas inesperadas no valor médio do processo. A exemplo disto, pode-se mencionar uma redução súbita no número de cliques em um sistema web ou uma queda abrupta em taxas de produção, que pode sinalizar falhas técnicas, subutilização ou outras anomalias;
 - adaptação das ferramentas propostas para contextos de **monitoramento em tempo real**, como aplicações industriais com sensores inteligentes.

Sob a perspectiva acadêmica e pessoal, esta tese busca conciliar rigor analítico e aplicabilidade prática, ofertando ferramentas que ampliem o repertório do CEP para dados de contagem, ao mesmo tempo em que fortalecem a formação de profissionais e pesquisadores na área.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Após esta seção introdutória, salienta-se que esta tese está organizada em quatro capítulos, conforme descrito a seguir.

O Capítulo 2 apresenta o modelo geométrico modificado por zeros (GZMG). Ao longo do capítulo, foram descritas suas principais propriedades, incluindo a função de massa de probabilidade (f.m.p.) da soma $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Também são propostas novas reparametrizações dessa f.m.p., reescrevendo-a em função da esperança $E(X) = \mu$, com o objetivo de viabilizar o monitoramento direto da média do processo por meio de gráficos de controle do tipo $\bar{X}$.

Ainda no Capítulo 2, com destaque para a Subseção 2.2, foram introduzidos os novos gráficos de controle de atributos baseados nas distribuições de contagem analisadas. Essas propostas representam a base metodológica central da tese. Por fim, ao longo do Capítulo 2, apresenta-se uma abordagem sistemática de revisão de literatura, por meio dela serão discutidas as razões que levaram à seleção dos modelos comparativos em relação ao GZMG, considerando critérios teóricos, práticos e de adequação ao escopo da presente pesquisa.

O Capítulo 3 é dedicado à avaliação do desempenho dos gráficos propostos. Por meio de estudos de simulação, foram comparados os resultados obtidos com os gráficos desenvolvidos e os de cartas de controle tradicionais, evidenciando as vantagens e limitações de cada abordagem.

No Capítulo 4, foram apresentados exemplos que demonstram a aplicabilidade dos gráficos construídos, tanto com dados simulados quanto com dados reais. Esses exemplos ilustram, a utilidade das propostas em diferentes contextos.

Por fim, no Capítulo 5, apresentam-se as considerações finais decorrentes da análise dos dados, destacando os principais achados, limitações do estudo e possíveis direções para trabalhos futuros.

2 PROPOSTAS DE GRÁFICOS DE CONTROLE

Neste capítulo, além de se propor um novo gráfico de controle, inicialmente, realiza-se uma breve revisão da distribuição GZMG, além de subseções ao longo das quais são apresentadas as suas propriedades e a função de massa de probabilidade (f.m.p.), a f.m.p. de $T = \sum_{i=1}^n X_i$. Foram propostas ainda novas reparametrizações para escrever a f.m.p. como função de $E(X) = \mu$, a fim de permitir o monitoramento da média do processo diretamente a partir de um gráfico de controle $\bar{X}$.

2.1 MODELO GEOMÉTRICO MODIFICADO POR ZEROS

A distribuição geométrica modificada por zeros, conhecida pela sigla ZMG (*Zero-Modified Geometric*), é uma generalização da distribuição geométrica clássica, desenvolvida com o objetivo de permitir a modelagem de dados de contagem que apresentam uma frequência de zeros diferente daquela esperada sob a distribuição padrão.

Historicamente, a primeira aplicação conhecida dessa distribuição foi feita por (Lotka 1931), ao estudar dados relacionados à fecundidade masculina nos Estados Unidos na década de 1920. O autor observou que o modelo geométrico convencional não representava adequadamente a proporção de zeros observados, motivando, assim, o uso de uma versão modificada da distribuição.

Mais recentemente, o modelo ZMG foi formalmente caracterizado e estudado pelos autores (Bourguignon e Weiß 2017), que o empregou como inovação em um processo INAR(1) para dados de contagem autocorrelacionados. Nessa formulação, a distribuição permite controlar diretamente a probabilidade associada ao valor zero por meio de um parâmetro específico, ampliando consideravelmente sua flexibilidade.

Sendo assim, seja X uma variável aleatória (v.a.) discreta, distribui-se como geométrica modificada por zeros (ZMG), quando seus parâmetros $\delta > 0$ e $\pi \in (-1/\delta, 1)$. Mais especificamente, assume-se que X tem uma função densidade de probabilidade (f.d.m.) dada por

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1 + \pi\delta}{1 + \delta}, & \text{se } x = 0, \\ (1 - \pi) \frac{\delta^x}{(1 + \delta)^{x+1}}, & \text{se } x = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

A média e a variância de X conforme definido em (1) são

$$E(X) \equiv \mu_X = \delta(1 - \pi) \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) \equiv \sigma_X^2 = \delta(1 - \pi)[1 + \delta(1 + \pi)].$$

Interpretação dos parâmetros. De forma intuitiva, o parâmetro $\delta > 0$ controla a intensidade média do processo de contagem (quanto maior δ , maior a média de eventos), enquanto π regula a proporção de zeros e, conseqüentemente, a dispersão:

$$\begin{aligned}\pi \in (0, 1) &\Rightarrow \text{inflação de zeros (mais zeros que o esperado, maior variância),} \\ \pi \in (-1/\delta, 0) &\Rightarrow \text{deflação de zeros (menos zeros, menor variância).}\end{aligned}$$

Logo, considerando as propriedades mencionadas, vale reforçar que, para aqueles que já trabalharam com dados de contagem, é provável que tenham se deparado com o chamado índice de dispersão, frequentemente calculado pela razão entre a variância e a média dos dados. Esse indicador, em geral, é interpretado da seguinte forma, a saber: *i)* valores maiores que 1 indicam sobredispersão, *ii)* valores menores que 1 sugerem subdispersão e *iii)* valores iguais a 1 caracterizam equidispersão. No entanto, um aspecto frequentemente negligenciado na literatura consiste no fato de que essa classificação de dispersão tem como referência implícita a distribuição de Poisson. Em outras palavras, a razão utilizada para o cálculo do índice de dispersão pressupõe que os dados seguem ou deveriam seguir uma estrutura compatível com a Poisson. Por essa razão, comparações com modelos que não corroboram essa estrutura de referência tornam-se conceitualmente inadequadas. Além disso, é importante destacar que o índice de dispersão não deve ser interpretado como uma medida de qualidade do ajuste de modelos estatísticos, mas sim como um indicativo da estrutura de dispersão dos dados em relação à Poisson.

Assim, o Índice de Dispersão (I_X), que é a razão entre a variância e a média, é dado por

$$I_X := \frac{\sigma_X^2}{\mu_X} = 1 + \delta(1 + \pi); \quad (2)$$

segue-se que este modelo apresenta equidispersão, quando $\pi = -1$; subdispersão, quando $\delta \in (0, 1)$ e $\pi \in [-1/\delta, -1)$; e sobredispersão, quando $\pi \in (-1, 1)$. Se $\pi \in (-1/\delta, 0)$, resulta em um modelo com deflação de zeros em relação à distribuição geométrica; e se $\pi \in (0, 1)$ resulta em um modelo com inflação de zeros. A distribuição geométrica é um caso particular da distribuição ZMG, quando $\pi = 0$, (Barreto-Souza 2015).

Por tanto, em termos de (2), tem-se:

$$\begin{aligned}\pi < -1 &\Rightarrow I_X < 1 \text{ (subdispersão),} \\ \pi = -1 &\Rightarrow I_X = 1 \text{ (equidispersão),} \\ \pi > -1 &\Rightarrow I_X > 1 \text{ (sobredispersão),}\end{aligned}$$

respeitando sempre o domínio $\pi \in (-1/\delta, 1)$.

A Tabela 3 sintetiza como o parâmetro π influencia a dispersão e a proporção de zeros na ZMG, para $\delta > 0$. A relação é mediada pelo (2), que distingue subdispersão ($I_X < 1$), equidispersão ($I_X = 1$) e sobredispersão ($I_X > 1$). Essa síntese facilita a interpretação prática dos cenários e antecipa o efeito esperado na largura dos limites de controle.

Tabela 3 – Relação entre dispersão, intervalo de π , tipo de zeros e implicações práticas (com $I_X = 1 + \delta(1 + \pi)$ e $\pi \in (-1/\delta, 1)$)

Regime	Condição em π ($\delta > 0$)	Zeros	Implicações
Subdispersão	$\pi < -1$ (viável se $\delta < 1$)	Deflação / poucos zeros	$I_X < 1$; variância $<$ média; limites mais estreitos
Equidispersão	$\pi = -1$	Referência	$I_X = 1$; variância = média
Sobredispersão	$\pi > -1$	Inflação / muitos zeros	$I_X > 1$; variância $>$ média; limites mais largos

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Em termos práticos, $I_X > 1$ indica sobredispersão, $I_X < 1$ indica subdispersão e $I_X = 1$ caracteriza equidispersão.

Operacionalmente, $\pi > 0$ (inflação de zeros) tende a aumentar a variância e a ampliar os limites de controle; já $\pi < 0$ (deflação de zeros) tende a reduzir a variância e a estreitar os limites, afetando diretamente a sensibilidade do gráfico a deslocamentos na média.

A seguir, apresenta-se a fundamentação necessária para a construção dos novos gráficos de controle baseados no modelo GZMG. Para tanto, parte-se da distribuição da soma $T = \sum_{i=1}^n X_i$ (obtida por convolução de variáveis ZMG independentes), o que viabiliza limites de controle analíticos e exatos. Em seguida, introduz-se uma reparametrização em termos da média μ , tornando a interpretação mais direta e a implementação prática mais acessível. Com base nessas expressões, derivam-se os gráficos GZMG- c e GZMG- u , discutindo-se o uso de n_t variável (ou $\bar{n}$ para limites constantes) e o papel de π na dispersão e na proporção de zeros, fatores que impactam diretamente a largura dos limites e a sensibilidade do monitoramento.

2.2 NOVO GRÁFICO DE CONTROLE

Suponha que um processo (por exemplo, um processo industrial) gere eventos (por exemplo, não conformidades ou defeitos) de acordo com uma distribuição GMG. Seja X o número de eventos por unidade de processo, a f.m.p. de X é dada por (1). Além disso, seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória e independente de tamanho n de $X \sim \text{ZMG}(\delta, \pi)$, e considere $T = \sum_{i=1}^n X_i$ e $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$, que representam, respectivamente, o número total de eventos e o número médio de eventos por unidade. Assim como no gráfico- c de Poisson, utiliza-se o total de eventos na amostra, $T = \sum_{i=1}^n X_i$, cuja f.m.p. é obtida pela soma (convolução) de n variáveis ZMG independentes.

Nesse caso, a f.m.p. da variável aleatória T é dada pela seguinte relação:

$$\Pr(T = k) = \begin{cases} \left(\frac{1+\pi\delta}{1+\delta} \right)^n, & k = 0; \\ \left(\frac{1+\pi\delta}{1+\delta} \right)^n \left(\frac{\delta}{1+\delta} \right)^k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \binom{n+i-1}{i} \left[\frac{1-\pi}{1+\pi\delta} \right]^i \left[\frac{\pi(1+\delta)}{1+\pi\delta} \right]^{k-i}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

A expressão em (3) resulta da convolução de n v.a. ZMG independentes, permitindo trabalhar com limites de controle exatos para T e, via reparametrização, para a média $\bar{X}$.

Em resumo, nomea-se T como a distribuição geométrica modificada por zeros generalizada com parâmetros $n > 0$, $\delta > 0$ e $\pi \in (-1/\delta, 1)$, denotada por $T \sim \text{GZMG}(n, \pi, \delta)$. Se $\pi > 0$, ocorre inflação de zeros (maior probabilidade de 0 e maior variância); se $\pi < 0$, ocorre deflação de zeros (menor probabilidade de 0 e menor variância), Johnson (ver 22, Seção 8.2.3).

A média e a variância de T são dadas por:

$$E(T) = n\delta(1 - \pi) \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = n\delta(1 - \pi)[1 + \delta(1 + \pi)]. \quad (4)$$

As quantidades apresentadas em (4) podem ser usadas para construir os gráficos de controle propostos da maneira usual para os gráficos de Shewhart. Assumindo que um valor padrão para δ e π estejam disponíveis, as linhas centrais e os limites de controle de $k\sigma^2$ para cada gráfico¹ nomeadamente, os gráficos GZMG- c (número total de eventos por unidade) e GZMG- u (número médio de eventos por unidade) são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Limites de controle para gráficos de número total de eventos e número médio de eventos baseados na distribuição geométrica modificada por zeros.

	Gráfico de controle GZMG- c	Gráfico de controle GZMG- u
UCL	$n\delta(1 - \pi) + k\sqrt{n\delta(1 - \pi)[1 + \delta(1 + \pi)]}$	$\delta(1 - \pi) + k\sqrt{\delta(1 - \pi)[1 + \delta(1 + \pi)]}/n$
CL	$n\delta(1 - \pi)$	$\delta(1 - \pi)$
LCL	$n\delta(1 - \pi) - k\sqrt{n\delta(1 - \pi)[1 + \delta(1 + \pi)]}$	$\delta(1 - \pi) - k\sqrt{\delta(1 - \pi)[1 + \delta(1 + \pi)]}/n$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota-se que, via $I_X = 1 + \delta(1 + \pi)$ ou sua forma reparametrizada em μ , valores mais negativos de π (inflação) aumentam a variância marginal e alargam os limites; valores positivos de π (deflação) diminuem a variância e estreitam os limites, com impacto direto no número médio de amostras e na sensibilidade a mudanças.

Vale ressaltar que, como a distribuição geométrica é um caso particular da ZMG para $\pi = 0$, os limites de controle apresentados na Tabela 4 também se aproximam dos limites de controle para casos especiais dos gráficos c e u derivados da distribuição Geométrica. Além disso, semelhante ao gráfico c , o gráfico GZMG- c não deve ser utilizado nos casos em que os tamanhos das amostras sejam desiguais, pois tanto a linha central quanto os limites de controle do gráfico GZMG- c irão variar com o tamanho da amostra. Portanto, o gráfico GZMG- u é recomendado,

¹ Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, ou seja, $X \sim N(0, 1)$, então o **quantil da normal** de ordem p é definido como $z_p = F^{-1}(p)$ onde: (a) $F(x)$ é a função de distribuição acumulada (f.d.a.) da normal padrão, dada por $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$. (b) $F^{-1}(p)$ representa a inversa da função de distribuição acumulada, isto é, o valor z_p tal que $P(X \leq z_p) = p$. Para uma distribuição normal geral $N(\mu, \sigma^2)$, o quantil é obtido por $Q_p = \mu + z_p\sigma$, onde μ é a média e σ o desvio padrão. Neste artigo usou-se ora $z = \Phi^{-1}(0.995) = 2.58$ para $\alpha = 0.01$ outra $z = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65$ para $\alpha = 0.1$.

em vez do gráfico GZMG- c , para tamanhos de amostra variáveis, pois o primeiro é mais fácil de interpretar nesse cenário (a linha central do gráfico GZMG- u não variará entre as amostras).

Foi considerada ainda uma nova reparametrização da distribuição ZMG em termos do parâmetro de média (μ). Considerou-se a reparametrização $\delta = \mu/(1 - \pi)$. Sob essa nova parametrização, tem-se que

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \mu[1 + \mu(1 + \pi)/(1 - \pi)]. \quad (5)$$

Como os parâmetros δ e π contêm pouca ou nenhuma interpretação direta, pode ser difícil para profissionais da indústria, como engenheiros e técnicos, fornecer um valor padrão (ou de referência). Para superar essa dificuldade, pode-se usar uma reparametrização conveniente da distribuição ZMG em termos da média. Essa parametrização foi descrita no início desta seção. Os limites de controle derivados para os gráficos de GZMG propostos, considerando essa reparametrização alternativa, são apresentados na Tabela 5².

Tabela 5 – Limites de controle para gráficos de número total de eventos e número médio de eventos baseados na distribuição geométrica modificada por zeros reparametrizada

	Gráfico de controle GZMG- c	Gráfico de controle GZMG- u
UCL	$n\mu + k\sqrt{n\mu[1 + \mu(1 + \pi)/(1 - \pi)]}$	$\mu + k\sqrt{\mu[1 + \mu(1 + \pi)/(1 - \pi)]}/n$
CL	$n\mu$	μ
LCL	$n\mu - k\sqrt{n\mu[1 + \mu(1 + \pi)/(1 - \pi)]}$	$\mu - k\sqrt{\mu[1 + \mu(1 + \pi)/(1 - \pi)]}/n$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Portanto, devido à sua vantagem prática e simplicidade, daqui em diante serão considerados os limites de controle fornecidos na Tabela 5 para a construção de gráficos de controle para o monitoramento da média usando a GZMG. As propriedades do modelo GZMG, aliadas à forma fechada da distribuição de T e à reparametrização em termos de μ , permitem derivar gráficos de controle com limites analíticos exatos, capazes de lidar com diferentes regimes de dispersão e com a ocorrência de inflação e deflação de zeros, preservando a interpretação direta na média do processo.

Para facilitar a leitura das implicações práticas do modelo, apresenta-se a seguir uma tabela-resumo, Tabela 6, que relaciona, de forma compacta, o parâmetro π , o regime de dispersão (subdispersão, equidispersão e sobredispersão), o comportamento da proporção de zeros e o efeito esperado na largura dos limites de controle. Essa síntese funciona como mapa conceitual para orientar a escolha de configurações de monitoramento e a interpretação dos gráficos GZMG- c e GZMG- u .

² Note-se que, nesse caso, os limites de controle do gráfico GZMG- u também variarão com o tamanho da amostra, pois deve-se substituir n por n_j em suas expressões. Entretanto, alternativamente, (Montgomery 2019) sugeriu basear os cálculos dos limites de controle em um tamanho de amostra médio $\bar{n}$, o que resulta em limites constantes e é particularmente útil quando os gráficos forem apresentados à gestão.

Tabela 6 – Resumo: dispersão, sinal de π , tipo de zeros e efeito esperado nos limites de controle (GZMG- u reparametrizado)

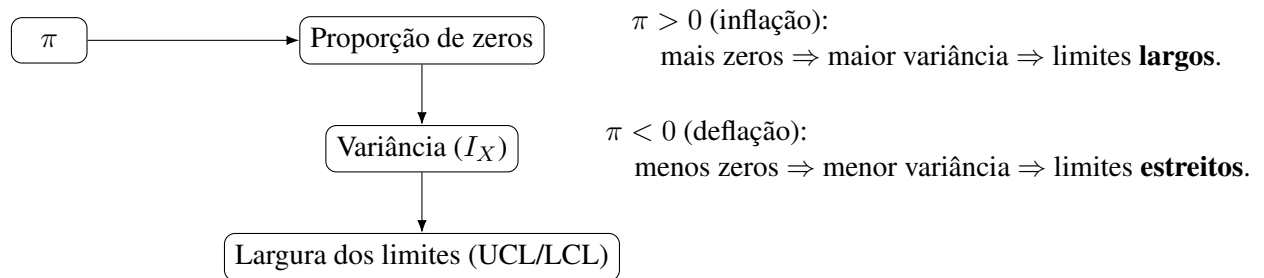
Regime	π	Zeros	Efeito nos limites (UCL/LCL)
Subdispersão	$\pi < 0$	Deflação (menos zeros)	Limites <i>mais estreitos</i>
Equidispersão	$\pi = -1$	Referência	Limites de referência
Sobredispersão	$\pi > 0$	Inflação (mais zeros)	Limites <i>mais largos</i>

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A Tabela 6 resume, do ponto de vista operacional, como o parâmetro π afeta a *largura dos limites de controle* nos gráficos GZMG- c e GZMG- u . Quando $\pi > 0$ (inflação de zeros), a variância de T aumenta e os limites (UCL/LCL) se *afastam* da linha central, reduzindo falsos alarmes, porém tornando o gráfico menos sensível a pequenos deslocamentos. Quando $\pi < 0$ (deflação de zeros), a variância diminui e os limites se *aproximam* da linha central, aumentando a sensibilidade (detecção mais rápida), mas com maior risco de alarmes espúrios. No caso $\pi = -1$ (equidispersão), obtém-se o cenário de referência: limites em nível intermediário e balanço típico entre sensibilidade e estabilidade.

Para tornar essa dinâmica ainda mais clara, a Figura 2 resume o encadeamento causal entre π , proporção de zeros, variância (via I_X) e a largura dos limites de controle. O esquema ajuda a antecipar o comportamento do gráfico: quando a variância aumenta (diminui), os limites se afastam (aproximam) da linha central, alterando a rapidez de detecção de sinais.

Figura 2 – Efeito de π sobre a proporção de zeros, a variância (via I_X) e a largura dos limites.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A leitura do diagrama é direta: parte-se de π e segue-se o fluxo para a proporção de zeros; esta impacta a variância medida por I_X , que por sua vez determina a largura dos limites (UCL/LCL). Assim, $\pi > 0$ (inflação) implica mais zeros $\Rightarrow$ maior variância ($I_X > 1$) $\Rightarrow$ limites **mais largos**; já $\pi < 0$ (deflação) implica menos zeros $\Rightarrow$ menor variância ($I_X < 1$) $\Rightarrow$ limites **mais estreitos**. Esse raciocínio orienta decisões de projeto e a leitura crítica dos gráficos GZMG ao longo dos cenários simulados e das aplicações.

2.3 UMA ABORDAGEM SISTEMÁTICA DE REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo apresenta inicialmente uma contextualização e motivação para o estudo realizado, destacando o problema de pesquisa, a relevância do tema e as lacunas existentes na literatura. A seção de contextualização e motivação tem como objetivo situar o leitor no cenário em que se insere a investigação, descrevendo o papel dos modelos estatísticos na detecção e monitoramento de processos com ocorrência de zeros inflados ou deflacionados, bem como a importância da classificação desses modelos segundo seus mecanismos de dispersão (equidispersão, subdispersão ou sobredispersão). A partir dessa base conceitual, serão discutidas as razões que levaram à seleção dos modelos comparativos em relação ao GZMG, considerando critérios teóricos, práticos e de adequação ao escopo do estudo.

2.3.1 Análise sistemática de revisão de literatura

2.3.2 Contextualização e motivação

A presente pesquisa, ao propor e avaliar o modelo geométrico modificador por zeros generalizado (GZMG), partiu da constatação de que, na literatura recente, há uma diversidade significativa de abordagens voltadas ao monitoramento de processos com presença de zeros em excesso ou em falta, inflação e deflação, respectivamente. Embora o GZMG se destaque por sua flexibilidade, contemplando inflação e deflação de zeros, bem como regimes de equidispersão, subdispersão e sobredispersão, percebeu-se que a comparação de seu desempenho com outros modelos consolidados exigia um levantamento criterioso do estado da arte.

Para isso, foram reunidos e analisados dezessete artigos científicos indicados pela equipe de orientação, abrangendo diferentes modelos estatísticos, mecanismos de inflação de zeros e estratégias de controle de dispersão. Nesse conjunto, encontram-se desde modelos clássicos, como o *Zero-Inflated Poisson* (ZIP) e o *Zero-Inflated Binomial* (ZIB), até variações mais complexas, como o *Zero-Inflated Generalized Poisson* (ZIGP) e abordagens híbridas integrando técnicas de monitoramento, como CUSUM, EWMA e DEWMA. Durante essa análise, também foram identificados trabalhos que tratam de dados autocorrelacionados ou de natureza distinta da contagem discreta não correlacionada, caso de algumas revisões de processos de alta qualidade, os quais foram devidamente classificados como de aplicabilidade parcial ou fora do escopo desta investigação.

O resultado desse mapeamento foi consolidado na Tabela 7, que organiza, de forma padronizada, as principais características de cada artigo: modelo ou família estatística, mecanismo de geração de zeros, tipo de dispersão considerada, forma de controle dessa dispersão, adequação ao contexto do gráfico u e observações relevantes. Esta sistematização não apenas oferece uma visão comparativa entre os modelos identificados, mas também fornece base objetiva para a seleção daqueles que serão comparados experimentalmente com o GZMG nas análises subsequentes.

Tabela 7 – Modelos estatísticos identificados e classificação quanto a zeros e dispersão (17 artigos)

Artigo (ref. curta)	Modelo / família	Zeros	Dispersão (Equ/Sub/-Sob)	Controle da dispersão	Adeq. p/ <i>u</i>	Observações
(1)	ZIP (Poisson inflado de zeros)	Inflado	Sobre (vs. Poisson)	Mistura $p +$ taxa λ	Sim	Base clássica p/ zeros em excesso; limites específicos p/ ZIP.
(2)	ZIP	Inflado	Sobre	p, λ (parâmetros estimados)	Sim	Impacto do erro de estimação nos limites/ARL; recomenda n_0 inicial.
(3)	ZIP (CUSUM)	Inflado	Sobre	p, λ	Sim	CUSUM combinado/único; melhor que Shewhart p/ deslocamentos pequenos.
(4)	ZIP; intervalos Jeffreys/Blyth–Still	Inflado	Sobre	Mistura p ; UCL por intervalos	Sim	Regras de sequência; reduz falsos alarmes vs. Shewhart clássico.
(5)	ZIB (binomial inflado)	Inflado	Sobre (vs. binomial)	Mistura $+ n, p$	Parcial	Adequado a p/np -charts; comparação indireta p/ u -chart.

Continuação na próxima página

Continuação na próxima página

Artigo (ref. curta)	Modelo / família	Zeros	Dispersão (Equ/Sub/-Sob)	Controle da dispersão	Adeq. p/ u	Observações
(6)	ZIP (aprox. χ^2 não central)	Inflado	Sobre	Parâmetro λ_χ (aprox.)	Sim	cChi/cCChi/cMChi; ganhos de ARL/ACP com muitos zeros.
(7)	ZIGP (Poisson generalizado inflado)	Inflado	Equi/Sub/Sobre	Parâmetro de dispersão (GP) + mistura	Sim	Cobre sub/sobre; versões c/ CCC/c-charts.
(8)	Poisson inflado geral (0..r)	Inflado (geral)	Maioria: Sobre	Vetor de inflação $\alpha + \lambda$	Sim	Inflação em múltiplos pontos baixos; quatro esquemas upper-sided.
(9)	ZIB (CUSUM)	Inflado	Sobre (vs. binomial)	Mistura + p	Parcial	CUSUM um-lado p/ aumentos/quedas em p.
(10)	ZIP (EWMA/-DEWMA)	Inflado	Sobre	p, λ com memória	Sim	DEWMA eficaz p/ shifts em p e simultâneos; estado estacionário e params. estimados.
(11)	ZIP (EWMA)	Inflado	Sobre	p, λ	Sim	Aplicação em saúde; ARL via cadeia de Markov.

Continuação na próxima página

Continuação na próxima página

Artigo (ref. curta)	Modelo / família	Zeros	Dispersão (Equ/Sub/-Sob)	Controle da dispersão	Adeq. p/u	Observações
(12)	Threshold–Poisson	Efeito zero-excesso	Sobre	Limiar + λ	Sim	“Threshold- c ” supera ZIP/GZIP/Neyman/Gar Poisson (semicondutores).
(13)	ZIP/GZIP com parâmetros estimados	Inflado	Sobre	Mistura + λ (estimados)	Sim	Diretrizes de projeto considerando incerteza de parâmetros.
(14)	Revisão: TBE, CCC, np, p, u, c, g, t, tBE	Não aplicável	Não aplicável (framework conceitual)	Varia conforme o modelo-base	Parcial	Revisão para processos de alta qualidade (defeitos raros); inclui contagens; não propõe modelo novo ZI.
(15)	ZIP $\rightarrow$ aprox. geométrica (c-charts)	Inflado	Sobre	Mistura p (geométrica)	Sim	cg, cmg, cme; comparação ARL/ACP em diferentes proporções de zeros.
(16)	ZIP (combined EWMA)	Inflado	Sobre	p, λ (EWMA combinado)	Sim	Vigilância de doenças; melhora sensibilidade a deslocamentos.

Continuação na próxima página

Continuação na próxima página

Artigo (ref. curta)	Modelo / família	Zeros	Dispersão (Equ/Sub/-Sob)	Controle da dispersão	Adeq. p/ u	Observações
(17)	Revisão ZI (múltiplas famílias)	Inflado / Alteredado	Equi/Sub/Sobre (depende do núcleo)	Parâmetros do núcleo + mistura	Parcial	Panorama de modelos ZI e monitoramento; útil p/ seleção comparativa.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota: As referências curtas correspondem a: (1) Xie et al. (2001); (2) He et al. (2003); (3) He et al. (2012); (4) Sim e Lim (2008); (5) Yawsaeng e Mayuresawan (2012); (6) Katemee e Mayuresawan (2012); (7) Katemee e Mayuresawan (2013); (8) Rakitzis, Castagliola e Maravelakis (2016); (9) Rakitzis, Maravelakis e Castagliola (2016); (10) Alevizakos e Koukouvinos (2020); (11) Fatahi et al. (2012); (12) Tian et al. (2018); (13) Rakitzis e Castagliola (2016); (14) Ali, Pievatolo e Göb (2016); (15) Katemee e Mayuresawan (2012); (16) Leong e Tan (2015); (17) Mahmood e Xie (2019).

2.3.3 Análise dos modelos identificados

A Tabela 7 evidencia que a maior parte dos trabalhos identificados concentra-se em modelos com inflação de zeros, sendo o *Zero-Inflated Poisson* (ZIP) e suas variações a abordagem predominante na literatura, conforme observado em Xie et al. (2001), He et al. (2003), He et al. (2012), Sim e Lim (2008), Katemee e Mayuresawan (2012), Alevizakos e Koukouvinos (2020), Fatahi et al. (2012) e Leong e Tan (2015). Esses modelos assumem sobredispersão em relação ao modelo de Poisson clássico, ajustando simultaneamente a taxa média de ocorrências e a proporção de zeros. Outras propostas ampliam a flexibilidade do núcleo de geração de contagens, como o *Zero-Inflated Generalized Poisson* (ZIGP), discutido por Katemee e Mayuresawan (2013), capaz de acomodar equidispersão, subdispersão e sobredispersão. Por essa razão, esse modelo torna-se particularmente relevante para comparação com o GZMG, devido à sua abrangência em relação aos regimes de dispersão. Modelos mais gerais, como o Poisson inflado em múltiplos pontos, apresentado por Rakitzis, Castagliola e Maravelakis (2016), também figuram como potenciais candidatos para a análise comparativa.

Alguns estudos apresentam foco metodológico no aprimoramento do monitoramento estatístico, integrando técnicas como CUSUM, conforme He et al. (2012) e Rakitzis, Maravelakis e Castagliola (2016), bem como abordagens EWMA ou DEWMA, como em Alevizakos e Koukouvinos (2020) e Fatahi et al. (2012). Tais métodos apresentam potencial para melhorar a sensibilidade dos gráficos de controle diante de pequenas mudanças no processo. Embora relevantes, essas propostas devem ser avaliadas quanto à compatibilidade de suas premissas com o modelo GZMG, uma vez que algumas delas se aplicam a famílias binomiais infladas, como o

ZIB, proposto por Yawsaeng e Mayureesawan (2012), cuja adequação ao contexto do gráfico u é apenas parcial. Modelos como o *Threshold-Poisson*, apresentado por Tian et al. (2018), também se destacam pelo desempenho em cenários com excesso de zeros, mas devem ser confrontados com o GZMG para avaliação de suas vantagens relativas.

Por outro lado, há trabalhos que, embora relevantes na literatura de controle estatístico, não constituem concorrentes diretos para a comparação empírica proposta nesta tese, por tratarem de dados autocorrelacionados, processos não discretos ou revisões conceituais sem proposição de um modelo específico para contagens. Esse é o caso, por exemplo, da revisão sobre processos de alta qualidade apresentada por Ali, Pievatolo e Göb (2016) e da revisão panorâmica sobre tendências em processos inflados de zeros desenvolvida por Mahmood e Xie (2019). Embora esses estudos forneçam contexto teórico relevante, eles não oferecem diretamente um modelo concorrente para comparação empírica com o GZMG. Assim, a seleção final para a comparação experimental prioriza modelos de contagem discretos, não autocorrelacionados e com capacidade de representar diferentes regimes de dispersão, garantindo uma avaliação justa e metodologicamente consistente.

3 AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO

Neste capítulo, conduzem-se estudos de simulação Monte Carlo (MC)¹ para avaliar o desempenho dos gráficos de controle GZMG propostos, bem como alguns gráficos de controle existentes/tradicionais para dados de contagem (nomeadamente, os gráficos c e u baseados em Poisson, os gráficos cmp_c e cmp_u baseados em COM-Poisson e os gráficos apresentados por (BOAVENTURA 2023)) quando o verdadeiro processo gerador de dados é distribuído por GZMG. Todas as simulações e cálculos foram realizados usando o *software* R, versão 4.3.1. Leitores interessados podem enviar um e-mail aos autores para obter os códigos R correspondentes.

O número médio de amostras até o sinal (ARL) é uma medida comumente usada para avaliar o desempenho dos gráficos de controle. O ARL, quando o processo está sob controle, também denotado como ARL_0 , é definido como o número médio de amostras (ou pontos de monitoramento) antes que um sinal seja dado (isto é, um ponto individual caia fora dos limites de controle), assumindo que o processo está sob controle. Já o ARL fora de controle (ou ARL_1) é o número médio de amostras que são tomadas até que uma mudança na média seja observada quando o processo está fora de controle (Saghir e Lin 2015).

Supõe-se que $Y \sim GZMG(n, \pi, \delta)$ provém de um processo com média de não conformidades em condição de controle, e que μ_s seja o parâmetro da média de não conformidades deslocada após ocorrer uma mudança em μ , isto é, $Y \sim GZMG(n, \pi_s, \delta_s)$. Para os gráficos GZMG propostos, o ARL_0 é definido como

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad (3)$$

onde $\alpha = 1 - P(LCL < Y < UCL \mid \mu)$. Enquanto o ARL_1 é dado por

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (4)$$

com $\beta = P(LCL < Y < UCL \mid \mu_s)$.

¹ Considerando-se o problema de cálculo da média de uma função $h(X)$ de uma variável aleatória X com distribuição F . Suponha-se, ainda, que exista um método para simular uma amostra $X_1, \dots, X_n$ de F . O Método Monte Carlo consiste em aproximar $E_F[h(X)]$ por

$$\hat{E}_F[h(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i). \quad (1)$$

Observa-se que a equação (1) aproxima a integral $\int h(x)dF(x)$ ou $\int h(x)f(x)dx$, se existir a densidade f de X . A **lei (forte) dos grandes números** garante que, quando $n \rightarrow \infty$, $\hat{E}_F[h(X)]$ converge para $E_F[h(X)]$ com probabilidade um. O erro padrão da estimativa (1) é $\sqrt{\text{Var}_F(h(X))/n}$, que pode ser estimado por

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^n \left\{ h(X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \right\}^2 \right]^{1/2} = O(n^{-1/2}). \quad (2)$$

Para uma leitura mais detalhada, consulte (Sen, Singer e Pedroso-de-Lima, 2009).

Por exemplo, nos programas usuais de Seis Sigma, $\alpha = 0.0027$ e, portanto, $ARL_0 = 1/0.0027 \approx 370$. Isto é, mesmo se o processo estiver sob controle, um sinal de fora de controle será dado a cada 370 amostras, em média (Montgomery 2019). Por outro lado, valores de ARL_1 próximos de um são desejáveis, principalmente para grandes mudanças na média de um processo (gráficos de controle de Shewhart).

Logo, considerando o ARL_0 , é desejável que seja grande, garantindo poucos alarmes falsos. E, em relação ao ARL_1 , espera-se que seja pequeno, garantindo a rápida detecção das causas especiais (Costa, Epprecht e Carpinetti, 2005).

3.1 DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE

Nesta seção, o desempenho dos dois gráficos de controle é comparado em termos de ARL (*Average Run Length* - Número Médio de Amostras). Conforme descrito anteriormente, o interesse está em detectar mudanças no parâmetro μ_X a partir da distribuição marginal de X_t . Assume-se que não há mudanças no parâmetro π , onde $\pi > 0$ representa casos de inflação de zeros e $\pi < 0$ representa casos de deflação de zeros Fernandes, Bourguignon e Ho (2020).

Nesta pesquisa, ainda de acordo com o estudo de Fernandes, Bourguignon e Ho (2020), foram considerados os seguintes valores de π :

$$\pi = \{-0.20, -0.10, -0.05, 0.05, 0.10, 0.20\}.$$

A seleção dos valores de π visa representar distintos cenários de desvio em relação ao modelo Poisson padrão, capturando tanto situações de deflação quanto de inflação de zeros. Valores negativos de π ($\pi < 0$) indicam menor frequência de zeros do que o esperado, enquanto valores positivos ($\pi > 0$) representam uma ocorrência excessiva de zeros. Ao utilizar níveis moderados de distorção (± 0.05 , ± 0.10 , e ± 0.20), busca-se avaliar o desempenho dos gráficos de controle diante de diferentes intensidades dessa distorção estrutural. Tais valores foram escolhidos de modo a cobrir casos comumente observados na prática, mantendo coerência com estudos anteriores, especialmente com Fernandes, Bourguignon e Ho (2020). Essa abordagem permite verificar a robustez dos gráficos sob distintas estruturas marginais dos dados.

Os tamanhos dos deslocamentos estudados são dados por

$$\mu_{X_1} = \mu_{X_0} + \omega, \tag{5}$$

com

$$\omega = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\}$$

e assumindo $\theta = \{3, 5\}$, $\theta \in \mathcal{R}$. Os parâmetros dos dois gráficos de controle são apresentados na Tabela 5. Esses parâmetros são ajustados para que os gráficos tenham um ARL_0 semelhante e

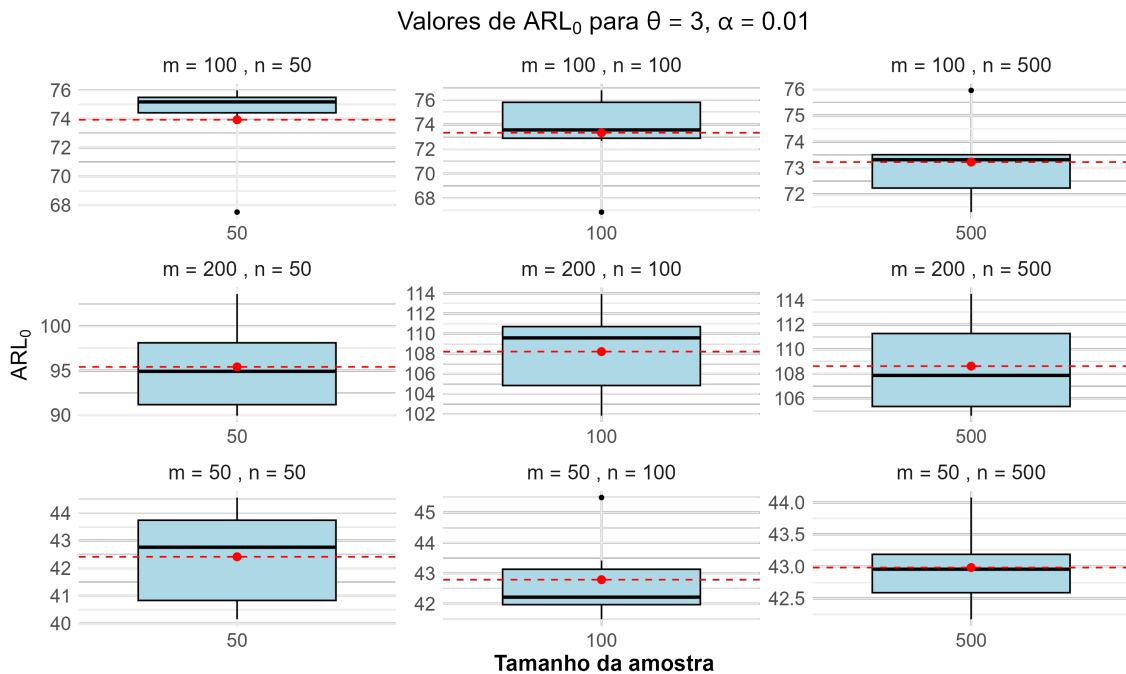
minimizem ARL_1 . Os valores de ARL_1 , assim como os parâmetros dos dois gráficos de controle, são apresentados na Tabela 8.

3.2 ARL EM CONTROLE

Sem perda de generalidade, nesta subseção, considera-se um processo GZMG com taxas médias de não conformidades de $\theta = 3$ e 5^2 , bem como dois valores diferentes para a probabilidade de alarme falso: $\alpha = 0.01$ e 0.1 . Usualmente, na literatura de CEP, adotam-se valores maiores para α , no entanto, nesta pesquisa, consideraram os mesmos valores adotados em (BOAVENTURA 2023). Esses valores de α correspondem, respectivamente, a $ARL_0 = 100$ e 10 . Além disso, assumem-se três tamanhos amostrais para o processo: $n = 50, 100$ e 500 (ou $\bar{n} = 50, 100$ e 500 , no caso do gráfico GZMG- u com tamanho amostral variável³), assim como processos com três quantidades amostrais diferentes na fase 1: $m = 50, 100$ e 200 .

A Figura 3 apresenta os resultados simulados para os valores de ARL_0 , considerando diferentes tamanhos de amostra ($n = 50, 100$ e 500), com $m = 50, 100$ e 200 e $\theta = 3$ fixo. Cada boxplot exibe a distribuição dos valores de ARL_0 obtidos para cada combinação de parâmetros. As médias dos grupos são destacadas com um ponto vermelho e, sobre eles, uma linha tracejada da mesma cor indica o valor médio correspondente.

Figura 3 – Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG- u para diferentes valores de m e n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

² Para uma discussão complementar sobre estes valores de θ , consulte o artigo de Fernandes, Bourguignon e Ho (2020).

³ Nesta tese, cada tamanho amostral n_j é obtido por $n_j = \bar{n} + k_j$, para $j = 1, \dots, m$, onde k_j é uma constante inteira aleatória variando no intervalo $[-\bar{n}/5, \bar{n}/5]$.

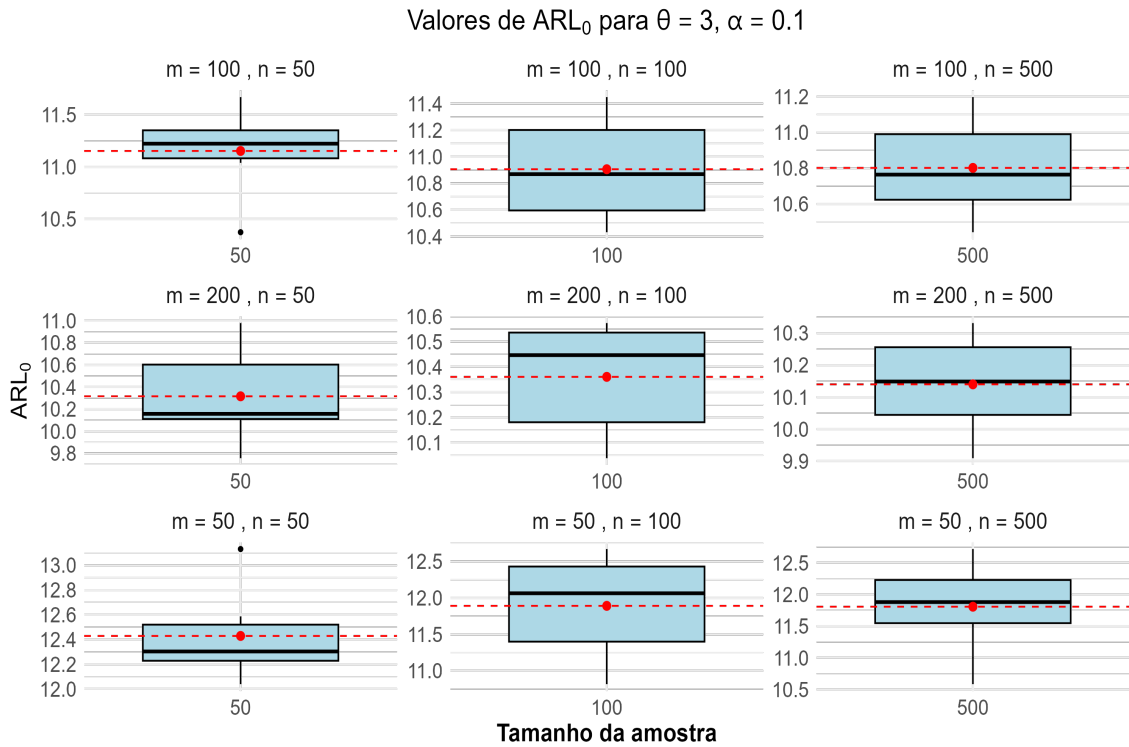
Com base na Figura 3, apresentada para $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$, observa-se o comportamento dos valores de ARL_0 sob diferentes combinações dos parâmetros m e n . Como referência teórica, para $\alpha = 0.01$, espera-se que o valor médio de ARL_0 se aproxime de 100, o que corresponde ao número esperado de amostras até a ocorrência de um alarme falso quando o processo está sob controle. A partir da análise visual desta figura, nota-se que, de modo geral, os valores medianos dos boxplots (linhas pretas centrais) e as médias (pontos vermelhos) se encontram razoavelmente próximos da linha vermelha tracejada, que representa o valor alvo de $ARL_0 = 100$. Esse comportamento é mais evidente nos cenários em que m e n assumem valores mais elevados, especialmente para $m = 200$, sugerindo maior estabilidade e menor variabilidade das estimativas.

Além disso, observa-se uma tendência de melhoria nos resultados à medida que os valores de m e n aumentam. Os boxplots apresentam menor dispersão nas simulações com maiores tamanhos amostrais, evidenciando o efeito positivo da ampliação de m e n na precisão dos resultados obtidos. Este padrão está de acordo com o esperado teoricamente, uma vez que maiores tamanhos amostrais proporcionam estimativas mais estáveis dos parâmetros do processo, reduzindo o impacto da variabilidade amostral.

Por outro lado, nas combinações com menores valores de m e n , como nos casos em que $m = 50$, nota-se uma maior dispersão dos valores de ARL_0 , bem como uma leve tendência de subestimação ou superestimação em relação ao valor nominal. Tal variação pode ser atribuída ao efeito da estimação dos parâmetros, que tende a influenciar mais fortemente os resultados quando a quantidade de informação disponível é reduzida.

Em síntese, os resultados evidenciam a boa performance do gráfico de controle GZMG sob o cenário investigado, destacando-se que o desempenho melhora conforme o tamanho amostral aumenta. A proximidade dos valores de ARL_0 ao valor nominal de 100 valida a adequação do modelo para o monitoramento do processo sob controle com $\alpha = 0.01$.

Figura 4 – Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG– u para diferentes valores de m e n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

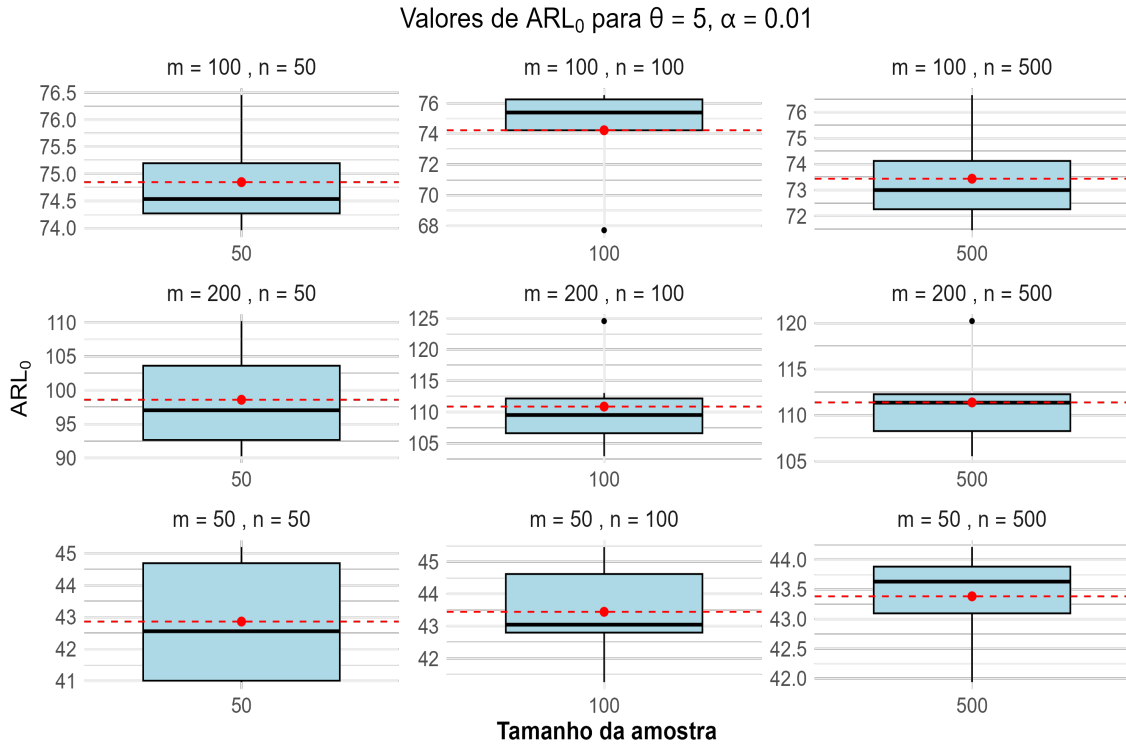
A Figura 4 refere-se ao desempenho do gráfico de controle GZMG para $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$, considerando diferentes combinações dos tamanhos amostrais m e n . Para esse nível de significância, espera-se que o valor médio de ARL_0 se aproxime de 10, valor teórico que representa o número médio de amostras até a emissão de um alarme falso, assumindo que o processo esteja sob controle. Observa-se que, de modo, os valores de ARL_0 se aproximam do valor nominal esperado à medida que os tamanhos amostrais aumentam. Isso pode ser constatado pela redução da dispersão dos boxplots nas simulações com maiores valores de m e n , evidenciando o efeito benéfico de amostras maiores na estabilidade das estimativas.

Nas situações com $m = 200$ e $n = 500$, por exemplo, os boxplots apresentam medianas e médias (representadas pelos pontos vermelhos) bastante próximas da linha de referência em vermelho tracejado, indicando boa acurácia do gráfico de controle GZMG nesses cenários. A precisão dos resultados também se destaca para $m = 200$ e $n = 100$, bem como para $m = 100$ e $n = 500$.

Por outro lado, quando os tamanhos amostrais são menores, como nos casos em que $m = 50$, nota-se maior variabilidade nos resultados e, em alguns casos, uma leve superestimação dos valores de ARL_0 . Esse comportamento é esperado, visto que estimativas baseadas em amostras menores tendem a ser mais sensíveis à variabilidade amostral e ao efeito de estimação dos parâmetros. A Figura 4 evidencia que o desempenho do gráfico GZMG é satisfatório sob o cenário com $\alpha = 0.1$, especialmente quando os tamanhos amostrais são suficientemente

grandes. A aproximação dos valores simulados de ARL_0 ao valor nominal de 10 reforça a adequação do modelo proposto para monitorar processos sob controle nesse contexto.

Figura 5 – Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG– u para diferentes valores de m e n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)



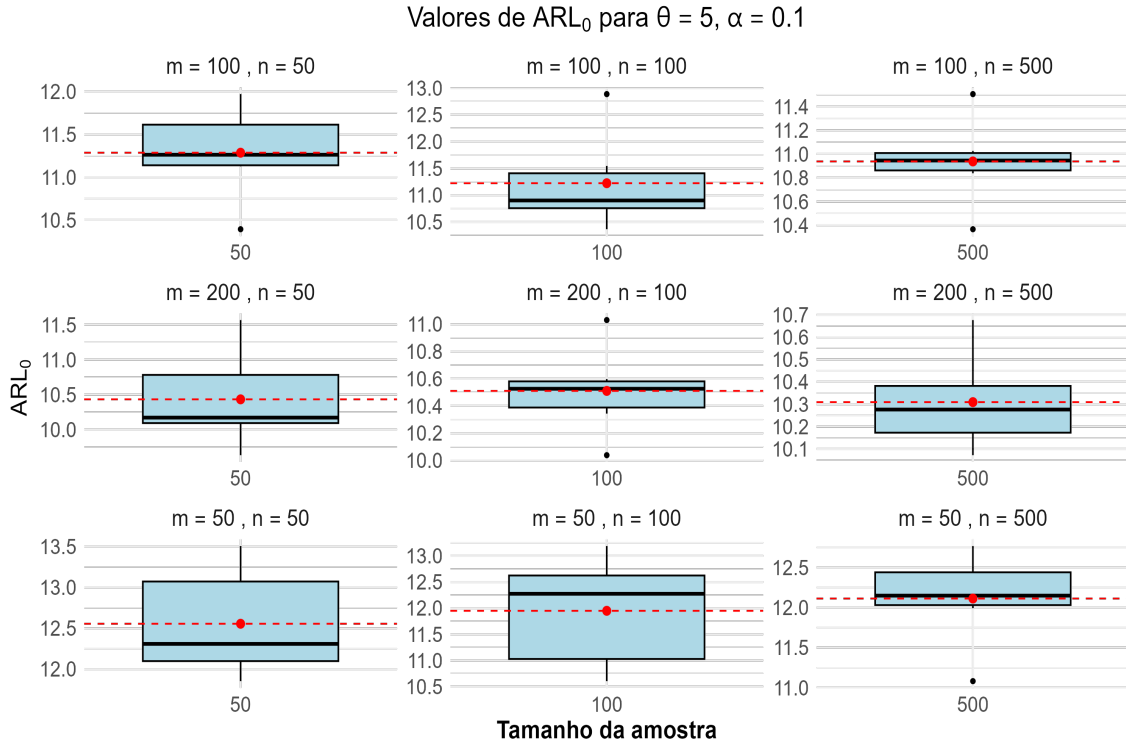
Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 5 ilustra os valores simulados de ARL_0 para o gráfico de controle GZMG sob o cenário em que $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$. Como esperado, o valor teórico de referência para o ARL_0 , neste caso, é 100, o que significa que, em média, espera-se que um alarme falso ocorra a cada 100 amostras quando o processo está sob controle. Os resultados revelam que o desempenho do gráfico GZMG é satisfatório para diferentes configurações dos tamanhos amostrais m e n . Nota-se que, nos casos com maiores tamanhos de amostra, como em $m = 200$ e $n = 100$ ou $n = 500$, os valores de ARL_0 simulados se aproximam significativamente do valor teórico esperado. A média (representada pelos pontos vermelhos) e a mediana situam-se próximas à linha tracejada de referência, evidenciando acurácia e estabilidade nas simulações.

Para valores menores de m ou n , observa-se um leve afastamento do valor alvo de ARL_0 , indicando um pequeno viés possivelmente atribuído ao efeito da estimação dos parâmetros. Em especial, os casos com $m = 50$ tendem a subestimar os valores de ARL_0 , o que pode estar associado à maior variabilidade amostral nessas configurações. Em contrapartida, o aumento simultâneo dos tamanhos amostrais de m e n contribui para a melhoria da precisão e redução da dispersão dos valores simulados. Esse comportamento confirma a consistência do gráfico GZMG, o qual apresenta bom desempenho em termos de controle sob o regime nominal, especialmente quando suportado por amostras mais informativas.

Dessa forma, conclui-se que o gráfico GZMG se mostra robusto em cenários com $\alpha = 0.01$, com desempenho aprimorado à medida que se elevam os valores de m e n , assegurando valores de ARL_0 mais próximos do ideal teórico de 100.

Figura 6 – Os valores de ARL_0 do gráfico GZMG— u para diferentes valores de m e n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 6 apresenta os valores simulados de ARL_0 para o gráfico GZMG, considerando $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$, cenário no qual o valor teórico de referência para o ARL_0 é 10. Espera-se, portanto, que, em média, uma sinalização de alarme ocorra a cada 10 amostras, quando o processo estiver sob controle. Observa-se que, de maneira geral, os valores simulados de ARL_0 tendem a se aproximar da meta teórica conforme os tamanhos amostrais m e n aumentam. Esta convergência está associada à maior estabilidade nas estimativas dos parâmetros do modelo, característica típica de métodos baseados em simulação.

Dito isso, os resultados indicam que, para valores maiores de m , como $m = 200$, o desempenho do gráfico GZMG é mais estável, apresentando boxplots concentrados em torno da linha de referência (valores médios e medianas próximas a 10), especialmente nos casos com $n = 100$ e $n = 500$. Por outro lado, quando $m = 50$, mesmo em amostras com n maiores, observa-se maior dispersão dos valores de ARL_0 , com algumas simulações superestimando o valor nominal esperado. Esse comportamento evidencia o impacto da estimação dos parâmetros sob cenários com amostras menores.

Ainda que haja variação em determinadas configurações, principalmente quando ambos m e n são pequenos, o gráfico GZMG apresenta desempenho satisfatório, especialmente em

regimes com maior informação amostral. Assim, pode-se concluir que o comportamento do ARL_0 sob $\alpha = 0.1$ é coerente com o esperado, sendo aprimorado à medida que são aumentados os tamanhos amostrais.

De modo geral, conforme demonstrado nas Figuras Figura 3 e Figura 6, as análises dos quatro cenários investigados revelaram que o desempenho do gráfico GZMG melhora progressivamente à medida que os tamanhos amostrais m e n aumentam, refletindo maior estabilidade nos valores de ARL_0 e aproximação aos valores teóricos esperados. Notou-se ainda que, para $\alpha = 0.01$, os valores simulados tendem a convergir mais lentamente para a meta (100), com maior variabilidade, sobretudo quando m e n são pequenos. Em contraste, nos cenários com $\alpha = 0.1$, a convergência para o valor esperado (10) foi mais rápida e consistente. Além disso, observou-se que valores maiores de θ não comprometem a estabilidade do gráfico, desde que acompanhados de tamanhos amostrais adequados. Esses resultados reforçam a robustez do gráfico GZMG e a importância da escolha apropriada dos parâmetros amostrais para garantir um desempenho satisfatório do controle estatístico de processos.

De maneira complementar às análises apresentadas até o momento, tem-se a Tabela 8, que apresenta os resultados obtidos a partir de 1.000 simulações de Monte Carlo (ou réplicas) com $m^* = 5.000$ amostras da fase 2 cada⁴, realizadas para cada cenário estudados. Isso ocorre porque a variação do número de amostras da fase 1, o tamanho da amostra, o parâmetro da distribuição GZMG e a probabilidade de alarme falso foram analisados. Em particular, os resultados de ARL_0 na Tabela 8 referem-se ao gráfico GZMG- u com tamanhos amostrais iguais, ou seja, os cenários estudados e apresentados nas Figuras Figura 3 e Figura 6, nos quais, nas simulações realizadas considerou-se no cálculo do tamanho do deslocamento, μ_{X_1} , apenas $\omega = 0$, isto é, ARL em controle.

Portanto, tendo em vista (5) para a Tabela 8, os níveis hipotéticos considerados são: $\theta = 3(\mu_0 = 3)$ e $\theta = 5(\mu_0 = 5)$. Fixou-se na tabela os valores de m de acordo com os valores assumidos por α e variaram-se os valores de π e n .

Apesar de algumas discrepâncias leves a moderadas em relação ao valor alvo de ARL_0 em alguns casos, o que já era esperado devido ao efeito da estimação de parâmetros⁵, os resultados apresentados na Tabela 8 parecem indicar o bom desempenho dos gráficos GZMG propostos. Observa-se que, em geral, os resultados melhoram, ou seja, os valores de ARL_0 se aproximam do valor nominal à medida que tanto m quanto n (ou $\bar{n}$) aumentam.

⁴ Conforme apontado por (Montgomery 2019), as fases 1 e 2 da aplicação de gráficos de controle possuem objetivos diferentes e distintos. Na fase 1, um conjunto de dados do processo é coletado e analisado de uma só vez, construindo limites de controle experimentais para determinar se o processo estava sob controle quando as m amostras iniciais foram coletadas (análise retrospectiva). Por outro lado, na fase 2, o gráfico construído a partir de um conjunto “limpo” de dados do processo exibindo controle (limites de controle confiáveis), é utilizado para monitorar a produção futura (monitoramento prospectivo do processo).

⁵ Para uma discussão complementar sobre esse tema relevante, sugere-se uma consulta ao artigo de revisão de (Jensen *et al.* 2006).

Tabela 8 – Valores médios (desvio padrão em parênteses) de ARL_0 do gráfico GZMG, para os diferentes cenários estudados

(a) $\bar{n} = 50$

Modelo	μ	ω	α	π					
				−0.20	−0.10	−0.05	0.05	0.10	0.20
$m = 50$	$\mu = 3$	0	0.1	12.320	12.586	12.286	12.208	12.039	13.131
				(7.529)	(7.933)	(6.870)	(7.901)	(7.766)	(8.402)
			0.01	43.095	40.147	42.419	44.558	40.298	43.950
				(11.916)	(13.434)	(12.306)	(10.682)	(13.145)	(11.422)
$m = 50$	$\mu = 5$	0	0.1	13.506	12.341	12.275	12.038	11.852	13.316
				(8.878)	(7.348)	(6.900)	(7.787)	(7.612)	(8.801)
			0.01	44.884	40.959	41.002	45.197	41.002	44.109
				(10.318)	(13.302)	(13.007)	(10.283)	(12.996)	(11.286)
$m = 100$	$\mu = 3$	0	0.1	11.039	11.213	11.233	10.372	11.670	11.391
				(5.742)	(4.046)	(4.275)	(3.745)	(4.468)	(3.894)
			0.01	67.509	75.034	75.980	75.550	75.322	74.215
				(30.257)	(28.951)	(29.180)	(28.345)	(28.478)	(29.535)
$m = 100$	$\mu = 5$	0	0.1	11.968	11.345	11.177	10.392	11.701	11.125
				(5.071)	(5.623)	(4.224)	(3.593)	(4.205)	(3.809)
			0.01	76.456	74.472	74.202	75.397	74.600	73.960
				(27.859)	(28.881)	(29.137)	(28.206)	(28.659)	(29.068)
$m = 200$	$\mu = 3$	0	0.1	10.748	10.148	9.756	10.098	10.978	10.166
				(2.798)	(2.194)	(2.114)	(2.411)	(2.791)	(2.459)
			0.01	89.928	93.535	96.288	98.728	103.606	90.378
				(55.617)	(56.766)	(55.682)	(58.631)	(56.855)	(55.549)
$m = 200$	$\mu = 5$	0	0.1	11.566	10.175	9.633	10.166	10.984	10.067
				(2.950)	(2.359)	(2.105)	(2.364)	(2.721)	(2.377)
			0.01	110.199	91.761	95.300	98.767	105.222	90.258
				(61.626)	(55.561)	(55.933)	(58.466)	(55.622)	(55.170)

(b) $\bar{n} = 100$

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
$m = 50$	$\mu = 3$	0	0.1	11.925	10.817	11.225	12.506	12.670	12.201
				(7.672)	(6.667)	(7.373)	(8.225)	(8.311)	(7.144)
			0.01	41.905	45.493	41.486	43.419	42.273	42.153
				(12.492)	(9.926)	(12.843)	(11.799)	(12.061)	(12.149)
$m = 50$	$\mu = 5$	0	0.1	13.187	10.602	10.634	12.716	12.345	12.202
				(8.337)	(6.197)	(6.543)	(8.354)	(7.838)	(6.997)
			0.01	45.078	45.455	41.262	43.237	42.780	42.854
				(10.216)	(9.883)	(12.976)	(11.859)	(11.821)	(11.885)
$m = 100$	$\mu = 3$	0	0.1	11.292	10.525	10.808	10.432	10.930	11.448
				(4.496)	(3.777)	(5.729)	(3.886)	(3.900)	(5.739)
			0.01	73.556	66.858	73.569	76.788	72.659	76.566
				(28.029)	(29.939)	(28.783)	(28.233)	(29.456)	(28.479)
$m = 100$	$\mu = 5$	0	0.1	12.887	10.802	10.739	10.362	10.996	11.545
				(7.803)	(3.968)	(4.534)	(3.459)	(3.940)	(5.941)
			0.01	75.821	67.714	74.966	76.529	73.987	76.393
				(28.407)	(29.754)	(28.535)	(28.301)	(28.865)	(28.313)
$m = 200$	$\mu = 3$	0	0.1	10.100	10.470	10.573	10.422	10.039	10.557
				(2.319)	(2.376)	(2.407)	(2.458)	(2.464)	(2.462)
			0.01	113.953	101.831	108.809	110.824	103.513	110.349
				(63.052)	(58.819)	(58.908)	(60.044)	(58.174)	(60.096)
$m = 200$	$\mu = 5$	0	0.1	11.030	10.530	10.597	10.343	10.038	10.522
				(2.609)	(2.452)	(2.361)	(2.399)	(2.398)	(2.526)
			0.01	124.550	102.949	113.053	109.546	105.651	109.519
				(60.669)	(58.196)	(61.125)	(59.673)	(59.282)	(59.620)

(c) $\bar{n} = 500$

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
$m = 50$	$\mu = 3$	0	0.1	11.640	10.585	12.119	11.515	12.717	12.265
				(7.121)	(6.372)	(8.694)	(7.214)	(8.660)	(8.084)

Continuação na próxima página

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
$m = 50$	$\mu = 5$	0	0.01	42.852 (12.032)	44.076 (11.044)	43.231 (11.615)	43.063 (11.534)	42.176 (12.207)	42.503 (12.025)
			0.1	12.767 (8.595)	11.082 (7.255)	12.155 (8.341)	11.993 (8.101)	12.534 (8.089)	12.142 (7.794)
			0.01	43.947 (11.361)	43.686 (11.332)	43.573 (11.372)	44.212 (10.955)	41.938 (12.403)	42.936 (11.884)
			0.1	10.442 (3.627)	10.699 (4.157)	11.044 (4.383)	11.197 (4.871)	10.829 (4.012)	10.598 (4.385)
$m = 100$	$\mu = 3$	0	0.01	73.523 (29.165)	73.450 (29.002)	71.919 (29.302)	75.955 (27.990)	73.175 (28.440)	71.318 (29.846)
			0.1	11.505 (4.520)	10.956 (4.315)	11.026 (4.739)	10.934 (4.721)	10.838 (4.043)	10.367 (4.117)
			0.01	76.656 (28.016)	72.103 (29.447)	72.730 (29.280)	74.406 (28.430)	73.267 (28.117)	71.453 (29.746)
			0.1	9.909 (2.158)	10.118 (2.450)	10.020 (2.307)	10.281 (2.342)	10.179 (2.298)	10.331 (2.497)
$m = 200$	$\mu = 3$	0	0.01	106.448 (58.327)	104.596 (57.783)	104.975 (57.674)	111.939 (58.668)	114.492 (60.247)	109.292 (59.521)
			0.1	10.676 (2.447)	10.192 (2.428)	10.072 (2.420)	10.360 (2.344)	10.166 (2.372)	10.389 (2.571)
			0.01	120.224 (60.813)	107.451 (58.806)	105.540 (58.120)	111.992 (58.939)	112.368 (60.400)	110.718 (60.093)
			0.1	10.676 (2.447)	10.192 (2.428)	10.072 (2.420)	10.360 (2.344)	10.166 (2.372)	10.389 (2.571)

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

3.3 ARL FORA DE CONTROLE

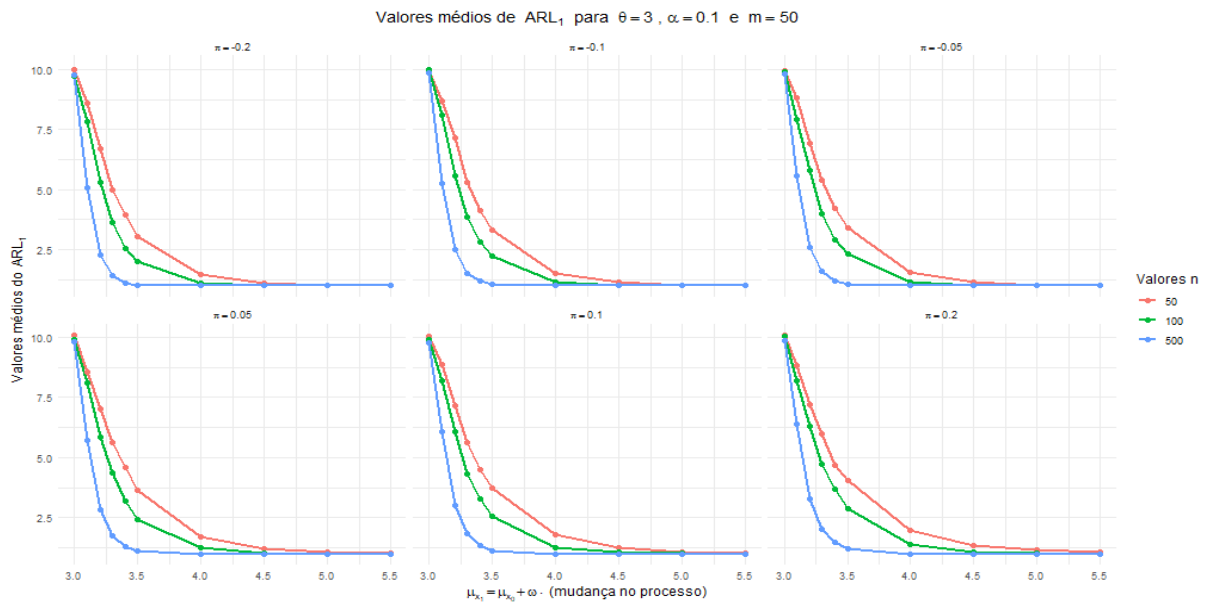
Nesta subseção, é avaliada a capacidade de detecção dos gráficos de controle propostos, baseados na distribuição de GZMG, por meio dos valores de ARL_1 , para os mesmos cenários considerados na Seção 3.2. Tendo em vista a necessidade de síntese dos dados, foram consideradas seis tabelas distintas, com mudanças em dez níveis, que representam os aumentos de deslocamentos ω na taxa de não conformidades θ do processo GZMG. Para a Tabela 8, os níveis hipotéticos considerados são: $\theta = 3(\mu_0 = 3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5)$ e $\theta = 5(\mu_0 = 5, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5)$. Fixaram-se, por tabela, os valores de m e variaram-se os valores de π e n .

3.3.1 ARL fora de controle - $m = 50, \theta = \{3, 5\}, \alpha = 0.1$ e 0.01

Análise dos valores médios de ARL_1 para $\theta = 3$

Nesta subseção, apresentam-se os resultados do tempo médio até o alarme (ARL_1) simulados sob diferentes deslocamentos na média do processo ($\mu_{x_1} = \mu_{x_0} + \omega$), considerando tamanho de histórico $m = 50$, parâmetro de dispersão $\theta = 3,0$ e nível de significância $\alpha = 0,1$. As curvas são apresentadas em função dos diferentes tamanhos amostrais ($n = 50, 100$ e 500) e valores de π . A seguir, discute-se o comportamento gráfico obtido.

Figura 7 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

De modo geral, observando a Figura 7, verifica-se que as curvas apresentadas no gráfico evidenciam o comportamento esperado do ARL_1 em relação aos deslocamentos na média do processo. Nota-se que os valores de ARL_1 são decrescentes à medida que ω aumenta, o que está de acordo com a teoria dos gráficos de controle, onde maiores deslocamentos tornam o sinal de alarme mais provável e precoce. Essa tendência é consistente em todos os cenários avaliados. A comparação entre os diferentes valores de n revela que, de maneira sistemática:

- as curvas associadas ao tamanho amostral $n = 500$ apresentam, em quase todos os casos, os menores valores de ARL_1 , sinalizando maior sensibilidade do gráfico para detectar deslocamentos sutis na média do processo.
- o tamanho amostral $n = 100$ mantém uma posição intermediária, indicando desempenho compatível com sua magnitude.
- o gráfico com $n = 50$ apresenta os maiores valores de ARL_1 , especialmente para valores menores de ω , refletindo menor capacidade de resposta para identificar mudanças.

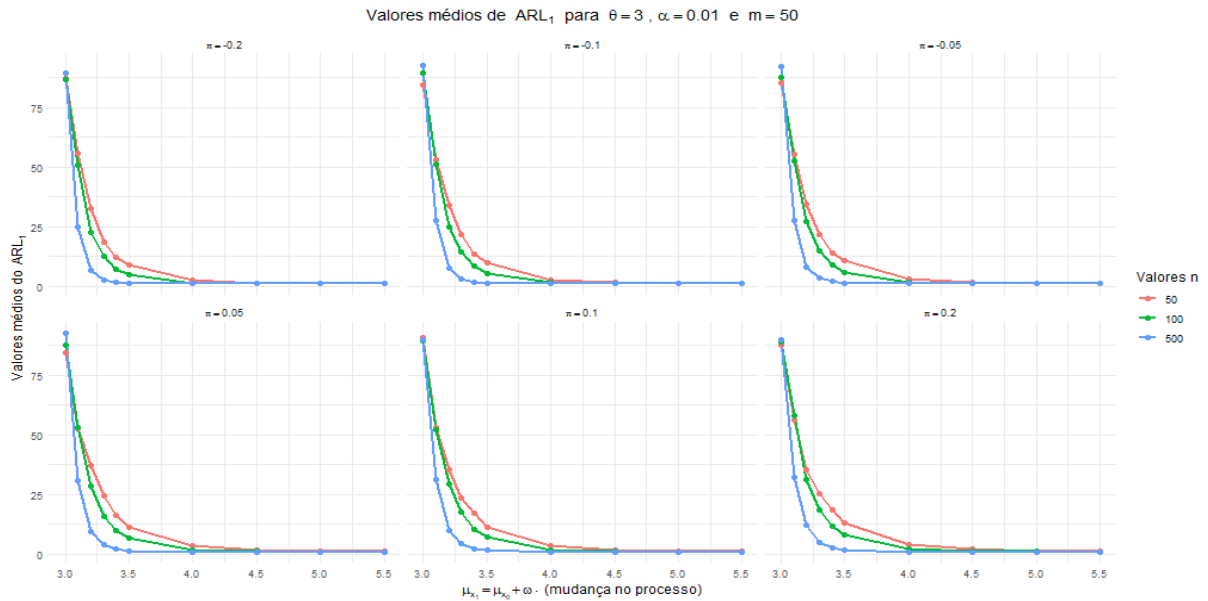
Outro ponto a destacar é a rápida convergência do ARL_1 para valores próximos de 1 quando ω aumenta. Em particular, para $n = 500$, essa convergência ocorre com deslocamentos a partir de aproximadamente $\omega \geq 1.0$. Esse comportamento evidencia a eficácia do gráfico em situações de mudanças moderadas ou severas. A influência do parâmetro π também é perceptível. Em termos gerais:

- valores negativos de π ($\pi < 0$) tendem a provocar uma elevação ligeira nos valores de ARL_1 , sugerindo um retardo na detecção.
- já para $\pi > 0$, observa-se um leve ganho de desempenho, com valores médios de ARL_1 ligeiramente menores, sobretudo em situações com menor n .

Os resultados indicam que, mesmo com histórico reduzido ($m = 50$), o gráfico apresenta desempenho adequado. A redução de m impõe certa perda de precisão, como esperado, mas a tendência geral das curvas permanece válida. O controle torna-se mais eficaz com o aumento de n , e a escolha apropriada de π pode auxiliar na aceleração da detecção, conforme observado em $\pi > 0$.

Na análise que segue, considera-se um nível de significância mais rigoroso, com $\alpha = 0.01$, mantendo-se $\theta = 3.0$ e $m = 50$. A seguir, são discutidos os principais aspectos observados no comportamento gráfico do tempo médio até o alarme.

Figura 8 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Analisando-se a Figura 8, verifica-se que as curvas seguem uma tendência decrescente clara: à medida que o deslocamento na média (ω) aumenta, os valores de ARL_1 diminuem substancialmente. Este comportamento reflete o aumento na probabilidade de detecção de uma mudança à medida que ela se torna mais evidente. A convergência das curvas para valores próximos de 1, sobretudo em deslocamentos maiores ($\omega \geq 1.0$), confirma a eficiência do gráfico na identificação de alterações relevantes no processo. O impacto do tamanho da amostra permanece visível:

- as curvas referentes a $n = 500$ são novamente as mais próximas de 1 em toda a faixa de ω , o que evidencia a alta sensibilidade do gráfico para amostras maiores.
- o comportamento de $n = 100$ é intermediário, com desempenho também bastante satisfatório.
- o tamanho amostral $n = 50$ revela maior retardo na detecção, especialmente para mudanças pequenas, embora também apresente convergência com o aumento de ω .

A influência do parâmetro de distorção π repete o padrão observado anteriormente:

- valores negativos de π tendem a aumentar o valor de ARL_1 , sugerindo uma redução na sensibilidade do gráfico.
- valores positivos de π promovem uma resposta mais rápida, especialmente visível nos cenários com menor tamanho amostral.

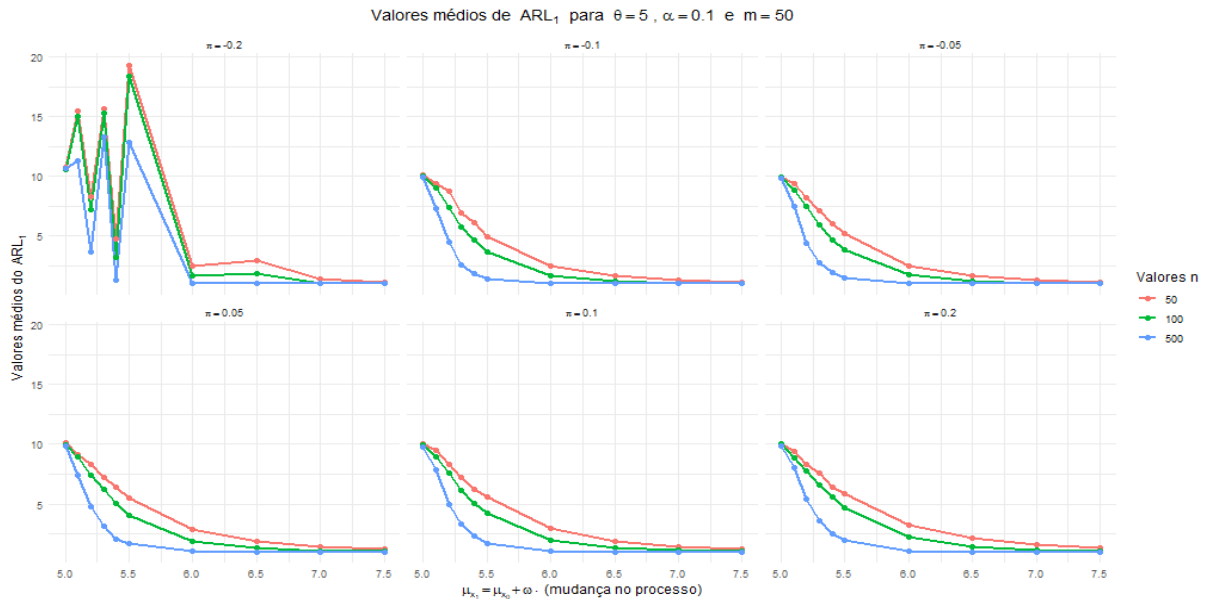
Comparativamente aos gráficos obtidos com $\alpha = 0.1$ (vide Figura 9), nota-se que os valores de ARL_1 são mais elevados para $\alpha = 0.01$ (vide Figura 8). Isso já era esperado, uma vez que um nível de significância menor impõe maior rigor para o acionamento do alarme, reduzindo a taxa de falsos positivos, mas exigindo mudanças mais significativas para gerar detecção.

Análise dos valores médios de ARL_1 para $\theta = 5$

Dando continuidade à investigação do desempenho do gráfico de controle proposto, nesta subseção serão apresentados os resultados obtidos para $\theta = 5$, mantendo-se os demais parâmetros sob as mesmas condições anteriores. A comparação com o caso $\theta = 3$ possibilita avaliar o impacto de uma maior taxa de ocorrência de eventos no processo sob controle, refletido na forma como o gráfico responde aos diferentes deslocamentos na média. As análises seguirão a mesma estrutura adotada anteriormente, abordando o comportamento das curvas, o efeito do tamanho amostral n , a influência do parâmetro de distorção π e o impacto da probabilidade de alarme falso, representada por α .

A Figura 9 leva em consideração um nível de significância $\alpha = 0.1$, isto é, uma maior probabilidade de alarme falso. Essa alteração torna o gráfico de controle mais sensível, o que é evidenciado pelos menores valores de ARL_1 ao longo de todos os painéis que compõem a figura que será apresentada na sequência.

Figura 9 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)



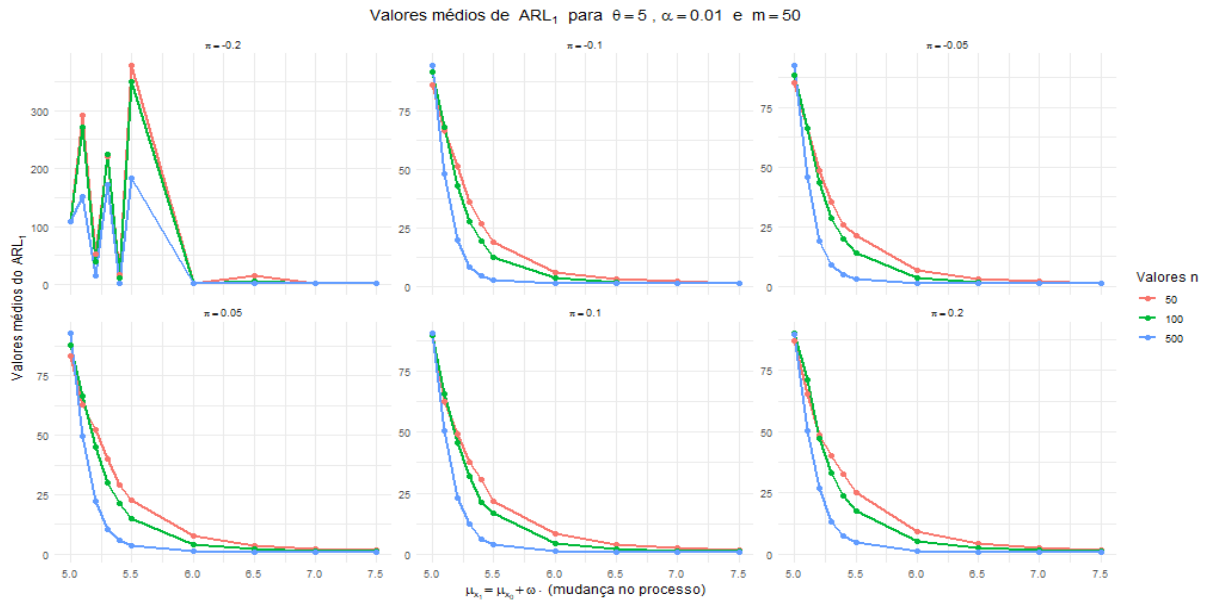
Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Analisando-se a Figura 9 para os valores de π que não correspondem a extremos negativos, observa-se um comportamento já esperado: as curvas de ARL_1 decrescem à medida que a magnitude da mudança na média (ω) aumenta, aproximando-se rapidamente do valor 1. Esse padrão é mais pronunciado para maiores tamanhos amostrais, especialmente $n = 500$, que apresenta valores de ARL_1 consistentemente mais baixos ao longo das simulações.

Particular atenção deve ser dada ao painel com $\pi = -0.2$, onde ainda se nota uma instabilidade nos valores médios de ARL_1 . Apesar de essa oscilação ser menos extrema que no caso com $\alpha = 0.01$, a presença de valores fora do padrão continua evidenciando a influência significativa que a escolha de π exerce na robustez do desempenho do gráfico de controle. Tal comportamento ressalta a necessidade de cautela na definição dos parâmetros do modelo GZMG em situações com grande proporção de zeros negativos.

A Figura 9 apresentada ilustra o comportamento dos valores médios de ARL_1 em função de diferentes deslocamentos na média do processo, para três valores distintos de tamanho amostral ($n = 50, 100, 500$) e variados valores do parâmetro π .

Figura 10 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 50$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Observa-se pela Figura 10 que, para os casos em que $\pi \in \{-0.1, -0.05, 0.05, 0.1, 0.2\}$, o comportamento das curvas segue o padrão esperado: o ARL_1 decresce monotonicamente à medida que μ_{x_1} se afasta de μ_{x_0} , indicando maior sensibilidade do gráfico à presença de mudanças mais pronunciadas. Além disso, verifica-se que amostras maiores ($n = 500$) resultam em tempos médios de detecção mais próximos de 1, evidenciando maior eficácia do gráfico neste cenário.

Entretanto, o painel correspondente a $\pi = -0.2$ revela um comportamento atípico e instável, sobretudo nas primeiras posições da série. As curvas exibem oscilações acentuadas com picos de ARL_1 superiores a 300, o que evidencia uma dificuldade na detecção de mudanças do processo quando ocorre excesso de zeros negativos no modelo GZMG. Esse fenômeno pode estar associado ao impacto que valores negativos de π exercem sobre a variância do processo, contribuindo para maior dispersão e reduzindo a sensibilidade do gráfico, mesmo diante de deslocamentos consideráveis na média. Tal aspecto requer atenção especial e pode justificar investigações adicionais sobre o comportamento das estatísticas de controle sob esse regime.

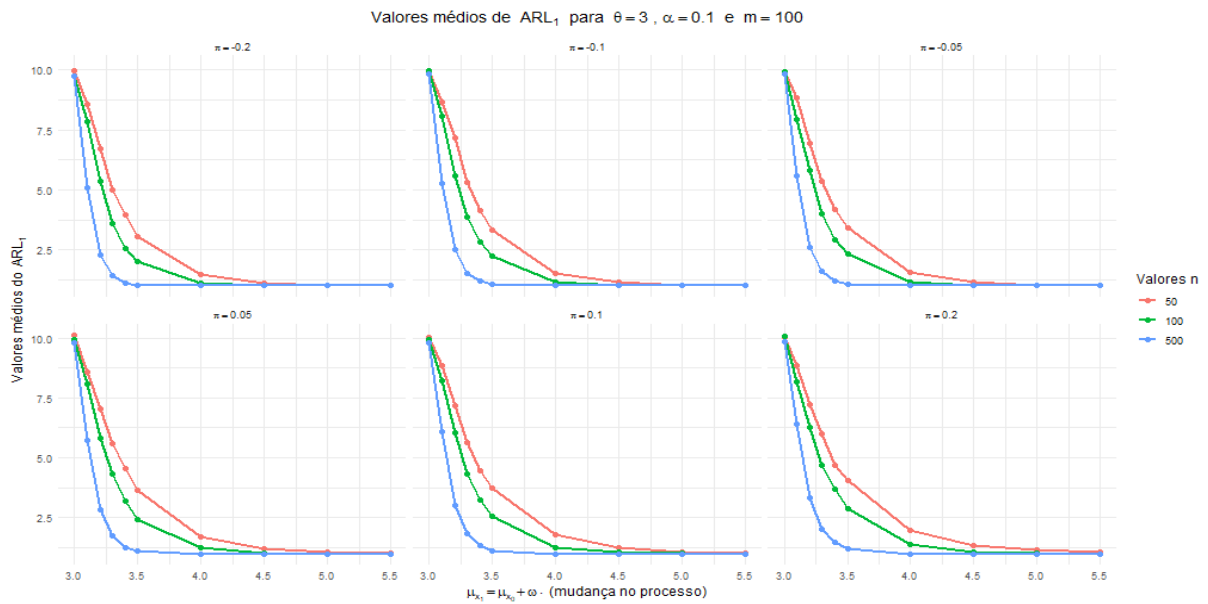
3.3.2 ARL fora de controle - $m = 100$, $\theta = \{3, 5\}$, $\alpha = 0.1$ e 0.01

Esta subseção apresenta uma análise descritiva dos valores médios do tempo médio até o alarme (Average Run Length fora de controle – ARL_1) para o caso em que o tamanho do histórico é fixado em $m = 100$. Serão avaliadas as combinações dos parâmetros $\theta = 3$ e $\theta = 5$, com duas probabilidades de alarme falso distintas: $\alpha = 0.1$ e $\alpha = 0.01$. Os gráficos a seguir ilustram o comportamento do ARL_1 em função de diferentes deslocamentos na média do processo, considerando também múltiplos tamanhos amostrais e variações na estrutura de zeros (π). Essa abordagem permite comparar o desempenho do gráfico de controle frente a diferentes condições de operação, fornecendo subsídios importantes para a compreensão de sua sensibilidade e robustez.

Análise dos valores médios de ARL_1 para $\theta = 3$

A Figura 11 apresenta os valores médios do ARL_1 para o caso em que $\theta = 3$, $\alpha = 0.1$ e $m = 100$. De modo geral, observa-se que todas as curvas apresentam comportamento decrescente, indicando que, à medida que o deslocamento na média do processo aumenta (ω), o tempo médio até o alarme se reduz significativamente. Este padrão é coerente com o esperado para um gráfico de controle eficiente, visto que maiores mudanças na média devem ser detectadas com maior rapidez.

Figura 11 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)



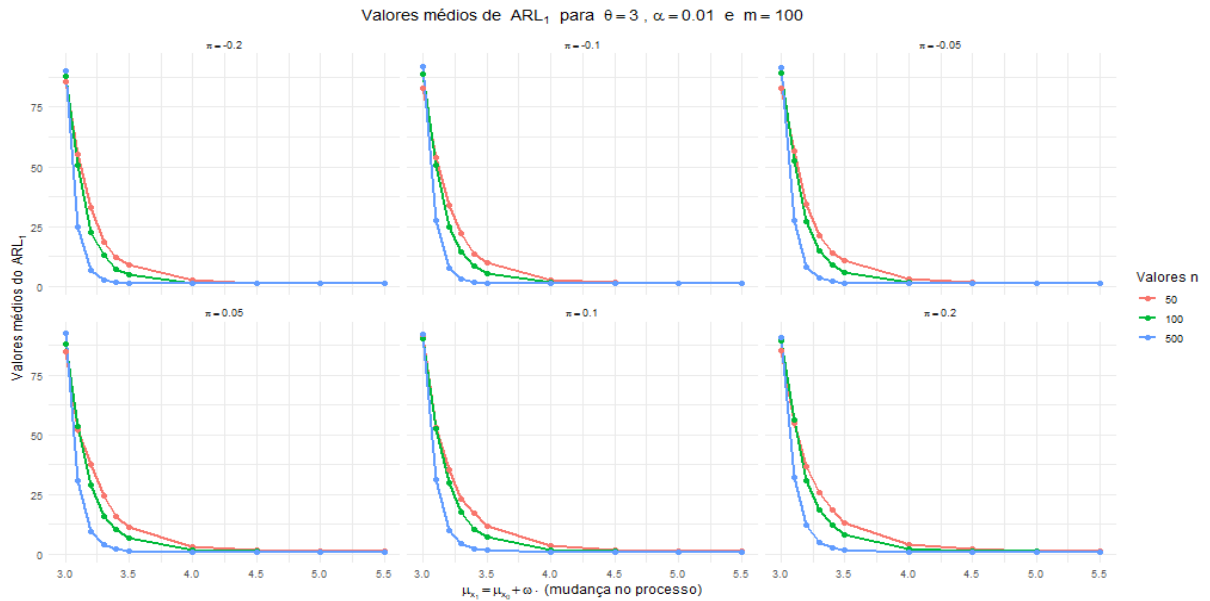
Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Além disso, verifica-se que quanto maior o tamanho amostral n , mais sensível se mostra o gráfico. Isso é evidenciado pelo fato de que, para $n = 500$, os valores de ARL_1 são consistentemente menores do que para $n = 100$ e $n = 50$, especialmente para deslocamentos pequenos. Esse resultado confirma o comportamento teórico de que amostras maiores aumentam o poder de detecção do gráfico.

Ademais, os diferentes valores de π impactam a sensibilidade do gráfico de forma sutil. Para valores negativos de π , observa-se uma leve tendência de elevação nos valores de ARL_1 nas primeiras unidades de deslocamento, o que sugere que a presença de zero-inflacionamento negativo pode dificultar a detecção imediata de pequenas mudanças. No entanto, essa diferença se dissipa à medida que ω cresce.

A Figura 12 apresenta os valores médios de ARL_1 para o caso em que $\theta = 3$, $\alpha = 0.01$ (isto é, probabilidade de alarme falso igual a 1%) e $m = 100$.

Figura 12 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

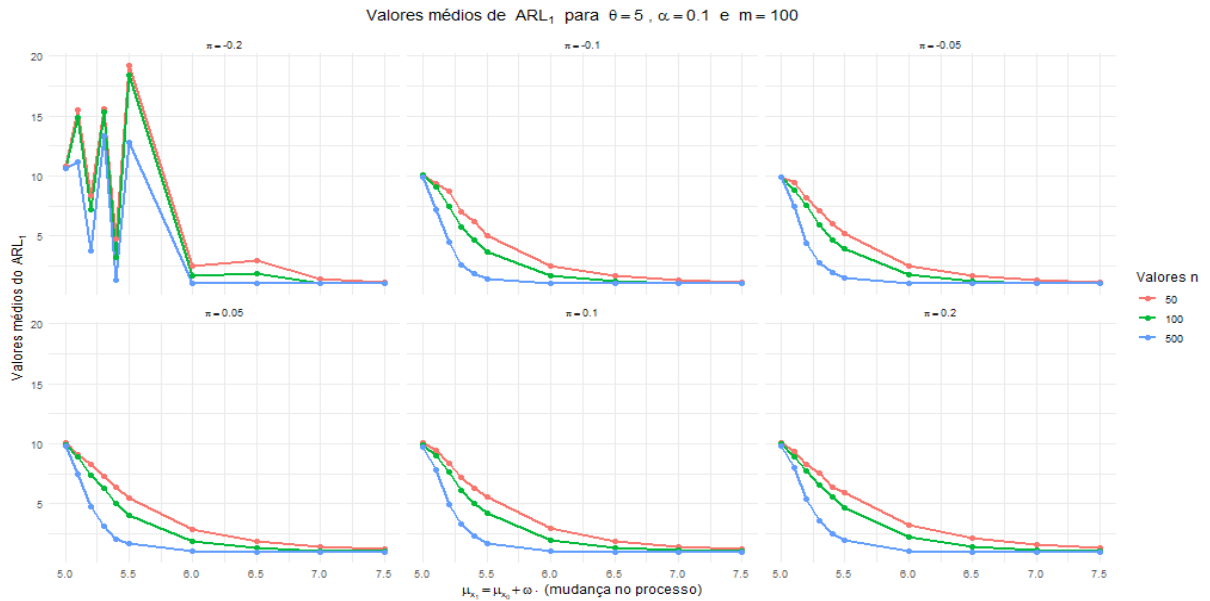
Analisando-se a Figura 12, pode-se destacar:

- **comportamento decrescente:** as curvas de ARL_1 decrescem rapidamente à medida que ocorre o aumento nos deslocamentos da média do processo (ω). Esse padrão confirma que o gráfico se torna mais eficiente na detecção de mudanças maiores, como esperado teoricamente.
- **influência do tamanho amostral n :** observa-se que maiores tamanhos amostrais proporcionam menor valor médio de ARL_1 , indicando maior sensibilidade do gráfico. O caso $n = 500$ apresenta os menores tempos médios de detecção, enquanto $n = 50$ é o mais lento para detectar mudanças pequenas.
- **efeito da inflação de zeros (π):** para $\pi < 0$, há um leve aumento nos valores de ARL_1 em comparação aos cenários com $\pi \geq 0$, principalmente para deslocamentos menores. Esse comportamento pode estar relacionado ao efeito de dispersão causada pela deflação de zeros, o que pode atenuar sinais iniciais de mudança.
- **convergência para $ARL_1 \approx 1$:** à medida que ω aumenta, todos os cenários convergem para valores próximos de 1, confirmando a capacidade do gráfico em sinalizar rapidamente quando a mudança no processo é significativa.

Análise dos valores médios de ARL_1 para $\theta = 5$

Com $m = 100$ e $\theta = 5$, os valores médios de ARL_1 foram novamente analisados para $\alpha = 0.1$, considerando diferentes valores de π e n . A Figura 13 resume os resultados para esta configuração.

Figura 13 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

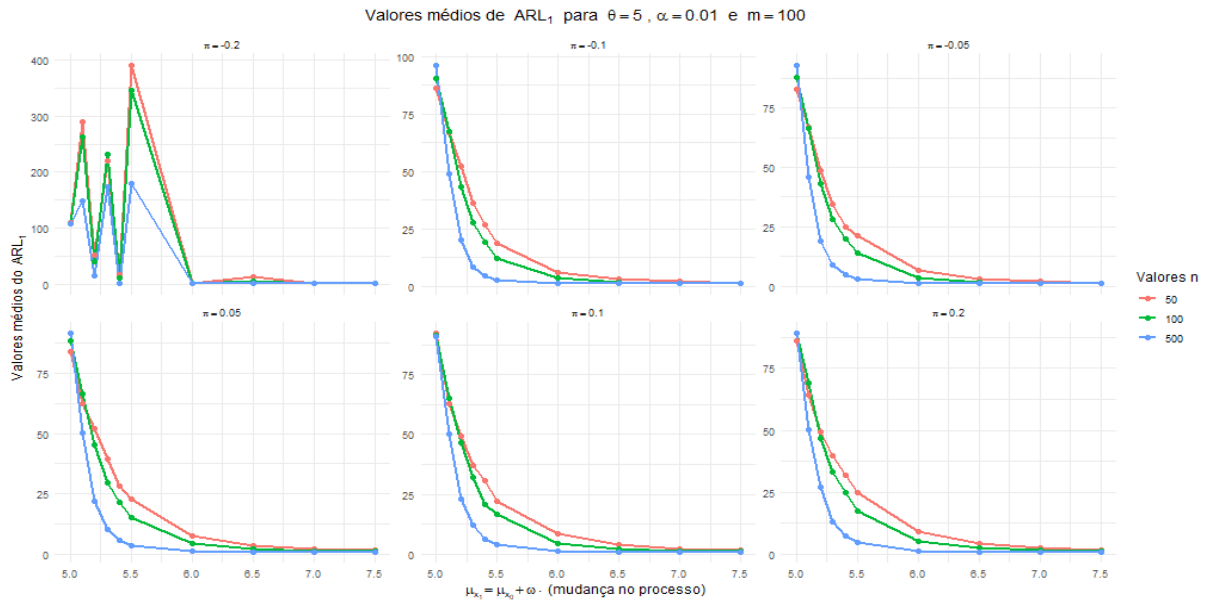
De maneira geral, o comportamento dos gráficos (Figura 13) é coerente com o esperado: à medida que o valor de ω aumenta (isto é, a mudança no processo torna-se mais pronunciada), os valores de ARL_1 diminuem, indicando maior sensibilidade do esquema de controle. Adicionalmente, observa-se que maiores tamanhos de amostra (n) contribuem para uma detecção mais rápida, resultando em menores valores de ARL_1 .

Todavia, destaca-se novamente o padrão atípico observado para $\pi = -0.2$. Nessa condição, ocorrem oscilações acentuadas e valores muito elevados de ARL_1 , principalmente para os menores valores de ω . Esse comportamento, já evidenciado anteriormente nos casos com $\theta = 3$, reforça que $\pi = -0.2$ compromete severamente a performance do esquema de monitoramento. A presença de picos abruptos e flutuações para pequenas mudanças no processo indica uma instabilidade nos tempos médios de detecção, o que inviabiliza o uso prático do método neste cenário.

Em comparação com os resultados obtidos para $\theta = 3$, nota-se que os valores de ARL_1 tendem a ser menores para $\theta = 5$, como era de se esperar, dado que mudanças mais intensas (maiores valores de θ) são mais rapidamente detectadas. Esse efeito é visível em todas as configurações de π e se manifesta de forma mais pronunciada nos cenários com $\pi \neq -0.2$.

A Figura 14 apresenta os valores médios de ARL_1 obtidos para $\theta = 5$, $\alpha = 0.01$ e $m = 100$. As curvas são organizadas conforme os valores de π e os tamanhos amostrais $n = \{50, 100, 500\}$.

Figura 14 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 100$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Como esperado, observa-se que a redução da probabilidade de alarme falso ($\alpha = 0.01$) eleva os valores de ARL_1 em comparação ao caso anterior com $\alpha = 0.1$. Essa elevação é mais pronunciada para pequenas mudanças no processo (valores baixos de ω), evidenciando o trade-off entre rigor na emissão de alarmes e agilidade na detecção.

Destaca-se mais uma vez o comportamento instável quando $\pi = -0.2$, onde ocorrem oscilações intensas nos valores de ARL_1 para pequenas mudanças no processo. Assim como nos casos anteriores, esse padrão se mantém problemático, apresentando valores exageradamente altos de ARL_1 e picos anômalos. Isso reforça que esse cenário compromete a eficiência do esquema de monitoramento, mesmo com maior intensidade da mudança ($\theta = 5$) e amostras maiores.

Comparando com os resultados para $\theta = 3$, verifica-se que o aumento de θ torna o esquema mais sensível, refletindo-se na redução de ARL_1 à medida que a mudança no processo se intensifica. No entanto, a diferença de desempenho entre os valores de n se mantém, com os maiores tamanhos amostrais permitindo uma detecção mais rápida e estável.

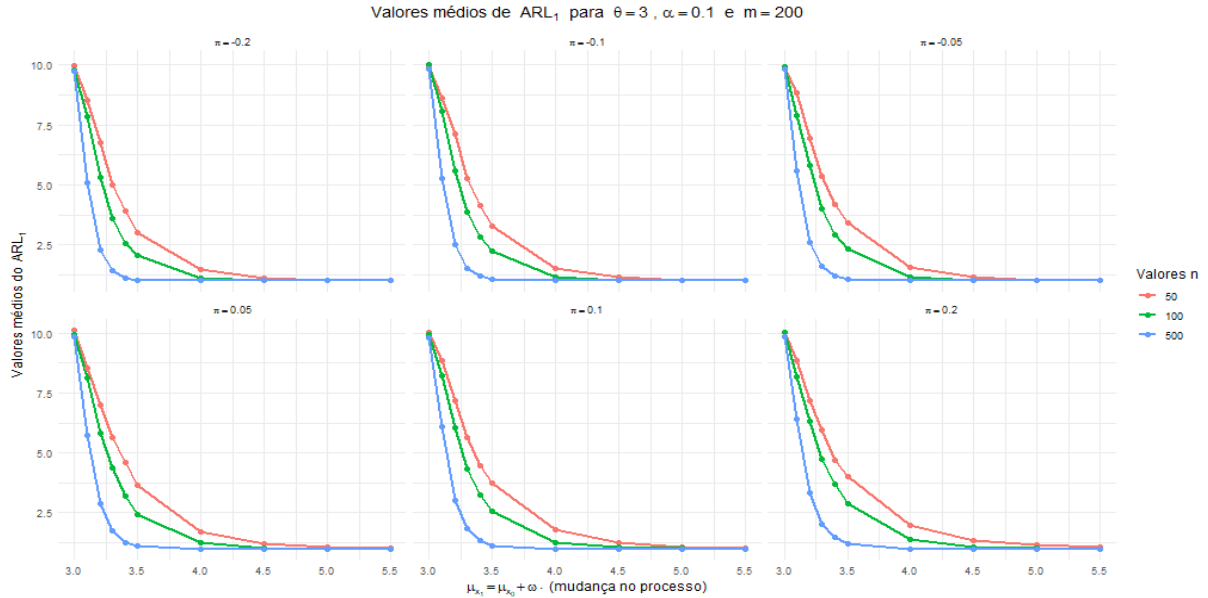
3.3.3 ARL fora de controle - $m = 200$, $\theta = \{3, 5\}$, $\alpha = 0.1$ e 0.01

Análise dos valores médios de ARL_1 para $\theta = 3$

Esta subseção apresenta uma análise descritiva dos valores médios do tempo médio até o alarme (ARL_1) obtidos por simulação, considerando diferentes configurações do tamanho amostral (n), do parâmetro de modificação de zeros (π) e da probabilidade de alarme falso (α), mantendo fixos os parâmetros do processo sob controle ($m = 200$ e $\theta = \{3, 5\}$). Os gráficos a seguir permitem avaliar o desempenho do gráfico de controle proposto frente a deslocamentos na média do processo, observando como o valor de ARL_1 varia em função de $\mu_{x_1} = \mu_{x_0} + \omega$, sendo este último o parâmetro que caracteriza a magnitude da mudança a ser detectada. As curvas obtidas ilustram o comportamento esperado dos gráficos de controle,

bem como os impactos diretos do tamanho da amostra e do nível de controle desejado sobre a sensibilidade do monitoramento.

Figura 15 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

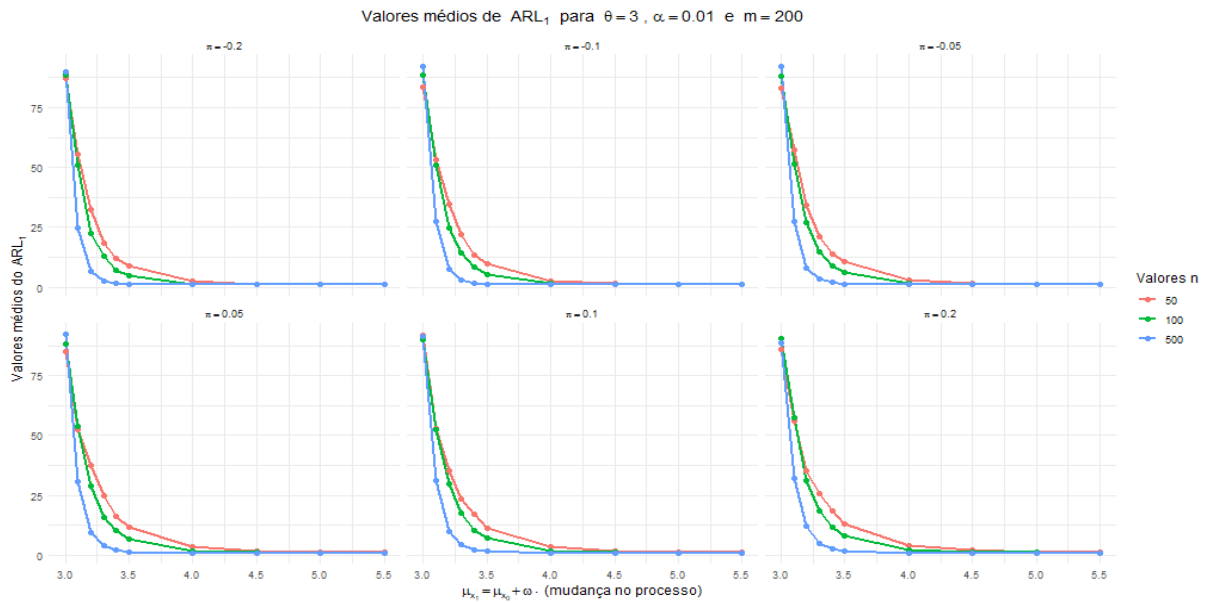
A Figura 15 apresenta os valores médios do ARL_1 em função dos deslocamentos na média do processo, representados por $\mu_{x_1} = \mu_{x_0} + \omega$, para diferentes tamanhos amostrais ($n = 50, 100, 500$) e distintos valores do parâmetro π , considerando $m = 200$, $\theta = 3.0$ e $\alpha = 0.1$. De forma geral, observa-se um comportamento monotonicamente decrescente das curvas de ARL_1 à medida que os valores de μ_{x_1} aumentam. Tal comportamento é compatível com a expectativa teórica: quanto maior a magnitude da mudança no processo (ou seja, quanto maior o valor de ω), mais rapidamente o gráfico de controle detecta essa mudança, reduzindo assim o tempo médio até o alarme (ARL_1). Ao comparar as curvas para diferentes tamanhos de amostra, evidencia-se que:

- para valores fixos de μ_{x_1} , o gráfico com $n = 500$ apresenta valores de ARL_1 sistematicamente mais próximos de 1, indicando maior sensibilidade à detecção de mudanças sutis no processo.
- o comportamento oposto é observado para $n = 50$, onde os valores de ARL_1 são mais elevados, sugerindo um tempo maior para identificação de alterações.
- o tamanho $n = 100$ assume posição intermediária, confirmando a tendência de que o aumento no tamanho amostral contribui significativamente para a melhora da eficiência do gráfico de controle.

A variação dos gráficos ao longo dos diferentes painéis (valores de π) mostra que, embora o efeito do parâmetro de modificação de zeros (π) seja relevante, a tendência decrescente das curvas permanece robusta. Há, no entanto, diferentes taxas de decaimento do ARL_1 dependendo do sinal e da magnitude de π , sendo perceptível que valores negativos de π tendem a reduzir ligeiramente a sensibilidade do gráfico comparados a valores positivos. Dito isso, o gráfico analisado evidencia que:

- o comportamento do ARL_1 segue a teoria esperada;
- a sensibilidade do gráfico melhora significativamente com o aumento de n ;
- o parâmetro π influencia o perfil do gráfico, porém sem alterar a tendência principal;
- o desempenho ótimo ($ARL_1 \approx 1$) é atingido de forma mais eficiente com grandes deslocamentos na média (ω) e maiores tamanhos amostrais.

Figura 16 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 16 apresenta os valores médios do ARL_1 em função dos deslocamentos na média do processo, representados por $\mu_{x_1} = \mu_{x_0} + \omega$, para diferentes tamanhos amostrais ($n = 50, 100, 500$) e distintos valores do parâmetro π , considerando $m = 200$, $\theta = 3.0$ e $\alpha = 0.01$. Verifica-se, de forma consistente, o comportamento monotonicamente decrescente das curvas de ARL_1 com o aumento dos valores de ω . Esse resultado está em conformidade com a teoria estatística dos gráficos de controle, na qual maiores deslocamentos na média favorecem a detecção rápida de mudanças no processo, refletida pela diminuição dos tempos médios até o alarme.

A avaliação comparativa entre os diferentes tamanhos de amostra revela que:

- para todos os valores de π e ω , observa-se que o gráfico com $n = 500$ apresenta os menores valores de ARL_1 , destacando-se pela maior sensibilidade à presença de alterações na média do processo.
- o gráfico com $n = 50$ é o que apresenta os maiores valores de ARL_1 para a maioria dos casos, sendo o mais lento a identificar mudanças, sobretudo para deslocamentos pequenos.
- o tamanho intermediário $n = 100$ apresenta desempenho compatível com sua posição, demonstrando melhora gradual na capacidade de detecção à medida que n aumenta.

Com isso, observa-se que os resultados corroboram a evidência empírica de que o aumento no tamanho amostral promove ganho substancial na eficácia do monitoramento. Em especial, nota-se que as curvas com $n = 500$ convergem rapidamente para valores próximos de 1, mesmo com deslocamentos relativamente pequenos, demonstrando eficiência elevada do gráfico de controle.

Em comparação com o cenário anterior de $\alpha = 0.1$ (vide Figura 15) nota-se um aumento global nos valores de ARL_1 , o que é esperado devido à adoção de limites de controle mais estreitos. Essa mudança torna o gráfico mais conservador, dificultando a geração de alarmes falsos, mas exigindo deslocamentos maiores para atingir valores de ARL_1 próximos de 1.

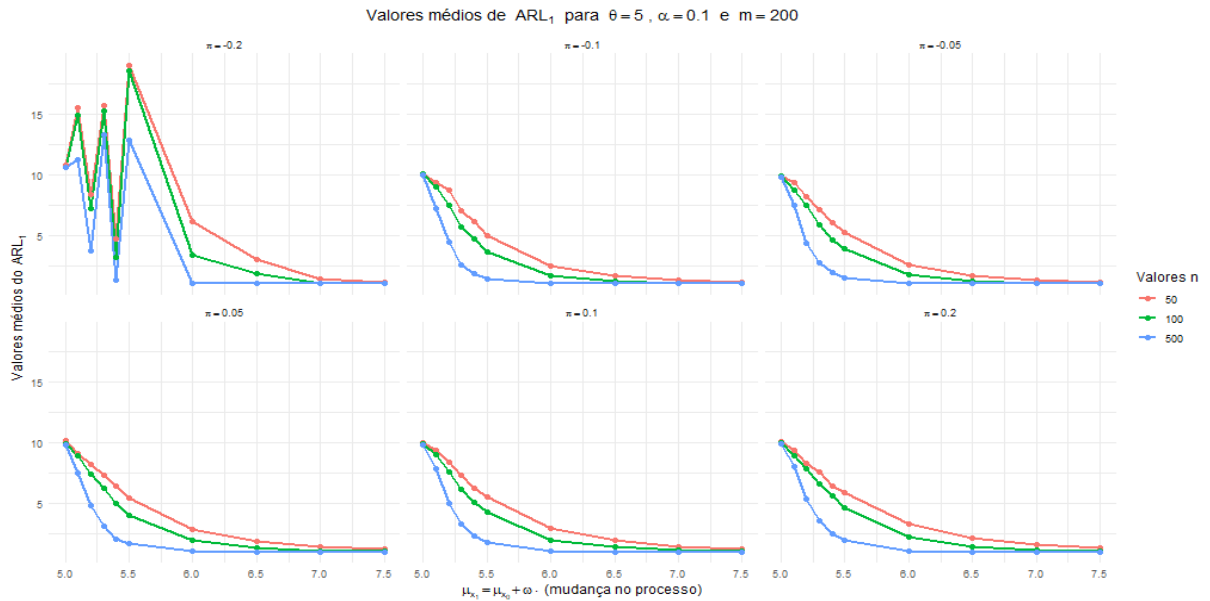
Embora a tendência decrescente das curvas se mantenha para todos os valores de π , a taxa de convergência do ARL_1 varia conforme o valor do parâmetro. Assim, percebe-se que, em geral, valores positivos de π favorecem detecções mais rápidas (curvas mais próximas do eixo x), ao passo que valores negativos estão associados a um leve retardo na performance. A partir dos resultados apresentados nesta figura, conclui-se que:

- o gráfico mantém sua conformidade com o esperado teoricamente, mesmo sob menor nível de significância;
- o aumento no tamanho amostral contribui significativamente para o ganho de sensibilidade do monitoramento;
- a escolha do valor de α representa um fator chave no balanceamento entre a rapidez de detecção e o controle de falsos alarmes;
- o parâmetro π exerce influência secundária, modulando a velocidade de convergência do ARL_1 sem alterar seu padrão fundamental.

Análise dos valores médios de ARL_1 para $\theta = 5$

Nesta configuração, na Figura 17, observa-se que os valores de ARL_1 reagem rapidamente às mudanças no processo, com reduções consistentes à medida que μ_2 se afasta de μ_0 . Para todos os valores de π , à exceção de $\pi = -0,2$, nota-se um comportamento monotônico decrescente dos valores médios de ARL_1 em função do aumento de $\omega = \mu_2 - \mu_0$.

Figura 17 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

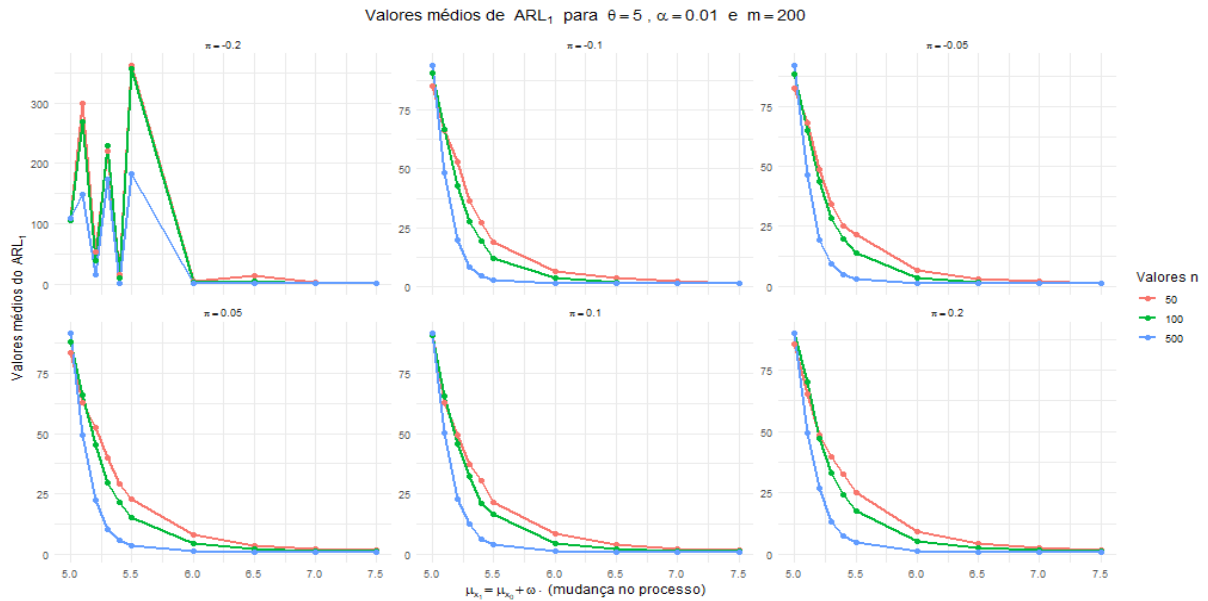
O caso de $\pi = -0.2$ volta a apresentar uma instabilidade no comportamento das curvas. Tal como analisado em cenários anteriores, essa condição negativa pode introduzir comportamento oscilatório nos tempos médios de detecção, com picos de ARL_1 em diferentes pontos de μ_2 . Esse fenômeno é provavelmente associado ao impacto da correlação entre observações no processo de monitoramento.

Além disso, é evidente que valores maiores de n proporcionam uma detecção mais rápida de mudanças, o que se reflete em curvas com menores valores médios de ARL_1 . Esse comportamento é consistente entre os diferentes valores de π , especialmente para $\pi \in \{-0.1, -0.05, 0.05, 0.1, 0.2\}$. Outro aspecto digno de nota é que, à medida que μ_2 se aproxima de 6, os valores de ARL_1 convergem rapidamente para valores próximos de 1, indicando eficácia quase imediata na detecção da mudança, independentemente dos parâmetros utilizados.

Em resumo, com $\theta = 5$ e $m = 200$, observa-se desempenho robusto do monitoramento para $\alpha = 0.1$, especialmente quando π não assume valores extremamente negativos. Tal como antes, o comportamento anômalo de $\pi = -0.2$ destaca a necessidade de cautela ao interpretar desempenhos sob correlações negativas fortes.

Diante disso, observa-se, na Figura 18, um padrão de desempenho coerente com os resultados anteriores, com reduções rápidas e progressivas nos valores de ARL_1 à medida que μ_2 se distancia de μ_0 . Esse comportamento indica que o esquema de monitoramento é eficiente na detecção de mudanças mesmo sob uma configuração mais conservadora com $\alpha = 0.01$.

Figura 18 – Os valores médios de ARL_1 versus os deslocamentos na média do processo para gráfico GZMG- u para $m = 200$ e diferentes valores de n ($\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Para valores de π próximos de zero ou positivos, a resposta do monitor é rápida e estável, com valores de ARL_1 que convergem rapidamente para valores próximos de 1. Isso confirma a robustez do método frente a correlações neutras ou positivas no processo.

Contudo, como já verificado em configurações anteriores, o caso de $\pi = -0.2$ apresenta novamente comportamento anômalo. As curvas neste caso exibem oscilações significativas com picos acima de 300, especialmente para valores de μ_2 próximos de 5.1 e 5.5. Tais oscilações revelam instabilidade no desempenho do monitor sob forte correlação negativa, comprometendo a confiabilidade na detecção de pequenas mudanças. Outro aspecto importante é a influência do tamanho amostral n nos valores de ARL_1 . Em todas as configurações analisadas, observa-se que maiores valores de n (como $n = 500$) resultam em menores tempos médios de detecção, mesmo com α reduzido, evidenciando a sensibilidade aprimorada do monitor para amostras maiores.

Portanto, mesmo sob uma política de controle mais rígida, com $\alpha = 0.01$, o desempenho do monitor é satisfatório para a maioria das configurações, exceto em cenários com correlação negativa elevada, em que o risco de alarmes excessivamente tardios pode comprometer a efetividade do monitoramento.

Conclusão geral integrando os casos $\theta = 3$ e $\theta = 5$

Os resultados obtidos ao longo dos diferentes experimentos com $\theta = 3$ e $\theta = 5$ evidenciam a eficácia do monitoramento proposto na detecção de mudanças no processo, considerando variações nos parâmetros n , m e π , além da probabilidade de alarme falso, α .

De forma geral, observa-se que maiores valores de n e menores níveis de significância α resultam em melhor desempenho (menores valores de ARL_1) para a maioria das configurações. Entretanto, um padrão recorrente de instabilidade se manifesta nos cenários com $\pi = -0.2$, em que os valores médios de ARL_1 aumentam drasticamente, indicando perda de eficiência e comprometimento do monitor.

A Tabela 12 sintetiza os maiores valores de ARL_1 observados nos cenários com $\pi = -0.2$, servindo como evidência da vulnerabilidade do esquema de monitoramento sob forte autocorrelação negativa.

Tabela 12 – Maiores valores médios de ARL_1 observados para $\pi = -0.2$

θ	α	m	n	μ_2	Maior ARL_1
3	0.1	100	500	3.1	121.634
3	0.01	200	100	3.1	108.770
5	0.1	200	50	5.5	362.805
5	0.01	200	100	5.5	356.531

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Esses resultados reforçam que, embora o monitoramento se comporte de forma satisfatória em diversos cenários, cuidados devem ser tomados quando a autocorrelação é negativa, principalmente em processos com mudanças pequenas e discretas, pois o risco de tempos de detecção excessivamente longos aumenta consideravelmente. Para aplicações práticas, recomenda-se considerar medidas adicionais de robustez para o monitor nos casos em que se suspeita da presença de forte autocorrelação negativa nos dados.

A Tabela 13 apresenta os valores médios, com os respectivos desvios padrão, de ARL_1 para o gráfico GZMG, considerando o cenário fixo com $m = 50$ e $\mu = 3$ e 5. Os resultados são provenientes de 1.000 simulações de Monte Carlo com $m^* = 5.000$ amostras em cada simulação, e refletem o comportamento do gráfico em condição fora de controle, isto é, sua capacidade de detectar alterações no processo. As combinações avaliadas abrangem diferentes valores para os parâmetros θ (persistência temporal), π (nível de inflação ou deflação de zeros), α (nível de significância) e tamanhos de amostra n (50, 100 e 500). A disposição dos dados permite uma análise abrangente do desempenho do gráfico frente a distintos cenários operacionais.

Tabela 13 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	3.0	86.974	11.387	84.206	11.319	85.236	11.552	84.322	11.785	90.858	12.781	87.501	12.284
100	3.0	86.645	11.994	89.512	11.765	87.472	11.703	87.825	11.789	89.314	12.549	89.175	12.155
500	3.0	89.202	11.119	92.559	12.990	91.926	11.886	92.788	13.110	89.765	12.319	90.006	12.327
50	3.1	55.623	5.399	53.188	5.584	55.539	5.546	52.564	5.603	53.299	5.649	56.235	5.850
100	3.1	50.579	5.161	51.432	5.274	52.790	5.686	53.260	5.837	52.352	5.429	57.945	5.950
500	3.1	24.958	1.663	27.678	2.047	27.458	1.884	30.773	2.302	31.378	2.452	32.284	2.579
50	3.2	32.729	2.600	33.850	2.869	34.250	2.704	37.361	3.260	35.427	2.870	35.480	2.900
100	3.2	22.576	1.574	24.878	1.713	27.276	1.963	28.747	2.064	29.399	2.269	31.484	2.474
500	3.2	6.601	0.212	7.651	0.270	8.007	0.306	9.522	0.390	10.095	0.433	12.010	0.595
50	3.3	18.576	1.086	21.839	1.385	21.516	1.366	24.649	1.710	23.366	1.609	25.569	1.791
100	3.3	12.737	0.605	14.511	0.772	14.689	0.777	15.959	0.868	17.665	0.981	18.489	1.163
500	3.3	2.675	0.050	3.158	0.065	3.396	0.076	3.906	0.093	4.559	0.122	4.979	0.142
50	3.4	12.023	0.575	13.609	0.676	14.058	0.740	16.088	0.897	17.109	0.947	18.623	1.140
100	3.4	7.299	0.246	8.303	0.324	9.147	0.371	10.123	0.418	10.162	0.472	11.801	0.548
500	3.4	1.569	0.016	1.753	0.022	1.907	0.025	2.178	0.033	2.339	0.038	2.740	0.049
50	3.5	8.917	0.361	9.814	0.413	10.553	0.471	11.509	0.533	11.259	0.528	13.108	0.627
100	3.5	4.915	0.137	5.477	0.174	5.979	0.185	6.567	0.222	7.293	0.260	7.915	0.288
500	3.5	1.187	0.007	1.278	0.010	1.336	0.011	1.503	0.015	1.570	0.017	1.823	0.023
50	4.0	2.452	0.041	2.615	0.048	2.891	0.057	3.346	0.074	3.613	0.081	4.028	0.105
100	4.0	1.403	0.012	1.535	0.016	1.620	0.018	1.830	0.023	1.945	0.028	2.199	0.034
500	4.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000	1.002	0.001	1.004	0.001	1.011	0.002
50	4.5	1.371	0.012	1.474	0.014	1.538	0.016	1.716	0.019	1.806	0.023	2.054	0.028
100	4.5	1.043	0.003	1.075	0.004	1.092	0.005	1.157	0.006	1.190	0.007	1.291	0.010
500	4.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	5.0	1.083	0.005	1.139	0.006	1.167	0.007	1.250	0.009	1.307	0.010	1.422	0.013
100	5.0	1.002	0.001	1.007	0.001	1.011	0.002	1.024	0.002	1.040	0.003	1.072	0.004
500	5.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	5.5	1.036	0.003	1.037	0.003	1.051	0.003	1.089	0.005	1.118	0.005	1.178	0.007
100	5.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000	1.004	0.001	1.006	0.001	1.016	0.002
500	5.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

De forma geral, a Tabela 13 apresenta os valores médios ($Md.$) e o desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 para o gráfico de controle GZMG- u com $m = 50$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$, considerando diferentes valores de π e variações no parâmetro μ . Observa-se que, para μ próximo ao valor nominal, os valores de ARL_1 são mais elevados, especialmente para valores negativos de π com maior magnitude, indicando menor sensibilidade à detecção de mudanças. À medida que μ se afasta do valor de referência, ARL_1 decresce rapidamente, refletindo maior capacidade de detecção do gráfico. O efeito do tamanho amostral ($\bar{n}$) é consistente: valores maiores de $\bar{n}$ tendem a reduzir ARL_1 e também o seu desvio-padrão, tornando o monitoramento mais estável.

Outro aspecto relevante refere-se ao impacto do parâmetro π . Em cenários de inflação de zeros (quando $\pi < 0$), os valores de ARL_1 tendem a ser mais elevados, indicando maior dificuldade do gráfico em identificar mudanças sob essa configuração. Por outro lado, nos casos de deflação de zeros (quando $\pi > 0$), os valores de ARL_1 são geralmente menores, o que sugere uma maior facilidade de detecção por parte do gráfico. Também se percebe a influência do parâmetro θ . De modo geral, valores mais baixos de θ (como $\theta = 3$) estão associados a um desempenho ligeiramente melhor em alguns cenários, refletido em menores valores de ARL_1 . Isso pode indicar que, em certas situações, a presença de dependência serial positiva no processo favorece a detecção de alterações.

Por fim, destaca-se que os desvios padrão apresentados são, em sua maioria, baixos, especialmente nos casos com maiores tamanhos de amostra, o que demonstra consistência e estabilidade nos resultados obtidos por meio das simulações. Sendo assim, importa ressaltar que esta análise se refere exclusivamente ao cenário com $m = 50$ e $\mu = 3$. Esses comportamentos são observados analogamente para

diferentes configurações desses parâmetros, conforme apresentados ao longo da construção das Tabelas 14, independentemente dos valores de m , n (ou $\bar{n}$), μ e α .

Tabela 14 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	3.0	9.974	0.379	9.967	0.432	9.936	0.422	10.104	0.426	10.029	0.418	10.089	0.418
100	3.0	9.735	0.418	10.003	0.418	9.904	0.437	9.928	0.426	9.931	0.421	10.027	0.421
500	3.0	9.758	0.426	9.838	0.418	9.815	0.421	9.825	0.423	9.777	0.409	9.848	0.396
50	3.1	8.581	0.312	8.674	0.326	8.842	0.350	8.552	0.342	8.865	0.373	8.821	0.351
100	3.1	7.836	0.299	8.087	0.307	7.924	0.289	8.117	0.304	8.203	0.308	8.175	0.304
500	3.1	5.066	0.148	5.266	0.155	5.582	0.168	5.733	0.179	6.098	0.202	6.411	0.207
50	3.2	6.690	0.221	7.141	0.236	6.934	0.238	7.009	0.255	7.166	0.245	7.220	0.252
100	3.2	5.703	0.179	6.151	0.189	5.981	0.185	6.182	0.196	6.458	0.199	6.628	0.206
500	3.2	3.162	0.066	3.546	0.074	3.797	0.082	4.157	0.091	4.592	0.104	4.949	0.114
50	3.3	5.225	0.170	5.843	0.189	5.749	0.179	6.144	0.194	6.427	0.207	6.807	0.215
100	3.3	4.358	0.134	4.822	0.154	4.898	0.155	5.266	0.164	5.728	0.178	6.053	0.197
500	3.3	2.278	0.044	2.668	0.051	2.897	0.062	3.286	0.070	3.888	0.090	4.294	0.099
50	3.4	4.198	0.139	4.757	0.160	4.889	0.164	5.292	0.179	5.734	0.193	6.172	0.211
100	3.4	3.452	0.115	3.957	0.135	4.099	0.138	4.517	0.154	5.057	0.174	5.513	0.186
500	3.4	1.944	0.037	2.296	0.045	2.540	0.052	2.918	0.063	3.549	0.083	3.989	0.095
50	3.5	3.516	0.118	3.954	0.136	4.118	0.150	4.535	0.165	5.036	0.181	5.515	0.197
100	3.5	2.953	0.096	3.413	0.119	3.586	0.130	4.041	0.146	4.616	0.169	5.083	0.189
500	3.5	1.743	0.032	2.065	0.042	2.332	0.050	2.760	0.062	3.384	0.083	3.877	0.097
50	4.0	2.430	0.072	2.900	0.093	3.112	0.106	3.666	0.128	4.351	0.154	4.985	0.173
100	4.0	2.121	0.065	2.507	0.084	2.745	0.093	3.243	0.112	3.943	0.139	4.687	0.162
500	4.0	1.412	0.020	1.649	0.027	1.905	0.034	2.465	0.056	3.090	0.078	3.893	0.108
50	4.5	1.927	0.053	2.244	0.070	2.489	0.084	3.068	0.112	3.905	0.148	4.640	0.176
100	4.5	1.748	0.045	2.015	0.060	2.308	0.074	2.853	0.101	3.670	0.142	4.479	0.175
500	4.5	1.334	0.021	1.594	0.034	1.840	0.044	2.362	0.067	3.050	0.100	3.845	0.133
50	5.0	1.665	0.047	1.951	0.065	2.272	0.083	2.813	0.110	3.696	0.150	4.623	0.189
100	5.0	1.519	0.040	1.828	0.060	2.133	0.077	2.686	0.104	3.603	0.150	4.545	0.193
500	5.0	1.234	0.023	1.505	0.038	1.783	0.053	2.368	0.086	3.232	0.134	4.165	0.177

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Tabela 14 sintetiza os valores médios ($Md.$) e os desvios-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$, em diferentes combinações de $\bar{n}$, μ e π . Observa-se que, quando μ está próximo do valor de referência, ARL_1 situa-se em torno de 10, refletindo a probabilidade de alarme falso $\alpha = 0.1$. À medida que μ se afasta do alvo, ARL_1 decresce monotonicamente e de forma acelerada, alcançando valores próximos de 1 para deslocamentos maiores, o que indica maior rapidez de detecção. O aumento de $\bar{n}$ reduz sistematicamente tanto o $Md. ARL_1$ quanto o $Sd. ARL_1$, resultando em desempenho mais sensível e estável (menor variabilidade entre réplicas). Em relação a π , as diferenças entre cenários são modestas para pequenos deslocamentos de μ , mas tornam-se mais visíveis à medida que o deslocamento cresce, com configurações menos inflacionadas de zeros apresentando leve vantagem (menores ARL_1) na detecção. Ainda assim, o efeito de $\bar{n}$ permanece dominante sobre o de π em termos de ganho de sensibilidade e redução de variabilidade.

Tabela 15 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	5.0	109.077	16.597	86.141	11.723	85.352	10.633	83.494	11.193	90.601	12.143	87.255	11.673
100	5.0	107.633	16.171	91.734	12.447	88.350	12.124	88.061	11.406	89.429	11.330	90.276	12.149
500	5.0	109.070	15.158	94.662	14.559	92.750	14.095	93.046	12.351	90.574	12.346	89.812	12.011
50	5.1	291.638	80.039	66.501	7.778	66.162	7.422	62.603	6.856	62.715	6.883	65.337	7.366
100	5.1	271.062	79.543	67.918	8.069	66.117	7.957	66.262	7.420	65.709	7.733	71.057	8.858
500	5.1	150.644	28.970	48.189	4.569	45.955	4.127	49.797	5.154	50.448	5.538	50.255	4.834
50	5.2	53.024	5.280	51.316	5.281	48.437	4.622	52.528	5.371	49.359	5.042	48.537	4.836
100	5.2	40.176	3.490	42.988	3.907	43.565	4.153	45.049	4.309	45.870	4.571	47.276	4.747
500	5.2	15.574	0.872	19.729	1.221	19.065	1.138	22.160	1.557	23.045	1.499	26.705	1.995
50	5.3	220.400	48.230	36.019	3.099	35.087	2.959	40.116	3.791	37.495	3.124	40.169	3.667
100	5.3	225.265	49.401	27.812	2.037	28.405	2.104	29.845	2.312	32.103	2.466	33.076	2.685
500	5.3	172.290	34.101	8.352	0.307	9.154	0.383	10.388	0.486	12.364	0.592	13.044	0.626
50	5.4	17.220	0.964	26.888	2.010	25.534	1.655	28.881	2.264	30.614	2.505	32.866	2.587
100	5.4	10.872	0.481	19.380	1.235	19.924	1.192	21.421	1.360	21.043	1.369	23.957	1.685
500	5.4	2.204	0.033	4.635	0.133	4.990	0.134	5.857	0.182	6.320	0.209	7.502	0.267
50	5.5	378.504	110.795	18.754	1.153	21.187	1.345	22.718	1.521	21.701	1.356	24.964	1.664
100	5.5	350.364	98.238	12.185	0.595	14.024	0.713	15.038	0.801	16.757	0.937	17.547	1.009
500	5.5	182.448	36.019	2.610	0.046	2.969	0.057	3.635	0.084	3.846	0.094	4.764	0.136
50	6.0	2.483	0.044	5.977	0.189	6.716	0.228	7.786	0.294	8.440	0.315	9.291	0.376
100	6.0	1.673	0.019	3.366	0.075	3.600	0.081	4.234	0.107	4.577	0.122	5.231	0.145
500	6.0	1.008	0.001	1.058	0.003	1.086	0.004	1.149	0.006	1.191	0.007	1.322	0.011
50	6.5	14.201	0.745	3.307	0.067	3.137	0.064	3.638	0.081	3.886	0.096	4.491	0.114
100	6.5	5.498	0.171	1.787	0.023	1.723	0.020	2.009	0.029	2.118	0.030	2.490	0.044
500	6.5	1.066	0.004	1.001	0.000	1.001	0.000	1.004	0.001	1.007	0.001	1.022	0.002
50	7.0	2.768	0.050	1.959	0.027	1.927	0.026	2.210	0.035	2.389	0.037	2.725	0.049
100	7.0	1.422	0.014	1.207	0.008	1.229	0.008	1.332	0.011	1.443	0.013	1.594	0.017
500	7.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000
50	7.5	1.632	0.019	1.453	0.014	1.441	0.013	1.605	0.017	1.714	0.021	1.906	0.026
100	7.5	1.086	0.004	1.061	0.004	1.068	0.004	1.121	0.006	1.153	0.006	1.245	0.009
500	7.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Tabela 15 resume os valores de $Md.$ e $Sd.$ de ARL_1 do gráfico GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$, em diferentes combinações de $\bar{n}$, μ e π . Quando μ permanece muito próximo de 5, observam-se valores elevados de ARL_1 (em especial para $\pi < 0$), compatíveis com a baixa probabilidade de alarme falso ($\alpha = 0.01$) e, portanto, com maior tempo médio até o sinal sob pequenas mudanças. À medida que μ se afasta do alvo, ARL_1 decresce de modo acelerado e tende rapidamente a valores próximos de 1, evidenciando maior rapidez de detecção. Esse comportamento é mais pronunciado para amostras maiores, pois o aumento de $\bar{n}$ reduz sistematicamente tanto o $Md. ARL_1$ quanto o $Sd. ARL_1$, estabilizando o desempenho. A influência de π é relevante nos pequenos deslocamentos: para $\pi = -0.2$ surgem patamares muito altos e maior variabilidade (p. ex., em $\mu = 5.1$ e 5.3), sinalizando menor sensibilidade nessa configuração. Por outro lado, para $\pi \geq 0$ as curvas apresentam decréscimo mais regular. Em deslocamentos moderados a grandes (e.g., $\mu \geq 6$), as diferenças entre valores de π tornam-se menos marcantes, e o efeito de $\bar{n}$ passa a dominar, com $ARL_1 \approx 1$ sobretudo para $\bar{n} = 500$. Em síntese, para $\alpha = 0.01$, a combinação de $\bar{n}$ elevado e π não muito negativo proporciona o melhor compromisso entre sensibilidade (menor ARL_1 fora de controle) e estabilidade (menor $Sd.$).

Tabela 16 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	5.0	10.766	0.496	10.156	0.421	9.949	0.431	10.142	0.428	10.010	0.421	10.067	0.453
100	5.0	10.595	0.453	10.052	0.422	9.946	0.404	9.929	0.408	9.932	0.421	10.017	0.440
500	5.0	10.635	0.454	9.947	0.420	9.846	0.427	9.824	0.402	9.790	0.402	9.865	0.411
50	5.1	15.503	0.894	9.415	0.383	9.359	0.368	9.145	0.378	9.471	0.417	9.399	0.373
100	5.1	14.975	0.780	9.052	0.341	8.811	0.353	8.924	0.391	8.982	0.348	8.877	0.341
500	5.1	11.312	0.520	7.266	0.250	7.438	0.270	7.450	0.275	7.821	0.288	8.022	0.299
50	5.2	8.309	0.329	8.721	0.329	8.189	0.285	8.272	0.297	8.337	0.326	8.315	0.327
100	5.2	7.202	0.236	7.462	0.265	7.508	0.259	7.509	0.261	7.417	0.267	4.386	0.114
500	5.2	3.707	0.093	4.635	0.133	4.990	0.134	5.857	0.182	6.320	0.209	7.502	0.267
50	5.3	15.736	0.878	3.009	0.060	1.671	0.020	1.693	0.020	1.294	0.010	1.124	0.006
100	5.3	15.248	0.799	1.832	0.025	1.206	0.008	1.201	0.008	1.051	0.003	1.012	0.002
500	5.3	13.321	0.630	1.005	0.001	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	5.4	4.735	0.136	1.417	0.013	1.293	0.010	1.384	0.013	1.200	0.007	1.138	0.006
100	5.4	3.161	0.064	1.078	0.004	1.051	0.003	1.092	0.005	1.025	0.002	1.009	0.001
500	5.4	1.288	0.010	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	5.5	19.054	1.167	1.633	0.018	1.451	0.014	1.607	0.017	1.224	0.008	1.200	0.007
100	5.5	18.572	1.134	1.085	0.004	1.060	0.004	1.153	0.006	1.037	0.003	1.025	0.002
500	5.5	12.827	0.614	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	6.0	6.113	0.202	2.718	0.051	1.589	0.017	2.210	0.035	1.455	0.014	1.329	0.011
100	6.0	3.371	0.074	1.595	0.017	1.170	0.007	1.332	0.011	1.116	0.005	1.066	0.004
500	6.0	1.059	0.004	1.001	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	6.5	2.985	0.059	1.907	0.026	1.329	0.011	1.605	0.017	1.224	0.008	1.200	0.007
100	6.5	1.826	0.024	1.244	0.009	1.066	0.004	1.121	0.006	1.037	0.003	1.025	0.002
500	6.5	1.005	0.001	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	7.0	1.417	0.013	1.329	0.011	1.589	0.017	2.210	0.035	1.455	0.014	1.329	0.011
100	7.0	1.079	0.004	1.170	0.007	1.170	0.007	1.332	0.011	1.116	0.005	1.066	0.004
500	7.0	1.000	0.000	1.001	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	7.5	1.138	0.006	1.200	0.007	1.329	0.011	1.605	0.017	1.224	0.008	1.200	0.007
100	7.5	1.011	0.002	1.152	0.006	1.066	0.004	1.121	0.006	1.037	0.003	1.025	0.002
500	7.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Tabela 16 apresenta os valores de $Md.$ e $Sd.$ de ARL_1 do gráfico GZMG- u para $m = 50$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$, em diferentes combinações de $\bar{n}$, μ e π . Quando μ permanece próximo do alvo ($\mu \approx 5$), observa-se $ARL_1 \approx 10$, coerente com a probabilidade de alarme falso $\alpha = 0.1$. À medida que μ se afasta do valor de referência, ARL_1 decresce de forma monotônica e acelerada em direção a 1, indicando maior rapidez de detecção. O efeito de $\bar{n}$ é nítido: amostras maiores reduzem simultaneamente o $Md.$ ARL_1 e o $Sd.$, conferindo maior sensibilidade e menor variabilidade entre réplicas (com convergência mais rápida para $ARL_1 \approx 1$ quando $\bar{n} = 500$). A influência de π se manifesta sobretudo para pequenos e moderados deslocamentos: configurações com $\pi < 0$ (em particular $\pi = -0.2$) tendem a produzir ARL_1 ligeiramente mais altos e maior dispersão, ao passo que $\pi \geq 0$ apresenta declínio mais regular. Para deslocamentos maiores (e.g., $\mu \geq 6$), as diferenças entre valores de π tornam-se secundárias frente ao ganho promovido por $\bar{n}$.

Tabela 17 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	3.0	85.828	11.914	83.031	10.747	83.011	11.002	84.605	11.426	90.948	12.953	85.213	11.915
100	3.0	88.122	11.791	88.607	11.333	89.294	12.667	88.129	11.155	90.039	13.122	89.307	12.192
500	3.0	90.328	13.361	92.160	12.941	91.746	12.650	92.645	13.028	92.103	13.584	90.528	12.694
50	3.1	55.335	5.784	53.863	5.492	56.762	6.203	52.315	5.457	52.938	5.634	55.043	6.024
100	3.1	50.730	5.247	50.878	4.987	52.597	5.347	53.581	5.463	52.363	5.201	56.224	5.905
500	3.1	24.877	1.680	27.719	2.069	27.397	1.869	30.727	2.288	31.272	2.443	32.217	2.565
50	3.2	32.722	2.608	33.627	2.845	34.180	2.702	36.850	3.209	35.349	2.892	35.285	2.914
100	3.2	22.678	1.585	24.620	1.702	27.214	1.988	28.549	2.062	29.166	2.246	31.307	2.459
500	3.2	6.635	0.213	7.641	0.271	7.981	0.305	9.493	0.393	10.062	0.436	11.969	0.593
50	3.3	18.559	1.099	21.774	1.389	21.489	1.379	24.603	1.708	23.349	1.607	25.542	1.792
100	3.3	12.721	0.612	14.434	0.784	14.612	0.778	15.895	0.872	17.641	0.992	18.446	1.168
500	3.3	2.680	0.049	3.157	0.064	3.385	0.075	3.896	0.093	4.570	0.123	4.983	0.143
50	3.4	12.007	0.581	13.569	0.674	14.028	0.736	16.068	0.908	17.110	0.948	18.607	1.132
100	3.4	7.321	0.248	8.291	0.318	9.131	0.374	10.109	0.418	10.154	0.470	11.782	0.546
500	3.4	1.564	0.017	1.740	0.021	1.899	0.024	2.165	0.033	2.323	0.038	2.729	0.049
50	3.5	8.928	0.370	9.759	0.418	10.492	0.468	11.480	0.532	11.231	0.522	13.077	0.620
100	3.5	4.905	0.140	5.474	0.177	5.978	0.186	6.549	0.225	7.269	0.259	7.915	0.288
500	3.5	1.184	0.007	1.279	0.010	1.333	0.011	1.501	0.015	1.570	0.017	1.822	0.023
50	4.0	2.445	0.040	2.602	0.047	2.877	0.057	3.332	0.074	3.610	0.081	4.026	0.104
100	4.0	1.408	0.012	1.542	0.015	1.627	0.017	1.838	0.022	1.952	0.027	2.206	0.033
500	4.0	1.000	0.000	1.001	0.000	1.001	0.000	1.002	0.001	1.004	0.001	1.011	0.002
50	4.5	1.368	0.011	1.470	0.014	1.533	0.016	1.713	0.019	1.804	0.023	2.052	0.028
100	4.5	1.043	0.003	1.074	0.004	1.093	0.005	1.158	0.006	1.189	0.007	1.291	0.010
500	4.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	5.0	1.083	0.005	1.138	0.006	1.167	0.007	1.253	0.009	1.301	0.010	1.422	0.012
100	5.0	1.002	0.001	1.007	0.001	1.011	0.002	1.024	0.002	1.039	0.003	1.072	0.004
500	5.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	5.5	1.036	0.003	1.038	0.003	1.051	0.003	1.090	0.005	1.119	0.006	1.178	0.007
100	5.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000	1.004	0.001	1.006	0.001	1.015	0.002
500	5.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Tabela 17 apresenta os valores médios ($Md.$) e os respectivos desvios-padrão ($Sd.$) de ARL_1 obtidos para o gráfico de controle GZMG- u , considerando $m = 100$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$, para diferentes tamanhos médios de amostra $\bar{n}$ e valores de π . Observa-se que, à medida que a mudança na média do processo μ aumenta, os valores médios de ARL_1 decrescem progressivamente, convergindo rapidamente para valores próximos de 1, comportamento esperado para situações de maior afastamento da média sob controle. Nota-se também que tamanhos médios de amostra maiores proporcionam uma detecção mais rápida das mudanças, evidenciada pela redução mais acentuada de ARL_1 quando $\bar{n}$ passa de 50 para 500. Além disso, valores negativos de π tendem a produzir ARL_1 ligeiramente mais elevados para pequenas mudanças em μ , enquanto valores positivos de π mostram respostas mais sensíveis nessas mesmas condições.

Tabela 18 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	3.0	9.977	0.432	9.968	0.434	9.941	0.454	10.127	0.426	10.033	0.434	10.011	0.412
100	3.0	9.739	0.425	9.970	0.418	9.945	0.435	9.928	0.424	9.919	0.439	10.074	0.423
500	3.0	9.763	0.392	9.856	0.422	9.854	0.390	9.820	0.408	9.806	0.422	9.855	0.403
50	3.1	8.563	0.347	8.674	0.348	8.838	0.359	8.561	0.347	8.865	0.331	8.860	0.359
100	3.1	7.862	0.285	8.057	0.296	7.933	0.303	8.098	0.305	8.230	0.323	8.166	0.305
500	3.1	5.068	0.144	5.265	0.152	5.591	0.162	5.744	0.175	6.099	0.205	6.405	0.208
50	3.2	6.699	0.226	7.151	0.248	6.950	0.238	7.021	0.238	7.184	0.240	7.214	0.261
100	3.2	5.348	0.155	5.579	0.173	5.804	0.179	5.827	0.175	6.056	0.192	6.293	0.203
500	3.2	2.287	0.037	2.530	0.046	2.602	0.046	2.848	0.057	3.015	0.058	3.311	0.073
50	3.3	5.591	0.187	6.039	0.205	5.820	0.185	5.970	0.193	6.224	0.195	6.414	0.208
100	3.3	4.434	0.127	4.784	0.145	4.866	0.145	5.136	0.155	5.304	0.170	5.471	0.171
500	3.3	1.635	0.015	1.825	0.020	1.925	0.023	2.162	0.031	2.326	0.037	2.694	0.048
50	3.4	3.655	0.105	4.023	0.128	4.044	0.127	4.403	0.136	4.664	0.145	4.964	0.164
100	3.4	2.753	0.077	3.059	0.090	3.189	0.095	3.370	0.102	3.624	0.112	3.861	0.126
500	3.4	1.222	0.010	1.365	0.013	1.476	0.016	1.645	0.021	1.806	0.026	2.060	0.034
50	3.5	2.625	0.070	2.934	0.080	3.100	0.090	3.246	0.095	3.501	0.109	3.766	0.123
100	3.5	1.944	0.040	2.209	0.049	2.363	0.053	2.561	0.061	2.768	0.070	3.091	0.084
500	3.5	1.113	0.006	1.265	0.010	1.332	0.012	1.486	0.016	1.697	0.023	1.914	0.029
50	4.0	1.398	0.013	1.573	0.017	1.672	0.021	1.827	0.026	2.068	0.034	2.269	0.042
100	4.0	1.174	0.004	1.289	0.006	1.360	0.008	1.502	0.012	1.674	0.017	1.849	0.024
500	4.0	1.017	0.001	1.075	0.002	1.108	0.003	1.210	0.006	1.318	0.008	1.449	0.013
50	4.5	1.147	0.003	1.243	0.004	1.287	0.005	1.396	0.008	1.530	0.012	1.644	0.016
100	4.5	1.070	0.002	1.133	0.003	1.177	0.004	1.268	0.006	1.355	0.008	1.472	0.012
500	4.5	1.024	0.001	1.075	0.002	1.120	0.003	1.188	0.005	1.261	0.007	1.353	0.010
50	5.0	1.076	0.003	1.126	0.004	1.165	0.005	1.211	0.007	1.268	0.009	1.333	0.011
100	5.0	1.033	0.002	1.069	0.003	1.108	0.004	1.137	0.005	1.189	0.007	1.242	0.009
500	5.0	1.010	0.001	1.044	0.002	1.070	0.003	1.100	0.004	1.137	0.006	1.182	0.008

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Na Tabela 18, observa-se que, para o caso em que $m = 100$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$, os valores médios de ARL_1 diminuem de forma consistente à medida que o deslocamento na média (μ) aumenta, comportamento esperado em gráficos de controle. Para μ próximos ao valor nominal ($\mu = 3$), os valores de ARL_1 são mais elevados, principalmente quando $\pi = -0.2$, o que indica menor sensibilidade na detecção de mudanças sutis. À medida que o deslocamento cresce, há rápida convergência dos valores de ARL_1 para próximo de 1, caracterizando alta eficiência na identificação de alterações significativas no processo. Verifica-se também que, para tamanhos de amostra maiores ($\bar{n} = 500$), a convergência é mais acelerada e os valores de ARL_1 permanecem mais próximos de 1, refletindo maior sensibilidade do gráfico. Em contrapartida, para $\bar{n} = 50$, a redução dos valores de ARL_1 é mais gradual, evidenciando menor capacidade de detecção em pequenas mudanças de processo.

Tabela 19 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	5.0	109.673	16.284	86.329	11.179	82.872	10.862	83.922	11.292	92.436	12.314	86.168	11.824
100	5.0	107.522	15.957	90.528	12.271	87.862	12.170	88.298	11.848	91.209	13.460	89.075	11.749
500	5.0	108.880	16.943	96.200	13.332	93.028	11.929	91.685	12.193	90.952	12.455	89.330	12.322
50	5.1	290.273	75.791	66.986	8.245	66.984	8.129	62.569	7.097	62.779	7.120	64.167	6.901
100	5.1	263.255	60.173	67.102	7.800	66.341	7.529	66.364	7.584	65.359	7.892	69.279	8.331
500	5.1	147.917	27.672	48.774	5.187	46.043	4.375	50.430	5.355	50.228	5.082	50.107	4.753
50	5.2	52.877	5.607	51.978	5.452	48.643	4.776	52.112	5.223	49.271	4.841	49.573	5.007
100	5.2	40.010	3.510	43.089	4.274	43.286	3.884	45.447	4.257	46.452	4.527	46.892	4.586
500	5.2	15.553	0.855	19.934	1.232	19.154	1.133	22.086	1.457	22.972	1.601	26.890	1.930
50	5.3	220.273	46.404	36.336	2.907	34.304	2.735	39.259	3.405	37.048	3.178	39.678	3.293
100	5.3	231.183	54.474	27.562	2.045	28.122	2.148	29.695	2.296	32.283	2.636	33.085	2.740
500	5.3	173.994	35.434	8.327	0.308	9.171	0.385	10.368	0.451	12.342	0.606	13.037	0.607
50	5.4	17.222	0.953	26.876	1.866	25.046	1.666	28.398	2.003	30.940	2.422	31.878	2.599
100	5.4	10.861	0.510	19.348	1.186	19.842	1.193	21.584	1.342	20.954	1.286	24.708	1.643
500	5.4	2.208	0.033	4.648	0.124	4.960	0.138	5.856	0.186	6.336	0.196	7.534	0.269
50	5.5	390.968	125.060	18.902	1.133	21.389	1.422	22.812	1.523	22.324	1.468	25.023	1.779
100	5.5	346.319	102.797	12.075	0.596	13.988	0.725	15.030	0.784	16.763	0.926	17.546	0.975
500	5.5	179.119	34.723	2.611	0.049	2.963	0.058	3.633	0.085	3.844	0.091	4.772	0.135
50	6.0	2.480	0.041	6.044	0.195	6.674	0.216	7.742	0.292	8.431	0.312	9.300	0.366
100	6.0	1.663	0.019	3.374	0.075	3.584	0.083	4.211	0.112	4.558	0.120	5.225	0.150
500	6.0	1.008	0.001	1.058	0.004	1.085	0.005	1.149	0.006	1.191	0.007	1.322	0.010
50	6.5	14.177	0.747	3.313	0.066	3.132	0.064	3.671	0.086	3.892	0.086	4.506	0.130
100	6.5	5.509	0.172	1.778	0.022	1.732	0.019	2.016	0.030	2.117	0.031	2.489	0.043
500	6.5	1.066	0.004	1.001	0.000	1.001	0.000	1.004	0.001	1.007	0.001	1.021	0.002
50	7.0	2.779	0.052	1.950	0.027	1.927	0.027	2.215	0.035	2.369	0.041	2.718	0.050
100	7.0	1.427	0.014	1.210	0.008	1.227	0.008	1.332	0.011	1.438	0.013	1.595	0.017
500	7.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000
50	7.5	1.634	0.018	1.451	0.014	1.442	0.014	1.607	0.017	1.722	0.020	1.907	0.026
100	7.5	1.086	0.005	1.060	0.004	1.068	0.004	1.122	0.005	1.152	0.006	1.243	0.009
500	7.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados apresentados na Tabela 19 mostram que, para $m = 100$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$, o valor de $\pi = -0.2$ se destaca por gerar valores médios de ARL_1 substancialmente mais altos que os observados para as demais configurações, com destaque para $\mu = 5.1$ e $\mu = 5.5$, cujos $Md.$ ultrapassam 200. Para os demais valores de π , observa-se que, conforme μ se afasta do valor de referência, o ARL_1 tende a decrescer, atingindo valores próximos de 1 para μ elevados (acima de 6.5), independentemente de π . As variações, expressas pelos valores de $Sd.$, acompanham esse comportamento, sendo mais pronunciadas quando $Md.$ é elevado e reduzindo-se à medida que o processo se afasta das condições de controle.

Tabela 20 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 100$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	5.0	10.761	0.470	10.107	0.428	9.924	0.427	10.114	0.418	10.060	0.446	10.080	0.438
100	5.0	10.596	0.464	10.072	0.425	9.942	0.416	9.920	0.442	9.917	0.437	10.000	0.424
500	5.0	10.639	0.465	9.902	0.419	9.857	0.418	9.787	0.404	9.733	0.422	9.848	0.393
50	5.1	15.492	0.830	9.388	0.397	9.412	0.391	9.130	0.353	9.438	0.387	9.333	0.389
100	5.1	14.914	0.776	9.095	0.376	8.810	0.343	8.946	0.361	9.006	0.349	8.908	0.334
500	5.1	12.977	0.593	8.692	0.318	8.658	0.308	8.576	0.304	8.674	0.313	8.618	0.301
50	5.2	9.422	0.374	8.533	0.297	8.296	0.287	8.357	0.288	8.256	0.282	8.281	0.289
100	5.2	8.211	0.295	7.846	0.260	7.698	0.246	7.822	0.259	7.845	0.255	7.898	0.260
500	5.2	6.141	0.186	6.334	0.188	6.268	0.189	6.479	0.202	6.535	0.205	6.676	0.213
50	5.3	8.138	0.282	7.255	0.238	7.194	0.230	7.311	0.242	7.339	0.236	7.374	0.239
100	5.3	6.945	0.227	6.639	0.204	6.588	0.198	6.694	0.201	6.769	0.205	6.819	0.206
500	5.3	4.881	0.121	5.045	0.127	5.044	0.126	5.115	0.130	5.190	0.133	5.287	0.137
50	5.4	7.221	0.230	6.456	0.189	6.394	0.183	6.491	0.186	6.531	0.189	6.557	0.189
100	5.4	6.015	0.180	5.695	0.163	5.649	0.158	5.702	0.158	5.773	0.162	5.820	0.165
500	5.4	4.098	0.092	4.163	0.094	4.168	0.094	4.191	0.095	4.230	0.097	4.273	0.098
50	5.5	6.694	0.201	5.951	0.170	5.905	0.165	5.985	0.168	6.008	0.169	6.029	0.171
100	5.5	5.580	0.154	5.287	0.145	5.251	0.143	5.293	0.144	5.327	0.145	5.364	0.147
500	5.5	3.804	0.079	3.806	0.079	3.815	0.080	3.827	0.080	3.844	0.081	3.868	0.082
50	6.0	5.823	0.152	5.206	0.132	5.190	0.132	5.232	0.133	5.254	0.133	5.273	0.134
100	6.0	4.854	0.116	4.633	0.112	4.621	0.112	4.639	0.112	4.660	0.113	4.684	0.113
500	6.0	3.413	0.060	3.391	0.059	3.395	0.059	3.403	0.060	3.411	0.060	3.423	0.060
50	6.5	5.149	0.121	4.670	0.109	4.662	0.108	4.684	0.109	4.695	0.109	4.706	0.109
100	6.5	4.329	0.092	4.165	0.088	4.161	0.088	4.171	0.088	4.184	0.089	4.199	0.089
500	6.5	3.103	0.049	3.086	0.048	3.089	0.048	3.092	0.048	3.097	0.048	3.103	0.048
50	7.0	4.748	0.106	4.375	0.098	4.370	0.098	4.382	0.098	4.389	0.098	4.396	0.098
100	7.0	4.033	0.080	3.911	0.078	3.908	0.078	3.914	0.078	3.921	0.078	3.929	0.078
500	7.0	2.930	0.043	2.918	0.043	2.919	0.043	2.922	0.043	2.925	0.043	2.930	0.043
50	7.5	4.494	0.097	4.188	0.091	4.184	0.091	4.191	0.091	4.196	0.091	4.201	0.091
100	7.5	3.849	0.073	3.777	0.072	3.776	0.072	3.779	0.072	3.783	0.072	3.788	0.072
500	7.5	2.828	0.039	2.820	0.039	2.821	0.039	2.823	0.039	2.826	0.039	2.830	0.039

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados apresentados na Tabela 20 mostram que, para $m = 100$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$, o valor de $\pi = -0.2$ tende a produzir valores médios de ARL_1 ligeiramente superiores aos observados nas demais configurações quando μ está próxima ao valor de referência, embora as diferenças sejam discretas. Observa-se que, à medida que μ se afasta de 5, o ARL_1 apresenta uma redução consistente, atingindo valores próximos de 3 para μ em torno de 6.5 e próximos de 2.8 para $\mu = 7.5$, independentemente de π .

Além disso, para todos os valores de π , verifica-se que os maiores valores de ARL_1 ocorrem quando μ é igual ou ligeiramente superior a θ , com destaque para $\mu = 5.1$ e $\mu = 5.2$, cujos $Md.$, embora não tão elevados quanto no caso de $\alpha = 0.01$, ainda apresentam queda moderada conforme $\bar{n}$ aumenta. As variações expressas pelos valores de $Sd.$ acompanham o comportamento dos $Md.$, sendo mais pronunciadas para μ próximas de θ e amostras menores, reduzindo-se gradualmente à medida que μ se afasta do ponto de controle e os tempos médios de detecção se estabilizam em níveis baixos.

Tabela 21 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	3.0	87.141	12.171	83.520	11.475	83.151	11.775	85.024	11.082	92.035	12.163	85.902	11.510
100	3.0	88.512	12.006	88.479	12.314	88.105	11.221	88.226	11.943	90.174	12.611	90.348	12.505
500	3.0	89.898	11.553	92.431	12.186	92.223	12.725	92.448	12.680	91.456	11.875	88.819	11.611
50	3.1	55.442	5.756	53.417	5.713	57.587	6.189	52.412	5.249	52.831	5.234	56.105	5.853
100	3.1	50.910	4.986	50.959	5.185	51.480	5.261	53.747	5.547	52.463	5.348	57.631	6.063
500	3.1	42.485	3.733	46.373	4.278	45.809	4.177	50.129	4.601	49.580	4.638	55.345	5.195
50	3.2	41.301	3.618	41.140	3.635	39.609	3.351	42.205	3.775	42.299	3.780	43.894	3.916
100	3.2	34.611	2.783	36.737	3.071	36.793	3.054	39.194	3.382	39.910	3.430	43.244	3.810
500	3.2	24.030	1.751	27.899	2.169	27.444	2.117	31.687	2.525	33.150	2.667	38.122	3.182
50	3.3	33.541	2.585	31.561	2.367	31.238	2.317	34.448	2.658	34.792	2.719	37.591	2.986
100	3.3	25.736	1.781	27.251	1.944	27.648	1.969	29.685	2.172	30.973	2.296	34.549	2.589
500	3.3	15.545	0.912	18.448	1.155	18.813	1.182	21.619	1.394	23.450	1.554	27.889	1.894
50	3.4	27.610	1.937	26.587	1.803	25.187	1.661	28.504	1.987	29.393	2.075	32.138	2.295
100	3.4	20.239	1.268	22.314	1.440	22.660	1.452	24.637	1.606	25.569	1.688	29.485	1.982
500	3.4	10.938	0.498	13.391	0.698	13.724	0.713	15.780	0.859	17.166	0.959	20.861	1.257
50	3.5	23.334	1.505	21.861	1.373	21.062	1.283	24.108	1.502	25.322	1.589	27.649	1.747
100	3.5	16.360	0.964	18.021	1.079	18.409	1.092	20.061	1.207	21.186	1.282	24.560	1.490
500	3.5	8.351	0.314	10.141	0.429	10.381	0.447	11.835	0.537	12.827	0.607	15.828	0.793
50	4.0	13.272	0.679	12.484	0.631	12.040	0.596	13.903	0.711	14.643	0.760	16.164	0.847
100	4.0	8.781	0.329	9.413	0.373	9.531	0.381	10.365	0.428	10.991	0.471	12.751	0.580
500	4.0	3.871	0.071	4.304	0.098	4.369	0.104	4.704	0.126	4.969	0.143	5.836	0.195
50	4.5	8.743	0.320	8.256	0.291	8.080	0.283	8.893	0.333	9.357	0.361	10.365	0.427
100	4.5	5.864	0.169	6.226	0.190	6.276	0.192	6.687	0.219	6.954	0.233	7.849	0.286
500	4.5	2.358	0.024	2.583	0.034	2.621	0.037	2.799	0.047	2.916	0.053	3.359	0.078
50	5.0	6.158	0.183	5.844	0.167	5.768	0.165	6.281	0.197	6.580	0.212	7.269	0.249
100	5.0	4.057	0.086	4.301	0.096	4.335	0.098	4.592	0.111	4.770	0.121	5.350	0.154
500	5.0	1.716	0.008	1.856	0.012	1.878	0.013	1.984	0.018	2.055	0.022	2.316	0.036
50	6.0	3.236	0.059	3.095	0.053	3.061	0.052	3.310	0.065	3.458	0.072	3.821	0.090
100	6.0	2.141	0.023	2.253	0.026	2.264	0.027	2.389	0.034	2.460	0.037	2.741	0.050
500	6.0	1.091	0.001	1.140	0.002	1.145	0.002	1.182	0.003	1.203	0.004	1.334	0.007
50	7.0	1.812	0.019	1.755	0.017	1.740	0.017	1.842	0.020	1.903	0.022	2.072	0.028
100	7.0	1.282	0.009	1.311	0.010	1.316	0.010	1.375	0.012	1.407	0.013	1.548	0.018
500	7.0	1.016	0.000	1.023	0.000	1.024	0.000	1.030	0.000	1.033	0.000	1.061	0.001

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados apresentados na Tabela 21 mostram que, para $m = 200$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.01$, o valor de $\pi = -0.2$ tende a produzir valores médios de ARL_1 ligeiramente superiores aos das demais configurações quando μ se encontra próxima do valor de referência, com destaque para $\mu = 3.0$, cujo $Md.$ ultrapassa 87 para $\bar{n} = 50$ e se mantém acima de 89 para $\bar{n} = 500$. À medida que μ aumenta, observa-se uma redução consistente de ARL_1 , chegando a valores próximos de 1 para μ em torno de 7.0, independentemente de π .

Para valores de μ ligeiramente acima de θ , como $\mu = 3.1$ e $\mu = 3.2$, os $Md.$ ainda se mantêm relativamente elevados, sobretudo para $\bar{n}$ menores, mas com tendência clara de queda conforme $\bar{n}$ aumenta. Os resultados indicam também que correlações positivas de maior magnitude ($\pi = 0.1$ e $\pi = 0.2$) podem, em alguns casos, reduzir ligeiramente o ARL_1 , especialmente quando μ está afastada do valor de referência. Os valores de $Sd.$ acompanham o comportamento dos $Md.$, apresentando maior dispersão para μ próximas a θ e $\bar{n}$ menores, e diminuindo progressivamente conforme μ se afasta das condições de controle, refletindo maior estabilidade na detecção de alterações no processo.

Tabela 22 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	3.0	9.970	0.413	9.931	0.413	9.889	0.445	10.132	0.445	10.040	0.441	10.044	0.399
100	3.0	9.784	0.412	10.000	0.406	9.940	0.395	9.916	0.419	9.946	0.446	10.023	0.425
500	3.0	9.757	0.434	9.857	0.426	9.835	0.414	9.845	0.411	9.792	0.405	9.843	0.423
50	3.1	8.524	0.331	8.634	0.355	8.833	0.375	8.531	0.319	8.853	0.354	8.857	0.378
100	3.1	7.852	0.276	8.067	0.300	7.914	0.319	8.120	0.299	8.237	0.323	8.167	0.308
500	3.1	6.414	0.191	6.754	0.215	6.678	0.212	6.964	0.223	6.955	0.230	7.132	0.232
50	3.2	7.326	0.253	7.338	0.249	7.255	0.243	7.371	0.256	7.514	0.260	7.568	0.263
100	3.2	6.453	0.211	6.575	0.221	6.522	0.217	6.620	0.220	6.703	0.226	6.765	0.227
500	3.2	4.980	0.128	5.164	0.140	5.127	0.138	5.251	0.144	5.302	0.147	5.391	0.148
50	3.3	6.433	0.213	6.366	0.205	6.313	0.203	6.435	0.208	6.464	0.211	6.509	0.212
100	3.3	5.582	0.169	5.633	0.172	5.614	0.173	5.686	0.175	5.724	0.179	5.755	0.180
500	3.3	4.241	0.094	4.323	0.097	4.311	0.097	4.370	0.100	4.400	0.101	4.453	0.103
50	3.4	5.779	0.179	5.756	0.176	5.700	0.172	5.792	0.178	5.829	0.181	5.851	0.182
100	3.4	5.035	0.139	5.070	0.140	5.046	0.141	5.093	0.142	5.128	0.145	5.154	0.146
500	3.4	3.788	0.073	3.835	0.075	3.822	0.074	3.851	0.076	3.870	0.077	3.903	0.078
50	3.5	5.353	0.156	5.324	0.155	5.278	0.152	5.362	0.155	5.387	0.157	5.407	0.158
100	3.5	4.667	0.120	4.692	0.121	4.670	0.121	4.707	0.122	4.731	0.124	4.750	0.125
500	3.5	3.512	0.060	3.543	0.061	3.534	0.061	3.554	0.062	3.570	0.063	3.593	0.064
50	4.0	4.209	0.098	4.195	0.098	4.169	0.097	4.227	0.098	4.241	0.099	4.258	0.099
100	4.0	3.652	0.074	3.669	0.074	3.656	0.074	3.677	0.075	3.688	0.075	3.702	0.076
500	4.0	2.828	0.039	2.844	0.040	2.838	0.039	2.850	0.040	2.857	0.040	2.868	0.041
50	4.5	3.329	0.063	3.324	0.063	3.311	0.063	3.341	0.063	3.348	0.064	3.354	0.064
100	4.5	2.908	0.049	2.919	0.049	2.913	0.049	2.926	0.049	2.931	0.050	2.940	0.050
500	4.5	2.310	0.030	2.320	0.030	2.316	0.030	2.323	0.030	2.328	0.030	2.334	0.030
50	5.0	2.723	0.046	2.718	0.046	2.709	0.046	2.728	0.046	2.733	0.046	2.738	0.047
100	5.0	2.426	0.036	2.434	0.036	2.430	0.036	2.439	0.036	2.443	0.036	2.448	0.036
500	5.0	2.066	0.026	2.072	0.026	2.069	0.026	2.073	0.026	2.076	0.026	2.081	0.026
50	6.0	1.926	0.021	1.924	0.021	1.920	0.021	1.929	0.021	1.931	0.021	1.934	0.021
100	6.0	1.781	0.017	1.785	0.017	1.783	0.017	1.789	0.017	1.791	0.017	1.794	0.017
500	6.0	1.589	0.013	1.592	0.013	1.590	0.013	1.592	0.013	1.594	0.013	1.596	0.013
50	7.0	1.523	0.010	1.522	0.010	1.520	0.010	1.524	0.010	1.525	0.010	1.526	0.010
100	7.0	1.446	0.009	1.447	0.009	1.446	0.009	1.448	0.009	1.449	0.009	1.450	0.009
500	7.0	1.353	0.007	1.354	0.007	1.353	0.007	1.354	0.007	1.354	0.007	1.355	0.007

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados apresentados na Tabela 22 mostram que, para $m = 200$, $\theta = 3$ e $\alpha = 0.1$, os valores médios de ARL_1 se mantêm próximos de 10 quando μ está igual ao valor de referência, independentemente de π e de $\bar{n}$. Conforme μ aumenta, observa-se uma redução contínua nos valores de ARL_1 , atingindo níveis próximos de 1.35 para $\mu = 7.0$ e $\bar{n} = 500$.

Para μ ligeiramente acima de θ , como em $\mu = 3.1$ e $\mu = 3.2$, ainda há uma variação moderada dos valores de $Md.$ em função de $\bar{n}$, com valores mais altos para amostras menores. No entanto, a influência de π é relativamente pequena em todo o intervalo, mantendo-se diferenças discretas entre correlações negativas e positivas.

Os desvios-padrão ($Sd.$) acompanham a tendência decrescente dos valores médios, sendo mais elevados para μ próximas ao valor de referência e reduzindo-se gradualmente à medida que μ se afasta, o que indica maior estabilidade na detecção de mudanças no processo para cenários com maior deslocamento em relação ao ponto de controle.

Tabela 23 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	5.0	108.583	16.041	85.177	12.045	82.669	11.174	83.618	10.997	91.810	12.796	85.436	11.066
100	5.0	106.522	15.346	90.680	12.331	88.591	11.645	88.269	11.710	90.973	13.015	90.101	12.913
500	5.0	108.770	16.703	94.340	13.861	92.366	13.159	91.832	12.882	91.677	12.401	89.858	12.563
50	5.1	299.943	79.235	66.497	7.531	68.325	8.015	62.724	7.514	62.830	6.911	65.343	7.455
100	5.1	268.453	68.867	66.704	7.931	64.862	7.844	66.123	7.007	65.382	7.374	70.252	8.318
500	5.1	148.828	27.876	48.396	4.899	46.245	4.295	49.567	4.762	50.351	4.940	49.406	4.996
50	5.2	53.451	5.785	53.045	5.404	48.802	4.793	52.516	5.450	49.362	5.060	48.555	4.576
100	5.2	39.582	3.444	42.841	3.801	43.639	4.032	45.424	4.435	45.894	4.592	47.089	4.543
500	5.2	15.467	0.842	19.629	1.156	19.149	1.146	22.239	1.423	23.068	1.554	26.847	1.980
50	5.3	220.658	51.238	36.360	3.143	34.287	2.848	39.759	3.275	37.326	3.057	39.716	3.613
100	5.3	229.481	52.864	27.545	1.994	28.245	2.111	29.479	2.121	32.390	2.631	33.040	2.711
500	5.3	173.188	34.864	8.358	0.318	9.156	0.373	10.401	0.438	12.408	0.590	13.025	0.632
50	5.4	17.014	0.956	26.956	2.000	25.117	1.724	29.029	2.036	30.344	2.402	32.466	2.719
100	5.4	10.853	0.480	19.447	1.175	19.766	1.280	21.403	1.341	21.004	1.328	24.216	1.742
500	5.4	2.205	0.036	4.649	0.128	4.959	0.134	5.859	0.174	6.323	0.204	7.525	0.270
50	5.5	362.805	117.421	18.807	1.083	21.411	1.413	22.734	1.525	21.682	1.335	24.935	1.746
100	5.5	356.531	103.022	12.064	0.537	14.048	0.702	15.006	0.797	16.718	0.908	17.571	0.975
500	5.5	182.275	36.249	2.611	0.046	2.972	0.058	3.643	0.082	3.842	0.087	4.772	0.135
50	6.0	6.113	0.202	6.113	0.202	6.732	0.232	7.806	0.299	8.430	0.327	9.341	0.380
100	6.0	3.371	0.074	3.371	0.074	3.587	0.079	4.231	0.114	4.566	0.125	5.250	0.150
500	6.0	1.059	0.004	1.059	0.004	1.085	0.005	1.149	0.006	1.191	0.007	1.322	0.010
50	6.5	14.055	0.677	3.322	0.071	3.133	0.065	3.639	0.088	3.894	0.091	4.500	0.114
100	6.5	5.523	0.170	1.781	0.023	1.731	0.020	2.004	0.027	2.119	0.032	2.487	0.043
500	6.5	1.067	0.004	1.001	0.000	1.001	0.000	1.004	0.001	1.007	0.001	1.022	0.002
50	7.0	2.802	0.054	1.949	0.027	1.932	0.027	2.210	0.034	2.390	0.039	2.719	0.051
100	7.0	1.426	0.013	1.210	0.008	1.227	0.008	1.329	0.011	1.445	0.013	1.596	0.017
500	7.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000
50	7.5	1.633	0.018	1.448	0.013	1.436	0.013	1.603	0.018	1.716	0.021	1.907	0.026
100	7.5	1.085	0.004	1.060	0.004	1.068	0.004	1.122	0.006	1.152	0.006	1.244	0.009
500	7.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados apresentados na Tabela 23 mostram que, para $m = 200$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.01$, o valor de $\pi = -0.2$ se destaca por gerar valores médios de ARL_1 substancialmente mais altos que os observados para as demais configurações quando μ está próxima de θ , com especial ênfase em $\mu = 5.1$ e $\mu = 5.5$, cujos $Md.$ ultrapassam 200 (atingindo, por exemplo, 299.943 para $\bar{n} = 50$ em $\mu = 5.1$ e 362.805 para $\bar{n} = 50$ em $\mu = 5.5$). Para os demais valores de π , observa-se que, conforme μ se afasta do valor de referência, o ARL_1 tende a decrescer de forma acentuada, chegando a valores próximos de 1 para μ elevados (acima de 6.5), praticamente independentemente de π e de $\bar{n}$.

Adicionalmente, verifica-se que o aumento de $\bar{n}$ reduz os valores de $Md.$ de forma consistente quando μ se afasta de θ , embora, próximo de $\mu = 5$, o efeito de $\bar{n}$ seja menos pronunciado, sobretudo para π negativos. As variações, expressas pelos valores de $Sd.$, acompanham esse comportamento: são mais elevadas nos cenários em que $Md.$ é alto (próximo de $\mu = \theta$ e com π negativos de maior magnitude) e diminuem à medida que o processo se afasta das condições de controle, refletindo maior estabilidade de detecção para desvios mais acentuados.

Tabela 24 – Valores médios ($Md.$) e desvio-padrão ($Sd.$) de ARL_1 do gráfico de controle GZMG- u para $m = 200$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$ (diferentes valores de π)

$\bar{n}$	μ	$\pi = -0.2$		$\pi = -0.1$		$\pi = -0.05$		$\pi = 0.05$		$\pi = 0.1$		$\pi = 0.2$	
		Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1	Md. ARL_1	Sd. ARL_1
50	5.0	10.772	0.483	10.109	0.427	9.930	0.416	10.140	0.451	10.015	0.430	10.066	0.432
100	5.0	10.593	0.486	10.032	0.422	9.887	0.420	9.913	0.429	9.945	0.455	10.020	0.423
500	5.0	10.611	0.465	9.952	0.403	9.846	0.423	9.825	0.439	9.816	0.428	9.864	0.434
50	5.1	15.540	0.837	9.381	0.364	9.397	0.373	9.119	0.367	9.405	0.391	9.380	0.376
100	5.1	14.860	0.772	9.043	0.369	8.774	0.347	8.925	0.346	9.032	0.358	8.895	0.362
500	5.1	11.229	0.520	7.249	0.289	7.479	0.297	7.471	0.299	7.846	0.279	8.073	0.309
50	5.2	8.344	0.349	8.691	0.370	8.209	0.356	8.209	0.348	8.399	0.328	8.293	0.320
100	5.2	7.175	0.291	7.479	0.315	7.500	0.276	7.417	0.267	7.613	0.271	7.813	0.291
500	5.2	3.707	0.087	4.469	0.114	4.386	0.114	4.768	0.134	4.966	0.142	5.366	0.166
50	5.3	15.736	0.861	6.999	0.316	7.096	0.239	7.316	0.261	7.291	0.261	7.567	0.282
100	5.3	15.248	0.819	5.724	0.253	5.908	0.259	6.260	0.300	6.137	0.261	6.566	0.309
500	5.3	13.321	0.676	2.545	0.062	2.765	0.070	3.091	0.085	3.290	0.093	3.560	0.105
50	5.4	4.735	0.168	6.180	0.297	6.036	0.284	6.438	0.317	6.249	0.261	6.412	0.282
100	5.4	3.161	0.106	4.693	0.200	4.636	0.194	5.021	0.218	5.062	0.206	5.610	0.247
500	5.4	1.288	0.017	1.881	0.027	1.944	0.029	2.072	0.034	2.304	0.046	2.527	0.055
50	5.5	19.054	0.981	4.966	0.168	5.223	0.183	5.466	0.207	5.548	0.203	5.859	0.232
100	5.5	18.572	0.946	3.676	0.109	3.910	0.118	4.018	0.126	4.233	0.133	4.677	0.154
500	5.5	12.827	0.667	1.413	0.022	1.499	0.024	1.653	0.030	1.733	0.033	1.922	0.041
50	6.0	6.113	0.202	2.477	0.074	2.530	0.077	2.814	0.090	2.922	0.095	3.248	0.111
100	6.0	3.371	0.074	1.672	0.042	1.743	0.045	1.913	0.051	1.982	0.054	2.237	0.067
500	6.0	1.059	0.004	1.008	0.001	1.012	0.002	1.027	0.002	1.038	0.003	1.069	0.004
50	6.5	3.009	0.060	1.693	0.020	1.671	0.020	1.836	0.024	1.912	0.026	2.123	0.031
100	6.5	1.832	0.025	1.201	0.008	1.206	0.008	1.297	0.010	1.369	0.011	1.503	0.014
500	6.5	1.005	0.001	1.000	0.000	1.000	0.000	1.001	0.000	1.003	0.001	1.003	0.001
50	7.0	1.417	0.013	1.287	0.011	1.294	0.010	1.391	0.012	1.457	0.015	1.589	0.017
100	7.0	1.078	0.004	1.045	0.003	1.051	0.003	1.092	0.005	1.116	0.005	1.169	0.006
500	7.0	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000
50	7.5	1.138	0.006	1.120	0.005	1.124	0.006	1.199	0.007	1.223	0.008	1.329	0.011
100	7.5	1.011	0.002	1.009	0.001	1.012	0.001	1.025	0.002	1.037	0.003	1.066	0.004
500	7.5	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados apresentados na Tabela 24 mostram que, para $m = 200$, $\theta = 5$ e $\alpha = 0.1$, os valores médios de ARL_1 permanecem em torno de 10 quando $\mu = 5.0$, com diferenças discretas entre os valores de π e entre tamanhos amostrais. Destaca-se que $\pi = -0.2$ produz aumentos relevantes de $Md.$ em vizinhanças de θ , como em $\mu = 5.1$, $\mu = 5.3$ e $\mu = 5.5$ (por exemplo, $Md. = 15.540$ para $\bar{n} = 50$ em $\mu = 5.1$, $Md. = 15.736$ para $\bar{n} = 50$ em $\mu = 5.3$ e $Md. = 19.054$ para $\bar{n} = 50$ em $\mu = 5.5$), efeito que se atenua com o aumento de $\bar{n}$.

Para os demais valores de π (inclusive positivos), observa-se que, à medida que μ se afasta de θ , o ARL_1 decresce rapidamente, atingindo valores próximos de 1 para $\mu \geq 7.0$, praticamente independentemente de π e de $\bar{n}$ (por exemplo, para $\bar{n} = 500$, tem-se $Md. \approx 1.000$ em todos os π). O aumento de $\bar{n}$ tende a reduzir $Md.$ de forma consistente ao longo de μ , com efeito mais pronunciado quando μ está acima de 5.2.

As variações, expressas por $Sd.$, acompanham o comportamento dos $Md.$: são relativamente maiores nas situações em que os tempos médios são mais elevados (e.g., em $\mu = 5.1$, $\mu = 5.3$ e $\mu = 5.5$ com $\pi = -0.2$ e $\bar{n}$ menores) e diminuem substancialmente quando μ se afasta das condições de controle, aproximando-se de zero quando $Md.$ está próximo de 1, o que denota maior estabilidade na detecção de desvios mais acentuados.

Os resultados apresentados na Tabela 25 indicam que, independentemente de m , o aumento de α de 0.01 para 0.1 reduz drasticamente os valores médios de ARL_1 em $\mu = \theta$, passando de aproximadamente 88–92 para cerca de 10. Além disso, acelera a detecção de desvios: para $\theta = 3$, o ponto em que $Md. \leq 2$

ocorre já em $\mu = 4.0$ para ambos os valores de α , enquanto para $\theta = 5$ o mesmo limite é atingido em $\mu = 6.5$ ($\alpha = 0.1$) ou $\mu = 7.0$ ($\alpha = 0.01$).

Tabela 25 – Resumo comparativo do GZMG para alguns valores médios de ARL_1 para diferentes configurações de m , θ e α

m	θ	α	$Md.$ em $\mu = \theta$	$Md.$ em $\mu = \theta + 0.3$	μ para $Md. \leq 2$
50	3	0.01	88.63	14.01	4.0
50	3	0.10	9.92	3.78	4.0
100	3	0.01	88.65	13.97	4.0
100	3	0.10	9.92	3.77	4.0
200	3	0.01	88.77	13.99	4.0
200	3	0.10	9.92	3.77	4.0
50	5	0.01	92.29	68.02	7.0
50	5	0.10	10.07	8.67	6.5
100	5	0.01	92.32	68.04	7.0
100	5	0.10	10.06	8.66	6.5
200	5	0.01	92.29	68.03	7.0
200	5	0.10	10.07	8.67	6.5

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Desse modo, a variação de m (50, 100 ou 200) apresenta impacto mínimo sobre os valores médios agregados, indicando que, nas condições analisadas, o tamanho da amostra ($\bar{n}$) e a probabilidade de alarme falso (α) são fatores mais determinantes para o desempenho do gráfico. Observa-se ainda que, para $\theta = 5$, a redução de $Md.$ com $\mu = \theta + 0.3$ é modesta, especialmente para $\alpha = 0.01$, enquanto para $\theta = 3$ a mesma variação em μ já produz quedas acentuadas no ARL_1 . Isso reforça que o posicionamento de θ em relação ao centro do processo influencia diretamente a sensibilidade do gráfico.

3.4 O IMPACTO DOS DADOS DE CONTAGEM INFLACIONADOS DE ZEROS EM ALGUNS GRÁFICOS DE CONTROLE PADRÃO

A teoria dos gráficos de controle do modelo geométrico modificado por zero pode ser aplicada em situações práticas como uma alternativa útil e interessante aos bem conhecidos gráficos c e u , desenvolvidos via suposição de Poisson, e aos gráficos $cmpe$ e $cmpeu$ derivados da distribuição COM-Poisson. Ambas distribuições não consideram dados inflados de zero, entre outros, quando os dados são sobredispersos. Entretanto, dados de contagem em controle que apresentam equidispersão, subdispersão e sobredispersão podem ser bem modelados via gráficos GZMG, propostos nesta pesquisa.

Na Subseção 3.4.1, a seguir, com objetivo de avaliar o impacto dos dados de contagem inflacionados de zero em alguns gráficos de controle padrão, dados amostrais foram gerados a partir da GZMG por meio de simulações de Monte Carlo. A esses dados, aplicaram-se os gráficos de controle confeccionados a partir dos modelos de Poisson e COM-Poisson.

3.4.1 Modelo geométrico modificado por zeros

Nesta subseção, aplicam-se os gráficos de controle baseados em Poisson e COM-Poisson a dados amostrais gerados a partir do modelo geométrico modificado por zeros. O objetivo é investigar, utilizando simulações, o desempenho (em termos de ARL_0 e ARL_1) desses gráficos de controle conhecidos quando aplicados aos processos geométricos modificados por zeros. Para fins de comparação, também são utilizados os gráficos $GZMG-u$ para os casos em que as amostras são de tamanhos variáveis. As simulações foram conduzidas com as mesmas configurações descritas nas subseções anteriores, 3.1 e 3.3. No entanto, devido a limitações de espaço e tempo, considerou-se apenas $m = 100$ e $n = 50, 100, 500$ (ou $\bar{n} = 50, 100, 500$) e $\theta = 3, 5$.

Naturalmente, é relevante examinar mais detalhadamente o desempenho dos gráficos de controle baseados na distribuição de $GZMG$ e na análise de dados de contagem gerados a partir de outras distribuições, incluindo as distribuições de Poisson e COM-Poisson com algum nível de dispersão. Embora alguns resultados preliminares tenham sido apresentados (com base em uma única amostra obtido via simulação) nas subseções do Capítulo 4, esse tópico será explorado mais detalhadamente em trabalhos futuros. No entanto, devido a limitações de espaço e tempo, considerou-se apenas os resultados de ARL_0 para os gráficos de controle com tamanhos de amostra desigual (ou gráficos do tipo u).

A partir da Tabela 26, observa-se que, independentemente da configuração do cenário, isto é, seja para ARL_0 ou ARL_1 , os gráficos de controle baseados na distribuição de Poisson apresentaram desempenho insatisfatório para as amostras da distribuição de $GZMG$ em condição de controle (isto é, geraram muitos alarmes falsos). Esse resultado está de acordo com o relatado por alguns autores, como (Saghir e Lin 2015). Por outro lado, os gráficos de controle baseados na distribuição COM-Poisson apresentaram, de forma geral, desempenho que pode variar de satisfatório a bom, tanto para as amostras em controle quanto para as amostras fora de controle da distribuição de $GZMG$. Vale destacar que, em alguns casos, os resultados foram próximos aos obtidos pelos gráficos baseados diretamente na distribuição de $GZMG$. Esse achado é relativamente esperado, uma vez que a distribuição COM-Poisson possui um parâmetro adicional em relação à distribuição de Poisson, conferindo-lhe maior flexibilidade na modelagem e, consequentemente, maior adaptabilidade ao gráfico de controle correspondente.

Por fim, vale destacar que os valores centrais (CL) e os limites de controle (UCL e LCL) foram obtidos a partir da média e do desvio padrão (DP) correspondentes a cada caso, aplicando-se a regra prática “Média $\pm L \times DP$ ”. Para as distribuições de Poisson e $GZMG$, o cálculo da média é direto e de fácil obtenção. Já no caso da distribuição COM-Poisson, as estatísticas resumo envolvem fórmulas mais complexas, porém podem ser facilmente calculadas utilizando-se o pacote `compoisson` (Dunn 2012) em R.

Tabela 26 – Valores médios (desvio padrão em parênteses) de ARL_0 dos gráficos de controle do tipo u quando o verdadeiro processo de geração de dados é distribuído por $GZMG(n, \pi, \delta)$, para alguns valores de $m = 100$ e $n = 50, 100, 500$ (ou $\bar{n} = 50, 100, 500$) e $\theta = 3, 5$

(a) $\bar{n} = 50$

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
GZMG: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	12.154	12.145	11.489	10.879	11.119	11.723
				(4.668)	(4.705)	(5.059)	(4.271)	(3.939)	(5.109)
			0.01	71.887	65.021	69.689	51.986	73.323	64.818
				(29.742)	(30.064)	(30.211)	(29.537)	(28.953)	(30.107)
GZMG: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.1	11.310	11.291	11.043	11.025	11.656	11.582
				(4.299)	(4.443)	(5.216)	(4.588)	(4.856)	(5.260)
			0.01	63.468	67.157	71.643	54.863	76.363	67.465
				(30.411)	(30.048)	(29.673)	(30.122)	(28.255)	(29.629)
COM-Poisson: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	7.343	6.269	7.468	7.062	6.757	6.232
				(2.120)	(1.600)	(2.252)	(2.111)	(1.726)	(1.653)
			0.01	60.826	51.594	59.272	44.290	47.427	43.955
				(28.960)	(29.802)	(26.989)	(28.455)	(27.135)	(30.470)
COM-Poisson: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.1	6.371	5.446	6.104	5.739	5.567	4.952
				(1.682)	(1.290)	(1.508)	(1.374)	(1.379)	(1.051)
			0.01	39.025	41.568	42.235	33.053	32.104	25.981
				(25.037)	(25.083)	(26.143)	(21.274)	(21.515)	(17.247)
Poisson: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	7.343	6.269	7.468	7.161	6.757	6.232
				(2.120)	(1.600)	(2.252)	(2.146)	(1.726)	(1.653)
			0.01	60.826	51.594	59.272	45.223	47.427	43.955
				(30.881)	(28.960)	(29.802)	(27.553)	(28.455)	(27.135)
Poisson: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.1	6.371	5.624	6.104	5.739	5.567	4.952
				(1.682)	(1.342)	(1.508)	(1.374)	(1.379)	(1.051)
			0.01	39.025	41.568	45.012	33.756	32.104	25.981
				(25.037)	(25.083)	(27.639)	(21.662)	(21.515)	(17.247)

(b) $\bar{n} = 100$

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
GZMG: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	11.022	10.949	10.688	10.641	10.850	11.214
				(3.891)	(4.073)	(4.173)	(4.315)	(3.873)	(4.442)
			0.01	77.848	63.592	70.732	67.405	66.158	80.801
				(27.912)	(29.923)	(29.921)	(30.335)	(30.238)	(26.404)
GZMG: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.1	11.132	11.167	10.898	10.610	11.013	11.270
				(4.119)	(4.971)	(4.081)	(4.854)	(4.713)	(4.154)
			0.01	74.233	66.398	72.411	68.775	67.072	80.833
				(28.998)	(30.048)	(29.338)	(30.093)	(30.591)	(26.588)
COM-Poisson: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	7.993	7.547	7.321	6.790	6.606	6.038
				(2.322)	(2.378)	(1.985)	(1.742)	(1.640)	(1.512)
			0.01	61.730	52.269	48.984	45.662	47.231	36.095
				(29.079)	(28.962)	(27.423)	(27.488)	(23.311)	(30.358)
COM-Poisson: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.1	6.781	6.418	6.057	5.587	5.378	4.796
				(1.751)	(1.578)	(1.477)	(1.230)	(1.196)	(0.979)
			0.01	47.638	37.743	35.218	29.744	30.515	23.917
				(28.075)	(23.886)	(23.619)	(19.801)	(19.767)	(15.616)
Poisson: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	8.091	7.575	7.321	6.790	6.606	6.020
				(2.341)	(2.390)	(1.985)	(1.742)	(1.640)	(1.504)
			0.01	61.730	52.495	48.223	45.679	47.231	35.831
				(30.470)	(29.099)	(28.601)	(27.483)	(27.488)	(23.106)
Poisson: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.1	6.781	6.418	6.057	5.587	5.378	4.796
				(1.751)	(1.578)	(1.477)	(1.230)	(1.196)	(0.979)
			0.01	48.247	37.890	35.119	29.744	30.515	23.720
				(28.332)	(23.951)	(23.630)	(19.801)	(19.767)	(15.536)

(c) $\bar{n} = 500$

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
GZMG: $m = 100$	$\mu = 3$	0.3	0.1	10.200	10.681	10.383	11.033	11.048	9.984
				(3.669)	(4.244)	(4.173)	(4.159)	(4.140)	(3.311)

Continuação na próxima página

Modelo	μ	ω	α	π					
				-0.20	-0.10	-0.05	0.05	0.10	0.20
GZMG: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.01	74.764 (28.465)	73.900 (28.688)	72.451 (28.794)	65.517 (30.541)	75.012 (28.245)	74.508 (28.546)
			0.1	10.252 (4.323)	10.429 (4.360)	10.822 (3.810)	11.136 (4.410)	10.719 (4.007)	10.399 (3.754)
			0.01	74.879 (28.847)	74.005 (28.802)	68.788 (29.940)	61.839 (30.093)	76.248 (28.065)	75.600 (28.174)
			0.1	7.863 (2.226)	7.556 (2.304)	7.263 (2.078)	6.630 (1.822)	6.449 (1.614)	6.021 (1.498)
			0.01	58.603 (28.885)	53.366 (28.676)	52.226 (28.676)	45.486 (27.318)	43.234 (26.632)	38.179 (24.342)
			0.1	6.834 (1.853)	6.185 (1.526)	6.051 (1.474)	5.506 (1.347)	5.273 (1.183)	4.854 (1.048)
COM-Poisson: $m = 100$	$\mu = 5$	0.5	0.01	46.050 (27.964)	40.826 (25.567)	38.905 (24.963)	33.456 (22.989)	30.050 (19.963)	23.851 (16.256)
			0.1	7.855 (2.219)	7.590 (2.315)	7.263 (2.078)	6.636 (1.825)	6.483 (1.630)	6.021 (1.498)
			0.01	58.606 (30.510)	53.383 (28.816)	52.145 (28.647)	45.449 (27.334)	43.234 (26.632)	37.982 (24.201)
			0.1	6.827 (1.852)	6.191 (1.531)	6.051 (1.474)	5.519 (1.355)	5.273 (1.183)	4.852 (1.047)
			0.01	46.108 (28.005)	40.856 (25.476)	38.905 (24.963)	33.412 (22.991)	29.890 (19.729)	23.569 (15.922)
			0.1	7.855 (2.219)	7.590 (2.315)	7.263 (2.078)	6.636 (1.825)	6.483 (1.630)	6.021 (1.498)

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Na sequência, a Seção 3.5 apresenta o procedimento de uso do gráfico $GZMG-u$, consolidando o roteiro operacional, o algoritmo e as definições dos limites de controle sob a reparametrização em μ . Também são explicitadas as escolhas de α (e o respectivo k), a calibração via ARL_0 e o tratamento de tamanhos amostrais variáveis (n_t ou $\bar{n}$), de modo a orientar a implementação prática e reprodutível do gráfico de controle proposto.

3.5 PROCEDIMENTO DE USO DO GRÁFICO GZMG

Esta seção descreve, de forma operacional, como utilizar o gráfico de controle $GZMG$ para monitorar processos de contagem sob diferentes níveis de inflação/deflação de zeros. São apresentados os passos para: (i) planejamento do estudo e definição de parâmetros amostrais; (ii) estimação dos parâmetros do modelo marginal na Fase I; (iii) construção dos limites de controle; (iv) checagem opcional de calibração por meio do ARL_0 ; e (v) monitoramento na Fase II. Adota-se como metas de calibração os valores de

referência de $ARL_0 \approx 100$ quando $\alpha = 0.01$ (i.e., $k = 2.58$) e $ARL_0 \approx 10$ quando $\alpha = 0.1$ (i.e., $k = 1.64$). O roteiro a seguir está estruturado para uso direto em aplicações práticas e replicação dos resultados.

3.5.1 Roteiro de aplicação do gráfico GZMG- u (reparametrizado em μ)

Premissas e metas de calibração. Definir o nível de significância α e o multiplicador k :

$$k = \begin{cases} 2.58, & \text{se } \alpha = 0,01 \ (\Rightarrow ARL_0 \approx 100), \\ 1.65, & \text{se } \alpha = 0,1 \ (\Rightarrow ARL_0 \approx 10). \end{cases}$$

Adota-se o gráfico GZMG- u com estatística por subgrupo $\bar{X}_t$ (média amostral de tamanho n_t) e limites conforme a Tabela 5.

1. Planejamento

- Fixar o tamanho do subgrupo n (ou permitir n_t variável) e o tamanho da amostra histórica m (Fase I). O n_t denota o tamanho do subgrupo (isto é, o número de observações) no instante t , podendo variar com t quando os tamanhos amostrais não são fixos.
- Registrar α e a meta de ARL_0 correspondente.

2. Fase I: estimação de parâmetros

- Com m subgrupos sob controle, estimar $\hat{\mu}$ e $\hat{\pi}$ (reparametrização $\delta = \mu/(1 - \pi)$).
- Para cada subgrupo t , computar a estatística do gráfico: $\bar{X}_t$.
- Estimar a variância marginal reparametrizada:

$$\hat{v}_X = \hat{\mu} \left[1 + \frac{\hat{\mu}(1 + \hat{\pi})}{1 - \hat{\pi}} \right].$$

3. Limites de controle (GZMG- u)

$$CL = \hat{\mu}, \quad UCL = \hat{\mu} + k\sqrt{\frac{\hat{v}_X}{n_t}}, \quad LCL = \hat{\mu} - k\sqrt{\frac{\hat{v}_X}{n_t}}.$$

Se n_t variar, pode-se usar $\bar{n}$ (média dos tamanhos) para limites constantes, conforme a nota de Montgomery (2019).

4. Checagem de calibração (opcional, recomendada)

- Simular dados sob controle com $(\hat{\mu}, \hat{\pi})$ e estimar o ARL_0 .
- Se o ARL_0 estiver distante da meta (100 ou 10), ajustar k e recalibrar.

5. Fase II: monitoramento

- Para cada novo subgrupo de tamanho n_t , calcular $\bar{X}_t$.

- Sinalizar *fora de controle* quando $\bar{X}_t < \text{LCL}$ ou $\bar{X}_t > \text{UCL}$; registrar o ARL observado (número de subgrupos até o primeiro sinal).

6. Investigação e ação

- Diante de sinal, investigar causas especiais e atuar sobre o processo.
- Reestimar os parâmetros (nova Fase I) se houver mudança estrutural.

Diante disso, com base no roteiro apresentado, a seguir descreve-se o procedimento em formato algorítmico, de modo a tornar explícitas as entradas, as saídas e o encadeamento das etapas necessárias à aplicação do gráfico GZMG- u . O algoritmo organiza as decisões operacionais em Fase I (estimação de $\hat{\mu}$ e $\hat{\pi}$, cálculo da variância reparametrizada e definição dos limites com $k \in \{2.58, 1.65\}$) e em Fase II (monitoramento), preservando a correspondência com os limites de controle da Tabela 5. Ademais, explicita-se a opção de calibração via ARL_0 e o uso de n_t variável (ou $\bar{n}$, quando se desejarem limites constantes), favorecendo a reprodutibilidade do método e sua implementação prática.

Algoritmo 1: Uso do gráfico GZMG- u (reparametrizado em μ)

Input: Subgrupos (Fase I) com tamanhos n_t e total de m subgrupos sob controle

Data: Nível α ; $k = \begin{cases} 2.58, & \alpha = 0.01 \\ 1.65, & \alpha = 0.1 \end{cases}$; metas de $ARL_0 = \begin{cases} 100, & \alpha = 0.01 \\ 10, & \alpha = 0.1 \end{cases}$.

1 Fase I: estimação

2 Estimar $(\hat{\mu}, \hat{\pi})$ sob a reparametrização $\delta = \mu/(1 - \pi)$.

3 Para cada subgrupo t , calcular a estatística do gráfico: $\bar{X}_t$.

4 Estimar a variância marginal reparametrizada:

$$\hat{v}_X \leftarrow \hat{\mu} \left[1 + \frac{\hat{\mu}(1 + \hat{\pi})}{1 - \hat{\pi}} \right].$$

5 Limites de controle (GZMG- u)

6 Para cada tamanho n_t (ou $n_t \leftarrow \bar{n}$ para limites constantes):

$$CL = \hat{\mu}, \quad UCL = \hat{\mu} + k\sqrt{\frac{\hat{v}_X}{n_t}}, \quad LCL = \hat{\mu} - k\sqrt{\frac{\hat{v}_X}{n_t}}.$$

7 Checagem opcional de calibração

8 Simular dados sob controle com $(\hat{\mu}, \hat{\pi})$ e estimar ARL_0 .

9 Se ARL_0 estiver distante da meta, ajustar k e recalibrar limites.

10 Fase II: monitoramento

11 **for** cada novo subgrupo t com tamanho n_t **do**

12 Calcular $\bar{X}_t$.

13 **if** $\bar{X}_t < LCL$ **ou** $\bar{X}_t > UCL$ **then**

14 Emitir sinal; registrar ARL ; investigar causas especiais.

15 **else**

16 Sem sinal; continuar monitoramento.

17 **end**

18 **end**

Output: Sinais de fora de controle e ARL observado.

Desta feita, com vistas à transparência e à reprodutibilidade das análises, os scripts em R utilizados nesta pesquisa foram disponibilizados publicamente em repositório online, acessível em: <https://github.com/SUELIOMOURA/tese-doutorado-gzmg-atual>.

4 APLICAÇÕES

É amplamente reconhecido que, em diversas situações práticas, um item pode conter várias não conformidades sem ser classificado como não conforme. Por exemplo, na fabricação de computadores pessoais, pequenas falhas estéticas no gabinete não comprometem a funcionalidade. Portanto, a unidade é considerada conforme (Montgomery 2019). Neste capítulo, consideram-se cenários com inflação ou deflação de zeros e compara-se o desempenho de diferentes gráficos de controle, com foco nos gráficos baseados na GZMG- u , a fim de inspecionar o número total ou médio de defeitos por amostra e avaliar se o processo permanece sob controle.

Sendo assim, este capítulo objetiva demonstrar a aplicabilidade dos gráficos de controle baseados no modelo GZMG em cenários simulados e reais, comparando-os com modelos tradicionais como Poisson, ZIP, Geométrico e COM-Poisson. Dessa forma, buscam-se evidências empíricas de robustez (menor incidência de alarmes falsos sob sobredispersão e zeros), sensibilidade a deslocamentos moderados na média e estabilidade dos limites de controle, com ênfase em configurações típicas de Fase 1 e Fase 2.

4.1 DADOS SIMULADOS

Nesta subseção, são considerados quatro conjuntos de dados simulados, os quais contêm alguns níveis de equidispersão, subdispersão e sobredispersão para ilustrar a utilidade dos gráficos geométrico modificado por zeros, bem como sua capacidade de produzir limites comparáveis aos estabelecidos pela teoria clássica de Controle Estatístico de Processos.

Nos casos em que as amostras são de tamanhos iguais, os gráficos de controle escolhidos para comparação foram o gráfico c tradicional e o gráfico $cmpe$. O gráfico c assume que a distribuição de Poisson modela bem o número de defeitos por unidade de inspeção. No entanto, de acordo com (Sellers 2012), o gráfico c , embora tenha um melhor desempenho para grandes amostras, não funciona bem nos casos de sobredispersão. Portanto, o autor desenvolveu um gráfico de controle usando uma distribuição de contagem mais geral que relaxa a suposição de equidispersão da distribuição de Poisson. O chamado gráfico $cmpe$, baseado na suposição de uma distribuição COM-Poisson, apresentou excelentes resultados ao ajustar dados de contagem superdispersos. Portanto, também pode ser usado como uma ferramenta de referência para comparar o desempenho dos gráficos propostos neste trabalho. Para os casos em que as amostras são de tamanhos desiguais, os gráficos de controle selecionados para comparação foram o gráfico u e o gráfico mpu .

Similar à Seção 3.1, todas as análises foram realizadas usando a linguagem de programação R, e conservando a mesma estrutura de parâmetros.

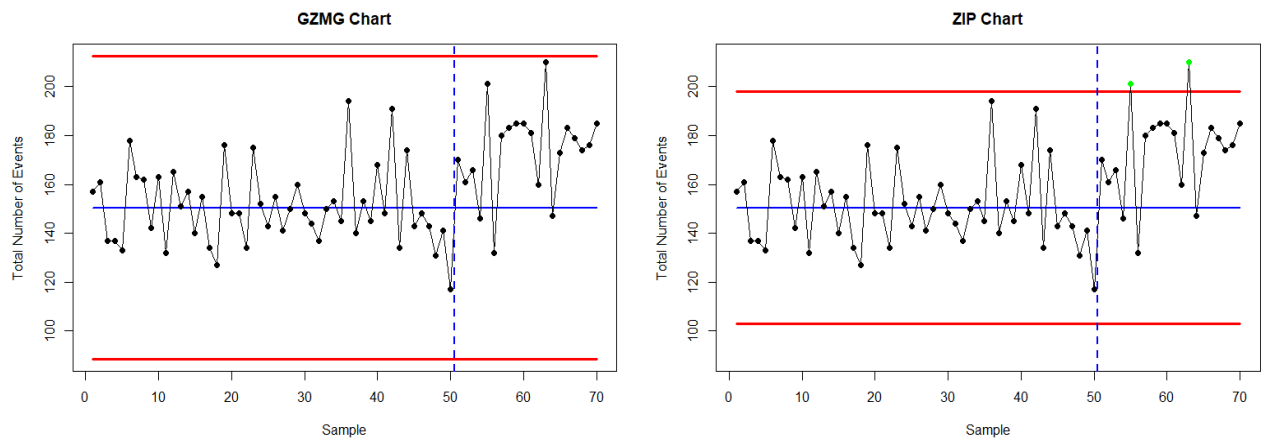
4.1.1 Dados gerados com base no modelo GZMG

Nesta primeira aplicação, foram simuladas $m = 100$ amostras com tamanhos desiguais (média $\bar{n} = 50$). Cada tamanho n_j foi gerado por $n_j = \bar{n} + k_j$, $j = 1, \dots, m$, com k_j inteiro aleatório em $[-\bar{n}/5, \bar{n}/5]$. Os dados foram gerados da distribuição GZMG com parâmetros $(\delta, \pi) = (5.5, -0.18)$, isto é, em regime sobredisperso com inflação de zeros (valor de π próximo ao limite inferior $-1/\delta$). Os

limites de controle foram estimados em Fase 1 (primeiras 50 amostras) e avaliados em Fase 2 (50 amostras seguintes). Para comparação, ajustou-se também um gráfico ZIP- u (Seção 4.1.2) aos mesmos dados. A ideia foi avaliar os gráficos de controle baseados em Gupta (18), comparados ao desempenho do gráfico de controle baseado em GZMG quando os dados são realmente de uma distribuição GZMG.

A Figura 19 mostra os gráficos GZMG- u e ZIP, aplicados ao conjunto de dados simulados com características de contagem e inflacionados de zero, com limites de controle calculados a partir das primeiras 50 amostras. Ou seja, a parte à esquerda da linha vertical tracejada verde é precisamente o monitoramento das primeiras 50 amostras (Fase 1), enquanto a parte à direita dessa linha representa o monitoramento das 50 amostras restantes, que não participaram da construção dos limites de controle (Fase 2).

Figura 19 – Comparação de desempenho dos GZMG- u e ZIP, Gupta, Gupta e Tripathi (1996), ambos construídos a partir de amostras de distribuição de GZMG (Fase 2)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 19 exibe lado a lado os gráficos de controle baseados no **GZMG- u** (à esquerda) e no **ZIP** (à direita). Mesmo sendo o processo gerador **GZMG- u** , o gráfico **GZMG- u** apresentou-se mais eficiente: na Fase 2 não foram observados pontos fora de controle (zero alarmes), ao passo que o gráfico **ZIP** registrou dois sinais acima do limite superior, destacados em verde, amostras #(55) e #(62).¹ Esse resultado indica que, sob geração **GZMG- u** , o uso de um modelo de mesma família para estabelecer os limites produz fronteiras mais adequadas à variabilidade do processo, reduzindo alarmes desnecessários quando comparado ao ZIP.

4.1.2 Dados de Poisson Inflado de Zeros, ZIP

A função de massa de probabilidade é dada por (18):

$$P(Y = y) = \begin{cases} \omega + (1 - \omega) \exp(-\lambda), & y = 0, \\ \frac{(1 - \omega) \exp(-\lambda) \lambda^y}{y!}, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

¹ Os índices referem-se à numeração sequencial das amostras no eixo x , iniciando em 1. A Fase 2 começa imediatamente após $m = 50$.

em que:

- Y = variável aleatória de não conformidade em uma unidade amostral;
- λ = média de não conformidade em uma unidade amostral;
- ω = parâmetro que representa a proporção extra de não conformidades iguais a zero em uma unidade amostral.

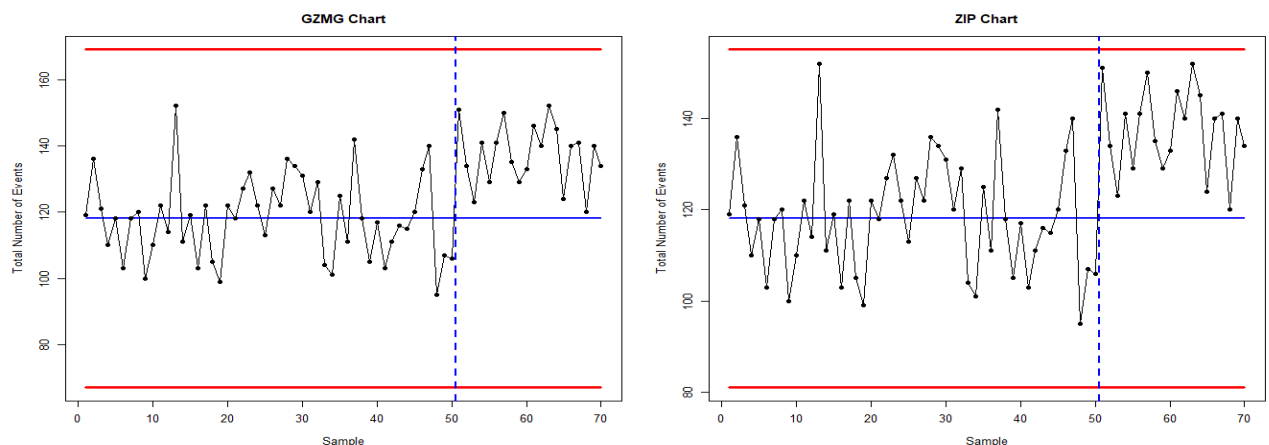
Além disso, a esperança e variância são dadas por:

$$E(Y) = \mu = (1 - \omega)\lambda \quad \text{e} \quad V(Y) = \mu + \left(\frac{\omega}{1 - \omega} \right) \mu^2. \quad (2)$$

Nota: quando $\omega = 0$, tem-se a distribuição de Poisson.

Dessa forma, considerando-se (1) na presente aplicação, foram geradas $m = 50$ amostras de tamanho $n = 100$ a partir de uma distribuição ZIP ($\lambda = 1.5$, $\omega = 0.2$), com o objetivo de comparar o desempenho dos gráficos de controle GZMG- u e ZIP, principalmente na Fase 2. Mais especificamente, na Fase 1 foram calculados os limites de controle de ambos os gráficos a partir das referidas $m = 50$ amostras. Na Fase 2, foram simuladas $m^* = 70$ novas amostras de tamanho $n = 100$ provenientes da mesma distribuição ZIP, porém com os últimos 20 dados alterados pelo parâmetro $\lambda = 1.7$, representando um deslocamento moderado no processo. Em seguida, para ambos os gráficos de controle, verificou-se a ocorrência (ou não) de alarmes falsos nas 50 primeiras amostras e o número de rodadas até que as primeiras das 20 amostras fora de controle pudessem ser detectadas. Os parâmetros do ZIP foram estimados via máxima verossimilhança, e os limites do ZIP- u e do GZMG- u foram obtidos a partir das primeiras 50 amostras (Fase 1).

Figura 20 – Comparação de desempenho dos GZMG- u e ZIP, Gupta, Gupta e Tripathi (1996), ambos construídos a partir de amostras de distribuição de ZIP (Fase 2)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 20 ilustra esta aplicação, na qual os pontos (amostras) à direita da linha tracejada azul correspondem às observações perturbadas (fora de controle). As linhas horizontais vermelhas indicam os limites superior (UCL) e inferior (LCL), enquanto a linha azul contínua representa a linha central (CL).

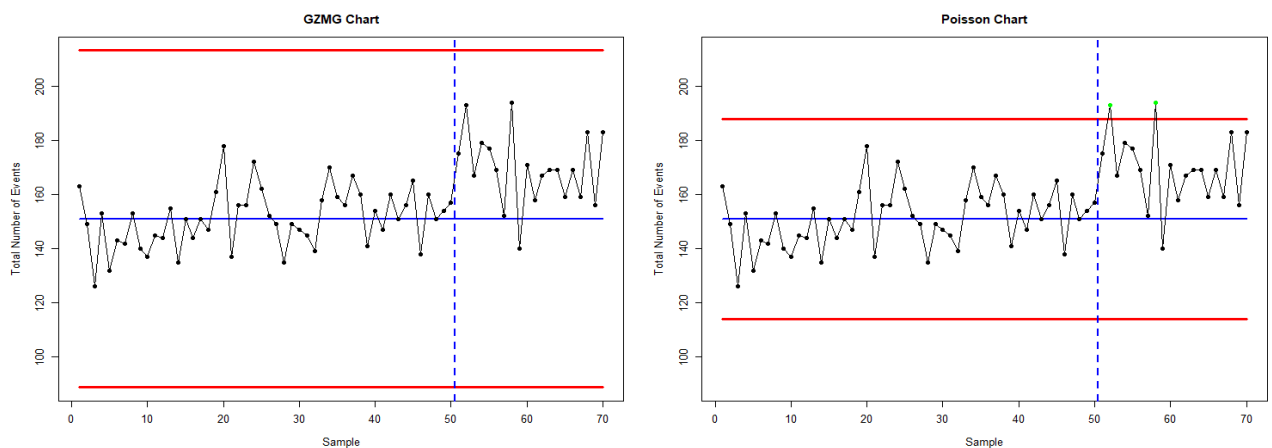
Essa análise mostra que, para esse experimento, ambos os gráficos (GZMG- u e ZIP) conseguiram detectar o deslocamento ocorrido na Fase 2. Entretanto, observa-se que o gráfico GZMG- u apresentou maior estabilidade durante a fase em controle, reduzindo a chance de alarmes falsos quando comparado ao gráfico ZIP. Por outro lado, ambos os gráficos tiveram desempenho semelhante em termos de detecção das amostras fora de controle.

Assim, os resultados sugerem que o gráfico baseado na distribuição GZMG- u pode se constituir como uma alternativa relevante, no que tange ao gráfico ZIP tradicional, especialmente em situações práticas, em que a ocorrência de zeros inflacionados ou sobredispersão pode comprometer a confiabilidade do monitoramento.

4.1.3 Dados de Poisson

Nesta aplicação, foram geradas $m = 50$ amostras de tamanho $n = 100$ a partir de uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1.5$. O objetivo foi comparar o desempenho do gráfico GZMG- u com o gráfico tradicional de Poisson, principalmente na Fase 2. Mais especificamente, na Fase 1, foram calculados os limites de controle de ambos os gráficos a partir das $m = 50$ amostras. Na Fase 2, foram simuladas novas $m^* = 70$ amostras de tamanho $n = 100$, provenientes da mesma distribuição (Poisson), mas com as últimas 20 amostras perturbadas por um deslocamento no parâmetro para $\lambda = 1.7$. Para ambos os gráficos de controle estimados, avaliou-se a ocorrência (ou não) de alarmes falsos nas primeiras 50 amostras e o número de rodadas até a detecção da primeira das 20 amostras fora de controle. Os parâmetros foram estimados por máxima verossimilhança e os limites de ambos os gráficos foram fixados a partir das 50 amostras de Fase 1.

Figura 21 – Comparação de desempenho dos GZMG- u e Poisson, em que $\omega = 0$ para (1), ambos construídos a partir de amostras de distribuição de Poisson (Fase 2)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

A Figura 21 ilustra essa aplicação, em que os pontos (amostras) à direita da linha vertical tracejada em azul correspondem às observações perturbadas (fora de controle). Além disso, as linhas horizontais vermelhas representam o UCL e o LCL, a linha horizontal azul representa o CL, e os pontos verdes indicam os sinais de fora de controle.

Os resultados mostram que, para as amostras sob controle (Fase 1), o gráfico GZMG- u não produziu alarmes falsos, enquanto o gráfico baseado na Poisson identificou dois alarmes falsos. Esse comportamento evidencia o melhor desempenho do modelo GZMG- u em termos de robustez e confiabilidade no cenário em que o processo está sob controle. Na segunda fase (fora de controle), ambos os gráficos detectaram rapidamente o deslocamento, apresentando sensibilidade semelhante ao aumento moderado de λ . Entretanto, a vantagem do GZMG- u reside em sua menor taxa de alarmes falsos, o que o torna uma ferramenta de monitoramento mais estável e consistente.

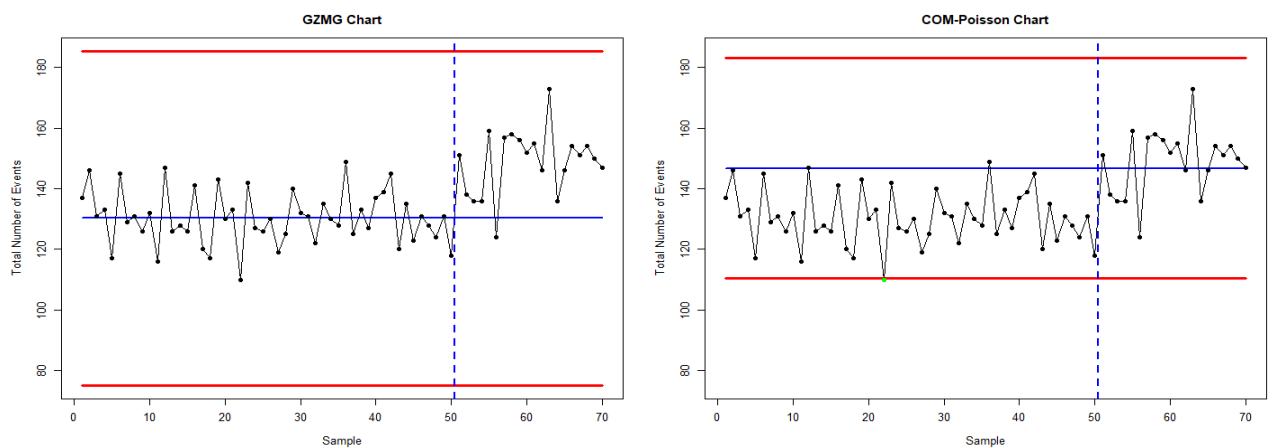
Em resumo, este exemplo para dados simulados evidencia que o gráfico de controle baseado no GZMG- u pode oferecer desempenho superior ao gráfico tradicional de Poisson, especialmente na redução de alarmes falsos, sem perder capacidade de detecção quando ocorre uma real mudança no processo. Assim, o gráfico GZMG- u consiste em uma alternativa útil ao gráfico de Poisson no monitoramento de processos de contagem.

4.1.4 Dados de COM-Poisson

Inicialmente, vale destacar que a principal diferença entre os modelos probabilísticos de Poisson e COM-Poisson reside na flexibilidade em modelar a variância dos dados. A distribuição de Poisson assume que a média e a variância são iguais (equidispersão), enquanto a distribuição COM-Poisson permite que a variância seja maior ou menor que a média (sobre ou subdispersão), oferecendo maior adaptabilidade a diferentes conjuntos de dados.

Assim como na subseção “Dados de Poisson”, a Figura 22 apresenta a comparação entre os gráficos de controle baseados no modelo GZMG- u (à esquerda) e no modelo COM-Poisson (à direita), considerando novamente o cenário experimental com $m = 50$ amostras de Fase 1 e $m_2 = 20$ amostras de Fase 2, cada uma com $n = 100$ unidades. Para a Fase 2, foi inserido um pequeno deslocamento no parâmetro de intensidade, de modo a avaliar a sensibilidade de ambos os gráficos à ocorrência de mudanças no processo. O ajuste COM-Poisson foi realizado via estimação de (λ, ν) utilizando rotinas do pacote `compoisson` (Dunn 2012). Os limites foram calculados a partir de Fase 1.

Figura 22 – Comparação de desempenho dos GZMG- u e COM-Poisson, ambos construídos a partir de amostras de distribuição de COM-Poisson (Fase 2)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

No caso do gráfico GZMG- u , observa-se que a linha central e os limites de controle (LCL e UCL) foram ajustados levando em conta a sobredispersão induzida pela estrutura do modelo, o que confere maior flexibilidade na representação da variabilidade dos dados. Os pontos amostrais permanecem dentro dos limites na Fase 1, indicando um adequado controle do erro tipo I. A mudança introduzida na Fase 2 provoca uma tendência ascendente que se aproxima dos limites superiores, evidenciando razoável capacidade de detecção do deslocamento.

A Figura 22 mostra os gráficos de controle estimados aplicados às amostras da Fase 2, a partir dos quais pode-se observar que, de forma semelhante à subseção anterior, o gráfico de controle baseado no GZMG- u apresentou melhores resultados do que o gráfico baseado na COM-Poisson para as amostras sob controle. Embora a COM-Poisson represente a verdadeira distribuição geradora dos dados, o gráfico GZMG- u não apresentou nenhum falso alarme, enquanto o gráfico *cm_{pu}* encontrou um. Tal desempenho excelente do gráfico GZMG- u é mantido ao analisar amostras fora de controle, mostrando que o gráfico GZMG- u também pode ser uma alternativa útil e mais simples ao gráfico *cm_{pu}*.

4.1.5 Dados de Geométrica

A função massa de probabilidade da distribuição Geométrica é dada por (Krishnamoorthy 2006):

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

em que Y é uma variável aleatória que representa o número de falhas até a primeira ocorrência de sucesso e p a probabilidade de sucesso em cada ensaio.

As medidas de tendência central e dispersão são dadas por:

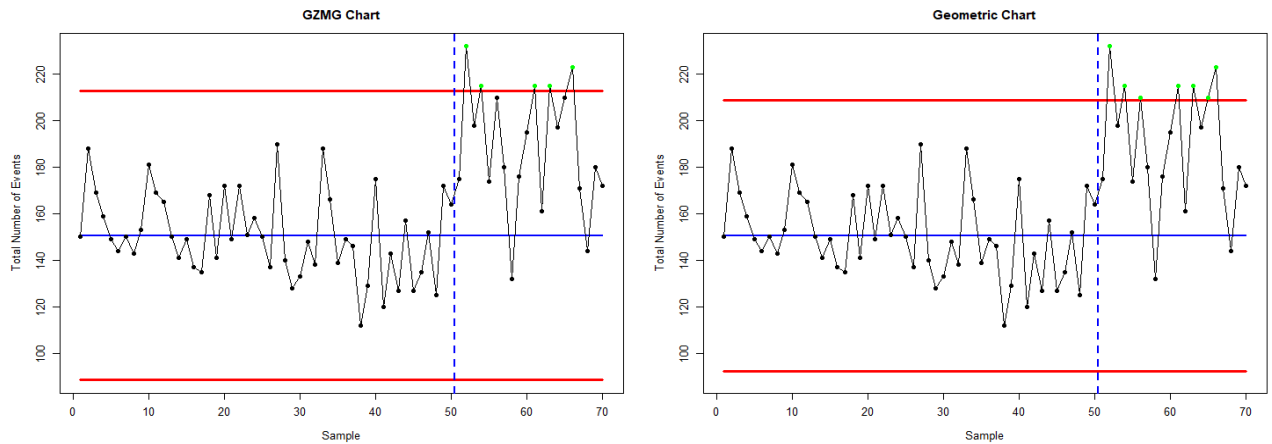
$$E(Y) = \frac{1 - p_g}{p_g}, \quad V(Y) = \frac{1 - p_g}{p_g^2}, \quad \text{assimetria} = \frac{2 - p_g}{\sqrt{1 - p_g}}. \quad (4)$$

Quando o valor de p_g é desconhecido, pode-se estimá-lo a partir da amostra por:

$$\hat{p}_g = \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right)^{-1}. \quad (5)$$

Sendo assim, nesta etapa, considera-se a simulação de dados provenientes de uma distribuição Geométrica, de acordo com a função de massa de probabilidade descrita anteriormente. O procedimento experimental foi conduzido com 50 amostras na Fase 1, utilizadas para a estimação dos limites de controle, e mais 20 amostras na Fase 2, nas quais foi introduzido um pequeno deslocamento no parâmetro da distribuição, com o intuito de avaliar a sensibilidade dos gráficos diante de mudanças sutis no processo.

Figura 23 – Comparação de desempenho dos GZMG- u e Geométrica, ambos construídos a partir de amostras de distribuição Geométrica (Fase 2)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

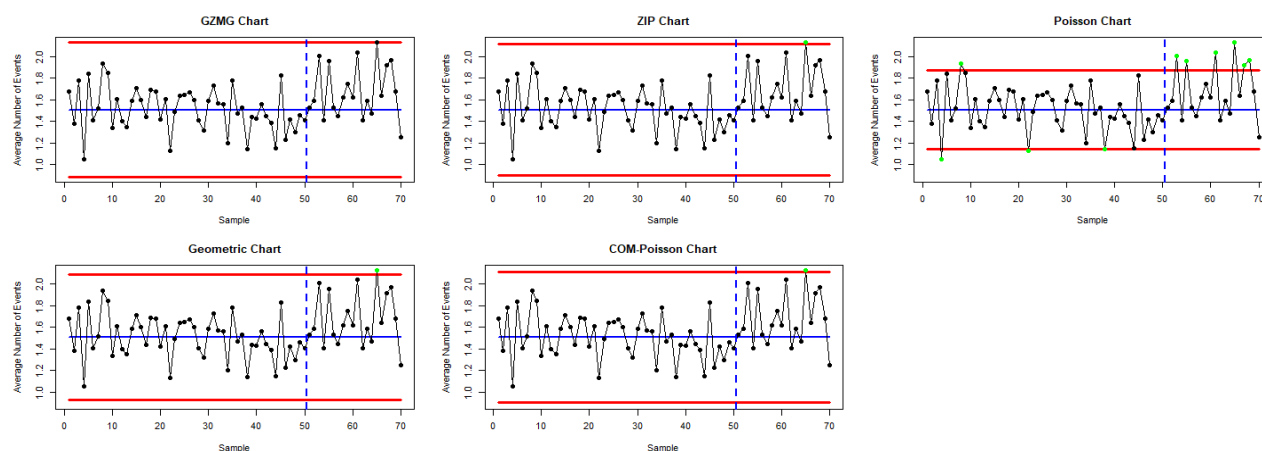
A Figura 23 apresenta, lado a lado, os gráficos de controle obtidos pelos modelos Geométrico (à direita) e GZMG- u (à esquerda). Observa-se que ambos os gráficos conseguem detectar o deslocamento na Fase 2, evidenciado pelo surgimento de pontos fora dos limites superiores de controle (marcados em verde). No entanto, mesmo com os dados sendo *gerados a partir da Geométrica*, o gráfico baseado no modelo GZMG- u mostrou-se mais eficiente.

Mais especificamente, na Fase 2, o gráfico Geométrico apresentou 7 pontos fora de controle, enquanto o gráfico GZMG- u registrou apenas 5 pontos. Esse comportamento sugere que o modelo GZMG- u forneceu limites de controle mais ajustados à variabilidade real dos dados, evitando assim um número excessivo de alarmes. Ou seja, mesmo fora do seu contexto de geração, o modelo GZMG- u se mostrou competitivo e até mais eficiente que o modelo verdadeiro (Geométrico) em termos de monitoramento estatístico.

4.1.6 Dados de GZMG

Nesta última aplicação, a Figura 24 apresenta a comparação entre os gráficos de controle baseados nos modelos GZMG- u , ZIP, Poisson, Geométrico e COM-Poisson. Os limites foram estimados a partir da Fase 1 ($m = 50$ amostras) e avaliados em nova sequência de $m^* = 20$ amostras (Fase 2), geradas de acordo com a distribuição GZMG- u com um leve deslocamento na média.

Figura 24 – Comparação de desempenho dos GZMG- u , ZIP, Gupta, Gupta e Tripathi (1996), Poisson, COM-Poisson e Geométrico, ambos construídos a partir de amostras de distribuição de GZMG- u (Fase 2)



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Observa-se que, na Fase 1, todos os modelos, com exceção do modelo de Poisson, permanecem sob controle, com as séries situando-se dentro dos limites estabelecidos. Entretanto, na Fase 2, surgem diferenças importantes entre os modelos. O gráfico baseado em GZMG- u identifica nenhum ponto fora do limite superior de controle, comportamento não reproduzido pelo modelo ZIP, que apresenta um único ponto fora (amostra #65). Os modelos Geométrico e COM-Poisson apresentam resultados semelhantes, também com um ponto acima do limite superior (#65). O modelo Poisson, por sua vez, mostra-se o mais sensível: além de diversos pontos fora do limite inferior (#4, #21 e #38), apresenta ainda múltiplas violações no limite superior (#9, #52, #54, #51, #53, #60, #63, #65 e #66).

Esses resultados indicam que, apesar dos dados terem sido gerados por um processo GZMG- u , o gráfico de controle baseado nesse modelo mostra-se mais eficiente, não identificando nenhum ponto fora de controle e evitando falsos alarmes. O gráfico ZIP apresenta desempenho semelhante aos gráficos Geométricos. Diferente disso, o modelo COM-Poisson mostra desempenho intermediário, com um ponto fora de controle cada. Já o gráfico Poisson se mostrou excessivamente sensível, gerando múltiplos sinais espúrios e, portanto, menos indicado nesse cenário. Assim, os resultados reforçam a adequação do modelo GZMG- u como alternativa relevante para o monitoramento de processos com inflação e deflação de zeros e características de sobredispersão.

Para consolidar os achados das subseções anteriores, apresenta-se a seguir a Tabela 30, síntese que organiza, de forma comparativa, os modelos avaliados nos cenários simulados, o regime de dispersão/zeros mais característico de cada um e a tendência de desempenho em termos de ARL. Essa visão agregada facilita a leitura transversal dos resultados e evidencia os padrões recorrentes discutidos nas figuras e descrições das Fases 1 e 2, sem substituir as análises detalhadas. Em particular, o quadro ressalta quando o GZMG- u se mostra mais estável e/ou mais sensível, bem como as situações em que ZIP, COM-Poisson, Geométrico e Poisson apresentam desempenho intermediário ou inferior.

Tabela 30 – Síntese comparativa nos cenários simulados: modelo, regime dominante de dispersão/zeros e tendência observada de desempenho (ARL)

Modelo	Regime típico (simulações)	Tendência de ARL (desempenho)
GZMG- <i>u</i>	Sobredispersão com inflação/-deflação de zeros	<i>Menor</i> ARL sob sobre/zeros; <i>estável</i> em Fase 1.
ZIP- <i>u</i>	Sobredispersão com inflação de zeros	<i>Semelhante</i> ao GZMG em muitos cenários; ARL ligeiramente maior.
COM-Poisson (cm- <i>pu</i> /cm- <i>pc</i>)	Sobre <i>ou</i> subdispersão (flexível)	<i>Intermediário</i> ; bom em subdispersão; <i>1 falso alarme</i> em alguns cenários.
Geométrico	Sobre em parte dos cenários simulados	<i>Intermediário</i> ; às vezes mais pontos fora (ARL maior).
Poisson	Equidispersão (referência)	<i>Maior</i> ARL sob sobredispersão; mais falsos alarmes.

Nota. “Tendência de ARL” resume a evidência empírica descrita nas subseções: Gráficos com menores ARL detectam mudanças mais rapidamente (com maior risco de falsos alarmes se limites estreitos); Gráficos mais estáveis em Fase 1 tendem a reduzir falsos alarmes. Resultados qualitativos alinhados às figuras e descrições de Fase 1/Fase 2.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Em síntese, o GZMG-*u* apresentou desempenho equivalente ou superior ao ZIP-*u* nos cenários com sobredispersão e zeros, com menor variabilidade do ARL e limites mais estáveis em Fase 1, enquanto os gráficos *cm-*pu*/cm-*pc** serviram como referência útil para reforçar a superioridade do GZMG em sobredispersão.

4.2 DADOS REAIS

Nesta seção, apresenta-se uma aplicação dos gráficos de controle baseados nos modelos GZMG-*u*, ZIP, Poisson, Geométrico e COM-Poisson a um conjunto de dados reais proveniente da base NMES1988, amplamente utilizada na literatura de modelagem para dados de contagem. A variável de interesse considerada foi *visits*, que representa o número de visitas médicas realizadas por indivíduos idosos. A escolha dessa base justifica-se pelo fato de a variável resposta apresentar natureza discreta, forte presença de zeros e acentuada sobredispersão, características particularmente adequadas ao escopo desta tese, cujo foco recai sobre o monitoramento estatístico de processos de contagem sob inflação e deflação de zeros.

Na análise exploratória inicial da variável *visits*, verificou-se média amostral igual a 5.77 e variância igual a 45.68, resultando em uma razão variância/média de aproximadamente 7.91. Esse valor evidencia forte sobredispersão em relação ao modelo de Poisson, cuja principal suposição é a equidispersão entre média e variância. Além disso, a proporção observada de zeros foi de 0.15, ao passo que a proporção de zeros esperada sob o modelo de Poisson foi de apenas 0.01. Mesmo sob o modelo binomial negativo, mais flexível em relação à variabilidade, a proporção esperada de zeros foi de 0.14, ainda inferior à observada. Em conjunto, esses resultados indicam que a variável analisada apresenta excesso de zeros e variabilidade incompatíveis com distribuições clássicas mais restritivas, fornecendo motivação empírica adicional para o uso de modelos mais flexíveis no contexto de gráficos de controle.

Como o objetivo desta aplicação é construir gráficos de controle na escala dos totais, de modo análogo aos estudos simulados desenvolvidos nos capítulos anteriores, as observações individuais da variável

`visits` foram reorganizadas em subgrupos de tamanho fixo $n = 100$. Esse procedimento gerou 44 subgrupos completos, cada um representado pelo total de visitas médicas em sua respectiva amostra. Os 20 primeiros subgrupos foram utilizados na Fase 1, destinada à estimação dos parâmetros e à construção dos limites de controle, enquanto os 24 subgrupos restantes compuseram a Fase 2, empregada para o monitoramento do processo e avaliação da capacidade de sinalização de cada gráfico.

Com base na Fase 1, a linha central dos gráficos foi definida pelo total médio esperado de eventos por subgrupo, isto é, pelo produto entre a média unitária estimada e o tamanho do subgrupo. Assim, obteve-se $CL = 604.6$ para todos os modelos. Os limites de controle inferior (LCL) e superior (UCL) foram obtidos na escala dos totais, preservando a mesma estrutura metodológica adotada ao longo da tese: para o gráfico GZMG- u , utilizou-se a variância teórica derivada do modelo reparamentizado proposto; para o gráfico ZIP, a proporção de inflação de zeros foi estimada por momentos; para o gráfico Poisson, assumiu-se variância igual à média; para o gráfico Geométrico, utilizou-se a variância teórica correspondente; e, para o gráfico COM-Poisson, adotou-se uma aproximação baseada em momentos amostrais. Assim, embora todos os gráficos compartilhem a mesma linha central, os limites de controle diferem entre si em função das distintas estruturas de dispersão impostas por cada modelo.

Ressalta-se que a linha central foi calculada com base apenas nas amostras da Fase 1, conforme o protocolo de construção dos gráficos de controle, razão pela qual seu valor difere da média global da variável `visits` calculada considerando todas as observações da base.

Tabela 31 – Comparação entre os limites de controle obtidos para cada modelo na escala dos totais, com $\alpha = 0.1$

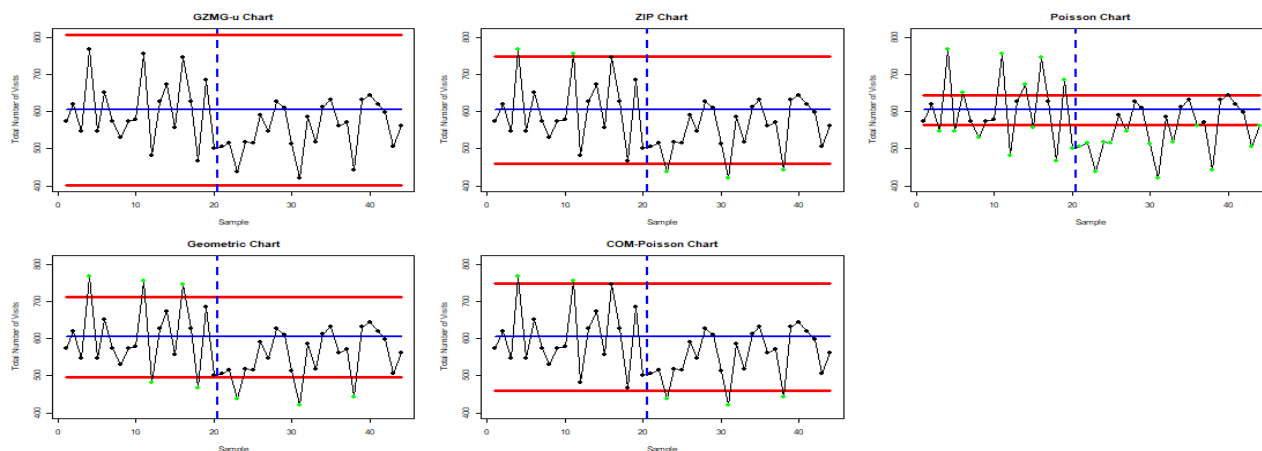
Modelo	LCL	CL	UCL
GZMG- u	401.63	604.60	807.57
ZIP	460.05	604.60	749.15
Poisson	564.16	604.60	645.04
Geométrico	497.24	604.60	711.96
COM-Poisson	460.05	604.60	749.15

Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

A Tabela 31 mostra claramente que o gráfico de Poisson produziu os limites mais estreitos entre todos os modelos comparados, com $LCL = 564.16$ e $UCL = 645.04$. Em contrapartida, o gráfico GZMG- u apresentou os limites mais amplos, com $LCL = 401.63$ e $UCL = 807.57$, refletindo sua maior flexibilidade para acomodar a sobredispersão e o comportamento anômalo dos zeros. Os gráficos ZIP e COM-Poisson resultaram exatamente nos mesmos limites, com $LCL = 460.05$ e $UCL = 749.15$, enquanto o gráfico Geométrico apresentou comportamento intermediário, com $LCL = 497.24$ e $UCL = 711.96$.

A Figura 25 apresenta os cinco gráficos de controle obtidos para os dados reais. A linha tracejada azul indica a separação entre a Fase 1 e a Fase 2. Observa-se, inicialmente, que os gráficos baseados nos modelos GZMG- u , ZIP, Geométrico e COM-Poisson produzem limites de controle mais compatíveis com a variabilidade empírica dos dados do que o gráfico de Poisson. Esse resultado era esperado, uma vez que a variável `visits` apresenta elevada sobredispersão e excesso de zeros, características que tornam inadequada a utilização de um modelo equidisperso para fins de monitoramento.

Figura 25 – Comparação dos gráficos GZMG- u , ZIP, Poisson, Geométrico e COM-Poisson aplicados aos totais da variável `visits` da base NMES1988.



Fonte: Elaborado pelos autores (2026)

Com base na Figura 25, nota-se que o gráfico de Poisson foi o mais sensível entre os modelos considerados, justamente por apresentar a menor largura entre limites. Como consequência, ele sinalizou o maior número de pontos fora de controle, tanto na Fase 1 quanto na Fase 2. Embora essa maior frequência de alarmes possa, em princípio, ser interpretada como maior capacidade de detecção, em contextos de forte sobredispersão tal comportamento tende a indicar inadequação do modelo, pois limites excessivamente estreitos passam a reagir à variabilidade natural dos dados como se ela fosse evidência de descontrole.

Em contraste, o gráfico GZMG- u apresentou os limites mais amplos, o que se refletiu em monitoramento mais estável e em menor incidência de alarmes espúrios. Observando a Figura 25, verifica-se que o gráfico proposto acompanha de forma mais realista a oscilação dos totais amostrais, sem classificar como fora de controle variações que parecem compatíveis com a estrutura probabilística dos dados. Esse resultado é coerente com a formulação teórica do modelo GZMG- u , construída precisamente para acomodar cenários em que a distribuição da variável resposta apresenta inflação ou deflação de zeros e dispersão superior àquela prevista pelos modelos clássicos.

Os gráficos ZIP e COM-Poisson apresentaram desempenho muito semelhante, não apenas do ponto de vista visual, mas também em termos dos limites calculados, que coincidiram exatamente. Ambos produziram limites mais amplos que os do gráfico de Poisson e menos amplos que os do GZMG- u , configurando uma alternativa intermediária no monitoramento. Já o gráfico Geométrico também apresentou comportamento intermediário, com limites mais afastados que os do Poisson, porém mais restritos do que os obtidos sob o modelo proposto. Ainda que esses três modelos tenham reduzido a incidência de sinalizações em relação ao gráfico de Poisson, o GZMG- u mostrou-se mais aderente à variabilidade observada nos dados.

Do ponto de vista aplicado, os resultados obtidos com a base NMES1988 reforçam a principal conclusão desta tese: a escolha do modelo probabilístico subjacente ao gráfico de controle exerce influência decisiva sobre o desempenho do monitoramento. Quando os dados apresentam excesso de zeros e sobredispersão acentuada, modelos mais rígidos, como o Poisson, tendem a induzir sinalizações excessivas e interpretações potencialmente equivocadas sobre a estabilidade do processo. Em contraste, modelos mais flexíveis, como o GZMG- u , conseguem produzir limites analíticos mais compatíveis com a

estrutura real dos dados, promovendo um melhor equilíbrio entre sensibilidade à detecção e controle de alarmes falsos.

Assim, a aplicação a dados reais mostra que o gráfico $GZMG-u$ não apenas preserva coerência com os resultados obtidos em simulação, como também se destaca empiricamente frente aos gráficos concorrentes considerados nesta tese. Em especial, sua superioridade decorre da capacidade de acomodar simultaneamente sobredispersão e comportamento anômalo na frequência de zeros, sem sacrificar a interpretação operacional do gráfico nem a estabilidade dos limites de controle. Esses achados reforçam a utilidade prática do modelo proposto em situações reais de monitoramento de contagens, especialmente quando a distribuição dos dados se afasta das hipóteses clássicas de equidispersão.

Em síntese, os resultados desta aplicação empírica confirmam que o gráfico de controle $GZMG-u$ constitui uma alternativa estatisticamente consistente e operacionalmente robusta para o monitoramento de processos de contagem com inflação e deflação de zeros bem como acomoda os tipos de dispersão considerados nesta tese (equidispersão, subdispersão e sobredispersão). Ao comparar seu desempenho com os gráficos baseados nas distribuições ZIP, Poisson, Geométrica e COM-Poisson, verifica-se que o modelo proposto oferece interpretação mais estável e menor propensão a alarmes espúrios, reforçando a contribuição metodológica desta tese tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado.

4.3 CONCLUSÕES DO CAPÍTULO

As aplicações com dados simulados e reais mostram que o $GZMG-u$ é uma alternativa robusta em relação às cartas tradicionais em contextos com inflação/deflação de zeros e sobredispersão, oferecendo limites analíticos estáveis, menor incidência de alarmes falsos em Fase 1 e sensibilidade adequada a deslocamentos moderados em Fase 2. Em diversos cenários, o desempenho foi equivalente ou superior ao $ZIP-u$, enquanto cm_{pu}/cm_{pc} serviram como referência para confirmar vantagens em sobredispersão. Os resultados reforçam a aplicabilidade prática dos gráficos baseados no $GZMG-u$ em processos de contagem modernos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, ampliou-se a comparação para gráficos de controle construídos a partir de cinco famílias de modelos de contagem: GZMG- u (geométrico modificador por zeros na escala de unidades), ZIP, Poisson, Geométrico e COM-Poisson. A motivação foi a mesma defendida por Castellares, Ferrari e Lemonte (2018): processos de contagem reais frequentemente exibem zeros em excesso/defeito e (sub/sobre)dispersão, condições sob as quais os gráficos clássicos c e u podem apresentar taxas indesejáveis de alarmes falsos ou baixa capacidade de detecção.

A distribuição discreta de dois parâmetros, nomeada de Modelo Geométrico Modificado de Zeros, introduzida por Lotka (1931) e reparametrizada neste trabalho, foi estabelecida como uma alternativa viável para modelar dados inflados de zeros. Isto é, o presente modelo é capaz de lidar com dados de contagem que apresentam deflação ou inflação de zeros, além de capturar tanto a equidispersão e a subdispersão quanto à sobredispersão. Como demonstrado pelos exemplos apresentados no Capítulo 3, os gráficos de controle baseados em GZMG podem ser escolhas/alternativas úteis aos gráficos tradicionais (como os gráficos c e u derivados da distribuição de Poisson) para o monitoramento de processos de dados de contagem sobredispersos. Notavelmente, os gráficos GZMG propostos forneceram resultados satisfatórios (poucos falsos alarmes e rápida detecção de mudanças/deslocamentos no processo), mesmo quando os dados amostrais foram gerados a partir da distribuição COM-Poisson.

Ademais, nesta pesquisa, para efeito de comparação, foram gerados dados, por meio de simulações, a partir das distribuições de COM-Poisson, Poisson, ZIP e Geométrica. Por sua vez, a esses dados, aplicaram-se os limites de controle da GZMG.

Nas Seções 3.2 e 3.3, os resultados das simulações também demonstraram o excelente desempenho dos gráficos GZMG, propostos sob diferentes cenários, ou seja, variando o número de amostras da Fase 1, o tamanho da amostra, o parâmetro da distribuição GZMG e a probabilidade de alarme falso. Nesse caso, o critério do número médio de amostras até o sinal, ARL , foi usado para medir o desempenho do gráfico de controle. Em análises adicionais, verificou-se que, ao considerar os parâmetros $m = \{50, 100, 200\}$ e $\theta = \{3, 5\}$

- os valores de ARL_0 convergem rapidamente para 10 e 100 com α igual a 0.1 e 0.01, respectivamente. Em muitos casos, os valores são exatamente iguais a 10 e 100 (Tabela 8);
- os valores de ARL_1 , à medida que n aumenta, convergem para 1 (Tabela 13 a 24).

Com base na perspectiva metodológica discutida por Montgomery (2019), Sellers (2012) e Alevizakos e Tasias (2024), analisou-se o conjunto de dados reais da base NMES1988, considerando a variável *visits*, que representa o número de visitas médicas realizadas por indivíduos idosos. Para compatibilizar essa aplicação com a estrutura dos gráficos de controle desenvolvidos nesta tese, as observações individuais foram reorganizadas em subgrupos de tamanho $n = 100$, resultando em 44 amostras completas de totais. Destas, $m = 20$ amostras de Fase 1 foram utilizadas para estimar os limites de controle, enquanto as 24 amostras restantes compuseram a Fase 2 de monitoramento. Para garantir uma comparação coerente, os limites foram construídos na escala de totais a partir da média por unidade estimada em Fase 1 e das variâncias teóricas unitárias de cada modelo (no caso do GZMG- u , em que a variância é dada por

(5), tomando $\pi = 0.6$; para ZIP, a variância foi obtida por momentos a partir dos totais de Fase 1; para COM-Poisson, adotou-se aproximação por momentos). Utilizou-se como probabilidade de alarme falso, $\alpha = 0.1$.

A Tabela 31 evidencia as diferenças de dispersão inerentes aos modelos, as quais se refletem diretamente nas larguras distintas das bandas de controle. Em particular, o gráfico Poisson apresenta a menor variância, produzindo os limites mais estreitos ($LCL = 564.16$ e $UCL = 645.04$), ao passo que o gráfico GZMG- u apresenta a maior amplitude ($LCL = 401.63$ e $UCL = 807.57$), por incorporar explicitamente sobredispersão e o efeito de inflação/deflação de zeros via π . Os gráficos ZIP e COM-Poisson produziram limites idênticos ($LCL = 460.05$ e $UCL = 749.15$), enquanto o gráfico Geométrico apresentou comportamento intermediário ($LCL = 497.24$ e $UCL = 711.96$). Conforme mostrado na Figura 25, essas diferenças impactam diretamente o padrão de sinalização: o gráfico de Poisson assinalou um número substancialmente maior de pontos fora de controle, enquanto o gráfico GZMG- u se mostrou mais conservador e estável diante da variabilidade observada nos dados.

Quando há indícios de sobredispersão e/ou zeros em excesso (situação frequente em aplicações industriais e de serviços), gráficos que modelam explicitamente tais características, como GZMG- u , ZIP e COM-Poisson, tendem a controlar melhor a taxa de falso alarme em Fase 1, sem comprometer a interpretação do monitoramento em Fase 2. No conjunto real estudado, a variável `visits` apresentou média global de 5.77, variância de 45.68, razão variância/média de aproximadamente 7.91 e proporção observada de zeros igual a 0.1550, valores que evidenciam forte sobredispersão e excesso de zeros em relação ao modelo de Poisson. Nesse contexto, o gráfico GZMG- u mostrou-se particularmente robusto: mesmo apresentando banda mais ampla que a do Poisson, evitou a super-sinalização observada no gráfico clássico e produziu um monitoramento visualmente mais compatível com a estrutura probabilística dos dados. Esse comportamento reproduz, em dados reais, a mensagem central de Castellares, Ferrari e Lemonte (2018): gráficos “não-Poisson” podem ser preferíveis quando o processo se afasta da suposição de equidispersão.

5.1 CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICA E PRÁTICA.

Do ponto de vista científico, este estudo integra, por meio de um arcabouço unificado, a modelagem de inflação/deflação de zeros e de múltiplos regimes de dispersão (equidispersão, subdispersão e sobredispersão), preservando *expressões fechadas* para a soma $T = \sum_{i=1}^n X_i$ e, por consequência, *limites de controle analíticos* para gráficos tipo $\bar{X}$. Evidenciou-se, por meio de simulações de Monte Carlo, a convergência desejável de ARL_0 para os alvos teóricos e a estabilidade dos limites em Fase 1, com sensibilidade adequada em Fase 2. Além disso, ao incorporar explicitamente estruturas de zeros em excesso ou em escassez e diferentes níveis de dispersão, o modelo proposto amplia o escopo da literatura clássica de gráficos de controle para contagens, oferecendo uma alternativa teoricamente consistente a distribuições mais restritivas, como Poisson e Geométrica, e também a abordagens concorrentes, como ZIP e COM-Poisson.

Ainda no campo científico, a tese avança ao mostrar que o uso do modelo GZMG- u não se limita ao plano teórico ou à evidência obtida por simulação, mas se sustenta também em aplicação com dados reais, o que fortalece sua validade metodológica e sua relevância para problemas concretos de monitoramento. No estudo empírico com a base NMES1988, a variável `visits` apresentou forte sobredispersão e excesso

de zeros, com média global de 5.77, variância de 45.68, razão variância/média de aproximadamente 7.91 e proporção observada de zeros de 0.1550. Nesse contexto, os gráficos construídos a partir do GZMG-*u* produziram limites de controle mais compatíveis com a variabilidade observada do que os gráficos baseados no modelo de Poisson, que apresentou banda demasiadamente estreita e maior propensão à super-sinalização. Dessa forma, a contribuição científica da tese também reside em demonstrar, de forma analítica e aplicada, que a escolha do modelo probabilístico subjacente ao gráfico de controle altera substancialmente a interpretação do processo monitorado, especialmente quando os dados se afastam das hipóteses clássicas de equidispersão.

No plano prático, o GZMG-*u* oferece *robustez operacional* em processos com zeros e sobredispersão, reduzindo alarmes falsos sem sacrificar detecção. Essa característica possui implicações diretas para aplicações em Engenharia e em ambientes industriais, nos quais decisões de parada, ajuste ou intervenção no processo dependem fortemente da confiabilidade dos sinais emitidos pelo gráfico de controle. Em contextos como manufatura avançada, monitoramento de não conformidades, contagem de falhas, defeitos por lote, chamadas de manutenção, eventos de sensores, inspeção automatizada, logística, saúde operacional e sistemas produtivos instrumentados, a presença de sobredispersão e excesso de zeros é frequente. Nesses cenários, o uso de gráficos baseados em modelos inadequados, como o Poisson sob forte violação da equidispersão, pode induzir alarmes espúrios, retrabalhos, inspeções desnecessárias, custos adicionais e interpretações equivocadas sobre a estabilidade do processo. Ao produzir limites mais realistas e aderentes à variabilidade observada, o GZMG-*u* contribui para tornar o monitoramento mais confiável, economicamente racional e tecnicamente defensável.

Sob a perspectiva das Engenharias III, a contribuição prática desta tese está justamente em aproximar desenvolvimento metodológico e aplicabilidade operacional. O modelo proposto pode ser incorporado a rotinas de Controle Estatístico de Processos em linhas de produção, sistemas de qualidade, plataformas de supervisão e arquiteturas digitais conectadas, servindo como ferramenta de apoio à decisão em ambientes industriais contemporâneos. Em particular, a formulação analítica dos limites favorece sua implementação em sistemas computacionais com resposta rápida, requisito importante em aplicações de monitoramento em tempo real, manufatura inteligente e ecossistemas da Indústria 4.0. Além disso, por tratar adequadamente dados discretos com comportamento irregular de zeros e variabilidade não usual, o GZMG-*u* amplia a capacidade das organizações de monitorar processos modernos que geram dados cada vez mais complexos, heterogêneos e sensíveis a fenômenos de baixa frequência e alta variabilidade.

Além disso, os procedimentos estão *implementados em R* e o roteiro de uso favorece a adoção em rotinas de monitoramento e ambientes conectados (Indústria 4.0). Essa implementação não apenas viabiliza a reprodução dos resultados desta tese, mas também facilita a transferência do método para aplicações em empresas, laboratórios, plantas-piloto e centros de engenharia, permitindo sua adaptação a diferentes contextos de monitoramento de eventos, falhas e ocorrências. Assim, a tese oferece não apenas uma contribuição estatística original, mas também uma solução potencialmente útil para problemas reais de engenharia, qualidade e operação, reforçando seu alinhamento com a natureza aplicada do programa de doutorado e com as demandas contemporâneas por métodos mais robustos, interpretáveis e implementáveis em cenários industriais reais.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Vale destacar, portanto, que os resultados desta tese indicam diversas possibilidades de extensão metodológica e aplicada. Em consonância com os estudos de Braun (1999), Castagliola *et al.* (2014) e Castagliola e Wu (2012), destacam-se:

1. **Calibração de α por modelo** visando um ARL_0 comum (por exemplo, ≈ 370) ou uma taxa α pré-fixada, garantindo *comparabilidade estrita* entre cartas.
2. **Projetos ótimos com parâmetros estimados**, incorporando a incerteza de Fase 1 no desenho dos limites e na análise do desempenho (*design under parameter uncertainty*).
3. **Extensões para autocorrelação e tamanhos amostrais variáveis**, incluindo versões adaptativas do GZMG- u e alternativas de estabilização da variância na presença de heterogeneidade amostral.
4. **Generalizações de família**, expandindo a abordagem do GZMG- u para modelos flexíveis recém-propostos, como o Modelo Geométrico com Parâmetros Inflacionados Generalizado (IG) e o Modelo Bernoulli com Parâmetros Inflacionados Generalizado (IBer), visando cobrir novos espectros de zeros e dispersão.

Portanto, o modelo proposto representa um avanço significativo na análise e monitoramento de processos com dados de contagem, contribuindo para o aperfeiçoamento das ferramentas de qualidade na Indústria 4.0.

REFERÊNCIAS

- ALEVIZAKOS, V.; KOUKOUVINOS, C. Monitoring of zero-inflated Poisson processes with EWMA and dewma control charts. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 36, n. 1, p. 88–111, 2020.
- ALEVIZAKOS, V.; TASIAS, K. A. Monitoring of zero-inflated com-poisson processes. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, Taylor & Francis, p. 382–407, 2024. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00949655.2024.2426709>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- ALI, S.; PIEVATOLO, A.; GÖB, R. An overview of control charts for high-quality processes. **Quality and reliability engineering international**, Wiley Online Library, v. 32, n. 7, p. 2171–2189, 2016.
- BARRETO-SOUZA, W. Zero-modified geometric inar(1) process for modelling count time series with deflation or inflation of zeros. **Journal of Time Series Analysis**, v. 36, n. 6, p. 839–852, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/jtsa.12095>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- BOAVENTURA, L. L. e. a. New statistical process control charts for overdispersed count data based on the bell distribution. In: ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**. [S.l.]: SciELO Brasil, 2023. v. 95, n. 2, p. e20200246.
- BOURGUIGNON, M.; WEIß, C. H. An inar(1) process for modeling count time series with equidispersion, underdispersion and overdispersion. **TEST**, v. 26, p. 847–868, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11749-017-0543-4>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- BRAUN, W. J. Run length distributions for estimated attributes charts. **Metrika**, v. 50, n. 2, p. 121–129, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s001840050095>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- CASTAGLIOLA, P.; WU, S. Design of the c and np charts when the parameters are estimated. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, v. 19, n. 2, p. 1250010, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218539312500100>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- CASTAGLIOLA, P. *et al.* Synthetic phase ii shewhart-type attributes control charts when process parameters are estimated. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 30, n. 3, p. 315–335, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.1471>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- CASTELLARES, F.; FERRARI, S. L.; LEMONTE, A. J. On the bell distribution and its associated regression model for count data. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 56, p. 172–185, 2018.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2005.
- DUNN, J. **Compoisson**: Conway-maxwell-poisson distribution. 2012. R package version 0.3.
- FARRINGTON, P.; ANDREWS, N. Outbreak detection: application to infectious disease surveillance. In: BROOKMEYER, R.; STROUP, D. (Ed.). **Monitoring the Health of Populations: statistical principles and methods for public health surveillance**. New York: Oxford University Press, Inc, 2004. p. 203–231.
- FATAHI, A. A. *et al.* Zero inflated Poisson EWMA control chart for monitoring rare health-related events. **Journal of Mechanics in Medicine and Biology**, World Scientific, v. 12, n. 04, p. 1250065, 2012.
- FERNANDES, F. H.; BOURGUIGNON, M.; HO, L. L. Control charts to monitor integer valued autoregressive process with inflation or deflation of zeros. **Journal of Statistics and Management Systems**, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/09720510.2020.1721933>. Acesso em: 10 jan. 2026.

- FIGUEIREDO, F.; FIGUEIREDO, A.; GOMES, M. **A control chart for zero-inflated semi-continuous data**. 2023. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/388674753>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.
- GUPTA, P. L.; GUPTA, R. C.; TRIPATHI, R. C. Analysis of zero-adjusted count data. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 23, p. 207–218, 1996.
- HE, B. *et al.* On the estimation error in zero-inflated Poisson model for process control. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, World Scientific, v. 10, n. 02, p. 159–169, 2003.
- HE, S.; HUANG, W.; WOODALL, W. H. CUSUM charts for monitoring a zero-inflated Poisson process. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 181–192, 2012.
- JENSEN, W. A. *et al.* Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. **Journal of Quality Technology**, v. 38, n. 4, p. 349–364, 2006.
- JOHNSON, N. L.; KEMP, A. W.; KOTZ, S. **Univariate discrete distributions**. 3rd. ed. Hoboken: Wiley, 2005.
- KATEMEE, N. Control charts for zero-inflated poisson models. **Applied Mathematical Sciences**, HIKARI Ltd., North Macedonia, v. 6, n. 56, p. 2791–2803, 2012.
- KATEMEE, N.; MAYUREESAWAN, T. Nonconforming control charts for Zero-Inflated Poisson distribution. **World Acad Sci Eng Technol**, Citeseer, v. 69, p. 149–155, 2012.
- KATEMEE, N.; MAYUREESAWAN, T. Control charts for monitoring the zero-inflated generalized Poisson processes. **Thai Journal of Mathematics**, v. 11, n. 1, p. 237–249, 2013.
- KOTHARI, C. R. **Research methodology: Methods and techniques**. 2nd revised. ed. New Delhi: New Age International Publishers, 2013.
- KRISHNAMOORTHY, K. **Handbook of statistical distributions with applications**. New York: Taylor & Francis Group, 2006. 71–73 p.
- LEONG, R. N. F.; TAN, D. S. Y. Some zero inflated Poisson-based combined exponentially weighted moving average control charts for disease surveillance. **Philipp Stat**, v. 64, p. 17–28, 2015.
- LOTKA, A. J. The family as a unit of reproduction. **Human Biology**, v. 3, n. 3, p. 293–309, 1931.
- MAHMOOD, T.; XIE, M. Models and monitoring of zero-inflated processes: The past and current trends. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 35, n. 8, p. 2540–2557, 2019.
- MIGUEL, P. A. C. *et al.* **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. [S.l.]: John wiley & sons, 2019.
- MUSTAFA, F.; SHERWANI, R.; RAZA, M. A new exponentially weighted moving average control chart to monitor count data with applications in healthcare and manufacturing. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00949655.2023.2220859>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- RAKITZIS, A. C.; CASTAGLIOLA, P. The effect of parameter estimation on the performance of one-sided Shewhart control charts for zero-inflated processes. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 45, n. 14, p. 4194–4214, 2016.

RAKITZIS, A. C.; CASTAGLIOLA, P.; MARAVELAKIS, P. E. On the modelling and monitoring of general inflated Poisson processes. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 32, n. 5, p. 1837–1851, 2016.

RAKITZIS, A. C.; MARAVELAKIS, P. E.; CASTAGLIOLA, P. CUSUM control charts for the monitoring of zero-inflated binomial processes. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 32, n. 2, p. 465–483, 2016.

RAKITZIS A. C.; CASTAGLIOLA, P. Control charts for zero-inflated processes with estimated parameters. In: **Conference Paper**. [S.l.: s.n.], 2014. Available at <https://www.researchgate.net/publication/276144975>.

SAGHIR, A.; LIN, Z. Control charts for dispersed count data: An overview. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 31, n. 5, p. 725–739, 2015.

SELLERS, K. F. A generalized statistical control chart for over- or under-dispersed data. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 28, n. 1, p. 59–65, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/qre.1212>. Acesso em: 10 jan. 2026.

SEN, P. K.; SINGER, J. M.; LIMA, A. C. Pedroso-de. **From finite sample to asymptotic methods in statistics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

SHEWHART, W. A. The application of statistics as an aid in maintaining quality of a manufactured product. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 20, n. 152, p. 546–548, 1925.

SHMUELI, G.; BURKOM, H. Statistical challenges facing early outbreak detection in biosurveillance. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 52, n. 1, p. 39–51, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1198/TECH.2009.09103>. Acesso em: 10 jan. 2026.

SIM, C. H.; LIM, M. H. Attribute charts for zero-inflated processes. **Communications in Statistics—Simulation and Computation**, Taylor & Francis, v. 37, n. 7, p. 1440–1452, 2008.

TIAN, W. *et al.* Statistical process control for monitoring the particles with excess zero counts in semiconductor manufacturing. **IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing**, IEEE, v. 32, n. 1, p. 93–103, 2018.

XIE, M.; HE, B.; GOH, T. N. Zero-inflated poisson model in statistical process control. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 191–201, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0167-9473\(01\)00060-5](https://doi.org/10.1016/S0167-9473(01)00060-5). Acesso em: 10 jan. 2026.

YAWSAENG, B.; MAYUREESAWAN, T. Control charts for zero-inflated binomial models. **Thailand Statistician**, v. 10, n. 1, p. 107–120, 2012.

GLOSSÁRIO

Alarme falso: sinal emitido por um gráfico de controle indicando que o processo está fora de controle, quando, na realidade, ele permanece sob controle estatístico.

ARL: sigla para *Average Run Length*, ou comprimento médio de execução, que representa o número médio de amostras observadas até a emissão de um sinal pelo gráfico de controle.

Controle Estatístico de Processo: conjunto de métodos estatísticos utilizados para monitorar, avaliar e melhorar processos produtivos ou operacionais, identificando variações que possam indicar instabilidade ou perda de qualidade.

Dados de contagem: dados discretos que representam o número de ocorrências de determinado evento em uma unidade, intervalo de tempo, lote ou área de observação, como falhas, defeitos, não conformidades ou atendimentos.

Deflação de zeros: situação em que a quantidade de observações iguais a zero é menor do que aquela esperada sob determinado modelo probabilístico de referência.

Dispersão: medida relacionada ao grau de variabilidade dos dados em torno da média, sendo fundamental para avaliar se um modelo de contagem representa adequadamente o comportamento observado.

Equidispersão: condição em que a variância é igual à média, característica típica da distribuição de Poisson.

Função de Massa de Probabilidade: função que associa probabilidades aos possíveis valores assumidos por uma variável aleatória discreta.

Gráfico de controle: ferramenta estatística utilizada para monitorar o comportamento de um processo ao longo do tempo, por meio de uma linha central e limites de controle inferior e superior.

Inflação de zeros: situação em que a quantidade de observações iguais a zero é maior do que aquela esperada sob determinado modelo probabilístico de referência.

Limites de controle: valores que delimitam a região esperada de variação de uma estatística monitorada em um gráfico de controle, auxiliando na identificação de possíveis sinais fora de controle.

Modelo GZMG: modelo Geométrico Modificado com Zeros Generalizado, utilizado nesta tese para representar dados de contagem com inflação ou deflação de zeros e diferentes regimes de dispersão.

Monte Carlo: método computacional baseado em simulações repetidas, utilizado para avaliar o desempenho dos gráficos de controle em diferentes cenários probabilísticos.

Sobredispersão: condição em que a variância dos dados é maior que a média, indicando maior variabilidade do que aquela esperada em modelos equidispersos.

Subdispersão: condição em que a variância dos dados é menor que a média, indicando menor variabilidade do que aquela esperada em modelos equidispersos.

Variável aleatória discreta: variável que assume valores contáveis, geralmente inteiros não negativos, sendo adequada para representar fenômenos de contagem.

DADOS CURRICULARES

IDENTIFICAÇÃO	
	SUÉLIO ALVES DE MOURA 06/03/1988
Nacionalidade	Brasileiro
Nome em citações bibliográficas	Moura, Suélio Moura, S.
Currículo Lattes	https://lattes.cnpq.br/6948612719350609
ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5035-2379
Outro identificador	linkedin.com/in/suelio-moura-386360221
FORMAÇÃO ACADÊMICA	
2010/2014	Curso de Graduação em Estatística (Bacharelado) Universidade Federal de Campina Grande - UFCG
2015/2017	Curso de Pós-Graduação em Estatística (Mestrado) Universidade de Brasília - UnB
2021/2026	Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Ciências (Doutorado) Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá - UNESP
PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA	
REZENDE, ANA LUIZA DE SOUZA ; FREITAS, MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO DE ; MENDES, AMANDA DOS SANTOS ; MOURA, SUÉLIO ALVES DE ; ALMEIDA, TÚLIO SÉRGIO DE. Aplicação de gráficos de desvio do nominal (dnom) no controle de qualidade assegurada do malte em uma empresa de bebidas. <i>In: XXXI SIMPEP</i>, 2025, Bauru, 2024. Anais [SIMPEP]. Bauru(SP) UNESP, 2024. Disponível em: https://encurtador.com.br/rjjN.	
PARTICIPAÇÃO EM BANCAS E ORIENTAÇÕES	
Bancas de trabalhos de conclusão	
MACHADO, M. A. G.; DOS SANTOS MENDES, AMANDA.; MOURA, S. A.; Participação em banca de de Ana Luiza de Souza Rezende. Aplicacao de Graficos de Desvio do Nominal (DNOM) no Controle de Qualidade Assegurada do Malte em Uma Empresa de Bebidas. 2024. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção Mecânica) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, 2024.	
Orientações	
LOPES, M. B. H. Aplicações do Machine Learning em monitoramento de processos: a evolução nos últimos dez anos por meio de uma análise bibliométrica e revisão sistemática. 2024.Orientador: Suélio Alves de Moura. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção Mecânica) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, 2024.	