



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.013/13

Supersimetria Não-Anticomutativa

Kelvyn Pátersson Sousa de Brito

Orientador

Nathan Jacob Berkovits

Julho de 2013

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Francisca e Valberto, pelos conselhos e educação.

Ao meu orientador, Nathan Berkovits, pela paciência e por me orientar.

Aos meus amigos Édypo, Fagner e Thiago Peixoto pelas discussões de temas interessantes.

Aos meus amigos Thiago Fleury, Renan, Prieslei, Segundo e Renato, pelo auxílio em questões e dúvidas, e pela paciência.

Aos meus colegas e professores do IFT.

E à agência de fomento a pesquisa Capes.

Resumo

Em supersimetria padrão, construímos um superespaço com parâmetros $x^\mu, \theta, \bar{\theta}$ (anti)comutantes e supercampos que dependem destes, então impomos vínculos e após definirmos supercampos quirais e vetorias, que são exemplos interessantes, e enfim construímos uma lagrangeana supersimétrica.

Vamos aqui colocar condições mais fracas sobre os parâmetros do superespaço: agora tais parâmetros que antes eram anticomutantes vão formar uma álgebra de Clifford

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta} \quad (1)$$

e seguindo um procedimento análogo, com algumas definições adicionais, entenderemos nossa lagrangeana para o caso de um superespaço não-anticomutativo.

Palavras Chaves: Álgebra de Clifford, Wess-Zumino, Super-Yang-Mills, não-comutatividade, termos adicionais com deformação em $C^{\alpha\beta}$.

Áreas do conhecimento: Teoria Quântica de Campos; Supersimetria; Geometria Não-Comutativa

Abstract

In standard supersymmetry, we build a superspace with parameters $x^\mu, \theta, \bar{\theta}$ that (anti)commute and superfields that depend on them, then we impose constraints and define chiral and vector superfields, which are interesting examples, from which we build a supersymmetric Lagrangian.

We will now impose a weaker condition on the superspace of the parameters: the ones that were anticommuting will now form a Clifford algebra

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta} \tag{2}$$

and, following an analogous procedure, with additional definitions, we will generalize our Lagrangian for the case of the non-anticommutative superspace.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução	1
1.1	6
1.2 Convenções	7
2 Supersimetria (anticomutativa)	9
2.1 Campos de Yang-Mills	9
2.1.1 Teorias de Gauge Abelianas	9
2.1.2 Teorias de gauge Não-abelianas	11
2.1.3 Lagrangeana de Yang-Mills	15
2.2 Superespaço	15
2.2.1 Supercampo	16
2.2.2 Transformação de Supersimetria	18
2.3 Super-Yang-Mills N=1, d=4	19
2.3.1 Super Yang-Mills Abeliano	19
2.4 Supercampos Quirais	25
2.5 Super-Yang-Mills Não-Abeliano em Superespaço	30
2.5.1 Yang-Mills Abeliano em Interação com Matéria	30
2.5.2 Super Yang-Mills Não-Abeliano	33
2.5.3 Super Yang-Mills Não-Abeliano com Matéria	36
3 Supersimetria Não-Anticomutativa	39
3.1 Superespaço Não -Anticomutativo	40
3.2 Supercampos Quirais	45

3.3	Ação de Super-Yang-Mills	
	Não-Anticomutativo	51
3.3.1	Super-Yang-Mills Não-Abeliano sem matéria	
	em Superespaço Não-Anticomutativo	51
3.3.2	Super-Yang-Mills Não-Abeliano com matéria	
	em Superespaço Não-Anticomutativo	65
4	Conclusões	69
A	Apêndice	73
A.1	Supersimetria	73
	A.1.1 Notação	73
A.2	Importantes:	75
	A.2.1 Alguns resultados usados no Capítulo 1	75
	A.2.2 Alguns resultados usados no capítulo 2	77
	Referências	79

Capítulo 1

Introdução

História da Supersimetria

A supersimetria surgiu da tentativa de “unir” de uma maneira não trivial os grupos de simetria internos e o grupo de simetria não-compacto do espaço-tempo em um “grupo mestre”, já que o teorema de Coleman-Mandula permite uma união trivial desses dois grupos.

Em 1971, a supersimetria apareceu em duas abordagens distintas. Em uma abordagem, introduzida pelos artigos [1] e [2], se observou que uma simetria de gauge anticomutante emerge da teoria de cordas de Neveu-Schwarz-Ramond, foi escrita a primeira ação supersimétrica, que é a ação supersimétrica da teoria de supercordas em duas dimensões. Enquanto na outra abordagem, Gol’fand e Likhtman fizeram, em seu artigo [3], uma extensão da álgebra de Poincaré, isto é, da álgebra do espaço-tempo, e tal extensão é denominada a álgebra de super-Poincaré.

A supersimetria foi descoberta de forma independente, respectivamente, por J. L. Gervais e B. Sakita, em 1971,[4], Yu. A. Gol’fand e E. P. Likhtman, também em 1971, [3], e D.V. Volkov e V.P. Akulov em 1972, [5]. Com isso, eles estabeleceram relações entre férmions e bósons, e entre simetrias internas e simetrias não-compactas do espaço-tempo. Também foram feitas muito cedo aplicações disso a física de partículas, por Abdus Salam e seus colegas. Muitas áreas da física, como física nuclear, fenômenos críticos, mecânica quântica e estatística, fizeram uso da estrutura de superálgebras de Lie graduadas advinda da supersimetria.

Em 1996, a álgebra de supersimetria, que é Z_2 -graduada, teve uma generalização proposta por Viktor Abramov; em seus artigos [6], ele considera uma álgebra graduada em Z_3 , denominada álgebra de hipersimetria.

Howard Georgi, em 1981, foi o primeiro a propor, em seu artigo [7], uma versão realista do Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (abreviadamente, MSSM- Minimal Supersymmetric Standard Model), o qual foi criado com a proposta de resolver o problema de hierarquia. Ele prediz, também, superparceiros com massas entre 100 GeV e 1 TeV. E, apesar de o LHC estar desde o começo de seu funcionamento produzindo colisões a energias jamais atingidas antes, até hoje não se viu nenhum sinal a respeito da observação de superparceiros. No entanto, a impossibilidade de se observar ainda não foi levada em conta. O LHC, será religado no início de 2015 e funcionará a 14 TeV, o dobro de sua potência atual-7TeV, talvez na última esperança de se coletar dados a respeito de superparceiros, caso não encontremos, devemos caminhar em busca de algo novo além do Modelo Padrão.

Geometria Não-comutativa

A relação que há entre a geometria comutativa e a geometria não-comutativa é análoga a relação entre a física clássica, no que diz respeito a suas funções comutantes e física quântica, com seus operadores não-comutantes.

Antes que surgissem os processos de renormalização e fossem largamente aceitos, Heisenberg foi quem primeiro teve a ideia de remover os infinitos propondo uma extensão não-comutativa das coordenadas. E, somente em 1947 é que Hartland Snyder retomou essa ideia em seu primeiro artigo sobre o assunto.

A *Geometria Não-Comutativa* foi desenvolvida, na década de 1980, principalmente por Alain Connes, dentro do formalismo matemático e apresentado em sua produção [8]. Desenvolveu-se, assim, uma noção mais geral de estrutura diferencial, uma descrição de operador algébrico sobre o espaço-tempo não-comutativo e uma teoria de Yang-Mills sobre o toro não-comutativo.

Snyder foi quem primeiro propôs, em 1947, [9] a ideia de que o espaço-tempo poderia não-comutar, uma teoria quântica de campos descrita sobre um espaço desse tipo é denominada *Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa*. Mas somente depois que Nathan Seiberg e Edward Witten publicaram, em 1999, o artigo [11] “String Theory and Noncommutative Geometry” que o interesse da comunidade de física de partículas pela não-comutatividade aumentou. De acordo com este artigo [11], se adicionamos à ação da folha de mundo da corda bosônica

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} g_{ij} \partial_a x^i \partial^a x^j \quad (1.1)$$

um campo B de Neveu-Schwarz constante

$$S_B = -\frac{i}{2} \int_{\Sigma} B_{ij} \epsilon^{ab} \partial_a x^i \partial_b x^j$$

e vinculamos as extremidades a uma p-brana

$$g_{ij} \partial_n x^j + 2\pi i \alpha' B_{ij} \partial_t x^j|_{\partial \Sigma} = 0, \quad (1.2)$$

então o propagador pode ser calculado sobre os pontos extremos e resulta em

$$\langle x^i(\tau) x^j(\tau') \rangle = -\alpha' G^{ij} \log(\tau' - \tau)^2 + \frac{i}{2} \Theta^{ij} \epsilon(\tau' - \tau), \quad (1.3)$$

onde G^{ij} e Θ^{ij} são constantes que dependem do campo B e $\epsilon(\tau)$ é a função degrau, que é igual a -1 se τ é negativo e 1 se τ é positivo. Podemos, assim, encontrar o comutador

$$[x^i(\tau), x^j(\tau)] = T(x^i(\tau) x^j(\tau^-) - x^i(\tau) x^j(\tau^+)) = i\Theta^{ij}, \quad (1.4)$$

onde $i, j = 1, \dots, r$ e nos garante um espaço-tempo não-comutativo. Observa-se, com isso, que as coordenadas das extremidades da corda aberta que estão vinculados a p-brana com campo B de Neveu-Schwarz satisfazem a álgebra não-comutativa 1.4. Assim, como resultado do limite da teoria de cordas abertas para baixas energias, obtemos uma teoria quântica de campos sobre um espaço-tempo não-comutativo.

Uma segunda motivação para se estudar o espaço-tempo não-comutativo apareceu, em 1995, no artigo [12]: “The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields” publicado por Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen e John E. Roberts, o qual sugere que de forma semelhante ao princípio da incerteza de Heisenberg, que nos dá um espaço de fase com “volume mínimo de incerteza”, existe um “volume mínimo de incerteza” também no espaço-tempo devido a produção de um horizonte de eventos quando a densidade de energia cresce. E, isto nos resulta em uma relação de comutação entre os operadores coordenadas do espaço-tempo.

Supersimetria Não-Anticomutativa

As variáveis θ que na supersimetria são grassmanianas, agora são tratadas como satisfazendo uma álgebra de Clifford, o que foi feito nos artigos pioneiros [13], [14] e [15] sobre não-anticomutatividade em supersimetria.

Se de forma análoga à subseção acima, e de acordo com o artigo [16], à Lagrangeana de supercordas tipo II, com supersimetria $\mathcal{N} = 2$ e escolha conveniente das variáveis

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \tilde{\partial} y^\mu \partial y_\mu - q_\alpha \tilde{\partial} \theta^\alpha + \bar{d}_{\dot{\alpha}} \tilde{\partial} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \tilde{q}_\alpha \partial \bar{\theta}^\alpha \tilde{d}_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \right), \quad (1.5)$$

adicionamos o campo $F^{\alpha\beta}$ dual do gravifóton

$$F^{\alpha\beta} q_\alpha \tilde{q}_\beta \quad (1.6)$$

e substituímos as equações de movimento para os campos q e $\tilde{q}$

$$\begin{aligned} \tilde{\partial} \theta^\alpha &= \alpha' F^{\alpha\beta} \tilde{q}_\beta \\ \partial \bar{\theta}^\alpha &= -\alpha' F^{\alpha\beta} q_\beta \end{aligned}$$

na Lagrangeana 1.5+1.6, obtemos a Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = \left(\frac{1}{\alpha'^2} \right)_{\alpha\beta} \partial \bar{\theta}^\alpha \tilde{\partial} \theta^\beta. \quad (1.7)$$

Então, impondo as condições de contorno

$$\theta^\gamma(z = \tilde{z}) = \tilde{\theta}^\gamma(z = \tilde{z}), \quad \partial \tilde{\theta}^\gamma(z = \tilde{z}) = -\tilde{\partial} \theta^\gamma(z = \tilde{z}), \quad (1.8)$$

podemos encontrar o propagador

$$\langle \theta^\alpha(z, \tilde{z}) \theta^\beta(w, \tilde{w}) \rangle = \frac{\alpha'^2 F^{\alpha\beta}}{2\pi i} \log \frac{\tilde{z} - w}{z - \tilde{w}}, \quad (1.9)$$

e usando argumentos análogos ao caso para corda abertas, da subseção acima, finalmente temos como resultado

$$\{\theta^\alpha(\tau), \theta^\beta(\tau)\} = T (\theta^\alpha(\tau) \theta^\beta(\tau^-) - \theta^\alpha(\tau) \theta^\beta(\tau^+)) = \alpha'^2 F^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} \neq 0, \quad (1.10)$$

ou seja, uma deformação no anticomutador dos θ 's pode ser vista como uma generalização do caso anterior, onde o comutador não-nulo dos parâmetros do espaço-tempo é obtido quando temos uma corda aberta bosônica na presença do campo B de Neveu-Schwarz constante e vinculada a uma p-brana.

Para que faça sentido definir campos quirais e antiquirais, usamos $y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ como variável comutante

$$[y^\mu, y^\nu] = [y^\mu, \theta^\alpha] = [y^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}] = 0 \quad (1.11)$$

e, em particular, como consequência, temos o comutador das coordenadas do espaço-tempo proporcional a um termo infinitesimal

$$[x^\mu, x^\nu] = \bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Notamos, com isso, que deformar o anticomutador dos θ 's

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$$

é uma extensão para o superspaço do que é feito em teoria quântica de campos quando o comutador dos parâmetros espaço-temporais são deformados

$$[x^i, x^j] = \Theta^{ij}.$$

Daí, obtemos uma teoria não-local: algo muito desejado em teoria quântica da gravidade.

Ooguri e Vafa mostraram em seus artigos [17] e [18] que uma nova estrutura não-anticomutativa emerge de uma D-brana supersimétrica com um campo constante tipo Ramond-Ramond, desta forma há uma relação entre esta D-brana e o superspaço não-anticomutativo, que apresenta parâmetros ferminônicos que não mais satisfazem a uma álgebra de Grassmann, mas a uma álgebra de Clifford. Isto é, a dinâmica de uma corda aberta com as extremidades contidas em uma D-brana e sob a influência de um campo Ramond-Ramond pode ser descrito apenas pela não-comutatividade do espaço da D-brana. Isso pode ser obtido pelo ordenamento de Weyl, implementando a multiplicação produto estrela Moyal. E, como resultado obtemos uma teoria quântica de campos supersimétrica com deformação não-anticomutativa e supersimetria parcialmente quebrada, por esta razão, denominada supersimetria $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$.

Como foi feito no artigo [17] de Ooguri e Vafa, quando resolvemos a folha de mundo na teoria de cordas no estado fundamental com field strength do gravifóton constante obtemos nosso superspaço não-anticomutativo, o qual iremos estudar no capítulo dois. Assim, na presença do gravifóton $F^{\mu\nu} = C^{\mu\nu}$, as equações de movimento são deformadas por termos lineares e quadráticos em $C^{\mu\nu}$. E se a esse superspaço deformado pela presença do gravifóton adicionamos um estado fundamental do gluino, podemos deformar a relação de anticomutação entre os espinores sobre a folha de mundo da D-brana para recuperarmos completamente a supersimetria $\mathcal{N} = 1$, que foi parcialmente quebrada.

1.1

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

No primeiro capítulo faremos uma breve revisão sobre Supersimetria [(Anti) Comutativa] assim como é tratada em [19], e usamos também [20] como uma fonte auxiliar. Mas na primeira seção exporemos, com base nas referências [21], [22] e [23], primeiro a teoria de gauge abeliana que descreve o campo eletromagnético, em seguida a teoria de gauge não-abeliana, que será resolvida para a álgebra de Lie $U(1) \times SU(2)$ resultará na teoria de Yang-Mills, que descreve a força eletrofraca, e então, depois de introduzir o conceito de superespaço, com base em [19], que é o espaço-tempo acrescido de parâmetros anticomutantes, na segunda seção, definiremos supercampos, que são funções sobre este superespaço. Em seguida, vamos impor aos supercampos alguns vínculos para obter campos com propriedades interessantes. O primeiro que definiremos na terceira seção é o supercampo vetorial, com o qual escreveremos a lagrangeana para Super-Yang-Mills com $N=1$, $d=4$; e em seguida, o supercampo quiral na quarta seção, que será usado pra escrever a lagrangeana supersimétrica de matéria(sem interação). Na quinta seção, quando "somarmos" as duas lagrangeanas obtidas nas duas seções anteriores: a lagrangeana de Super-Yang-Mills abeliana livre obtida na terceira seção e a lagrangeana de matéria obtida na seção quatro, e adicionarmos o termo de acoplamento "matéria-campo de gauge", obteremos então a lagrangeana de Super-Yang-Mills Abeliano acoplado com a matéria. E, na sexta e última seção deste capítulo, encontraremos a lagrangeana para super-Yang-Mills não-abeliano no superespaço, seguindo o mesmo processo anterior, no entanto agora com os campos de gauge sendo "matrizes", isto é, que em geral não comutam. Em uma subseção escreveremos a lagrangeana pra Super-Yang-Mills não-abeliano livre e na subseção seguinte adicionaremos a lagrangeana de matéria com o termo de acoplamento, obtendo a lagrangeana mais geral para a interação dos campos escalar, spinor e vetor supersimétrica e renormalizável.

No segundo capítulo faremos uma revisão do artigo [15], onde trataremos sobre supersimetria não-anticomutativa, algo análogo ao que foi feito em [19], no entanto, construído sobre um superespaço não-anticomutativo que satisfaz

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta},$$

mais geral que o caso anterior, tornando as antigas variáveis grassmannianas $(\theta, \bar{\theta})$ agora variáveis que satisfazem a álgebra de Clifford. E, a partir daí, obteremos termos adicionais aos resultados da supersimetria ((anti)-comutativa). Desta forma, na primeira seção introduziremos o conceito de superespaço não-comutativo, nas seções seguintes faremos algo análogo ao

que foi realizado no capítulo anterior, agora sobre esse superespaço não-anticomutativo, tal que na segunda seção discutiremos sobre supercampos quírais, para escrevermos a lagrangeana de matéria e, na terceira seção escreveremos a ação de super-Yang-Mills não-anticomutativo, após introduzirmos o conceito de supercampo vetorial sobre esse superespaço, assim falaremos acerca de Super-Yang-Mills não-abeliano livre sobre este superespaço.

Algo que pode ainda ser considerado é uma lagrangeana de super-Yang-Mills com matéria sobre este superespaço não-anticomutativo, "adicionando" o termo de acoplamento às lagrangeanas livres, o que foi feito na última seção deste capítulo com base no artigo [24].

1.2 Convenções

As convenções de índices neste trabalho serão as seguintes. No primeiro capítulo, índices gregos $(\alpha, \beta, \dots, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots)$ denotarão bi-componentes dos espinores de Weyl; e os índices latinos $(m, n, \dots)$ denotarão componentes de quadrivetores de Lorentz. No segundo capítulo, usaremos as mesmas convenções do primeiro capítulo para o caso de índices espinoriais, e denotaremos os índices vetoriais de Lorentz pelas letras gregas $(\mu, \nu, \dots)$.

Capítulo 2

Supersimetria (anticomutativa)

2.1 Campos de Yang-Mills

Nesta seção faremos uma revisão embasada nas referências [21], [22] e [23] das teorias de gauge abelianas e não-abelianas, e em particular a teoria de Yang-Mills, e poremos no final da seção o exemplo da Lagrangeana de Yang-Mills.

2.1.1 Teorias de Gauge Abelianas

Esta subseção foi escrita baseada na subseção 1.8.1 da referência [21].

A teoria de gauge abeliana é a primeira com que temos contato, é a que descreve o eletromagnetismo clássico.

Quando escrevemos as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{j} \quad (2.4)$$

com os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ em termos do potencial vetor $A_\mu = (\phi, A)$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi \quad \mathbf{B} = \nabla \times A, \quad (2.5)$$

e definimos o **tensor campo eletromagnético** $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.6)$$

podemos escrever as equações de Maxwell na forma covariante. Das equações 2.1 e 2.2,

$$\partial_\nu(\epsilon^{\mu\nu\xi\rho}F_{\xi\rho}) = 0, \quad (2.7)$$

que é uma consequência da definição do tensor $F_{\mu\nu}$, e das outras duas equações 2.3 e 2.4 resulta

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (2.8)$$

que pode ser obtida da Lagrangeana do campo eletromagnético

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \quad (2.9)$$

como equações de movimento de Euler-Lagrange. O primeiro termo é o campo de radiação livre, o segundo é o termo de interação do campo de gauge com a matéria.

Se consideramos o espaço sem cargas e correntes, temos a Lagrangeana para

$$\mathcal{L}_{EM}^0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

O tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ é invariante pela transformação de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (2.11)$$

donde concluímos que as equações de maxwell, assim como a Lagrangeana do campo eletromagnético livre 2.10, são invariantes pela transformação de gauge.

Teorias de gauge abelianas acoplado com campo de matéria

Seja ψ o campo de Dirac com carga elétrica e . A Lagrangeana de Dirac livre

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi \quad (2.12)$$

é explicitamente invariante sob a transformação de gauge global

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\alpha} \quad (2.13)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Se elevarmos esta simetria a uma invariância de gauge local

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\alpha(x)}, \quad (2.14)$$

a Lagrangeana 2.12 se transforma sob 2.14 como

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi \rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu\partial_\mu\alpha + m)\psi \quad (2.15)$$

Se “combinamos” a Lagrangeana do campo eletromagnético 2.9 e a Lagrangeana de Dirac 2.12 livre, notamos que esta nova lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\nabla_\mu + m)\psi, \quad (2.16)$$

tal que $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ e a corrente $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, é invariante sob as transformações de gauge anteriores

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\alpha} \quad (2.17)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) \quad (2.18)$$

Observemos que quando “somamos” as duas teorias livres: de radiação

$$\mathcal{L}_{rad} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

e de matéria

$$\mathcal{L}_{mat} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi,$$

e colocamos interação, é necessário somente substituir a derivada comum dos parâmetros por uma derivada covariante $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$.

2.1.2 Teorias de gauge Não-abelianas

Para escrevermos esta subseção usamos como referências a seção 9.2 do livro [22] e a subseção 1.8.2 do livro [21].

Teorias de gauge Não-abelianas livres

Vamos considerar agora teorias invariantes por uma transformação de grupo de gauge não-abeliano.

Seja os elementos T^a geradores de um grupo de Lie semi-simples compacto G com elementos

$$U(x) = e^{-ig\alpha_a T^a},$$

por exemplo o grupo de Lie $SO(N)$ ou $SU(N)$, que satisfazem

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma, \quad (2.19)$$

onde os números $f_{\alpha\beta}^\gamma$ são chamados de **constante de estrutura** de G , e satisfazem também a identidade de Jacobi. E uma transformação de gauge agora é dada por

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu U^\dagger + g^{-1}U\partial_\mu U^\dagger. \quad (2.20)$$

Como as teorias de gauge não-abelianas são auto-interagentes, podemos então, seguindo a mesma ideia que quando “somamos” as lagrangenas de matéria(Dirac) e de radiação livres, “substituindo” no tensor eletromagnético a derivada usual pela derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu, \quad \mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha, \quad (2.21)$$

obtemos o tensor campo de Yang-Mills

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_\mu \mathcal{A}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{A}_\mu \quad (2.22)$$

$$= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (2.23)$$

podemos escrever ainda $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ como um “operador diferencial”

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \cdot = \frac{1}{g}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \cdot, \quad (2.24)$$

onde $\cdot$ denota que há uma função implícita arbitrária. Então, podemos escrever a Lagrangeana de Yang-Mills livre

$$\mathcal{L}_{YM}^0 = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}), \quad (2.25)$$

que é invariante pela transformação de gauge 2.20.

Teorias de gauge Não-abelianas com matéria

Quando consideramos teorias de gauge não-abelianas com campos de matéria generalizamos a transformação de campo de matéria para

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x) = e^{-ig\alpha_a(x)T^a}\psi(x), \quad (2.26)$$

onde os elementos T^a são geradores de um grupo de Lie semi-simples compacto G com elementos $U(x)$, por exemplo $SO(N)$ ou $SU(N)$, que satisfazem 2.19. Se substituímos a derivada parcial ∂_m pela derivada covariante $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + gA_\mu^a T_a$ na Lagrangeana de Dirac e adicionamos a lagrangiana de Yang-Mills livre 2.25, obtemos a generalização da Lagrangeana 2.16 para a interação do campo de gauge de Yang-Mills(não-abeliano) com a matéria

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu + m)\psi, \quad (2.27)$$

isto é, a Lagrangeana que descreve o campo de Dirac interagindo com um campo de gauge vetorial não-abeliano, onde o traço é definido sobre a matriz do grupo, tal que agora a derivada covariante é definida por $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu$,

$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha$ é o **campo de gauge de Yang-Mills** e o **campo tensor de Yang-Mills** $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ dado por 2.23.

Podemos verificar que esta Lagrangeana 2.27 é invariante pelas transformações de gauge.

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger \quad (2.28)$$

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu U^\dagger + g^{-1}U\partial_\mu U^\dagger, \quad (2.29)$$

pois a derivada covariante $\mathcal{D}_\mu\psi$ se transforma covariantemente sob a transformação 2.28 $\mathcal{D}'_\mu\psi' = U\mathcal{D}_\mu\psi$, de fato

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu\psi' &= (\partial'_\mu + g\mathcal{A}'_\mu)\psi' = U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi + gU\mathcal{A}_\mu\psi + U(\partial_\mu U^\dagger)\psi' \\ &= U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi + gU\mathcal{A}_\mu\psi + U\partial_\mu(U^\dagger\psi') - UU^\dagger\partial_\mu\psi' \\ &= 2U\partial_\mu\psi + (\partial_\mu U)\psi + gU\mathcal{A}_\mu\psi - \partial_\mu(U\psi) \\ &= U(\partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu)\psi = U\mathcal{D}_\mu\psi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A seguir, partindo da definição 2.23 do tensor campo de Yang-Mills, usando a identidade de Bianchi na última igualdade e o fato de $\mathcal{A}$ pertencer a álgebra de Lie de G

$$\mathcal{D}_\mu * \mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu * \mathcal{F}^{\mu\nu} + g[\mathcal{A}, * \mathcal{F}_{\mu\nu}] \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}(\partial_\mu \mathcal{F}_{\kappa\lambda} + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\kappa\lambda}]) \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \{ \partial_\mu (\partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa + g[\mathcal{A}_\kappa, \mathcal{A}_\lambda]) + \quad (2.33)$$

$$+ g[\mathcal{A}_\mu, (\partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa + g[\mathcal{A}_\kappa, \mathcal{A}_\lambda])] \} \quad (2.34)$$

$$= \frac{g^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}[\mathcal{A}_\mu, [\mathcal{A}_\kappa, \mathcal{A}_\lambda]], \quad (2.35)$$

obtemos o vínculo

$$\mathcal{D}_\mu * \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.36)$$

e a partir da Lagrangeana 2.27, podemos facilmente encontrar as equações de Euler-Lagrange para os campos de férmion e de gauge, dadas por

$$\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu}^a = e\bar{\psi}\gamma_\nu T_a \psi \quad (2.37)$$

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu + m)\psi = 0 \quad (2.38)$$

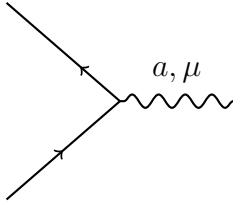
Regras de Feymann para Teorias de gauge Não-Abelianas

Nesta subsubseção usaremos a seção 10.6 da referência [22] e a primeira subseção da seção 16.1 da referência [23].

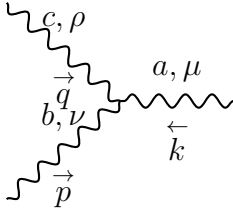
Quando separamos na Lagrangeana 2.27, a Lagrangeana de campo livre dos termos de interação, temos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + g\mathcal{A}_\lambda^a \bar{\psi}\gamma^\lambda T_a \psi - gf^{abc}(\partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda^a)\mathcal{A}^{\kappa b}\mathcal{A}^{\lambda c} - \frac{1}{4}g^2(f^{eab}\mathcal{A}_\kappa^a\mathcal{A}_\lambda^b)(f^{ecd}\mathcal{A}^{\kappa c}\mathcal{A}^{\lambda d}), \quad (2.39)$$

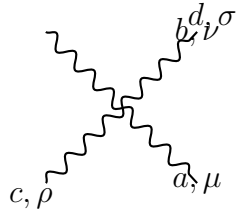
tal que os termos de interação podem ser escritos em diagramas de Feynmann como:



$$= ig\gamma^\mu T_a;$$



$$= gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu];$$



$$= -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})].$$

Estes são todos os diagramas interagentes de uma teoria geral de gauge não-abeliana.

2.1.3 Lagrangeana de Yang-Mills

Nesta subseção foi usada como referência a seção 15.2 do livro [23].

Em seu artigo original, Yang e Mills consideraram o dubleto próton-nêutron

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

transformado sob o grupo de spin isotópico, como uma rotação tridimensional abstrata que age sobre um spinor

$$\psi \rightarrow \exp\left(\frac{i}{2}\alpha_i\sigma^i\right)\psi, \quad (2.41)$$

com isso obtemos uma teoria de gauge sob $SU(2)$, que é um exemplo de teoria de gauge não-abeliana, descrita na subseção anterior e determinada pelas relações de comutação

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = i\epsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}, \quad (2.42)$$

isto é, pelas constantes de estrutura $f^{ijk} = i\epsilon^{ijk}$. Assim, a derivada covariante da teoria eletrofraca, que determina a dinâmica junto com a Lagrangeana 2.27, é dada por

$$\mathcal{D}_\mu = i\partial_\mu - g'\frac{1}{2}Y_W B_\mu - g\frac{1}{2}\vec{\tau}_L \vec{W}_\mu, \quad (2.43)$$

tal que B_μ é o campo de gauge de $U(1)$; Y_W é a hipercarga fraca, o gerador do grupo $U(1)$; W_μ é campo de gauge de $SU(2)$ de três componentes; $\vec{\tau}_L$ são as matrizes de Pauli- geradores infinitesimais do grupo $SU(2)$. O subscrito L indica que a transformação de gauge do grupo $SU(2)$ age apenas sobre os férmions de mão esquerda; e g' e g são as constantes de acoplamento da teoria.

2.2 Superespaço

A álgebra de super-Poincaré é a extensão supersimétrica mais simples da álgebra de Poincaré, cujos geradores são os operadores de boosts $M^{\alpha\beta}$ e de translação P^α , é obtida a partir desta se adicionarmos os geradores de supersimetria Q_α e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ e impormos as relações de comutação:

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m P^m \quad (2.44)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.45)$$

$$[P_m, Q_\alpha] = [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0 \quad (2.46)$$

$$[P_n, P_m] = 0 \quad (2.47)$$

Os elementos do grupo gerado por esta álgebra podem ser escritos como

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\{-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}\}}. \quad (2.48)$$

Quando adicionamos ao espaço de parâmetros x^μ do grupo de Poincaré, os parâmetros grassmannianos $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, que satisfazem

$$[x^\mu, x^\nu] = [\theta^\alpha, x^\mu] = [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, x^\mu] = \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0,$$

obtemos o superespaço, que é o espaço de parâmetros do grupo (de Lie) de super-Poincaré.

De outro modo, seguindo a referência [?], podemos definir o superespaço $\mathbb{R}^{m|n}$ como um espaço vetorial Z_2 -graduado gerado por um subespaço real m -dimensional e um subespaço n -dimensional com direções de Grassmann. O superespaço sobre o qual é tratada a supersimetria é o superespaço $R^{d|4\mathcal{N}}$, tal que d é número de dimensões espaço-temporais e $\mathcal{N}$ é a quantidade de geradores de supersimetria; trataremos o caso particular em que $d = 4$ e $\mathcal{N} = 1$. Um elemento deste superespaço é representado por

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}); \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha, \dot{\alpha} = 1, 2..$$

2.2.1 Supercampo

Se escrevemos as funções dos elementos $z = (x, \theta, \bar{\theta})$ do superespaço, que são os supercampos, como série de potências em θ e $\bar{\theta}$, temos

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + \\ & + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde as funções componentes são os campos “físicos”.

O grupo super-Poincaré, definido na subseção anterior, age sobre os supercampos. E, uma composição da ação deste grupo pode ser resolvida usando a formula de Hausdorff $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$ e que

$$[\xi Q, \bar{\xi} \bar{Q}] = 2\xi\sigma^m\bar{\xi}P_m, [P^m, \xi Q] = [P^m, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0,$$

assim, como os comutadores de altas ordens se anulam,

$$\begin{aligned}
G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) &= \exp\{i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\}\exp\{i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})\} \\
&= \exp\{-i(x^m - i\xi\sigma^m\bar{\theta} + i\theta\sigma^m\bar{\xi})P_m + i(\xi + \theta)Q \\
&\quad + i(\bar{\xi} + \bar{\theta})\bar{Q}\} \\
\Rightarrow G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) &= G(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \xi + \theta, \bar{\xi} + \bar{\theta}). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Sabendo que $G(y, 0, 0)$ é apenas o operador translação e que P_m comuta com toda a álgebra de supersimetria, obtemos como consequência uma propriedade interessante:

$$\begin{aligned}
G(0, 0, \bar{\xi})G(0, \xi, 0)G(x^m, \theta, \bar{\theta}) &= G(i\xi\sigma^m\bar{\xi}, 0, 0)G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) \\
G(0, \xi, 0)G(0, 0, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) &= G(-i\xi\sigma^m\bar{\xi}, 0, 0)G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}).
\end{aligned}$$

Há um movimento no espaço de parâmetros que é induzido pela multiplicação 2.50 entre os elementos do grupo de super-Poincaré representado da seguinte forma

$$g(\xi, \bar{\xi}) : (x^m, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}), \quad (2.51)$$

e é gerado pelos operadores diferenciais geradores de supersimetria Q e $\bar{Q}$:

$$\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \partial_m \right), \quad (2.52)$$

desta forma, os operadores $Q, \bar{Q}$ atuam sobre os supercampos como operadores diferenciais

$$Q_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) \quad (2.53)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \right), \quad (2.54)$$

e assim, encontramos os comutadores

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \quad (2.55)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (2.56)$$

Como o produto $G(0, \xi_1, \bar{\xi}_1)G(0, \xi_2, \bar{\xi}_2)$ está relacionado ao movimento $g(\xi_2, \bar{\xi}_2)g(\xi_1, \bar{\xi}_1)$ com ordem de multiplicação trocada, observamos uma mudança no sinal, $P_m = -i\partial_m \Rightarrow \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (-P_m)$. Se, de outro modo,

estudando a multiplicação a direita, obtemos um movimento induzido produzido pelos operadores D e $\bar{D}$, definidos como,

$$D_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) \quad (2.57)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \right), \quad (2.58)$$

e que satisfazem as relações de anticomutação

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \quad (2.59)$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.60)$$

e, completando a lista de todos os anticomutadores envolvendo $D, \bar{D}, Q$ e $\bar{Q}$, temos

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (2.61)$$

isto é, D anticomuta com Q .

2.2.2 Transformação de Supersimetria

Sempre é possível construir um supercampo a partir de uma componente de multiplete qualquer A , aplicando o operador $\exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})$. Isto nos fornece uma função de $x, \theta, \bar{\theta}$

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times \mathcal{A} = \mathcal{A} + \delta_\theta \mathcal{A} + \dots, \quad (2.62)$$

então obtemos a transformação de simetria de grupo

$$\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \times F, \quad (2.63)$$

cujos coeficientes representam as componentes do campo transformado

$$\begin{aligned} \delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta_\xi f(x) + \theta \delta_\xi \phi(x) + \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\chi}(x) + \theta \theta \delta_\xi m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_\xi n(x) \\ &+ \theta \sigma^m \bar{\theta} \delta_\xi v_m(x) + \theta \theta \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \delta_\xi \psi(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_\xi d(x) \\ &\equiv (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) F. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Podemos eliminar componentes de campos extras impondo vínculos covariantes aos supercampos, para obter as transformações de gauge para os “campos físicos”.

2.3 Super-Yang-Mills N=1, d=4

2.3.1 Super Yang-Mills Abeliano

Um supercampo vetorial é definido pelo vínculo

$$V = V^+. \quad (2.66)$$

Em termos de suas componentes, o campo vetorial pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi} \\ &+ \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] \\ &- \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right] \\ &- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

tal que, para satisfazer 2.66, as componentes C, D, M, N e v_m devem assumir valores reais. O campo vetorial v_m é o termo que dá nome ao multiplete inteiro. Para escrever o supercampo V no gauge 2.67 acima fizemos uma escolha bem particular dos coeficientes das componentes $\theta\theta\bar{\theta}, \theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ e $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ de V .

Escrevendo os campos quirais Φ e Φ^+ em componentes e em torno de x^μ , temos

$$\Phi + \Phi^+ = A + A^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* \quad (2.68)$$

$$+ i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(A - A^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi \quad (2.69)$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square(A + A^*). \quad (2.70)$$

E assim, motivados pelo fato de o gradiente $\partial_m(A - A^*)$ ser o coeficiente da componente $\theta\sigma^m\bar{\theta}$, podemos definir uma transformação de gauge supersimétrica, como

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^+. \quad (2.71)$$

Analisando os coeficientes de cada monômio em $\theta, \bar{\theta}$ desta transformação, encontramos as transformações de gauge supersimétricas das componentes do campo vetorial V :

coeficiente de 1

$$C \rightarrow C + A + A^* \quad (2.72)$$

coeficiente de θ

$$\chi \rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi \quad (2.73)$$

coeficiente de $\theta\theta$

$$M + iN \rightarrow M + iN - 2iF \quad (2.74)$$

coeficiente de $\theta\sigma^m\bar{\theta}$

$$v_m \rightarrow v_m - i(A - A^*) \quad (2.75)$$

coeficiente de $i\theta\theta\bar{\theta}$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi &\rightarrow (\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi) + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi = \bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m(\chi - i\sqrt{2}\psi) \\ \Rightarrow \chi &\rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi; \quad \lambda \rightarrow \lambda \end{aligned} \quad (2.76)$$

coeficiente de $\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$

$$\begin{aligned} D + \frac{1}{2}\square C &\rightarrow (D + \frac{1}{2}\square C) + \frac{1}{2}\square(A + A^*) = D + \frac{1}{2}\square(C + A + A^*) \\ \Rightarrow C &\rightarrow C + A + A^*; \quad D \rightarrow D. \end{aligned} \quad (2.77)$$

As componentes do supercampo vetorial V , em 2.67, foram escolhidas de forma a manter a invariância de gauge dos campos λ e D .

Podemos calcular V em um gauge específico, onde C, χ, M e N iguais a zero, o qual é chamado gauge de Wess-Zumino, fazendo isso

$$V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \quad (2.78)$$

$$V^2 = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_mv^m \quad (2.79)$$

$$V^3 = 0. \quad (2.80)$$

Note que os coeficientes do supercampo vetorial V são o campo de gauge v_m , o campo do gaugino λ e um campo auxiliar D .

Escolhendo este gauge, ainda temos a transformação de gauge usual $v_m \rightarrow v_m + \partial_m a$ como a transformação de sua componente de menor dimensão, apesar de a supersimetria ser quebrada.

Agora, no intuito de construir um tensor de campo, onde seu campo componente de ordem mais baixa é invariante de gauge, note que λ e $\bar{\lambda}$ são

as componentes invariantes de gauge do supercampo V de ordem mais baixa. Desta forma, o campo de força pode ser definido por

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \quad (2.81)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V. \quad (2.82)$$

Como resultado estes supercampos W são quirais, pois

$$\bar{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha = 0 \quad D_\beta\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad (2.83)$$

e também invariantes de gauge, pois do fato que $\bar{D}\Phi = D\Phi^+ = 0$, temos

$$W_\alpha \rightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V + \Phi + \Phi^+) = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha\Phi - \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha\Phi^+ \quad (2.84)$$

$$= W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\{\bar{D}, D_\alpha\}\Phi = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\alpha}}(-2i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta}\partial_m)\Phi, \quad (2.85)$$

como $[\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \partial_m] = 0$ e Φ é quiral, então $W_\alpha \rightarrow W'_\alpha = W_\alpha$.

Se calculamos o tensor de campo W no gauge Wess-Zumino, isto é, pondo $C = \chi = M = N = 0$, e o escrevemos em termos de $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, θ e $\bar{\theta}$, podemos simplificar bastante os cálculos, assim, partindo do campo

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \\ &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial_mv^m(y)], \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde usamos A.23, obtemos o campo invariante de gauge desejado

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \quad (2.87)$$

em termos de $y, \theta, \bar{\theta}$ e usamos, desta forma, as derivadas $D, \bar{D}$ em termos também destes parâmetros

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m} \quad (2.88)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}. \quad (2.89)$$

Daí, usando 2.86, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}$ e $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}\bar{\theta}\bar{\theta} = 4$,

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}\left[-\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}v_m + 2i\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda} + i\bar{\theta}\bar{\theta}\lambda_\alpha\right] \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\theta} (D - i \partial_m v^m) + 2i \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^m \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} (-\theta \sigma^n \bar{\theta} \partial_m v_n + i \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \partial_m \bar{\lambda} + i \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \partial_m \lambda) \\
& = -i \lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha (D(y) - i \partial_m v^m(y)) \\
& + i \sigma_{\alpha\dot{\lambda}}^m (\epsilon^{\delta\eta} \epsilon_{\eta\rho}) \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\delta\dot{\beta}}^n \theta^\rho \partial_m v_n + \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^m \theta \bar{\theta} \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}
& = -i \lambda_\alpha(y) + \left\{ \delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2} [(2\eta^{mn} + \sigma^m \bar{\sigma}^n) + \sigma^m \bar{\sigma}^n]_\alpha^\beta \partial_m v_n \right\} \theta_\beta \\
& + \theta \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
W_\alpha & = -i \lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta (\partial_m v_n(y) - \partial_n v_m(y)) \right] \theta_\beta \\
& + \theta \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y)
\end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\tag{2.94}$$

Analogamente, em termos de $y^+, \theta, \bar{\theta}$,

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{\dot{\alpha}} & = -\frac{1}{4} D D \bar{D}_{\dot{\alpha}} V = \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \frac{\partial}{\partial y^{+m}} \right) \\
& \quad \left[-\theta \sigma^n \bar{\theta} v_n + i \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\lambda} - i \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda + \frac{1}{2} \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D \right]
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} [(-\theta^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^n v_n + i \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + 2i \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \theta \lambda + \theta \bar{\theta} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} D) \\
& + (2i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \theta \sigma^n \bar{\theta} \partial_m v_n - 2 \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^\alpha \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \partial_m \lambda)]
\end{aligned}$$

Usando que $\frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \theta \theta = 4$,

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{\dot{\alpha}} & = i \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \left[\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} D(y^+) + \frac{i}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} (\bar{\sigma}^m \sigma^n)^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}} (\partial_m v_n(y^+) - \partial_n v_m(y^+)) \right] \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\
& + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\alpha} \partial_m \lambda_\alpha(y^+).
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Todas os campos componentes do supercampo W e $\bar{W}$ são invariantes de gauge: D, λ_α e $v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$. O supercampo W é muito interessante, pois além de ser invariante de gauge e quiral, ainda satisfaz o vínculo

$$\begin{aligned}
D^\alpha W_\alpha & = -\frac{1}{4} D^\alpha (\bar{D} \bar{D} D_\alpha V) = -\frac{1}{4} (D^\alpha D_\alpha \bar{D} \bar{D} V) \\
& = -\frac{1}{4} \bar{D}_{\dot{\alpha}} (D D \bar{D}^{\dot{\alpha}} V) = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \\
\Rightarrow D^\alpha W_\alpha & = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Se escolhermos $\theta = \bar{\theta} = 0$, obtemos desta relação que a componente D do campo é real, pois das equações 2.96

$$\begin{aligned} D^\alpha W_\alpha|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= \left[4D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\alpha (\partial_m v_n - \partial_n v_m) \right] \Big|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\ \Rightarrow D(y)|_{\theta=\bar{\theta}=0} &= D(y^+)|_{\theta=\bar{\theta}=0} = D(x) = D^*(x), \end{aligned} \quad (2.98)$$

logo $D(x)$ é real. Se impomos as condições de quiralidade 2.83 e o vínculo 2.97 a um supercampo qualquer, obtemos que a equação 2.96 nos dá a solução mais geral para o problema, que também pode ser obtida através de uma exponenciação dos campos de componente mais baixa λ_α e $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$,

$$W_\alpha = \exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \lambda_\alpha, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = \exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \quad (2.99)$$

e obtemos, então, que este supercampo W é quiral

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\beta}}} \exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \lambda_\alpha = -\bar{Q}_{\dot{\beta}} \exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \lambda_\alpha \\ &= -\bar{Q}_{\dot{\beta}} W_\alpha = (-\bar{D}_{\dot{\beta}} - 2i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \partial_m) W_\alpha = 0 \\ \Rightarrow 2 \left(-\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\beta}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \partial_m \right) W_\alpha &= 0 \Rightarrow \bar{Q}_{\dot{\beta}} W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$D_\beta \bar{W}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = Q_\beta \exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \quad (2.100)$$

$$= Q_\beta \bar{W}_{\dot{\alpha}} = (D_\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m) \bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad (2.101)$$

obtemos que o supercampo $\bar{W}$ é antiquiral. E satisfazem o vínculo 2.97.

Buscando uma expressão pra Lagrangeana supersimétrica que contenha o termo de gauge padrão, usando a equação 2.96 e definindo o campo antisimétrico $v_{mn} := \partial_m v_n - \partial_n v_m$, encontramos

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -2i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + D^2 - \frac{i}{2}[(\sigma^m\bar{\sigma}^n + \sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\alpha] v_{mn} D \quad (2.102)$$

$$- \frac{1}{4}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\alpha (\sigma_k\bar{\sigma}_l)_\alpha{}^\beta v_{mn} v^{kl} \left(-\frac{1}{2} \right) \quad (2.103)$$

$$= -2i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + D^2 + \frac{1}{2}(\sigma^{mn}\sigma_{kl})_\alpha{}^\alpha v_{mn} v^{kl}, \quad (2.104)$$

usando A.24, temos

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -2i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + D^2 - \frac{1}{2}v_{mn}v^{mn} + \frac{i}{4}\epsilon_{mnkl}v^{mn}v^{kl}. \quad (2.105)$$

Podemos denotar $W^\alpha W_\alpha$ ainda por

$$\begin{aligned}
W^\alpha W_\alpha &= -\frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} D^\alpha V \right) (\bar{D} \bar{D} D_\alpha V) \right] \\
&= -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} \left[\left(-\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} D^\alpha V \right) D_\alpha V \right] \\
\Rightarrow W^\alpha W_\alpha &= -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (W^\alpha D_\alpha V). \tag{2.106}
\end{aligned}$$

Finalmente, notando que a equação 2.105 apresenta o termo de gauge padrão, podemos escrever uma generalização supersimétrica e invariante de gauge da Lagrangeana para um campo vetorial,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}). \tag{2.107}$$

Podemos, ainda, escrever a Lagrangeana em termos dos campos “físicos”. $-\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (\bar{\theta} \bar{\theta}) = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = 1$, então

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left\{ -i\lambda \sigma^m \partial_m \bar{\chi} - \frac{1}{4} v_{mn} v^{mn} + \frac{1}{2} D^2 \right\}. \tag{2.108}$$

Usando 2.106 e 2.107, a Lagrangeana pode ser também escrita em termos de componentes de $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$,

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \frac{1}{4} \{ W^\alpha D_\alpha V + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} V \} |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}, \tag{2.109}$$

e assim, adicionar a essa Lagrangeana 2.109 o termo de massa $m^2 V^2$, que não é invariante de gauge e nem pode ser calculado no gauge Wess-Zumino. Partindo da expressão geral 2.67 e usando A.25,

$$V^2|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = C \left(D + \frac{1}{2} \square C \right) - \chi \left(\lambda + \frac{i}{2} \sigma^m \partial_m \bar{\chi} \right) \tag{2.110}$$

$$- \bar{\chi} \left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2} \bar{\sigma}^m \partial_m \chi \right) + \frac{1}{2} (M^2 + N^2) - \frac{1}{2} v_m v^m. \tag{2.111}$$

Este termo $m^2 V^2$ adicional a Lagrangeana dá massa ao campo vetorial e, como requerido ao multiplete massivo, ele acrescenta graus de liberdade adicionais C e ξ . A Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{4} [W^\alpha D_\alpha V + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} V] + m^2 V^2 \right\} |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}, \tag{2.112}$$

obtida adicionando 2.108 e 2.110 descreve: **um campo vetorial de gauge**
 v_m

$$-\frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - \frac{1}{2}m^2v_mv^m \quad (2.113)$$

dois campos de spin(gaugino) λ e χ

$$-i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} - m^2\chi\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right) - m^2\bar{\chi}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right) \quad (2.114)$$

e um campo escalar $C = -D$

$$\frac{1}{2}m^2C\left(\square - \frac{1-m^2}{m^2}\right)C, \quad (2.115)$$

todos com mesma massa.

2.4 Supercampos Quirais

Seja a Lagrangeana para um campo espinorial e um campo escalar massivos

$$\mathcal{L} = \left[i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi - \frac{1}{2}m(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi})\right] + [A^*(\square - m^2)A]. \quad (2.116)$$

Introduzindo um campo escalar auxiliar $F = -mA^*$, podemos escrever esta Lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + m\mathcal{L}_m, \quad (2.117)$$

onde o termo cinético é

$$\mathcal{L}_0 = i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi + A^*\square A + F^*F, \quad (2.118)$$

e o termo de massa

$$\mathcal{L}_m = AF + A^*F^* - \frac{1}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}). \quad (2.119)$$

Se determinamos as equações de campo, como equações de Euler-Lagrange, obtemos

$$i\bar{\sigma}^n\partial_n\psi + m\bar{\psi} = 0 \quad (2.120)$$

$$\square A + mF^* = 0 \quad (2.121)$$

$$F + mA^* = 0 \quad (2.122)$$

Isto nos motiva a escrever a Lagrangeana de matéria em termos de supercampos. Definiremos, então, supercampos quirais, que são supercampos que satisfazem o vínculo

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (2.123)$$

tal que D e $\bar{D}$ são operadores diferenciais (“ortogonais aos geradores $Q, \bar{Q}$ ”) dados por:

$$\begin{aligned} D_{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Podemos verificar que

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) = -i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m + i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m = 0 \quad (2.125)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0. \quad (2.126)$$

Logo, o supercampo Φ é constante em $\bar{\theta}$, dependendo somente dos parâmetros y^m e θ ,

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(y^m, \theta) = 0, \quad (2.127)$$

pois $\bar{D}$ escrito em termos de $y, \theta, \bar{\theta}$ é $\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}$, tal que $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ e θ , então Φ pode ser escrito como

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \quad (2.128)$$

e expandindo $A(y), \psi(y)$ e $F(y)$ em termos de x , desprezando ordens superiores a θ^3 , temos

$$\begin{aligned} \Phi &= A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{2}(i\theta\sigma^m\bar{\theta})(i\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_m\partial_n A(x) \\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) + \sqrt{2}\theta(i\theta\sigma^m\bar{\theta})\partial_m\psi + \theta\theta F(x), \end{aligned}$$

e usando os resultados A.2.1 resulta

$$\Phi = A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x). \quad (2.129)$$

Se agora escrevemos os operadores 2.124 em termos de $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, θ e $\bar{\theta}$, pela regra da cadeia, temos

$$D_{\alpha} = \frac{\partial\theta^{\beta}}{\partial\theta^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}} + \frac{\partial y^n}{\partial\theta^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^n} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{\partial\theta^{\beta}}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}} + \frac{\partial y^n}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y^n}\right) \quad (2.130)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}, \quad (2.131)$$

de forma análoga

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \frac{\partial}{\partial y^m} - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \frac{\partial}{\partial y^m} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}. \quad (2.132)$$

O supercampo anti-quiral Φ^+ atende à condição $D_{\alpha}\Phi^+ = 0$, que é a equação 2.123 conjugada. Obviamente, Φ^+ é função somente de $y^+ := x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ e $\bar{\theta}$, e tem como solução geral:

$$\Phi^+ = A^*(y^+) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^+) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^+) \quad (2.133)$$

$$= A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) \quad (2.134)$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x). \quad (2.135)$$

Denotando em termos de y^+ , θ e $\bar{\theta}$, os operadores D e $\bar{D}$ podem ser escritos como,

$$\begin{aligned} D_{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \frac{\partial}{\partial y_m^+}, \end{aligned}$$

Como consequência, o supercampo Φ^+ é anti-quiral, pois satisfaz o vínculo $D_{\alpha}\Phi^+ = 0$, tal que D é escrito como $D_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}}$. E, como indicado na solução geral 2.133, Φ^+ será uma função de $y^+ = x^m - \theta\sigma^m\bar{\theta}$ e $\bar{\theta}$, de forma análoga ao supercampo quiral.

$$\Phi^+ = A^*(y^+) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^+) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^+). \quad (2.136)$$

Podemos dizer que os campos A e ψ são parceiros supersimétricos, bosônico e fermiônico respectivamente e o campo F é um campo auxiliar. Assim com esses supercampos quirais e anti-quirais podemos escrever Lagrangeanas que descrevem campos escalares e campos espinoriais. Primeiro precisamos calcular produtos de supercampos quirais, que também são quirais, usando o resultado A.28,

$$\Phi_i\Phi_j = A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}\theta[\psi_i(y)A_j(y) + \psi_j(y)A_i(y)] \quad (2.137)$$

$$+ \theta\theta[A_i(y)F_j(y) + A_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)]. \quad (2.138)$$

E então

$$\Phi_i\Phi_j\Phi_k = A_i(y)A_j(y)A_k(y) + \sqrt{2}\theta[\psi_iA_jA_k + \psi_jA_kA_i + \psi_kA_iA_j] \quad (2.139)$$

$$+ \theta\theta[F_iA_jA_k + F_jA_kA_i + F_kA_iA_j - \psi_i\psi_jA_k - \psi_j\psi_kA_i - \psi_k\psi_iA_j].$$

Usando 2.129 e 2.133, podemos ver que o produto misto $\Phi^+\Phi$ não é, como os produtos acima, um supercampo quiral

$$\begin{aligned}\Phi_i^+\Phi_j &= A_i^*(x)A_j(x) + \sqrt{2}\psi_j(x)A_i^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(x)A_j(x) \\ &+ \theta\theta A_i^*(x)F_j(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F_i^*(x)A_j(x)\end{aligned}\quad (2.140)$$

$$\begin{aligned}&+ \theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}[-2\psi_{i\alpha}\bar{\psi}_{j\dot{\alpha}} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m(A_i^*\partial_m A_j - i(\partial_m A_i^*)A_j)] \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m(A_i^*\partial_m\psi_j^\alpha - \partial_m A_i^*\psi_j^\alpha) - \sqrt{2}F_j^*\bar{\psi}_{i\dot{\alpha}}\right] \\ &+ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m(\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}\partial_m A_j - \partial_m\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}A_j) + \sqrt{2}F_i^*\psi_{j\alpha}\right]\end{aligned}\quad (2.141)$$

$$\begin{aligned}&+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[F_i^*F_j + \frac{1}{4}A_i^*(\square A_j) + \frac{1}{4}(\square A_i^*)A_j - \frac{1}{2}\partial_m A_i^*\partial^m A_j\right. \\ &\quad \left.+ \frac{i}{2}\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_j - \frac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_j\right],\end{aligned}$$

onde usamos os resultados A.2.1. Em termos de $y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$, θ e $\bar{\theta}$, os operadores de carga podem ser escritos como

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \quad e \quad (2.142)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m\frac{\partial}{\partial y^m}. \quad (2.143)$$

Agora, note que a componente $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$, que é mais alta do produto $\Phi^+\Phi$, pela transformação de supersimetria Q , se transforma como uma derivada do espaço-tempo, isto é,

$$\delta_\xi(\Phi^+\Phi)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})(\Phi^+\Phi)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m\frac{\partial}{\partial y^m}(\Phi^+\Phi)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \partial_m(\dots) \quad (2.144)$$

Podemos, agora, de posse dos termos que se transformam pelo operador de carga como derivadas do espaço-tempo, construir a expressão mais geral para uma Lagrangeana supersimétrica renormalizável que envolva apenas campos quirais Φ e antiquirais Φ^+ , como segue

$$\mathcal{L} = \Phi_i^+\Phi_i|_{comp.\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\left(\lambda_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\right]_{comp.\theta\theta} + h.c. \quad (2.145)$$

Esta Lagrangeana, que é construída somente com supercampos quirais $[\Phi \equiv (A, \theta, F)]$, e é utilizada para descrever parceiros supersimétricos bosônicos

A e fermiônicos ψ , e o campo F , que é apenas um campo auxiliar, pois ele não possui propagador.

Podemos ainda escrever a Lagrangeana 2.145, por extenso, em termos de seus campos componentes,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i + F_i^* F_i + \left[m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) \right. \\ & \left. + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Pelas equações de Euler-Lagrange do campo auxiliar F e F^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k^*} &= F_k + \lambda_k^* + m_{ik}^* A_i^* + g_{ijk}^* A_i^* A_j^* = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k} &= F_k^* + \lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j = 0, \end{aligned} \quad (2.147)$$

os mesmos podem ser determinados, e daí $\mathcal{L}$ pode ser expressa apenas como função dos campos A_i e ψ_i :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i + F_i^* F_i \\ & + \left[m_{ij} \left(-A_i \lambda_j^* - m_{nj}^* A_i A_n^* - g_{nmj}^* A_n A_m^* A_j^* - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) \right. \\ & + g_{ijk} (-A_i A_j \lambda_k^* - A_i A_j m_{nk}^* A_n^* - A_i A_j g_{nmk}^* A_n^* A_m^* - \psi_i \psi_j A_k) \\ & \left. + \lambda_i (-\lambda_i^* - m_{ji}^* A_j^* - g_{kji}^* A_k^* A_j^*) + h.c. \right]. \end{aligned}$$

Enfim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i - \frac{1}{2} m_{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} m_{ij}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \\ & - g_{ijk} \psi_i \psi_j A_k - g_{ijk}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j A_k^* - \mathcal{V}(A_i, A_j^*), \end{aligned} \quad (2.148)$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(A_i, A_j^*) = & [m_{ij} (A_i \lambda_j^* + m_{nj}^* A_i A_n^* + g_{nmj}^* A_n A_m^* A_j^*) \\ & + g_{ijk} A_i A_j (\lambda_k^* + m_{nk}^* A_n^* + g_{nmk}^* A_n^* A_m^*) \\ & + \lambda_i (\lambda_i^* + m_{ji}^* A_j^* + g_{kji}^* A_k^* A_j^*) + h.c.] + F_i^* F_i. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Colocando o potencial $\mathcal{V}$, da equação 2.149, em termos apenas do campo auxiliar F ,

$$\mathcal{V}(A_i, A_j^*) = [-(m_{ij} A_i + g_{ijk} A_k A_i + \lambda_j) F_j + h.c.] - F_i^* F_i \quad (2.150)$$

$$= (F_j^* F_j + h.c.) - F_i^* F_i = F_i^* F_i \geq 0. \quad (2.151)$$

Concluimos que os campos quirais

$$\Phi(y) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y), \quad (2.152)$$

onde $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, quando escrito na Lagrangeana 2.145, descreve um campo espinorial de matéria massivo ψ

$$i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i - \frac{1}{2}(m_{ij}\psi_i\psi_j + m_{ij}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j)$$

e um campo superparceiro escalar A sem massa

$$A_i^*\square A_i$$

com interação de Yukawa

$$-g_{ijk}\psi_i\psi_jA_k - g_{ijk}^*\bar{\psi}_i\bar{\psi}_jA_k^*$$

e um potencial

$$\mathcal{V}(A_i, A_j^*) = F_k^*F_k,$$

como está expreso explicitamente na Lagrangeana 2.148 em termos das componentes de campo.

2.5 Super-Yang-Mills Não-Abeliano em Superespaço

Com base no capítulo VII do livro [19] e na seção 3.6 do livro [20], construiremos nesta seção a Lagrangeana para super-Yang-Mills em teoria de gauge não-abeliana sobre o superespaço. Começaremos com o grupo de gauge $U(1)$, e então generalizaremos para um grupo de gauge não-abeliano.

2.5.1 Yang-Mills Abeliano em Interação com Matéria

Seja uma rotação global $U(1)$ do campo quiral Φ_l

$$\Phi_l' = e^{-it_l\lambda}\Phi_l; \quad t_l, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.153)$$

onde t_l e λ são constantes reais: as cargas do grupo $U(1)$ e o parâmetro do grupo $U(1)$, respectivamente. Podemos, com isso, construir uma Lagrangeana invariante pela transformação de gauge 2.153 acima,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_p = \Phi_l^+\Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left(\left[\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right] \Big|_{\theta\theta} + h.c. \right), \quad (2.154)$$

para isso devemos impor que $m_{ij} = 0$, quando $t_i + t_j \neq 0$ e que $g_{ijk} = 0$, quando $t_i + t_j + t_k \neq 0$.

A extensão mais geral que podemos fazer de 2.153, sendo Φ_l e Φ'_l campos quirais, é obtida quando λ é um multiplete quiral completo Λ .

$$\begin{aligned}\Phi'_l &= e^{-it_l\Lambda}\Phi_l; & \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda &= 0 \\ \Phi'^+_l &= e^{it_l\Lambda^+}\Phi^+_l; & D_{\alpha}\Lambda^+ &= 0.\end{aligned}\quad (2.155)$$

Podemos notar que, apesar de $\mathcal{L}_p$ permanecer invariante sob as transformações 2.155, não ocorre o mesmo com $\mathcal{L}_k$:

$$\Phi'^+_l\Phi'_l = \Phi^+_l\Phi_l e^{it_l(\Lambda^+ - \Lambda)}.\quad (2.156)$$

Mas isso não nos proíbe de que o façamos também invariante. Se introduzirmos um supercampo vetorial V auxiliar que se transforma como

$$V \rightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+),\quad (2.157)$$

então obtemos o que queremos: uma Lagrangeana completa

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4} (W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi^+_l e^{t_l V} \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right) + h.c. \right],\end{aligned}\quad (2.158)$$

que é invariante sob a transformação de gauge local do grupo $U(1)$, com um campo vetorial auxiliar V adicional

$$\begin{aligned}\Phi'_l &= e^{-it_l\Lambda}\Phi_l; & \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda &= 0 \\ \Phi'^+_l &= e^{it_l\Lambda^+}\Phi^+_l; & D_{\alpha}\Lambda^+ &= 0 \\ V' &= V + i(\Lambda - \Lambda^+).\end{aligned}$$

Se, agora, calculamos o termo de acoplamento do campo Φ com o campo auxiliar V no gauge de Wess-Zumino, isto é, com $V^3 = 0$, em termos dos campos componentes encontramos

$$\begin{aligned}\Phi^+ e^{tV} \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \left\{ \left[A^* - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^* + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A^* \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* \right] \right. \\ &\left. \exp\left(-t\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + it\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - it\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}t\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \right) \right\}\end{aligned}\quad (2.159)$$

$$\cdot \left[A + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A + \sqrt{2}\theta\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F \right] \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (2.160)$$

$$= FF^* + A\square A^* + i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi \quad (2.161)$$

$$+ tv^n \left(\frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi + \frac{i}{2}A^*\partial_n A - \frac{i}{2}\partial_n A^*A \right) - \frac{i}{\sqrt{2}}t(A\bar{\lambda}\bar{\psi} - A^*\lambda\psi) + \frac{1}{2} \left(tD - \frac{1}{2}t^2v_nv^n \right) A^*A. \quad (2.162)$$

Como, neste gauge, esta Lagrangeana não apresenta nenhum termo com dimensão maior que quatro, então ela é renormalizável.

Agora, podemos construir uma extensão supersimétrica da Lagrangeana da eletrodinâmica em termos de dois supercampos quirais Φ_- e Φ_+ , sob a transformação de gauge

$$\Phi'_+ = e^{-ie\Lambda}\Phi_+, \quad \Phi'_- = e^{ie\Lambda}\Phi_-, \quad (2.163)$$

que é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} = & \frac{1}{4} (WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + (\Phi_+^+ e^{eV}\Phi_+|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi_-^+ e^{-eV}\Phi_-|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}) \\ & + m(\Phi_+\Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi_+^+\Phi_-^+|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}), \end{aligned}$$

e pode ser expressa em termos de suas componentes, usando 2.108, 2.161 e 2.137, como

$$\mathcal{L}_{QED} = \left[\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v^{mn}v_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} \right] \quad (2.164)$$

$$+ [F_+F_+^* + F_-F_-^* + A_+\square A_+^* + A_-\square A_-^* + i(\partial_n\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_-)] \quad (2.165)$$

$$+ ev^n \left(\frac{1}{2}\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ - \frac{1}{2}\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_- + \frac{i}{2}A_+^*\partial_n A_+ - \frac{i}{2}\partial_n A_+^*A_+ + \frac{i}{2}A_-^*\partial_n A_- - \frac{i}{2}\partial_n A_-^*A_- \right) \quad (2.166)$$

$$- \frac{ie}{\sqrt{2}} (A_+\bar{\psi}_+\bar{\lambda} - A_+^*\psi_+\lambda - A_-\bar{\psi}_-\bar{\lambda} + A_-^*\psi_-\lambda) + \frac{e}{2}D(A_+^*A_+ - A_-^*A_-) \quad (2.167)$$

$$- \frac{1}{4}e^2v_nv^n (A_+^*A_+ + A_-^*A_-) \quad (2.168)$$

$$+ m(A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \bar{\psi}_+\bar{\psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*) \quad (2.169)$$

Observe que o termo 2.164

$$\frac{1}{4} (WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \quad (2.170)$$

é o termo cinético do campo de gauge V .

O termo 2.165, que é o primeiro termo de

$$(\Phi_+^+ e^{eV} \Phi_+ |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi_-^+ e^{-eV} \Phi_- |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}), \quad (2.171)$$

é o termo cinético do campo quirial de matéria Φ . Os termos 2.166, que são lineares em e de 2.171, são termos de interação de terceiro grau. Os últimos termos 2.168 da expressão 2.171 acima, os quais são múltiplos de e^2 , são termos de interação de quarto grau. O último termo 2.169

$$m (\Phi_+ \Phi_- |_{\theta\theta} + \Phi_+^+ \Phi_-^+ |_{\bar{\theta}\bar{\theta}}), \quad (2.172)$$

é o termo massivo da Lagrangeana de matéria. Se calculamos as equações de Euler-Lagrange para os campos auxiliares D, F_+ e F_- , temos

$$D + \frac{e}{2} (A_1^* A_1 - A_2^* A_2) = 0 \quad (2.173)$$

$$F_- + mA_+^* = 0 \quad (2.174)$$

$$F_+ + mA_-^* = 0. \quad (2.175)$$

Substituindo estes vínculos na Lagrangeana 2.16, obtemos a Lagrangeana somente em termos das componentes de campo “físicos”:

- **Supercampo Quiral Φ :**

- ψ , o campo de matéria
- e A , seu superparceiro escalar;

- **Supercampo Vetorial V :**

- v_m , o campo de gauge;
- e λ , o campo do gaugino.

2.5.2 Super Yang-Mills Não-Abeliano

Procuraremos agora generalizar a Lagrangeana de gauge abeliano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}), \quad (2.176)$$

invariante pela transformação de gauge

$$V \rightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+), \quad (2.177)$$

tal que

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \quad (2.178)$$

para o caso de gauge não-abeliano. Procedendo dessa forma, o supercampo de gauge Λ sera uma matriz

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^a \Lambda_a, \quad (2.179)$$

onde as matrizes T_a são os geradores do grupo que atua sobre o campo quiral Φ . Se usamos a representação adjunta

$$[T^a, T^b] = it^{abc}T^c, \quad (2.180)$$

onde as constantes de estrutura t^{abc} são completamente antissimétricas; os geradores podem, então, ser normalizados por

$$\text{Tr } T^a T^b = k\delta^{ab}; \quad k > 0. \quad (2.181)$$

Extendendo a lei de transformação 2.177 para o caso não-abeliano, encontramos que a Lagrangeana 2.176 é invariante sob a transformação de gauge:

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^+} e^V e^{i\Lambda}, \quad (2.182)$$

onde Λ e V são matrizes:

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^a \Lambda_a, \quad V_{ij} = T_{ij}^a V_a. \quad (2.183)$$

Assim, usando a fórmula de Hausdorff para calcular o produto de exponenciais em 2.182, encontramos um exponencial de uma soma de composições de comutadores, que através da relação de comutação de grupo 2.180, que pode ser reduzida e expressa como uma exponencial de uma combinação linear dos geradores do grupo T^a . Isso nos permite escrever V' como

$$V' = T^a V'_a, \quad (2.184)$$

que nos garante a independência da lei de transformação 2.182 em relação a uma representação específica dos geradores T^a .

É interessante notar que, se expandimos a expressão 2.182 em termos do campo V ,

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+) + \cdots, \quad (2.185)$$

encontramos que os primeiros termos da teoria de gauge não-abeliana corresponde aos termos da teoria abeliana, e além disso, o uso do gauge de Wess-Zumino, onde $V^3 = 0$, ainda é permitido.

Usando a formula de Hausdorff, uma transformação de gauge infinitesimal não-abeliana pode ser encontrada apartir de 2.182

$$e^A e^B = e^{A + \mathcal{L}_{A/2} \cdot [B + \coth(\mathcal{L}_{A/2}) \cdot B] + \dots} \quad (2.186)$$

onde a derivada de Lie $\mathcal{L}_0 \cdot ()$ é dada por

$$\mathcal{L}_{A/2} \cdot B = \left[\frac{1}{2} A, B \right] \quad (2.187)$$

e o cotangente hiperbólico, que é uma função ímpar, é entendido como

$$\coth(\mathcal{L}_{A/2}) \cdot B = c_n(\mathcal{L}_{A/2})^n \equiv c_n \underbrace{\left[\frac{A}{2}, \left[\frac{A}{2}, \left[\dots \left[\frac{A}{2}, B \right] \dots \right] \right] \right]}_{n \text{ vezes}} \quad (2.188)$$

tal que c_n são os coeficientes da expansão em Taylor de $\coth(\mathcal{L}_{A/2})$. A equação 2.182 pode ser calculada para transformações de gauge infinitesimais, então usando 2.186 e que $(\mathcal{L}_{V/2} \cdot \Lambda)^+ = -\mathcal{L}_{V/2} \cdot \Lambda^+$,

$$\begin{aligned} e^{V'} &= e^{-i\Lambda^+} e^V e^{i\Lambda} = \left(e^{V + \mathcal{L}_{A/2} \cdot [i\Lambda + \coth(\mathcal{L}_{V/2}) \cdot i\Lambda] + \dots} \right)^+ e^{i\Lambda} \\ &= \exp \left\{ V + i\mathcal{L}_{V/2} \cdot \left[(\Lambda^+ + \Lambda) - \coth(\mathcal{L}_{V/2}) \cdot \Lambda^+ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \coth(\mathcal{L}_{V/2}) \cdot \Lambda \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Daí obtemos a lei de transformação

$$\delta V = V' - V = i\mathcal{L}_{V/2} \cdot \left[(\Lambda + \Lambda^+) + \coth(\mathcal{L}_{V/2}) \cdot (\Lambda - \Lambda^+) \right]. \quad (2.189)$$

Finalmente, podemos generalizar o campo de força supersimétrico W_α para uma teoria de gauge não-abeliano, expresso pela transformação 2.182,

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} e^{-V} D_\alpha e^V. \quad (2.190)$$

Sabendo que $D_\alpha \Lambda^+ = 0$ e $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda = 0$, podemos verificar que o campo supersimétrico W^α , pela transformação de gauge não abeliana 2.182, se transforma como

$$W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda}. \quad (2.191)$$

Podemos agora estender a Lagrangeana de super Yang-Mills abeliano(ou Super-Maxwell) para o caso não-abeliano, que é a lagrangena

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} Tr (WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}), \quad (2.192)$$

em que o campo W^α é definido por 2.190. Sabendo que W_α se transforma como 2.191, podemos ver facilmente que esta Lagrangeana é invariante pela transformação de gauge 2.182.

2.5.3 Super Yang-Mills Não-Abeliano com Matéria

Generalizaremos agora o que foi realizado na seção 2.5.1, para o caso de supercampos de gauge V não-abelianos.

Quando tratamos em teoria de gauge não-abelianas, os supercampos se transformam por uma fase local,

$$\Phi'_l = e^{-it_l\Lambda} \Phi_l \quad (2.193)$$

e da subseção anterior, o campo vetorial V por essa transformação de gauge resulta em

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^+} e^V e^{i\Lambda} \quad (2.194)$$

o campo W é generalizado para o caso não-abeliano, como

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}\bar{D}e^{-V} D_\alpha e^V. \quad (2.195)$$

Escolhendo o gauge de Wess-Zumino, temos

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + [\delta_\alpha^\beta D(y) - i\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta} F_{\mu\nu}(y)] \theta_\beta + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y). \quad (2.196)$$

Quando somamos as duas lagrangenas anteriores 2.145 e 2.192, construídas somente com supercampos quiral e vetorial, respectivamente, e adicionamos o termo de interação invariante de gauge

$$\mathcal{L}_{int} = \Phi_l^+ e^{t_l V} \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}, \quad (2.197)$$

obtemos uma Lagrangeana completa que descreve a interação renormalizável supersimétrica entre os campos escalar, spinorial e vetorial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16kg^2} Tr(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_l^+ e^{t_l V} \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (2.198)$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \lambda_i \Phi_i \right) \right]_{\theta\theta component} + h.c. \quad (2.199)$$

que em termos das componentes do supercampo quirral de matéria $\Phi = [A, \psi, F]$ e do supercampo vetorial de gauge $V = [v_m, \lambda, D]$, podemos escrever a Lagrangeana acima, usando alguns resultados já obtidos anteriormente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[-\frac{1}{4}v_{mn}^a v_{mn}^a - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^a + \frac{1}{2}D^a D^a \right] \\ & + \left[-\mathcal{D}_m A^+ \mathcal{D}_m A - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi + F^+ F \right. \\ & \quad \left. + i\sqrt{2}g (A^+ T^a \psi \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a A \bar{\psi}) - gD^a A^+ T^a A \right] \\ & + \left[m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i + h.c. \right], \end{aligned}$$

se substituimos as equações de Euler-Lagrange para os campos auxiliares

$$F_k = -\lambda_k^* - m_{ik}^* A_i^* - g_{ijk} A_i^* A_j^* \quad (2.200)$$

$$F_k^* = -\lambda_k - m_{ik} A_i - g_{ijk} A_i A_j \quad (2.201)$$

$$D^a = -g(A^+ T^a A), \quad (2.202)$$

obtemos a em termos apenas dos “campos físicos”

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{1}{4}v_{mn}^a v_{mn}^a - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^a \right] \quad (2.203)$$

$$+ \left[-\mathcal{D}^m A^+ \mathcal{D}_m A - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi \right] \quad (2.204)$$

$$+ \left[i\sqrt{2}g (A^+ T^a \psi \lambda^a - \bar{\lambda}^a T^a A \bar{\psi}) - \frac{1}{2}g^2 (A^+ T^a A)^2 \right] \quad (2.205)$$

$$+ \left[-\frac{1}{2}m_{ik} \psi_i \psi_k - \frac{1}{2}m_{ik}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_k \right. \\ \left. - g_{ijk} \psi_i \psi_j A_k - g_{ijk}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j A_k^* - F_k^* F_k \right], \quad (2.206)$$

em que as derivadas covariantes são dadas por

$$\mathcal{D}_m A = \partial_m A + i g v_m^a T^a A \quad (2.207)$$

$$\mathcal{D}_m \psi = \partial_m \psi + i g v_m^a T^a \psi \quad (2.208)$$

$$\mathcal{D}_m \lambda^a = \partial_m \lambda^a - g t^{abc} v_m^b \lambda^c \quad (2.209)$$

$$v_{mn}^a = \partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - g t^{abc} v_m^b v_n^c. \quad (2.210)$$

Notemos que o termo 2.203 é o termo cinético do campo vetorial, que é campo de gauge v_m mais o campo do gaugino λ , o termo 2.204 é o termo cinético do campo quirral de matéria, que é o campo fermiônico ψ e de sférmion A , o termo 2.205 é o termo de interação do campo de gauge com o campo de matéria e o termo de auto-interação quadrático em g , e finalmente o último termo 2.206 inclui o termo de massa, o termo de interação de Yukawa entre os superparceiros escalar A e espinorial ψ de matéria e o termo de potencial

Capítulo 3

Supersimetria Não-Anticomutativa

Este capítulo é uma generalização do que foi feito no capítulo anterior para quando os parâmetros θ passam a obedecer uma álgebra de Clifford

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

e não mais a uma álgebra de Grassmann, como no capítulo anterior, o qual é baseado no livro [19]. É também uma extensão ao superespaço da não-comutatividade das variáveis do espaço-tempo da Teoria de Campos Não-Comutativa, como está bem discutido na introdução deste trabalho. Esta deformação do anticomutador dos θ 's é obtida se adicionamos à lagrangeana da folha de mundo da teoria de cordas do tipo II o termo do gravifóton

$$\int d^2z F^{\alpha\beta} q_\alpha \tilde{q}_\beta.$$

As equações de movimento são deformadas e também a função de correlação sobre a fronteira

$$\langle \theta^\alpha(\tau) \theta^\beta(\tau) \rangle = \frac{\alpha' F^{\alpha\beta}}{2} \text{sign}(\tau - \tau'), ,$$

ou ainda

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \alpha' F^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta} \neq 0.$$

Então, desta deformação da lagrangeana, resulta que a supersimetria $\mathcal{N} = 1$ é parcialmente quebrada e a simetria não-quebrada restante Q é denominada supersimetria $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$.

Neste capítulo, faremos uma revisão do artigo [15] do Nathan Seiberg, intitulado “Noncommutative Superspace, $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ Supersymmetry, Field Theory and String Theory”.

3.1 Superespaço Não -Anticomutativo

Se às coordenadas espaço-temporais adicionamos coordenadas fermiônicas que não anticomutam, mas satisfazem a uma álgebra de Clifford, cujos anticomutadores dos parâmetros fermiônicos satisfazem

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

obtemos o superespaço não-anticomutativo. Por causa disso, funções de θ devem ser ordenadas. Então, convencionaremos o uso do ordenamento de Weyl, que é através do comutador $\frac{1}{2}[\theta^\alpha, \theta^\beta] = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta$, desta forma as funções de θ devem ser ordenadas como

$$\theta^\alpha\theta^\beta = \frac{1}{2}([\theta^\alpha, \theta^\beta] + \{\theta^\alpha, \theta^\beta\}) = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta + \frac{1}{2}C^{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Isto nos motiva a escrever o produto entre os θ 's munido com este anticomutador 3.2 diferente como um produto estrela em geometria não-comutativa ordinária

$$f(\theta) * g(\theta) = f(\theta) \exp\left(-\frac{C^{\alpha\beta}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right) g(\theta) \quad (3.4)$$

$$= f(\theta) \left(1 - \frac{C^{\alpha\beta}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} - \det C \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta}\right) g(\theta), \quad (3.5)$$

tal que as derivadas a esquerda $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta}$, a direita $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta}$ e de segunda ordem são definidas por:

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \theta^\alpha \equiv \delta_\beta^\alpha \quad (3.6)$$

$$\theta^\alpha \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \equiv -\delta_\beta^\alpha \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta\theta} \equiv \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \quad (3.8)$$

Note que a cada dois θ 's multiplicados entre si, além do produto ordenado da teoria comutativa, aparece um 'termo linear em C ' adicional, uma consequência da definição da anticomutação entre os θ 's.

Convencionando o sinal $\sigma(f) = +1$, f uma função bosônica, e $\sigma(f)$, se f é fermiônica; então

$$f(\theta) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} = \sigma(f) \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} f(\theta), \quad (3.9)$$

e como as derivadas em θ de segunda ordem são bosônicas, então

$$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta\theta} \equiv \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \quad (3.10)$$

Da definição do produto estrela obtemos termos adicionais ao produto comutativo, que são potências em C .

$$\theta^\alpha * \theta^\beta = \theta^\alpha \left(1 - \frac{1}{2} C^{\gamma\delta} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\gamma} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\delta} \right) \theta^\beta = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \theta\theta + \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

$$\theta^\alpha * \theta\theta = \theta^\alpha \left(-\frac{1}{2} C^{\gamma\delta} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\gamma} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\delta} \right) \theta\theta = C^{\alpha\beta} \theta_\beta \quad (3.12)$$

$$\theta\theta * \theta^\alpha = -C^{\alpha\beta} \theta_\beta \quad (3.13)$$

$$\theta\theta * \theta\theta = \theta^\alpha \theta_\alpha \left(-\frac{C^{\beta\gamma}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\gamma} - \det C \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \right) \theta^\delta \theta_\delta = -\det C \quad (3.14)$$

Se acrescentamos variáveis com relações de comutação não-triviais, então a expressão 3.4 para as funções f e g deste superespaço precisa ser alterada de forma adequada.

A possibilidade mais simples, então, é considerar $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ com as relações padrão

$$\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\beta\} = [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, x^\mu] = 0, \quad (3.15)$$

consequentemente

$$\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \neq (\theta^\alpha)^*, \quad (3.16)$$

o que seria verdade somente se $C^{\alpha\beta} = 0$, ou seja, em um espaço sem deformações.

Da anticomutatividade entre θ e $\bar{\theta}$, usando A.19 e A.23, segue que

$$\begin{aligned} \theta\sigma^\mu\bar{\theta} * \theta\sigma^\nu\bar{\theta} &= \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{2} C^{\beta\gamma} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\gamma} \right) \theta^\delta \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\delta}} \\ &= -\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\nu \epsilon^{\delta\epsilon} \theta^\alpha \theta_\epsilon \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}} \bar{\theta}_\epsilon \bar{\theta}^{\dot{\delta}} - \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha\delta} \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\delta}} \\ &= -\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\eta}\epsilon} \theta^\alpha \theta_\epsilon \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_\eta - \frac{1}{4} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu C^{\alpha\delta} \epsilon_{\delta\epsilon} \epsilon^{\eta\gamma} \sigma_{\eta\dot{\delta}}^\nu \frac{1}{2} (\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}} - \epsilon^{\dot{\delta}\dot{\alpha}}) \bar{\theta}\bar{\theta} \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} - \frac{1}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} \left[C^{\alpha\delta} \epsilon_{\delta\epsilon} \left(\frac{1}{4} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\epsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. - C^{\gamma\delta} \epsilon_{\delta\epsilon} \left(\frac{1}{4} \sigma_{\eta\dot{\delta}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\delta}\beta} \epsilon_{\gamma\beta} \epsilon^{\eta\gamma} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} - \frac{1}{2} C^{\alpha\delta} \epsilon_{\delta\epsilon} \sigma_\alpha^{\mu\nu} \epsilon^\epsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta \sigma^\mu \bar{\theta} * \theta \sigma^\nu \bar{\theta} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} - \frac{1}{2} \bar{\theta} \bar{\theta} C^{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

tal que $C^{\mu\nu}$ é dado por

$$C^{\mu\nu} \equiv C^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \sigma_\alpha^{\mu\nu}{}^\gamma = -tr(\epsilon C \sigma^{\mu\nu}) = -C^{\nu\mu}.$$

Podemos obter $C^{\alpha\beta}$ a partir de $C^{\mu\nu}$, fazendo uma transformação inversa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \sigma_\gamma^{\mu\nu}{}^\beta C_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \sigma_\gamma^{\mu\nu}{}^\beta (C^{\epsilon\delta} \epsilon_{\delta\eta} \sigma_{\mu\nu}{}^\eta{}_\epsilon) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} C^{\epsilon\delta} \epsilon_{\delta\eta} \frac{1}{16} (\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} \sigma_{\mu\epsilon\dot{\epsilon}} \bar{\sigma}_\nu^{\dot{\epsilon}\eta} - \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} \sigma_{\nu\epsilon\dot{\epsilon}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\epsilon}\eta} \\ &\quad - \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta} \sigma_{\mu\epsilon\dot{\epsilon}} \bar{\sigma}_\nu^{\dot{\epsilon}\eta} + \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta} \sigma_{\nu\epsilon\dot{\epsilon}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\epsilon}\eta}), \end{aligned}$$

assim usando $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \sigma_\gamma^{\mu\nu}{}^\beta C_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} C^{\epsilon\delta} \epsilon_{\delta\eta} \frac{1}{16} \left[(-2\delta_\gamma^\eta \delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\epsilon}}) (-2\delta_\epsilon^\beta \delta_{\dot{\epsilon}}^{\dot{\gamma}}) + (-2\delta_\gamma^\eta \delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\epsilon}}) (-2\delta_\epsilon^\beta \delta_{\dot{\epsilon}}^{\dot{\gamma}}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} C^{\epsilon\delta} \epsilon_{\delta\eta} \epsilon^{\beta\chi} \frac{1}{16} \left[-\sigma_{\chi\dot{\alpha}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\mu\epsilon\dot{\epsilon}} \bar{\sigma}_\nu^{\dot{\epsilon}\eta} - \sigma_{\chi\dot{\alpha}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\nu\epsilon\dot{\epsilon}} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\epsilon}\eta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta_\delta^\alpha C^{\beta\delta} - \frac{1}{8} [C^{\alpha\delta} \epsilon_{\delta\eta} \epsilon^{\beta\eta} + 2C^{\alpha\delta} \epsilon_{\delta\eta} \epsilon^{\beta\eta}] \end{aligned}$$

e como $C^{\alpha\beta}$ é simétrico, então

$$\Rightarrow C^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \sigma_\alpha^{\mu\nu}{}^\beta C_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Desenvolvendo isso,

$$2\epsilon_{\gamma\alpha} C^{\alpha\beta} = \sigma_\gamma^{\mu\nu}{}^\beta C_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

que pode ser usado pra calcular $|C|^2 \equiv C^{\mu\nu} C_{\mu\nu}$, daí

$$|C|^2 \equiv C^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 2\epsilon_{\alpha\delta} \epsilon_{\beta\gamma} C^{\alpha\beta} C^{\delta\gamma} = 4(C^{11} C^{22} - C^{12} C^{21}) \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow |C|^2 \equiv C^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 4 \det C \quad (3.21)$$

Se propuséssemos a possibilidade mais direta: $[x^\mu, x^\nu] = [x^\mu, \theta^\alpha] = 0$, isso nos dificultaria na definição dos campos quirais e antiquirais, pois as derivadas ordinárias D e $\bar{D}$ não são mais derivadas sobre o superspaço. Por isso, usaremos

$$y^\mu = x^\mu + i\theta \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \quad (3.22)$$

acompanhado com as relações de comutação restantes

$$[y^\mu, y^\nu] = [y^\mu, \theta^\alpha] = [y^\mu, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}] = 0. \quad (3.23)$$

Com esta escolha, temos os comutadores

$$\begin{aligned} [x^\mu, \theta^\alpha] &= [y^\mu - i\theta^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\gamma}}, \theta^\alpha] = i\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu (\theta^\gamma \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} + \theta^\alpha \theta^\gamma \bar{\theta}^{\dot{\gamma}}) \\ &\Rightarrow [x^\mu, \theta^\alpha] = iC^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} [x^\mu, x^\nu] &= [y^\mu - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, y^\nu - i\theta^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\gamma}}] \\ &= -\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\nu (\theta^\gamma \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \theta^\alpha \theta^\gamma \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\gamma}}) \\ &= -\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\eta\dot{\eta}}^\nu C^{\gamma\alpha} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \epsilon_{\gamma\beta} \epsilon^{\beta\eta} \\ &= \frac{1}{2} C^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} (\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}\beta} + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}} \epsilon^{\beta\delta} \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\nu) \\ &= \frac{1}{4} C^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} \bar{\theta} \bar{\theta} \left(\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}\beta} - \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\nu \epsilon^{\dot{\delta}\dot{\alpha}} (\epsilon_{\alpha\epsilon} \epsilon^{\epsilon\eta}) \sigma_{\eta\dot{\alpha}}^\mu \epsilon^{\beta\delta} \right) \\ &= \frac{1}{4} C^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} \left(\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\beta} \right) \bar{\theta} \bar{\theta} \\ &\Rightarrow [x^\mu, x^\nu] = \bar{\theta} \bar{\theta} C^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Devido as relações de comutação acima, quando expressamos as funções sobre o superspaço em termos dos parâmetros $y, \theta, \bar{\theta}$ e usamos o produto estrela 3.4, então as derivadas com respeito a θ , neste produto, devem ser a y e $\bar{\theta}$ fixos, pois todos os (anti)comutadores são zero, exceto $\{\theta, \theta\}$. Com esta convenção, nossas derivadas $\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}})$ em relação a $\theta(\bar{\theta})$ são para y e $\bar{\theta}(\theta)$ fixos, então as expressões para a derivada covariante não devem ser alteradas

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (3.26)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \quad (3.27)$$

isto é, as expressões padrão ainda são válidas. E, os anticomutadores entre os operadores $D, \bar{D}$ ainda são como no espaço comutativo, isto é, para $C = 0$

$$\{D^\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (3.28)$$

$$\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \quad (3.29)$$

Da mesma forma, podemos expressar os operadores de supercarga da teoria comutativa em termos de y, θ e $\bar{\theta}$, e usá-los, sem maiores problemas, para o nosso caso

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \quad (3.30)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad (3.31)$$

tal que $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ e $\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}$ são derivadas consideradas a y fixo. Posto isso, obtemos que os operadores derivada $D, \bar{D}$ e de supercarga $Q, \bar{Q}$ anticomutam entre si

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0, \quad (3.32)$$

assim como no espaço comutativo ($C = 0$). E novamente, as seguintes anticomutações entre os operadores de $Q, \bar{Q}$:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \quad (3.33)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot\alpha}, Q_\alpha\} = 2i\sigma_{\alpha\dot\alpha}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (3.34)$$

também são como no espaço comutativo.

De todas as anticomutações acima, envolvendo os operadores derivadas e de supercarga $D, \bar{D}, Q, \bar{Q}$, respectivamente:

$$\{D, D\} = \{D, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = 0 \quad (3.35)$$

$$\{\bar{D}, \bar{D}\} = \{\bar{D}, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0 \quad (3.36)$$

$$\{Q, Q\} = 0 \quad (3.37)$$

$$\{Q, \bar{Q}\} = -\{D, \bar{D}\} = 2i\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \quad (3.38)$$

apenas o anticomutador

$$\{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = -4\{\theta^\alpha, \theta^\beta\}\sigma_{\alpha\dot\alpha}^\mu\sigma_{\beta\dot\beta}^\nu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \quad (3.39)$$

$$\Rightarrow \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = -4C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot\alpha}^\mu\sigma_{\beta\dot\beta}^\nu \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \quad (3.40)$$

difere da teoria comutativa, pois dentre os operadores $D, \bar{D}, Q, \bar{Q}$, o operador $\bar{Q}$ é único que apresenta o parâmetro θ , sendo assim $\{\bar{Q}, \bar{Q}\}$ também é o único comutador que contribue com $\{\theta, \theta\} = C$. Obviamente, devido a essa dependência que $\bar{Q}$ tem de θ , o produto estrela não é invariante sob ele, e por isso $\bar{Q}$ não é uma simetria sobre o superespaço não-anticomutativo.

Mas como Q ainda é uma simetria do espaço,

$$\begin{aligned} Q_\gamma[f(\theta) * g(\theta)] &= \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}[f(\theta) * g(\theta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \left[f(\theta) \left(1 - \frac{C^{\alpha\beta}}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} - \det C \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta\theta} \right) g(\theta) \right] \\ &\Rightarrow Q_\gamma[f(\theta) * g(\theta)] = [Q_\gamma f(\theta)] * g(\theta) + \sigma(f)f(\theta) * [Q_\gamma g(\theta)], \end{aligned}$$

tal que $\sigma(f)$ é o sinal de $f(\theta)$, ou seja, se f é bosônica, $\sigma(f) = 1$ e se f é fermiônica, $\sigma(f) = -1$, pois note que o produto estrela 3.4 é invariante sob Q , então só “metade” da supersimetria $\mathcal{N} = 1$ é quebrada, e denominamos a simetria Q não quebrada como uma supersimetria $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$.

Poderíamos ainda generalizar o superespaço de forma a não considerar deformações dos comutadores de $\bar{\theta}$, o que nos diz que os comutadores entre $D, \bar{D}$ continuam sendo os padrões, mas em vez disso, considerar as seguintes deformações dos comutadores 3.23 em y restantes:

$$[y^\mu, y^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \quad [y^\mu, \theta^\alpha] = \Psi^{\mu\alpha}, \quad (3.41)$$

tal que $\Theta^{\mu\nu}, \Psi^{\mu\alpha}$ são c-números comutantes e anticomutantes, respectivamente, que independem de y, θ e $\bar{\theta}$. No entanto, não o faremos aqui, mas consideraremos $\Theta^{\mu\nu} = \Psi^{\mu\alpha} = 0$.

Observe que $\Theta^{\mu\nu}$ nos fornece uma não-comutatividade padrão [10], como na teoria de campos sobre o espaço-tempo não-comutativo.

3.2 Supercampos Quirais

Assim como foi feito na teoria comutativa, definiremos supercampos quirais, que serão usados para construir a lagrangeana de matéria.

Os supercampos quirais, definidos pelo vínculo $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = -\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}} = 0$, resultam independentes de $\bar{\theta}$. E como solução geral, temos que Φ escrito em termos de componentes é dado por

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y), \quad (3.42)$$

que é ordenada por Weyl, pois

$$\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha = -\theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^1, \quad (3.43)$$

O produto estrela Moyal padrão 3.4 de dois supercampos quirais $\Phi_1(y, \theta)$ e $\Phi_2(y, \theta)$, usando os resultados 3.11 -3.14, nos dá

$$\begin{aligned} \Phi_1(y, \theta) * \Phi_2(y, \theta) &= \left[A_1 + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_{\alpha 1}(y) + \theta\theta F_1(y) \right] \\ &* \left[A_2 + \sqrt{2}\theta^\beta\psi_{\beta 2}(y) + \theta\theta F_2(y) \right] \\ &= \left\{ A_1 A_2 + \sqrt{2}\theta^\alpha (A_1 \psi_{\alpha 2} + \psi_{\alpha 1} A_2) \right. \\ &+ \left. \theta\theta \left[A_1 F_2 - 2\psi_{\alpha 1} \left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta} \right) \psi_{\beta 2} + F_1 A_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
& - 2\psi_{\alpha 1} \left(\frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \right) \psi_{\beta 2} - \sqrt{2} \psi_{\alpha 1} (C^{\alpha\beta} \theta_{\beta}) F_2 \\
& + \sqrt{2} F_1 (-C^{\beta\gamma} \theta_{\gamma}) \psi_{\beta 2} + F_1 (-\det C) F_2 \\
\Rightarrow \Phi_1(y, \theta) * \Phi_2(y, \theta) & = \Phi_1(y, \theta) \Phi_2(y, \theta) - C^{\alpha\beta} \psi_{\alpha 1}(y) \psi_{\beta 2}(y) \quad (3.45) \\
& + \sqrt{2} C^{\alpha\beta} \theta_{\beta} (\psi_{\alpha 1}(y) F_2(y) - \psi_{\alpha 2}(y) F_1(y)) \\
& - \det C F_1(y) F_2(y).
\end{aligned}$$

Observamos, então, que o produto estrela de dois campos quirais é o produto dos mesmos na teoria comutativa mais termos lineares e um termo quadrático(isto é, $\det C$) em $C^{\alpha\beta}$.

De forma análoga, supercampos anti-quirais satisfazem $D_{\alpha} \bar{\Phi} = 0$, o que significa que ele depende somente dos parâmetros $\bar{\theta}$ e $\bar{y}^{\mu} = y^{\mu} - 2\theta^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$,

$$\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) = \bar{A}(\bar{y}) + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}(\bar{y}) + \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{F}(\bar{y}). \quad (3.46)$$

Usando 3.11- 3.14 para calcularmos o comutador $[\bar{y}, \bar{y}]$, obtemos

$$\begin{aligned}
[\bar{y}^{\mu}, \bar{y}^{\nu}] & = \left[y^{\mu} - 2i\theta^{\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, y^{\nu} - 2i\theta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \right] \\
& = -4\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\nu} (\theta^{\beta} \theta^{\alpha} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \theta^{\alpha} \theta^{\beta} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}) \\
& = 4\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} (\epsilon_{\beta\gamma} \epsilon^{\gamma\delta}) (\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}) \sigma_{\delta\dot{\delta}}^{\nu} (C^{\alpha\beta}) \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta} \bar{\theta} \right) \\
& = 4\bar{\theta} \bar{\theta} C^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \frac{1}{4} \left(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\gamma} + \sigma_{\eta\dot{\alpha}}^{\mu} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}} \epsilon^{\gamma\delta} \sigma_{\delta\dot{\delta}}^{\nu} (\epsilon_{\alpha\epsilon} \epsilon^{\epsilon\eta}) \right) \\
& = 4\bar{\theta} \bar{\theta} C^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \frac{1}{4} \left(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\gamma} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma} \right) \\
\Rightarrow [\bar{y}^{\mu}, \bar{y}^{\nu}] & = 4\bar{\theta} \bar{\theta} C^{\mu\nu}, \quad (3.47)
\end{aligned}$$

que é ordenado em $\bar{\theta}$. Daí, os supercampos $\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta})$ também podem ser ordenados. Podemos ordená-lo em termos de θ e $\bar{\theta}$, expressando Φ em termos de y, θ e $\bar{\theta}$, e ordenando por Weyl os θ 's, usando 3.17,

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) & = \bar{\Phi}(y - 2i\theta\sigma\bar{\theta}, \bar{\theta}) = \bar{A}(y) - 2i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{A}(y) \\
& - 2(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}) * (\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta})\partial_{\mu}\partial_{\nu}\bar{A}(y) \quad (3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{2} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \left[\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(y) - 2i\theta^{\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\mu} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_{\mu} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(y) \right] \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{F}(y) \\
\Rightarrow \bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) & = \bar{A}(y) + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}(y) - 2i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{A}(y) \\
& + \bar{\theta} \bar{\theta} [\bar{F}(y) + i\sqrt{2} \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\bar{\psi}(y) + \theta\theta\partial^2 \bar{A}]. \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Ou ainda, podemos ordenar os $\bar{y}$, pondo o supercampo Φ em termos de $\bar{y}$ e $\bar{\theta}$; e como ele não depende do parâmetro θ de forma explícita, então podemos

usar a regra de multiplicação:

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_1(\bar{y}, \bar{\theta}) * \bar{\Phi}_2(\bar{y}, \bar{\theta}) &= \left[\bar{A}_1(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_1(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{A}_1(y) \right. \\
&\quad + \left. \bar{\theta}\bar{\theta} \left(\bar{F}_1(y) + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\psi}_1(y) + \theta\theta\partial^2\bar{A}_1 \right) \right] \\
&\quad * \left[\bar{A}_2(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_2(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{A}_2(y) \right. \\
&\quad + \left. \bar{\theta}\bar{\theta} \left(\bar{F}_2(y) + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\psi}_2(y) + \theta\theta\partial^2\bar{A}_2 \right) \right] \\
&= \bar{\Phi}_1(\bar{y}, \bar{\theta})\bar{\Phi}_2(\bar{y}, \bar{\theta}) + 2\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^\mu}\bar{A}_1(\bar{y})\frac{\partial}{\partial\bar{y}^\nu}\bar{A}_2(\bar{y}) \\
&= \bar{\Phi}_1(\bar{y}, \bar{\theta})\bar{\Phi}_2(\bar{y}, \bar{\theta}) + 2\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^\mu}\bar{\Phi}_1(\bar{y}, \bar{\theta})\frac{\partial}{\partial\bar{y}^\nu}\bar{\Phi}_2(\bar{y}, \bar{\theta}) \\
\Rightarrow \bar{\Phi}_1(\bar{y}, \bar{\theta}) * \bar{\Phi}_2(\bar{y}, \bar{\theta}) &= \bar{\Phi}_1(\bar{y}, \bar{\theta}) \exp \left(2\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar{y}^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\bar{y}^\nu} \right) \bar{\Phi}_2(\bar{y}, \bar{\theta}), \quad (3.50)
\end{aligned}$$

de forma que a derivada $\frac{\partial}{\partial\bar{y}}$ é atuada a $\bar{\theta}$ fixo, mas não a y fixo como nas nossas convenções acima.

Desta forma, o anticomutador não-trivial das variáveis θ são implementados no produto estrela entre supercampo anti-quirais, analogamente ao caso quiral. E obtemos, como resultado, um supercampo antiquiral.

Uma extensão da lagrangeana de Wess-Zumino sobre esse superespaço não-anticomutativo pode ser escrita, utilizando esses supercampos quiral e antiquiral e o produto estrela, em sua forma mais simples como

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\bar{\Phi}\Phi + \int d^2\theta\left(\frac{1}{2}m\Phi*\Phi + \frac{1}{3}\Phi*\Phi*\Phi\right) + \int d^2\bar{\theta}\left(\frac{1}{2}\bar{m}\bar{\Phi}*\bar{\Phi} + \frac{1}{3}\bar{g}\bar{\Phi}*\bar{\Phi}*\bar{\Phi}\right). \quad (3.51)$$

Resolvendo separadamente cada termo da lagrangeana em termos da teoria comutativa, temos

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta\bar{\Phi}\Phi &= \int d^4\theta \left(\bar{A}(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{A}(y) \right. \\
&\quad + \left. \bar{\theta}\bar{\theta}[\bar{F}(y) + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\psi}(y) + \theta\theta\partial^2\bar{A}] \right) \\
&\quad * \left[A(y) + \frac{1}{4}C^{\mu\nu}\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial_\nu A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \right] \\
\Rightarrow \int d^4\theta\bar{\Phi}\Phi &= \int d^4\theta\bar{\Phi}\Phi(C=0). \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Usando a equação 3.45 e $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$, obtemos o termo seguinte da lagrangeana acima

$$\begin{aligned}\Phi(y, \theta) * \Phi(y, \theta) &= \Phi(y, \theta)\Phi(y, \theta)(C = 0) - \det CF(y)F(y) \\ \Rightarrow \int d^2\theta \Phi(y, \theta) * \Phi(y, \theta) &= \int d^2\theta \Phi(y, \theta)\Phi(y, \theta)(C = 0).\end{aligned}$$

Com este resultado, novamente a equação 3.45 e a expansão $f(y) = f(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu f(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square f(x)$, podemos expressar o último termo em Φ da lagrangeana como

$$\begin{aligned}\int d^2\theta \Phi * \Phi * \Phi &= \int d^2\theta [\Phi(y, \theta)\Phi(y, \theta) - \det CF(y)^2] * \Phi(y, \theta) \\ &= \int d^2\theta [\Phi(y, \theta)\Phi(y, \theta)\Phi(y, \theta) - \det CF(y)^2\Phi(y, \theta)] \\ \Rightarrow \int d^2\theta \Phi * \Phi * \Phi &= \int d^2\theta [\Phi(y, \theta) * \Phi(y, \theta) * \Phi(y, \theta) - (\det C)F(x)^3] \\ &\quad + \text{derivadas totais.}\end{aligned}\tag{3.53}$$

Dos termos calculados acima, apenas o último termo, $\int d^3\theta \Phi * \Phi * \Phi$, difere da teoria comutativa. Calcularemos agora os termos com $\bar{\Phi}$. Em termos de $\bar{y}$ e θ , usando as equações 3.49 e 3.50, e que $C^{\mu\nu}$ é antissimétrico, ganhamos

$$\int d^2\bar{\theta}\bar{\Phi} * \bar{\Phi} = \int d^2\theta \left[\bar{\Phi}\bar{\Phi} + 2\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\mu} \bar{A}(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\nu} \bar{A}(\bar{y}) \right] = \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}\bar{\Phi}(C = 0).\tag{3.54}$$

Com este resultado e tendo em mãos novamente as equações 3.50 e 2.137, calculamos o último termo

$$\begin{aligned}\int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi} * \bar{\Phi} * \bar{\Phi} &= \int d^2\bar{\theta} [\bar{\Phi}\bar{\Phi}(C = 0)] * \bar{\Phi} \\ &= \int d^2\bar{\theta} \left[\bar{\Phi}\bar{\Phi}\bar{\Phi} + 2\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu} \left(2\bar{A} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\mu} \bar{A} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\nu} \bar{A} \right) \right] \\ \Rightarrow \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi} * \bar{\Phi} * \bar{\Phi} &= \int d^2\bar{\theta} \bar{\Phi}\bar{\Phi}\bar{\Phi}(C = 0).\end{aligned}\tag{3.55}$$

Tendo em mão todos estes resultados, podemos enfim somá-los e escrever a lagrangeana de matéria para o superespaço não-anticomutativo em termos da lagrangeana da teoria comutativa, que é sobre o superespaço usual (anti)comutativo,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C = 0) - \frac{1}{3}g \det CF(x)^3 + \text{derivadas totais},\tag{3.56}$$

tal que a normalização usada é dada por A.45. A única contribuição à lagrangeana de Wess-Zumino acima que vem da não-anticomutatividade dos θ 's vem do termo $\int d^2\theta \Phi * \Phi * \Phi$.

Algo interessante que podemos perceber é que mesmo embora o espaço deformado não seja invariante de Lorentz

$$[x'^\mu, x'^\nu] = [\Lambda^\mu{}_\rho x^\rho, \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma] = (\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma C^{\rho\sigma}) \bar{\theta}\bar{\theta} \neq C^{\mu\nu} \bar{\theta}\bar{\theta} = [x^\mu, x^\nu], \quad (3.57)$$

obtemos a lagrangeana 3.51, que é, sim, invariante de Lorentz. A atuação dos Q e $\bar{Q}$ sobre os campos 3.42-3.49 não recebe contribuição devido a deformação não-anticomutativa do superespaço. Para analisar as simetrias da lagrangeana 3.51, é necessário examinar apenas as simetrias vindas do termo $\det CF(x)^3$. Assim,

$$Q(\det CF^3) = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\det CF^3) = 0, \quad (3.58)$$

nos diz que Q continua sendo uma simetria, enquanto que, devido a presença explícita do parâmetro θ no operador $\bar{Q}$,

$$\bar{Q}(\det CF^3) = \left(-\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) (\det CF^3) \quad (3.59)$$

$$= 2i\theta^\alpha \det C \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \cdot 3F^2 \frac{\partial F}{\partial y^\mu} \neq 0 \quad (3.60)$$

a simetria de $\bar{Q}$ é quebrada pela não-anticomutatividade dos θ 's (C não-nulo).

Um caso mais geral

De forma mais geral, podemos analisar o termo que depende de vários campos quirais Φ_i e de vários campos antiquirais $\bar{\Phi}_i$,

$$\int d^2\theta W(\Phi_i) + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}(\bar{\Phi}_i), \quad (3.61)$$

tal que W e $\bar{W}$ são polinômios. Sem perda de generalidade, analisaremos os monômios dados $W = \prod_i \Phi_{ni}$, $\bar{W} = \prod_i \bar{\Phi}_{ni}$. A comutatividade dos supercampos torna a ordem da multiplicação sem importância. Mais geralmente,

$$\Phi_1 * \Phi_2 \neq \Phi_2 * \Phi_1$$

$$\bar{\Phi}_1 * \bar{\Phi}_2 \neq \bar{\Phi}_2 * \bar{\Phi}_1,$$

que nos dá várias teorias não-comutativas para uma mesma teoria comutativa. E ocorre algo análogo a tentar escolher o ordenamento de operadores

mais conveniente para quantizar uma teoria clássica, o que pode ser feito de várias formas, gerando diversas teorias quânticas com hamiltonianos que diferem apenas por termos da ordem de $\hbar$.

De forma natural, podemos limitar nossa discussão ao produto simetrizado, isto é, não levando em conta nenhum termo da ordem de $\hbar$, onde aparece novos parâmetros. Analisando primeiro, sem nenhuma perda, o termo simetrizado $\int d^2\theta \bar{W}(\bar{\Phi}_i) = \int d^2\theta \bar{W} = \int d^2\theta \prod_i^* \bar{\Phi}_{ni}$, onde $\prod^*$ indica o produto estrela simetrizado, notamos que a equação 3.50 nos diz que toda potência de C está acompanhado com o fator $\bar{\theta}\bar{\theta}$, e como consequência este monômio é linear em C . Considerando ainda que C é antisimétrico sob a troca de campos quirais, o monômio considerado se anula quando simetrizado. E, portanto, $\int d^2\theta \bar{W}(\bar{\Phi}_i)$ não tem termos adicionais à teoria não-comutativa.

O outro termo $\int d^2\theta W(\Phi_i)$ dessa lagrangeana quiral mais geral é um tanto mais interessante. De forma análoga, considere aqui também, sem nenhuma perda, o monômio $W = \prod_i^* \Phi_{ni}$. Em particular, seja

$$W_2 = \prod_i^* \Phi_{ni} = \frac{1}{2}(\Phi_1 * \Phi_2 + \Phi_2 * \Phi_1), \quad (3.62)$$

de posse do resultado 3.45,

$$W_2(y, \theta) = \frac{1}{2}[\Phi_1(y, \theta)\Phi_2(y, \theta) + \Phi_2(y, \theta)\Phi_1(y, \theta)] \quad (3.63)$$

$$- \det C \frac{1}{2}[F_1(y)F_2(y) + F_2(y)F_1(y)], \quad (3.64)$$

seguindo a fórmula de recorrência que conhecemos

$$\mathcal{S}(\Phi_1 * \dots * \Phi_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left[\mathcal{S}(\Phi_1 * \dots * \hat{\Phi}_i * \dots * \Phi_{n+1}) \right] * \Phi_i, \quad (3.65)$$

tal que $\mathcal{S}(\Phi_1 * \dots * \Phi_{n+1})$ indica a soma simetrizada sobre as todas permutações de $\Phi_1 * \dots * \Phi_{n+1}$.

De outro modo, podemos usar 3.45 para expandir o monômio W em potências de C , no qual aparecem no máximo duas derivadas $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ agindo sobre cada Φ_n . Como para cada derivada $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ há um fator C associado e sabendo que simetrizando n no fator $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Phi_n$, devemos antissimetrizar o índice α , então há um número par de C 's antissimetrizados. E novamente, obtemos que a deformação da lagrangeana depende apenas de $\det C$.

Concluimos que toda a deformação de uma lagrangeana geral arbitrária depende somente de $\det C$, e apesar de C quebrar a invariância de Lorentz, a lagrangeana polinomial escrita somente com campos quirais e antiquirais é invariante de Lorentz.

3.3 Ação de Super-Yang-Mills Não-Anticomutativo

3.3.1 Super-Yang-Mills Não-Abeliano sem matéria em Superespaço Não-Anticomutativo

Construiremos uma lagrangeana para supercampos vetoriais com supersimetria não-anticomutativa.

Os campos de gauge são descritos pelo supercampo vetorial V auxiliar representado como matriz e que se transforma pela simetria de gauge como

$$e^V \rightarrow e^{V'} = e^{-i\bar{\Lambda}} e^V e^{i\Lambda}, \quad (3.66)$$

a diferença é que agora a multiplicação entre os supercampos é o produto estrela (Moyal) (e^V significa uma série de potências em V , onde cada termo é multiplicado usando o produto estrela). E a transformação de gauge infinitesimal pode ser encontrada

$$\delta e^V = -i\bar{\Lambda}e^V + ie^V\Lambda + O(\Lambda^2, \bar{\Lambda}^2), \quad (3.67)$$

onde Λ e $\bar{\Lambda}$ são os supercampos quiral e antiquiral, respectivamente, que efetuam a transformação de gauge e representados em termos de matrizes. Nossa teoria só será consistente se o produto de campos quirais também é quiral e o produto de campos antiquirais é antiquiral.

As expressões padrões para os supercampos força W_α quiral e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ antiquiral,

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha e^V \quad (3.68)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DDe^V\bar{D}_{\dot{\alpha}}e^{-V}, \quad (3.69)$$

tal que a multiplicação entre os supercampos são com o produto estrela, ainda podem ser usadas, pois satisfazem $\bar{D}_{\dot{\alpha}}W_\alpha = 0$ e $D_\alpha\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0$, respectivamente. Como na teoria comutativa, a transformação 3.66 resulta

$$\begin{aligned} W_\alpha \rightarrow W'_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}e^{-V'}D_\alpha e^{V'} = -\frac{1}{4}e^{-i\Lambda}\left(\bar{D}\bar{D}e^{-V}e^{i\bar{\Lambda}}e^{-i\bar{\Lambda}}D_\alpha e^V\right)e^{i\Lambda} \\ &\Rightarrow W_\alpha \rightarrow e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

pois $\Lambda(\bar{\Lambda})$ é (anti)quiral e satisfaz $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0$ ($D_\alpha\bar{\Lambda} = 0$), e analogamente

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \rightarrow \bar{W}'_{\dot{\alpha}} = e^{-i\bar{\Lambda}}\bar{W}_{\dot{\alpha}}e^{i\bar{\Lambda}} \quad (3.71)$$

ou ainda, temos a transformação de gauge infinitesimal

$$\begin{aligned}\delta W_\alpha &= W'_\alpha - W_\alpha = [1 - i\Lambda + \mathcal{O}(\Lambda^2)] W_\alpha [1 + i\Lambda + \mathcal{O}(\Lambda^2)] - W_\alpha \\ &= -i[\Lambda, W_\alpha],\end{aligned}\tag{3.72}$$

da mesma forma

$$\delta \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -i [\bar{\Lambda}, \bar{W}_{\dot{\alpha}}].\tag{3.73}$$

Assim como pomos várias componentes de V iguais a zero no gauge de Wess-Zumino para $C = 0$, permitido pela liberdade de gauge, podemos generalizar esse gauge e fazer o mesmo para a teoria não-comutativa

$$\begin{aligned}V(y, \theta, \bar{\theta}) &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\left(\lambda_\alpha(y) + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\gamma\dot{\gamma}}\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial_\mu A^\mu(y)] \\ &= V(y, \theta, \bar{\theta})(C = 0) - \frac{1}{4}i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\epsilon_{\alpha\beta}C^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\gamma\dot{\gamma}}\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\}.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Note que, por razões que ficarão claras mais adiante, o coeficiente de $\bar{\theta}\bar{\theta}$ difere da teoria comutativa por um termo linear em C .

Usando a escolha de gauge 3.74 e os resultados 3.11-3.14,3.17,

$$\begin{aligned}V^2 &= \left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} - \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\right)A_\mu A_\nu - i\{\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu, \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}\} + \theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} * \theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \\ &= \theta\theta\left[-\frac{1}{2}\theta\theta A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\right] - i\left[-\left(\frac{1}{2}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\right)(C^{\beta\gamma}\theta_\gamma)A_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}\right. \\ &\quad \left.- (-C^{\beta\gamma}\theta_\gamma)\left(\frac{1}{2}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}A_\mu\right] - \frac{1}{2}(\det C)\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\lambda}\bar{\lambda} \\ \Rightarrow V^2 &= \bar{\theta}\bar{\theta}\left[-\frac{1}{2}\theta\theta A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{i}{2}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda}\right],\end{aligned}\tag{3.75}$$

por causa da não-anticomutatividade, V^2 é sua expressão padrão mais uma deformação por meio de termos lineares e quadráticos em $C^{\alpha\beta}$.

Do mesmo modo que no gauge de Wess-Zumino, obtemos neste gauge que

$$V^3 = 0,$$

pois V^3 tem um fator $\bar{\theta}^3 = 0$.

Para que a escolha do gauge seja preservada sob a transformação de simetria infinitesimal 3.67 do supercampo vetorial e^V , então

$$\delta e^V = -i\bar{\Lambda}e^V + ie^V\Lambda\tag{3.76}$$

deve ter suas componentes que não são múltiplas de $\theta\bar{\theta}$, as quais não aparecem no gauge de Wess-Zumino, todas iguais a zero

$$\begin{aligned}
\delta e^V &= -i\bar{\Lambda}e^V + ie^V\Lambda \stackrel{3.49}{=} -i\left(\bar{A}(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{A}(y) \right. \\
&+ \left. \bar{\theta}\bar{\theta}[\bar{F}(y) + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\psi}(y) + \theta\theta\partial^2\bar{A}] \right) * \left[1 + (-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} \right. \\
&- \left. i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \cdot \left(\lambda_\alpha(y) + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial_\mu A^\mu(y)] \right) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left(-\frac{1}{2}\theta\theta A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{i}{2}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} \right) \Big] \\
&+ i\left[1 + \left(-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\lambda_\alpha(y) + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial_\mu A^\mu(y)] \right) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left(-\frac{1}{2}\theta\theta A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{i}{2}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} \right) \right] \\
&* \left(A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \right) = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
1 &: -i\bar{A}(y) + iA(y) = 0 \Rightarrow \bar{A}(\bar{y}) = A(\bar{y}) \\
\theta &: i\sqrt{2}\psi(y) = 0 \\
\bar{\theta} &: -i\sqrt{2}\bar{\psi} = 0 \\
\bar{\theta}\bar{\theta} &: -i\left(-\frac{1}{4}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \bar{F}(y) \right) + \frac{i}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} - \frac{1}{4}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \\
&- \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} + 2\left(-\frac{1}{2}C^{\mu\nu} \right) \partial_\mu\bar{A}A_\nu = 0 \Rightarrow \bar{F}(y) = iC^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{A}A_\nu \\
\theta\theta &: iF(y) = 0.
\end{aligned}$$

O que nos dá a transformação de simetria de gauge infinitesimal determinada pelos campos quiral e antiquiral, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\Lambda(y, \theta) &= -A(y) - \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta F(y) = -\varphi(y) \\
\bar{\Lambda}(\bar{y}, \theta) &= -\bar{A}(\bar{y}) - \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) - \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(\bar{y}) \\
&= -\varphi(\bar{y}) + \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\{\partial_\mu\varphi(\bar{y}), A_\nu(\bar{y})\} \\
&= -\varphi(y) + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi(y) - \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\varphi(y) \\
&- \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\{\partial_\mu\varphi, A_\nu\}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Observe que essa transformação só difere da teoria comutativa por um novo termo em $\bar{\Lambda}$ linear em C , o qual é necessário para que o gauge 3.74 seja preservado. Podemos analisar agora como essa transformação age sobre os campos componentes no gauge 3.74, que são as componentes restantes de δe^V . Então, se expandimos

$$\delta e^V = -i\bar{\Lambda}e^V + ie^V\Lambda \quad (3.78)$$

$$\delta V + \frac{1}{2}\delta(V^2) = -i\bar{\Lambda}(1 + V + \frac{V^2}{2}) + i(1 + V + \frac{V^2}{2})\Lambda, \quad (3.79)$$

em termos das componentes dos campos, resulta

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left[-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta A_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\delta\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\delta\lambda_\alpha + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu (\{\delta\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right. \right. \\ & + \left. \left. \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, \delta A_\mu\}) \right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(\delta D - i\partial_\mu\delta A^\mu) \right] + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} \left[\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{2}C^{\mu\nu} \right) \right. \\ & (A_\mu\delta A_\nu + \delta A_\mu A_\nu) + \frac{i}{2}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu ([\delta A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] + [A_\mu, \delta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]) \\ & - \left. \frac{1}{8}|C|^2(\delta\lambda\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\delta\bar{\lambda}) \right] = -i(-\varphi + 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi - \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\varphi \\ & - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\{\partial_\mu\varphi, A_\nu\}) * \left\{ 1 + [-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\bar{A}_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} \right. \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\lambda^\alpha + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - i\partial_\mu A^\mu) \left. \right] \\ & + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} \left[-\frac{1}{2}\theta\theta A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{i}{2}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu [A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} \right] \left. \right\} \\ & + i \left\{ 1 + \left[-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\bar{A}_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\lambda^\alpha + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right) \right. \right. \\ & + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - i\partial_\mu A^\mu) \left. \right] + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} \left[-\frac{1}{2}\theta\theta A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \right. \\ & + \left. \left. \frac{i}{2}\theta_\alpha C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu [A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} \right] \right\} * (-\varphi). \end{aligned}$$

Chegamos a seguinte lei de transformação para os campos de gauge A_μ e do gaugino λ ,

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \Rightarrow \delta A_\mu = -2\partial_\mu\varphi + i[\varphi, A_\mu] = -2\mathcal{D}_\mu\varphi \quad (3.80)$$

$$\theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \Rightarrow \delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = i[\varphi, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}] \quad (3.81)$$

A análise da componente $\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha$ exige o uso da relação

$$(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) * (\theta\theta\bar{\theta}_\alpha) \Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\beta} = - \frac{C^{\gamma\delta}}{2} \delta_\delta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} (\delta_\delta^\epsilon \bar{\theta}_\epsilon) \bar{\theta}_\alpha \Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\delta\beta} C^{\alpha\delta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu,$$

segue então

$$\begin{aligned} \bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha &\Rightarrow -i \left[\delta\lambda_\alpha + \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu (\{\delta\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} + \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, \delta A_\mu) \right] \\ &+ \frac{i}{4} \epsilon_{\gamma\alpha} C^{\gamma\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu ([\delta A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] + [A_\mu, \delta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]) \\ &= \varphi \left(\lambda_\alpha + \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} - \frac{1}{4} \epsilon_{\gamma\alpha} C^{\gamma\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu [A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] \right) \\ &+ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta} * \theta\theta\bar{\theta}_\alpha) \Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha} \cdot 2i\partial_\mu\varphi\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$- \left(\lambda_\alpha + \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} - \frac{1}{4} \epsilon_{\gamma\alpha} C^{\gamma\beta} \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu [A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] \right) \varphi \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -i \left\{ \delta\lambda^\alpha + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu [iA_\mu[\varphi, \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}] + (-2\partial_\mu\varphi + i[\varphi, A_\mu]) \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}] \right\} \\ &= \left[\varphi, \lambda_\alpha + \frac{1}{4} 2\epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu A_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}} \right] - i\epsilon_{\delta\alpha} C^{\gamma\delta} \sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu\varphi\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\ &\Rightarrow \delta\lambda_\alpha = i[\varphi, \lambda_\alpha]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

E finalmente, usando a equação 3.17 e o resultado para δA_μ , a análise da componente $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ resulta

$$\begin{aligned} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} &\Rightarrow \frac{1}{2} (\delta D - i\partial_\mu\delta A_\mu) - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (A_\mu\delta A_\nu + \delta A_\mu A_\nu) \\ &= \left[i\varphi \left(\frac{1}{2} D - \frac{i}{2} \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{4} A_\mu A^\mu \right) \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$- 2\partial_\mu\varphi A_\nu (\theta\sigma^\mu\bar{\theta} * \theta\sigma^\nu\bar{\theta}) \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + i\partial^2\varphi \quad (3.86)$$

$$- \frac{i}{2} \left[(D - i\partial_\mu A^\mu) - \frac{1}{2} A_\mu A^\mu \right] \varphi \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \delta D &= -\frac{1}{2} \partial_\mu[\varphi, A^\mu] - \frac{1}{2} \{A^\mu, \partial_\mu\varphi\} \\ &+ \frac{i}{4} (A^\mu\varphi A_\mu - A^\mu A_\mu\varphi + \varphi A_\mu A^\mu - A_\mu\varphi A^\mu) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{i}{2} [\varphi, D] + \frac{1}{2} [\varphi, \partial_\mu A^\mu] - \frac{i}{4} [\varphi, A_\mu A^\mu] + \partial_\mu\varphi A^\mu \\ &\Rightarrow \delta D = i[\varphi, D]. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Resumindo,

$$\delta A_\mu = -2\partial_\mu \varphi + i[\varphi, A_\mu] = -2\mathcal{D}_\mu \varphi, \quad (3.90)$$

$$\delta \lambda_\alpha = i[\varphi, \lambda_\alpha], \quad (3.91)$$

$$\delta \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = i[\varphi, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}], \quad (3.92)$$

$$\delta D = i[\varphi, D], \quad (3.93)$$

que são as mesmas transformações da teoria de gauge padrão.

A intenção de encontrar um gauge que sob uma transformação de simetria infinitesimal, seus campos componentes se transformassem como em teoria de gauge padrão, nos levou a definir o gauge análogo ao de Wess-Zumino como em 3.74, com o termo adicional linear em C no coeficiente de $\bar{\theta}\bar{\theta}\theta$.

Procuraremos agora calcular no gauge de Wess-Zumino generalizado 3.74 o campo de força W_α . Este gauge V tem um fator θ , presente também em $D_\alpha V$. Com isso em mãos, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} e^{-V} D_\alpha e^V &= \left(1 - V + \frac{1}{2}V^2\right) D_\alpha \left(1 + V + \frac{1}{2}V^2\right) \\ &= D_\alpha V + \frac{1}{2}(D_\alpha V * V + V * D_\alpha V) - V D_\alpha V + \mathcal{O}(V^3) \\ &\Rightarrow e^{-V} D_\alpha e^V = D_\alpha V + \frac{1}{2}[D_\alpha V, V], \end{aligned} \quad (3.94)$$

e por isso que, escolhendo o gauge 3.74,

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2(e^{-V} D_\alpha e^V) \\ &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2 \left\{ \left[-i\bar{\theta}\bar{\theta} \left(\lambda_\alpha + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{ \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu \} \right) \right. \right. \\ &\quad + \theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\theta} (D - i\partial_\mu A^\mu) - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu + 2i\theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\lambda} \Big] \\ &\quad + \left[-2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial A_\nu}{\partial y^\mu} - 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \theta\theta \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \frac{\partial \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}}{\partial y^\mu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[-i\theta\theta \left(\lambda_\alpha + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{ \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu \} \right) \right. \\ &\quad + \theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\theta} (D - i\partial_\mu A^\mu) - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu + 2i\theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\lambda} \\ &\quad - 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left(\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial A}{\partial y^\mu} - i\theta\theta \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \frac{\partial \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}}{\partial y^\mu} \right) \\ &\quad \left. \left. , \quad -\theta\sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\lambda_\alpha + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{ \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu \} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$+ \left. \frac{1}{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} (D - i \partial_\mu A^\mu) \right] \Bigg\}, \quad (3.96)$$

de forma que a multiplicação realizada nos comutadores acima é o produto estrela. Assim,

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha - \frac{i}{4} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} + \theta_\alpha (D - i \partial_\mu A^\mu) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \right) 2i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \theta^\beta \frac{\partial A_\nu}{\partial y^\mu} + i \theta \theta \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \frac{\partial \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}}{\partial y^\mu} \right) \\ &- \frac{1}{4} \bar{D}^2 \left(\frac{1}{2} [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu, \theta^\beta \bar{\theta}^{\dot{\beta}} A_\nu] \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu - \frac{i}{2} [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_\mu, \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}] \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \right. \\ &\left. - i [\theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}, \theta^\gamma \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} A_\mu] \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu - [\theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}, \theta \theta \bar{\theta}_{\dot{\gamma}} \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}] \right), \end{aligned}$$

usando as identidades anteriores (3.11-3.14) com o produto estrela, podemos calcular mais facilmente os comutadores acima, cuja multiplicação também é o produto estrela, então

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha - \frac{i}{4} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}\} + \theta_\alpha (D - \partial_\mu A^\mu) \\ &+ i \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \theta^\beta \frac{\partial A_\nu}{\partial y^\mu} + i \theta \theta \epsilon_{\gamma\beta} \frac{\partial \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}}{\partial y^\mu} \right) \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \theta^\beta [A_\mu, A_\nu] \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu - \frac{i}{2} \left(-\frac{1}{2} \theta \theta [A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] \right) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \right. \\ &\left. - i \left(-\frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} \{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} + \frac{1}{4} \theta \theta [\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu] \delta_\alpha^\gamma \right) \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu - (\theta_\beta C^{\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha} \bar{\lambda} \bar{\lambda}) \right] \end{aligned} \quad (3.97)$$

Usando a identidade A.14, isto é, $(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta = -(\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta - 2\eta \delta_\alpha{}^\beta$, enfim

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha^\beta D - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta} \left(\partial_\mu A_\nu + \frac{i}{4} [A_\mu, A_\nu] \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{\mu\nu}{}^\beta C_{\mu\nu} \bar{\lambda} \bar{\lambda} - i \delta_\alpha^\beta \partial_\mu A^\mu \right] \theta_\beta + \theta \theta \left[\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \left(\partial_\mu A_\nu + \frac{i}{4} [A_\mu, A_\nu] \right) \right], \end{aligned}$$

definindo o campo de força $F_{\mu\nu}$ e a derivada covariante $\mathcal{D}_\mu$, em uma dada normalização, por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{i}{2} [A_\mu, A_\nu] \quad (3.98)$$

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = \partial_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2} [A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}], \quad (3.99)$$

obtemos finalmente

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha^\beta D(y) - \sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \left(F_{\mu\nu}(y) + \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \bar{\lambda} \bar{\lambda}(y) \right) \right] \theta_\beta + \theta \theta \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y), \quad (3.100)$$

ou ainda, separando a parte da teoria comutativa dos novos termos que aparecem,

$$W_\alpha = W_\alpha(C=0) + \frac{1}{2} \sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} C_{\mu\nu} \bar{\lambda} \bar{\lambda} \theta_\beta, \quad (3.101)$$

usando 3.97,

$$W_\alpha = W_\alpha(C=0) + \epsilon_{\alpha\gamma} C^{\gamma\beta} \theta_\beta \bar{\lambda} \bar{\lambda}(y). \quad (3.102)$$

Obtemos então, apartir do resultado 3.80 , que a lei de transformação do campo de força $F_{\mu\nu}$ é

$$\delta F_{\mu\nu} = i[\varphi, F_{\mu\nu}], \quad (3.103)$$

como em teoria de gauge padrão, que é sobre o espaço comutativo. Uma convenção mais apropriada para o campo de gauge pode ser feita substituindo $V \rightarrow -2V$.

Usando 3.72, sob a transformação de gauge infinitesimal , W_α se transforma por 3.77 como na teoria de gauge padrão

$$\delta W_\alpha(y, \theta) = -i[\Lambda, W_\alpha] = i[\varphi(y), W_\alpha(y, \theta)]. \quad (3.104)$$

Campo anti-quiral de força $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$

A fim de calcular $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$, usamos o fato que no gauge 3.74 $V^3 = 0$, temos

$$e^V \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V} = -\bar{D}_{\dot{\alpha}} V + \frac{1}{2} [\bar{D}_{\dot{\alpha}} V, V] + \frac{1}{2} V (\bar{D}_{\dot{\alpha}} V) V, \quad (3.105)$$

tal que a multiplicação entre os supercampos é o produtos estrela. Apesar de o último termo não contribuir na teoria comutativa, ele é diferente de zero para C não nulo. Usando as equações 3.74 e 3.26, separando os termos adicionais da parte comutativa e levando em conta apenas os termos que contribuem,

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{4} D D e^V \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V} = -\frac{1}{4} D D \left(\bar{D}_{\dot{\alpha}} V - \frac{1}{2} [\bar{D}_{\dot{\alpha}} V, V] - \frac{1}{2} \bar{D}_{\dot{\alpha}} V V \right) \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\beta} + 2i \sigma_{\beta\dot{\gamma}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \\ &\quad \left[\left(\bar{D}_{\dot{\alpha}} V(C=0) - \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \theta^\epsilon C \sigma^\rho \{ \bar{\lambda}, A_\rho \} \right) + \left(-\frac{1}{2} [\bar{D}_{\dot{\alpha}} V(C=0), V(C=0)] \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left[-\theta^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\rho A_\rho + i\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, -\frac{i}{4}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\beta \epsilon_{\beta\delta} C^{\delta\epsilon} \sigma_{\epsilon\dot{\epsilon}}^\pi \{\bar{\lambda}^{\dot{\epsilon}}, A_\pi\} \right] \\
& - \frac{1}{2} \left[-\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\theta^\alpha \epsilon_{\alpha\gamma} C^{\gamma\delta} \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\rho \{\bar{\lambda}^{\dot{\delta}}, A_\rho\}, -\theta^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\pi \bar{\theta}^{\dot{\beta}} A_\pi + i\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} \right] \\
& - \frac{1}{2} V(C=0) * \bar{D}_{\dot{\alpha}} V(C=0) * V(C=0) \Big],
\end{aligned}$$

está claro que o produto nos comutadores acima é o produto estrela $*$, separando o termos adicionais a teoria comutativa do comutador de dois termos que aparecem na mesma,

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{\dot{\alpha}} = & -\frac{1}{4} DD\bar{D}_{\dot{\alpha}} V(C=0) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\bar{\theta} \left[\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\nu C^{\gamma\delta} \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\rho \partial_\nu \{\bar{\lambda}^{\dot{\delta}}, A_\rho\} \right] \\
& + \frac{1}{8}\epsilon^{\sigma\delta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\delta} + 2i\sigma_{\delta\dot{\delta}}^\rho \bar{\theta}^{\dot{\delta}} \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\sigma} + 2i\sigma_{\sigma\dot{\gamma}}^\pi \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial y^\pi} \right) \\
& \left[[\bar{D}_{\dot{\alpha}} V, V](C=0) + \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \{A_\mu, A_\nu\} \right. \\
& - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu (C^{\alpha\beta} \theta_\beta) \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \{A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\} + \frac{i}{2} C^{\alpha\beta} \bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \{A_\mu, \lambda_\beta\} \\
& - \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}\bar{\theta} (C^{\alpha\beta} \theta_\beta) \{A_\mu, D - i\partial_\nu A^\nu\} + i\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu (C^{\beta\gamma} \theta_\gamma) \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, A_\nu\} \\
& - (det C) \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\} + \bar{\theta}\bar{\theta} (C^{\beta\gamma} \theta_\gamma) [\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \lambda_\beta] - \frac{i}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} (det C) [\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, D - i\partial_\nu A^\nu] \\
& + iC^{\alpha\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \left(\frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \right) \{\lambda_\alpha, A_\nu\} + 2(C^{\alpha\beta} \theta_\beta) \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} [\lambda_\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}] \\
& - (C^{\beta\gamma} \theta_\gamma) \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu \left(\frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \right) \{D - i\partial_\mu A^\mu, A_\nu\} \\
& - i(det C) \left(-\frac{1}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \right) [D - i\partial_\mu A^\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}] \\
& + \frac{1}{8} \bar{\theta}\bar{\theta} \left(-\frac{i}{8} \sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\rho C^{\gamma\epsilon} \sigma_{\epsilon\dot{\epsilon}}^\pi (-4) [A_\rho, \{\bar{\lambda}^{\dot{\epsilon}}, A_\pi\}] \right. \\
& + \frac{i}{8} C^{\beta\gamma} \sigma_{\delta\dot{\delta}}^\rho \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\pi (-4) [\{\bar{\lambda}^{\dot{\delta}}, A_\rho\}, A_\pi] \Big) \\
& + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \left[\left(-\frac{i}{2} C^{\beta\alpha} \right) \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\dot{\gamma}} \theta\theta A_\mu A_\nu \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}} \right. \\
& + i(C^{\beta\delta} \theta_\delta) \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\rho \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} A_\mu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\rho \\
& \left. - (C^{\alpha\delta} \theta_\delta) \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\rho \theta^\gamma \bar{\theta}^{\dot{\gamma}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} A_\nu A_\rho + i(det C) \theta\theta \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}_{\dot{\gamma}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}} \right],
\end{aligned}$$

juntando os termos em V , obtemos o campo antiquiral $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ no espaço comutativo, e observe adiante que os termos restantes, isto é, adicionais a teoria comutativa, são componente apenas de $\bar{\theta}\bar{\theta}$ e são lineares ou quadráticos em C ,

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \bar{W}_{\dot{\alpha}}(C=0) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ (C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\mu}) \left[\partial_{\nu}\{\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}, A_{\mu}\} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\{A_{\nu}, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\} \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\{A_{\nu}, \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\} + \frac{i}{4} \left(2A_{\nu}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}A_{\mu} + 2A_{\nu}A_{\mu}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} - 2\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}A_{\mu}A_{\nu} - 2A_{\mu}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}A_{\nu} \right. \\ &\quad \left. \left. - 2A_{\mu}A_{\nu}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} + 2\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}A_{\nu}A_{\mu} \right) \right] \\ &\quad + \left(C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^{\nu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\mu}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \right) \left[\frac{1}{2}\partial_{\nu}\{\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, A_{\mu}\} + \frac{1}{2}\partial_{\nu}\{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, A_{\mu}\} - \frac{i}{2}A_{\mu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}A_{\nu} \right] \\ &\quad \left. + i(det C)\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \right\},\end{aligned}$$

notando que o termo que multiplica a expressão $C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^{\mu}$ é antissimétrico nos índices μ, ν , podemos separar esta expressão em sua parte simétrica e antissimétrica, com isto só restará a componente antissimétrica dessa expressão. Calculando também em termos de suas componentes espinoriais o termo $\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}$,

$$\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} = \bar{\lambda}^{\dot{1}}\bar{\lambda}_{\dot{1}}\bar{\lambda}_{\dot{1}} + \bar{\lambda}^{\dot{2}}\bar{\lambda}_{\dot{1}}\bar{\lambda}_{\dot{2}} = -(\bar{\lambda}_{\dot{1}}\bar{\lambda}^{\dot{1}} + \bar{\lambda}_{\dot{2}}\bar{\lambda}^{\dot{2}})\bar{\lambda}_{\dot{1}} - \bar{\lambda}_{\dot{1}}(\bar{\lambda}_{\dot{1}}\bar{\lambda}^{\dot{1}} + \bar{\lambda}_{\dot{2}}\bar{\lambda}^{\dot{2}}) = -\{\bar{\lambda}_{\dot{1}}, \bar{\lambda}\bar{\lambda}\},$$

de forma análoga podemos calcular a componente $\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{2}}\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}$. Usando que

$$tr(\epsilon C \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu}) = tr[\epsilon C (-\eta^{\mu\nu} + 2\sigma^{\mu\nu})] = -2C^{\mu\nu}$$

e as definições, já expressas anteriormente,

$$F^{\mu\nu} := \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + \frac{i}{2}[A_{\mu}, A_{\nu}] \quad (3.106)$$

$$\mathcal{D}_{\mu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} := \partial_{\mu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}[A_{\mu}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}], \quad (3.107)$$

encontramos

$$\begin{aligned}\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \bar{W}_{\dot{\alpha}}(C=0) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ C^{\mu\nu} [\{F^{\mu\nu}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} + 2\{A_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} \right. \\ &\quad + \frac{i}{2} (A_{\nu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}A_{\mu} - A_{\mu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}A_{\nu} \\ &\quad - 2(A_{\mu}A_{\nu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - A_{\mu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}A_{\nu} + A_{\nu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}A_{\mu} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}A_{\nu}A_{\mu})) \\ &\quad \left. - (-2C^{\mu\nu}) \left[\{\mathcal{D}_{\nu}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, A_{\mu}\} + \frac{1}{2}\{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\nu} + \frac{i}{2}[A_{\nu}, A_{\mu}]\} \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{4} (2A_\nu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\mu - 2\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\nu A_\mu + 2A_\mu A_\nu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \\
& - (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\mu A_\nu - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - A_\nu A_\mu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}})) \\
& + i \frac{|C|^2}{4} (-\{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda} \bar{\lambda}\}) \Big\}
\end{aligned}$$

E como $C^{\mu\nu}$ é antissimétrico,

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \bar{W}_{\dot{\alpha}}(C=0) - \bar{\theta}\bar{\theta} \left[C^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \{F_{\mu\nu}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} + \{A_\nu, \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} \right) \right. \\
&+ \left. i \frac{|C|^2}{16} \{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda} \bar{\lambda}\} \right] + \frac{i}{8} \bar{\theta}\bar{\theta} [-4A_\nu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\mu - 2\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_\mu A_\nu - 2A_\mu A_\nu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}]
\end{aligned}$$

e ,então, finalmente encontramos o campo de força antiquiral $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \bar{W}_{\dot{\alpha}}(C=0) - \bar{\theta}\bar{\theta} \left[\frac{C^{\mu\nu}}{2} \{F_{\mu\nu}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} + C^{\mu\nu} \{A_\nu, \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{4} [A_\mu, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}]\} \right. \\
&+ \left. \frac{i}{16} |C|^2 \{\bar{\lambda} \bar{\lambda}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} \right]. \tag{3.108}
\end{aligned}$$

Calculemos agora a transformação de gauge infinitesimal deste campo antiquiral $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$, usando $\delta \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -i[\bar{\Lambda}, \bar{W}_{\dot{\alpha}}]$, onde a multiplicação é o produto estrela 3.50, veja também 3.77,

$$\begin{aligned}
\delta \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= i[\varphi(\bar{y}), \bar{W}_{\dot{\alpha}}]_* - \frac{1}{2} \bar{\theta}\bar{\theta} C^{\mu\nu} [\{\partial_\mu \varphi, A_\nu\}, \bar{W}_{\dot{\alpha}}] \\
&= i[\varphi(y), \bar{W}_{\dot{\alpha}}] + \bar{\theta}\bar{\theta} C^{\mu\nu} \left(2\{\partial_\nu \varphi, \partial_\mu \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} + \frac{i}{2} [\{\partial_\nu \varphi, A_\mu\}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}] \right),
\end{aligned}$$

onde nesta expressão: $[\cdot, \cdot]_*$ está denotando que o comutador é com produto estrela, caso contrário $C=0$, isto é, da teoria comutativa.

Para encontrar a lagrangeana precisamos dos termos $\int d^2\theta WW$ e $\int d^2\theta \bar{W}\bar{W}$, o que passaremos a calcular agora,

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta tr WW &= \int d^2\theta tr [\epsilon^{\alpha\beta} (W_\beta(C=0) + \epsilon_{\beta\gamma} C^{\gamma\delta} \theta_\delta \bar{\lambda} \bar{\lambda}) \\
&\quad (W_\alpha(C=0) + \epsilon_{\alpha\eta} C^{\eta\epsilon} \theta_\epsilon \bar{\lambda} \bar{\lambda})] \\
&= \int d^2\theta tr WW(C=0) \\
&- \int d^2\theta tr \left[(-i\sigma_\alpha^{\mu\nu} \gamma F_{\mu\nu}) \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\beta} \theta\theta C^{\alpha\beta} \bar{\lambda} \bar{\lambda} \right] \\
&- i \int d^2\theta tr \left[\frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \theta\theta \bar{\lambda} \bar{\lambda} \sigma_\alpha^{\mu\nu} \gamma F_{\mu\nu} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^2\theta d\theta \frac{1}{2} \epsilon_{\beta\delta} \epsilon_{\alpha\gamma} C^{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} \text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \\
\int d^2\theta \text{tr} WW & = \int d^2\theta \text{tr} WW (C=0) - i C^{\mu\nu} \text{tr}(F_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda}) + \frac{1}{4} |C|^2 \text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2,
\end{aligned}$$

da mesma forma, separando a parte comutativa de seus termos adicionais, podemos calcular o termo com o campo anti quiral $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$,

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta \text{tr} \bar{W} \bar{W} & = \int d^2\theta \{ \bar{W}_{\dot{\alpha}} (C=0) \\
& - \bar{\theta} \bar{\theta} C^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \{ F_{\mu\nu}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \} + \{ A_{\nu}, \mathcal{D}_{\mu} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{4} [A_{\mu}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}] \} + \frac{i}{16} C_{\mu\nu} \{ \bar{\lambda}\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \} \right] \} \\
& \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left\{ \bar{W}_{\dot{\beta}} (C=0) - \bar{\theta} \bar{\theta} C^{\rho\pi} \left[\frac{1}{2} \{ F_{\rho\pi}, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \} + \{ A_{\pi}, \mathcal{D}_{\rho} \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} - \frac{i}{4} [A_{\rho}, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}] \} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{i}{16} C^{\rho\pi} \{ \bar{\lambda}\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \} \right] \right\} \\
& = \int d^2\theta \text{tr}(\bar{W} \bar{W} (C=0)) - i C^{\mu\nu} \text{tr}[\{ F^{\mu\nu}, \bar{\lambda}\bar{\lambda} \} + \{ A_{\nu}, 2 \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} (\partial_{\mu} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}) \} \\
& + [\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \{ A_{\nu}, \frac{i}{4} [A_{\mu}, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] \}] + \frac{i}{8} C^{\mu\nu} \{ \bar{\lambda}\bar{\lambda}, \bar{\lambda}\bar{\lambda} \}) \\
& = \int d^2\theta \text{tr} WW (C=0) - i C^{\mu\nu} \text{tr} [(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + i[A_{\mu}, A_{\nu}]) \bar{\lambda}\bar{\lambda} \\
& + \frac{i}{4} C_{\mu\nu} (\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 + i \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_{\mu} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} A_{\nu}] + \text{derivadas totais},
\end{aligned}$$

mas como $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_{\mu}$ e $\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} A_{\nu}$ são campos fermiônicos,

$$\text{tr}[C^{\mu\nu} (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_{\mu}) (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} A_{\nu})] = \text{tr}[(C^{\mu\nu} (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_{\nu})) (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} A_{\mu})] = -\text{tr}[C^{\mu\nu} (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} A_{\mu}) (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} A_{\nu})] = 0. \quad (3.109)$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int d^2\bar{\theta} \text{tr} \bar{W} \bar{W} & = \int d^2\bar{\theta} \text{tr} \bar{W} \bar{W} (C=0) - i C^{\mu\nu} \text{tr} F_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{1}{4} |C|^2 \text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \\
& + \text{derivadas totais},
\end{aligned}$$

onde

$$C^{\mu\nu} \equiv C^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} \sigma_{\alpha}^{\mu\nu\gamma}.$$

E finalmente, encontramos a lagrangeana deformada para o supercampo vetorial no gauge de Wess-Zumino.

$$\mathcal{L} = i\tau \int d^2\theta \text{tr} WW - i\bar{\tau} \int d^2\bar{\theta} \text{tr} \bar{W} \bar{W} \quad (3.110)$$

$$= i\tau \int d^2\theta tr WW(C=0) - i\bar{\tau} \int d^2\bar{\theta} tr \bar{W}\bar{W}(C=0) \quad (3.111)$$

$$+ (i\tau - i\bar{\tau}) \left(-iC^{\mu\nu} tr F_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{|C|^2}{4} tr(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \right) \quad (3.112)$$

$$+ \text{derivadas totais.} \quad (3.113)$$

O fato de as deformações de $\int d^2\theta tr WW$ e de $\int d^2\bar{\theta} tr \bar{W}\bar{W}$ diferirem apenas por derivadas totais, nos diz que a lagrangeana é deformada apenas por um termo dependente de $Im\tau = \frac{4\pi}{g^2}$. Ou seja, a derivada total restante tem um fator $Re\tau = \frac{\theta}{2\pi}$. Estes valores da parte real e imaginária de τ vem da análise da parte clássica da lagrangeana acima,

$$\begin{aligned} \left(i\tau \int WW - i\bar{\tau} \int \bar{W}\bar{W} \right) \Big|_{class} &= (i\tau - i\bar{\tau}) \left(\int WW + \int \bar{W}\bar{W} \right) \Big|_{class} \\ &+ (i\tau + i\bar{\tau}) \left(\int WW - \int \bar{W}\bar{W} \right) \Big|_{class} \\ &= -(i\tau + i\bar{\tau}) \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &- (i\tau - i\bar{\tau}) \int \epsilon_{\mu\nu\pi\eta} F^{\mu\nu} F^{\pi\eta} \\ &= -\frac{4\pi}{g^2} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\theta}{2\pi} \int \epsilon_{\mu\nu\pi\eta} F^{\mu\nu} F^{\pi\eta}. \end{aligned}$$

Como a supersimetria não-quebrada $Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}$ se comporta como uma derivada (com y fixo), então podemos calcular como os campos componentes de W_α se transformam pelos geradores de supersimetria $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \delta W_\alpha &= \varepsilon^\beta Q_\beta W_\alpha \quad (3.114) \\ &= -i\delta\lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha^\beta \delta D - i\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \left(\delta F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} C_{\mu\nu} (\delta\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\delta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}) \right) \right] \theta_\beta \\ &+ \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \mathcal{D}_\mu \delta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\ &= \epsilon^\gamma \{ [\delta_\alpha^\beta D - i\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} (F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda})] \epsilon_{\beta\gamma} + 2\theta_\gamma \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \} \\ &= [\epsilon_\alpha D - i\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \epsilon_\beta (F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda})] - \epsilon\theta(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\nu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \end{aligned}$$

então componente a componente, temos

$$\delta\lambda_\alpha = i\varepsilon_\alpha D + \sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \varepsilon_\beta (F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} C_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda}) \quad (3.115)$$

$$\delta_\alpha^\beta \delta D - i\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \delta F_{\mu\nu} = \varepsilon^\beta (\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\gamma \sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\nu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (3.116)$$

$$\delta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (3.117)$$

Dáí, como $\sigma_\alpha^{\mu\nu}{}^\alpha = 0$, e usando A.20 e A.21, com os índices espinoriais subentendidos, onde ϵ_α é o espinor infinitesimal da transformação de supersimetria,

$$\delta D = \frac{1}{2}\epsilon(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)\sigma_\nu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda} = -\epsilon\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}.$$

Consequentemente,

$$i\sigma_\alpha^{\mu\nu}{}^\beta\delta F_{\mu\nu} = -\epsilon^\gamma\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}\delta_\alpha^\beta - \epsilon^\beta(-2\eta^\mu{}_\nu\delta_\alpha{}^\gamma)\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\nu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}},$$

temos que

$$\begin{aligned} (i\sigma_{\pi\rho\beta}{}^\alpha\sigma_\alpha^{\mu\nu}{}^\beta)\delta F_{\mu\nu} &= -(\epsilon\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda})(\delta_\alpha^\beta\sigma_{\pi\rho\beta}{}^\alpha) + 2\epsilon^\beta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\pi\rho\beta}{}^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\epsilon(\sigma_\pi\bar{\sigma}_\rho - \sigma_\rho\bar{\sigma}_\pi)\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}, \end{aligned}$$

usando A.24,

$$\begin{aligned} \left[-\frac{i}{2}(\delta_\pi^\mu\delta_\rho^\nu - \delta_\pi^\nu\delta_\rho^\mu) + \frac{1}{2}\epsilon_{\pi\rho}^{\mu\nu}\right]\delta F_{\mu\nu} &= \epsilon[\sigma_\rho\mathcal{D}_\pi\bar{\lambda} - \sigma_\pi\mathcal{D}_\rho\bar{\lambda} + i\epsilon_{\pi\rho}^{\mu\nu}\sigma_\nu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}] \\ \Rightarrow -i\delta F_{\pi\rho} + \delta\tilde{F}_{\pi\rho} &= \epsilon(\sigma_\rho\mathcal{D}_\pi - \sigma_\pi\mathcal{D}_\rho)\bar{\lambda} \\ &\quad - \frac{i}{2}\epsilon_{\pi\rho}^{\mu\nu}(\sigma_\mu\mathcal{D}_\nu - \sigma_\nu\mathcal{D}_\mu)\bar{\lambda}, \end{aligned}$$

onde o tensor $\tilde{F}$ é o dual do campo eletromagnético

$$\tilde{F}_{\pi\rho} = \frac{1}{2}\epsilon_{\pi\rho}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Logo,

$$\delta F_{\mu\nu} = i\epsilon(\sigma_\nu\mathcal{D}_\mu - \sigma_\mu\mathcal{D}_\nu)\bar{\lambda}. \quad (3.118)$$

Com este resultado, podemos ainda obter a lei de transformação para o campo de gauge A ,

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= \partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu + \frac{i}{2}[\delta A_\mu, A_\nu] + \frac{i}{2}[A_\mu, \delta A_\nu] \\ &= \partial_\mu(i\epsilon\sigma_\nu\bar{\lambda}) - \partial_\nu(i\epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda}) + \frac{i}{2}[A_\mu, i\epsilon\sigma_\nu\bar{\lambda}] + \frac{i}{2}[i\epsilon\sigma_\nu\bar{\lambda}, A_\nu], \end{aligned}$$

logo

$$\delta A_\mu = -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}\epsilon \quad (3.119)$$

Juntando todos os resultados obtidos acima, vemos que os campos se transformam como

$$\delta\lambda = i\varepsilon D + \sigma^{\mu\nu}\varepsilon(F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}C_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda}) \quad (3.120)$$

$$\delta A_\mu = -i\bar{\lambda}\bar{\sigma}\varepsilon \quad (3.121)$$

$$\delta F_{\mu\nu} = i\varepsilon(\sigma_\nu\mathcal{D}_\mu - \sigma_\mu\mathcal{D}_\nu)\bar{\lambda} \quad (3.122)$$

$$\delta D = -\varepsilon\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad (3.123)$$

$$\delta\bar{\lambda} = 0. \quad (3.124)$$

Das transformações de gauge acima o único efeito vindo da não-comutatividade está expresso no termo linear em C da transformação $\delta\lambda$.

3.3.2 Super-Yang-Mills Não-Abeliano com matéria em Superespaço Não-Anticomutativo

Se “adicionamos” as duas lagrangeanas anteriores: a lagrangeana de matéria que envolve somente componentes do campo quiral $\Phi \equiv (A, \psi, F)$ e a lagrangeana de gauge envolvendo apenas componentes do campo vetorial $V \equiv (A_\mu, \lambda, D)$, necessitamos adicionar o termo de interação, analogamente ao que é feito sobre o espaço comutativo, neste caso surgem termos adicionais devido a esta deformação do superespaço feita com o anticomutador dos θ 's. Assim, faremos algo análogo ao que foi no artigo [24], no entanto de forma independente.

Desta forma, o termo de interação deve ser calculado da mesma forma que os outros termos,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}e^V\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \left[\bar{A}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}\tilde{F}(\bar{y}) \right] * \exp \left[-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) \right. \\ &\quad - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\lambda_\alpha(y) + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu \{ \bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu \} \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} [D(y) - i\partial_\mu A^\mu(y)] \right] \\ &\quad * \left[A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \right] \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}, \end{aligned}$$

escrevendo $\bar{\Phi}$ em termos $y = \bar{y} + 2i\theta\sigma\bar{\theta}$ e multiplicando com $\exp(V)$ através do produto estrela

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}e^V\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \left[\bar{A}(y) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\bar{A}(y) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\theta}\bar{\theta} \left(\tilde{F}(y) + i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}(y) + \theta\theta\partial^2\bar{A}(y) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \left\{ 1 + \left[-\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) \right. \right. \\
& - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\lambda_\alpha(y) + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right) \\
& + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D(y) - i\partial_\mu A^\mu(y)) \left. \right] + \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} \left[-\frac{1}{2}\theta\theta A_\nu A^\nu - \frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \right. \\
& + \left. \frac{i}{2}\theta_\delta C^{\delta\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda} \right] \left. \right\} \\
& * \left[A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \right] \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}},
\end{aligned}$$

se escolhemos

$$\tilde{F}(\bar{y}) = \bar{F}(\bar{y}) + iC^{\mu\nu}\partial_\mu(\bar{A}A_\nu)(\bar{y}) - \frac{1}{4}C^{\mu\nu}\bar{A}A_\mu A_\nu(\bar{y}),$$

então obtemos o produto obtido na teoria comutativa mais termos adicionais lineares e quadráticos em C , como segue

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}e^V\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \left[\bar{\Phi}e^V(C=0) - \frac{i}{4}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\delta\epsilon_{\delta\beta}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu\bar{A}\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\} \right. \\
&+ iC^{\mu\nu}\partial_\mu(\bar{A}A_\nu) - \frac{1}{4}C^{\mu\nu}\bar{A}A_\mu A_\nu \\
&- i\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{A}A_\nu + 2C^{\alpha\beta}\theta_\beta\partial_\mu\bar{A}\bar{\theta}\bar{\lambda}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\
&+ \left. \frac{1}{2}\bar{A}\left(-\frac{1}{2}C^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + \frac{i}{2}\theta_\delta C^{\delta\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{8}|C|^2\bar{\lambda}\bar{\lambda}\right)\bar{\theta}\bar{\theta} \right] \\
&* \left[A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \right] \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}},
\end{aligned}$$

onde o primeiro termo acima é um resultado obtido na teoria comutativa, $C=0$,

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}e^V(C=0) &= \bar{A} + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}(-2i\partial_\mu\bar{A} - \bar{A}A_\nu) \\
&+ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \left(\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\frac{1}{2}\delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}A_\nu - i\bar{A}\lambda_\alpha + i\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \right) \\
&+ \theta\theta \left(-\frac{1}{2}\bar{A}A_\nu A^\nu \right) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F} + \theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \left(i\bar{A}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}A_\nu A^\nu \right) \\
&+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \left[\frac{1}{2}\bar{A}(D - i\partial_\nu A^\nu) - \frac{\sqrt{2}}{2}i\epsilon_{\delta\dot{\gamma}}\bar{\psi}^{\dot{\gamma}}\bar{\lambda}^{\dot{\delta}} - i\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{A}A_\nu \right. \\
&- \left. \frac{1}{2}\bar{F}A_\nu A^\nu + \partial^2\bar{A} \right],
\end{aligned}$$

separando novamente o resultado em que $C = 0$ de seus termos adicionais, e notando que

$$\bar{\Phi}e^V(C=0) * \Phi(C=0) = \bar{\Phi}e^V\Phi(C=0) + 0,$$

finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}e^V\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \bar{\Phi}e^V\Phi(C=0) + i\frac{\sqrt{2}}{8}C^{\beta\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^\mu\bar{A}\{\bar{\lambda}^{\dot{\gamma}}, A_\mu\}\psi_\beta \\ &+ iC^{\mu\nu}\partial_\mu(\bar{A}A_\nu)F - \frac{1}{4}C^{\mu\nu}\bar{A}A_\mu A_\nu F \\ &+ \left(-iC^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{A}A_\nu F - \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu\bar{A}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\psi^\gamma\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}C^{\mu\nu}\bar{A}A_\mu A_\nu F + \frac{i\sqrt{2}}{4}C^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{A}[A_\mu, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}]\psi_\alpha + \right. \\ &\left. - \frac{1}{8}|C|^2\bar{A}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F\right), \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde a multiplicação entre os supercampos foi feita com o produto estrela 3.4. Rearranjando os termos, e escrevendo-os de forma covariante

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}e^V\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \bar{\Phi}e^V\Phi(C=0) + iC^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{A}A_\nu F \\ &+ iC^{\mu\nu}\bar{A}\left(\partial_\mu A_\nu + \frac{i}{2}A_\mu A_\nu\right)F \\ &+ i\frac{\sqrt{2}}{8}C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{A}\left(\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}A_\mu + A_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + A_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}A_\mu\right)\psi_\beta \\ &- iC^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{A}A_\nu F + \frac{\sqrt{2}}{2}C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\left(-\partial_\mu\bar{A}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\psi_\beta\right) - \frac{1}{16}|C|^2\bar{A}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F \\ &= \bar{\Phi}e^V\Phi(C=0) + \frac{i}{2}C^{\mu\nu}\bar{A}F_{\mu\nu}F - \frac{1}{16}|C|^2\bar{A}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F \\ &- \frac{\sqrt{2}}{2}C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\left(\mathcal{D}_\mu\bar{A}\right)\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\psi_\beta, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}_\mu\bar{A} = \partial_\mu\bar{A} - \frac{i}{2}\bar{A}A_\mu$, o que nos dá novos vértices sobre o superespaço não-comutativo: vértices cúbicos, lineares em C ,

$$+ \frac{i}{2}C^{\mu\nu}\bar{A}F_{\mu\nu}F \quad (3.126)$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2}C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\left(\mathcal{D}_\mu\bar{A}\right)\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\psi_\beta \quad (3.127)$$

e um vértice quártico, quadrático em C ,

$$-\frac{1}{16}|C|^2\bar{A}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F. \quad (3.128)$$

Podemos agora escrever uma lagrangeana geral do campo de matéria com acoplamento mínimo com o campo de gauge

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\text{tr}(i\tau W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} - i\bar{\tau}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi^+ e^V \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (3.129)$$

onde a multiplicação é o produto estrela. Obtemos então que esta lagrangeana sobre o superespaço não-anticomutativo é lagrangeana supersimétrica sobre o espaço comutativo, mais alguns termos adicionais lineares e quadráticos em C , devido a deformação do superespaço feita com comutador $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}(C=0) + (i\tau - i\bar{\tau}) \left(-iC^{\mu\nu}\text{tr}F_{\mu\nu}\bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{|C|^2}{4}\text{tr}(\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \right) \\ & + \frac{i}{2}C^{\mu\nu}\bar{A}F_{\mu\nu}F - \frac{1}{16}|C|^2\bar{A}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F - \frac{\sqrt{2}}{2}C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu (\mathcal{D}_\mu\bar{A})\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\psi_\beta, \end{aligned}$$

onde o primeiro termo é conhecido

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(C=0) = & (i\tau - i\bar{\tau})\text{tr} \left(-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda + D^2 \right) \\ & + -\mathcal{D}_\mu\bar{A}\mathcal{D}^\mu A - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\mathcal{D}_\mu\psi + \bar{F}F \\ & + \frac{1}{2}\bar{A}DA + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{A}\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A). \end{aligned}$$

Como consta no artigo [24], esta Lagrangeana tem a supercarga Q_α conservada, enquanto que a supersimetria vinda de $\bar{Q}$ é quebrada, o que nos diz que, como esperavamos, a Lagrangeana tem supersimetria $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$.

Capítulo 4

Conclusões

Depois de fazermos uma revisão sobre supersimetria, ou seja, sobre um superespaço em que as variáveis adicionais ao espaço-tempo obedece a uma álgebra de grassmann no primeiro capítulo, no segundo capítulo introduzimos um superespaço não-comutativo, em que, agora, os parâmetros θ e $\bar{\theta}$ obedecem uma álgebra de Clifford, e escrevemos sobre este superespaço mais geral uma lagrangeana de matéria acoplada a um campo de super-Yang-Mills não-abeliano.

Iniciamos o primeiro capítulo com uma revisão sobre Yang-Mills, primeiro falando sobre teoria de gauge abeliana sob a qual a lagrangeana de maxwell do eletromagnetismo clássico é invariante. Depois de expormos uma teoria de gauge não-abeliana mais geral, escrevemos a lagrangeana de Yang-Mills que descreve a força eletrofraca. Na segunda seção deste capítulo, passamos a descrever o superespaço, quando adicionamos parâmetros grassmannianos ao espaço-tempo e, assim, construímos funções sobre este "espaço", as quais chamamos de supercampos. Obtemos supercampos interessantes quando impomos vínculos a eles, em particular, para $\mathcal{N} = 1$, obtemos os supercampos quirais e vetoriais; com os quais escrevemos as lagrangeanas de matéria e de gauge, respectivamente. Sendo que o supercampo quiral possui três campos componentes: o campo de matéria(férmion) ψ , o campo sférmion superparceiro A e um campo F auxiliar. O supercampo vetorial também possui três campos componentes: o campo de gauge(bóson) A_μ , o campo de gaugino superparceiro λ e um outro campo auxiliar D . Impondo as equações de Euler para os campos auxiliares, encontramos as lagrangeanas em termos apenas dos campos de matéria, de gauge e de seus respectivos superparceiros. Podemos desta forma, usando estes dois supercampos escrever uma lagrangeana que descreva a matéria acoplada com um campo de gauge.

No segundo capítulo, construímos algo análogo ao que foi feito no capítulo

anterior, no entanto sobre um superespaço não-anticomutativo, onde dada as constantes $C^{\alpha\beta}$, os parâmetros $\theta, \bar{\theta}$ já não obedecem uma álgebra de grassmann, mas a uma álgebra de Clifford

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

este comutador nos diz que os θ 's devem ser ordenados como

$$\frac{1}{2}[\theta^\alpha, \theta^\beta] = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta,$$

o que pode ser feito implementando o produto estrela 3.4. Disso, construímos as lagrangeanas de forma análoga ao que foi feito na teoria comutativa, no entanto usando o produto estrela como multiplicação, e assim encontrando termos adicionais que dependem dessa constante C . Para isso, aqui também vinculamos os supercampos, obtendo os supercampos quirais e vetorial; tal que para estes, generalizamos o gauge de Wess-Zumino para o caso não-anticomutativo de tal forma que as leis de transformação ainda são as transformações de gauge padrão e, como consequência, neste gauge V^3 ainda se anula como no caso anterior, onde $C = 0$. Enfim, assim como quando $C = 0$, com os supercampos quiral Φ e vetorial V , escrevemos as lagrangeanas de matéria e de gauge, que apresentam termos lineares e quadráticos adicionais às respectivas lagrangeanas do capítulo anterior, quando $C = 0$. Assim, à lagrangeana de matéria, encontramos o termo adicional $-\frac{1}{3}g \det C F^3$, a única correção da não-comutatividade e que surge de $\int d^2\theta \Phi * \Phi * \Phi$, que mantém a lagrangiana invariante de Lorentz, mesmo que o superespaço deixe de ser. Observamos também que a supersimetria do operador Q ainda é preservada, mas a simetria do operador $\bar{Q}$ é quebrada pela não-comutatividade, devido a esse termo adicional à lagrangeana de matéria; por esta razão chamamos a esta quebra de metade da supersimetria $\mathcal{N} = 1$, se referindo a supersimetria não-quebrada do operador Q como uma supersimetria $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$.

Já da teoria de gauge do segundo capítulo, vimos que o campo quiral de força W_α recebe um termo adicional a teoria (anti)comutativa que é linear em $C^{\alpha\beta}$

$$\epsilon_{\alpha\gamma} C^{\gamma\beta} \theta_\beta \bar{\lambda} \bar{\lambda}(y),$$

que mantém a transformação de gauge infinitesimal padrão. No entanto, o campo antiquiral $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ tem como termos adicionais apenas termos em $\bar{\theta}\bar{\theta}$ que são lineares e quadráticos em C , o que corrige sua transformação de gauge infinitesimal por um termo linear em $\bar{\theta}\bar{\theta}C^{\mu\nu}$. Escrevendo a lagrangeana do campo de gauge, encontramos que ela é deformada através da não-

comutatividade pelo termo adicional

$$(i\tau - i\bar{\tau}) \left(-iC^{\mu\nu} \text{tr} F_{\mu\nu} \bar{\lambda}\bar{\lambda} + \frac{|C|^2}{4} \text{tr} (\bar{\lambda}\bar{\lambda})^2 \right) + \text{derivadas totais}.$$

E, finalmente, independentemente, acoplamos os campos de matéria e de gauge; para isso “adicionamos”, como no capítulo anterior, as duas lagrangeanas e a estas o termo de acoplamento

$$\bar{\Phi} e^{tV} \Phi,$$

no entanto, considerando, como acima, a multiplicação como o produto estrela, que devido a não-comutatividade também nos fornece termos adicionais, que são vértices cúbicos lineares em $C^{a\beta}$:

$$+\frac{i}{2}C^{\mu\nu}\bar{A}F_{\mu\nu}F - \frac{\sqrt{2}}{2}C^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}(\mathcal{D}_{\mu}\bar{A})\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\psi_{\beta},$$

e um termo quártico quadráticos em C :

$$-\frac{1}{16}|C|^2\bar{A}\bar{\lambda}\bar{\lambda}F.$$

Pespectivas

Um resultado muito interessante que também poderia ser tratado a posteriori seria um trabalho de Ooguri e Vafa [17]. Nesse trabalho, é considerado o supercampo do gluino

$$\mathcal{W}_{\alpha} = \psi_{\alpha} + \dots \quad (4.2)$$

e o campo auto-dual do gravifóton

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\alpha'^2} \{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\}. \quad (4.3)$$

Por ora, levando em conta somente a presença do gravifóton, é encontrada uma função de correlação que satisfaz a álgebra de Clifford sobre a fronteira

$$: \theta^{\alpha}(\tau + \epsilon) \theta^{\beta}(\tau) + \theta^{\beta}(\tau) \theta^{\alpha}(\tau - \epsilon) := \{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\} = 2\alpha' F^{\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

que quebra parcialmente a supersimetria, mas recuperamos a supersimetria $\mathcal{N} = 1$ se modificamos a teoria por uma c-deformação, que é c-deformação ao campo ψ do gluino

$$\{\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}\} = 2F_{\alpha\beta}. \quad (4.5)$$

Ou seja, pode ser mostrado que a c-deformação do campo do gluino compensa o efeito do campo do gravifóton sobre as funções de correlação dos θ 's sobre a fronteira, e assim, restaura a anticomutatividade dos mesmos. Isto elimina o termo dependente de $F^{\alpha\beta}$ e recupera a álgebra de supersimetria padrão.

Todos os estudos recentes da teoria de campos supersimétrica não-anticomutativa depois dos artigos pioneiros [13], [14] e [15] estavam limitados supersimetria rígida, isto é, sem gravidade. Algo que pode ser estudado é efeito do campo de gravifóton sobre a supergravidade.

Algo muito interessante, que poderia ser explorado, seria considerar que as coordenadas fermiônicas $\theta, \bar{\theta}$ satisfariam uma álgebra graduada em Z_3 , como abordada no artigo hep-th/9607143v1 (1996), isto é, em vez de $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0$, teríamos a igualdade $\theta^3 = \bar{\theta}^3 = 0$, e daí a álgebra denominada *álgebra de hipersimetria*.

Então, analogamente ao que foi feito no artigo hep-th/0305248v1

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = C^{\alpha\beta},$$

consideraríamos $\theta^3 = \text{const} \neq 0$, assim, funções de θ seriam deformadas por termos dependentes desta constante.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Supersimetria

A.1.1 Notação

Usaremos as mesmas notações de [19], que estão em seu apêndice A e B. Um espinor de duas componentes com índices superiores com ponto e sem ponto se transformam sob uma transformação $M \in SL(2, C)$, como

$$\psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta \quad \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} = M^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \quad (\text{A.1})$$

$$\psi'^\alpha = M_\beta^{-1\alpha} \psi^\beta \quad \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} = (M^*)^{-1}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.2})$$

Espinores são indexados por índices gregos. Os índices sem ponto se transformam sob a representação $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz, enquanto os índices sem ponto se transformam sob representação conjugada $(0, \frac{1}{2})$.

A conexão entre $SL(2, C)$ e o grupo de Lorentz é estabelecida através das matrizes σ 's

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

em completa analogia a relação entre $SU(2)$ e o grupo de rotações.

Um espinor de Dirac Ψ_D , que tem quatro componentes, pode ser escrito em termos de dois espinores de Weyl ψ_α e $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$, cada um com duas componentes

$$\Psi_D = \Psi_L + \Psi_R, \quad (\text{A.5})$$

tal que

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}. \quad (\text{A.7})$$

E as matrizes γ^μ na representação de Weyl é escrita como

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{A.8})$$

Das equações acima vemos que as matrizes σ^m , expressas nas equações A.3, tem estrutura de índices

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu. \quad (\text{A.9})$$

Com estas convenções,

$$\psi\psi \equiv \psi^\alpha\psi_\alpha \quad \bar{\psi}\bar{\psi} \equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad \psi\sigma^m\bar{\psi} \equiv \psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\psi} \quad (\text{A.10})$$

são todos os escalares de Lorentz.

Espinores com índices superiores e inferiores podem ser baixados ou levantados através da “métrica antissimétrica” ϵ :

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \quad (\text{A.11})$$

tal que ϵ é dado por:

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

O tensor ϵ pode ser usado também para levantar os índices das matrizes σ 's

$$\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu. \quad (\text{A.13})$$

Das definições das matrizes σ 's, encontramos

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta = -2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha{}^\beta \quad (\text{A.14})$$

$$(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}, \quad (\text{A.15})$$

assim como as relações de completeza

$$Tr\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = -2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\sigma}_{\mu}^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}, \quad (\text{A.17})$$

que podem ser usadas para transformar um vetor em um biespinor e vice-versa:

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} v_{\mu}, \quad v^{\mu} = -\frac{1}{2} \bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} v_{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (\text{A.18})$$

Os geradores do grupo de Lorentz na representação de espinores são dados por

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta} &= \frac{1}{4} (\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta}) \\ \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= \frac{1}{4} (\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu} - \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Outras relações úteis envolvendo as matrizes σ são

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\rho} - \bar{\sigma}^{\rho} \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu} &= -2i\epsilon^{\mu\nu\rho\pi} \bar{\sigma}_{\pi} \\ \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\rho} - \sigma^{\rho} \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\mu} &= 2i\epsilon^{\mu\nu\rho\pi} \sigma_{\pi}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde $\epsilon_{0123} = -1$, também

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\rho} + \sigma^{\rho} \bar{\sigma}^{\nu} \sigma^{\mu} &= (\eta^{\mu\rho} \sigma^{\nu} - \eta^{\nu\rho} \sigma^{\mu} - \eta^{\mu\nu} \sigma^{\rho}) \\ \bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\rho} + \bar{\sigma}^{\rho} \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu} &= 2(\eta^{\mu\rho} \bar{\sigma}^{\nu} - \eta^{\nu\rho} \bar{\sigma}^{\mu} - \eta^{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\rho}). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$(\theta\phi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2}(\phi\psi)(\theta\theta) \quad (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\bar{\phi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) \quad (\text{A.22})$$

$$\theta\sigma^m\bar{\theta}\theta\sigma^n\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn} \quad (\text{A.23})$$

$$Tr\sigma^{mn}\sigma^{kl} = -\frac{1}{2}(\eta^{mk}\eta^{nl} - \eta^{ml}\eta^{nk}) - \frac{i}{2}\epsilon^{mnkl} \quad (\text{A.24})$$

$$\bar{\sigma}^n\sigma^m + \bar{\sigma}^m\sigma^n = -2\eta^{mn} \cdot 1$$

A.2 Importantes:

A.2.1 Alguns resultados usados no Capítulo 1

$$(-\theta\sigma^m\bar{\theta})(-i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n v_m) = -i\theta^{\alpha}\theta^{\gamma}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^n\partial_n v_m \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{i}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\sigma}^{\alpha\dot{\alpha}n}\partial_n v_m \quad (\text{A.26})$$

$$= -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^m v_m(y), \quad (\text{A.27})$$

$$(\sqrt{2}\theta^{\alpha}\psi_{\alpha})(\sqrt{2}\theta^{\beta}\psi'_{\beta}) = -2\theta^{\alpha}\theta^{\beta}\psi_{\alpha}\psi'_{\beta} = \theta\theta\epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\alpha}\psi'_{\beta} = -\theta\theta\psi\psi' \quad (\text{A.28})$$

•

$$\begin{aligned}
(i\theta\sigma^m\bar{\theta})(i\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_m\partial_n A(x) &= -\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_m\partial_n A(x) \quad (\text{A.29}) \\
&= \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\{\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m,\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\}\partial_m\partial_n A(x) \\
&= \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\delta^{mn}\partial_m\partial_n A(x) \\
&= \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

•

$$i\sqrt{2}\theta(\theta\sigma^m\bar{\theta})\partial_m\psi = i\sqrt{2}\theta^\alpha\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_m\psi_\alpha \quad (\text{A.31})$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi\sigma^m\bar{\theta}, \quad (\text{A.32})$$

Alguns Cálculos sobre Supercampos Quirais

1

$$(-i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*)(\sqrt{2}\theta\psi) = \sqrt{2}i\theta^\alpha\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m A^*\psi_\beta \quad (\text{A.33})$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m A^*\psi^\alpha \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\psi\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^* \quad (\text{A.35})$$

2

$$(\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi})(i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A) = -\sqrt{2}i\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\partial_m A \quad (\text{A.36})$$

$$= -\frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\partial_m A \quad (\text{A.37})$$

3

$$\begin{aligned}
(-i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i^*)(i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_j) &= (\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m A_i^*)(\theta^\gamma\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^n\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\partial_n A_j^*) \\
&= \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}^n\partial_m A_i^*\partial_n A_j \\
&= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m A_i^*\partial^m A_j \quad (\text{A.38})
\end{aligned}$$

4

$$(\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi})\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi_j\sigma^m\bar{\theta}\right) = -i\theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_i^{\dot{\gamma}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m\psi_j^{\alpha} \quad (\text{A.39})$$

$$= \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\psi_j^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.40})$$

$$= -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_j \quad (\text{A.41})$$

5

$$\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i\right)(\sqrt{2}\theta\psi_j) = i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^{\alpha}\theta^{\beta}\psi_{\beta j}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.42})$$

$$= \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_j \quad (\text{A.43})$$

A.2.2 Alguns resultados usados no capítulo 2

Se definimos os elementos de volume do superespaço por

$$\begin{aligned} d^2\theta &= -\frac{1}{4}d\theta^{\alpha}\theta^{\beta}\epsilon_{\alpha\beta} \\ d^2\bar{\theta} &= -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\ d^4\theta &= d^2d^2\bar{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

encontramos a normalização

$$\int \theta\theta d^2\theta = 1 \quad \int \bar{\theta}\bar{\theta} d^2\bar{\theta} = 1 \quad (\text{A.45})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Neveu e J. H. Schwarz, *Factorizable dual model of pions* Nucl Phys.**B31**, 86(1971); *Quark Model of Dual Pions* Phys. Rev.**D4**, 1109(1971)
- [2] P. Ramond, *Dual Theory for Free Fermions* Phys Rev.**D3**, 2415(1971)
- [3] Yu. A. Gol'fand e E. P. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P invariance* JETP Letters **13**, 323(1971).
- [4] J.-L. Gervais e B. Sakita, *Field Theory Interpretation of Supergauges in Dual Models* Nucl. Phys.**B34**, 632(1971).
- [5] D. V. Volkov e V. P. Akulov, *Is The Neutrino a Goldstone Particle?* Phys. Lett.**46B**, 109(1973).
- [6] Viktor Abramov, *Z3-graded analogues of Clifford algebras and generalization of supersymmetry* hep-th/9607241v1 ;*Hypersymmetry: a Z3-graded generalization of Supersymmetry* hep-th/9607143v1 (1996).
- [7] H. Georgi, *An Almost Realistic Gauge Hierarchy* Physics Letters B, Volume 108, Issues 4–5, Pages 283–284
- [8] A. Connes, *Non-Commutative Differential Geometry* Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 62(1985)
- [9] H. S. Snyder, *Quantized Space-Time*, Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [10] M. R. Douglas e N. A. Nekrasov, *Noncommutative Field Theory* Rev. Mod. Phys. 73, 977(2001)hep-th/0106048.
- [11] N. Seiberg e E. Witten, *String Theory and Noncommutative Geometry* JHEP 9909, 032(1999) hep-th/9908142.

- [12] Sergio Doplicher, Klaus Fredenhagen, John E. Roberts, *The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields* Commun.Math.Phys. 172 (1995) 187-220)hep-th/0303037.
- [13] S. Ferrara and M.A. Lledo, *Some Aspects of Deformations of Supersymmetric Field Theories* JHEP 0005(2000) 008 hep-th/0002084.
- [14] D. Klemm, S. Penati and L. Tamassia, *Non(anti)commutative Superspace* Class. and Quantum Grav.20(2003) 2905 hep-th/0104190.
- [15] N. Seiberg, *Noncommutative Superspace, $\mathcal{N} = \frac{1}{2}$ Supersymmetry, Field Theory and String Theory* hep-th/0305248v1.
- [16] N. Berkovits, N. Seiberg, *Superstrings in Graviphoton Background and $\mathcal{N} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ Supersymmetry* hep-th/0306226
- [17] H. Ooguri e C. Vafa, *The C-deformation of gluino and non-planar diagrams* Adv. Theor. Math. Phys.7(2003) 53. hep-th/0302109.
- [18] H. Ooguri and C. Vafa, *Gravity Induced C-Deformation* Adv. Theor. Math. Phys.7 (2004) 405. hep-th/0303063.
- [19] Wess, Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* .
- [20] D.Bailin e A.Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*
- [21] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* Second Edition
- [22] D.Bailin e A.Love, *Introduction to Gauge Field Theory* Revised edition.
- [23] M. E. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory*
- [24] T. Araki, K. Ito e A. Ohtsuka, *Supersymmetric Gauge Theories on Noncommutative Superspace* hep-th/0307076v3.