

**unesp** 

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

**APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES  
UTILIZANDO POLINÔMIOS ORTOGONAIS  
E SUA APLICAÇÃO NA LINEARIZAÇÃO DA  
SAÍDA DE TERMOPARES**

*VANESSA APARECIDA PALOMO*

**Ilha Solteira - SP**

1210001434



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES UTILIZANDO  
POLINÔMIOS ORTOGONAIS E SUA APLICAÇÃO  
NA LINEARIZAÇÃO DA SAÍDA DE TERMOPARES

Proc. 063/04-NPD 10

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA" SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA 18.03.04	DATA DE TOMBO 31.03.04
REGISTRADO POR Oliveira	TOMBO Te. 1434
AQUIZIÇÃO Classificação Autol R\$ 10,00	CLASSIFICAÇÃO P181a

Dissertação apresentada à Faculdade  
de Engenharia de Ilha Solteira -  
Unesp, para a obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.

30400007  
CO  
M/P 215758  
M/S 56148

CANDIDATA: VANESSA APARECIDA PALOMO

ORIENTADOR: PROF. DR. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

Ilha Solteira/SP, Janeiro de 2004.



BCpIS - FEIS - UNESP

unesp



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Palomo, Vanessa Aparecida  
P181a Aproximação de funções utilizando polinômios ortogonais e sua aplicação na linearização da saída de termopares / Vanessa Aparecida Palomo . -- Ilha Solteira : [s.n.], 2004  
viii, 100 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2004

Orientador: Francisco Villarreal Alvarado  
Bibliografia: p. 71-73

1. Aproximação de funções. 2. Funções ortogonais. 3. Redes neurais ortogonais. 4. Linearização de funções. 5. Linearização de termopares.



# APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES UTILIZANDO POLINÔMIOS ORTOGONAIS E SUA APLICAÇÃO NA LINEARIZAÇÃO DA SAÍDA DE TERMOPARES

*Vanessa Aparecida Palomo*

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE  
ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

COMISSÃO EXAMINADORA:

*A. A. Carvalho*

*Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho*  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica



*Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado – orientador*

*E. Opazo*

*Profª Drª Eugenia Brunilda Opazo Uribe*



*Prof. Dr. Victor Giro Solano Reynoso*

i

Ilha Solteira/SP, janeiro de 2004.



## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço à Deus, por ter me guiado espiritualmente nesta jornada de crescimento pessoal e profissional.

Aos meus pais pela educação, carinho, constante apoio e por não medirem esforços para que eu fosse uma etapa da minha vida fosse cumprida.

À minha irmã Viviane Palomo, pelo carinho, amizade e apoio durante toda minha vida.

Ao Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado, pela orientação, confiança e apoio durante a pesquisa.

Dedico aos meus pais, Ivone e Altair Palomo,  
por todo apoio, incentivo e por estarem sempre  
presentes em mais esta conquista de minha vida.

Ao Prof. Dr. Nelson Okamoto, pelo apoio e incentivo durante este trabalho.

Aos membros da banca examinadora Profa. Dra. Espírita Bráulio Opazo Unbe e Prof. Dr. Michel Cruz Sobrinho Bezerra pela participação em realizar este trabalho e pelas sugestões benéficas.

## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço à Deus, por ter me guiado espiritualmente nesta cominhada de crescimento pessoal e profissional.

Aos meus pais pela educação, carinho, constante apoio e por não medirem esforços para que mais uma etapa da minha vida fosse cumprida.

À minha irmã Viviane Palomo, pelo carinho, amizade e apoio durante toda minha vida.

Ao Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado, pela orientação, confiança e apoio durante a pesquisa.

Ao Prof. Dr. Nobuo Oki pela total colaboração na elaboração e desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora Profa. Dra. Eugênia Brunilda Opazo Uribe e Prof. Dr. Victor Ciro Solano Reynoso pela predisposição em analisar este trabalho e pelas sugestões fornecidas.



Aos amigos de toda a vida Waléria, Mara, Marco Duarte, Alessandra, Delberis, Marcos Cossi, Rodrigo Fernandes, Tadao e Wladimir, pela paciência constante, incentivo, amizade e pela grande ajuda durante todo o mestrado.

Aos colegas de Pós-Graduação que direta ou indiretamente colaboraram de alguma forma neste trabalho.

À todos os funcionários da biblioteca em especial à Neide, pela atenção e extrema dedicação aos usuários.

Aos técnicos do laboratório do Departamento de Engenharia Elétrica, Deoclécio Kosaka e Carlos Alex pelo suporte em informática.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho concedido na forma de uma bolsa de mestrado.



## RESUMO

---

Neste trabalho é apresentado um método para linearizar funções utilizando redes neurais ortogonais. A aplicação dada nesta dissertação visa linearizar dados fornecidos por termopares.

No processamento da rede neural ortogonal utiliza-se como dados de entrada as tensões do termopar que são valores não lineares em relação a temperatura. O treinamento da rede é feito pelo método do gradiente descendente para ajustar os pesos da rede neural ortogonal, pois esses pesos treinados na rede serão os coeficientes da função que lineariza as tensões inseridas na rede neural ortogonal no início do processamento.

As funções ortogonais utilizadas nas redes neurais ortogonais implementadas neste trabalho são os polinômios de Legendre e os polinômios de Chebyshev respectivamente e em ambos os casos foram determinadas funções que fornecem os valores das tensões próximas aos valores desejados. Isto pode ser constatado principalmente pela determinação do erro quadrático que apresentou valores muito pequenos, em torno de  $10^{-7}$  em relação a rede neural ortogonal que utiliza polinômios de Legendre e em relação a rede neural ortogonal que utiliza os polinômios de Chebyshev o erro determinado está em torno de  $10^{-4}$ , indicando assim, que as aproximações determinadas pela rede estão bem próximas dos valores desejados.



- Para os testes feitos, para as redes neurais ortogonais implementadas, os melhores resultados obtidos foram os determinados pela rede neural que utiliza como base de funções ortogonais os polinômios de Legendre, pois as funções determinadas por esta rede são constituídas de polinômios de menor grau que por sua vez representam melhor as aproximações quando comparadas com as funções determinadas pela rede neural que utiliza os polinômios de Chebyshev.

A rede neural ortogonal implementada, além de determinar boas aproximações, converge rapidamente para a solução desejada pelo fato dos pesos serem treinados pelo método do gradiente descendente que não permite que as soluções se estacionem em ótimos locais.

**Palavras Chave:** aproximação de funções, funções ortogonais, redes neurais ortogonais, linearização de funções, linearização de termopares.



## ABSTRACT

---

In this work a method for functions linearization using orthogonal neural networks is presented. The application given in this dissertation seeks to linearize data provided by thermocouples.

In the processing of the orthogonal neural network, the voltages of the thermocouple, which are non linear values in relation to temperature, are used as input data. The network training is made by the descendent gradient method to adjust the weights of the orthogonal neural network, since those weights in the network will be the coefficients of the function that linearizes the voltages inserted in the orthogonal neural network at the beginning of the processing.

The orthogonal functions used in the orthogonal neural network implemented in this work are respectively the polynomials of Legendre and the polynomials of Chebyshev and in both cases the functions that provide voltage values close to the wished values were determined. This can be verified mainly by the determination of the square error that presented very small values, near  $10^{-7}$  in the orthogonal neural network using polynomials of Legendre and  $10^{-4}$  in the orthogonal neural network using the polynomials of Chebyshev, indicating that the approximations provided by the network are very close to the wished values.



For the tests made on the implemented orthogonal neural networks, the best results were the ones provided by the networks that use the polynomials of Legendre as a base of orthogonal functions, since the functions provided by this network are constituted by polynomials of smaller degree, which represent better the approximations when compared to the functions determined by the network that uses the polynomials of Chebyshev.

The orthogonal that was implemented, further than determining good approximations, converges quickly to the wished solution, due to the fact that the weights were trained by the descendent gradient method that does not allow the solutions to remain stationary in local optimums.

**Key words :** function approximation, orthogonal functions, orthogonal neural network, function linearization, thermocouple linearization.



# ÍNDICE

---

## **CAPÍTULO 1 – Introdução Geral**

1 - Introdução Geral	1
1.1 – Motivação do Trabalho	2

## **CAPÍTULO 2 – Termopares**

2.1 – Introdução	4
2.2 – Termopar	5
2.3 – Leitura do Termopar	6
2.4 – Tipos e características dos termopares	8

## **CAPÍTULO 3 – Teoria de Aproximação**

3.1 – Introdução	14
3.2 – Aproximação de Funções	15
3.2.1 – O Método dos Quadrados Mínimos	16
3.2.2 – Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais	19
3.2.2.1 – Polinômios Ortogonais	23

## **CAPÍTULO 4 – Redes Neurais**

4.1 – Introdução	26
4.2 – A Rede Neural Artificial	28
4.3 – O Neurônio Artificial	28



4.4 – Por que utilizar Redes Neurais?	30
4.5 – Uma Rede Neural Ortogonal para Aproximação de Funções	32
4.5.1 – Teoria Básica	34
4.5.2 – Redes Neurais Ortogonais	38
4.5.3 – O Algoritmo de Treinamento	39
4.5.3.1 – Método do Gradiente Descendente	40
<b>CAPÍTULO 5 – Aplicação: Utilização de Redes Neurais na Linearização da Tensão do Termopar Tipo B</b>	
5.1 – Introdução	46
5.2 – Problema Proposto	48
5.3 – Estrutura da rede neural ortogonal	50
5.4 – Determinação da função que lineariza as saídas do termopar	51
5.4.1 – Determinação da função de linearização usando polinômios de Legendre	52
5.4.2 – Determinação da função de linearização utilizando polinômios de Chebyshev	61
<b>CAPÍTULO 6 – Conclusão</b>	69
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	71
<b>APÊNDICE 1</b>	
A.1 – Aproximação Discreta pelo Método dos Quadrados Mínimos utilizando Polinômios Ortogonais	74
A.1.1 – Introdução	74
A.1.2 – Aproximação discreta pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais	76
<b>APÊNDICE 2</b>	
A.2 – Compensação da temperatura ambiente de um termopar	91

ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 3.1	Circuito de um termopar com duas etapas	6
Figura 3.2	Medição de temperatura com termopar	8
Figura 3.3	Tipos dos termopares	13
Figura 4.1	Componentes de um acurto biológico	17
Figura 4.2	Componentes de um neurônio artificial	29
Figura 4.3	Diagrama de um neurônio artificial	30
Figura 4.4	Rede neural artificial de camada simples	31
Figura 4.5	Diagrama de ilicita para a reconstrução da função desejada	43
Figura 5.1	Termopar tipo B	47
Figura 6.1	Gráficos de erro em relação as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Legendre	59

Figura 5.3 Gráfico da função de grau 5 que lineariza as leituras do termopar tipo B, obtida usando polinômios de Legendre 60

Figura 5.4 Gráfico do erro em relação as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Chebyshev 67

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 5.5 Gráfico da função de grau 7 que lineariza as leituras do termopar tipo B, obtida usando polinômios de Legendre 60

---

Figura A1 Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando

**Figura 2.1** Circuito de um termopar com duas junções 6

**Figura 2.2** Medição de temperatura com termopar 8

**Figura 2.3** Curva dos termopares 13

**Figura 4.1** Componentes de um neurônio biológico 27

**Figura 4.2** Componentes de um neurônio artificial 29

**Figura 4.3** Esquema de um neurônio artificial 30

**Figura 4.4** Rede neural ortogonal de camada simples 33

**Figura 4.5** Diagrama de blocos para determinação da função desejada 45

**Figura 5.1** Termopar tipo B 47

**Figura 5.2** Gráfico do erro em relação as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Legendre 59

**Figura 5.3** Gráfico da função de grau 5 que lineariza as tensões do termopar tipo B, obtida usando polinômios de Legendre 60

**Figura 5.4** Gráfico do erro em relação as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Chebyshev 67

## ÍNDICE DE TABELAS

**Figura 5.5** Gráfico da função de grau 7 que lineariza as tensões do termopar tipo B, obtida usando polinômios de Chebyshev 68

**Figura A1** Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios de Legendre 84

**Figura A2** Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios de Chebyshev 89

**Tabela 5.1** Coeficientes da função de aproximação de grau 5 obtida usando polinômios de Legendre como base polinomial de Legendre 85

**Tabela 5.2** Valores obtidos por cada termo do método dos quadrados mínimos de Legendre 87

**Tabela 5.3** Valores aproximados da função de aproximação por cada termo obtido usando polinômios de Legendre 87

**Tabela 5.4** Coeficientes da função de aproximação de grau 7 obtida usando polinômios de Chebyshev 92

**Tabela 5.5** Coeficientes por cada termo aproximado de grau 7 obtido usando polinômios de Chebyshev 93

**Tabela 5.6** Valores obtidos por cada termo usando o método dos quadrados mínimos de Chebyshev 93

## ÍNDICE DE TABELAS

---

<b>Tabela 5.1</b> Tensões no intervalo de temperatura inicial	49
<b>Tabela 5.2</b> Coeficientes das funções lineares no intervalo $[-1,1]$ determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Legendre	54
<b>Tabela 5.3</b> Coeficientes das funções lineares no intervalo $[0,620]$ determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Legendre	55
<b>Tabela 5.4</b> Valores obtidos por redes neurais tendo como base os polinômios de Legendre	57
<b>Tabela 5.5</b> Erro correspondente às funções determinadas por redes neurais tendo como base os polinômios de Legendre	57
<b>Tabela 5.6</b> Coeficientes das funções lineares no intervalo $[-1,1]$ determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Chebyshev	62
<b>Tabela 5.7</b> Coeficientes das funções lineares no intervalo $[0,620]$ determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Chebyshev	63
<b>Tabela 5.8</b> Valores obtidos por redes neurais tendo como base os polinômios de Chebyshev	65

<b>Tabela 5.9</b> Erro correspondente às funções determinadas por redes neurais tendo como base os polinômios de Chebyshev	66
<b>Tabela A1</b> Aproximação de grau 0, 1, 2 e 3, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Legendre	82
<b>Tabela A2</b> Aproximação de grau 4, 5 e 6, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Legendre	83
<b>Tabela A3</b> Erro das aproximações de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6 utilizando polinômios de Legendre	84
<b>Tabela A4</b> Aproximação de grau 0, 1, 2 e 3, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Chebyshev	87
<b>Tabela A5</b> Aproximação de grau 4, 5 e 6, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Chebyshev	88
<b>Tabela A6</b> Erro das aproximações de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6 utilizando polinômios de Chebyshev	89

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

$J$	-	junção do termopar
$T$	-	temperatura
$v$	-	tensão
$P_n$	-	função aproximada de ordem $n$
$C[a,b]$	-	espaço das funções contínuas em $[a,b]$
$E$	-	erro quadrático
$\mathfrak{R}$	-	conjunto dos números reais
$\phi$	-	função ortogonal
$w$	-	função peso
$L_n$	-	polinômio de Legendre de ordem $n$
$H_n$	-	polinômio de Chebyshev de ordem $n$
$\hat{y}$	-	saída da rede neural ortogonal
$\hat{W}$	-	conjunto de pesos ajustados
$\tilde{W}$	-	conjunto de pesos ajustáveis
$\eta$	-	taxa de treinamento da rede neural
$\lambda$	-	função deslocamento
$e$	-	erro (distância entre os valores determinados pela rede e pelos valores desejados)

# CAPÍTULO 1

---

## 1. Introdução Geral

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um método para aproximar funções usando redes neurais ortogonais; em geral, a partir de qualquer função não linear dada inicialmente é possível determinar, através de redes neurais ortogonais, uma função que represente estes dados iniciais de uma forma linear. Em particular, neste trabalho a aplicação consiste em linearizar os valores das tensões correspondentes a diferentes temperaturas fornecidas pelos termopares. Para tanto, no capítulo 2, é feito um breve estudo sobre termopares, onde analisa-se os intervalos de temperatura e tensões que cada termopar abrange e as características do material que é constituído para cada tipo desse transdutor.

No capítulo 3, é feita uma introdução sobre teoria de aproximação e a utilização de polinômios ortogonais para a aproximação de funções.

Seqüencialmente, no capítulo 4, é feito um estudo sobre redes neurais e a utilização de funções de base ortogonal nas redes neurais afim de encontrar uma função que lineariza as tensões do termopar, de maneira que para qualquer valor de temperatura



que seja “lida” neste termopar a “função de linearização” determinada pela rede neural forneça a resposta da tensão variando de uma forma linear em relação a temperatura.

Para determinar a função que lineariza as tensões do termopar é feito o ajuste dos pesos na rede neural, de maneira que os pesos são verificados para cada iteração avaliando a saída da rede e comparando com os resultados esperados (resposta linear), estes pesos são treinados até que a função gere uma saída linear, próxima aos valores desejados. Os pesos da rede neural são os coeficientes da função que lineariza as tensões do termopar.

No capítulo 5, são feitos os testes com dados do termopar tipo B e são analisados os resultados, os quais se mostram satisfatórios aos valores esperados.

Finalmente, no apêndice são relatados os estudos iniciais realizados e os resultados obtidos, para o caso de aproximação discreta, que por não serem utilizados neste trabalho são citados com o intuito de registrar o estudo inicial desenvolvido neste trabalho. No apêndice também é apresentado o método da compensação da temperatura ambiente para o termopar e a tabela de valores do termopar tipo B (tensão X temperatura) referenciados a 0°C.

## 1.1 Motivação do trabalho

No início desta pesquisa pretendia-se através de uma função aproximada  $P_n(x)$  encontrada, sendo  $n$  o grau do polinômio aproximado, determinar uma outra função  $Q_n(x)$  de tal forma que através de alguma manipulação algébrica com estas duas funções fosse possível obter uma terceira função que representasse linearmente os valores de uma dada função.



Neste caso, as  $P_n(x)$ 's foram determinadas através de aproximação de funções discretas; foram utilizados vários métodos de interpolação e aproximação pelo método dos quadrados mínimos e também aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais (Apêndice 1). Porém o desejo de se determinar a função  $Q_n(x)$ , através de  $P_n(x)$ , de uma forma analítica não foi possível, daí surgiu a necessidade de se trabalhar com redes neurais artificiais, que por sua vez utiliza polinômios ortogonais como ferramenta para a determinação da função desejada. Em particular, neste trabalho a função desejada, a qual é obtida pela rede neural ortogonal, é a função que lineariza as saídas (tensões) do termopar.

## Termopares

### 1.1 Introdução

A medida de temperatura é um dos aspectos mais importantes em qualquer processo industrial e científico. A temperatura é uma grandeza física que pode ser medida de diversas maneiras e a escolha do método de medição depende das condições de medição e da precisão necessária.

Os termopares são dispositivos que convertem a temperatura em tensão elétrica. Eles são compostos por dois metais diferentes que são soldados em uma extremidade e conectados a um circuito elétrico na outra. A tensão gerada é proporcional à temperatura.

Os termopares são amplamente utilizados em indústrias e laboratórios devido à sua alta precisão e estabilidade. Eles são capazes de medir temperaturas em uma ampla faixa de valores e são relativamente baratos e fáceis de usar.



## CAPÍTULO 2

### 2.1 Termopares

---

## Termopares

### 2.1 Introdução

O objetivo de medir e controlar as diversas variáveis físicas em processos industriais é obter produtos de alta qualidade, com melhores condições de rendimento e segurança a custos compatíveis com as necessidades do mercado consumidor.

Nos diversos segmentos de mercado sejam eles, químico, petroquímico, siderúrgico, cerâmico, farmacêutico, vidreiro, alimentício, papel e celulose, hidroelétrico, nuclear, entre outros, a monitoração da variável temperatura é fundamental para a obtenção do produto final especificado [1].

O termopar é um tipo de sensor que executa a tarefa da medição dessas temperaturas, para que estas se mantenham controladas dentro de uma faixa de temperatura que um processo deve permanecer. Este sensor atua como um transdutor de



sinal e fornece uma tensão não linear relacionada a uma temperatura, gerando assim pares de pontos com coordenadas da forma (tensão, temperatura) ou vice-versa.

Neste capítulo é apresentada uma descrição deste sensor e suas características principais.

## 2.2 Termopar

O princípio da termoeletricidade, descoberto por Seebeck em 1821, serve de base para a construção de um dos instrumentos mais utilizados na medição de temperatura, o termômetro termoeletrico, mais conhecido por termopar [14].

O efeito Seebeck ocorre ao se conectar dois metais diferentes (ou ligas metálicas), sendo obtido um circuito tal que, se as junções  $J_1$  e  $J_2$ , forem mantidas em temperaturas diferentes  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, surge assim uma f.e.m. (força eletromotriz) e conseqüentemente uma corrente elétrica  $i$  que circulará pelo “par termoeletrico” ou “termopar”. Qualquer ponto deste circuito poderá ser aberto e nele inserido o instrumento para se medir a f.e.m [22].

O termopar é um tipo de sensor de temperatura muito simples, robusto, barato e de fácil utilização. Ele é composto de dois condutores metálicos de natureza distinta, na forma de metais puros ou ligas homogêneas. Unidos em uma das extremidades este dispositivo gera eletricidade a partir de diferenças de temperaturas entre suas junções.

Este par de condutores de ligas distintas, soldados numa das extremidades, chama-se junta quente ou junta de medição, a qual fica colocada no ponto onde deseja-se medir ou controlar a temperatura e a outra extremidade, chamada junta fria ou junta de referência é ligada ao instrumento (indicador de temperatura, registrador, etc). A diferença de temperatura entre estas extremidades gera uma tensão chamada f.e.m.



(força eletromotriz), fornecendo assim, uma tabela na faixa de milivolts para cada tipo de termopar. Essas tabelas são sempre referenciadas a  $0^{\circ}\text{C}$  (zero grau centígrado), ou seja, a junta de referência ou junta fria (aquela ligada ao aparelho) deve estar a  $0^{\circ}\text{C}$ , porém na prática isto não ocorre, então há a necessidade da compensação da temperatura ambiente, definida no Apêndice 2. Os aparelhos somam a milivoltagem que estão recebendo através dos fios à milivoltagem da temperatura ambiente; esta compensação pode ser feita de diversas formas físicas ou eletrônicas, e atualmente utiliza-se programas computacionais (ver Apêndice 2) [18], [19].

### 2.3 Leitura do termopar

As operações de um termopar são baseadas na combinação de efeitos termoelétricos que produzem uma tensão de circuito aberto quando duas junções são mantidas em temperaturas diferentes.

O diagrama clássico do circuito de um termopar com duas junções é dada na Figura 2.1

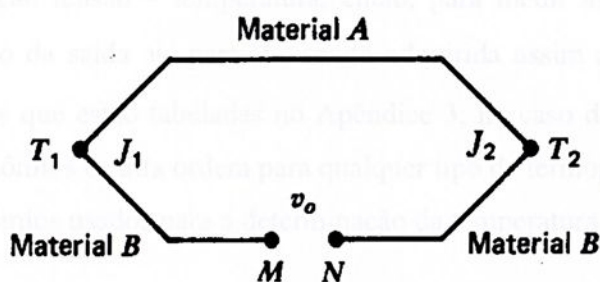


Figura 2.1 Circuito de um termopar com duas junções.

sendo  $J_1$  e  $J_2$  as junções mantidas nas temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente. A tensão termoelétrica  $v_o$  é uma função não linear em relação a temperatura que pode ser representada por uma equação empírica da forma



$$v_0 = a_1 (T_1 - T_2) + a_2 (T_1^2 - T_2^2) \quad (2.1)$$

A forma geral desta relação é

$$v_0 = a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n \quad (2.2)$$

sendo

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ , constantes termoelétricas que dependem do material usado para formar as junções.
- $T = (T_1 - T_2)$ , temperatura das junções.

O circuito da Figura 2.1 é utilizado para determinar uma temperatura desconhecida  $T_1$ , e isto só é possível enquanto a temperatura da segunda junção,  $J_2$ , for mantida em uma temperatura de referência conhecida  $T_2$ , normalmente em  $0^\circ\text{C}$ . Desta forma, determina-se a temperatura  $T_1$  através da medida da tensão  $v_0$ , sendo matematicamente representada pela equação (2.1) que é uma função não linear da temperatura. Por tratar-se de resultados de experimentos esta equação não apresenta exatidão na relação tensão – temperatura, então, para medir as temperaturas deve-se fazer a conversão da saída  $v_0$  para  $T$ , sendo adquirida assim a precisão pelo uso da calibração, saídas que estão tabeladas no Apêndice 3, no caso do termopar tipo B, ou pelo uso de polinômios de alta ordem para qualquer tipo de termopar.

Os polinômios usados para a determinação da temperatura, são da forma

$$T = a_0 + a_1 v_0 + a_2 v_0^2 + \dots + a_n v_0^n \quad (2.3),$$

sendo,  $T$  a diferença de temperatura, em  $^\circ\text{C}$  na junção, ou seja,  $T = T_1 - T_2$  e  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  coeficientes específicos para cada termopar [5], [12].

## 2.4 Tipos e características dos termopares

Em geral o efeito termoelétrico é produzido para qualquer par de metais, ou ligas metálicas. Das inúmeras combinações possíveis são usados basicamente sete tipos de termopares.

Essas combinações foram feitas de modo a se obter uma alta tensão termoelétrica, aliando-se ainda às melhores características como homogeneidade dos fios e resistência à corrosão na faixa de utilização, assim, cada tipo de termopar tem uma faixa de temperatura ideal de trabalho, que deve ser considerada para que se tenha a maior vida útil do mesmo [1].

Os termopares são os sensores de maior uso industrial para a medição de temperatura. Eles cobrem uma faixa bastante extensa de temperatura, com boa precisão, tudo isto a um custo que se comparado com outros tipos de sensores de temperatura são mais econômicos [1]. A Figura 2.2 [20] apresenta um termopar usado para medir a temperatura  $T_1$ ; o instrumento indica uma tensão proporcional a diferença  $(T_1 - T_2)$ . A temperatura  $T_2$  pode ser medida com um termômetro convencional.

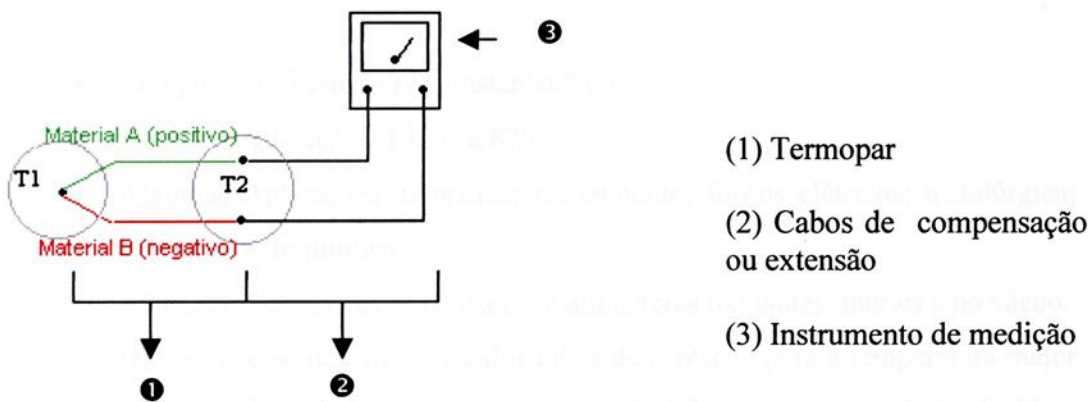


Figura 2.2 Medição de temperatura com termopar.

Dentre os termopares comerciais podem ser citados: tipo T, tipo J, tipo E, tipo K, tipo S, tipo R e tipo B.

São apresentadas também as características, algumas aplicações e a faixa de uso aconselhada para cada tipo de termopar:

#### ➤ Termopar Tipo T

- Composição: Cobre (+) / Constantan\* (-) .
- Faixa de Utilização: -200°C a 370°C.
- Algumas Aplicações: estufas; banhos; fornos elétricos para baixa temperatura.
- Vantagens: resistente a atmosferas redutoras e oxidantes (excesso de oxigênio).
- Desvantagens: oxidação do cobre acima de 315°C.

Sendo: Constantan\* uma liga de cobre-níquel.

#### ➤ Termopar Tipo J

- Composição: Ferro (+) / Constantan\* (-) .
- Faixa de Utilização: -190°C a 870°C.
- Algumas Aplicações: têmperas; recozimento; fornos elétricos; metalúrgica; química; petroquímica.
- Vantagens: baixo custo; resistente a atmosferas oxidantes, inertes e no vácuo.
- Desvantagens: devem ser usados tubos de proteção para a temperatura maior que 480°C; o uso de temperatura abaixo de 0°C não é recomendado, devido a rápida ferrugem e a quebra do ferro.



### ➤ Termopar Tipo E

- Composição: Cromel\*\*(+) / Constantan\* (-).
- Faixa de Utilização: -200°C a 1260°C.
- Algumas Aplicações: uso geral até 900°C; química; petroquímica.
- Vantagens: resistente a atmosferas oxidantes (excesso de oxigênio) e inertes; adequado para uso em temperaturas negativas desde que não esteja sujeito a corrosão em atmosferas úmidas.
- Desvantagens: não devem ser utilizados em atmosferas redutoras; altamente oxidantes e redutora no vácuo, pois perdem suas características termoeletricas.

Sendo: Cromel\*\* uma liga de cromo-níquel.

### ➤ Termopar Tipo K

- Composição: Cromel\*\*(+) / Alumel\*\*\* (-).
- Faixa de Utilização: -200°C a 1260°C.
- Algumas Aplicações: tratamento térmico; fornos; fundição; banhos; metalúrgicas; siderúrgicas; indústrias em geral.
- Vantagens: adequado para atmosferas oxidantes; boa resistência mecânica em altas temperaturas.
- Desvantagens: vulnerável a atmosferas redutoras.

Sendo: Alumel\*\*\* uma liga de níquel-alumínio.



### ➤ Termopar Tipo S

- Composição: platina 90% - ródio 10% (+) / platina (-) .
- Faixa de Utilização: 0°C a 1600°C.
- Algumas Aplicações: siderúrgicas; fundição; metalúrgica; usina de cimento, vidro, cerâmica e pesquisa científica.
- Vantagens: resistente a atmosferas oxidantes ou inertes; boa precisão em temperaturas elevadas.
- Desvantagens: seu uso contínuo em altas temperaturas podem resultar numa falha mecânica e também tornar os fios sujeitos à contaminação e redução da força eletromotriz gerada; não devem ser usados no vácuo, em atmosferas redutoras ou com vapores metálicos; não devem ser utilizados em temperaturas abaixo de zero, pois a curva f.e.m. versus temperatura varia irregularmente.

### ➤ Termopar Tipo R

- Composição: platina 87% - ródio 13%(+) / platina (-) .
- Faixa de Utilização: 0°C a 1600°C.
- Algumas Aplicações: as mesmas do tipo S.
- Vantagens: as mesmas do tipo S.
- Desvantagens: as mesmas do tipo S.



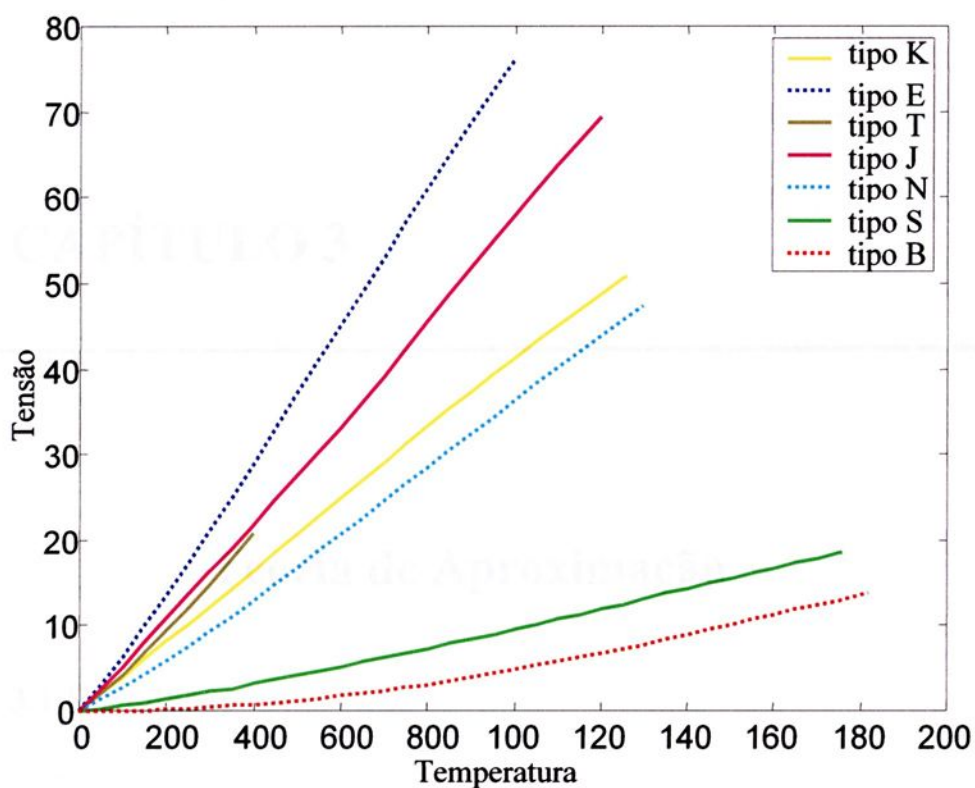
### ➤ Termopar Tipo B

- Composição: platina 70% - ródio 30% (+) / platina 94% - ródio 6% (-) .
- Faixa de Utilização: 0°C a 1700°C.
- Algumas Aplicações: indústria vidreira; siderúrgica; altas temperaturas em geral.
- Vantagens: resistente a atmosferas oxidantes ou inertes; adequado para certos períodos no vácuo; resistência mecânica.
- Desvantagens: não deve ser aplicado em atmosferas redutoras, nem naquelas contendo vapores metálicos.

Para a obtenção dos dados dos termopares acima citados foram utilizadas as referências [1], [15], [17], [18], [20] e [22].

Os diferentes tipos de termopares, indicados para diversas faixas de temperaturas apresentam sensibilidades também próprias. A figura seguinte ilustra a curva da temperatura versus a tensão de alguns termopares.





**Figura 2.3** Curva dos termopares

A aplicação deste trabalho, que será apresentada no capítulo 5, é realizada para o termopar tipo B na faixa de temperatura de 0°C a 620°C, pelo fato de que nessa faixa encontra-se maior não linearidade da tensão em função da temperatura.



## CAPÍTULO 3

---

### Teoria de Aproximação

#### 3.1 Introdução

O estudo da teoria de aproximação envolve em geral dois tipos de problemas. O primeiro surge quando uma função é dada explicitamente, porém é conveniente encontrar um outro tipo de função “simples”, tal como um polinômio que possa ser usado para determinar valores aproximados aos da função dada. O outro problema consiste em ajustar os dados fornecidos e encontrar “a melhor função aproximada”, numa certa classe, que pode ser usada para representar esses dados [2].

O método dos quadrados mínimos é provavelmente a técnica de aproximação mais usada na análise numérica e em problemas práticos. Isto se deve tanto à sua simplicidade quanto ao fato de que, em geral, busca-se aproximações para dados que são medidas as quais são obtidas experimentalmente com um certo grau de incerteza. Este método foi publicado, pela primeira vez, por Adrien – Marie Legendre em 1805, mas tal método já era usado por Carl Friedrich Gauss, em seus cálculos na Astronomia, desde 1795 [4].



Algumas notações e resultados apresentados neste capítulo, essencialmente, são as mesmas apresentadas em [11]. Entretanto, para a comodidade do leitor serão apresentadas novamente aqui, considerando que as aplicações consideradas não são as mesmas às dadas em [11], sendo que neste trabalho as aplicações são para linearização da saída de termopares via redes neurais.

### 3.2 Aproximações de Funções

Neste capítulo é abordado o problema de aproximar uma função  $f(x)$  por uma função  $P(x)$  de uma classe previamente escolhida. Será tratado o caso em que a função  $f(x)$  é dada na forma analítica com “domínio contínuo” (conjunto não discreto).

O método dos quadrados mínimos é estudado para aproximar uma dada função  $f(x)$  por uma  $P(x)$  da classe  $P_n(x)$  de funções, sendo que cada uma delas é uma combinação linear de funções conhecidas não nulas,  $g_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Em particular, na seção 3.2.2, as funções  $g_k(x)$ , são consideradas como sendo um conjunto de polinômios ortogonais entre si, como é o caso dos polinômios de Legendre e Chebyshev. A expressão da função aproximada  $P_n(x)$  é da forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k g_k(x).$$



### 3.2.1 O Método dos Quadrados Mínimos

Suponha que  $f(x) \in C[a, b]$  (espaço das funções contínuas em  $[a, b]$ ) e que um polinômio de grau  $\leq n$ ,  $P_n(x)$ , é requerido de forma que o erro seja minimizado. Assim, ao considerar a soma dos quadrados dos erros em todos os pontos do intervalo  $[a, b]$ , tem-se, no limite, a integral do quadrado do erro em cada ponto do intervalo em que se quer aproximar a função dada, ver em (4.8), ou seja,

$$E = \int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx. \quad (3.1)$$

Para determinar uma aproximação polinomial pelo método dos quadrados mínimos, isto é, para determinar um polinômio,  $P_n(x)$ , para minimizar a expressão (3.1), sendo

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

define-se a função “erro quadrático”  $E : \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$  por

$$E = E(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx. \quad (3.2)$$

Sendo  $\mathfrak{R}$  conjunto dos números reais [2].

O problema consiste em encontrar coeficientes reais  $a_0, a_1, \dots, a_n$  que minimizará  $E$ . Do cálculo de funções de várias variáveis, uma condição necessária para que os números  $a_0, a_1, \dots, a_n$  minimizem a função  $E$  é que

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n \quad \text{ou, equivalentemente, } \nabla E = 0.$$

Desde que

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

tem-se

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0.$$

Portanto, para encontrar  $P_n(x)$ , as  $(n+1)$  equações normais lineares

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

devem ser resolvidas para as  $(n+1)$  variáveis desconhecidas,  $a_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$  [2].

Porém o método dos quadrados mínimos possui uma grande dificuldade para se obter uma aproximação polinomial. Por exemplo, um sistema linear  $(n+1) \times (n+1)$  para os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  de  $P_n(x)$  deve ser resolvido. Desde que os coeficientes do sistema linear são da forma [2]

$$\int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1},$$

o sistema linear não tem uma solução numérica conveniente, pois este sistema torna-se muito complexo dependendo da quantidade de coeficientes para se determinar, sendo assim, para simplificar os cálculos tem-se a necessidade de utilizar funções ortogonais como será visto na seção 3.2.2, pois com a introdução dessas funções ortogonais no método dos quadrados mínimos encontra-se um sistema de equações na forma diagonal sendo assim rapidamente determinado os coeficientes desse sistema.

Outra desvantagem desta técnica é que os cálculos efetuados para obter o polinômio de grau  $n$ ,  $P_n(x)$ , não diminui o trabalho dos cálculos para a obtenção do polinômio  $P_{n+1}(x)$ .

Uma técnica diferente para se obter aproximações pelo método dos quadrados mínimos é considerada. Ela tem eficiência computacional e também, desde que  $P_n(x)$  seja conhecido, os cálculos a serem realizados para determinar  $P_{n+1}(x)$  serão de fácil manipulação. Estas aproximações são determinadas através do método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais, como será visto também na seção seguinte.



### 3.2.2 Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais

Para a utilização de funções ortogonais para aproximação de funções, pelo método dos quadrados mínimos, é necessário estabelecer primeiramente o conceito de ortogonalidade para um dado conjunto de funções.

Diz-se que uma família de funções  $\{\phi_i(x), i = 1, 2, \dots\}$ , definidas em  $[a, b]$ , é um **conjunto ortogonal** em relação ao produto escalar associado a uma **função peso**  $w(x)$ , definida em  $[a, b]$ , se

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle = \int_a^b w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ \alpha_i > 0 & \text{se } j = i \end{cases}$$

O método dos quadrados mínimos fica mais simples quando trabalha-se com aproximações usando famílias de funções ortogonais, pois, no sistema ortogonal tem-se  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$  para  $j \neq i$ , sendo obtido um sistema diagonal, que significa grande vantagem. Neste caso, os valores dos coeficientes da aproximação,  $a_k$ , são determinados de forma direta [2], [4].

Depois de ser apresentado o conceito de ortogonalidade e a importância de se incorporar funções ortogonais nos métodos de aproximação, será visto seguidamente a maneira de se aproximar funções pelo método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais.

Suponha que  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ ,  $x \in [a, b]$ , é um conjunto de funções linearmente independentes,  $w(x)$  é uma função peso definida em  $[a, b]$  e que, para uma dada função  $f(x) \in C[a, b]$ , uma combinação linear da forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

é procurada para minimizar a função  $E : \Re^{n+1} \rightarrow \Re$  definida por

$$E = E(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b w(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) \right]^2 dx. \quad (3.4)$$

Assim, como no caso em que  $w(x) \equiv 1$  e  $\phi_k(x) = x^k$  para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , ver (3.2), é necessário que

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = 2 \int_a^b w(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) \right] \phi_j(x) dx \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n.$$

O sistema de equações normais pode ser escrito como [2], [11]

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx \quad \text{para cada } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Suponha também que as funções  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  possam ser escolhidas de modo que sejam ortogonais em relação à função peso  $w(x)$ , isto é, elas satisfaçam

$$\int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ \alpha_k > 0 & \text{se } j = k \end{cases} \quad (3.5)$$

Então, para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ , tem-se

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx = a_j \int_a^b w(x) [\phi_j(x)]^2 dx = a_j \alpha_j$$

e portanto

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx.$$

Dessa maneira o problema de aproximação pelo método dos quadrados mínimos é grandemente simplificado quando as funções  $\phi_0(x)$ ,  $\phi_1(x)$ , ...,  $\phi_n(x)$  são escolhidas de modo a satisfazer a condição de **ortogonalidade** na equação (3.5) [2], [4].

O método dos quadrados mínimos aplicado com estas funções proporciona um resultado importante o qual será dado a seguir.

Se  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$  é um conjunto ortogonal de funções em  $[a, b]$  em relação à função peso  $w(x)$ , então a aproximação pelo método dos quadrados mínimos, para  $f(x)$  definida em  $[a, b]$ , em relação à função peso  $w(x)$  é [2]

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

sendo, para cada  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x) \phi_k(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) [\phi_k(x)]^2 dx} = \frac{1}{\alpha_k} \int_a^b w(x) \phi_k(x) f(x) dx.$$

Existem duas famílias de funções ortogonais muito usadas por causa de suas importantes aplicações: as funções trigonométricas, que dão origem à série de Fourier, e os polinômios ortogonais que, cada vez mais, aparecem em problemas que envolvem aproximações [11]. Neste trabalho serão apresentadas as aproximações pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais.

Um processo para a obtenção de famílias de polinômios ortogonais é dado a seguir.

O conjunto de polinômios  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$  definido a seguir é um conjunto ortogonal em  $[a, b]$  em relação à função peso  $w(x)$ .

As funções  $\phi_0, \phi_1 : [a, b] \rightarrow \Re$  são definidas por

$$\phi_0(x) = 1 \text{ para cada } a \leq x \leq b,$$

$$\phi_1(x) = x - B_1 \text{ para cada } a \leq x \leq b,$$

sendo

$$B_1 = \frac{\int_a^b xw(x)[\phi_0(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2 dx}.$$

Para cada  $k \geq 2$ , a função  $\phi_k : [a, b] \rightarrow \Re$  é definida por

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x) \text{ para cada } a \leq x \leq b,$$

sendo



$$B_k = \frac{\int_a^b xw(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-1}(x)]^2 dx}$$

e

$$C_k = \frac{\int_a^b xw(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)dx}{\int_a^b w(x)[\phi_{k-2}(x)]^2 dx};$$

O algoritmo acima fornece um processo recursivo para a construção de um conjunto de polinômios ortogonais [2]. Dois casos particulares são considerados a seguir.

### 3.2.2.1 Polinômios Ortogonais

Um dos mais comuns conjuntos de polinômios ortogonais é o conjunto de Polinômios de Legendre,  $\{L_n(x)\}$ , que são ortogonais em  $[-1, 1]$  em relação à função peso  $w(x) \equiv 1$ . A definição clássica dos Polinômios de Legendre requer que  $L_n(1) = 1$  para cada  $n$ , e uma relação recursiva é usada para a obtenção dos polinômios quando  $n \geq 2$ . Entretanto esses polinômios podem também ser encontrados utilizando o processo recursivo visto anteriormente. Os polinômios de aproximação dos quadrados mínimos gerados em ambos os casos são essencialmente os mesmos [2], [11].

Relação Recursiva:

$$L_{n+1}(x) = xL_n(x) - \frac{n^2 L_{n-1}(x)}{(4n^2 - 1)} \quad n \geq 1 \quad (3.6)$$

em que

$$L_0(x) \equiv 1, \quad L_1(x) = x.$$

Como ilustração os primeiros polinômios de Legendre definidos em  $[-1, 1]$  são [2], [11]

$$L_0(x) \equiv 1$$

$$L_3(x) = x^3 - (3/5)x$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_4(x) = x^4 - (6/7)x^2 + 3/35$$

$$L_2(x) = x^2 - (1/3)$$

$$L_5(x) = x^5 - (10/9)x^3 + (5/21)x.$$

Um outro conjunto de polinômios ortogonais é o chamado conjunto de Polinômios de Chebyshev,  $\{H_n(x)\}$ . Esses polinômios são ortogonais em  $(-1, 1)$ , em relação à função peso  $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ . Ainda que esses polinômios possam ser obtidos pelo processo recursivo visto anteriormente, é mais fácil defini-los de maneira que satisfaçam as propriedades de ortogonalidade [2], [11].

Para  $x \in (-1, 1)$ , define-se

$$H_n(x) = \cos[n \arccos(x)] \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Relação Recursiva:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n-1}(x) \quad \text{para cada } n \geq 1. \quad (3.7)$$

Sendo

$$H_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1 \quad \text{e} \quad H_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x,$$

os polinômios de Chebyshev são obtidos de maneira seqüencial, usando a equação (3.7)

$$H_2(x) = 2xH_1(x) - H_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - H_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$H_4(x) = 2xH_3(x) - H_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

⋮

Os polinômios de Chebyshev são utilizados para minimizar o erro de aproximação [2], [21].

Normalmente, é comum aparecerem os polinômios ortogonais multiplicados por alguma outra constante, porém isto não influi na ortogonalidade, é apenas uma questão de convenção e/ou conveniência [2], [15].

No próximo capítulo será realizada uma abordagem sobre redes neurais artificiais utilizando funções ortogonais como funções base. Será relatado também o bom desempenho do método em relação ao tempo de convergência por não apresentarem os problemas que as redes neurais tradicionais possuem, tais como, problemas de mínimos locais, geração de pesos iniciais, lentidão na convergência, etc.

No próximo capítulo também encontra-se ferramentas para se determinar as funções que desejam ser linearizadas. No processamento da rede serão obtidos os valores dos coeficientes da função procurada através dos pesos que são ajustados pelo método do gradiente descendente, o qual também será apresentado nas próximas seções.



# CAPÍTULO 4

---

Figura 4.1 Componentes de um neurônio biológico

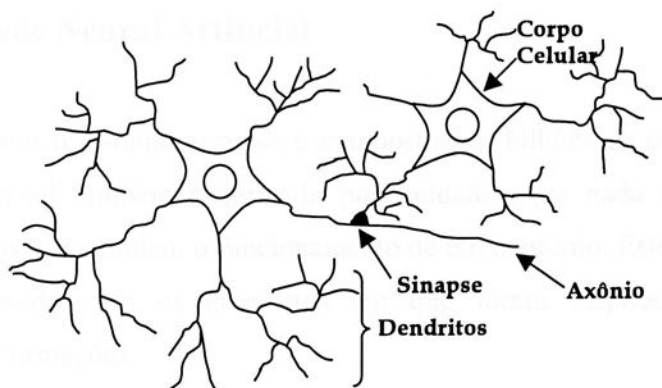
## Redes Neurais

Seu de se componentes

### 4.1 Introdução

As redes neurais artificiais são consideradas como técnicas para solucionar problemas de inteligência artificial, construindo um sistema que tenha circuitos que simulem o cérebro humano, inclusive seu comportamento, ou seja, aprendendo, errando e fazendo descobertas. São mais que isso, são técnicas computacionais que apresentam um modelo inspirado na estrutura neural de organismos inteligentes e que adquirem conhecimentos através de experiências. Uma grande rede neural artificial pode ter centenas ou milhares de unidades de processamento, enquanto que o cérebro de um mamífero, por exemplo, pode ter muitos bilhões de neurônios [16].

Os componentes do neurônio biológico são ilustrados na Figura 4.1 [9].



**Figura 4.1** Componentes de um neurônio biológico.

Sendo os componentes:

- corpo celular (soma): parte central do neurônio responsável pela recepção e geração dos impulsos nervosos.
- sinapse: ponto de contato entre a terminação axônica de um neurônio e o dendrito do outro. Funcionam como válvulas sendo capazes de controlar a transmissão de impulsos (fluxo de informação) entre os neurônios. Esta capacidade é definida como sendo eficiência sináptica.
- dendritos: os dendritos têm a função de receber as informações ou impulsos nervosos de outros neurônios e conduzi-las ao corpo celular.
- axônio: um axônio pode medir cerca de 0,1 milímetro podendo chegar a 1 metro. Próximo de seu final, o axônio dividi-se em vários ramos (dendritos), que se interconectam com os demais neurônios através das sinapses.

## 4.2 A Rede Neural Artificial

Assim como o sistema nervoso é composto por bilhões de células nervosas, a rede neural artificial também é formada por unidades que nada mais são do que pequenos módulos que simulam o funcionamento de um neurônio. Estes módulos devem funcionar de acordo com os elementos em que foram inspirados, recebendo e retransmitindo informações.

De forma geral, a operação de uma célula da rede pode ser resumida nas seguintes etapas [16].

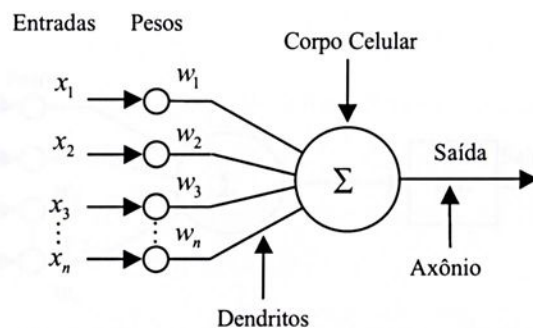
- Sinais que são apresentados à entrada;
- Cada sinal é multiplicado por um peso que indica sua influência na saída da unidade;
- É feita a soma ponderada dos sinais que produz um nível de atividade. Se este nível excede um limite (threshold) a unidade produz uma saída.

## 4.3 O Neurônio Artificial

O fisiologista Warren MacCulloch interpretou o funcionamento do neurônio biológico como sendo um circuito de entradas binárias combinadas por uma soma ponderada (com pesos) produzindo uma entrada efetiva [9].

A figura seguinte ilustra os componentes de um neurônio artificial.





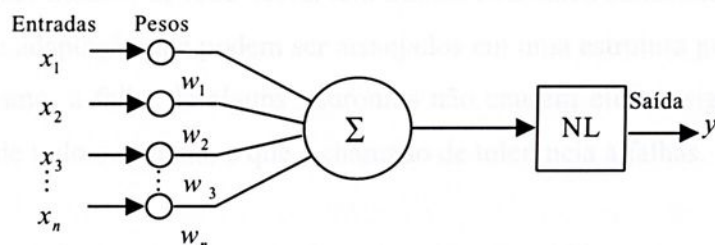
**Figura 4.2** Componentes de um neurônio artificial.

Os componentes de um neurônio artificial são mostrados na Figura 4.2, em que:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  : conjunto de entradas que são aplicados ao neurônio artificial
- $w_1, w_2, \dots, w_n$  : conjunto de pesos que é multiplicado aos sinais de entrada
- $\Sigma$  : soma dos sinais de entrada multiplicados com os pesos, correspondem ao corpo celular biológico.

No modelo geral de neurônio artificial (Figura 4.2) [9] as entradas  $w_i x_i$  são combinadas usando uma função, para produzir um estado de ativação do neurônio (correspondente à frequência de descarga do neurônio biológico). As entradas chegam através dos dendritos e tem um peso atribuído pela sinapse.

O esquema de um neurônio artificial é ilustrado na Figura 4.3 [9].



**Figura 4.3** Esquema de um neurônio artificial

Em que

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ : conjunto de entradas
- $w_1, w_2, \dots, w_n$ : conjunto de pesos que é multiplicado aos sinais de entrada
- $\Sigma$  : soma dos sinais de entrada multiplicados com os pesos, correspondem ao corpo celular biológico.
- NL : função não-linear denominada função de ativação [9].

#### 4.4 Por que utilizar Redes Neurais?

De acordo com diversas estruturas neurais e algoritmos de aprendizagem propostos por vários pesquisadores, as redes neurais possuem certas características que são exclusivas de sistemas biológicos. Tais características entram em conflito com os tradicionais métodos computacionais. Sistemas de computação baseados em redes neurais têm a capacidade de receber ao mesmo tempo várias entradas e distribuí-las de maneira organizada. Geralmente, as informações armazenadas por uma rede neural são compartilhadas por todas as suas unidades de processamento. Característica que contrasta com os atuais esquemas de memória, onde a informação fica confinada em um determinado endereço [16].

#### 4.5 Uma Rede Neural Ortogonal para Aproximação de Funções

Qualquer modelo de rede neural tem muitos neurônios conectados por pesos com capacidade de adaptação que podem ser arranjados em uma estrutura paralela. Por causa deste paralelismo, a falha de alguns neurônios não causam efeitos significantes para a performance de todo o sistema, o que é chamado de tolerância à falhas.

A principal força na estrutura de redes neurais reside em suas habilidades de adaptação e aprendizagem. A habilidade de adaptação e aprendizagem pelo ambiente significa que modelos de redes neurais podem lidar com dados imprecisos e situações não totalmente definidas. Uma rede treinada de maneira razoável tem a habilidade de generalizar quando é apresentada às entradas que não estão presentes em dados já conhecidos por ela.

Uma característica mais significativa de redes neurais está em sua habilidade de aproximar qualquer função contínua não linear de um grau de correção desejado. Esta habilidade das redes neurais as tem tornado úteis para modelar sistemas não lineares na combinação de controladores não lineares.

As redes neurais podem ter várias entradas e várias saídas, podendo ser facilmente aplicáveis à sistemas com muitas variáveis [9], [16].



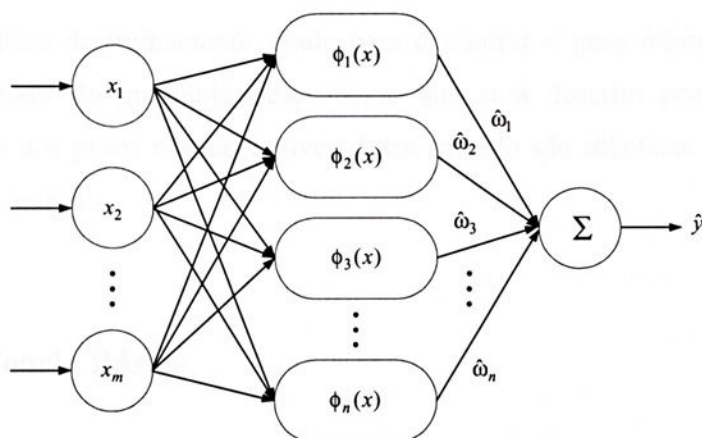
## 4.5 Uma Rede Neural Ortogonal para Aproximação de Funções

Nesta seção será apresentada uma rede neural de camada simples que é baseada em funções ortogonais. Esta rede neural é utilizada para evitar problemas que aparecem nas redes neurais tradicionais, tais como, mínimos locais, este problema faz com que o resultado obtido pela rede não seja a melhor solução para ser determinada, isto é, o resultado caminha para diversas soluções. Outro problema também encontrado nas redes neurais tradicionais é a baixa velocidade de convergência, pois, com várias direções atrativas para a solução do problema a resposta torna-se lenta e como consequência encontra-se outro problema que é o da determinação dos pesos iniciais, pois se os pesos não iniciarem o processamento da rede com valores apropriados para a rede a solução pode demorar muito para ser determinada, ou mesmo pode-se não ser determinada, isto é, a resposta da rede pode divergir. Entre as vantagens da utilização de uma base de funções ortogonais em uma rede neural artificial existe o fato dos pesos da rede neural ortogonal serem únicos e assim o treinamento desta rede converge rapidamente, pois, neste tipo de rede neural artificial não existe mais de uma direção atrativa para a solução do problema.

Dentre a família de funções ortogonais pode-se citar as séries de Fourier, as funções de Bessel, os polinômios de Legendre, os polinômios de Chebyshev, etc. Os termos da série de expansão da rede neural,  $w_i \phi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , são independentes uns dos outros. Se os elementos processantes de uma rede neural são compostos de termos de expansão de uma função ortogonal, o único conjunto de coeficientes dos termos de expansão será o conjunto dos pesos dos elementos processantes.

A rede neural ortogonal utilizada na aplicação deste trabalho é baseada em dois conjuntos de funções ortogonais, primeiramente são utilizados os polinômios de Legendre e analisado os resultados, seguidamente são utilizados os polinômios de Chebyshev. A figura a seguir representa uma rede neural ortogonal [13].





**Figura 4.4** Rede neural ortogonal de camada simples

A rede neural ortogonal representada pela Figura 4.4 tem como entradas os elementos do conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e a saída é dada por [13]

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i \Phi_i(X).$$

Sendo,

- $\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_n(X)$  os elementos processantes,
- $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  as entradas da rede,
- $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n$  os respectivos pesos dos elementos processantes.

Pode-se observar também que não existem pesos entre a camada de entrada e a camada do meio. O  $i$ -ésimo elemento processante da rede neural linear é idêntico ao  $i$ -ésimo termo de expansão da função ortogonal. Por tratar-se de uma rede neural ortogonal, que possui pesos somente entre os elementos processantes e os nós de saída, esta rede é uma rede neural ortogonal linear de camada simples [13].

O algoritmo de treinamento usado para encontrar o peso ótimo é determinado através do método do gradiente descendente que será descrito posteriormente. As soluções ótimas dos pesos obtidas através desse método são idênticas aos coeficientes dos termos de expansão.

#### 4.5.1 Teoria Básica

Dado um conjunto ortogonal de funções  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ , de acordo com a teoria de funções ortogonais [3], [7], uma função arbitrária  $f(x)$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ , tem um polinômio ortogonal

$$F_n(x) = w_1\phi_1(x) + w_2\phi_2(x) + w_3\phi_3(x) + \dots + w_n\phi_n(x) \quad (4.1)$$

tal que  $F_n \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$ , em  $L^2[a, b]$ ; isto é, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 dx = 0 \quad (4.2)$$

sendo (ver (3.5))

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ A_i > 0, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.3)$$

$$w_i = \frac{1}{A_i} \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$



As equações anteriores indicam que uma dada função pode ser aproximada por um conjunto ortogonal de funções e que o conjunto de coeficientes,  $\{w_i\}$ , é único. A equação (4.3) indica que o coeficiente,  $w_i$ , não será determinado se a função  $f(x)$  não for conhecida. Infelizmente isso é o que acontece na maioria dos modelos de sistemas dinâmicos, isto é, os coeficientes,  $w_i$ , são desconhecidos e em outros casos são difíceis de se determinar. Então, é necessário desenvolver um método que possa usar os dados de entrada e de saída do sistema para determinar os coeficientes,  $w_i$  [13].

A condição (4.4), dada a seguir, afirma que a série dos quadrados dos coeficientes,  $\{w_i\}$ , de um conjunto ortogonal de funções,  $\{\phi_i\}$ , sempre converge. De fato, fixando  $n \in \mathbb{N}^*$ , sendo

$$0 \leq \int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(x) \right)^2 dx = \int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \sum_{i=1}^n w_i \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx + \sum_{i=1}^n A_i w_i^2$$

$$= \int_a^b (f(x))^2 dx - \sum_{i=1}^n A_i w_i^2$$

tem-se (a desigualdade de Bessel) [8], [13]

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 \leq A^{-1} \int_a^b (f(x))^2 dx, \text{ sendo } A = \min\{A_i / 1 \leq i \leq n\}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.4)$$

Além disso, suponha que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i(x),$$

é outra série de expansão da **função ortogonal**  $f(x)$ . Afim de se ter uma melhor aproximação, a magnitude de  $\gamma_i$  deve minimizar o valor de

$$\int_a^b (f(x) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i(x))^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

De fato, considerando as equações

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(x) \right)^2 dx &= \int_a^b (f(x))^2 dx - \sum_{i=1}^n A_i w_i^2 \\ \int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i(x) \right)^2 dx &= \int_a^b (f(x))^2 dx - 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_a^b f(x) \phi_i(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i(x) \right)^2 dx \\ &= \int_a^b (f(x))^2 dx + \sum_{i=1}^n A_i (\gamma_i - w_i)^2 - \sum_{i=1}^n A_i w_i^2 \end{aligned}$$

tem-se

$$\int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(x) \right)^2 dx + \sum_{i=1}^n A_i (\gamma_i - w_i)^2.$$

Portanto (segue o teorema da melhor aproximação [8])

$$\int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n w_i \phi_i(x) \right)^2 dx \leq \int_a^b \left( f(x) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i(x) \right)^2 dx \quad (4.5)$$

sendo  $\{w_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  definido em (4.3). Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $\gamma_i = w_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Esta última afirmação fornece a unicidade do conjunto dos coeficientes,  $\{w_i\}$ .

### 4.5.2 Redes Neurais Ortogonais

Das discussões acima, pode-se concluir que uma função pode ser aproximada por um conjunto ortogonal de funções e que, por (4.4) e (4.5), os coeficientes são únicos e limitados. Baseado neste fato, uma rede neural ortogonal de camada simples pode ser construída para aproximação de funções.

Os elementos processantes da rede neural linear, a ser construída, correspondem aos termos de expansão de uma função ortogonal  $f(x)$  e o conjunto dos pesos da rede neural correspondem ao conjunto dos coeficientes,  $\{w_i\}$ .

A discussão anterior é somente para a aproximação de uma função  $f(x)$  de uma variável. Assim, para a aproximação de funções de várias variáveis, um conjunto ortogonal de funções de várias variáveis pode ser gerada considerando vários conjuntos ortogonais de funções de uma variável. Por exemplo, se  $y = F(X)$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  é uma função de  $m$  variáveis, seu conjunto ortogonal de funções de  $m$  variáveis será  $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ , sendo que cada uma dessas funções ortogonais é definida como [13]

$$\Phi_i(X) = \phi_{1i}(x_1) \phi_{2i}(x_2) \dots \phi_{mi}(x_m), \quad i = 1, 2, \dots, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Neste trabalho são utilizados, as funções polinomiais ortogonais para a linearização das tensões do termopar em relação as suas respectivas temperaturas. Os polinômios ortogonais entre outras coisas possuem a propriedade recursiva para determinar os termos de expansão que possibilita maior rapidez no tempo de convergência.

## 4.5.2 Redes Neurais Ortogonais

Suponha que a função desconhecida a ser aproximada seja  $y = F(X)$ , definida num conjunto compacto  $C \subset \mathfrak{R}^m$  sendo  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . A aproximação dessa função por um conjunto ortogonal de funções é dada por [13]

$$\begin{aligned} y = F(X) &= \sum_{i=1}^n w_i \Phi_i(X) + R(X, n) \\ &= W^T \Phi(X) + R(X, n) \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo

- $w_i$  o coeficiente da função ortogonal  $\Phi_i(X)$  e  $W^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$
- $R(X, n)$  o erro da expansão das funções ortogonais
- $\{\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_n(X)\}$  o conjunto ortogonal de funções e  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)^T$ .

Da equação (4.6) define-se um modelo de rede neural ortogonal para aproximação de funções como [13]

$$\hat{y} = \hat{F}(X) = \sum_{i=1}^n \hat{w}_i \Phi_i(X) = \hat{W}^T \Phi \quad (4.7)$$

sendo

- $X$  o conjunto de entrada da rede
- $\hat{y}$  a saída da rede
- $\Phi = \{\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_n(X)\}$  o conjunto dos elementos processantes
- $\hat{W}(t) = (\hat{w}_1(t), \hat{w}_2(t), \dots, \hat{w}_n(t))^T$  o conjunto dos pesos ajustáveis.



Baseado na equação (4.7), uma rede neural ortogonal de camada simples semelhante a Figura 4.4 pode ser construída.

O  $n$ -ésimo elemento processante da rede ortogonal é idêntico ao  $n$ -ésimo termo de expansão do polinômio ortogonal, sendo  $n = 1, 2, \dots$

A Figura 4.4 ilustra uma rede neural ortogonal de camada simples que possui somente um conjunto de pesos ajustáveis que é  $\hat{W}(t) = (\hat{w}_1(t), \hat{w}_2(t), \dots, \hat{w}_n(t))^T$ . Os pesos  $\{\hat{w}_i(t)\}$  são treinados para se obter valores próximos aos pesos desejados  $\{w_i(t)\}$ , o treinamento é realizado através do algoritmo de treinamento que é abordado na próxima seção.

Uma das vantagens de se utilizar redes neurais ortogonais para a aproximação de funções se deve ao fato de que na rede neural ortogonal o conjunto dos pesos determinados é único e isto facilita a determinação dos pesos próximos aos pesos desejados, o que não acontece nas redes neurais tradicionais de multi camadas, pelo fato de que as redes neurais de camadas simples têm apenas uma direção atrativa, para o ajuste de pesos, enquanto que as redes neurais de multi camadas possuem mais do que uma direção atrativa, pois, necessitam do ajuste de pesos em todas as camadas da rede dificultando a convergência e a obtenção dos pesos da rede, entre outros [13].

### 4.5.3 O Algoritmo de Treinamento

Depois de construído o modelo de rede neural ortogonal (4.7) é necessário encontrar um método para ajustar os pesos  $\hat{W}(t)$ , afim de aproximá-los aos pesos desejados  $W(t) = \{w_i\}$  que estão definidos em (4.3). Neste trabalho o algoritmo utilizado para ajustar  $\hat{W}(t)$  é baseado no método do gradiente descendente o qual é um método muito usado para gerar algoritmos de aprendizado [6].



### 4.5.3.1 Método do Gradiente Descendente

Este método também foi bastante difundido pelo algoritmo *back-propagation*. Ele se baseia na busca de uma direção dos parâmetros ajustáveis da rede.

O algoritmo *back-propagation* consiste na adaptação de pesos, tal que, o erro quadrático da rede seja minimizado. A soma do erro quadrático na forma discretizada, ver (3.1), de cada neurônio é dada por [10]:

$$E = \sum_{i=1}^{ns} (d_i - y_i)^2 \quad (4.8)$$

sendo

- $d_i$  a saída desejada do  $i$ -ésimo elemento da rede, ver também (5.9)
- $y_i$  é a saída do  $i$ -ésimo elemento da rede
- $ns$  é o número de neurônios da rede

Em particular, de (4.6) e (4.7) pode-se considerar a função, erro de aproximação,  $E : \Re^n \rightarrow \Re$  definida por

$$E = E(\tilde{W}) = y - \hat{y} = (W - \hat{W})^T \Phi + R = \tilde{W}^T \Phi + R \quad (4.9)$$

sendo

$$\tilde{W} = \tilde{W}(t) = W - \hat{W}(t) = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n)^T.$$

Considera-se  $J = E^2/2$  uma função do erro ( $J = J(E) = J(E(\tilde{W}))$ ). Os valores extremos de  $J$  podem ser obtidos calculando a “derivada de primeira ordem” de  $J$ ,  $\frac{\partial J}{\partial \tilde{W}} = \nabla J$ , (e igualando a zero),

$$\frac{\partial J(\tilde{W})}{\partial \tilde{W}} = \frac{\partial((1/2)E^2)}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \tilde{W}} = E\Phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial J(\tilde{W})}{\partial \tilde{W}} = 0 \Rightarrow E\Phi = 0.$$

Logo, sendo  $\Phi \neq 0$ , tem-se

$$E = 0$$

o que, por (4.9), significa que

$$\tilde{W}^T \Phi = -R. \tag{4.10}$$

Pela equação (4.10) o conjunto  $\Phi = \{\Phi_1(X), \dots, \Phi_n(X)\}$  pode ser considerado como um conjunto ortogonal de funções que aproxima a função  $(-R)$ , sendo  $\tilde{W} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)^T$  o vetor dos coeficientes.

Por outro lado, da definição de  $J = J(\tilde{W})$  acima, a modificação de  $\tilde{W}$ , para minimizar o erro de aproximação, deve seguir a direção de  $(-\nabla J)$  [13]. Portanto

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} = \eta(-\nabla J) \tag{4.11}$$

sendo  $\eta$  um ganho positivo.



Como  $\tilde{W}(t) = W - \hat{W}(t)$  e  $\nabla J = E\Phi$ , de (4.11) obtêm-se o algoritmo de treinamento dado por [13]

$$\frac{d\hat{W}}{dt} = \eta E\Phi. \quad (4.12)$$

Considerando-se o neurônio de índice  $i$  da rede e utilizando-se o método do gradiente descendente (4.12), transformado-o numa equação de diferença, na forma discretizada, o ajuste de pesos pode ser formulado como [13]

$$\hat{W}_i(t+1) = \hat{W}_i(t) + h \cdot \underbrace{\eta E(t)\Phi}_{\text{a lg oritmo de treinamento}} \quad (4.13)$$

sendo

- $E(t)\Phi = -\nabla J(t)$  gradiente do erro quadrático da rede com relação aos pesos do neurônio analisados em  $t$ .
- $E(t)$  erro quadrático da rede analisado em  $t$ .
- $\Phi(X)$  funções ortogonais.
- $\hat{W}(t+1)$  vetor contendo os pesos finais da saída da rede pode-se escrevê-los como  $(\hat{w}_{1i} \hat{w}_{2i} \dots \hat{w}_{ni})^T$ .
- $\hat{W}(t)$  vetor contendo os pesos ajustáveis da rede pode-se escrevê-los como  $(\hat{w}_{1(i-b)} \hat{w}_{2(i-b)} \dots \hat{w}_{n(i-b)})^T$ .
- $\eta$  ganho positivo (taxa de treinamento), normalmente  $0 \leq \eta \leq 1$ .
- $h$  uma constante positiva muito pequena.
- $t$  representa o índice da iteração.



O treinamento, via *back-propagation*, é iniciado pela apresentação de um padrão  $X$  à rede, o qual produz uma saída  $Y$ . Em seguida calcula-se o erro de cada saída (diferença entre o valor desejado e a saída da rede).

O passo seguinte consiste na determinação do erro propagado no sentido inverso, através da rede associada à derivada parcial do erro quadrático de cada elemento com relação aos pesos e, finalmente, ajusta-se os pesos de cada elemento, assim um novo padrão é apresentado. O processo é repetido para todos os padrões até a convergência ( $|\text{erro}| \leq \text{tolerância}$  preestabelecida) ou quando forem realizadas o número de iterações estabelecidas para o processo de aprendizagem.

Os pesos iniciais são geralmente adotados aleatoriamente que pode ser através de um processo randômico.

Neste trabalho os pesos são ajustados a cada iteração, foram executadas 100 iterações e analisados seqüencialmente seus erros até serem obtidos erros pertinentes à quantidade de iterações preestabelecidas.

Com o intuito de mostrar que o processo não estacionará em um mínimo local é necessário provar que  $\tilde{W}(t)$  e  $E$  decrescerão gradualmente e encontrarão um estado estável. Para tanto, para estimar  $\|\tilde{W}(t)\|$  e  $|E|$ , será usado o resultado seguinte [13].

Sejam

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \text{ e } x(t_0) = x_0, \quad (4.14)$$

sendo  $u : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}$  satisfazendo uma condição adicional e  $x : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$ .

Suponha que  $A(t)$  e  $b(t)$  são uniformemente limitados e  $A(t)$  é uma matriz exponencialmente estável (auto-valor negativo). Então, existem duas constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$\|x(t)\| \leq c_1 \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + c_2. \quad (4.15)$$

Por outro lado, a equação  $\frac{d\tilde{W}}{dt}$  dada por (4.11) pode ser escrita ainda como [13]

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} = -\eta E\phi = -\eta\phi\phi^T \tilde{W} - \eta\phi R. \quad (4.16)$$

De acordo com (4.14), (4.15) e (4.16) obtém-se

$$\|\tilde{W}(t)\| \leq c_1 \sup_{\tau \leq t} |R(\tau)| + c_2. \quad (4.17)$$

A condição (4.17) indica que o valor de  $\|\tilde{W}(t)\|$  é limitado pelo valor do erro de expansão  $\sup_{\tau \leq t} |R(\tau)|$ . A medida que o erro diminui, o algoritmo de treinamento acima encaminha-se para um vetor peso  $\tilde{W}$  próximo ao vetor peso desejado  $W$ . Como foi discutido na seção 4.5.1, o vetor peso,  $W$ , desejado vai minimizar o erro de saída da rede neural. Portanto, o algoritmo de treinamento (4.13) será capaz de treinar a rede neural para ter um erro mínimo de saída [13].

Além disso, o valor de  $\|\tilde{W}(t)\|$  é controlável. O erro de saída da rede neural será limitado. A seguinte condição decorre de (4.9) e mostra que o valor absoluto do erro de saída depende da magnitude de  $\|\tilde{W}(t)\|$  [13].

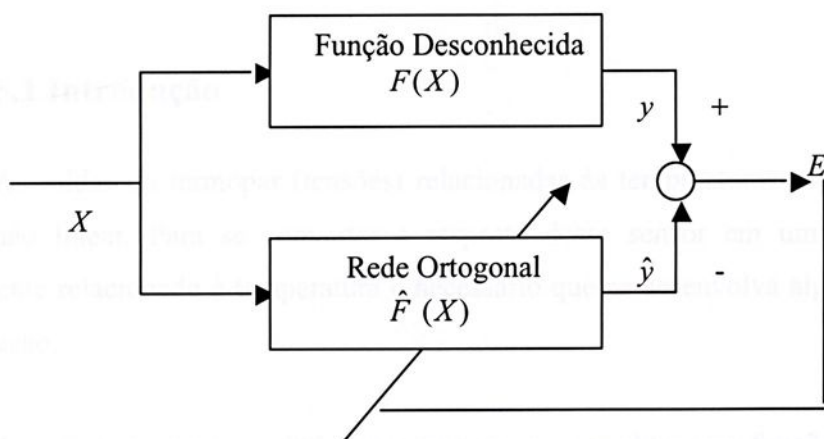
$$|E| \leq \|\tilde{W}\Phi^T\| + |R| \leq \|\tilde{W}\| \|\Phi\| + |R| \leq \|\tilde{W}\| \sup_{X \in C} \|\Phi(X)\| + \sup_{X \in C} |R(X)| = |E| \leq c_3 \|\tilde{W}\| + c_4.$$

isto é,

$$|E| \leq c_3 \|\tilde{W}\| + c_4.$$

Desde que  $\|\tilde{W}(t)\|$  é limitado, o erro de saída  $E$  será também limitado.

A Figura 4.5 ilustra um diagrama de blocos da rede neural que determina a saída da função desejada da rede [13].



**Figura 4.5** Diagrama de blocos para determinação da função desejada

## CAPÍTULO 5 TERMOPAR

---

### Aplicação: Utilização de Redes Neurais na Linearização da Tensão do Termopar Tipo B

#### 5.1 Introdução

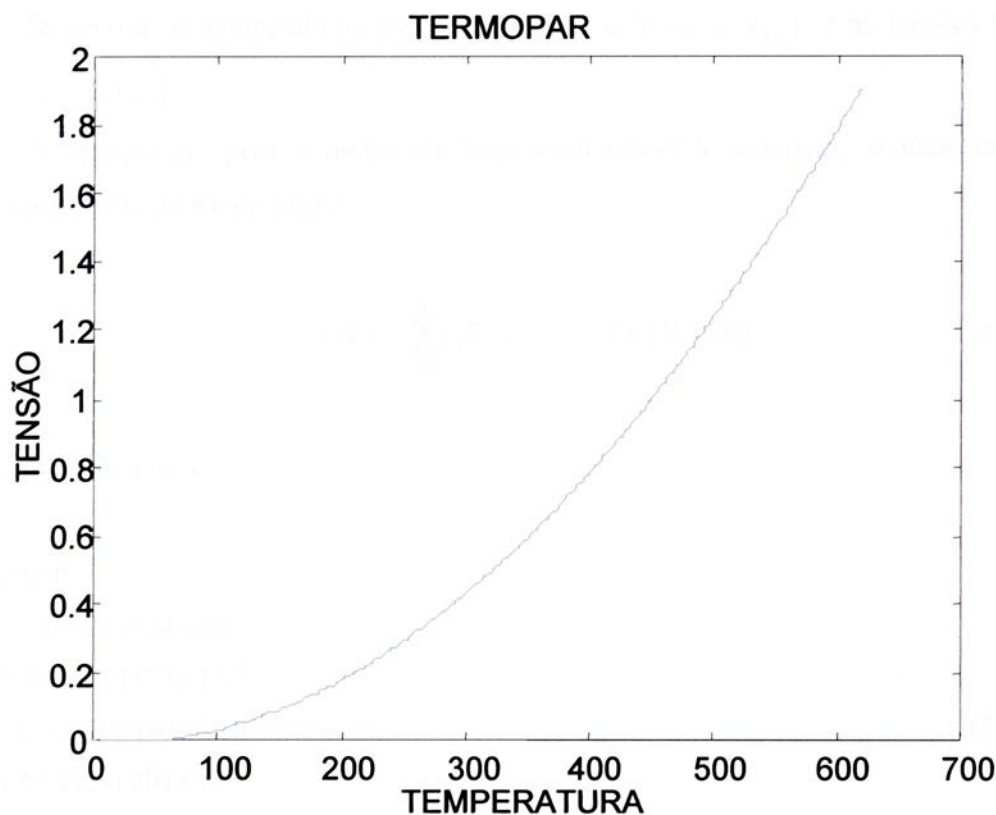
As saídas do termopar (tensões) relacionadas às temperaturas são expressas de forma não linear. Para se converter a resposta desse sensor em um sinal elétrico linearmente relacionado à temperatura é necessário que se desenvolva alguma forma de linearização.

Apresenta-se, neste capítulo, uma maneira para se obter uma função que linearize as saídas (tensões) do termopar relacionado à temperatura através da utilização de redes neurais ortogonais.

O sensor de temperatura que será analisado é o termopar do tipo B que abrange a faixa de temperatura de 0°C a 1700°C (graus Celsius), sendo a tensão compreendida entre -0.003 mV a 12.426 mV (milivolts) em relação a esta faixa de temperatura.



Neste trabalho são apresentadas funções de linearização obtidas pela rede neural a qual utiliza as funções de Legendre e Chebyshev para a sua aproximação. Em particular, as funções determinadas pela rede neural linearizam os valores da tensão do termopar tipo B em uma faixa escolhida aleatoriamente entre 0 mV a 1.9124 mV correspondente a faixa de 0°C a 620°C respectivamente em relação a temperatura. Graficamente a função a ser linearizada neste trabalho é representada na Figura 5.1



**Figura 5.1** Termopar tipo B

Neste capítulo são apresentados alguns testes e resultados obtidos no processo de simulação da rede neural ortogonal.

## 5.2 Problema Proposto

O intervalo de temperatura do termopar que deve-se linearizar é de 0°C a 620°C, ele é analisado a cada 1°C, isto é, são linearizadas 621 tensões que correspondem às 621 temperaturas lidas pelo termopar (ver Apêndice 3).

Denota-se as temperaturas por  $T$ , isto é,  $T \in \{t_1, t_2, \dots, t_{621}\}$  e as tensões por  $v \in \{v_1, v_2, \dots, v_{621}\}$ .

A equação que gera as saídas não lineares (tensões) do termopar, os quais serão linearizados pela rede é da forma

$$v(T) = \sum_{i=0}^6 c_i T^i, \quad T \in [0, 620] \quad (5.1)$$

sendo os coeficientes

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.000 \\ c_1 &= -2.465081834 \times 10^{-4} \\ c_2 &= 5.9040421171 \times 10^{-6} \\ c_3 &= -1.3257931636 \times 10^{-9} \\ c_4 &= 1.5668291901 \times 10^{-12} \\ c_5 &= -1.6944529240 \times 10^{-15} \\ c_6 &= 6.2290347094 \times 10^{-19}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Substituindo as temperaturas variando no intervalo de 0°C a 620°C e os coeficientes,  $c_i$   $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  e 6 obtém-se numericamente os valores das tensões  $v(t_j)$  com  $j = 1, 2, \dots, 621$ , como segue na tabela 5.1. Como trata-se de 621 valores da tensão são ilustrados apenas alguns valores obtidos pela equação (5.1).



Temperatura ( $T$ ) (graus Celsius)	Tensão ( $v(T)$ ) (milivolts)	Valores desejados (tensão)(mv)
0	0.000000000	0.000000
50	0.002278245	0.1542250
100	0.033204170	0.3084501
150	0.092061800	0.4626756
200	0.178258300	0.6169000
250	0.291277800	0.7711241
300	0.430642800	0.9253481
350	0.595881600	1.079574
400	0.786503700	1.233801
450	1.001982000	1.388028
500	1.241740000	1.542255
550	1.505152000	1.696482
600	1.791542000	1.850709

**Tabela 5.1** Tensões no intervalo de temperatura inicial e valores desejados para a tensão

Os valores de  $v(T)$  são os valores de entrada da rede neural, isto é, inicia-se a rede com 621 valores não lineares da tensão relacionados à temperatura. Para determinar os pesos da rede neural ortogonal que são os coeficientes da função aproximada é utilizada a equação (4.12) do capítulo anterior, e após o treinamento dos pesos, é obtida uma função que fornece uma saída desejada do problema. Neste trabalho a saída desejada é a tensão linearizada.



### 5.3 Estrutura da rede neural ortogonal

Para linearizar as tensões do termopar deve-se primeiramente fazer o deslocamento de intervalo de  $[0,620]$  para  $[-1,1]$ , pois, trata-se de redes que tem como base os polinômios de Legendre e os polinômios de Chebyshev, esses polinômios por construção são ortogonais no intervalo  $[-1,1]$ , intervalo onde esses polinômios estão definidos. Daí a necessidade de se fazer o deslocamento.

Em seguida deve-se gerar os pesos. Neste trabalho os pesos são gerados inicialmente de uma forma aleatória, e faz-se o ajuste dos pesos pelo método do gradiente descendente, ver seção 4.5.3.1, com a finalidade de obter uma função que determine valores próximos aos resultados desejados.

Os pesos ajustados são os coeficientes da função que lineariza as tensões e o ajuste dos pesos é feito analisando o erro. O erro é determinado a cada iteração pela soma do quadrado da diferença dos valores desejados e a cada saída da rede. O número de iterações é definido após testes realizados para 10, 20, 50, 100, 1000 e 10000 iterações; neste trabalho analisa-se 100 iterações, pois, ao serem realizados os testes nota-se que os valores obtidos para 100 iterações da rede são resultados muito próximos dos valores desejados e também pelo fato dessa quantidade de processamento convergir rapidamente para a saída desejada da rede, sendo que para cada iteração são ajustados os pesos para que os 621 valores da tensão sejam linearizados. Como trata-se de um rede neural de camada simples, os pesos são únicos e convergirá rapidamente para cada valor desejado (ver 4.5.1).

A rede neural ortogonal foi simulada em Fortran, foram feitos testes para diferentes conjuntos de polinômios ortogonais, foram analisados os erros e alguns resultados e gráficos são apresentados neste capítulo.



## 5.4 Determinação da função que lineariza as saídas do termopar

O deslocamento de intervalo deve ser feito quando o intervalo da função  $v(T)$  não coincide com o intervalo considerado, no método de aproximação utilizado. Neste trabalho desloca-se o intervalo de  $[0, 620] = [c, d]$  para o intervalo  $[-1, 1] = [a, b]$ , onde os polinômios de Legendre e Chebyshev estão definidos, faz-se os cálculos e depois desloca-se novamente a função aproximada ao intervalo inicial [11].

Este deslocamento pode ser feito seguindo o esquema descrito a seguir.

Dada a função em (5.1) definida no intervalo  $[0, 620]$ , o deslocamento é feito para o intervalo  $[-1, 1]$  usando a função deslocamento

$$\begin{aligned}\lambda : [0, 620] &\rightarrow [-1, 1] \\ T &\mapsto y = \lambda(T)\end{aligned}$$

De um modo geral, a função deslocamento  $\lambda : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é definida por

$$\lambda(T) = a + \frac{(b-a)}{(d-c)}(T-c), \quad \forall T \in [c, d].$$

Em particular, quando  $[c, d] = [0, 620]$  e  $[a, b] = [-1, 1]$  tem-se

$$y = \lambda(T) = -1 + 0.0032258T, \quad \forall T \in [0, 620] \quad (5.3)$$

Calculando a função inversa, tem-se

$$\lambda^{-1}(y) = \frac{1+y}{0.0032258}, \quad \forall y \in [-1,1] \quad (5.4)$$

A função que é aproximada no intervalo deslocado  $[-1, 1]$  é  $\beta = v \circ \lambda^{-1}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \beta(y) &= (v \circ \lambda^{-1})(y) = v(\lambda^{-1}(y)) \\ &= c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + c_4 r^4 + c_5 r^5 + c_6 r^6. \end{aligned} \quad \forall y \in [-1,1] \quad (5.5)$$

sendo  $r = \lambda^{-1}(y) = \frac{1+y}{0.0032258}$  e os coeficientes  $c_i$ ,  $i = 0,1,2,\dots,6$ , dados por (5.2).

A função (5.5) é utilizada para deslocar o intervalo original para o intervalo onde são realizados os cálculos dos coeficientes das funções que linearizam os dados do termopar, neste caso, o intervalo original  $[0, 620]$  é deslocado para o intervalo  $[-1, 1]$ . Os cálculos são feitos no intervalo deslocado e utiliza-se a expressão (5.3) para voltar para o intervalo original, isto é, para o intervalo de  $[0, 620]$ , determinando assim, as funções que linearizam a saída dos termopares no intervalo original.

#### 5.4.1 Determinação da função de linearização usando polinômios de Legendre

Uma forma de determinar a função que lineariza as tensões do termopar é utilizar os polinômios de Legendre que tem como base a rede neural ortogonal considerada.

Os primeiros polinômios de Legendre são  $[2]$ ,  $[11]$

$$L_0(y) = 1$$

$$L_1(y) = y$$

$$L_2(y) = y^2 - \frac{1}{3}$$

$$L_3(y) = y^3 - \frac{3}{5}y$$

$$L_4(y) = y^4 - \frac{6}{7}y^2 + \frac{3}{35}$$

$$L_5(y) = y^5 - \frac{10}{9}y^3 + \frac{5}{21}y$$

$$L_6(y) = y^6 - \frac{15}{11}y^4 + \frac{5}{11}y^2 - \frac{5}{231}$$

$$L_7(y) = y^7 - \frac{21}{13}y^5 + \frac{105}{143}y^3 - \frac{35}{429}y$$

As aproximações encontradas após 100 iterações no intervalo deslocado  $[-1, 1]$ , utilizando como base os polinômios de Legendre são dadas a seguir.

- Aproximação de ordem 5

$$\rho_5(y) = w_0L_0(y) + w_1L_1(y) + w_2L_2(y) + w_3L_3(y) + w_4L_4(y) + w_5L_5(y)$$

- Aproximação de ordem 6

$$\rho_6(y) = w_0L_0(y) + w_1L_1(y) + w_2L_2(y) + w_3L_3(y) + w_4L_4(y) + w_5L_5(y) + w_6L_6(y)$$

- Aproximação de ordem 7

$$\rho_7(y) = w_0L_0(y) + w_1L_1(y) + w_2L_2(y) + w_3L_3(y) + w_4L_4(y) + w_5L_5(y) + w_6L_6(y) + w_7L_7(y)$$

sendo  $w_j = w_j + (\text{var} \cdot L_j(y))$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ . Em que  $w_j$  são os pesos;  $\text{var} = mi \cdot e$ , sendo  $mi$  uma constante positiva muito pequena. Para a aplicação deste trabalho utilizou-se  $mi = 0.2$ . Considera-se  $e$  como a distância entre os dados determinados pela rede neural e a saída desejada para esta mesma rede neural (saída linear). E  $L_j(y)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ , são os polinômios de Legendre utilizados na rede neural definidos no intervalo deslocado  $[-1, 1]$ .

Os pesos  $w_j, j = 0, 1, \dots, 7$ , treinados na rede neural no intervalo  $[-1, 1]$  são os coeficientes das funções que linearizam as tensões, de ordem 5, 6 e 7, pois, ao analisar as aproximações, observa-se que os valores destas funções encontram-se mais próximos dos resultados desejados. Estes coeficientes são apresentados na Tabela 5.2

Coeficientes da função linear aproximada de ordem 5	Coeficientes da função linear aproximada de ordem 6	Coeficientes da função linear aproximada de ordem 7
$w_0 = 5.811719 \times 10^{-1}$	$w_0 = 5.806586 \times 10^{-1}$	$w_0 = 5.800964 \times 10^{-1}$
$w_1 = -1.149695 \times 10^{-1}$	$w_1 = -1.143129 \times 10^{-1}$	$w_1 = -1.125530 \times 10^{-1}$
$w_2 = -6.459584 \times 10^{-3}$	$w_2 = -1.219682 \times 10^{-2}$	$w_2 = -1.921591 \times 10^{-2}$
$w_3 = 2.328327 \times 10^{-2}$	$w_3 = 2.912442 \times 10^{-2}$	$w_3 = 5.120469 \times 10^{-2}$
$w_4 = -6.928413 \times 10^{-2}$	$w_4 = -1.266005 \times 10^{-1}$	$w_4 = -2.124440 \times 10^{-1}$
$w_5 = 7.482850 \times 10^{-2}$	$w_5 = -2.624840 \times 10^{-1}$	$w_5 = -1.115552 \times 10^{-1}$
	$w_6 = 8.446897 \times 10^{-1}$	$w_6 = 6.122622 \times 10^{-1}$
		$w_7 = 3.085908 \times 10^{-1}$

**Tabela 5.2** Coeficientes das funções lineares definidas no intervalo  $[-1, 1]$  determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Legendre

As funções determinadas  $\rho_5(y)$ ,  $\rho_6(y)$  e  $\rho_7(y)$ , são deslocadas novamente ao intervalo inicial  $[0, 620]$ . Para este deslocamento deve-se considerar a composta da função definida em (5.3) com as funções aproximadas no intervalo deslocado  $[-1, 1]$ , isto é,  $(P_k = P_k \circ \lambda, k = 5, 6 \text{ e } 7)$

- $P_5(T) = \rho_5(y) \circ \lambda(T), \quad \forall T \in [0, 620]$
- $P_6(T) = \rho_6(y) \circ \lambda(T), \quad \forall T \in [0, 620]$
- $P_7(T) = \rho_7(y) \circ \lambda(T), \quad \forall T \in [0, 620]$

Voltando-se ao intervalo inicial os pesos são novamente treinados para se obter uma saída desejada, no intervalo inicial [0, 620]. Estes pesos determinados pela rede neural são os coeficientes das funções lineares de ordem 5, 6 e 7 definidas neste intervalo. Os valores desses pesos são dados na Tabela (5.3).

<b>Coefficientes da função linear aproximada de ordem 5</b>	<b>Coefficientes da função linear aproximada de ordem 6</b>	<b>Coefficientes da função linear aproximada de ordem 7</b>
$\delta_0 = 9.561982 \times 10^{-1}$	$\delta_0 = 9.565758 \times 10^{-1}$	$\delta_0 = 9.564233 \times 10^{-1}$
$\delta_1 = 9.562079 \times 10^{-1}$	$\delta_1 = 9.546592 \times 10^{-1}$	$\delta_1 = 9.548622 \times 10^{-1}$
$\delta_2 = 1.251677 \times 10^{-6}$	$\delta_2 = 4.968895 \times 10^{-3}$	$\delta_2 = 3.000963 \times 10^{-3}$
$\delta_3 = 4.023521 \times 10^{-7}$	$\delta_3 = -2.027221 \times 10^{-2}$	$\delta_3 = -1.733132 \times 10^{-2}$
$\delta_4 = 1.018750 \times 10^{-3}$	$\delta_4 = 7.456504 \times 10^{-2}$	$\delta_4 = 4.820306 \times 10^{-2}$
$\delta_5 = -1.891019 \times 10^{-3}$	$\delta_5 = -3.499255 \times 10^{-1}$	$\delta_5 = -3.265657 \times 10^{-1}$
	$\delta_6 = 4.882426 \times 10^{-1}$	$\delta_6 = 3.247645 \times 10^{-1}$
		$\delta_7 = 3.996750 \times 10^{-1}$

**Tabela 5.3** Coeficientes das funções lineares definidas no intervalo [0,620] determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Legendre.

As funções lineares de ordem 5, 6 e 7 determinadas pela rede neural tomando como base polinômios de Legendre são consideradas a seguir.

- Aproximação de grau 5

$$P_5(T) = \delta_0 L_0(T) + \delta_1 L_1(T) + \delta_2 L_2(T) + \delta_3 L_3(T) + \delta_4 L_4(T) + \delta_5 L_5(T) \quad (5.6)$$

- Aproximação de grau 6

$$P_6(T) = \delta_0 L_0(T) + \delta_1 L_1(T) + \delta_2 L_2(T) + \delta_3 L_3(T) + \delta_4 L_4(T) + \delta_5 L_5(T) + \delta_6 L_6(T) \quad (5.7)$$



- Aproximação de grau 7

$$P_7(T) = \delta_0 L_0(T) + \delta_1 L_1(T) + \delta_2 L_2(T) + \delta_3 L_3(T) + \delta_4 L_4(T) + \delta_5 L_5(T) + \delta_6 L_6(T) + \delta_7 L_7(T) \quad (5.8)$$

sendo  $\delta_j = \delta_j + (\text{var} \cdot L_j(T))$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ . Em que  $\delta_j$  são os pesos;  $\text{var} = mi \cdot e$ , sendo  $mi$  uma constante positiva muito pequena. Para a aplicação deste trabalho utilizou-se  $mi = 0.2$ . Considera-se  $e$  como a distância entre os dados determinados pela rede neural e a saída desejada para esta mesma rede neural (saída linear). E  $L_j(T)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ , são os polinômios de Legendre utilizados na rede neural definidos no intervalo original  $[0, 620]$ .

As funções (5.6), (5.7) e (5.8) utilizam a função definida em (5.3) para voltarem ao intervalo inicial, sendo assim os polinômios de Legendre que descrevem as equações acima são

$$\begin{aligned} L_0(T) &= 1 & L_4(T) &= (\lambda(T))^4 - \frac{6}{7}(\lambda(T))^2 + \frac{3}{35} \\ L_1(T) &= \lambda(T) & L_5(T) &= (\lambda(T))^5 - \frac{10}{9}(\lambda(T))^3 + \frac{5}{21}\lambda(T) \\ L_2(T) &= (\lambda(T))^2 - \frac{1}{3} & L_6(T) &= (\lambda(T))^6 - \frac{15}{11}(\lambda(T))^4 + \frac{5}{11}(\lambda(T))^2 - \frac{5}{231} \\ L_3(T) &= (\lambda(T))^3 - \frac{3}{5}\lambda(T) & L_7(T) &= (\lambda(T))^7 - \frac{21}{13}(\lambda(T))^5 + \frac{105}{143}(\lambda(T))^3 - \frac{35}{429}\lambda(T). \end{aligned}$$

Como forma ilustrativa alguns valores linearizados das tensões obtidos pelas funções determinadas por redes neurais no intervalo inicial  $[0, 620]$  são expressos na Tabela 5.4.

Temperatura (°C)	Valores desejados (tensão)(mv)	Saída da rede Aproximação de ordem 5 (mv)	Saída da rede Aproximação de ordem 6(mv)	Saída da rede Aproximação de ordem 7(mv)
0	0.000000	$4.469751 \times 10^{-4}$	$1.090335 \times 10^{-1}$	$7.084899 \times 10^{-2}$
50	$1.542250 \times 10^{-1}$	$1.542102 \times 10^{-1}$	$1.517001 \times 10^{-1}$	$1.519585 \times 10^{-1}$
100	$3.084501 \times 10^{-1}$	$3.084525 \times 10^{-1}$	$3.099248 \times 10^{-1}$	$3.091474 \times 10^{-1}$
150	$4.626756 \times 10^{-1}$	$4.626857 \times 10^{-1}$	$4.644960 \times 10^{-1}$	$4.644559 \times 10^{-1}$
200	$6.169000 \times 10^{-1}$	$6.169086 \times 10^{-1}$	$6.172052 \times 10^{-1}$	$6.176986 \times 10^{-1}$
250	$7.711241 \times 10^{-1}$	$7.711259 \times 10^{-1}$	$7.700924 \times 10^{-1}$	$7.703174 \times 10^{-1}$
300	$9.253481 \times 10^{-1}$	$9.253432 \times 10^{-1}$	$9.241760 \times 10^{-1}$	$9.238662 \times 10^{-1}$
350	1.079574	1.079566	1.079272	1.078864
400	1.233801	1.233795	1.234459	1.234499
450	1.388028	1.388028	1.388847	1.389299
500	1.542255	1.542260	1.542311	1.542501
550	1.696482	1.696486	1.695822	1.695369
600	1.850709	1.850705	1.850863	1.850956

**Tabela 5.4** Valores obtidos por redes neurais tendo como base os polinômios de Legendre.

Os erros determinados para as funções  $P_5(T)$ ,  $P_6(T)$  e  $P_7(T)$  que linearizam a equação (5.1) relacionados às 621 tensões no intervalo inicial  $[0, 620]$  são dados na Tabela 5.5

Erro obtido em relação a aproximação de ordem 5	Erro obtido em relação a aproximação de ordem 6	Erro obtido em relação a aproximação de ordem 7
$5.121669 \times 10^{-4}$	$4.952021 \times 10^{-4}$	$7.527800 \times 10^{-5}$

**Tabela 5.5** Erro correspondente às funções determinadas por redes neurais tendo como base os polinômios de Legendre

Obtém-se o erro quadrático da forma (ver (4.8))



$$E = \sum_{i=1}^{621} (sd(t_i) - P_n(t_i))^2$$

sendo

- $sd(t_i)$  saída desejada da rede.

Para este problema deseja-se uma saída linear, definida em um intervalo que contém 621 pontos equidistantes, sendo que o primeiro elemento deste intervalo é o 0 e o último é o 1.9124 que são os extremos do intervalo desejado, os outros 619 elementos estão a uma distância de 0.0030845 de seu sucessor e antecessor. Como forma ilustrativa é apresentado a seguir o vetor da saída desejada (saída linear) com alguns de seus termos.

$$sd(t_i) = (0 \quad 3.084500 \times 10^{-3} \quad 6.169000 \times 10^{-3} \quad \dots \quad 1.909315 \quad 1.912400).$$

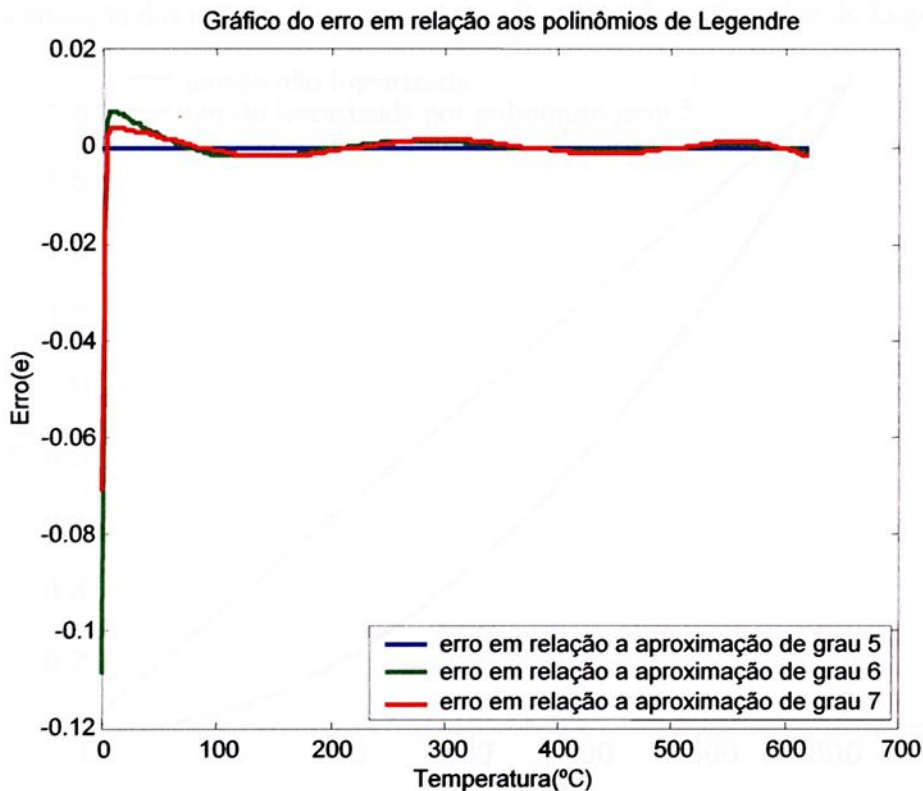
- $P_n(t_i)$  funções que linearizam as tensões.
- $n$  grau do polinômio aproximado.

Para melhor visualizar cada erro

$$e_n = \{t_i, (sd(t_i) - P_n(t_i)) / 0 \leq i \leq 620\}, \quad n = 5, 6 \text{ e } 7$$

é feito o gráfico do erro quadrático relacionados com as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Legendre.



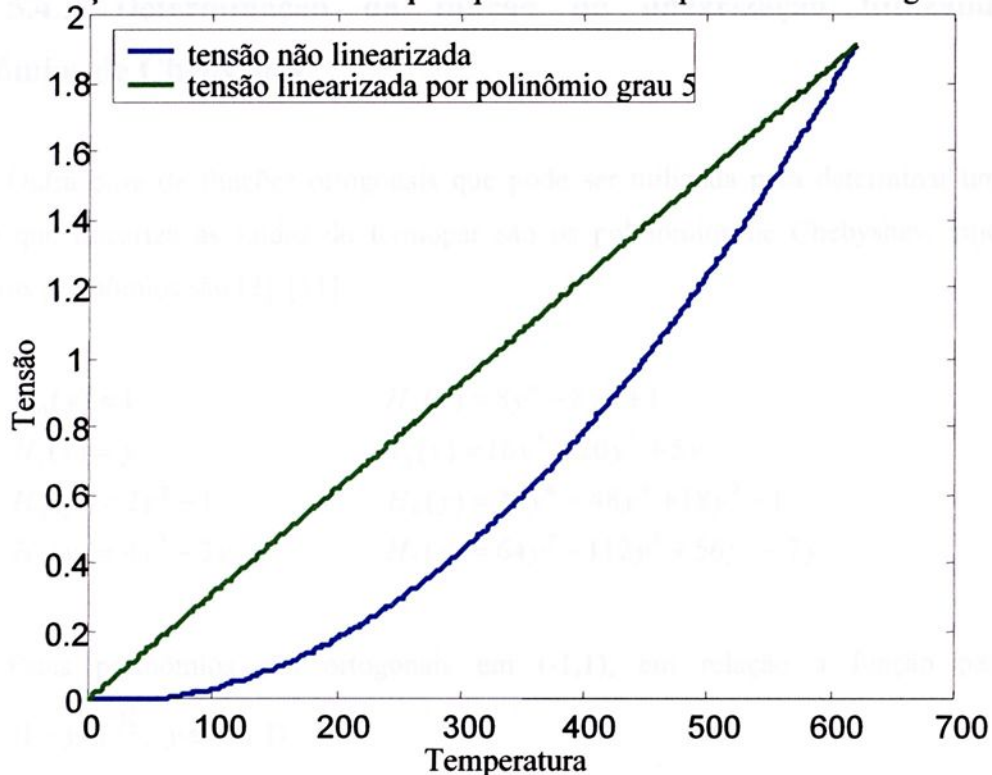


**Figura 5.2** Gráfico do erro em relação as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Legendre.

A função linear de grau 5,  $P_5(T)$ , determinada pela rede neural que utiliza polinômios de Legendre é representada graficamente na Figura 5.3, por ser a função que determinou resultados mais próximos dos esperados, como pode ser verificado também através do gráfico do erro, na Figura 5.2. Pode-se observar que a curva que representa a função de aproximação de grau 5 praticamente não oscila em torno de  $e = 0$ , isto é, pode-se concluir que o erro é quase nulo.



Linearização das tensões do termopar tipo B utilizando polinômios de Legendre



**Figura 5.3** Gráfico da função de grau 5 que lineariza as tensões do termopar tipo B, obtida usando polinômios de Legendre.

### 5.4.2 Determinação da função de linearização utilizando polinômios de Chebyshev

Outra base de funções ortogonais que pode ser utilizada para determinar uma função que lineariza as saídas do termopar são os polinômios de Chebyshev, cujos primeiros polinômios são [2], [11]

$$H_0(y) = 1$$

$$H_1(y) = y$$

$$H_2(y) = 2y^2 - 1$$

$$H_3(y) = 4y^3 - 3y$$

$$H_4(y) = 8y^4 - 8y^2 + 1$$

$$H_5(y) = 16y^5 - 20y^3 + 5y$$

$$H_6(y) = 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1$$

$$H_7(y) = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$$

Estes polinômios são ortogonais em  $(-1,1)$ , em relação a função peso  $w(y) = (1 - y^2)^{-1/2}$ ,  $y \in (-1,1)$ .

De forma semelhante a determinação de uma função que lineariza as tensões do termopar através de redes neurais tendo como base os polinômios de Legendre, para se determinar a linearização através de redes neurais utilizando polinômios de Chebyshev deve-se fazer inicialmente a aproximação no intervalo deslocado  $[-1, 1]$ .

Após 100 iterações neste intervalo, são obtidas as seguintes funções relacionadas aos polinômios de Chebyshev.

- Aproximação de ordem 5

$$\sigma_5(y) = \theta_0 H_0(y) + \theta_1 H_1(y) + \theta_2 H_2(y) + \theta_3 H_3(y) + \theta_4 H_4(y) + \theta_5 H_5(y)$$

- Aproximação de ordem 6

$$\sigma_6(y) = \theta_0 H(y) + \theta_1 H_1(y) + \theta_2 H_2(y) + \theta_3 H_3(y) + \theta_4 H_4(y) + \theta_5 H_5(y) + \theta_6 H_6(y)$$

- Aproximação de ordem 7

$$\sigma_7(y) = \theta_0 H_0(y) + \theta_1 H_1(y) + \theta_2 H_2(y) + \theta_3 H_3(y) + \theta_4 H_4(y) + \theta_5 H_5(y) + \theta_6 H_6(y) + \theta_7 H_7(y)$$

sendo  $\theta_j = \theta_j + (\text{var} \cdot H_j(y))$   $j = 0, 1, \dots, 7$ . Em que  $\theta_j$  são os pesos;  $\text{var} = mi \cdot e$ , sendo  $mi$  uma constante positiva muito pequena. Para a aplicação deste trabalho utilizou-se  $mi = 0.2$ ;  $e$  é a distância entre os dados determinados pela rede neural e a saída desejada para esta mesma rede neural (saída linear). E  $H_j(y)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ , são os polinômios de Chebyshev utilizados na rede neural definidos no intervalo deslocado  $[-1, 1]$ .

Os pesos treinados na rede que correspondem aos coeficientes da aproximação de ordem 5, 6 e 7 no intervalo de  $[-1, 1]$  são apresentadas na Tabela 5.6

Coeficientes da função linear aproximada de ordem 5	Coeficientes da função linear aproximada de ordem 6	Coeficientes da função linear aproximada de ordem 7
$\theta_0 = 5.688839 \times 10^{-1}$	$\theta_0 = 5.696025 \times 10^{-1}$	$\theta_0 = 5.799073 \times 10^{-1}$
$\theta_1 = -1.194372 \times 10^{-1}$	$\theta_1 = -1.246403 \times 10^{-1}$	$\theta_1 = -1.204159 \times 10^{-1}$
$\theta_2 = 2.910485 \times 10^{-2}$	$\theta_2 = 2.250521 \times 10^{-2}$	$\theta_2 = 1.924203 \times 10^{-3}$
$\theta_3 = -1.541225 \times 10^{-3}$	$\theta_3 = 1.582018 \times 10^{-2}$	$\theta_3 = 7.480402 \times 10^{-3}$
$\theta_4 = -1.284394 \times 10^{-2}$	$\theta_4 = -1.490613 \times 10^{-2}$	$\theta_4 = -2.911206 \times 10^{-3}$
$\theta_5 = 6.805396 \times 10^{-4}$	$\theta_5 = -3.513163 \times 10^{-3}$	$\theta_5 = -1.082769 \times 10^{-3}$
	$\theta_6 = 2.873474 \times 10^{-5}$	$\theta_6 = 4.216096 \times 10^{-4}$
		$\theta_7 = -5.114970 \times 10^{-4}$

**Tabela 5.6** Coeficientes das funções lineares definidas no intervalo  $[-1, 1]$  determinados pela rede neural utilizando como base polinômios de Chebyshev



As funções encontradas  $\sigma_5(y)$ ,  $\sigma_6(y)$  e  $\sigma_7(y)$ , devem ser deslocadas novamente ao intervalo inicial  $[0,620]$ . Para este deslocamento deve-se trabalhar com funções compostas definidas da seguinte forma  $Q_k = \sigma_k \circ \lambda$ ,  $k = 5, 6$  e  $7$  (ver (5.3)):

- $Q_5(T) = \sigma_5(y) \circ \lambda(T)$ ,  $\forall T \in [0, 620]$
- $Q_6(T) = \sigma_6(y) \circ \lambda(T)$ ,  $\forall T \in [0, 620]$
- $Q_7(T) = \sigma_7(y) \circ \lambda(T)$ ,  $\forall T \in [0, 620]$ .

De maneira semelhante as funções que utilizam polinômios de Legendre ao voltar ao intervalo inicial os pesos são novamente treinados para se obter uma saída desejada no intervalo  $[0, 620]$ . Estes pesos determinados na rede neural são os coeficientes das funções lineares de ordem 5, 6 e 7 definidas neste intervalo. Os valores desses pesos são dados na Tabela 5.7.

Coeficientes da função linear aproximada de ordem 5	Coeficientes da função linear aproximada de ordem 6	Coeficientes da função linear aproximada de ordem 7
$s_0 = 9.735918 \times 10^{-1}$	$s_0 = 9.671780 \times 10^{-1}$	$s_0 = 9.577364 \times 10^{-1}$
$s_1 = 9.440962 \times 10^{-1}$	$s_1 = 9.785700 \times 10^{-1}$	$s_1 = 9.612597 \times 10^{-1}$
$s_2 = -3.578554 \times 10^{-2}$	$s_2 = -1.666325 \times 10^{-2}$	$s_2 = 7.576685 \times 10^{-4}$
$s_3 = 1.803590 \times 10^{-2}$	$s_3 = -3.369717 \times 10^{-2}$	$s_3 = -6.949056 \times 10^{-3}$
$s_4 = 1.462924 \times 10^{-2}$	$s_4 = 9.415835 \times 10^{-3}$	$s_4 = -3.638190 \times 10^{-3}$
$s_5 = -2.270184 \times 10^{-3}$	$s_5 = 7.937146 \times 10^{-3}$	$s_5 = 2.748707 \times 10^{-3}$
	$s_6 = -3.258511 \times 10^{-4}$	$s_6 = 1.992642 \times 10^{-4}$
		$s_7 = 3.178548 \times 10^{-4}$

**Tabela 5.7** Coeficientes das funções lineares definidas no intervalo  $[0,620]$  determinados pela rede neural utilizando como base os polinômios de Chebyshev.



As funções lineares de ordem 5, 6 e 7 determinadas pela rede neural tomando como base polinômios de Chebyshev no intervalo  $[0,620]$  são dadas a seguir.

- Aproximação de grau 5

$$Q_5(T) = s_0H_0(T) + s_1H_1(T) + s_2H_2(T) + s_3H_3(T) + s_4H_4(T) + s_5H_5(T) \quad (5.9)$$

- Aproximação de grau 6

$$Q_6(T) = s_0H_0(T) + s_1H_1(T) + s_2H_2(T) + s_3H_3(T) + s_4H_4(T) + s_5H_5(T) + s_6H_6(T) \quad (5.10)$$

- Aproximação de grau 7

$$Q_7(T) = s_0H_0(T) + s_1H_1(T) + s_2H_2(T) + s_3H_3(T) + s_4H_4(T) + s_5H_5(T) + s_6H_6(T) + s_7H_7(T) \quad (5.11)$$

sendo  $s_j = s_j + (\text{var} \cdot H_j(T))$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ . Em que  $s_j$  são os pesos;  $\text{var} = mi \cdot e$ , sendo  $mi$  uma constante positiva muito pequena. Para a aplicação deste trabalho utilizou-se  $mi = 0.2$ . Considera-se  $e$  como a distância entre os dados determinados pela rede neural e a saída desejada para esta mesma rede neural (saída linear). E  $H_j(T)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 7$ , são os polinômios de Chebyshev utilizados na rede neural definidos no intervalo original  $[0,620]$ .

As funções (5.9), (5.10) e (5.11) utilizam a função dada em (5.3) para retornarem ao intervalo inicial, sendo assim os polinômios de Chebyshev que descrevem as equações acima são dados por



$$\begin{aligned}
 H_0(T) &= 1 & H_4(T) &= 8(\lambda(T))^4 - 8(\lambda(T))^2 + 1 \\
 H_1(T) &= \lambda(T) & H_5(T) &= 16(\lambda(T))^5 - 20(\lambda(T))^3 + 5(\lambda(T)) \\
 H_2(T) &= 2(\lambda(T))^2 - 1 & H_6(T) &= 32(\lambda(T))^6 - 48(\lambda(T))^4 + 18(\lambda(T))^2 - 1 \\
 H_3(T) &= 4(\lambda(T))^3 - 3\lambda(T) & H_7(T) &= 64(\lambda(T))^7 - 112(\lambda(T))^5 + 56(\lambda(T))^3 - 7(\lambda(T)).
 \end{aligned}$$

Como forma ilustrativa alguns valores linearizados no intervalo inicial [0,620] pela função determinada através de redes neurais utilizando polinômios de Chebyshev são expressos na Tabela 5.8.

Temperatura (°C)	Valores desejados (tensão)(mv)	Saída da rede Aproximação de ordem 5 (mv)	Saída da rede Aproximação de ordem 6(mv)	Saída da rede Aproximação de ordem 7(mv)
0	0.000000	$8.985576 \times 10^{-3}$	$7.674635 \times 10^{-3}$	$6.344635 \times 10^{-3}$
50	$1.542250 \times 10^{-1}$	$1.550266 \times 10^{-1}$	$1.546605 \times 10^{-1}$	$1.541938 \times 10^{-1}$
100	$3.084501 \times 10^{-1}$	$3.086070 \times 10^{-1}$	$3.095750 \times 10^{-1}$	$3.084686 \times 10^{-1}$
150	$4.626756 \times 10^{-1}$	$4.623666 \times 10^{-1}$	$4.636301 \times 10^{-1}$	$4.628073 \times 10^{-1}$
200	$6.169000 \times 10^{-1}$	$6.162929 \times 10^{-1}$	$6.178442 \times 10^{-1}$	$6.171275 \times 10^{-1}$
250	$7.711241 \times 10^{-1}$	$7.701906 \times 10^{-1}$	$7.718586 \times 10^{-1}$	$7.713326 \times 10^{-1}$
300	$9.253481 \times 10^{-1}$	$9.240161 \times 10^{-1}$	$9.255125 \times 10^{-1}$	$9.255663 \times 10^{-1}$
350	1.079574	1.078410	1.079203	1.079682
400	1.233801	1.233014	1.232922	1.233779
450	1.388028	1.387428	1.387070	1.387863
500	1.542255	1.542007	1.540936	1.542024
550	1.696482	1.696659	1.695520	1.696121
600	1.850709	1.851838	1.850180	1.850492

**Tabela 5.8** Valores obtidos para aproximação utilizando redes neurais tendo como base os polinômios de Chebyshev.

Os erros determinados para as funções  $Q_5(T)$ ,  $Q_6(T)$  e  $Q_7(T)$  que linearizam a função definida em (5.1) são dados na Tabela 5.9



Erro obtido em relação a aproximação de ordem 5	Erro obtido em relação a aproximação de ordem 6	Erro obtido em relação a aproximação de ordem 7
$2.867746 \times 10^{-7}$	$1.620527 \times 10^{-2}$	$7.287919 \times 10^{-3}$

**Tabela 5.9** Erro correspondente às funções determinadas por redes neurais tendo como base os polinômios de Chebyshev

O erro obtido é da forma (ver 4.8)

$$E = \sum_{i=1}^{621} (sd(t_i) - Q_n(t_i))^2$$

sendo

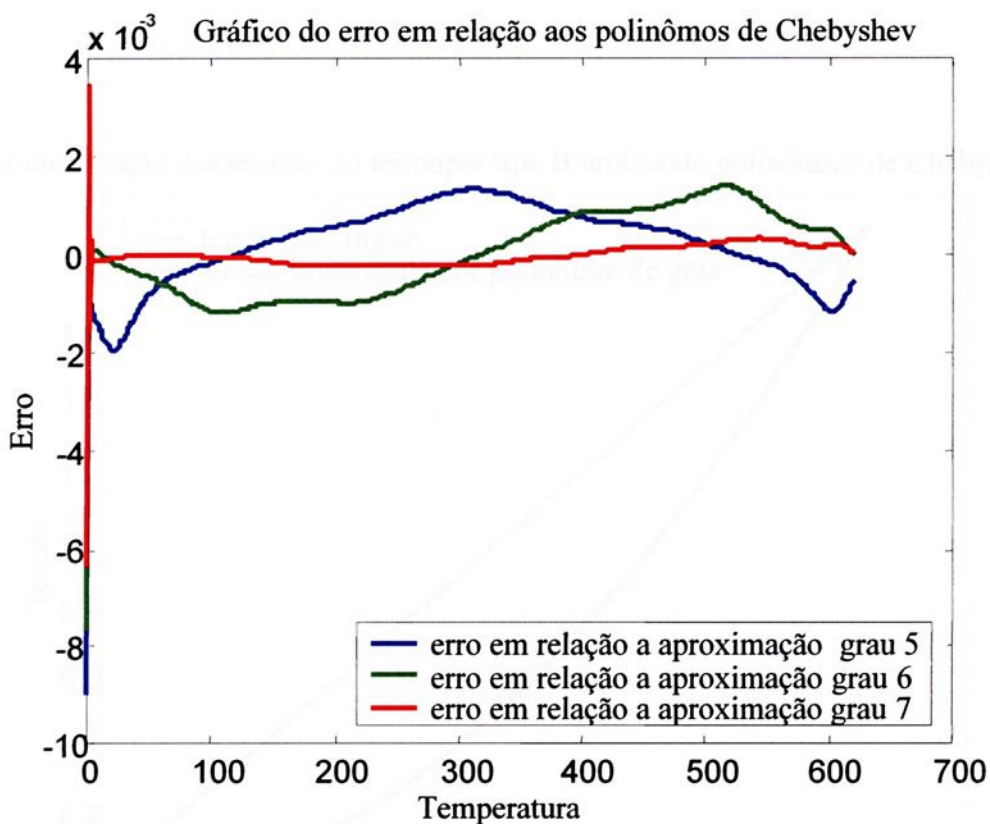
- $sd(t_i)$  saída desejada da rede, a mesma saída quando fez-se as aproximações por polinômios de Legendre.
- $Q_n(t_i)$  funções aproximadas às funções que linearizam as tensões.
- $n$  grau do polinômio de aproximação

Para melhor visualizar cada erro

$$e_n = \{i, sd(t_i) - Q(t_i) / 0 \leq i \leq 620\}, n = 5, 6 \text{ e } 7$$

é representado o gráfico da diferença entre os valores esperados e a saída da rede para as aproximações de grau 5, 6 e 7, utilizando os polinômios de Chebyshev.

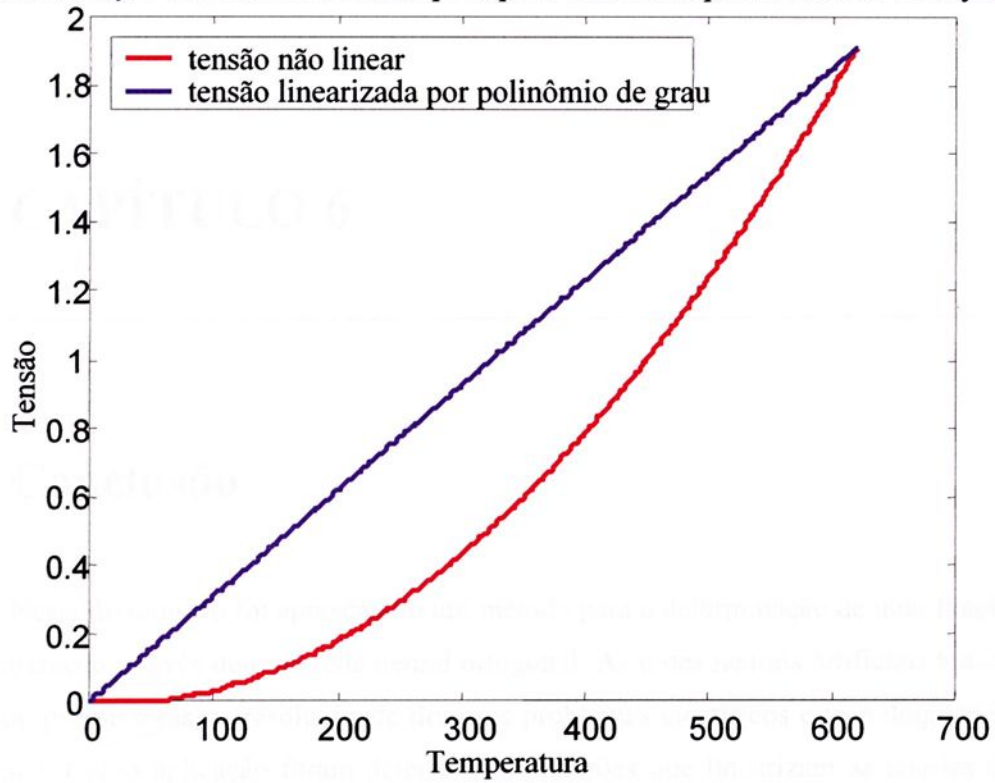




**Figura 5.4** Gráfico do erro em relação as aproximações de grau 5, 6 e 7 utilizando os polinômios de Chebyshev

A função linear de grau 7,  $Q_7(T)$ , determinada pela rede neural que utiliza polinômios de Chebyshev é representada graficamente pela Figura 5.5, por ser a função que apresentou valores mais próximos aos esperados. Pode ser observado também através do gráfico do erro, na Figura 5.4, que a curva que representa a função de aproximação de grau 7 é a curva que menos oscila em torno de  $e = 0$ , com isto pode-se concluir que a função de aproximação de grau 7 é a que tem menor erro em relação as aproximações analisadas.

Linearização das tensões do termopar tipo B utilizando polinômios de Chebyshev



**Figura 5.5** Gráfico da função de grau 7 que lineariza as tensões do termopar tipo B, obtida usando polinômios de Chebyshev.



## CAPÍTULO 6

---

### Conclusão

Nesta dissertação foi apresentado um método para a determinação de uma função de linearização através de uma rede neural ortogonal. As redes neurais artificiais tem-se mostrado promissoras na resolução de diversos problemas científicos e tecnológicos da atualidade. Como aplicação foram determinadas funções que linearizam as tensões do termopar. Estas tensões usualmente são encontradas de forma não linear sendo determinadas por uma função polinomial em função da temperatura.

Foram utilizadas duas famílias de funções ortogonais. Primeiramente a rede foi simulada utilizando como base o conjunto de polinômios de Legendre para determinar a função desejada (função de linearização) e seguidamente utilizou-se o conjunto de polinômios de Chebyshev com a mesma finalidade. Porém, por serem funções definidas em um intervalo diferente aos dados considerados pelo problema, houve a necessidade de deslocar a função para que fosse feita a aproximação no intervalo definido tanto para Legendre, quanto para Chebyshev. Neste intervalo deslocado, ajustou-se os pesos para a rede e foram obtidos resultados próximos aos desejados. Porém, o interesse é de se obter uma função que linearize os valores da tensão no intervalo inicial, sendo assim, fez-se o deslocamento para o intervalo inicial e novamente foi feito o ajuste dos pesos.



Foram determinados 621 valores de tensões lineares em relação a temperatura para o termopar tipo B através da rede neural ortogonal, para tanto, atribuiu-se à rede como os dados de entrada as tensões não lineares do termopar, e foram utilizados os polinômios de Legendre e Chebyshev para a determinação da função que lineariza estes dados. Utilizou-se o método do gradiente descendente para o ajuste dos pesos. Este método baseia-se no decréscimo do erro quadrático na saída, em função dos parâmetros ajustáveis da rede.

Os pesos iniciais foram determinados de maneira aleatória, sendo que para cada iteração a saída da rede foi comparada com a saída esperada, através da determinação do erro. Estes pesos que foram ajustados são os coeficientes da função que lineariza as tensões do termopar. Limitou-se o número de iterações para o processamento e finalmente analisou-se as saídas da rede que mais se aproximavam das saídas esperadas.

Em ambas redes neurais ortogonais implementadas foram obtidos resultados satisfatórios. Para o caso que utilizou-se o conjunto de polinômios de Legendre a função obtida que melhor se aproximou dos resultados desejados foi a função de grau 5 e para a implementação utilizando polinômios de Chebyshev a melhor aproximação obtida foi a função de grau 7, como pode ser observado no capítulo 5. A eficácia do método de aproximação se consolida quando verifica-se o pequeno valor do erro nas tabelas 5.5 e 5.9, que é obtido pelo quadrado da diferença da saída desejada da rede (saída linear) e a saída da rede das 621 tensões analisadas no processo. A rede neural que utiliza os polinômios de Legendre como funções base é a rede que obteve melhor resultado, pois, as funções determinadas por essa rede neural que melhor se aproximam dos valores desejados são as funções de menor grau comparadas com as funções determinadas pela rede que utiliza os polinômios de Chebyshev.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] Amperes Automation, Home Page ® Instrumentation, 11/2002.
- [2] BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D., “ Numerical Analysis”, quarta edição, PWS – Kent Publishing Company Boston, 1989.
- [3] COURANT, R. and D. HILBERT, “Methods of Mathematical Physics.” New York: Interscience Publishers, 1955.
- [4] CUNHA, M. C. C., “Métodos Numéricos”, segunda edição, editora Unicamp, 2000.
- [5] DALLY, J. W.; RILEY, W. F. e MC CONNELL, K. G., “Instrumentation for engineering measurement”, segunda edição, 1984.
- [6] HERTZ, J.; KROGH, A. and PALMER, R. G., “Introduction to the Theory of Neural Computation”. Reading, MA: Addison – Wesley, 1991.
- [7] HILDEBRAND, F. B., “Advanced Calculus for Applications.” Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.
- [8] HÖNIG, C. S., “Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville”, editora Edgard Blücher, editora da Universidade de São Paulo, 1978.



[9] LOPES, M. L. M. “Desenvolvimento de um sistema previsor de cargas elétricas via redes neurais”, dissertação de mestrado, UNESP, 2000.

[10] [www.din.uem.br/ia/neurais/#neural](http://www.din.uem.br/ia/neurais/#neural) 12/2003.

[10] LUCKS, M. B., “Implementação Eletrônica de uma Rede Neural Artificial de Base Radial e suas Aplicações”, dissertação de mestrado, UNESP, 1998.

[11] MARTINS, W. A., “Aproximação de Funções Polinômiais Ortogonais e sua Aplicação em Compensação de Fricção”, dissertação de mestrado, UNESP, 2003.

[12] MORRIS, A. S., “Principles of measurement and Instrumentation”, segunda edição, 1993.

[13] SHIOW, S. Y. and CHING, S. T., “An Orthogonal Neural Network for Function Approximation”, IEEE, Transactions on systems, man, and cybernetics – outubro 1996.

[14] Varela, J. A., “Medición de Temperatura”, Editora Oriente, edição Zeila Robert Lora, Santiago de Cuba, 1989.

[15] [www.camtec.com.br/termopares-caract.htm](http://www.camtec.com.br/termopares-caract.htm) 02/2003.

[16] [www.din.uem.br/ia/neurais/#neural](http://www.din.uem.br/ia/neurais/#neural) 10/2003.

[17] [www.instrumentaçãosp.hpg.ig.com.br/temp.htm](http://www.instrumentaçãosp.hpg.ig.com.br/temp.htm) 02/2003.

[18] [www.iope.com.br/uso-aplicação/3ia1-termopares.htm](http://www.iope.com.br/uso-aplicação/3ia1-termopares.htm) 11/2002.

[19] [www.kartta.com.br/ajudasobretermopares,htr](http://www.kartta.com.br/ajudasobretermopares,htr) 11/2002.

[20] [www.labplan.ufsc.br/~guilherme/termopares/termopar.htm.termometria](http://www.labplan.ufsc.br/~guilherme/termopares/termopar.htm.termometria) 12/2002.



[21] [www.math.ist.utl.pt/~calves/cursos/mmq.htm](http://www.math.ist.utl.pt/~calves/cursos/mmq.htm) 01/2003.

[22] [www.ufrg.br/Imm/mec017/termopar2.htm](http://www.ufrg.br/Imm/mec017/termopar2.htm) 12/2002.

## APÊNDICE I

### 2.1. Aproximação Discreta pelo Método dos Quadrados Mínimos Utilizando Polinômios Ortogonais

#### 2.1.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar uma função para linearizar os dados de tempo de uma firma analítica, a primeira tarefa era utilizar um método de aproximação para determinar uma função aproximada  $f(x)$ , nos dados de tempo. É de modo uma aproximação discreta (dados a pontos), aproximamos através de função polinomial, buscando a melhor aproximação de uma função  $f(x)$  tal que tenha de alguma maneira alguma das outras entre duas funções, uma determinada a função que buscamos e outra a função que

A necessidade de se obter uma aproximação para dados discretos, como que dados são o desejo de adquirir uma função que melhor represente os dados originais e que seja mais simples possível para se manipular.

De modo a obter uma aproximação discreta, foram as aproximações determinadas pelo método dos mínimos quadrados utilizando funções ortogonais, estas aproximações foram determinadas através do método dos mínimos quadrados, sendo que a função linear que melhor aproxima os dados de tempo.



# APÊNDICE 1

## A1. Aproximação Discreta pelo Método dos Quadrados Mínimos utilizando Polinômios Ortogonais

### A1.1 Introdução

Inicialmente tinha-se a idéia de determinar uma função para linearizar os dados do termopar de uma forma analítica, a primeira tarefa era utilizar um método de aproximação para determinar uma função aproximada,  $P_n(x)$ , aos dados do termopar. Trata-se de uma aproximação discreta (ponto a ponto), seguidamente através da função aproximada tinha-se o desejo de determinar uma função  $Q_n(x)$  tal que através de alguma manipulação algébrica entre estas duas funções seria determinada a função que lineariza as saídas do termopar.

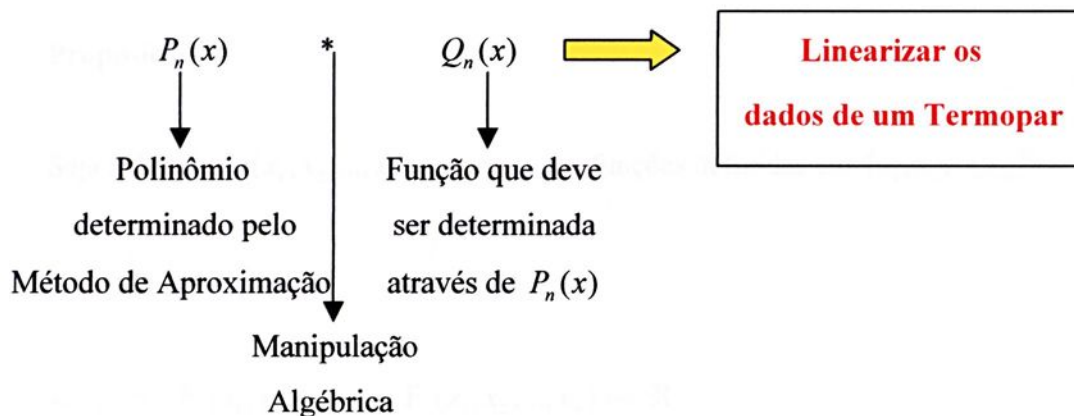
A necessidade de se obter boas aproximações para dados discretos, estão relacionados com o desejo de adquirir uma função que melhor represente os dados originais e que seja mais simples possível para se manipular.

As melhores aproximações encontradas, foram as aproximações determinadas pelo método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais, estas aproximações seriam utilizadas com o intuito de determinar uma função linear que “melhor representasse os dados de um termopar”.



Para tanto, por exemplo, para as funções aproximadas, que são as  $P_n(x)$ 's, seria necessário determinar funções  $Q_n(x)$ 's de tal forma que, através de alguma operação matemática com essas funções, se determinaria uma função linear para representar os dados de um termopar.

Esquematizando, o objetivo final do trabalho



Porém esta idéia não teve êxito, pois não foi possível a obtenção de uma função  $Q_n(x)$  através da  $P_n(x)$  para que fosse determinada a saída linear do termopar. Obteve-se bons resultados para a aproximação de  $P_n(x)$ , a dificuldade foi na obtenção de  $Q_n(x)$  analiticamente, sendo necessário trabalhar com redes neurais ortogonais para determinar a função linear desejada e conseqüentemente, com isso, obter os dados do termopar linearizados.

Como forma ilustrativa é apresentado neste apêndice algumas das aproximações obtidas através do método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais.

## A1.2 Aproximação discreta pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais

A formulação do método dos quadrados mínimos usando produto interno de funções permite aumentar a potencialidade do método.

### Proposição

Seja a função  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o espaço das funções definidas em  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

A função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: F(x_1, x_2, \dots, x_n) \times F(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \mathfrak{R}$$
$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle,$$

definida por

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^n w(x_k) f(x_k) g(x_k),$$

é um produto interno sobre  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sendo  $w: (-a, a) \rightarrow \mathfrak{R}_+^*$  uma função dada,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (-a, a)$  e  $a > 0$ .

O método dos quadrados mínimos fica mais simples se forem feitas aproximações utilizando famílias de funções ortogonais.

Diz-se que um conjunto de polinômios  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)\}$ , sendo  $j$  o grau de  $\phi_j(x)$ , é **ortogonal** em  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  em relação a uma função peso  $w(x)$  se

$$\sum_{k=1}^n w(x_k) \phi_i(x_k) \phi_j(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j & (a) \\ \alpha_k, & \text{se } i = j & (b) \end{cases}$$

Pela condição (a), determina-se um sistema diagonal. O fato de se obter um sistema diagonal implica em ter uma grande vantagem, uma vez que os coeficientes da aproximação podem ser calculados diretamente, no sentido de que para determinar os coeficientes da aproximação dos quadrados mínimos que é da forma [4]

$$P(x_k) = \sum_{j=0}^m \left( \sum_{k=1}^n a_j \phi_j(x_k) \right),$$

deve-se fazer

$$a_j = \frac{\sum_{k=1}^n w(x_k) \phi_j(x_k) y(x_k)}{\sum_{k=1}^n w(x_k) [\phi_j(x_k)]^2} = \frac{1}{\alpha_j} \sum_{k=1}^n w(x_k) \phi_j(x_k) y(x_k).$$

A forma mais simples para se determinar um conjunto ortogonal,  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)\}$  em  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  em relação a uma função peso  $w(x)$  está baseada no seguinte processo recursivo [4]

$$\phi_0(x_k) = 1,$$

$$\phi_1(x_k) = x_k - B_1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

sendo,

$$B_1 = \frac{\sum_{k=1}^n x_k w(x_k) [\phi_0(x_k)]^2}{\sum_{k=1}^n w(x_k) [\phi_0(x_k)]^2}.$$

Quando  $s \geq 2$ ,

$$\phi_s(x_k) = (x_k - B_s)\phi_{s-1}(x_k) - C_s\phi_{s-2}(x_k) \text{ para } k = 1, 2, \dots, n,$$

sendo,

$$B_s = \frac{\sum_{k=1}^n x_k w(x_k) [\phi_{s-1}(x_k)]^2}{\sum_{k=1}^n w(x_k) [\phi_{s-1}(x_k)]^2},$$

e

$$C_s = \frac{\sum_{k=1}^n x_k w(x_k) \phi_{s-1}(x_k) \phi_{s-2}(x_k)}{\sum_{k=1}^n w(x_k) [\phi_{s-2}(x_k)]^2}.$$

Existem vários conjuntos de polinômios ortogonais que são utilizados em aproximação, entre eles destacam-se os polinômios de Legendre que são ortogonais em relação a função peso  $w(x_k)=1$ , sendo  $L_0(x_k)=1$ ,  $L_1(x_k)=x_k$ , os polinômios de maior ordem são determinados através da seguinte forma recursiva

$$L_{n+1}(x_k) = \frac{(2n+1)x_k L_n(x_k) - n L_{n-1}(x_k)}{n+1},$$

obtendo a lista

$$L_2(x_k) = \frac{(3(x_k)^2 - 1)}{2}, L_3(x_k) = \frac{(5(x_k)^3 - 3(x_k)^2)}{2}, \dots$$

Normalmente, é comum aparecerem os polinômios de Legendre multiplicados por alguma outra constante, porém isto não influi na ortogonalidade, é apenas uma questão de convenção e/ou conveniência [2] e [21].

Outra família de polinômios ortogonais que pode ser destacada são os polinômios de Chebyshev.

Os polinômios de Chebyshev são ortogonais no intervalo  $(-a, a)$  em relação à

função peso  $w(x_k) = \frac{1}{\sqrt{(a)^2 - (x_k)^2}}$  e inicialmente para este conjunto admite-se que

$$H_0(x_k) = 1 \text{ e } H_1(x_k) = x_k.$$

Da mesma forma que no caso dos polinômios de Legendre, com constantes apropriadas, pode-se deduzir

$$H_{n+1}(x_k) = 2x_k H_n(x_k) - H_{n-1}(x_k)$$

obtendo-se seqüencialmente [2]

$$H_0(x_k) = 1,$$

$$H_1(x_k) = x_k,$$

$$H_2(x_k) = 2(x_k)^2 - 1,$$

$$H_3(x_k) = 4(x_k)^3 - 3(x_k), \dots$$

Para exemplificar a aproximação utilizando o método dos quadrados mínimos com funções ortogonais é feita uma análise para 621 pontos do termopar tipo B, sendo que a aproximação abrange a faixa de temperatura de 0°C a 620°C, com a tensão correspondente a esta faixa de temperatura de forma não linear.

Utilizando primeiramente o conjunto de polinômios ortogonais de Legendre determina-se a melhor função  $P(x)$ , pelo método dos quadrados mínimos, que aproxima os valores originais  $f(x)$ , da função aproximada  $P(x)$ , que é representada para o conjunto de 621 pontos pela fórmula

$$P_j(x_k) = \sum_{j=0}^6 \left( \sum_{k=1}^{621} a_j L_j(x_k) \right),$$

sendo,  $a_j$  coeficientes da aproximação e  $L_j(x_k)$  polinômios de Legendre [2].

Considerando o conjunto de 621 pontos do termopar e baseando-se no processo recursivo com o auxílio do software Matlab determina-se o seguinte conjunto de polinômios de Legendre

$$L_0(x_k) = 1,$$

$$L_1(x_k) = x_k - 413.3333,$$

$$L_2(x_k) = (x_k)^2 - 742x_k + 113461,$$

$$L_3(x_k) = (x_k)^3 - 1.0586 \times 10^3 (x_k)^2 + 324205x_k - 25934500,$$

$$L_4(x_k) = (x_k)^4 - 1.3711 \times 10^3 (x_k)^3 + 630443(x_k)^2 - 109002396(x_k) + 5.3131 \times 10^9,$$

$$L_5(x_k) = (x_k)^5 - 1.6818 \times 10^3 (x_k)^4 + 1031688(x_k)^3 - 278666396(x_k)^2 + 3.1152 \times 10^{10} (x_k)$$

$$L_6(x_k) = (x_k)^6 - 1.9915 \times 10^3 (x_k)^5 + 1527772 (x_k)^4 - 564184396 (x_k)^3 + 1.0182 \times 10^{11} (x_k)^2 - 7.9530 \times 10^{12} (x_k) + 1.8055 \times 10^{14}$$

Para determinar a aproximação deve-se, seguidamente, determinar os coeficientes em relação aos dados originais.

Para esse conjunto de dados, fornecidos pelo problema, os coeficientes são determinados da seguinte forma

$$a_j = \frac{\sum_{k=1}^{621} w(x_k) L_j(x_k) y(x_k)}{\sum_{k=1}^{621} w(x_k) [L_j(x_k)]^2}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6.$$

Então tem-se

$j$	$a_j$
0	0.94866
1	0.0037489
2	$5.0544 \times 10^{-6}$
3	$-7.0849 \times 10^{-10}$
4	$-1.5479 \times 10^{-13}$
5	$-4.4745 \times 10^{-16}$
6	$6.229 \times 10^{-19}$

As aproximações que utilizam o método dos quadrados mínimos e um “conjunto de pontos ortogonais” baseados nos polinômios de Legendre para os dados originais são apresentados seguidamente. Foram feitas aproximações para 621 pontos, porém serão ilustrados apenas a aproximação para 13 pontos para exemplificação.



$k$	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) ( $x_k$ )	Tensão(mV) ( $y_k$ )	$P_0(x_k)$	$P_1(x_k)$	$P_2(x_k)$	$P_3(x_k)$
1	0	0	0.95332	-0.51741	-0.013198	$7.1862 \times 10^{-5}$
2	50	0.0022782	0.95332	-0.33872	-0.002579	0.0023971
3	100	0.033204	0.95332	-0.16003	0.033505	0.033204
4	150	0.092062	0.95332	0.018659	0.095055	0.091964
5	200	0.17826	0.95332	0.19735	0.18207	0.17815
6	250	0.29128	0.95332	0.37604	0.29455	0.29123
7	300	0.43064	0.95332	0.55473	0.4325	0.43069
8	350	0.59588	0.95332	0.73342	0.59591	0.59598
9	400	0.7865	0.95332	0.91211	0.78479	0.7866
10	450	1.002	0.95332	1.0908	0.99913	1.002
11	500	1.2417	0.95332	1.2695	1.2389	1.2417
12	550	1.5052	0.95332	1.4482	1.5042	1.505
13	600	1.7915	0.95332	1.6269	1.7949	1.7916

Tabela A1: Aproximação de grau 0, 1, 2 e 3, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Legendre.



$k$	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) ( $x_k$ )	Tensão(mV) ( $y_k$ )	$P_4(x_k)$	$P_5(x_k)$	$P_6(x_k)$
1	0	0	-0.00022811	-2.6414e-005	-1.4715e-017
2	50	0.0022782	0.0023971	0.0023047	0.0022782
3	100	0.033204	0.033313	0.033211	0.033204
4	150	0.092062	0.092067	0.09205	0.092062
5	200	0.17826	0.17819	0.17825	0.17826
6	250	0.29128	0.29121	0.29128	0.29128
7	300	0.43064	0.43062	0.43065	0.43064
8	350	0.59588	0.59591	0.59589	0.59588
9	400	0.7865	0.78656	0.7865	0.7865
10	450	1.002	1.002	1.002	1.002
11	500	1.2417	1.2417	1.2417	1.2417
12	550	1.5052	1.5051	1.5052	1.5052
13	600	1.7915	1.7916	1.7915	1.7915

**Tabela A2:** Aproximação de grau 4, 5 e 6, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Legendre.

O erro é determinado da forma

$$E(x_k) = \sum_{j=0}^6 \left( \sum_{k=1}^{621} y(x_k) - P_j(x_k) \right)^2.$$

Para o conjunto de 621 pontos analisados, o erro determinado é dado na tabela A3.

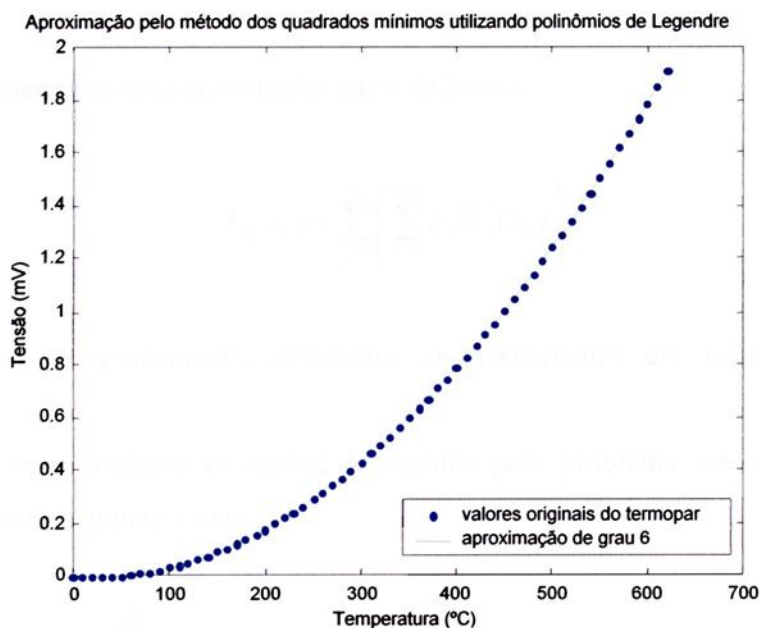


<b>Erro em relação a aproximação de grau 1</b>	24.391
<b>Erro em relação a aproximação de grau 2</b>	0.014049
<b>Erro em relação a aproximação de grau 3</b>	$7.6825 \times 10^{-6}$
<b>Erro em relação a aproximação de grau 4</b>	$7.0548 \times 10^{-6}$
<b>Erro em relação a aproximação de grau 5</b>	$2.6147 \times 10^{-7}$
<b>Erro em relação a aproximação de grau 6</b>	$5.2368 \times 10^{-27}$

**Tabela A3** Erro das aproximações de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6 utilizando polinômios de Legendre.

Os erros da Tabela A3 são determinadas pelo quadrado da diferença dos valores originais (tensão do termopar) e das aproximações obtidas pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios de Legendre.

Como pode-se observar pelos valores obtidos para o erro; o polinômio que melhor se aproxima dos valores originais é o polinômio de grau 6 e é ilustrado graficamente da forma



**Figura A1:** Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios de Legendre

Outro conjunto de polinômios ortogonais que podem ser utilizados no método dos quadrados mínimos para aproximar os pontos do termopar são os polinômios de Chebyshev. Os primeiros polinômios de Chebyshev são

$$H_0(x_k) = 1,$$

$$H_1(x_k) = x_k - 412.02,$$

$$H_2(x_k) = (x_k)^2 - 707.56x_k + 83779,$$

$$H_3(x_k) = (x_k)^3 - 1010.4(x_k)^2 + 272910x_k - 15015000,$$

$$H_4(x_k) = (x_k)^4 - 1315.4(x_k)^3 + 556481(x_k)^2 - 80839000x_k + 2.5173 \times 10^9,$$

$$H_5(x_k) = (x_k)^5 - 1621.4(x_k)^4 + 934574(x_k)^3 - 226448000(x_k)^2 + 2.0586 \times 10^{10}(x_k) - 4.0332 \times 10^{11},$$

$$H_6(x_k) = (x_k)^6 - 1928.1(x_k)^5 + 1407438(x_k)^4 - 481010000(x_k)^3 + 7.6475 \times 10^{10}(x_k)^2 - 4.7473 \times 10^{12}(x_k) + 6.2369 \times 10^{13}.$$

Para determinar a aproximação que é da forma

$$P_j(x_k) = \sum_{j=0}^6 \left( \sum_{k=1}^{621} a_j H_j(x_k) \right)$$

Deve-se, seguidamente, determinar os coeficientes em relação aos dados originais.

Para esse conjunto de dados, fornecidos pelo problema, os coeficientes são determinados da seguinte forma

$$a_j = \frac{\sum_{k=1}^{621} w(x_k) H_j(x_k) y(x_k)}{\sum_{k=1}^{621} w(x_k) [H_j(x_k)]^2}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6.$$



Então tem-se

$j$	$a_j$
0	0.92496
1	0.0034605
2	$5.1 \times 10^{-6}$
3	$-7.0632 \times 10^{-10}$
4	$-1.0848 \times 10^{-13}$
5	$-4.972 \times 10^{-16}$
6	$6.229 \times 10^{-19}$

As aproximações que utilizam o método dos quadrados mínimos e um “conjunto de pontos ortogonais” baseados nos polinômios de Chebyshev para os dados originais são apresentados seguidamente. Foram feitas aproximações para 621 pontos, porém serão ilustrados apenas a aproximação para 13 pontos para exemplificação.

$k$	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) ( $x_k$ )	Tensão(mV) ( $y_k$ )	$P_0(x_k)$	$P_1(x_k)$	$P_2(x_k)$	$P_3(x_k)$
1	0	0	0.92496	-0.35691	-0.0071517	$2.523 \times 10^{-6}$
2	50	0.0022782	0.92496	-0.19178	0.0018534	0.0023576
3	100	0.033204	0.92496	-0.026652	0.036521	0.033187
4	150	0.092062	0.92496	0.13848	0.09685	0.091964
5	200	0.17826	0.92496	0.30361	0.18284	0.17816
6	250	0.29128	0.92496	0.46874	0.29449	0.29125
7	300	0.43064	0.92496	0.63387	0.43181	0.43071
8	350	0.59588	0.92496	0.799	0.59479	0.596
9	400	0.7865	0.92496	0.96413	0.78343	0.78661
10	450	1.002	0.92496	1.1293	0.99773	1.002
11	500	1.2417	0.92496	1.2944	1.2377	1.2416
12	550	1.5052	0.92496	1.4595	1.5033	1.505
13	600	1.7915	0.92496	1.6246	1.7946	1.7916

Tabela A4: Aproximação de grau 0, 1, 2 e 3, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Chebyshev.



$k$	Temperatura (°C) ( $x_k$ )	Tensão(mV) ( $y_k$ )	$P_4(x_k)$	$P_5(x_k)$	$P_6(x_k)$
1	0	0	-8.7878e-005	-8.4743e-006	-7.519e-016
2	50	0.0022782	0.0024103	0.0022986	0.0022782
3	100	0.033204	0.033272	0.033203	0.033204
4	150	0.092062	0.09202	0.092046	0.092062
5	200	0.17826	0.17816	0.17825	0.17826
6	250	0.29128	0.29121	0.29128	0.29128
7	300	0.43064	0.43064	0.43066	0.43064
8	350	0.59588	0.59594	0.59589	0.59588
9	400	0.7865	0.78658	0.7865	0.7865
10	450	1.002	1.002	1.002	1.002
11	500	1.2417	1.2417	1.2417	1.2417
12	550	1.5052	1.5051	1.5052	1.5052
13	600	1.7915	1.7916	1.7915	1.7915

Tabela A5: Aproximação de grau 4, 5 e 6, pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Chebyshev.

O erro é determinado da forma

$$E(x_k) = \sum_{j=0}^6 \left( \sum_{k=1}^{621} y(x_k) - P_j(x_k) \right)^2.$$

Para o conjunto de 621 pontos analisados o erro determinado é dado na Tabela A6.

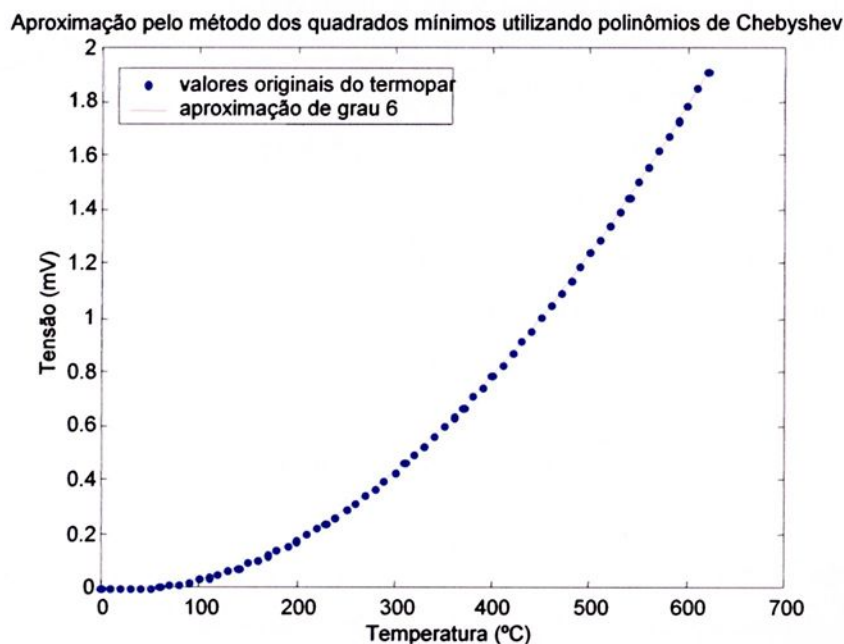


<b>Erro em relação a aproximação de grau 1</b>	16.393
<b>Erro em relação a aproximação de grau 2</b>	0.0075313
<b>Erro em relação a aproximação de grau 3</b>	$5.4058 \times 10^{-6}$
<b>Erro em relação a aproximação de grau 4</b>	$2.5578 \times 10^{-6}$
<b>Erro em relação a aproximação de grau 5</b>	$8.508 \times 10^{-8}$
<b>Erro em relação a aproximação de grau 6</b>	$4.7159 \times 10^{-26}$

**Tabela A6:** Erro das aproximações de grau 1, 2, 3, 4, 5 e 6 utilizando os polinômios de Chebyshev.

Os erros da Tabela A6 são determinadas pelo quadrado da diferença dos valores originais (tensão do termopar) e das aproximações obtidas pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios de Chebyshev.

Como pode-se observar pelos valores obtidos para o erro; o polinômio que melhor se aproxima dos valores originais é o polinômio de grau 6 e é ilustrado graficamente da forma



**Figura A2:** Aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando polinômios de Chebyshev



Comparando-se os dois métodos implementados nota-se que ambos determinam valores muito próximos aos desejados. Como pode-se verificar nas Tabelas A3 e A6, os erros das aproximações obtidas são muito próximos quando comparados com os dois métodos. Sendo assim, conclui-se que para a aproximação realizada para os dados discretos haverá bons resultados independente do conjunto de funções adotados.

Como forma de aproximação das funções discretas não lineares este método mostrou-se satisfatório, porém a necessidade de se obter uma função para linearizar funções e/ou dados, incorporou ao trabalho uma série de fatores que estão apresentados no transcorrer desta dissertação, sendo assim abordado o tema de aproximação de funções via rede neurais como foi visto anteriormente.



## APÊNDICE 2

### A2. Compensação da temperatura ambiente de um termopar

No termopar, é importante não esquecer, que o que se mede realmente é a diferença entre as temperaturas das junções. Então para medir a temperatura do ponto desejado precisa-se manter a temperatura da junção de referência invariável.

As tabelas existentes da força eletromotriz gerada em função da temperatura para os termopares, têm fixado a junta de referência a 0 °C (ponto de solidificação da água, que é o caso da Tabela do Apêndice 3), porém nas aplicações práticas dos termopares a junta de referência é considerada nos terminais do instrumento receptor e esta se encontra a temperatura ambiente que é normalmente diferente de 0 °C e variável com o tempo, tornando assim necessário que se faça uma correção da junta de referência, podendo esta ser automática ou manual.

Uma maneira de se determinar a temperatura  $T_r$  (temperatura da junção de referência, localizada no ponto de conexão do termopar ao instrumento de medida) é força-la para um valor conhecido, como por exemplo 0°C. Ao serem colocadas as extremidades de um termopar a zero graus (banho de gelo), o sinal gerado pelo sensor só dependerá da temperatura  $T_1$  do meio a ser medido (temperatura da junção de medição), pois a tensão gerada a 0 °C é zero em mV (milivolts) [1].



Então a força eletromotriz lida no instrumento será diretamente proporcional à temperatura  $T_1$  (temperatura da junção de medição ou temperatura ambiente), isto é

$$E = E_{T_1} - E_{T_r} \Rightarrow E = E_{T_1} - E_{0^\circ\text{C}} \quad (\text{como } E_{0^\circ\text{C}} = 0\text{mV}) \Rightarrow E = E_{T_1} \Rightarrow T_1. \quad (\text{A2})$$

Sendo  $E$  força eletromotriz,  $E_{T_1}$  a força eletromotriz da junção de medição e  $E_{T_r}$  a força eletromotriz da junção de referência. Pela equação A2, verifica-se que a força eletromotriz obtida é diretamente proporcional a temperatura ambiente.

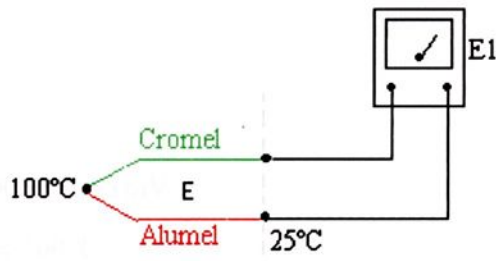
O banho de gelo ainda é muito usado em laboratórios e indústrias para se fixar a temperatura da junção de referência,  $T_r$ , pois consiste num método relativamente simples e de grande precisão, porém dispositivos alternativos foram desenvolvidos para simular automaticamente uma temperatura de  $0^\circ\text{C}$ , chamada de compensação automática da junção de referência ou da temperatura ambiente.

Nestes instrumentos encontra-se um outro sensor de temperatura que pode ser um resistor, uma termoresistência, termistor, diodo, transistor ou mesmo um circuito integrado que mede continuamente a temperatura ambiente e suas variações, adicionando o sinal que chega do termosensor uma mV (milivoltagem) correspondente à diferença da temperatura ambiente para a temperatura de  $0^\circ\text{C}$  [1] e [18].

### Exemplo

Considere um termopar tipo K sujeito a  $100^\circ\text{C}$  na junção de medição e  $25^\circ\text{C}$  na borneira do instrumento ( junta de referência), como é ilustrado na figura abaixo





Então, fazendo a diferença entre a força eletromotriz da junção de medição e da junção de referência e considerando os dados tabelados para o termopar tipo K, encontrada em [12], sendo que para a temperatura de 100°C a tensão é de 4,095 mV e para a temperatura de 25°C a tensão é correspondente a 1,000 mV, tem-se

$$E = E_{100} - E_{25} = 4,095 - 1,000 = 3,095 \text{ mV.}$$

Se não existisse a compensação, o sinal de 3,095 mV (milivolts) seria lido em forma de temperatura pelo instrumento e corresponderia a aproximadamente 76 °C, bem diferente dos 100°C ao qual o termopar está submetido (erro de -24°C).

Como o instrumento medidor, está incorporado num sistema de compensação da temperatura ambiente, este gera um sinal como se fosse um outro termopar chamado de  $E_1$ , sendo

$$E_1 = E_{25} - E_0 = E_{25} \Rightarrow E_1 = 1,000 \text{ mV (sinal gerado pelo circuito de compensação)}$$

O sinal total que será convertido em temperatura pelo instrumento será a soma do sinal do termopar e da compensação, resultando na leitura correta da temperatura na qual o termopar está submetido (independente da variação da temperatura ambiente), isto é

$$E_{total} = E + E_1$$

$$E_{total} = 3,095 + 1,000 = 4,095 \text{ mV}$$

$$E_{total} = 4,095 \text{ mV} \Rightarrow 100^\circ\text{C}.$$

Desta forma a leitura no instrumento é de  $100^\circ\text{C}$ , que é a temperatura compensada do processo (junção de medição do termopar) [18].

### 3.1. Tabela do termopar tipo B

O Apêndice 3 apresenta uma tabela de valores do termopar tipo B, referenciada a  $0^\circ\text{C}$ . Essa tabela fornece a relação de tensão em mV (milivolts) em relação a tensão de referência de  $0^\circ\text{C}$  a  $700^\circ\text{C}$ . Os dados desta tabela são compensados pela função de aproximação "temperature compensation". Determinar os valores através de uma relação tensão-temperatura para esta tabela através de métodos descritos no Manual.



## APÊNDICE 3

### A3. Tabela do termopar tipo B

O Apêndice 3 apresenta uma tabela de valores do termopar tipo B, referenciada a 0°C. Esta tabela fornece a variação da tensão em mV (milivolts) em relação a faixa de temperatura de 0°C e 700°C. Os dados desta tabela são determinados pela função encontrada em “[www.omega.com/temperature/](http://www.omega.com/temperature/)”. Determinou-se essas tensões através de um polinômio, sendo obtidos cada valor dessa tabela através de cálculos executados no Matlab.

°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	-0.00024061	-0.00046941	-0.00068642	-0.00089165	-0.0010851	-0.0012668	-0.0014367	-0.0015949	-0.0017413	-0.001876
10	-0.001876	-0.0019989	-0.0021102	-0.0022097	-0.0022975	-0.0023736	-0.002438	-0.0024908	-0.0025318	-0.0025612	-0.0025789
20	-0.0025789	-0.002585	-0.0025794	-0.0025622	-0.0025333	-0.0024928	-0.0024407	-0.002377	-0.0023016	-0.0022147	-0.0021162
30	-0.0021162	-0.0020061	-0.0018844	-0.0017511	-0.0016063	-0.0014499	-0.001282	-0.0011025	-0.00091149	-0.00070894	-0.00049487
40	-0.0004948	-0.00026928	-3.2181 × 10 <sup>-5</sup>	0.00021642	0.00047653	0.00074812	0.0010312	0.0013258	0.0016318	0.0019493	0.0022782
50	0.0022782	0.0026187	0.0029705	0.0033338	0.0037085	0.0040947	0.0044923	0.0049013	0.0053217	0.0057535	0.0061967
60	0.0061967	0.0066513	0.0071173	0.0075947	0.0080834	0.0085835	0.009095	0.0096178	0.010152	0.010697	0.011254
70	0.011254	0.011823	0.012402	0.012993	0.013595	0.014208	0.014833	0.015469	0.016117	0.016775	0.017445
80	0.017445	0.018126	0.018819	0.019523	0.020238	0.020964	0.021701	0.02245	0.02321	0.023981	0.024764
90	0.024764	0.025557	0.026362	0.027178	0.028005	0.028844	0.029694	0.030555	0.031427	0.03231	0.033204
100	0.033204	0.03411	0.035026	0.035954	0.036893	0.037844	0.038805	0.039777	0.040761	0.041756	0.042762
110	0.042762	0.043779	0.044807	0.045846	0.046896	0.047958	0.04903	0.050114	0.051208	0.052314	0.053431
120	0.053431	0.054559	0.055698	0.056848	0.058009	0.059181	0.060364	0.061558	0.062763	0.06398	0.065207
130	0.065207	0.066445	0.067695	0.068955	0.070226	0.071509	0.072802	0.074107	0.075422	0.076748	0.078086
140	0.078086	0.079434	0.080793	0.082163	0.083545	0.084937	0.08634	0.087754	0.089179	0.090615	0.092062



°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
150	0.092062	0.09352	0.094988	0.096468	0.097959	0.09946	0.10097	0.1025	0.10403	0.10558	0.10713
160	0.10713	0.1087	0.11028	0.11186	0.11346	0.11507	0.1167	0.11833	0.11997	0.12163	0.12329
170	0.12329	0.12497	0.12665	0.12835	0.13006	0.13178	0.13351	0.13525	0.137	0.13876	0.14053
180	0.14053	0.14232	0.14411	0.14592	0.14773	0.14956	0.1514	0.15325	0.15511	0.15698	0.15886
190	0.15886	0.16075	0.16265	0.16456	0.16649	0.16842	0.17037	0.17233	0.17429	0.17627	0.17826
200	0.17826	0.18026	0.18227	0.18429	0.18632	0.18836	0.19041	0.19248	0.19455	0.19664	0.19873
210	0.19873	0.20084	0.20296	0.20508	0.20722	0.20937	0.21153	0.2137	0.21588	0.21807	0.22027
220	0.22027	0.22249	0.22471	0.22695	0.22919	0.23145	0.23371	0.23599	0.23828	0.24057	0.24288
230	0.24288	0.2452	0.24753	0.24987	0.25222	0.25458	0.25696	0.25934	0.26173	0.26414	0.26655
240	0.26655	0.26898	0.27141	0.27386	0.27632	0.27878	0.28126	0.28375	0.28625	0.28876	0.29128
250	0.29128	0.29381	0.29635	0.2989	0.30146	0.30404	0.30662	0.30921	0.31182	0.31443	0.31706
260	0.31706	0.31969	0.32234	0.325	0.32766	0.33034	0.33303	0.33573	0.33844	0.34116	0.34389
270	0.34389	0.34663	0.34938	0.35214	0.35491	0.3577	0.36049	0.36329	0.36611	0.36893	0.37177
280	0.37177	0.37461	0.37747	0.38033	0.38321	0.38609	0.38899	0.3919	0.39482	0.39775	0.40068
290	0.40068	0.40363	0.40659	0.40956	0.41254	0.41553	0.41854	0.42155	0.42457	0.4276	0.43064



°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
300	0.43064	0.4337	0.43676	0.43983	0.44292	0.44601	0.44911	0.45223	0.45535	0.45849	0.46164
310	0.46164	0.46479	0.46796	0.47114	0.47432	0.47752	0.48073	0.48394	0.48717	0.49041	0.49366
320	0.49366	0.49692	0.50019	0.50347	0.50676	0.51006	0.51337	0.51669	0.52002	0.52336	0.52671
330	0.52671	0.53007	0.53345	0.53683	0.54022	0.54362	0.54703	0.55046	0.55389	0.55733	0.56079
340	0.56079	0.56425	0.56772	0.57121	0.5747	0.57821	0.58172	0.58525	0.58878	0.59233	0.59588
350	0.59588	0.59945	0.60302	0.60661	0.6102	0.61381	0.61743	0.62105	0.62469	0.62834	0.63199
360	0.63199	0.63566	0.63934	0.64302	0.64672	0.65043	0.65414	0.65787	0.66161	0.66536	0.66911
370	0.66911	0.67288	0.67666	0.68045	0.68424	0.68805	0.69187	0.6957	0.69954	0.70338	0.70724
380	0.70724	0.71111	0.71499	0.71888	0.72277	0.72668	0.7306	0.73453	0.73847	0.74242	0.74637
390	0.74637	0.75034	0.75432	0.75831	0.76231	0.76631	0.77033	0.77436	0.7784	0.78245	0.7865
400	0.7865	0.79057	0.79465	0.79874	0.80283	0.80694	0.81106	0.81519	0.81932	0.82347	0.82763
410	0.82763	0.8318	0.83597	0.84016	0.84436	0.84856	0.85278	0.85701	0.86124	0.86549	0.86974
420	0.86974	0.87401	0.87828	0.88257	0.88687	0.89117	0.89549	0.89981	0.90414	0.90849	0.91284
430	0.91284	0.91721	0.92158	0.92597	0.93036	0.93476	0.93917	0.9436	0.94803	0.95247	0.95692
440	0.95692	0.96139	0.96586	0.97034	0.97483	0.97933	0.98384	0.98836	0.99289	0.99743	1.002



°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
450	1.002	1.0065	1.0111	1.0157	1.0203	1.0249	1.0295	1.0341	1.0387	1.0434	1.048
460	1.048	1.0527	1.0573	1.062	1.0667	1.0714	1.0761	1.0808	1.0855	1.0903	1.095
470	1.095	1.0998	1.1045	1.1093	1.1141	1.1189	1.1237	1.1285	1.1333	1.1381	1.143
480	1.143	1.1478	1.1527	1.1575	1.1624	1.1673	1.1722	1.1771	1.182	1.1869	1.1919
490	1.1919	1.1968	1.2018	1.2067	1.2117	1.2167	1.2217	1.2267	1.2317	1.2367	1.2417
500	1.2417	1.2468	1.2518	1.2569	1.262	1.267	1.2721	1.2772	1.2823	1.2874	1.2926
510	1.2926	1.2977	1.3028	1.308	1.3131	1.3183	1.3235	1.3287	1.3339	1.3391	1.3443
520	1.3443	1.3495	1.3548	1.36	1.3653	1.3705	1.3758	1.3811	1.3864	1.3917	1.397
530	1.397	1.4023	1.4076	1.413	1.4183	1.4237	1.4291	1.4344	1.4398	1.4452	1.4506
540	1.4506	1.456	1.4614	1.4669	1.4723	1.4778	1.4832	1.4887	1.4942	1.4997	1.5052
550	1.5052	1.5107	1.5162	1.5217	1.5272	1.5328	1.5383	1.5439	1.5494	1.555	1.5606
560	1.5606	1.5662	1.5718	1.5774	1.5831	1.5887	1.5943	1.6	1.6056	1.6113	1.617
570	1.617	1.6227	1.6284	1.6341	1.6398	1.6455	1.6513	1.657	1.6627	1.6685	1.6743
580	1.6743	1.6801	1.6858	1.6916	1.6974	1.7033	1.7091	1.7149	1.7208	1.7266	1.7325
590	1.7325	1.7383	1.7442	1.7501	1.756	1.7619	1.7678	1.7737	1.7797	1.7856	1.7915



°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
600	1.7915	1.7975	1.8035	1.8094	1.8154	1.8214	1.8274	1.8334	1.8394	1.8455	1.8515
610	1.8515	1.8576	1.8636	1.8697	1.8758	1.8818	1.8879	1.894	1.9001	1.9062	1.9124
620	1.9124	1.9185	1.9246	1.9308	1.937	1.9431	1.9493	1.9555	1.9617	1.9679	1.9741
630	1.9741	1.9803	1.9866	1.9928	1.999	2.0053	2.0116	2.0178	2.0241	2.0304	2.0367
640	2.0367	2.043	2.0493	2.0557	2.062	2.0683	2.0747	2.0811	2.0874	2.0938	2.1002
650	2.1002	2.1066	2.113	2.1194	2.1258	2.1323	2.1387	2.1451	2.1516	2.1581	2.1645
660	2.1645	2.171	2.1775	2.184	2.1905	2.197	2.2035	2.2101	2.2166	2.2232	2.2297
670	2.2297	2.2363	2.2429	2.2494	2.256	2.2626	2.2692	2.2759	2.2825	2.2891	2.2958
680	2.2958	2.3024	2.3091	2.3157	2.3224	2.3291	2.3358	2.3425	2.3492	2.3559	2.3626
690	2.3626	2.3694	2.3761	2.3829	2.3896	2.3964	2.4032	2.41	2.4168	2.4236	2.4304





**unesp** 

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Câmpus de Ilha Solteira  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Av. Brasil Centro, 56  
15385-000 Ilha Solteira - SP  
[www.dee.feis.unesp.br](http://www.dee.feis.unesp.br)

