

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**Dinâmica de uma Vela Solar em Condições
Ressonantes com Perturbação da Pressão de
Radiação Solar. Caso de Mercúrio e Terra.**

João Pedro Fagionato Agostinho

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO - SP**

2023

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio Claro

João Pedro Fagionato Agostinho

**DINÂMICA DE UMA VELA SOLAR EM CONDIÇÕES
RESSONANTES COM PERTURBAÇÃO DA PRESSÃO
DE RADIAÇÃO SOLAR. CASO DE MERCÚRIO E
TERRA**

Rio Claro

2023

João Pedro Fagionato Agostinho

**DINÂMICA DE UMA VELA SOLAR EM CONDIÇÕES
RESSONANTES COM PERTURBAÇÃO DA PRESSÃO
DE RADIAÇÃO SOLAR. CASO DE MERCÚRIO E
TERRA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Rio Claro

2023

A275d

Agostinho, João Pedro Fagionato

Dinâmica de uma vela solar em condições ressonantes com perturbação da pressão de radiação solar. Caso de Mercúrio e Terra. / João Pedro Fagionato Agostinho. -- Rio Claro, 2024
78 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

1. Astronomia. 2. Mecânica Celeste. 3. Pressão de Radiação Solar. 4. Achatamento Planetário. 5. Ressonância. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

DINÂMICA DE UMA VELA SOLAR EM CONDIÇÕES RESSONANTES COM PERTURBAÇÃO DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR. CASO DE MERCÚRIO E TERRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Data de defesa: 08 de novembro de 2023

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Maria Helena Moreira Moraes
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rodolpho Vilhena de Moraes
FEG/UNESP/Guaratinguetá (SP)

Conceito: aprovado.

Rio Claro
2023

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todo apoio e carinho.

Ao professor Tadashi Yokoyama, pelo empenho e dedicação em fazer este trabalho acontecer.

À minha namorada Thaís, por todo apoio e paciência.

Aos meus amigos de Rio Claro: Pistola, Bioca, João, Japa, Divó, Minimim, Eddie, Pedro, Gugui e Pendrive. Por todos esses anos de amizade.

A todos os meus amigos de Piracicaba, do Anglo e do Piracicabano.

Ao meu querido amigo Allan Tomazella (em memória).

Aos meus avós, Dinho, Cynira e Ede (em memória).

Aos meus animais de estimação: Mimi, Jimi, Nero, Nina, Sansão e Aninha.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho aborda o estudo da dinâmica de sondas orbitando planetas internos rochosos, como Mercúrio e a Terra. Ele enfoca as influências significativas da Pressão de Radiação Solar (PRS), da perturbação gravitacional solar e da perturbação devido ao achatamento do planeta hospedeiro na trajetória das sondas. O ponto central é a investigação da dupla ressonância envolvendo termos da PRS, onde dois ângulos ressonantes independentes podem ocorrer. Para examinar essas ressonâncias, a função perturbadora foi expressa em termos de elementos médios, o que significa que ela foi calculada tomando a média dessa função apenas em relação à anomalia média da sonda. Foi desenvolvido também o sistema exato (cartesiano) a fim de validar o sistema médio via comparações com o mesmo.

Palavras-chave: Mercúrio, Terra, Pressão de Radiação Solar (PRS), perturbação gravitacional solar, achatamento do planeta, dupla ressonância, elementos médios, sistema exato.

ABSTRACT

This work addresses the study of the dynamics of probes orbiting rocky inner planets, such as Mercury and Earth. It focuses on the significant influences of Solar Radiation Pressure (SRP), solar gravitational disturbance, and disturbance due to the flattening of the host planet on the trajectory of the probes. The central point is the investigation of the double resonance involving SRP terms, where two independent resonant angles can occur. To examine these resonances, the disturbing function was expressed in terms of mean elements, which means that it was calculated by taking the average of this function only in relation to the probe's mean anomaly. The exact (Cartesian) system was also developed in order to validate the mean system through comparisons with it.

Keywords: Mercury, Earth, Solar Radiation Pressure (SRP), solar gravitational disturbance, planet flattening, double resonance, mean elements, exact system.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Duas massas pontuais em um sistema de coordenadas inercial $OXYZ$.	14
Figura 2 – Contribuição de um elemento de massa dm para o potencial.	16
Figura 3 – Geometria do problema (CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022)	22
Figura 4 – Sistema m_c, m_i e m_j com seus respectivos vetores posição em relação à origem O e também as outras massas (MURRAY; DERMOTT, 1999).	25
Figura 5 – Sistema Mercúrio-Sonda-Sol, onde M é Mercúrio, $M_\odot$ é o Sol e m a sonda.	27
Figura 6 – Incidência e reflexão dos fótons em uma Vela Solar.	30
Figura 7 – Sistema Mercúrio-Sonda-Sol. (TRESACO; ELIPE; CARVALHO, 2016).	32
Figura 8 – Triângulo esférico que relaciona o plano orbital do satélite com o plano de referência	36
Figura 9 – Comparação do sistema exato (preto) e médio (vermelho) para diferentes semieixos e inclinações usando $\beta = 1 \times 10^{-5}$ para todos os gráficos. Condições iniciais: $e = 0,01$, $w = 270^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22}	50
Figura 10 – Comparação do sistema exato (preto) e médio (vermelho) para diferentes semieixos e inclinações usando $\beta = 9 \times 10^{-5}$. Condições iniciais: $e = 0,01$, $w = 270^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22}	51
Figura 11 – Efeitos da pressão de radiação na dinâmica do satélite. Em preto utilizamos $\beta = 0$ e em vermelho $\beta = 1 \times 10^{-3}$. Condições iniciais: $a = 4392,0$ km, $e = 0,05$, $i = 63,2^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 30^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22}	52
Figura 12 – Efeitos da PRS na dinâmica do satélite próximo à inclinação crítica. Em preto não há presença da PRS ($\beta = 0$) e em vermelho há pressão de radiação ($\beta = 9 \times 10^{-5}$). Condições iniciais: $a = 3500,0$ km, $e = 0,01$, $i = 63,2^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22}	53
Figura 13 – Algumas órbitas de satélites próximo a inclinação crítica para diferentes altitudes. A linha preta tracejada representa o limite de e para impacto. Condições iniciais: $e = 0,01$, $w = 90^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ e $I = 65^\circ \dots 70^\circ$ com $\Delta I = 1^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22}	54
Figura 14 – Satélite próximo à inclinação crítica. Condições iniciais: $a = 4392,0$ km, $e = 0,01$, $i = 63,2^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 30^\circ$. A esquerda os harmônicos utilizados foram: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22} . A direita: J_2, J_3, J_4 e C_{22}	55
Figura 15 – Frequências de w , Ω e $l_\odot$ de satélites orbitando Mercúrio para diferentes inclinações.	57

Figura 16 – Família de órbitas para $I = 90^\circ$, $w = 0...360^\circ$ com $\Delta w = 10^\circ$, $\Omega = 90^\circ$ e $e = 0.05...0.3$ com $\Delta e = 0.05$. $\beta = 1 \times 10^{-5}$. Harmônicos utilizados: J_2, J_3, J_4, J_5 e C_{22}	58
Figura 17 – Frequências de w , Ω e $l_\odot$ de satélites orbitando a Terra para diferentes inclinações utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$. Condições iniciais: $e = 0.1$, $a = 9567$ km, $w = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Harmônicos utilizados: $J_2, J_3, J_4, C_{22}, S_{22}, C_{31}$ e S_{31}	60
Figura 18 – Ressonância R_1 e R_3 agindo separadamente.	62
Figura 19 – Satélite em ressonância dupla em $a = 1,6R_\oplus$, $e = 0,2560$ e $I = 116,5650^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	63
Figura 20 – Ressonância R_2 e R_4 agindo separadamente.	64
Figura 21 – Satélite em ressonância dupla em $a = 1,54R_\oplus$, $e = 0,02987$ $I = 63,434^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	64
Figura 22 – Ressonância R_3 e R_5 agindo separadamente.	65
Figura 23 – Satélite em ressonância dupla em $a = 1,6R_\oplus$, $e = 0,10919$ $I = 90^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	65
Figura 24 – Ressonância R_3 e R_6 agindo separadamente.	66
Figura 25 – Satélite em ressonância dupla R_3 e R_6 em $a = 1,4R_\oplus$, $e = 0,2596$ $I = 123,9353^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	67
Figura 26 – Satélite em ressonância dupla R_1 e R_5 em $a = 1,2R_\oplus$, $e = 0.1468$ $I = 110.9932^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	67
Figura 27 – Satélite em ressonância dupla R_2 e R_5 em $a = 1,19R_\oplus$, $e = 0.0844$ $I = 69.0067^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	68
Figura 28 – Satélite em ressonância dupla R_3 e R_4 em $a = 1,59R_\oplus$, $e = 0,03196$ $I = 90,0^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 120^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.	68
Figura 29 – Satélites em ressonância dupla R_1 e R_3 em $a = 1,6R_\oplus$, $e = 0,2560$, $I = 116,5650^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda utilizamos $\beta = 8 \times 10^{-4}$ e a direita $\beta = 9 \times 10^{-4}$	70

- Figura 30 – Satélites em ressonância dupla R_2 e R_4 em $a = 1,6R_\oplus$, $e = 0,2560$, $I = 63.434^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = -16,2220^\circ$. A esquerda utilizamos $\beta = 3 \times 10^{-3}$ e a direita $\beta = 4 \times 10^{-3}$ 71
- Figura 31 – Comparação sistema exato (preto) e médio (vermelho) usando apenas o harmônico J_2 como perturbador. Condições iniciais: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,03038$, $I = 140^\circ$, $w = 40^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ 73
- Figura 32 – Comparação sistema exato (preto) e médio (vermelho) usando apenas os harmônicos J_2 , J_3 e J_4 como perturbadores. As regiões dos quadros verdes são regiões estratégias para se fazer o ajuste nas condições iniciais. Condições iniciais: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,03$, $I = 140^\circ$, $w = 40^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. 73
- Figura 33 – Comparação sistema exato (preto), médio (vermelho) e médio ajustado (azul) usando apenas os harmônicos J_2 , J_3 e J_4 como perturbadores. Condições iniciais osculadoras: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,03$, $I = 140^\circ$, $w = 40^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Condições iniciais médias: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,029$, $I = 140^\circ$, $w = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ 74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Polinômios Associados de Legendre utilizados neste trabalho.	18
Tabela 2 – Harmônicos do campo gravitacional de Mercúrio normalizados e desnormalizados.	49
Tabela 3 – Harmônicos do campo gravitacional da Terra normalizados e desnormalizados.	59
Tabela 4 – Localização de todas as ressonâncias duplas.	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	POTENCIAL DEVIDO A NÃO ESFERICIDADE DO PLANETA . .	14
2.1	Problema de dois corpos	14
2.2	Desenvolvimento do Potencial de um corpo rígido	15
2.3	Análise de alguns coeficientes de baixa ordem	19
2.4	Perturbação causada pela parte zonal do potencial	20
2.5	Perturbação causada pelos harmônicos tesserais	20
3	PERTURBAÇÃO CAUSADA POR UM TERCEIRO CORPO	25
4	PRESSÃO DE RADIAÇÃO	28
4.1	Natureza da Radiação	28
4.2	Descrição Quântica da Radiação	28
4.3	Força devido à Pressão de Radiação em uma Vela Solar perfeita- mente reflexiva	29
5	SISTEMA MERCÚRIO-SONDA-SOL	32
5.1	Perturbação devido a não esfericidade de Mercúrio.	32
5.2	Sistema Exato (Cartesiano)	34
5.3	Sistema Médio	35
5.3.1	Médias	39
6	SISTEMA TERRA-SONDA-SOL	43
6.1	Geopotencial	43
6.2	Sistema Exato	44
6.3	Sistema Médio	45
7	RESULTADOS PARA O SISTEMA MERCÚRIO-SONDA-SOL . . .	48
7.1	Comparação Sistema Médio e Exato. Caso Mercúrio	48
7.2	Satélite próximo à inclinação crítica e a importância do harmônico J_5 .	51
7.3	Ressonâncias Caso Mercúrio	54
8	RESULTADOS PARA O SISTEMA TERRA-SONDA-SOL	59
8.1	Ressonâncias Duplas	59
8.1.1	Ressonância $R_1 = \dot{w} + \dot{\Omega} - n_{\odot} = 0$ e $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$	61
8.1.2	Ressonância $R_2 = \dot{w} - \dot{\Omega} - n_{\odot} = 0$ e $R_4 = \dot{w} + \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$	63
8.1.3	Ressonância $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$ e $R_5 = \dot{w} + n_{\odot} = 0$	64

8.1.4	Ressonância $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$ e $R_6 = \dot{w} - n_{\odot} = 0$	65
8.1.5	Outras ressonâncias duplas	67
8.1.6	Conclusão acerca das Ressonâncias Duplas	68
8.2	Ressonâncias duplas para valores altos de β	69
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS A RESPEITO DO SISTEMA MÉDIO .	72
10	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Investimentos e pesquisas na área de missões científicas para planetas, luas e asteroides tem crescido significativamente nestes últimos anos. Novos países, novos grupos internacionais de pesquisa, tem investido em estudos relacionados ao envio de sondas e satélites orbitadores para diferentes objetos do sistema solar. Dependendo do corpo a ser visitado, o planejamento e a dinâmica envolvida, obviamente, apresentam características muito diversas. Neste trabalho focamos a dinâmica que envolve um orbitador de um planeta interno, do tipo rochoso, como Mercúrio ou Terra. Para estes, devido a proximidade com o Sol, a força da Pressão de Radiação Solar (PRS) e também a perturbação solar gravitacional são ingredientes que afetam claramente a dinâmica de uma sonda. Tanto a Terra como também Mercúrio são suficientemente achatados, o que em princípio poderiam ser responsáveis por perturbações importantes não só devido aos termos zonais como também devido aos chamados tesserais ((TRESACO *et al.*, 2018),(TRESACO; ELIPE; CARVALHO, 2016)) tidos, a princípio, como não desprezíveis. A importância dos termos tesserais (em especial C_{22} , S_{22}) tem sido bastante comentada também em outros problemas como orbitadores da Lua, asteroides, etc ((SAEDELEER, 2006), (TZIRTI; TSIGANIS; VARVOGLIS, 2009), etc). Dada a diversidade de casos específicos, torna-se importante um estudo localizado do efeito destas perturbações de cada problema.

Tratamos o problema de uma sonda em torno de Mercúrio ou da Terra, onde incluímos os principais harmônicos do campo gravitacional achatado do planeta e também a perturbação que decorre da PRS. Nesse caso, interessa-nos também, um caso de dupla ressonância que decorre dos termos da PRS. Por dupla ressonância entendemos uma situação onde podemos ter dois ângulos ressonantes independentes. Mostramos que a dupla ressonância ocorre no caso de uma sonda da Terra, porém no caso de Mercúrio, apesar do efeito isolado da PRS ser mais forte do que no caso terrestre, a frequência do movimento médio de Mercúrio é muito mais alta do que as frequências do nodo ou do pericentro de uma sonda que o orbita. Assim, dupla ressonância de primeira ordem não é possível no caso de Mercúrio. Como tais ressonâncias são comensurabilidades seculares, a função perturbadora foi escrita em elementos médios, ou seja, foi obtida a média desta função, apenas na anomalia média da sonda, preservando assim a anomalia média do planeta. Também foi montado o sistema exato, em coordenadas cartesianas, para comparar com o sistema médio.

2 POTENCIAL DEVIDO A NÃO ESFERICIDADE DO PLANETA

Neste capítulo, assim como nos próximos dois, faremos uma breve descrição das forças perturbadoras que atuam num satélite que orbita um planeta do tipo terrestre (Terra ou Mercúrio). Esta descrição tratará de maneira bastante resumida já que tais forças são bem conhecidas, havendo bastante bibliografia que auxiliam e complementam o que será descrito aqui. Assim, esta expansão visa principalmente justificar alguns detalhes particulares quando o planeta hospedeiro considerado é Mercúrio ou Terra. Fosse, por exemplo, Júpiter ou outro planeta gasoso gigante, as forças perturbadoras seriam bastante distintas das que tomaremos neste trabalho.

Iniciamos então com o clássico problema de dois corpos, onde a perturbação que aparentemente é a mais saliente, vem do achatamento do primário hospedeiro.

2.1 Problema de dois corpos

Considerando um sistema de coordenadas inercial $OXYZ$ e duas massas pontuais m e M (Figura 1), segundo a Gravitação Universal de Newton podemos escrever a força que M sofre devido a m e vice-versa como

$$\mathbf{F}_{Mm} = GMm \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^3} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F}_{mM} = -GMm \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^3}. \quad (2.2)$$

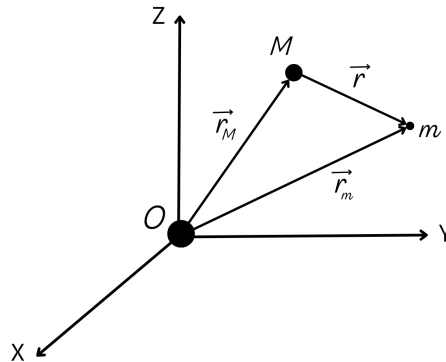


Figura 1 – Duas massas pontuais em um sistema de coordenadas inercial $OXYZ$.

Entretanto, podemos escrever $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$ e, usando a segunda lei de Newton podemos reescrever as Eqs. (2.1) e (2.2) da seguinte forma

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.3)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.4)$$

onde G é a constante da Gravitação Universal e $r = |\mathbf{r}|$.

Simplificando as massas e subtraindo (2.4) de (2.3)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(M + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.5)$$

que é a equação do movimento relativo entre as duas massas.

Por conta de r ser uma função em (x, y, z) , a eq. (2.5) se trata de um sistema três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, e que ao resolvê-las obtemos o movimento da massa m em relação à massa M .

Tomando como exemplo um satélite orbitando um planeta, temos que $M \gg m$ e, portanto, é válido considerar $G(M + m) \approx GM$. Na Mecânica Celeste, este produto é chamado de parâmetro gravitacional do corpo em questão (μ).

Podemos reescrever (2.5)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.6)$$

que também pode ser expresso pelo gradiente do potencial U

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U, \quad (2.7)$$

em que U é dado por

$$U = \frac{\mu}{r}. \quad (2.8)$$

2.2 Desenvolvimento do Potencial de um corpo rígido

O formalismo estudado na seção anterior se baseia no fato de todas as massas serem pontuais, mas na realidade, ao estudarmos o movimento de satélites artificiais orbitando planetas como a Terra e Mercúrio (sistemas que serão foco neste trabalho), devemos considerar a forma e a distribuição de massa desses planetas. Ao introduzir esses fatores na modelagem do problema, teremos um modelo mais realista a ser abordado. Portanto, nesta seção focaremos na modelagem do potencial de um planeta devido a sua não esfericidade e sua distribuição de massa não uniforme seguindo as ideias presentes em (MONTENBRUCK; GILL, 2002).

Considerando um elemento de massa dm a uma distância s da origem, então a soma da contribuição de todos esses elementos de massa resultará na força total sobre o satélite. Essa soma pode ser expressa através da integração sobre todo o volume do planeta dado por

$$U = G \iiint \frac{\rho(s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} d^3s \quad (2.9)$$

em que $dm = \rho(s)d^3s$ é a densidade em um certo ponto a uma distância s do centro que, necessariamente, precisa estar no interior do planeta. $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ é a distância desse ponto ao satélite, podendo ser visualizado na fig.(2).

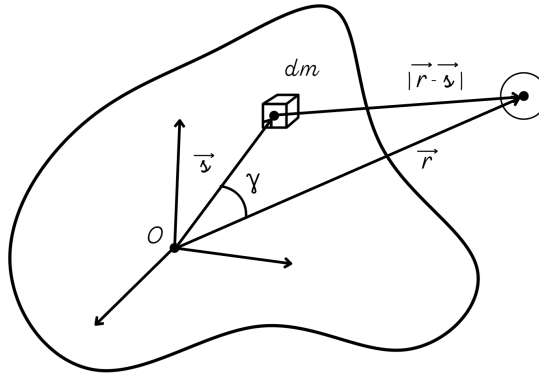


Figura 2 – Contribuição de um elemento de massa dm para o potencial.

Podemos desenvolver $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ da seguinte forma

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = (r^2 + s^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{s})^{1/2} = (r^2 + s^2 - 2rs \cos \gamma)^{1/2}, \quad (2.10)$$

onde γ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Logo, $1/|\mathbf{r} - \mathbf{s}|$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \left\{ r^2 \left[1 + \left(\frac{s}{r} \right)^2 - 2 \frac{s}{r} \cos \gamma \right] \right\}^{-1/2} \quad (2.11)$$

Como em geral $1 \gg \frac{s}{r}$, podemos expandir em série de Taylor a expressão (2.11)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{s}{r} \cos \gamma + \left(\frac{s}{r} \right)^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \gamma \right] + \left(\frac{s}{r} \right)^3 \left[-\frac{3}{2} \cos \gamma + \frac{5}{2} \cos^3 \gamma \right] + \dots \right\} \quad (2.12)$$

Lembrando da definição de polinômios de Legendre temos: $P_0(\cos \gamma) = 1$, $P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma$ e $P_2(\cos \gamma) = -1/2 + 3/2 \cos^2 \gamma$. Assim, observamos

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma), \quad (2.13)$$

sendo

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n \quad (2.14)$$

em que n é o grau do polinômio.

Portanto, substituindo (2.13) em (2.9) teremos U expresso nas variáveis correntes do problema, desde que M tenha simetria axial com relação ao eixo polar z . Assim, para esta classe de planetas (gigantes e gasosos), podemos escrever o potencial gravitacional do achatamento numa forma muito simples:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n R^n}{r^n} P_n(\sin \phi) \right\} \quad (2.15)$$

onde ϕ é a latitude do satélite referida ao equador de M e J_n são coeficientes do achatamento (zonais) do planeta.

Porém, para planetas terrestres (pequenos e rochosos) não existe esta simetria como temos nos planetas gigantes. O procedimento é mais elaborado. Notemos então que até agora no tratamento de U não se levou em conta que o elemento de massa dm está rotacionando, pois ele é elemento de M , que em relação ao referencial inercial, está em rotação em torno do eixo vertical z . Então para isso vamos definir coordenadas esféricas (x, y, z) para o satélite e as respectivas (x', y', z') para dm .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda & x' &= s \cos \phi' \cos \lambda' \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda & y' &= s \cos \phi' \sin \lambda' \\ z &= r \sin \phi & z' &= s \sin \phi'. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pelo teorema da adição dos Polinômios de Legendre podemos afirmar que,

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \phi) P_{nm}(\sin \phi') \cos(m(\lambda - \lambda')) \quad (2.17)$$

com P_{nm} chamado de Polinômios Associados de Legendre

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \quad (2.18)$$

em que n é o grau e m a ordem do polinômio. A tabela 1 mostra os Polinômios Associados de Legendre que utilizaremos neste trabalho.

O potencial devido ao achatamento do planeta será dado então por (MONTENBRUCK; GILL, 2002)

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (2.19)$$

n	m	$P_{n,m}(\sin(\phi))$
0	0	1
1	0	$\sin(\phi)$
2	0	$\frac{1}{2}(3\sin^2(\phi) - 1)$
3	0	$\frac{1}{2}(5\sin^3(\phi) - 3\sin(\phi))$
4	0	$\frac{1}{8}(35\sin^4(\phi) - 30\sin^2(\phi) + 3)$
5	0	$\frac{1}{8}(63\sin^5(\phi) - 70\sin^3(\phi) + 15\sin(\phi))$
2	2	$3\cos^2\phi$
3	1	$\frac{3}{2}(5\sin^2(\phi) - 1)\cos(\phi)$

Tabela 1 – Polinômios Associados de Legendre utilizados neste trabalho.

e os coeficientes C_{nm} e S_{nm}

$$C_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint \frac{s^n}{R^n} P_{nm}(\sin \phi') \cos(m\lambda') \rho(s) d^3s \quad (2.20)$$

$$S_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint \frac{s^n}{R^n} P_{nm}(\sin \phi') \sin(m\lambda') \rho(s) d^3s \quad (2.21)$$

em que δ_{0m} é o Delta de Kronecker e é igual a 1 quando $m = 0$ e igual a 0 se $m \neq 0$.

Estes coeficientes dependem da distribuição de massa do planeta, são constantes e determinados a partir de medições precisas da gravidade do planeta, realizadas por satélites. Essas medições são usadas para criar um modelo da distribuição de massa do objeto. À medida que mais dados são coletados, mais precisos se tornam os modelos, os coeficientes são constantemente refinados e atualizados. Para $m < n$ temos a contribuição tesseral do potencial, e para $m = n$ temos os coeficientes setoriais.

Na literatura, em geral, não utilizamos 2.20 e 2.21, pois os harmônicos são encontrados na forma normalizada, ou seja, $\bar{C}_{nm}$ e $\bar{S}_{nm}$. Estes coeficientes normalizados são relacionados com os desnormalizados através da seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}} \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Portanto, a aceleração sofrida pelo satélite devido a não esfericidade e distribuição de massa do planeta

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U \quad (2.23)$$

em que U é o potencial dado pela eq. (2.19).

No caso da Terra, os coeficientes do potencial de achatamento são bem conhecidos. A primeira medição precisa foi feita pelo satélite Sputnik 1 em 1957, que determinou o valor de J_2 (coeficiente do potencial zonal). Desde então, diversas missões foram executadas

e diversos satélites foram enviados para orbitar a Terra a fim de obter coeficientes de ordem e precisão cada vez maiores (MONTENBRUCK; GILL, 2002).

Para Mercúrio, os coeficientes do potencial de achatamento são menos conhecidos que os da Terra. A Mariner 10 foi lançada em 3 de novembro de 1973 e foi a primeira missão espacial a orbitar Mercúrio. Esta missão possibilitou a medição da constante da gravitação de Mercúrio (GM) bem como os coeficientes harmônicos J_2 e C_{22} . Posteriormente, a missão MESSENGER foi a próxima a orbitar Mercúrio em 2013 e ajudou a estabelecer uma base de dados detalhada sobre o planeta, que tem sido amplamente utilizada em pesquisas subsequentes sobre o planeta (MAZARICO *et al.*, 2014), (VERMA; MARGOT, 2016) e (KONOPLIV; PARK; ERMAKOV, 2020).

2.3 Análise de alguns coeficientes de baixa ordem

Podemos verificar as expressões do potencial (2.19) simplesmente substituindo n e m . Começando com $n = 0$ e $m = 0$, temos

$$U = \frac{GM}{r} P_{00}(\sin \phi)(C_{00}), \quad (2.24)$$

onde $P_{00} = 1$ e C_{00} pode ser facilmente calculado

$$C_{00} = \frac{1}{M} \iiint \rho(s) d^3s = 1. \quad (2.25)$$

A integral da densidade pelo volume do planeta resulta simplesmente na própria massa e, portanto, o resultado é 1. E o potencial (2.19) se reduz ao potencial de dois corpos

$$U = \frac{GM}{r}. \quad (2.26)$$

Podemos escolher o centro de coordenadas tal qual coincida com o centro de massa do planeta

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int s \rho(s) d^3s. \quad (2.27)$$

E, portanto, os coeficientes C_{10} , C_{11} e S_{11} são dados por (MONTENBRUCK; GILL, 2002)

$$C_{10} = \frac{\bar{z}}{R}, \quad (2.28)$$

$$C_{11} = \frac{\bar{x}}{R}, \quad (2.29)$$

$$S_{11} = \frac{\bar{y}}{R}. \quad (2.30)$$

Logo, estes três coeficientes se anulam. Como os casos estudados terão suas respectivas origens do sistema de coordenadas coincidindo com o centro de massa de Mercúrio e posteriormente ao centro de massa da Terra, apenas os índices $n \geq 2$ serão tratados neste trabalho.

Tendo em vista (2.28), (2.29) e (2.30) vamos escrever o potencial da equação (2.23) numa forma mais prática para nosso propósito

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n C_{n0} P_{n0}(\sin(\phi)) \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda_E) + S_{nm} \sin(m\lambda_E)) P_{nm}(\sin(\phi)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde λ_E é a longitude medida no Equador entre o meridiano de referência (Greenwich no caso da Terra) e o meridiano do satélite. Em outras palavras $\lambda_E = \lambda - \nu t$, em que ν é a velocidade angular de rotação do planeta.

2.4 Perturbação causada pela parte zonal do potencial

Observemos que a segunda parcela da expressão (2.31) corresponde aos termos zonais do potencial. Para quaisquer índices $m = 0$ todos os S_{n0} zeram, pois $\sin(0\lambda) = 0$ sobrando apenas os C_{n0} e, conseqüentemente, não há dependência da longitude λ . E, portanto, isoladamente a perturbação zonal é representa por

$$U_Z = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \phi) C_{n0}. \quad (2.32)$$

a qual representa o potencial zonal, ou seja, o potencial que não depende da longitude. Por convenção, é utilizado a notação J_n para representar os coeficientes zonais do potencial. A relação entre J_n e $C_{n,0}$ é dada por: $J_n = -C_{n,0}$.

Nos sistemas estudados neste trabalho, os coeficientes zonais mais fortes representam principalmente a diferença entre o diâmetro polar e o diâmetro equatorial dos planetas, ou seja, o quanto o planeta é achatado nos polos e avantajado no equador. Tanto no caso da Terra quanto no caso de Mercúrio, ambos os diâmetros equatoriais são maiores em relação aos diâmetros polares. Portanto, os efeitos dessas deformidades nos planetas afetam diretamente o satélite que o orbita e devem ser considerados.

2.5 Perturbação causada pelos harmônicos tesserais

Nesta seção apresentaremos as deduções dos tesserais C_{22} , S_{22} , C_{31} e S_{31} em termos dos elementos orbitais do satélite. Para isto, consideremos a terceira parcela de (2.31), a

qual representa a parte tesseral do potencial. Isoladamente, podemos escrevê-la da seguinte forma,

$$U_T = \frac{GM}{r} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda_E) + S_{nm} \sin(m\lambda_E)). \quad (2.33)$$

Substituindo os índices $n = 2$ e $m = 2$ no potencial acima obtemos

$$R_{22} = \frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_{22}(\sin \phi) (C_{22} \cos(2\lambda_E) + S_{22} \sin(2\lambda_E)), \quad (2.34)$$

em que P_{22} é o polinômio associado de Legendre de grau 2 e ordem 2 dado anteriormente na tabela (1)

$$P_{22} = 3 \cos^2 \phi. \quad (2.35)$$

O objetivo desta sessão é escrever a expressão de R_{22} acima em função dos elementos orbitais. Analisaremos a geometria do problema e, a partir disso, faremos uma série de manipulações algébricas a fim de obter expressões para $\cos 2\lambda_E$ e $\sin 2\lambda_E$ contidas em (2.34) em termos dos elementos orbitais do satélite.

Podemos analisar a geometria do problema na Fig. 3. Devido a rotação do planeta, devemos definir a direção de rotação em relação sistema de coordenadas inercial XYZ . A rotação instantânea do planeta é definido como νt , e é medida do eixo X até a linha Md , que é o meridiano de Greenwich do planeta (no caso da Terra). A longitude do satélite, descrito na Figura 3 como λ_E é medido a partir do meridiano de Greenwich do planeta até o meridiano do satélite. A longitude do nodo ascendente é definido como de costume, do eixo X até o nodo ascendente. Dessas informações podemos deduzir que

$$\lambda_E = x + y, \quad x = \Omega - \nu t. \quad (2.36)$$

Através das relações de triângulos esféricos podemos escrever

$$\cos(f + w) = \cos y \cos \phi + \sin \phi \sin y \cos 90^\circ \quad (2.37)$$

$$\cos \phi = \cos(f + w) \cos y + \sin(f + w) \sin y \cos I \quad (2.38)$$

De (2.37) obtemos direto

$$\cos(f + w) = \cos y \cos \phi \quad (2.39)$$

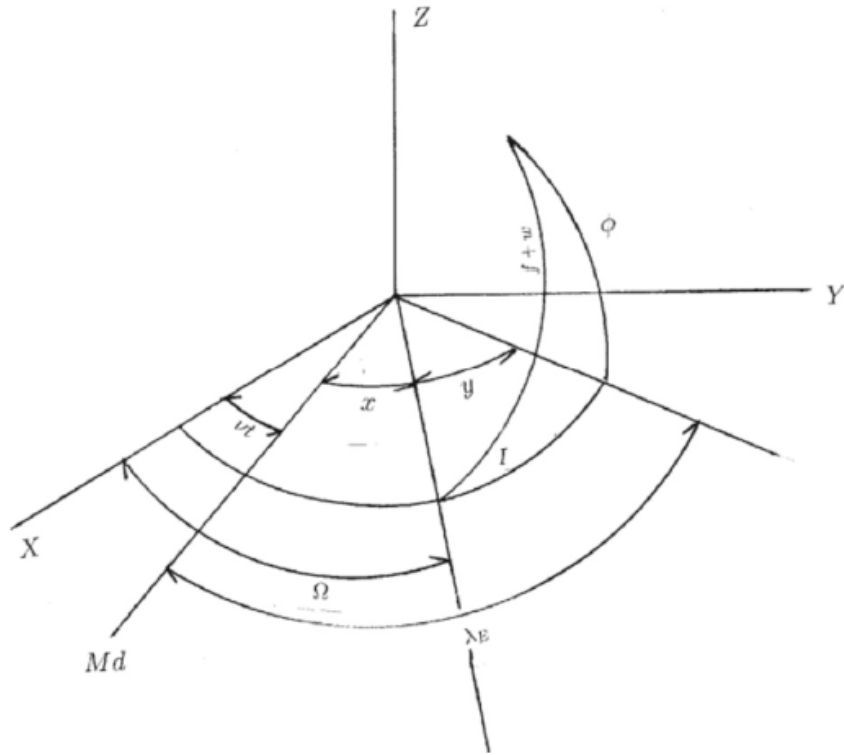


Figura 3 – Geometria do problema (CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022)

que podemos substituir em (2.38) e obter

$$\sin(f + w) \cos I = \sin y \cos \phi. \quad (2.40)$$

Dado que os termos $\cos 2\lambda_E$ e $\sin 2\lambda_E$ estão presentes na eq. (2.34) podemos escrever,

$$\cos 2\lambda_E = \cos(2x + 2y) = \cos 2x \cos 2y - \sin 2x \sin 2y, \quad (2.41)$$

$$\sin 2\lambda_E = \sin(2x + 2y) = \sin 2x \cos 2y + \sin 2y \cos 2x. \quad (2.42)$$

Usando as clássicas relações da trigonometria de seno da soma e cosseno da soma de dois ângulos, podemos escrever

$$\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y = \frac{\cos^2(f + w) - \sin^2(f + w) \cos^2 I}{\cos^2 \phi}, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}\sin 2y &= 2 \sin y \cos y = 2 \left(\frac{\sin(f+w) \cos I}{\cos \phi} \right) \left(\frac{\cos(f+w)}{\cos \phi} \right) \\ &= \frac{\sin(2f+2w) \cos I}{\cos^2 \phi},\end{aligned}\tag{2.44}$$

que podem ser aplicadas em (2.41) e (2.42)

$$\cos 2\lambda_E = \cos 2x \left(\frac{\cos^2(f+w) - \sin^2(f+w) \cos^2 I}{\cos^2 \phi} \right) - \sin 2x \left(\frac{\sin(2f+2w) \cos I}{\cos^2 \phi} \right)\tag{2.45}$$

$$\sin 2\lambda_E = \sin 2x \left(\frac{\cos^2(f+w) - \sin^2(f+w) \cos^2 I}{\cos^2 \phi} \right) + \cos 2x \left(\frac{\sin(2f+2w) \cos I}{\cos^2 \phi} \right).\tag{2.46}$$

Finalmente, podemos substituir (2.45) e (2.46) em (2.33) e obter

$$\begin{aligned}R_{22} = & 3 \frac{R^2 GM}{r^3} [C_{22}(\cos 2(\Omega - \nu t)(\cos^2(f+w) - \sin^2(f+w) \cos^2 I) \\ & - \sin 2(\Omega - \nu t) \sin(2f+2w) \cos I) \\ & + S_{22}(\sin 2(\Omega - \nu t) (\cos^2(f+w) - \sin^2(f+w) \cos^2 I) \\ & + \cos 2(\Omega - \nu t) (\sin(2f+2w) \cos I))].\end{aligned}\tag{2.47}$$

A expressão acima descreve a perturbação causada pelos harmônicos C_{22} e S_{22} em função dos elementos orbitais do satélite e da taxa de rotação do planeta. Como veremos no decorrer do trabalho, para Mercúrio o harmônico S_{22} acaba sendo irrelevante quando comparado ao C_{22} e os outros zonais, portanto iremos desconsiderá-lo (tabela 2). Já para a Terra, tanto o C_{22} quanto o S_{22} serão relevantes e deverão ser considerados.

Para o sistema Terra-Sonda-Sol utilizaremos outros dois tesserais: C_{31} e S_{31} . Substituindo os índices $n = 3$ e $m = 1$ em 2.33, obtemos

$$R_{31} = \frac{GM}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_{31}(\sin \phi) (C_{31} \cos(\lambda_E) + S_{31} \sin(\lambda_E))\tag{2.48}$$

em que P_{31} é dado na tabela 1.

O processo de dedução deste tesseral é mais simples por conta de que $\sin \lambda_E = \sin(x+y)$ e $\cos \lambda_E = \cos(x+y)$ conforme a equação (2.36). Logo, basta desenvolvermos $\sin(x+y)$ e $\cos(x+y)$ em

$$\cos \lambda_E = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\tag{2.49}$$

$$\sin \lambda_E = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (2.50)$$

A partir daqui o mesmo processo para dedução de C_{22} e S_{22} é aplicado e obtemos

$$\begin{aligned} R_{31} = & \frac{3}{2} \left(\frac{GMR^3}{r^3} \right) (5 \sin^2(f + w) \sin^2(I) - 1) (\cos(x)(\cos(f + w)C_{31} \\ & + \sin(f + w) \cos(I)S_{31}) + \sin(x)(\cos(f + w)S_{31} - \sin(f + w) \cos(I)C_{31})). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Reiteramos que C_{nm} e S_{nm} são constantes numéricas fornecidas por missões espaciais específicas. É com base nestes valores que fazemos o truncamento da expansão em séries. Por outro lado, ao contrário dos termos zonais, vemos que para os tesserais, sempre teremos o termo νt , onde ν é a velocidade angular de rotação do planeta. Assim, para o estudo de satélites geossíncronos sempre teremos que considerar os termos tesserais. O sistema de equações do movimento passa a ser não autônomo.

3 PERTURBAÇÃO CAUSADA POR UM TERCEIRO CORPO

Para desenvolvermos a perturbação causada pelo Sol ao satélite seguiremos a metodologia presente em (MURRAY; DERMOTT, 1999). A influência gravitacional do Sol é um dos importantes fatores que afetam o movimento orbital de satélites em torno de um planeta. A princípio chamaremos o planeta hospedeiro, o Sol e o satélite respectivamente por m_c , m_i e m_j com as respectivas posições em relação a uma origem arbitrária O sendo $\mathbf{R}_c$, $\mathbf{R}_i$ e $\mathbf{R}_j$. Definindo os vetores $\mathbf{r}_j$ e $\mathbf{r}_i$ como sendo os vetores posição das massas m_j e m_i Fig. (5).

$$|\mathbf{r}_j| = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{1/2}, \quad |\mathbf{r}_i| = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2} \quad (3.1)$$

e, portanto

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}. \quad (3.2)$$

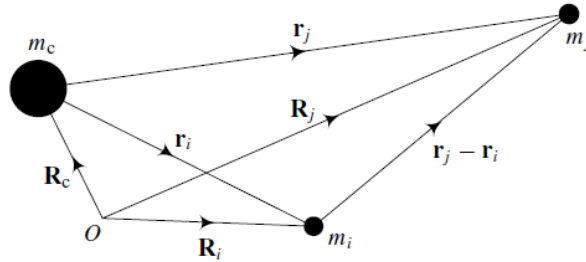


Figura 4 – Sistema m_c, m_i e m_j com seus respectivos vetores posição em relação à origem O e também as outras massas (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Devido à atração gravitacional entre as massas, aplicaremos a segunda Lei de Newton com a Lei da Gravitação Universal para $\mathbf{R}_c$, $\mathbf{R}_i$ e $\mathbf{R}_j$

$$m_c \ddot{\mathbf{R}}_c = Gm_cm_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + Gm_cm_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (3.3)$$

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = -Gm_im_c \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + Gm_im_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \quad (3.4)$$

$$m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = -Gm_jm_c \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} - Gm_im_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \quad (3.5)$$

Considerando o movimento de m_i e m_j em relação a m_c , obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i - \ddot{\mathbf{R}}_c, \quad (3.6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \ddot{\mathbf{R}}_j - \ddot{\mathbf{R}}_c, \quad (3.7)$$

e substituindo nas expressões (3.4) e (3.5) e simplificando as massas

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = Gm_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - Gm_c \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - Gm_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - Gm_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (3.8)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = -Gm_c \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} - Gm_i \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - Gm_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - Gm_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (3.9)$$

Reagrupando alguns termos podemos escrever

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + G(m_c + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} = Gm_j \left(\frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (3.10)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j + G(m_c + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} = -Gm_i \left(\frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right). \quad (3.11)$$

As acelerações acima podem ser escritas como o gradiente de duas funções escalares $\mathcal{U}$ e $\mathcal{R}$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i(\mathcal{U}_i + \mathcal{R}_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y_i} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z_i} \hat{\mathbf{k}} \right) (\mathcal{U}_i + \mathcal{R}_i), \quad (3.12)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \nabla_j(\mathcal{U}_j + \mathcal{R}_j) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y_j} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z_j} \hat{\mathbf{k}} \right) (\mathcal{U}_j + \mathcal{R}_j), \quad (3.13)$$

onde $\mathcal{U}_i$ e $\mathcal{U}_j$ são partes do potencial central e são dados por

$$\mathcal{U}_i = \frac{G(m_c + m_i)}{r_i}, \quad \mathcal{U}_j = \frac{G(m_c + m_j)}{r_j}. \quad (3.14)$$

Os termos $\mathcal{R}_i$ e $\mathcal{R}_j$ são as funções de perturbações geradas pelas massas secundárias. Como $\mathbf{r}_i$ não depende $\mathbf{r}_j$ e vice-versa, podemos escrever a função perturbadora como

$$\mathcal{R}_i = \frac{Gm_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} - Gm_j \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{R}_j = \frac{Gm_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - Gm_i \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_i^3} \quad (3.16)$$

Como trataremos de um satélite orbitando Mercúrio e, posteriormente, a Terra, sobre o efeito de perturbação do Sol e também da Pressão de Radiação Solar, podemos aproveitar a teoria desenvolvida acima, porém substituindo as massas pelas de Mercúrio, Satélite e Sol a princípio. Considerando Mercúrio como corpo central m_c agora referenciado como M , a massa m_i será a massa do Sol e será chamada de $M_\odot$ e, por fim, a massa do satélite será m antes chamada m_j .

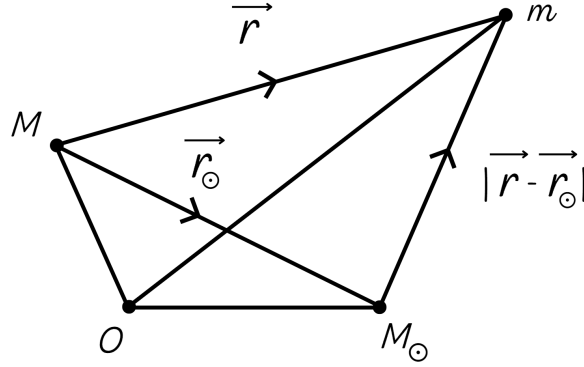


Figura 5 – Sistema Mercúrio-Sonda-Sol, onde M é Mercúrio, $M_\odot$ é o Sol e m a sonda.

Portanto, de acordo com a eq. (3.11)

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -Gm_\odot \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot|^3} + \frac{\mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3} \right) \quad (3.17)$$

e considerando apenas a contribuição do Sol, a aceleração sofrida pelo satélite devido ao mesmo

$$\ddot{\mathbf{r}} = -Gm_\odot \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot|^3} + \frac{\mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3} \right) \quad (3.18)$$

com a função perturbadora devido à presença do Sol dada

$$\mathcal{R} = \frac{Gm_\odot}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot|} - Gm_\odot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3}. \quad (3.19)$$

4 PRESSÃO DE RADIAÇÃO

A pressão de radiação solar (PRS) é a força exercida pelos fótons solares sobre uma superfície refletora, como uma vela solar, desempenhando papel fundamental na propulsão das velas solares. Essa pressão pode ser descrita tanto pela mecânica quântica quanto pela eletromagnética e está diretamente relacionada ao ângulo de incidência e a forma da vela (MCINNES, 2004).

4.1 Natureza da Radiação

No contexto da mecânica quântica, a luz é vista como um pacote de partículas chamadas fótons, que possuem uma quantidade de movimento associada. Quando um fóton é absorvido ou refletido por um objeto, ele transfere essa quantidade de movimento para o objeto, resultando em uma força. Esse processo é responsável por uma variedade de efeitos físicos, incluindo a pressão de radiação solar, sendo a força exercida pela luz solar em objetos no espaço, como as velas solares. Por outro lado, no contexto do eletromagnetismo, a luz é vista como uma onda eletromagnética que gera um campo elétrico e um campo magnético quando incide sobre um objeto. Esses campos interagem com os elétrons do objeto, produzindo uma força resultante (MCINNES, 2004). Neste capítulo trataremos brevemente apenas da descrição Quântica da pressão de radiação.

4.2 Descrição Quântica da Radiação

Pela conhecida lei de Planck, um fóton com frequência ν possui energia E dada pela relação

$$E = h\nu, \quad (4.1)$$

em que h é a constante de Planck.

Através da equivalência massa-energia da relatividade especial, podemos escrever a energia total E de um corpo em movimento da seguinte forma

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2, \quad (4.2)$$

onde m_0 é a massa de repouso do corpo, p é o momentum e c a velocidade da luz.

Tratando-se de um fóton, o primeiro termo da equação se anula, pois fótons não possuem massa. Logo,

$$E = pc. \quad (4.3)$$

Podemos igualar as eqs. (4.1) e (4.3) e obter

$$p = \frac{h\nu}{c}, \quad (4.4)$$

que é o momentum de um fóton com frequência ν .

Para calcularmos a pressão exercida em um corpo, o momentum transportado por um fluxo de fótons precisa ser adicionado ao problema. Podemos calcular o fluxo de energia W a uma distância $r_{\odot}$ do Sol em termos da luminosidade por unidade de área dada por

$$W = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_{\odot}^2}. \quad (4.5)$$

Pela definição de fluxo, podemos escrever a energia ΔE transportado através de uma área A normal com os fótons incidentes

$$\Delta E = W A \Delta t, \quad (4.6)$$

e, portanto

$$\Delta p = \frac{W A \Delta t}{c} = \frac{\Delta E}{c}. \quad (4.7)$$

Como a pressão é definida como a força aplicada em uma área e força é a variação do momentum, então

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right), \quad (4.8)$$

e, finalmente

$$P = \frac{W}{c} \quad (4.9)$$

é a expressão que calcula a pressão em uma superfície devido a transferência de momentum do fóton.

4.3 Força devido à Pressão de Radiação em uma Vela Solar perfeitamente reflexiva

Um satélite equipado com uma vela solar sofre a ação da pressão de radiação devido à transferência de momentum dos fótons emitidos pelo Sol para a superfície refletora da vela. Essa transferência de momento causa uma pequena força empurrando o satélite na direção oposta à do Sol, o que pode ser usado para impulsionar e controlar a órbita do satélite. A pressão de radiação é muito fraca e é mais eficaz em ambientes de baixa gravidade, como no vácuo do espaço.

Para uma vela solar de área A , a força exercida na mesma pelos fótons incidentes será

$$\mathbf{F}_i = PA\hat{\mathbf{u}}_i \cos \alpha = PA(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{u}}_i, \quad (4.10)$$

onde $A(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})$ é a área projetada na direção $\hat{\mathbf{u}}_i$. Da mesma maneira os fótons refletidos irão exercer a mesma força, porém na direção $\hat{\mathbf{u}}_r$

$$\mathbf{F}_r = -PA\hat{\mathbf{u}}_r \cos \alpha = -PA(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{u}}_r. \quad (4.11)$$

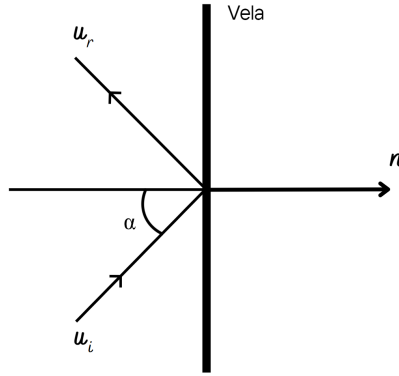


Figura 6 – Incidência e reflexão dos fótons em uma Vela Solar.

A força total exercido pelos fótons incidentes e refletidos será a soma de (4.10) e (4.11)

$$\mathbf{F}_{total} = PA(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{u}}_i - PA(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{u}}_r, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}_{total} = PA(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{u}}_i - \hat{\mathbf{u}}_r), \quad (4.13)$$

porém, podemos escrever $(\hat{\mathbf{u}}_i - \hat{\mathbf{u}}_r) = 2A(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ e então

$$\mathbf{F}_{total} = 2PA(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2\hat{\mathbf{n}} \quad (4.14)$$

e substituindo a pressão e o fluxo desenvolvidos anteriormente, podemos escrever a aceleração

$$\ddot{r}_{PRS} = \frac{L_{\odot}}{2\pi r_{\odot}^2 c m} A (\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.15)$$

sendo m a massa do satélite. Podemos expressar a equação acima como

$$\ddot{r}_{PRS} = \beta \mu_{\odot} (\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.16)$$

em que β é um parâmetro que indica a efetividade da vela e é dado por

$$\beta = \frac{\sigma^*}{\sigma}, \quad (4.17)$$

onde σ^* e σ são dados

$$\sigma^* = \frac{L_{\odot}}{2\pi\mu_{\odot}c} \text{ e } \sigma = \frac{m}{A}. \quad (4.18)$$

Assumiremos que a vela estará sempre orientada perpendicularmente aos raios solares ($\hat{\mathbf{u}}_i \parallel \hat{\mathbf{n}}$) e, portanto, o produto escalar $\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$. Como $\hat{\mathbf{n}}$ está orientado na direção do sol, podemos escrevê-lo como

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{|r - r_{\odot}|}, \quad (4.19)$$

onde $|r - r_{\odot}|$ é a distância satélite-Sol assim como foi definido no capítulo anterior. A expressão da aceleração sofrida pelo satélite devido a pressão de radiação solar, se torna

$$\ddot{r}_{PRS} = \beta\mu_{\odot} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{|r - r_{\odot}|^3}. \quad (4.20)$$

Vale ressaltar neste momento que não iremos considerar o efeito sombra, isto é, o efeito que ocorre quando parte do satélite fica oculto por outro objeto, como um planeta ou outro satélite, bloqueando a luz solar direta que incide na superfície da vela. Isso faz com que a pressão de radiação solar seja reduzida na região sombreada do satélite, afetando sua trajetória e, portanto, seu movimento. Incluir o efeito sombra no cálculo do movimento de um satélite sob efeito de pressão de radiação pode ser difícil por várias razões. Uma delas é que a posição e a orientação do satélite em relação ao objeto que causa a sombra podem mudar rapidamente, devido à rotação do planeta e à órbita dos objetos envolvidos. Essa variação constante torna a previsão do efeito sombra mais complicada, pois é complexo saber quando e por quanto tempo um satélite estará sob a sombra de outro objeto. Além disso, o efeito sombra pode ser difícil de modelar, pois depende de muitos fatores, como a forma e tamanho dos objetos envolvidos, a intensidade e direção da luz solar e a composição óptica da superfície do satélite (MCINNES, 2004).

Uma outra tarefa extremamente complicada quando a PRS é estudada, é o desafio de modelar e prever com precisão os ciclos solares e suas flutuações. Durante períodos de tempestades solares intensas, este efeito pode ser muito mais significativo em comparação com outras perturbações, dependendo da altitude da espaçonave. No entanto, em épocas de baixa atividade solar, esse efeito pode ser considerado até mesmo insignificante (VALLADO, 2013).

5 SISTEMA MERCÚRIO-SONDA-SOL

Estudaremos o caso de uma Sonda orbitando Mercúrio. Tratando-se de um satélite artificial orbitando um planeta, as principais componentes da perturbação que afetarão a dinâmica da Sonda serão devidas à não esfericidade de Mercúrio e à atração gravitacional do Sol. Pelo fato da Sonda estar equipada com uma Vela Solar e também de Mercúrio ser o planeta mais próximo ao Sol, a Pressão de Radiação Solar (PRS) será considerada neste problema.

Vamos considerar uma Sonda orbitando Mercúrio sobre influência da gravitação do mesmo, do Sol e sobre efeito da PRS. O centro de coordenadas do sistema $Oxyz$ coincide com o centro de massa de Mercúrio. Portanto, a equação que descreverá a dinâmica da sonda será

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_M + \ddot{\mathbf{r}}_{3b} + \ddot{\mathbf{r}}_{PRS} \quad (5.1)$$

onde, $\ddot{\mathbf{r}}_{3b}$ é a aceleração devido a atração gravitacional do terceiro corpo (Sol), $\ddot{\mathbf{r}}_{PRS}$ a Pressão de Radiação Solar que a Vela irá sofrer e $\ddot{\mathbf{r}}_M$ a contribuição da não esfericidade de Mercúrio.

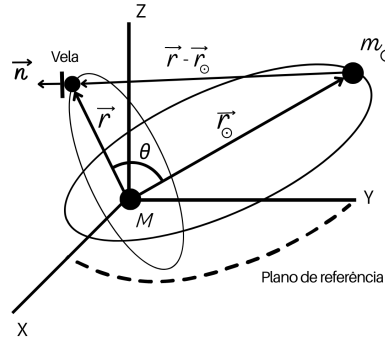


Figura 7 – Sistema Mercúrio-Sonda-Sol. (TRESACO; ELIPE; CARVALHO, 2016).

Os vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_\odot$ e $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot$ representam as direções Mercúrio-Sonda, Mercúrio-Sol e Sol-Sonda, respectivamente. As coordenadas desses vetores são dadas por $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_\odot = (x_\odot, y_\odot, z_\odot)$ e $\rho = (x - x_\odot, y - y_\odot, z - z_\odot)$, conforme ilustrado na Figura 7.

5.1 Perturbação devido a não esfericidade de Mercúrio.

A aceleração sofrida pelo satélite devido a Mercúrio é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U_M(\mathbf{r}), \quad (5.2)$$

sendo U_M o potencial de Mercúrio.

Assim como desenvolvido no capítulo 1, o potencial de Mercúrio devido a sua não esfericidade é dado em função da distribuição de massa do planeta, da latitude ϕ e longitude λ

$$U_M = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_M}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (5.3)$$

onde μ é o parâmetro gravitacional de Mercúrio, $r = |\mathbf{r}|$, R_M o raio interno de Mercúrio e P_{nm} os Polinômios Associados de Legendre de grau n e ordem m . C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes apresentados no capítulo 1.

Para a sonda em Mercúrio iremos trabalhar com os cinco harmônicos zonais J_2, J_3, J_4, J_5 mais o harmônico tesseral C_{22} , pois o mesmo é da mesma ordem de grandeza que o termo zonal principal J_2 neste caso (TRESACO *et al.*, 2018). Relembrando, o potencial levando em consideração os zonais e os tesserais

$$U_M = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n \geq 2}^{\infty} \left(\frac{R_M}{r} \right)^n C_{n0} P_{n0}(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_M}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right] \quad (5.4)$$

Escrevendo a parte do zonal de (5.4) até ordem 5 utilizando a notação $C_{n0} = -J_n$, temos

$$R_{Jn} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n \geq 2}^5 \left(\frac{R_M}{r} \right)^n J_n P_n(\sin(\phi)), \quad (5.5)$$

$$R_{Jn} = -\frac{\mu}{r} \left[\left(\frac{R_M}{r} \right)^2 J_2 P_2(\sin(\phi)) + \left(\frac{R_M}{r} \right)^3 J_3 P_3(\sin(\phi)) + \left(\frac{R_M}{r} \right)^4 J_4 P_4(\sin(\phi)) + \left(\frac{R_M}{r} \right)^5 J_5 P_5(\sin(\phi)) \right] \quad (5.6)$$

e a parte tesseral,

$$R_{22} = \left(\frac{R_M}{r} \right)^2 P_{22}(\sin \phi) (C_{22} \cos(2\lambda) + S_{22} \sin(2\lambda)). \quad (5.7)$$

Porém, como já mencionando anteriormente, para o caso de Mercúrio, o coeficiente harmônicos S_{22} é da ordem de 10^{-8} enquanto que o C_{22} é da ordem 10^{-5} (tabela 2). Por conta disso, não iremos considerar a segunda parte da perturbação R_{22} , mantendo apenas C_{22} . Logo,

$$R_{22} = \left(\frac{R_M}{r} \right)^2 P_{22}(\sin \phi) (C_{22} \cos(2\lambda)). \quad (5.8)$$

Os polinômios de Legendre $P_{20}(\sin \phi)$, $P_{30}(\sin \phi)$, $P_{40}(\sin \phi)$, $P_{50}(\sin \phi)$ e $P_{22}(\sin \phi)$ são dados na tabela 1.

5.2 Sistema Exato (Cartesiano)

Considerando que os harmônicos zonais dependem exclusivamente da latitude, podemos escrevê-los em coordenadas cartesianas utilizando a seguinte relação

$$\sin \phi = \frac{z}{r} \quad (5.9)$$

e, portanto, as perturbações da parte zonal se tornam

$$R_{J2} = -\frac{1}{2} \frac{J_2 R_M^2 \mu}{r^3} \left(3 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right), \quad (5.10)$$

$$R_{J3} = -\frac{1}{2} \frac{J_3 R_M^3 \mu}{r^4} \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^3 - 3 \frac{z}{r} \right), \quad (5.11)$$

$$R_{J4} = -\frac{1}{8} \frac{J_4 R_M^4 \mu}{r^5} \left(35 \left(\frac{z}{r} \right)^4 - 30 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 3 \right), \quad (5.12)$$

$$R_{J5} = -\frac{1}{8} \frac{J_5 R_M^5 \mu}{r^6} \left(63 \left(\frac{z}{r} \right)^5 - 70 \left(\frac{z}{r} \right)^3 + 15 \left(\frac{z}{r} \right) \right). \quad (5.13)$$

Para escrevermos R_{22} em coordenadas cartesianas devemos usar a substituição $\cos \lambda = \cos(\lambda - \nu t)$ para representar a rotação de Mercúrio e após desenvolver o cosseno podemos escrever

$$R_{22} = \frac{3\mu R_M^2}{r^5} C_{22}((x^2 - y^2) \cos 2\nu t + 2xy \sin 2\nu t). \quad (5.14)$$

A expressão da aceleração causada pelo Sol, assim como foi deduzida no Capítulo 3, é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}}_{3b} = -\mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right), \quad (5.15)$$

sendo, $\mu_{\odot}$ o parâmetro gravitacional do Sol, $\mathbf{r}$ o vetor Mercúrio-Sonda e $\mathbf{r}_{\odot}$ o vetor Sol-Sonda.

Assumindo que a Vela Solar estará sempre orientada perpendicularmente em relação aos raios solares, a expressão para a Pressão de Radiação Solar sofrida pela vela foi deduzida no capítulo 3

$$\ddot{\mathbf{r}}_{PRS} = \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3}. \quad (5.16)$$

Com todas as acelerações que afetam o satélite definidas, a equação que descreve a dinâmica considerando a não esfericidade de Mercúrio, a perturbação do Sol e a pressão de radiação será dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U_M - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3}, \quad (5.17)$$

e em coordenadas cartesianas

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{x}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\partial R_{J2}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{J3}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{J4}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{J5}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{22}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.18)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{y}}{r^3} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{y}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\partial R_{J2}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{J3}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{J4}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{J5}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{22}}{\partial \mathbf{y}}, \quad (5.19)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{z}}{r^3} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{z}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\partial R_{J2}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{J3}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{J4}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{J5}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{22}}{\partial \mathbf{z}}. \quad (5.20)$$

5.3 Sistema Médio

Agora, escreveremos a função de perturbação da sonda que orbita Mercúrio em função dos elementos orbitais da sonda e do terceiro corpo (Sol). São eles: a o semieixo maior da sonda, e a excentricidade da sonda, I a inclinação da órbita da sonda em relação ao plano equatorial de Mercúrio, Ω ascensão reta do nodo ascendente, w argumento do periastro, f a anomalia verdadeira, l a anomalia média e n o movimento médio. Os elementos orbitais correspondentes ao Sol serão denotados pelo subíndice $\odot$.

De acordo com a Figura (8), através da lei dos senos, podemos escrever

$$\frac{\sin(\phi)}{\sin(I)} = \frac{\sin(f + w)}{\sin(\pi/2)}, \quad (5.21)$$

portanto,

$$\sin(\phi) = \sin(f + w) \sin(I), \quad (5.22)$$

e substituindo em 5.6 podemos reescrever as perturbações causadas pelos harmônicos zonais de Mercúrio

$$R_{J2} = -\frac{1}{2} J_2 R_M^2 \frac{a^3 n^2}{r^3} (3 \sin^2(I) \sin^2(w + f) - 1), \quad (5.23)$$

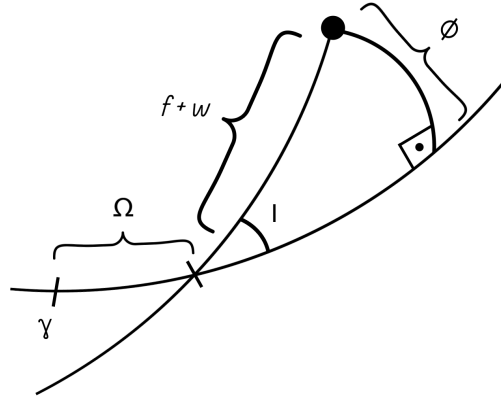


Figura 8 – Triângulo esférico que relaciona o plano orbital do satélite com o plano de referência

$$R_{J3} = -\frac{1}{2}J_3R_M^3\frac{a^4}{r^4}\frac{n^2}{a}(5\sin^3(I)\sin^3(w+f) - 3\sin(I)\sin(w+f)), \quad (5.24)$$

$$R_{J4} = -\frac{1}{8}J_4R_M^4\frac{a^5}{r^5}\frac{n^2}{a^2}(35\sin^4(I)\sin^4(w+f) - 30\sin^2(I)\sin^2(w+f) + 3), \quad (5.25)$$

$$R_{J5} = -\frac{1}{8}J_5R_M^5\frac{a^6}{r^6}\frac{n^2}{a^3}(63\sin^5(I)\sin^5(w+f) - 70\sin^3(I)\sin^3(w+f) + 15\sin(I)\sin(w+f)). \quad (5.26)$$

E para Mercúrio, a expressão da perturbação R_{22} é a mesma que foi desenvolvida no capítulo 2, porém sem S_{22}

$$R_{22} = 3\frac{R^2\mu}{r^3}C_{22}[\cos(2\Omega - \nu t)(\cos^2(f+w) - \sin^2(f+w)\cos^2 I) - \sin(2\Omega - \nu t)\sin(2f+2w)\cos I]. \quad (5.27)$$

Relembrando, a expressão da perturbação Sol

$$U_{3b} = \mu_{\odot} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right), \quad (5.28)$$

porém, como $|\mathbf{r}_{\odot}| \gg |\mathbf{r}|$, podemos escrever a primeira parcela que está dentro do parenteses em uma expansão de Taylor em função dos polinômios de Legendre até segunda ordem

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|} = \frac{1}{r_{\odot}} \left(1 + \frac{r}{r_{\odot}} \cos(\theta) + \left(\frac{r}{r_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (5.29)$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_\odot$ e os Polinômios de Legendre são $P_0(\cos(\theta)) = 1$, $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ e $P_2(\cos(\theta)) = (3\cos(\theta) - 1)/2$. Aplicando (5.29) em (5.28), teremos

$$U_{3b} = \mu_\odot \left(\frac{1}{r_\odot} \left(1 + \frac{r}{r_\odot} \cos(\theta) + \left(\frac{r}{r_\odot} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\odot}{r_\odot^3} \right). \quad (5.30)$$

Entretanto, como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\odot = rr_\odot \cos(\theta)$, podemos escrever

$$U_{3b} = \mu_\odot \left(\frac{1}{r_\odot} \left(1 + \frac{r}{r_\odot} \cos(\theta) + \left(\frac{r}{r_\odot} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{rr_\odot \cos(\theta)}{r_\odot^3} \right), \quad (5.31)$$

e simplificando o $P_1(\cos \theta)$ com o último termo, obtemos

$$U_{3b} = -\frac{\mu_\odot}{r_\odot} \left(1 - \left(\frac{r}{r_\odot} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (5.32)$$

A expressão do potencial devido a PRS é dada por

$$U_{PRS} = -\beta \mu_\odot \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot\|}. \quad (5.33)$$

De forma análoga ao caso do Sol, podemos reescrever o potencial da PRS expandindo $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\odot\|$ em função dos polinômios de Legendre até segunda ordem

$$U_{PRS} = -\beta \left[1 + \mu_\odot \frac{r}{r_\odot^2} \cos \theta + \frac{\mu_\odot}{2r_\odot} \left(\frac{r}{r_\odot} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (5.34)$$

Contudo, conforme mencionado anteriormente, θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_\odot$. Logo,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\odot}{rr_\odot} \quad (5.35)$$

sendo que

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega) \cos(w + f) - \sin(\Omega) \sin(w + f) \cos(I) \\ \sin(\Omega) \cos(w + f) + \cos(\Omega) \sin(w + f) \cos(I) \\ \sin(w + f) \sin(I) \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

$$\frac{\mathbf{r}_\odot}{r_\odot} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_\odot) \cos(w_\odot + f_\odot) - \sin(\Omega_\odot) \sin(w_\odot + f_\odot) \cos(I_\odot) \\ \sin(\Omega_\odot) \cos(w_\odot + f_\odot) + \cos(\Omega_\odot) \sin(w_\odot + f_\odot) \cos(I_\odot) \\ \sin(w_\odot + f_\odot) \sin(I_\odot) \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Para confirmar as fórmulas apresentadas em (TRESACO *et al.*, 2018), tomaremos $w_{\odot} = 0$. Efetuando a multiplicação de (5.36) e (5.37) e fatorando $\sin(f)$ e $\cos(f)$, podemos reescrever (5.38) como

$$\cos(\theta) = \alpha \cos(f) + \gamma \sin(f) \quad (5.38)$$

onde α e γ são

$$\begin{aligned} \alpha = & \cos(w) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \cos(f_{\odot}) + \sin(I) \sin(I_{\odot}) \sin(w) \sin(f_{\odot}) + \cos(w) \cos(I_{\odot}) \sin(\Omega - \Omega_{\odot}) \sin(f_{\odot}) \\ & - \sin(w) \cos(I) \sin(\Omega - \Omega_{\odot}) \cos(f_{\odot}) + \sin(w) \cos(I) \cos(I_{\odot}) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \sin(f_{\odot}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & -\sin(w) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \cos(f_{\odot}) + \sin(I) \sin(I_{\odot}) \cos(w) \sin(f_{\odot}) - \sin(w) \cos(I_{\odot}) \sin(\Omega - \Omega_{\odot}) \sin(f_{\odot}) \\ & - \cos(w) \cos(I) \sin(\Omega - \Omega_{\odot}) \cos(f_{\odot}) + \cos(w) \cos(I) \cos(I_{\odot}) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \sin(f_{\odot}). \end{aligned}$$

Dado que as ressonâncias procuradas envolvem a anomalia média do Sol ($l_{\odot}$) e os elementos de longo período do satélite, faremos uma substituição em que $f_{\odot}$ será escrito em uma série em termos de $l_{\odot}$ (BROUWER; CLEMENCE, 1961)

$$\begin{aligned} f_{\odot} = & l_{\odot} + \left(2e_{\odot} - \frac{e_{\odot}^3}{4} + \frac{5e_{\odot}^5}{96} + \frac{107e_{\odot}^7}{4608} \right) \sin(l_{\odot}) \\ & + \left(\frac{5e_{\odot}^2}{4} - \frac{11e_{\odot}^4}{24} + \frac{17e_{\odot}^6}{192} \right) \sin(2l_{\odot}) + \\ & + \left(\frac{13e_{\odot}^3}{12} - \frac{43e_{\odot}^5}{64} + \frac{95e_{\odot}^7}{512} \right) \sin(3l_{\odot}) + \\ & + \left(\frac{103e_{\odot}^4}{96} - \frac{451e_{\odot}^6}{480} \right) \sin(4l_{\odot}) + \\ & + \left(\frac{1097e_{\odot}^5}{960} - \frac{5957e_{\odot}^7}{4608} \right) \sin(5l_{\odot}) + \\ & + \frac{1223e_{\odot}^6 \sin(6l_{\odot})}{960} + \frac{47273e_{\odot}^7 \sin(7l_{\odot})}{32256}. \end{aligned}$$

Fazendo uso de (5.38) podemos reescrever o potencial do terceiro corpo e o da PRS como

$$U_{3b} = -\frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_{\odot}} \right)^2 3(\alpha \cos(f) + \gamma \sin(f))^2 - 1 \right), \quad (5.39)$$

$$U_{PRS} = -\beta \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \left(1 + \frac{r}{r_{\odot}} (\alpha \cos(f) + \gamma \sin(f)) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_{\odot}} \right)^2 3(\alpha \cos(f) + \gamma \sin(f))^2 - 1 \right). \quad (5.40)$$

5.3.1 Médias

Iremos agora eliminar os termos de curto período das equações desenvolvidas acima a fim de obter expressões mais simples e que necessitarão de menos custo computacional para serem integradas. Além disso, sem os termos de curto período, poderemos visualizar os cossenos contendo os ângulos ressonantes mais facilmente. A média será efetuada em relação a anomalia média do satélite (l). Considerando uma função genérica F , a média é definida como

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F dl.$$

Como queremos a média sobre a anomalia média, precisamos olhar para os termos que variam com l , que são: a anomalia verdadeira (f), a distância (r) e a anomalia excêntrica (E).

Como as expressões das perturbações (5.23), (5.24), (5.25), (5.47) e (5.27) possuem termos em f e em r , usaremos as seguintes relações de (BROUWER; CLEMENCE, 1961) para efetuar a média

$$dl = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right)^2 df, \quad \frac{a}{r} = \frac{1+e \cos(f)}{1-e^2}.$$

Iniciando com R_{J2} , temos

$$\langle R_{J2} \rangle = -\frac{1}{2} J_2 R_M^2 n^2 \left(3 \sin^2(I) \left\langle \frac{a^3}{r^3} \sin^2(w+f) \right\rangle - \left\langle \frac{a^3}{r^3} \right\rangle \right),$$

portanto os termos que iremos mediar aqui serão:

$$\left\langle \frac{a^3}{r^3} \sin^2(w+f) \right\rangle = \frac{1}{2(1-e^2)^{3/2}}$$

$$\left\langle \frac{a^3}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}. \quad (5.41)$$

Substituindo em $\langle R_{J2} \rangle$

$$\langle R_{J2} \rangle = -\frac{1}{4} \frac{J_2 R_M^2 n^2}{(1-e^2)^{3/2}} (3 \sin^2(I) - 2). \quad (5.42)$$

De forma análoga, para $\langle R_{J3} \rangle$, $\langle R_{J4} \rangle$, $\langle R_{J5} \rangle$ e $\langle R_{22} \rangle$

$$\langle R_{J3} \rangle = -\frac{1}{2} J_3 R_M^3 \frac{n^2}{a} (5 \sin^3(I) \left\langle \sin^3(w+f) \frac{a^4}{r^4} \right\rangle - 3 \sin(I) \left\langle \sin(w+f) \frac{a^4}{r^4} \right\rangle), \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \sin^3(w+f) \frac{a^4}{r^4} \right\rangle &= \frac{3e \sin(w)}{4(-e^2+1)^{\frac{5}{2}}}, \\
\left\langle \sin(w+f) \frac{a^4}{r^4} \right\rangle &= \frac{e \sin(w)}{(-e^2+1)^{\frac{5}{2}}}, \\
\langle R_{J3} \rangle &= -\frac{3J_3 R_M^3 n^2 \sin(I) e \sin(w) (5(\sin^2(I)) - 4)}{8a(-e^2+1)^{\frac{5}{2}}}. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

$$\langle R_{J4} \rangle = -\frac{1}{8} J_4 R_M^4 \frac{n^2}{a^2} (35 \sin^4(I) \left\langle \sin^4(w+f) \frac{a^5}{r^5} \right\rangle - 30 \sin^2(I) \left\langle \sin^2(w+f) \frac{a^5}{r^5} \right\rangle + 3 \left\langle \frac{a^4}{r^4} \right\rangle), \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \sin^4(w+f) \frac{a^5}{r^5} \right\rangle &= -\frac{3(2e^2 \cos(2w) - 3e^2 - 2)}{16(-e^2+1)^{\frac{7}{2}}}, \\
\left\langle \sin^2(w+f) \frac{a^5}{r^5} \right\rangle &= -\frac{3e^2 \cos(2w) - 6e^2 - 4}{8(-e^2+1)^{\frac{7}{2}}}, \\
\left\langle \frac{a^4}{r^4} \right\rangle &= \frac{3e^2 + 2}{2(-e^2+1)^{\frac{7}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle R_{J4} \rangle &= \frac{3J_4 R_M^4 n^2}{128a^2(-e^2+1)^{\frac{7}{2}}} \left(70 \sin^4(I) \cos(2w) e^2 - 105 \sin^4(I) e^2 \right. \\
&\quad \left. - 60 \sin^2(I) \cos(2w) e^2 - 70 \sin^4(I) + 120 \sin^2(I) e^2 \right. \\
&\quad \left. + 80 (\sin^2(I)) - 24e^2 - 16 \right). \tag{5.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle R_{J5} \rangle &= -\frac{1}{8} J_5 R_M^5 \frac{a^6 n^2}{r^6 a^3} \left(63 \sin^5(I) \left\langle \sin^5(w+f) \frac{a^6}{r^6} \right\rangle - 70 \sin^3(I) \left\langle \sin^3(w+f) \frac{a^6}{r^6} \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + 15 \sin(I) \left\langle \sin(w+f) \frac{a^6}{r^6} \right\rangle \right). \tag{5.47}
\end{aligned}$$

$$\left\langle \sin^5(w+f) \frac{a^6}{r^6} \right\rangle = -\frac{5e(e^2 \sin(3w) - 6 \sin(w) e^2 - 8 \sin(w))}{32(-e^2+1)^{\frac{9}{2}}}, \tag{5.48}$$

$$\left\langle \sin^3(w+f) \frac{a^6}{r^6} \right\rangle = -\frac{e(e^2 \sin(3w) - 9 \sin(w) e^2 - 12 \sin(w))}{8(-e^2+1)^{\frac{9}{2}}}, \tag{5.49}$$

$$\left\langle \sin(w+f) \frac{a^6}{r^6} \right\rangle = \frac{\sin(w) e (3e^2 + 4)}{2(-e^2+1)^{\frac{9}{2}}}, \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned} \langle R_{J5} \rangle = & \frac{5J_5 R_M^5 n^2}{256a^3 (-e^2 + 1)^{\frac{9}{2}}} \left(252 \cos^2(w) e^2 \sin(I)^4 - 224 \cos^2(w) e^2 \sin(I)^2 \right. \\ & \left. - 441e^2 \sin(I)^4 + 560e^2 \sin(I)^2 - 504 \sin(I)^4 - 144e^2 + 672 \sin(I)^2 - 192 \right) \sin(w) \sin(I) e. \end{aligned} \quad (5.51)$$

E para R_{22}

$$\begin{aligned} \langle R_{22} \rangle = & 3 \frac{R^2 \mu}{a^3} C_{22} [\cos(2\Omega - 2\nu t) \left(\left\langle \frac{a^3}{r^3} \cos^2(f + w) \right\rangle - \left\langle \frac{a^3}{r^3} \sin^2(f + w) \right\rangle \cos^2 I \right) \\ & - \sin(2\Omega - \nu t) \left\langle \frac{a^3}{r^3} \sin(2f + 2w) \right\rangle \cos I], \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\left\langle \frac{a^3}{r^3} \cos^2(f + w) \right\rangle = \frac{1}{2(-e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.53)$$

$$\left\langle \frac{a^3}{r^3} \sin(2f + 2w) \right\rangle = 0, \quad (5.54)$$

e a segunda média já foi feita anteriormente em $\langle R_{J2} \rangle$. Logo,

$$\langle R_{22} \rangle = -\frac{3 \cos(2\Omega - \nu t) (\cos^2(I) - 1) R^2 n^2 C_{22}}{2(-e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.55)$$

Vamos mediar agora U_{3b} e U_{PRS} utilizando as relações da anomalia excêntrica (E)

$$dl = (1 - e \cos(E)) dE, \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos(E)$$

$$\sin(f) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cos(E)}, \quad \cos(f) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cos(E)}$$

Notamos que em (TRESACO; ELIPE; CARVALHO, 2016) na página 4 há um erro de sinal na expressão de $\cos(f)$, o qual ocasiona em um erro de sinal na média do primeiro termo da PRS. Por conta disso, a última parcela da expressão (27) da mesma página, possui o sinal trocado. A princípio, para valores baixos de β , este erro não deve afetar drasticamente a dinâmica do satélite, mas pode se tornar significativo a medida que a intensidade da PRS aumenta.

As médias de U_{3b} e U_{PRS} serão dadas através das operações

$$\begin{aligned} \langle U_{3b} \rangle = & \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \left(1 - \frac{a^2}{2r_{\odot}^2} \left(3\alpha^2 \left\langle \left(\frac{r}{a} \cos f \right)^2 \right\rangle + 3\gamma^2 \left\langle \left(\frac{r}{a} \sin f \right)^2 \right\rangle \right. \right. \\ & \left. \left. + 6\alpha\gamma \left\langle \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \cos f \right\rangle - \left\langle \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}
\langle U_{PRS} \rangle = & -\beta \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}} \left(1 + \frac{a}{r_{\odot}} \left(\alpha \left\langle \frac{r}{a} \cos(f) \right\rangle + \gamma \left\langle \frac{r}{a} \sin(f) \right\rangle \right) \right. \\
& + \frac{a^2}{2r_{\odot}^2} \left(3\alpha^2 \left\langle \left(\frac{r}{a} \cos f \right)^2 \right\rangle + 3\gamma^2 \left\langle \left(\frac{r}{a} \sin f \right)^2 \right\rangle \right. \\
& \left. \left. + 6\alpha\gamma \left\langle \left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin f \cos f \right\rangle - \left\langle \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\rangle \right) \right). \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Efetutando todas as operações, as expressões médias são dadas por

$$\langle R_{3b} \rangle = \frac{3a^2 n_{\odot}^2}{4} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 \left(\alpha^2(1 + 4e^2) + \gamma^2(1 - e^2) - \left(\frac{2}{3} + e^2 \right) \right) \quad (5.58)$$

$$\langle R_{PRS} \rangle = -\beta \frac{3a^2 n_{\odot}^2}{4} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 \left(\alpha^2(1 + 4e^2) + \gamma^2(1 - e^2) - \left(\frac{2}{3} + e^2 \right) - \frac{2\alpha e r_{\odot}}{a} \right). \quad (5.59)$$

Com todas as perturbações já mediadas, o potencial perturbativo médio total será

$$\langle R \rangle = \langle R_{J2} \rangle + \langle R_{J3} \rangle + \langle R_{J4} \rangle + \langle R_{J5} \rangle + \langle R_{22} \rangle + \langle R_{3b} \rangle + \langle R_{PRS} \rangle. \quad (5.60)$$

6 SISTEMA TERRA-SONDA-SOL

De forma similiar ao que foi feito no capítulo anterior, estudaremos agora a dinâmica de um satélite orbitando a Terra sobre o efeito da não esfericidade da mesma, da perturbação do Sol e também da pressão de radiação Solar.

6.1 Geopotencial

Devido a sua rotação, a Terra não é uma esfera perfeita, mas uma esfera achatada com diâmetro equatorial aproximadamente 20 km maior do que o diâmetro polar. Por conta disso, um satélite que está orbitando acima ou abaixo do equador sofrerá uma força diferente do que se estivesse orbitando o equador, na verdade o satélite sofrerá uma força de alinhamento com o equador (MONTENBRUCK; GILL, 2002). A ordem de magnitude dessa força gerada pela não esfericidade da Terra é da ordem de 10^{-3} da força central, ou seja, para a construção de um modelo realista, não podemos desconsiderar esse efeito (MONTENBRUCK; GILL, 2002).

O potencial desenvolvido no primeiro capítulo aplicado para a Terra é chamado de Geopotencial. O conhecimento do Geopotencial é fundamental na geodésia e em outras áreas de estudo relacionadas à Terra, permitindo o cálculo do campo gravitacional em qualquer ponto da superfície terrestre e a determinação da órbita de satélites, estudos da dinâmica da Terra e outras aplicações importantes.

Analogamente ao sistema de Mercúrio, consideraremos que a origem do sistema de coordenadas está localizada no centro do planeta Terra. Portanto, podemos escrever o Geopotencial como

$$U_{\oplus} = \frac{\mu_{\oplus}}{r} + \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n C_{n0} P_{n0}(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right] \quad (6.1)$$

onde $R_{\oplus}$ e $\mu_{\oplus}$ são respectivamente o raio e o parâmetro gravitacional da Terra. Para a Terra consideraremos os harmônicos J_2 , J_3 , J_4 , C_{22} , S_{22} , C_{31} , S_{31} .

A parte zonal (com simetria axial) do potencial da Terra será dada por

$$R_{J_{n\oplus}} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[\left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 J_2 P_2(\sin(\phi)) + \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^3 J_3 P_3(\sin(\phi)) + \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^4 J_4 P_4(\sin(\phi)) \right]. \quad (6.2)$$

em que ϕ é a latitude do satélite.

A outra contribuição do potencial da Terra é a parte tesseral (sem simetria axial)

$$U_{\oplus} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (6.3)$$

as quais são descritas pelas expressões

$$R_{22\oplus} = \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 P_{22}(\sin \phi) (C_{22} \cos(2\lambda) + S_{22} \sin(2\lambda)). \quad (6.4)$$

$$R_{31\oplus} = \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^3 P_{31}(\sin \phi) (C_{31} \cos(\lambda) + S_{31} \sin(\lambda)). \quad (6.5)$$

6.2 Sistema Exato

As equações exatas das perturbações devido a não esfericidade da Terra são desenvolvidas da mesma forma que foi para Mercúrio. A parte zonal é dada por

$$R_{J2\oplus} = -\frac{1}{2} \frac{J_2 R_{\oplus}^2 \mu_{\oplus}}{r^3} \left(3 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right), \quad (6.6)$$

$$R_{J3\oplus} = -\frac{1}{2} \frac{J_3 R_{\oplus}^3 \mu_{\oplus}}{r^4} \left(5 \left(\frac{z}{r} \right)^3 - 3 \frac{z}{r} \right), \quad (6.7)$$

$$R_{J4\oplus} = -\frac{1}{8} \frac{J_4 R_{\oplus}^4 \mu_{\oplus}}{r^5} \left(35 \left(\frac{z}{r} \right)^4 - 30 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 3 \right). \quad (6.8)$$

E a parte tesseral

$$R_{22\oplus} = \frac{3\mu_{\oplus} R_{\oplus}^2}{r^5} \left(C_{22} ((x^2 - y^2) \cos(2\nu t) + 2xy \sin(2\nu t)) + S_{22} (2xy \cos(2\nu t) - (x^2 - y^2) \sin(2\nu t)) \right), \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
R_{31\oplus} = \frac{\mu_{\oplus} R_{\oplus}^3}{r^3} & \left[\frac{15}{2} C_{31} \frac{x}{r} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \cos(\nu t) + \frac{15}{2} C_{31} \frac{y}{r} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \sin(\nu t) \right. \\
& + \frac{15}{2} S_{31} \frac{y}{r} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \cos(\nu t) - \frac{15}{2} S_{31} \frac{x}{r} \left(\frac{z}{r} \right)^2 \sin(\nu t) \\
& \left. - \frac{3}{2} C_{31} \frac{x}{r} \cos(\nu t) - \frac{3}{2} C_{31} \frac{y}{r} \sin(\nu t) - \frac{3}{2} S_{31} \frac{y}{r} \cos(\nu t) + \frac{3}{2} S_{31} \frac{x}{r} \sin(\nu t) \right].
\end{aligned} \tag{6.10}$$

O potencial devido ao achatamento da Terra será

$$U_{\oplus} = R_{J2\oplus} + R_{J3\oplus} + R_{J4\oplus} + R_{22\oplus} + R_{31\oplus}. \tag{6.11}$$

Logo, a aceleração total sofrida pelo satélite será dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U_{\oplus} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3}, \tag{6.12}$$

e em coordenadas cartesianas

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\mu_{\oplus} \frac{\mathbf{x}}{r^3} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{x}_{\odot}}{\mathbf{r}_{\odot}} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\partial R_{J2\oplus}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{J3\oplus}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{J4\oplus}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{22\oplus}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R_{31\oplus}}{\partial \mathbf{x}}, \tag{6.13}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = -\mu_{\oplus} \frac{\mathbf{y}}{r^3} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{y}_{\odot}}{\mathbf{r}_{\odot}} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\partial R_{J2\oplus}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{J3\oplus}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{J4\oplus}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{22\oplus}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial R_{31\oplus}}{\partial \mathbf{y}}, \tag{6.14}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} = -\mu_{\oplus} \frac{\mathbf{z}}{r^3} - \mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{z}_{\odot}}{\mathbf{r}_{\odot}} \right) + \beta \mu_{\odot} \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\partial R_{J2\oplus}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{J3\oplus}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{J4\oplus}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{22\oplus}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial R_{31\oplus}}{\partial \mathbf{z}}. \tag{6.15}$$

6.3 Sistema Médio

As mesmas notações para os elementos orbitais do satélite apresentados no sistema médio de Mercúrio, serão usadas no sistema da Terra também. Portanto, a é o semieixo maior da sonda, e a excentricidade da sonda, I a inclinação da órbita da sonda em relação ao equador da Terra, Ω ascensão reta do nodo ascendente, w argumento do periastro, f a anomalia verdadeira, l a anomalia média e n o movimento médio. Os elementos orbitais correspondentes ao Sol serão denotados pelo subíndice $\odot$.

O desenvolvimento das equações médias para o sistema da Terra é análogo ao de Mercúrio. Logo, podemos reaproveitar as equações desenvolvidas no capítulo anterior. Para os zonais, temos

$$\langle R_{J2} \rangle = -\frac{1}{4} \frac{J_2 R_{\oplus}^2 n^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} (3 \sin^2(I) - 2). \quad (6.16)$$

$$\langle R_{J3} \rangle = -\frac{3J_3 R_{\oplus}^3 n^2 \sin(I) e \sin(w) (5 (\sin^2(I)) - 4)}{8a (-e^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}. \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \langle R_{J4} \rangle = & \frac{3J_4 R_{\oplus}^4 n^2}{128a^2 (-e^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} \left(70 \sin^4(I) \cos(2w) e^2 - 105 \sin^4(I) e^2 \right. \\ & - 60 \sin^2(I) \cos(2w) e^2 - 70 \sin^4(I) + 120 \sin^2(I) e^2 \\ & \left. + 80 (\sin^2(I)) - 24e^2 - 16 \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

E para os tesserais

$$\begin{aligned} \langle R_{22} \rangle = & 3R_{\oplus}^2 n^2 C_{22} \cos(-2\Omega + 2\nu t) \left(-\frac{\cos^2(I)}{2(-e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2(-e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + S_{22} \left(-\sin(-2\Omega + 2\nu t) \left(-\frac{\cos^2(I)}{2(-e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2(-e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \langle R_{31} \rangle = & \frac{3n^2 R_{\oplus}^3 e}{8a (-e^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \left(-15 C_{31} \cos(I) \sin(w) (\sin^2(I)) \sin(x) \right. \\ & + 15 \cos(x) \cos(I) \sin(w) (\sin^2(I)) S_{31} \\ & + 5 C_{31} \cos(x) (\sin^2(I)) \cos(w) \\ & + 5 (\sin^2(I)) \cos(w) \sin(x) S_{31} \\ & + 4 C_{31} \cos(I) \sin(w) \sin(x) \\ & - 4 \cos(x) \cos(I) \sin(w) S_{31} \\ & - 4 C_{31} \cos(x) \cos(w) \\ & \left. - 4 \cos(w) \sin(x) S_{31} \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

As expressões médias da perturbação do Sol e da PRS são iguais as de Mercúrio

$$\langle R_{3b} \rangle = \frac{3a^2 n_{\odot}^2}{4} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 \left(\alpha^2 (1 + 4e^2) + \gamma^2 (1 - e^2) - \left(\frac{2}{3} + e^2 \right) \right) \quad (6.21)$$

$$\langle R_{PRS} \rangle = -\beta \frac{3a^2 n_{\odot}^2}{4} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^3 \left(\alpha^2 (1 + 4e^2) + \gamma^2 (1 - e^2) - \left(\frac{2}{3} + e^2 \right) - \frac{2\alpha e r_{\odot}}{a} \right) \quad (6.22)$$

Portanto, a perturbação total média sobre o satélite no sistema Terra será

$$\langle R \rangle = \langle R_{J2\oplus} \rangle + \langle R_{J3\oplus} \rangle + \langle R_{J4\oplus} \rangle + \langle R_{22\oplus} \rangle + \langle R_{31\oplus} \rangle + \langle R_{3b} \rangle + \langle R_{PRS} \rangle. \quad (6.23)$$

7 RESULTADOS PARA O SISTEMA MERCÚRIO-SONDA-SOL

Para analisarmos como a Sonda se comporta sobre todos os efeitos perturbativos estudados nos capítulos anterior, integraremos as Equações Planetárias de Lagrange. Por conta das perturbações estarem mediadas em relação a anomalia média do satélite, o semieixo maior do satélite é constante.

As Equações Planetárias de Lagrange deduzidas em (BROUWER; CLEMENCE, 1961) são

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial w}, \quad (7.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \left[\cos I \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial w} - \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \Omega} \right], \quad (7.2)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial I}, \quad (7.3)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial I}. \quad (7.4)$$

7.1 Comparação Sistema Médio e Exato. Caso Mercúrio

Nesta seção faremos uso dos dois sistemas deduzidos anteriormente, o médio e exato. Resumidamente, os sistemas médios são modelos perturbativos em que todas as oscilações de curto período são cuidadosamente eliminadas seguindo operações muito bem consolidadas da Mecânica Celeste. Em geral, em astronomia, efeitos oscilatórios rápidos de pequena amplitude são desprezíveis. Desta forma, uma vez eliminados tais termos, o integrador numérico assume passos de longo período, reduzindo drasticamente o tempo de simulação. Assim, trabalhando com o sistema médio, podemos estudar toda a dinâmica do problema num intervalo de tempo, muito mais extenso, com um tempo de processamento insignificante se comparado ao sistema original.

Os valores dos harmônicos utilizados neste trabalho (tabela 2) são os mesmos de (TRESACO *et al.*, 2018), porém agora utilizaremos os coeficientes C_{nm} e S_{nm} corretos, isto é, aqueles desnormalizados. Além disso, como as equações do achatamento planetário foram desenvolvidas utilizando a notação J_n para representar os zonais, devemos ainda colocar um sinal negativo nos harmônicos zonais $C_{20}, C_{30}, C_{40}, C_{50}$ da tabela acima, pois $J_n = -C_{n,0}$ (MONTENBRUCK; GILL, 2002).

Coeficiente	Normalizado	Desnormalizado
C_{20}	$-2,25100 \times 10^{-5}$	$-5,03339 \times 10^{-5}$
C_{30}	$-4,71444 \times 10^{-6}$	$-1,24732 \times 10^{-5}$
C_{40}	$-5,89291 \times 10^{-6}$	$-1,76787 \times 10^{-5}$
C_{50}	$2,98686 \times 10^{-7}$	$9,90629 \times 10^{-7}$
C_{21}	$-1,61527 \times 10^{-8}$	$-2,08530 \times 10^{-8}$
S_{21}	$-1,36488 \times 10^{-8}$	$-1,76205 \times 10^{-8}$
C_{22}	$1,24973 \times 10^{-5}$	$8,066972 \times 10^{-6}$
S_{22}	$-2,09078 \times 10^{-8}$	$-1,349592 \times 10^{-8}$

Tabela 2 – Harmônicos do campo gravitacional de Mercúrio normalizados e desnormalizados.

O método que utilizamos para a comparação do sistema médio e exato se baseia em testes considerando diferentes valores da constante β , pois para todas as simulações que fizemos, variando todos os parâmetros, mas utilizando $\beta = 0$, o sistema médio e exato concordaram muito bem. Portanto, após diversas integrações para diferentes valores de β , observamos que para $\beta \leq 1 \times 10^{-5}$ ainda obtivemos uma concordância excelente entre os dois sistemas, enquanto que para valores de $\beta \geq 1 \times 10^{-5}$ a discordância aumenta. Para ilustrar tais resultados, tomamos casos, já bem conhecidos (CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022), onde w libra em 270° para dois semieixos distintos $a = 2900$ km, $a = 4500$ km e integramos os dois sistemas durante um longo período (1000 anos). Nas figuras (9(a) - 9(d)) é possível visualizar a concordância citada anteriormente pela comparação do sistema exato (preto) e médio (vermelho) para $\beta = 1 \times 10^{-5}$ onde ambas as integrações quase coincidem entre si. Na Figura (10(a) - 10(d)) para as mesmas condições, mas para $\beta = 9 \times 10^{-5}$, vemos a discordância entre os dois sistemas aumentar significativamente quando as curvas das duas integrações já estão quase completamente separadas. Entretanto, para ambos os casos ($\beta = 1 \times 10^{-5}$ e $\beta = 9 \times 10^{-5}$), w continua a librar.

É claro que valores altos de β causam maiores perturbações independente do sistema (médio ou exato) e, portanto, podem ocasionar até mesmo em colisões do satélite com o planeta hospedeiro. Também é óbvio que isto deva ocorrer com maior frequência, ou antes, no sistema exato do que no médio, pois neste as rápidas oscilações, independentemente das amplitudes grandes ou pequenas, não existem pois foram eliminadas no processo de média.

Comparações iniciais, com $\beta \leq 1 \times 10^{-5}$ mostraram boas concordâncias, no entanto um item fundamental para haver concordância razoável, é que as órbitas não colidam ou que o periastro seja suficientemente maior do que o raio equatorial. Esta constatação veio de simulações numéricas, mas aparentemente o valor numérico de β é outro fator relevante. A não colisão, seria uma condição necessária, e vamos brevemente abordar esta questão nas

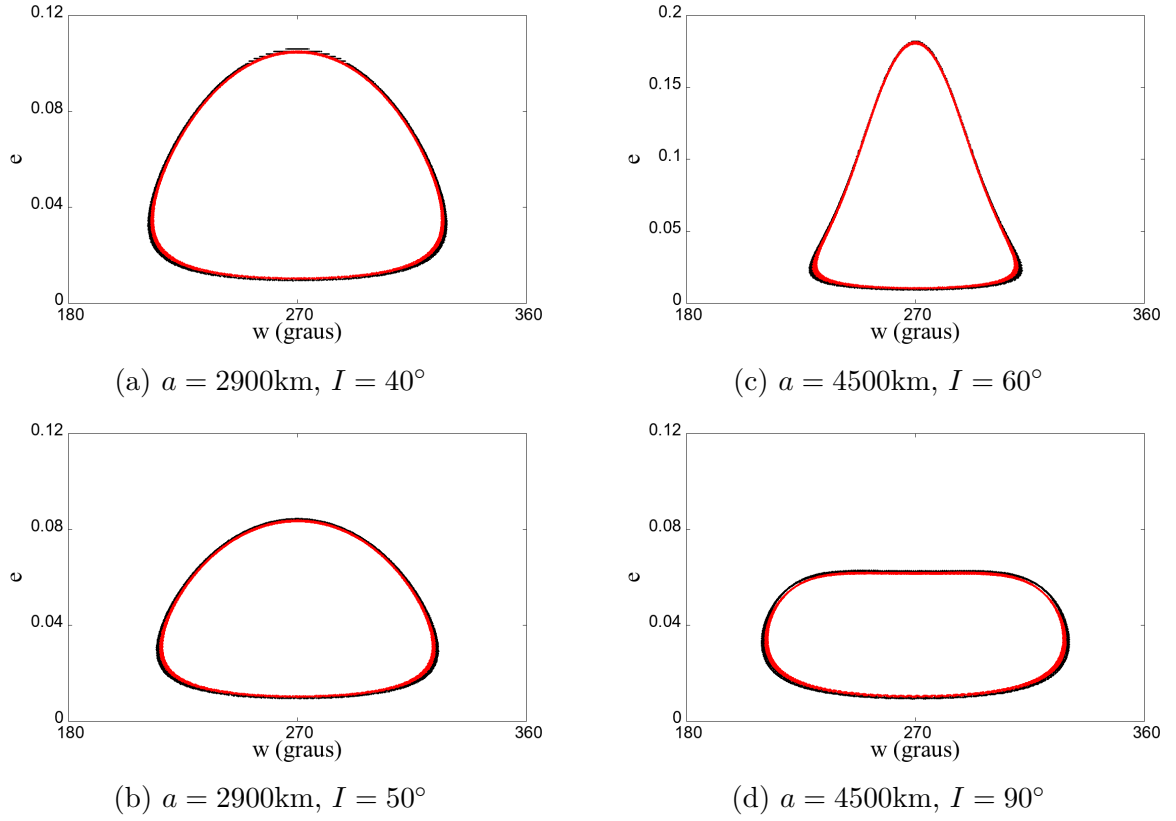


Figura 9 – Comparação do sistema exato (preto) e médio (vermelho) para diferentes semieixos e inclinações usando $\beta = 1 \times 10^{-5}$ para todos os gráficos. Condições iniciais: $e = 0,01$, $w = 270^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} .

figuras seguintes. No entanto apenas isso não é suficiente, pois o sistema médio exige que a função potencial do terceiro corpo seja também expandida em polinômios de Legendre. Isto se torna necessário para se realizar as médias da função perturbadora. Usualmente, na grande maioria dos casos, expande-se a função perturbadora devida ao Sol só até o termo de segundo grau (TRESACO *et al.*, 2018),(CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022). Este truncamento na segunda ordem, certamente deve ficar insuficiente para montar o sistema médio, em especial se a razão $\frac{r}{r_\odot}$ não for suficientemente pequena, (sondas com grande altitude e muito excêntricas). Em alguns casos a questão fica mais complexa, pois quanto maior é a altitude da sonda, maior a perturbação na sua excentricidade, devida a perturbação solar. Isto causa um $\frac{r}{r_\odot}$ significativo que compromete a convergência da série em polinômios de Legendre. Mesmo assim, em princípio conseguimos alguns casos onde qualitativamente o acordo foi bastante aceitável principalmente quando não ocorre a questão da quase colisão. Obviamente, casos de colisão não fazem sentido de serem simulados pois violam exatamente a questão fundamental da divergência da série de Polinômios de Legendre, em que $\frac{R}{r} > 1$. Por outro lado, devemos dizer que a montagem do sistema médio requer uma enorme quantidade de cálculos. Evidentemente usamos recursos

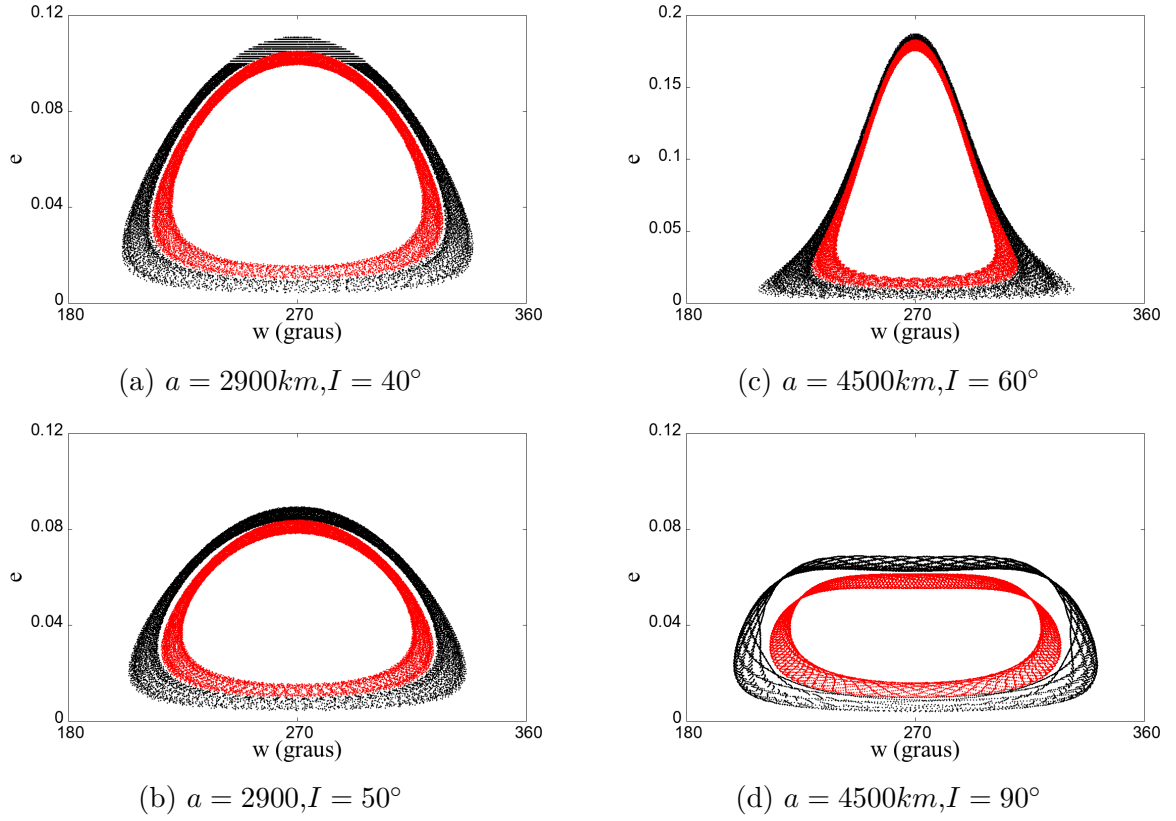


Figura 10 – Comparação do sistema exato (preto) e médio (vermelho) para diferentes semieixos e inclinações usando $\beta = 9 \times 10^{-5}$. Condições iniciais: $e = 0,01$, $w = 270^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} .

do Maple, sendo que estes cálculos foram repetidos em até três vezes. Nos nossos testes, nosso sistema médio aparenta ser ligeiramente superior aquele sugerido por (TRESACO *et al.*, 2018) (melhor concordância com o sistema exato, feito em coordenadas cartesianas).

7.2 Satélite próximo à inclinação crítica e a importância do harmônico J_5

Vimos no caso acima que o efeito da pressão de radiação, apesar de fraco, pode afetar diretamente a dinâmica do satélite, mudando principalmente sua excentricidade e pericentro. Utilizando agora o sistema médio como base para as integrações, estudaremos os efeitos da pressão de radiação para um satélite próximo a inclinação crítica. Estes casos, em específicos, são interessantes de serem estudados, pois como veremos, os efeitos da PRS são perceptíveis.

Podemos observar as consequências de usarmos β mais elevados nas Figuras 11 e 12, onde comparamos situações em que não há β e situações em que β está incluso num período de 200 mil dias de integração. Em ambos os gráficos escolhemos posicionar o satélite próximo a inclinação crítica $I = 63,2^\circ$. A princípio, podemos notar que a excentricidade e o pericentro são os elementos mais afetados. Como tomamos uma condição inicial, próximo

a inclinação crítica ($\approx 63,4^\circ$), ocorre a libração de w que é claramente vista quando $\beta = 0$ tanto na Figura 11 quanto na 12. Entretanto, quando incluímos a pressão de radiação, as librações de w de ambos os gráficos são quase destruídas. Em relação aos outros elementos orbitais, podemos verificar que para a excentricidade houve um aumento na amplitude, e para I e Ω não houve de fato mudanças significativas quando comparadas as da excentricidade e pericentro.

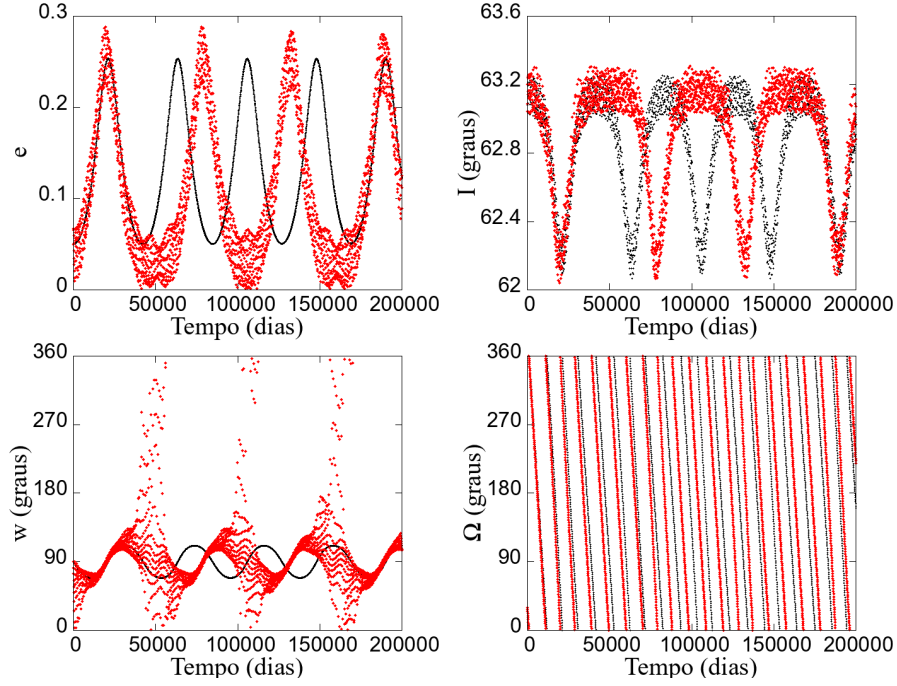


Figura 11 – Efeitos da pressão de radiação na dinâmica do satélite. Em preto utilizamos $\beta = 0$ e em vermelho $\beta = 1 \times 10^{-3}$. Condições iniciais: $a = 4392,0$ km, $e = 0,05$, $i = 63,2^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 30^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} .

Quando posicionamos satélites próximo a inclinação crítica, devemos tomar cuidado com uma região de risco ($i \approx 66^\circ$ a $i \approx 68^\circ$), onde verificamos que satélites posicionados nesta região apresentam aumentos drásticos na excentricidade a ponto de colidir com o planeta. Estas situações podem ocorrer para diferentes altitudes. Podemos observar estes casos nas figuras (13(a) - 13(f)), onde em cada Figura foram simulados 6 órbitas com $I = 65^\circ$ a $I = 70^\circ$ com $\Delta I = 1^\circ$ para as mesmas condições iniciais. Em todos os casos podemos notar que órbitas localizadas em $I = 66^\circ$, $I = 67^\circ$ e $I = 68^\circ$ sempre ultrapassam a linha tracejada, a qual representa o limite para impacto e, portanto, satélites nestas regiões sempre irão colidir com o planeta. Em (13(f)) podemos observar que todas as curvas ultrapassaram o limite para impacto e, isto se deve às perturbações da PRS e do Sol se tornarem mais intensas a medida que o satélite se distancia de Mercúrio. Apesar de tudo, estas órbitas são apenas fictícias, visto que uma das condições para validação das simulações no sistema médio é a não colisão do satélite.

Para casos próximos à inclinação crítica, onde ocorre libração de $w = 90^\circ$, é possível

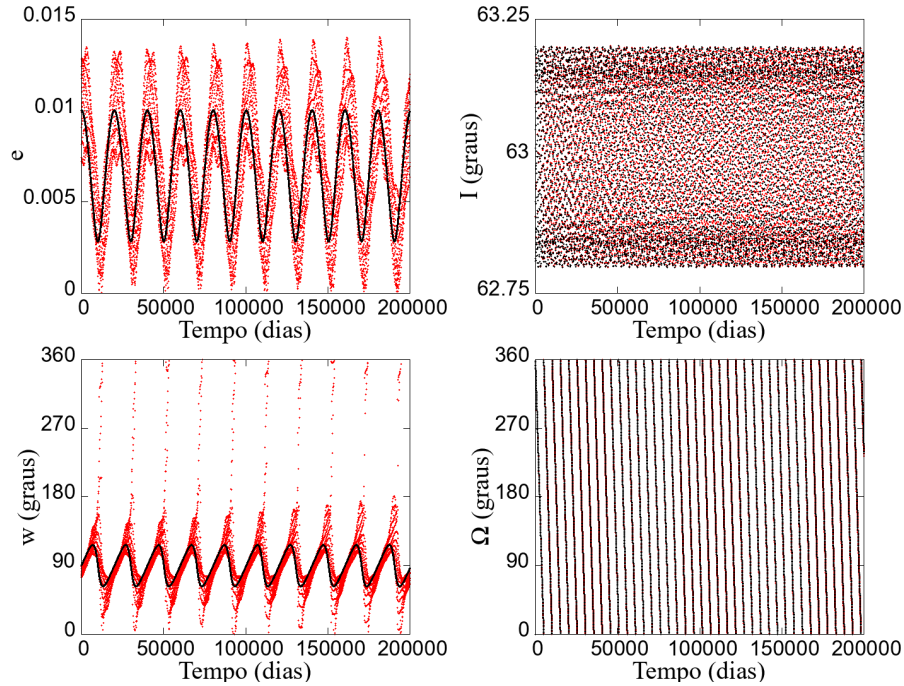


Figura 12 – Efeitos da PRS na dinâmica do satélite próximo à inclinação crítica. Em preto não há presença da PRS ($\beta = 0$) e em vermelho há pressão de radiação ($\beta = 9 \times 10^{-5}$). Condições iniciais: $a = 3500,0$ km, $e = 0,01$, $i = 63,2^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} .

observar outros dois tipos de comportamento: libração de w em 270° e outro caso em que w se comporta de forma mais caótica e passa a librar em dois centros diferentes, em 90° e em 270° e em outros momentos passa a circular. Em algumas destas simulações, observamos que o harmônico J_5 , apesar de ser menos relevante quando comparado aos outros, passa a ter certa importância.

Um exemplo é o caso da Figura 14 onde podemos ver as principais mudanças ocorrerem quando retiramos J_5 do sistema. Nas Figura da esquerda, e é estável variando de 0,01 a 0,28 aproximadamente enquanto que w libra em torno de 90° durante toda a integração. Entretanto, quando retiramos J_5 (gráficos da direita) e cresce mais (0,01 a 0,35 aproximadamente) e w apresenta um comportamento mais irregular, passando a librar na maior parte do tempo em $w = 270^\circ$ e circular em outros momentos. Ou seja, apesar de ser considerado menos relevante, a perturbação de J_5 pode apresentar comportamentos relevantes em situações como esta. As razões para tal comportamento não estão muito claras ainda, acreditamos que a explicação requer uma análise detalhada da estabilidade dos pontos de equilíbrio.

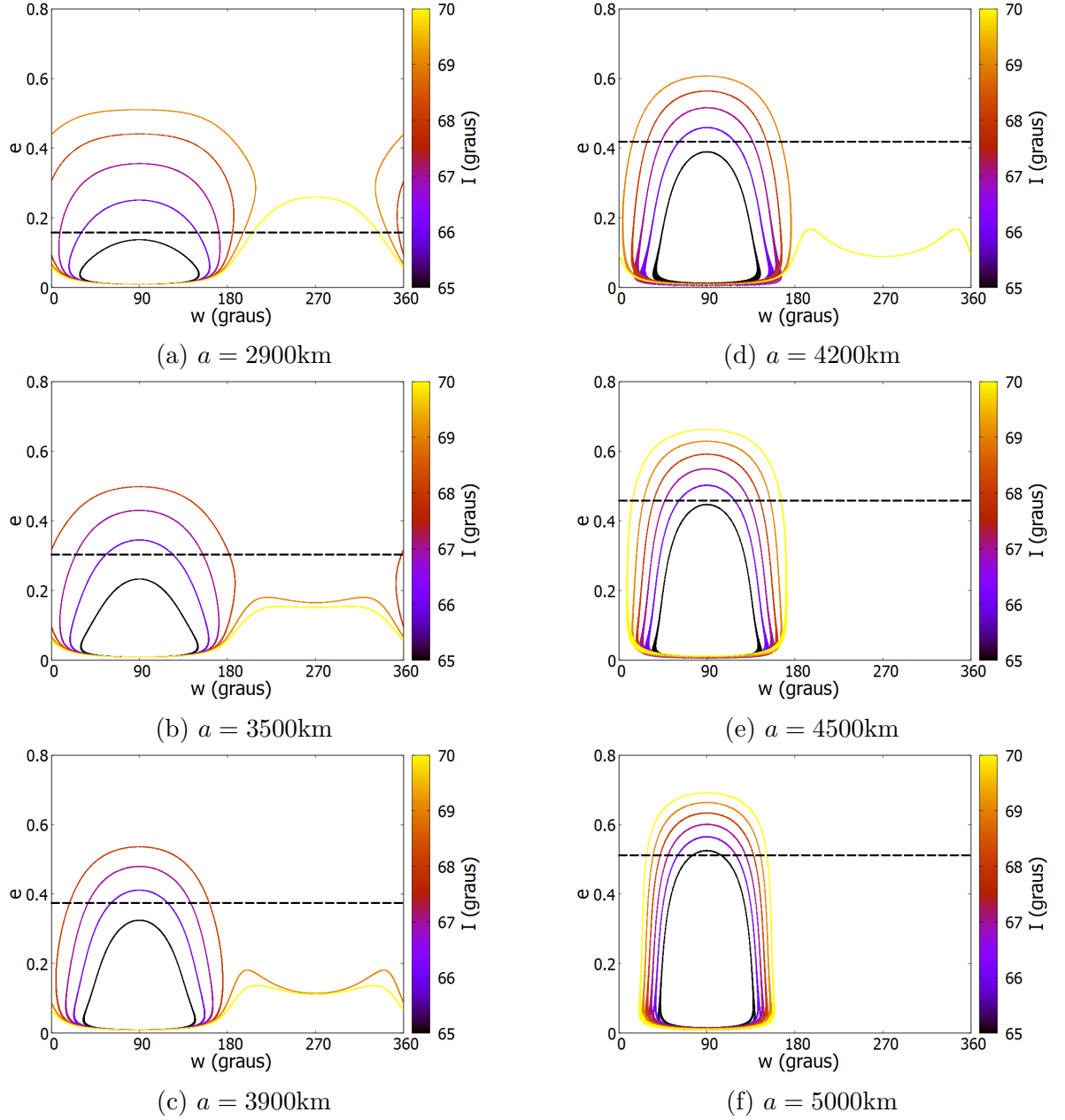


Figura 13 – Algumas órbitas de satélites próximo a inclinação crítica para diferentes altitudes. A linha preta tracejada representa o limite de e para impacto. Condições iniciais: $e = 0,01$, $w = 90^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ e $I = 65^\circ \dots 70^\circ$ com $\Delta I = 1^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} .

7.3 Ressonâncias Caso Mercúrio

Inicialmente, o objetivo primordial deste estudo consistia na identificação de ressonâncias para o satélite em órbita ao redor de Mercúrio, considerando os efeitos das perturbações previamente mencionadas. As ressonâncias buscadas envolvem os elementos seculares do satélite (w , Ω) e o movimento médio do Sol, ou seja, combinações do tipo $\pm w \pm \Omega \pm l_\odot = 0$ e $\pm w \pm l_\odot = 0$. Essas combinações ressonantes são encontradas quando a expansão da perturbação devido a PRS é truncada até a primeira ordem e assumindo

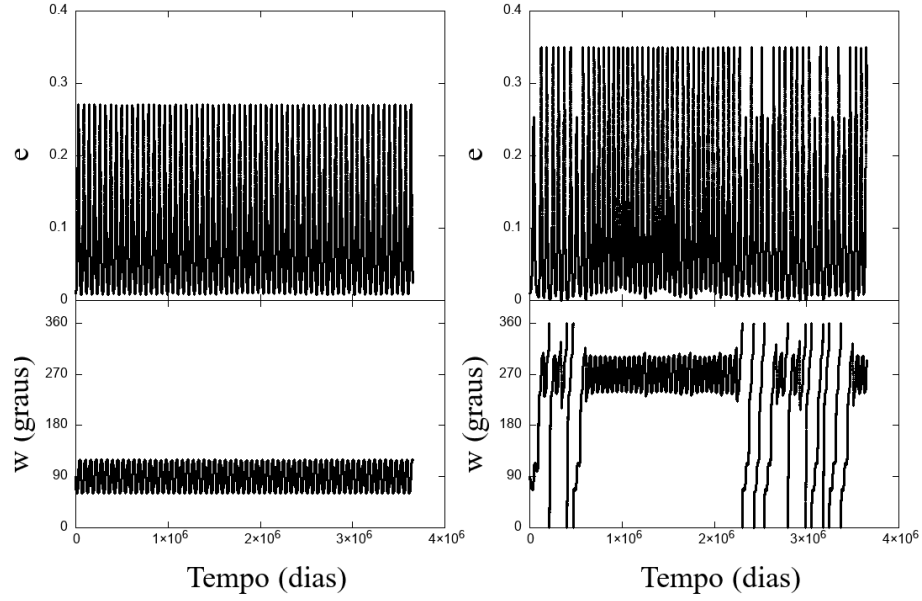


Figura 14 – Satélite próximo à inclinação crítica. Condições iniciais: $a = 4392,0$ km, $e = 0,01$, $i = 63,2^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 30^\circ$. A esquerda os harmônicos utilizados foram: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} . A direita: J_2 , J_3 , J_4 e C_{22} .

$e_\odot = 0$ implicando em $f_\odot = l_\odot$. Entretanto, como será mostrado nesta seção, não será possível achar ressonâncias desse tipo para o caso de Mercúrio e o motivo será explicado.

Relembrando, a expressão da perturbação devido a PRS é

$$\mathbf{U}_{PRS} = -\beta\mu_\odot \left(\frac{1}{|r - r_\odot|} \right). \quad (7.5)$$

Como discutido várias vezes anteriormente, podemos expandir o termo entre parênteses em polinômios de Legendre, pois $r_\odot \gg r$. Entretanto, como queremos mostrar os termos mais fortes neste momento, iremos até a primeira ordem. Portanto,

$$U_{PRS} = -\frac{\beta\mu_\odot}{r_\odot} \left[1 + \frac{r}{r_\odot} (\alpha \cos f + \gamma \sin f) \right]. \quad (7.6)$$

Executando a média sobre a anomalia média do satélite da mesma forma que foi feita nos capítulos 5 e 6, temos

$$\begin{aligned} U_{PRS} = \frac{3\beta\mu_\odot ea}{8r_\odot^2} & ((\cos I + 1)(\cos I_\odot + 1) \cos(l_\odot - w - \Omega) \\ & + (\cos I - 1)(\cos I_\odot - 1) \cos(l_\odot - w + \Omega) \\ & - (\cos I - 1)(\cos I_\odot + 1) \cos(l_\odot + w - \Omega) \\ & + 2 \sin I \sin I_\odot \cos(-w + l_\odot) \\ & - (\cos I + 1)(\cos I_\odot - 1) \cos(l_\odot + w + \Omega) \\ & - 2 \sin I \sin I_\odot \cos(w + l_\odot)). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Podemos observar em (7.7) as possíveis combinações de ângulos ressonantes para o satélite ditas no início desta seção. A fim de avaliarmos numericamente estas ressonâncias, consideraremos a perturbação mais relevante sofrida pelo satélite levando em consideração que o mesmo está próximo ao planeta hospedeiro, portanto, R_{J2} . Logo as eqs. (7.3) e (7.4) se tornam

$$\dot{w} = \frac{3(5\cos^2 I - 1)nR_M^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2}, \quad (7.8)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3nR_M^2 J_2 \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2}. \quad (7.9)$$

Portanto, neste caso as frequências dependem apenas de e , I e a . Logo, podemos fixar dois desses valores, como por exemplo e e a e resolver para I . Entretanto, após diversas tentativas fixando valores para a excentricidade e semieixo maior, excentricidade e inclinação e etc, não foi possível encontrar ressonância em nenhum dos casos presentes em 7.7. O motivo é o fato de que tanto o w quanto Ω possuem frequências muito mais lentas que $l_\odot$ que possui um período de ≈ 88 dias. Por conta disso, ressonâncias duplas que poderiam afetar significativamente a dinâmica do satélite neste sistema não serão possíveis.

É possível visualizar as frequências do satélite na Figura 15, onde foi tomado 4 casos com $a = 3000\text{km}$, $e = 0, 1$, $w = 0$ e $\Omega = 0$ com diferentes inclinações. As diferenças entre as frequências citadas anteriormente estão claramente perceptíveis nestas figuras. Tomando a Figura 15(a) como exemplo, podemos ver claramente que $l_\odot$ é muitas vezes mais rápido que w e Ω . Quando tomamos inclinações maiores, como $I = 70^\circ$ na Figura 15(c) w quase não varia num período de 8000 dias. Resumindo, não existe cenários onde ressonâncias do tipo $\pm w \pm \Omega \pm l_\odot = 0$ possam ocorrer para o satélite que orbita Mercúrio. É importante salientar que, embora tenhamos apresentado apenas quatro simulações para ilustrar a impossibilidade de ressonâncias, este cenário é constante em todas as simulações que realizamos.

Entretanto, embora as ressonâncias mencionadas acima não sejam possíveis de ocorrer, ressonâncias do tipo Kozai-Lidov para este sistema usando condições iniciais específicas são possíveis (CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022). As ressonâncias do tipo Kozai-Lidov são ressonâncias seculares caracterizadas pela libração do argumento do pericentro o que, por sua vez leva a variações na excentricidade e inclinação do satélite (CARVALHO; MORAES, 2020). Trabalhos recentes (TRESACO *et al.*, 2018)(TRESACO; ELIPE; CARVALHO, 2016) mostram que para satélites posicionados em $w = 90^\circ$ ou $w = 270^\circ$ é possível encontrar ressonâncias do tipo Kozai-Lidov. No primeiro caso ($w = 90^\circ$), ressonâncias só foram obtidas para excentricidades bastante altas, o que, por sua vez leva a colisão com Mercúrio. Por outro lado, para $w = 270^\circ$ é possível obter diversas ressonâncias para valores baixos de e , portanto, valores seguros para o satélite não colidir com o planeta.

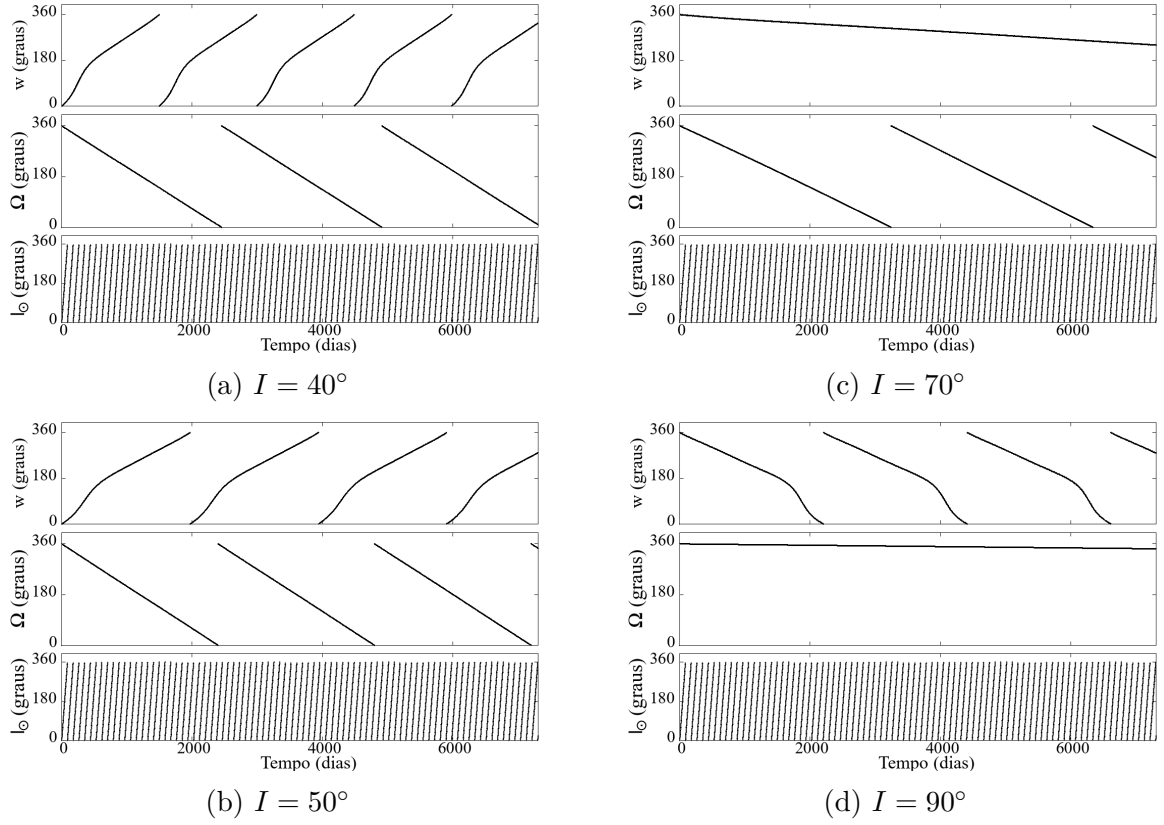


Figura 15 – Frequências de w , Ω e $l_{\odot}$ de satélites orbitando Mercúrio para diferentes inclinações.

Em (CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022) os autores apresentam na Figura 15 famílias de órbitas considerando as perturbações de achatamento de Mercúrio (J_2 , J_3 , J_4 , J_5 , J_6 e C_{22}) e da perturbação do Sol, não considerando a PRS. Nesta figura, é mostrado que é possível encontrar diversas ressonâncias Kozai-Lidov para satélites com baixa excentricidade. Para satélites com excentricidades maiores não ocorrem ressonâncias e w passa a circular.

A título de comparação, a Figura 16 representa uma família de órbitas para um satélite a uma altitude de $a = 3240\text{km}$ para valores de $e = 0,05$ até $e = 0,3$ com $\Delta e = 0,05$. É possível distinguir claramente dois tipos movimento: libratório e circulatório. Para baixas excentricidades ocorre formações de ilhas (ressonâncias Kozai-Lidov) e o argumento do pericentro do satélite libra em torno de 270° . Conforme a excentricidade aumenta, w passa de libratório para circulatório. Os resultados apresentados neste gráfico são muito similares ao gráfico da figura 15 do artigo (CARVALHO; YOKOYAMA; MOURÃO, 2022). A diferença está no fato de que neste sistema consideramos apenas os harmônicos J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} e incluímos a PRS utilizando o valor de $\beta = 1 \times 10^{-5}$ utilizado anteriormente. Assim como previsto na seção 7.1, quando aumentamos a PRS para valores maiores que $\beta = 1 \times 10^{-5}$ a curva de $w \times e$ tende a se expandir devido ao aumento em e e a desordem em w .

Estudos mostram que satélites posicionados no centro de ressonâncias Kozai-Lidov, permaneçam estacionários ou com variações mínimas em e e w (TRESACO *et al.*, 2018). Esse tipo de órbita é chamada de órbita congelada e, a princípio, possui aplicações práticas interessantes, principalmente para economia de combustível, visto que se o satélite permanece 'estacionário', gastos com manobras seriam reduzidos.

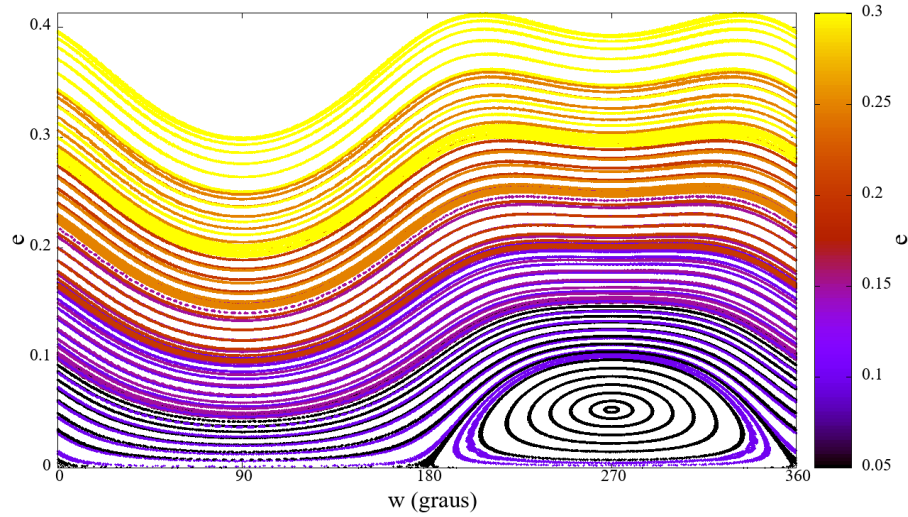


Figura 16 – Família de órbitas para $I = 90^\circ$, $w = 0...360^\circ$ com $\Delta w = 10^\circ$, $\Omega = 90^\circ$ e $e = 0.05...0.3$ com $\Delta e = 0.05$. $\beta = 1 \times 10^{-5}$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , J_5 e C_{22} .

8 RESULTADOS PARA O SISTEMA TERRA-SONDA-SOL

A mudança para o Sistema Terra-Sonda-Sol, foi uma alternativa pensada para encontrar as ressonâncias duplas que não foram possíveis de serem encontradas no sistema Mercúrio-Sonda-Sol. Isto porque o período orbital da Terra em torno do Sol é mais longo que o de Mercúrio em torno do Sol, implicando em comparações comensuráveis entre as frequências w , Ω e $l_\odot$. De fato, como será mostrado neste capítulo, foi possível encontrar diversas ressonâncias duplas para este sistema, as quais afetarão drasticamente a dinâmica do satélite.

Os valores dos harmônicos utilizados (com exceção de C_{21} e S_{21}) para as integrações foram aproveitados de (VALLADO, 2013) e são dados por:

Coeficiente	Normalizado	Desnormalizado
C_{20}	$-4,84165 \times 10^{-4}$	$-1,08263 \times 10^{-3}$
C_{30}	$9,57161 \times 10^{-7}$	$2,53241 \times 10^{-6}$
C_{40}	$5,39966 \times 10^{-7}$	$1,61990 \times 10^{-6}$
C_{21}	-2.06615×10^{-10}	-2.66739×10^{-10}
S_{21}	1.38441×10^{-9}	1.78727×10^{-9}
C_{22}	$2,43938 \times 10^{-6}$	$1,57462 \times 10^{-6}$
S_{22}	$-1,40027 \times 10^{-6}$	$-9,03873 \times 10^{-7}$
C_{31}	$2,03046 \times 10^{-6}$	$2,19315 \times 10^{-6}$
S_{31}	$2,48200 \times 10^{-7}$	$2,68087 \times 10^{-7}$

Tabela 3 – Harmônicos do campo gravitacional da Terra normalizados e desnormalizados.

Da mesma forma como foi abordado para o caso Mercúrio, utilizaremos os coeficientes desnormalizados e para os zonais será adicionado um sinal negativo, pois $J_n = -C_{n0}$.

8.1 Ressonâncias Duplas

Como mencionado no início deste capítulo, ressonâncias são possíveis para o caso da Terra devido as frequência de $l_\odot$ serem de mesma ordem que as frequências de w e Ω . Podemos facilmente achar as condições que satisfaçam as condições de ressonâncias da equação (7.7), porém antes mostraremos alguns casos comparando as frequências de w , Ω e $l_\odot$ com o intuito de reiterar a possibilidade de existência de ressonâncias duplas assim como feito para o caso de Mercúrio. Em todas as simulações feitas nesta seção utilizamos o sistema médio.

Nas figuras (17(a) - 17(d)) podemos ver as frequências de quatro casos que satisfazem as condições de ressonância da equação (7.7). Para facilitar a comparação, fixamos no eixo x marcações de tempo múltiplas do período orbital da Terra (≈ 365 dias). Em todos estes casos utilizamos $\beta = 5 \times 10^{-5}$ e como condição inicial $e = 0.1$ e $a = 9567km \approx 1,5R_\oplus$ e

resolvendo as equações para cada combinação de ângulos diferentes obtemos: em 17(a) $I = 78,4898^\circ$, 17(b) $I = 53,1191^\circ$, 17(c) $I = 64,3672^\circ$ e 17(d) $I = 94,7333^\circ$.

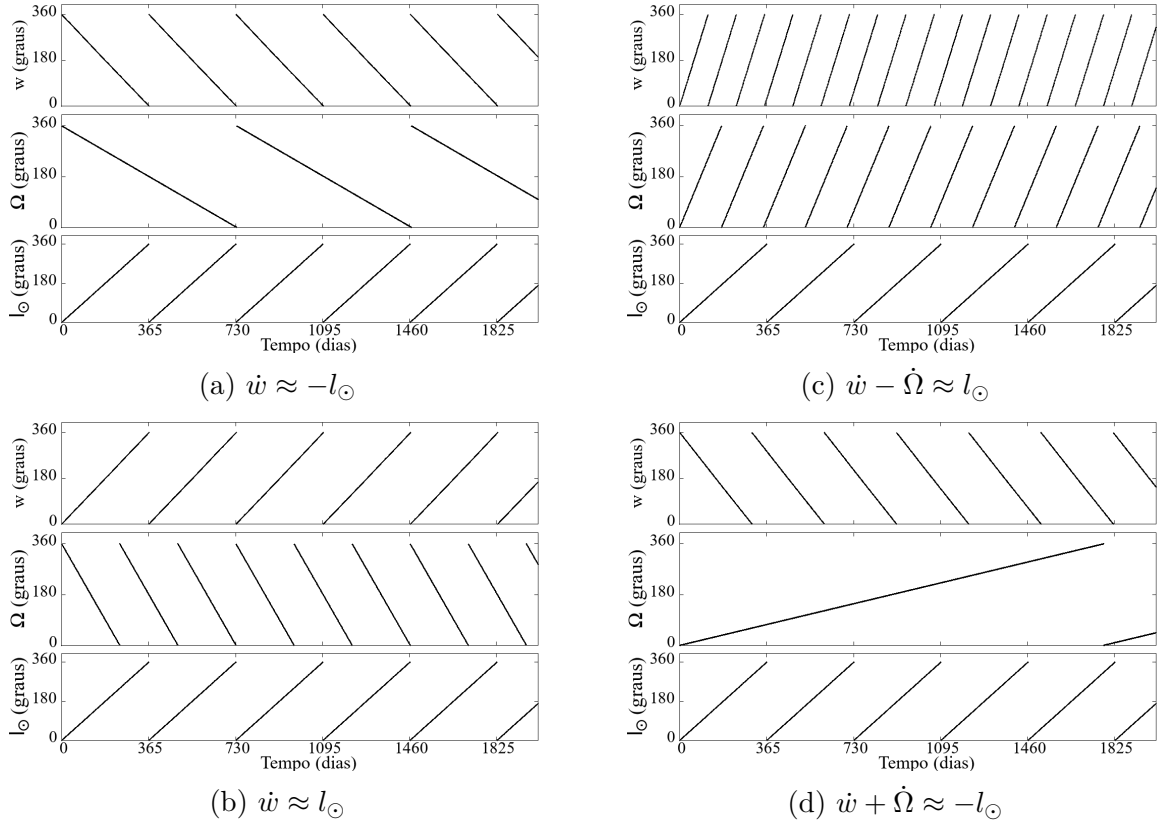


Figura 17 – Frequências de w , Ω e $l_\odot$ de satélites orbitando a Terra para diferentes inclinações utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$. Condições iniciais: $e = 0.1$, $a = 9567$ km, $w = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Harmônicos utilizados: J_2 , J_3 , J_4 , C_{22} , S_{22} , C_{31} e S_{31} .

Estes foram apenas alguns exemplos em que os satélites foram posicionados em condições de ressonância simples (apenas um ângulo ressonante librando). Ressonâncias duplas ocorrerão quando duas combinações distintas de ângulos ressonantes da expressão (7.7) forem satisfeitas simultaneamente para uma mesma condição inicial. Verificaremos, que as ressonâncias sozinhas (simples) possuem libração estável dos ângulos ressonantes e não afetam significativamente a dinâmica do satélite. Entretanto quando duas ressonâncias ocorrem simultaneamente ambas as librações são destruídas e a dinâmica do satélite é drasticamente afetada.

Utilizando as equações (7.8) e (7.9), podemos encontrar ressonâncias duplas de três formas distintas: fixando a e resolvendo para e e I , fixando e e resolvendo para a e I ou fixando I e resolvendo para e e a . Ao todo temos seis ângulos ressonantes presentes em (7.7) e combinando-os de dois em dois resulta 15 possibilidades distintas. Com intuito de organizar todas estas combinações iremos nomear os ângulos ressonantes da seguinte forma:

- $R_1 = \dot{w} + \dot{\Omega} - l_{\odot} = 0;$
- $R_2 = \dot{w} - \dot{\Omega} - l_{\odot} = 0;$
- $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + l_{\odot} = 0;$
- $R_4 = \dot{w} + \dot{\Omega} + l_{\odot} = 0;$
- $R_5 = \dot{w} + l_{\odot} = 0;$
- $R_6 = \dot{w} - l_{\odot} = 0;$

onde R_1 , R_2 e R_6 são respectivamente o primeiro, segundo e quarto cossenos ressonantes que aparecem em (7.7), porém com o sinal trocado. Não há problema em realizar esta operação, pois $\cos(x) = \cos(-x)$.

Dado o leque de possibilidades de combinações distintas, utilizamos o software Maple para resolver estes sistemas. Ao todo, encontramos 7 ressonâncias duplas. Verificamos que cada combinação está sempre localizada próxima a uma mesma inclinação, ou seja, para diferentes excentricidades ou semieixos maiores que fixamos ao resolver o mesmo sistema, sempre obtemos a mesma inclinação caso exista solução. A seguir estudaremos todas as ressonâncias encontradas. Tomamos um tempo padrão de integração de um milhão de dias para todas as simulações.

8.1.1 Ressonância $R_1 = \dot{w} + \dot{\Omega} - n_{\odot} = 0$ e $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$

O sistema que devemos resolver para encontrar as condições que satisfaçam estas duas ressonâncias é:

- $R_1 = \dot{w} + \dot{\Omega} - n_{\odot} = 0$
- $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$

Aplicando (7.8) e (7.9) nas duas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{3(5 \cos^2 I - 1) n R_{\oplus}^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} - \frac{3 R_{\oplus}^2 J_2 n \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2} - n_{\odot} = 0 \\ R_3 &= \frac{3(5 \cos^2 I - 1) n R_{\oplus}^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} + \frac{3 R_{\oplus}^2 J_2 n \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2} + n_{\odot} = 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Entretanto, antes de analisarmos as condições em que estas duas equações são satisfeita simultaneamente, devemos estudar os efeitos que cada ressonância isolada provoca ao satélite. Desta forma, podemos comparar futuramente com os efeitos que as ressonâncias duplas provocam.

Tomando $1,6R_{\oplus}$ e $e = 0,1$, para que R_1 seja satisfeita encontramos $I = 117,6398^\circ$ e para R_3 , $I = 113,4559^\circ$. Na Figura 18 podemos ver os principais elementos orbitais afetados pela ressonância e os ângulos ressonantes, para R_1 e R_3 respectivamente. Em 18(a) observamos um satélite muito bem comportado durante toda a integração. A excentricidade e inclinação permanecem estáveis enquanto que os ângulos ressonantes libram durante toda a simulação. Em 18(b), temos o mesmo comportamento. Em ambos os casos não ocorrem mudanças drásticas em e , na verdade, todas as ressonâncias simples encontradas para o caso Terra-Sonda-Sol são desta mesma natureza, nenhuma apresenta mudanças significativas na variação dos elementos orbitais. Em ambas as integrações usamos $\beta = 5 \times 10^{-5}$.

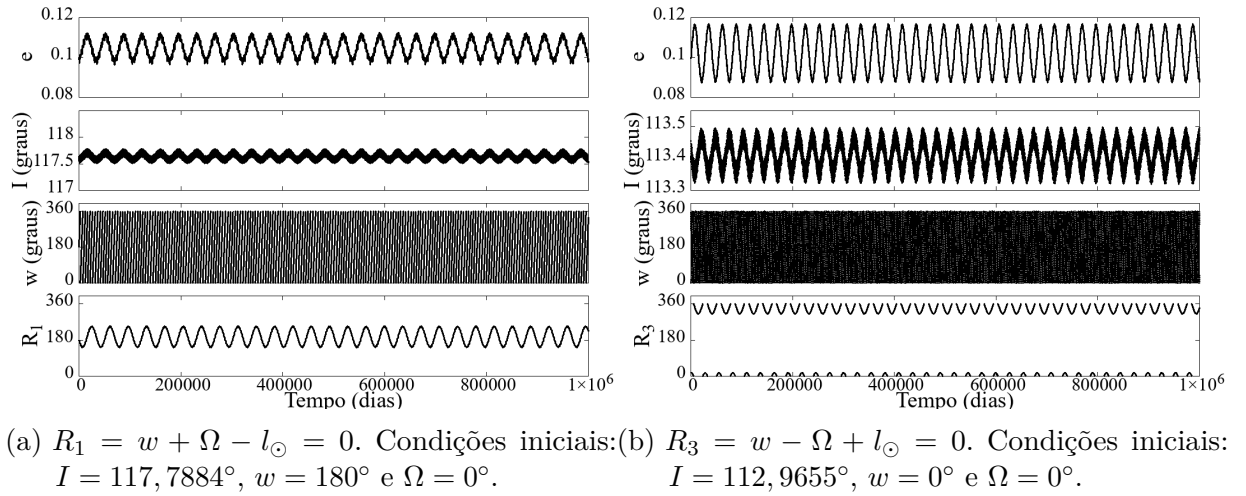


Figura 18 – Ressonância R_1 e R_3 agindo separadamente.

Agora, estudaremos o cenário onde estas duas ressonâncias ocorrem simultaneamente. Esta ressonância dupla ocorre sempre próximo a $I = 116,5650^\circ$. A princípio podemos fixar a e resolver o sistema 8.1. Usando este método encontramos ressonâncias numa faixa de $1,54R_{\oplus}$ a $1,71R_{\oplus}$. A título de comparação com as ressonâncias anteriores, tomaremos o mesmo semieixo maior do caso anterior ($1,6R_{\oplus}$), e resolvendo o sistema obtemos como condição: $e = 0,2560$ e $I = 116,5650^\circ$. Integrando a partir destas condições, utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ obtemos os resultados presente na Figura (19).

Neste caso podemos observar o quanto o satélite é afetado quando posicionado em condição de ressonância dupla. Comparando com a Figura 18, neste exemplo temos um satélite bastante instável. Os elementos orbitais que antes permaneciam estáveis durante toda a simulação passam a ficar completamente imprevisíveis. Os ângulos ressonantes R_1 e R_3 que antes libravam de forma muito claro, passam a apresentar comportamento caótico, librando e circulando de forma irregular durante todo o período de integração.

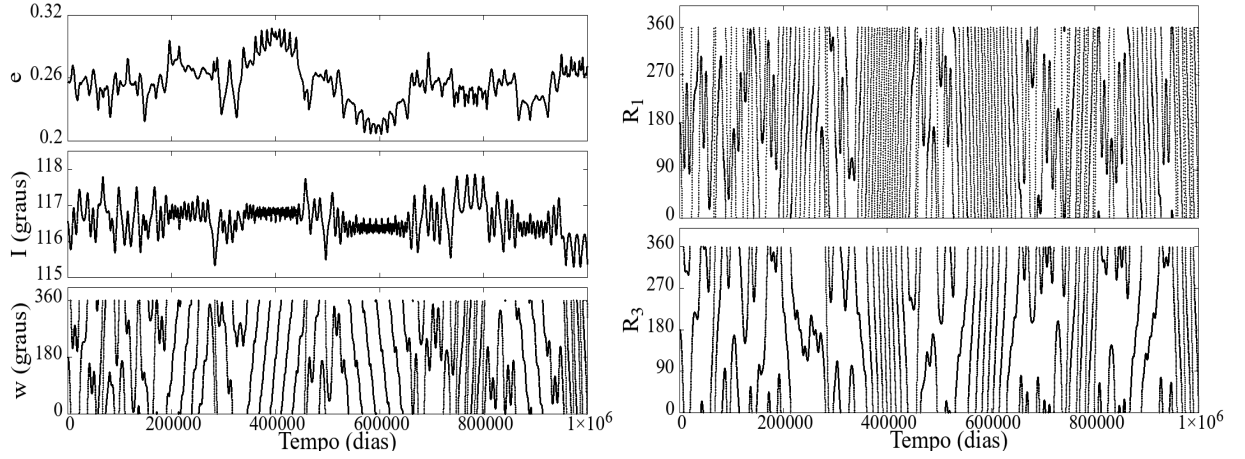


Figura 19 – Satélite em ressonância dupla em $a = 1,6R_{\oplus}$, $e = 0,2560$ e $I = 116.5650^{\circ}$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

8.1.2 Ressonância $R_2 = \dot{w} - \dot{\Omega} - n_{\odot} = 0$ e $R_4 = \dot{w} + \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$

Para esta ressonância devemos resolver o seguinte sistema

- $R_2 = \dot{w} - \dot{\Omega} - n_{\odot} = 0$
- $R_4 = \dot{w} + \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0.$

Substituindo (7.8) e (7.9) nas equações acima, teremos

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{3(5\cos^2 I - 1)nR_{\oplus}^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} + \frac{3R_{\oplus}^2 J_2 n \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2} - n_{\odot} = 0 \\ R_4 &= \frac{3(5\cos^2 I - 1)nR_{\oplus}^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} - \frac{3R_{\oplus}^2 J_2 n \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2} + n_{\odot} = 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Primeiramente, analisemos as ressonâncias separadamente. Tomando $a = 1,6R_{\oplus}$ e $e = 0,1$ e substituindo no sistema (8.2) obtemos para R_2 duas soluções $I = 62,3601^{\circ}$ e $I = 149,7586^{\circ}$ e, para R_4 , $I = 66,5440^{\circ}$ e $I = 89,8878^{\circ}$. Integramos utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ e os resultados podem ser vistos na Figura 20.

Agora, quando R_2 e R_4 agem simultaneamente o satélite deve sofrer uma perturbação maior. Podemos encontrar esta ressonância numa faixa que varia de $a = 1,54R_{\oplus}$ a $a = 1,71R_{\oplus}$ sendo que todas ocorrem próximo a $I = 63,434^{\circ}$. Fixando $a = 1,54R_{\oplus}$, obtemos como solução $e = 0,02987$ e $I = 63,434^{\circ}$. Integrando o satélite usando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ para estas condições iniciais obtemos os resultados da Figura 21). Assim como na ressonância dupla anterior, ocorre o esperado, e , I e w ficam instáveis e os ângulos ressonantes R_2 e R_4 que antes libravam, passam a apresentar comportamento caótico.

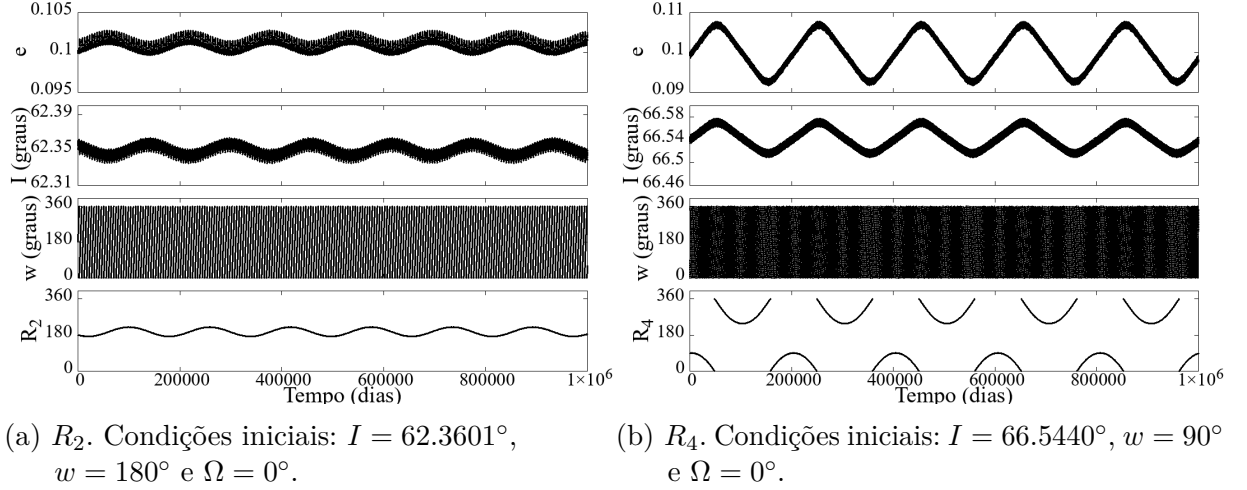


Figura 20 – Ressonância R_2 e R_4 agindo separadamente.

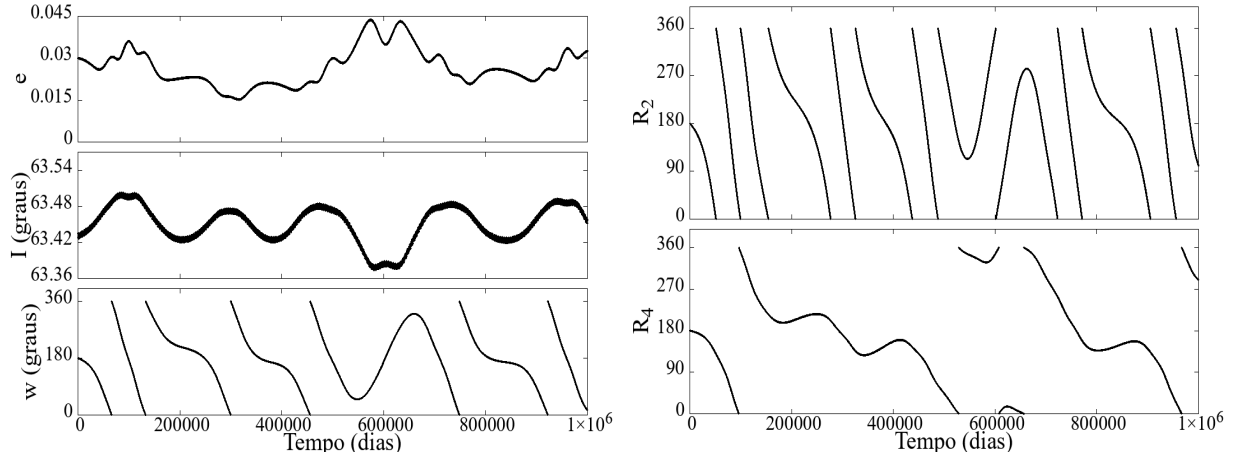


Figura 21 – Satélite em ressonância dupla em $a = 1,54R_\oplus$, $e = 0,02987$, $I = 63,434^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

8.1.3 Ressonância $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_\odot = 0$ e $R_5 = \dot{w} + n_\odot = 0$

O sistema que devemos resolver para obter esta ressonância é

- $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_\odot = 0$
- $R_5 = \dot{w} + n_\odot = 0$.

Substituindo (7.8) e (7.9) nas equações acima

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{3(5 \cos^2 I - 1) n R_\oplus^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} + \frac{3 R_\oplus^2 J_2 n \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2} + n_\odot = 0 \\
 R_5 &= \frac{3(5 \cos^2 I - 1) n R_\oplus^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} + n_\odot = 0.
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Resolvendo cada equação separadamente fixando $a = 1,6R_{\oplus}$ e $e = 0,15$, obtemos para R_3 $I = 114,2286^\circ$ e, para R_5 , $I = 93,7419^\circ$. Integrando o sistema utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ obtemos os resultados presentes em 22.

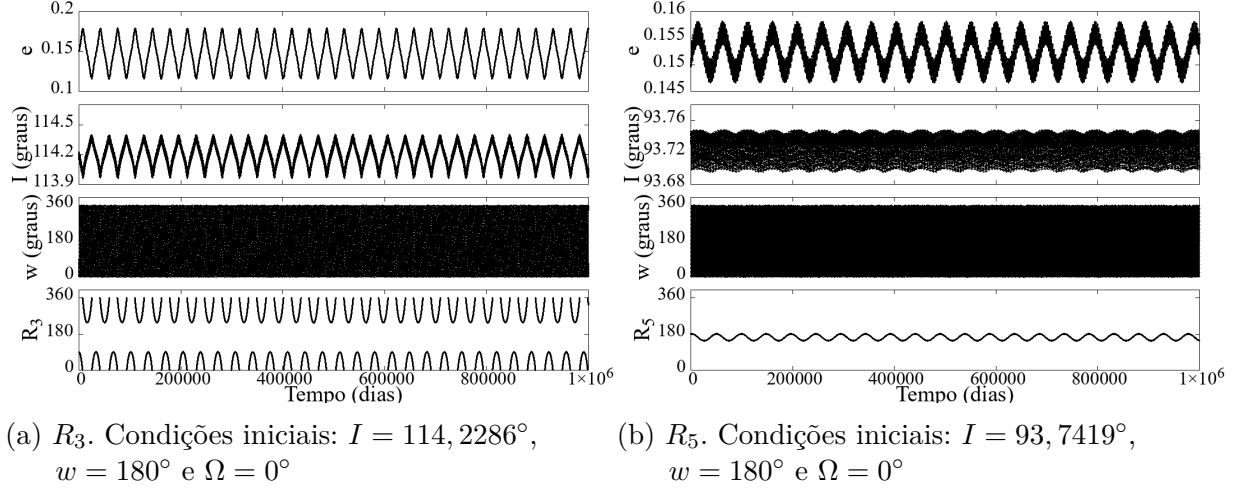


Figura 22 – Ressonância R_3 e R_5 agindo separadamente.

Resolvendo o sistema (8.3) encontramos soluções fixando a num intervalo de $a = 1,59R_{\oplus}$ a $1,80R_{\oplus}$ para uma mesma inclinação $I = 90^\circ$. Tomando $a = 1,6R_{\oplus}$ obtemos como resultado $e = 0,10919$ e $I = 90^\circ$. Integrando o sistema utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ obtemos os resultados presentes na Figura 23.

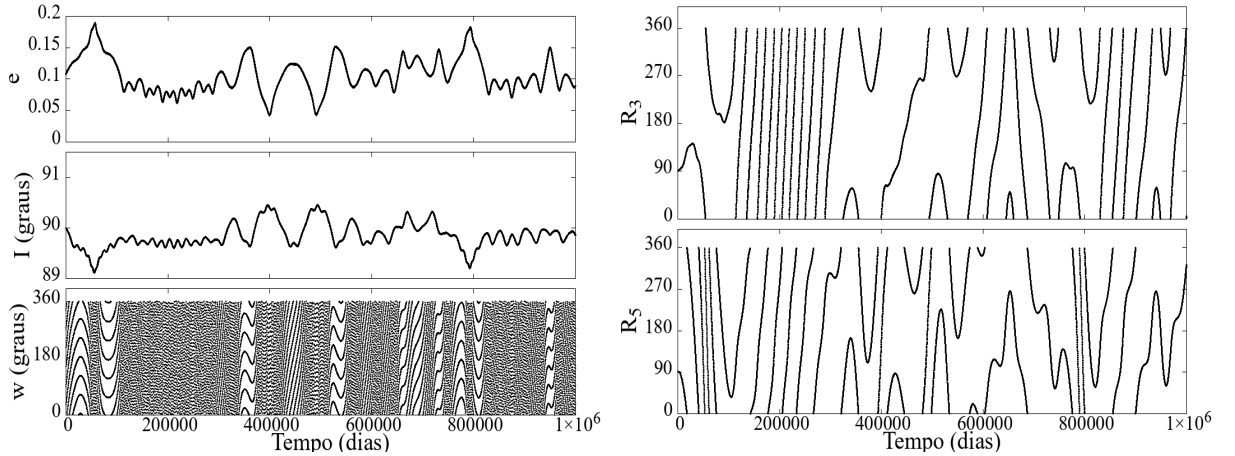


Figura 23 – Satélite em ressonância dupla em $a = 1,6R_{\oplus}$, $e = 0,10919$ $I = 90^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

8.1.4 Ressonância $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$ e $R_6 = \dot{w} - n_{\odot} = 0$

O sistema que devemos resolver para obter esta ressonância é

- $R_3 = \dot{w} - \dot{\Omega} + n_{\odot} = 0$
- $R_6 = \dot{w} - n_{\odot} = 0.$

Substituindo (7.8) e (7.9) nas equações acima, temos

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{3(5 \cos^2 I - 1) n R_{\oplus}^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} + \frac{3 R_{\oplus}^2 J_2 n \cos I}{2(1 - e^2)^2 a^2} + n_{\odot} = 0 \\ R_6 &= \frac{3(5 \cos^2 I - 1) n R_{\oplus}^2 J_2}{4(-1 + e^2)^2 a^2} - n_{\odot} = 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Resolvendo cada equação separadamente fixando $a = 1,4R_{\oplus}$ e $e = 0,2$, obtemos para R_3 $I = 81,4402^\circ$ e para R_5 $I = 55,6540^\circ$. Integrando o sistema utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ obtemos os resultados presentes na Figura 24.

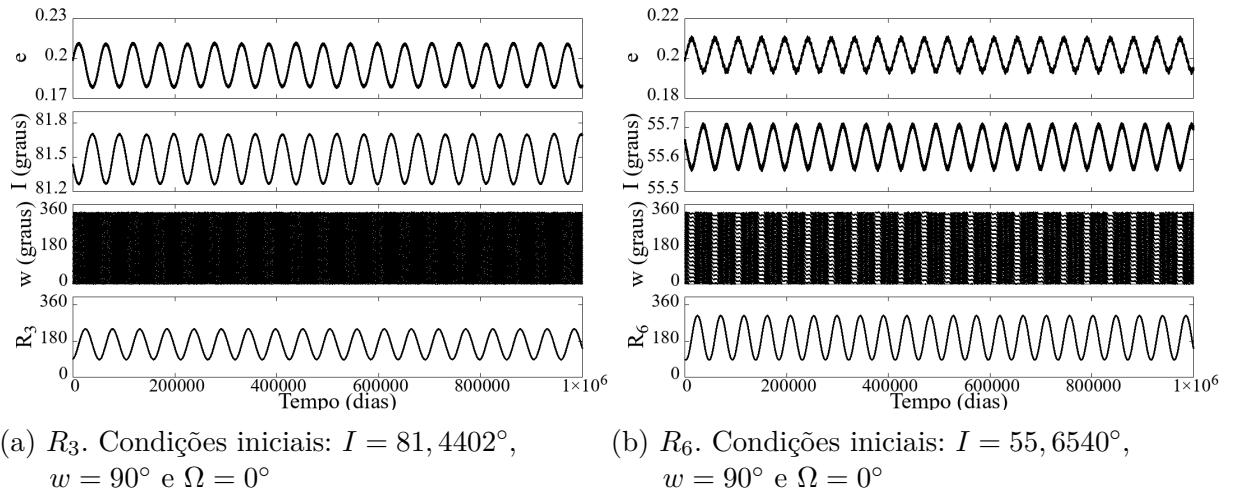


Figura 24 – Ressonância R_3 e R_6 agindo separadamente.

Esta ressonância dupla pode ser encontrada no intervalo de $1,35R_{\oplus}$ a $1,41R_{\oplus}$ sempre próxima a $I = 123,9353^\circ$. Tomando $a = 1,4R_{\oplus}$, obtemos como resultado da solução do sistema (8.4) $e = 0,2596$ e $I = 123,9353^\circ$. Integrando o satélite utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ obtemos os gráfico presentes na Figura 25. O limite de impacto para este satélite é de $e \approx 0,2857$, logo em aproximadamente 380 mil dias o satélite deve colidir com a Terra.

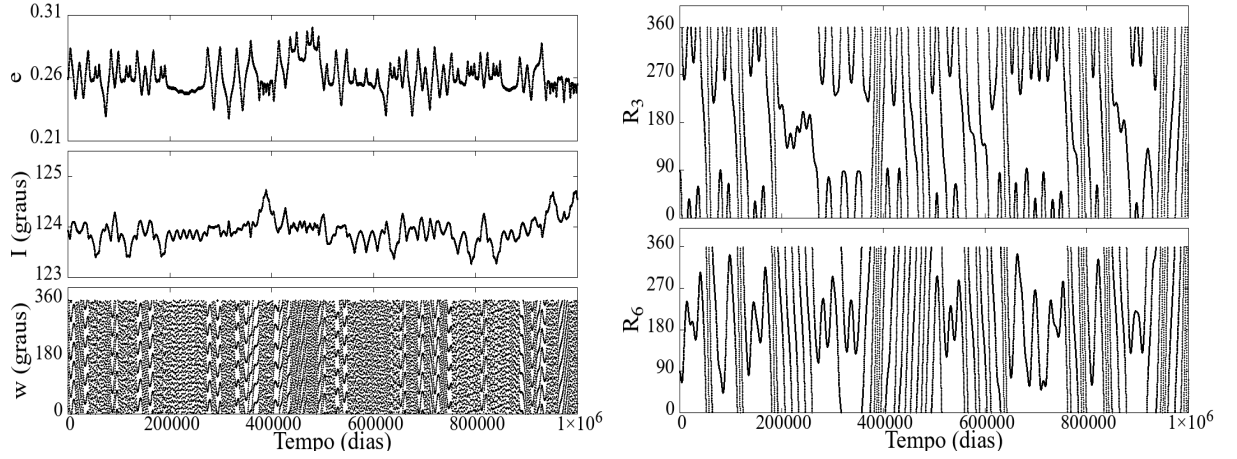


Figura 25 – Satélite em ressonância dupla R_3 e R_6 em $a = 1,4R_{\oplus}$, $e = 0,2596$ $I = 123,9353^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

8.1.5 Outras ressonâncias duplas

Após uma análise abrangente de todas as ressonâncias isoladamente, na qual demonstramos que todas exibem estabilidade e libração clara dos ângulos ressonantes ao longo do período das simulações, podemos agora prosseguir sem a necessidade de mais comparações, avançando diretamente para as ressonâncias duplas. Ainda não mostramos três delas: R_1 com R_5 , R_2 com R_5 e R_3 com R_4 .

A ressonância R_1 e R_5 ocorre sempre próximo a $I = 110.9932^\circ$. Esta ressonância pode ser encontrada num intervalo próximo a $a = 1,19R_{\oplus}$ e $a = 1,20R_{\oplus}$. Resolvendo o sistema para $a = 1.20R_{\oplus}$ obtemos $e = 0.1468$ e $I = 110.9932^\circ$. Os resultados podem ser observados na Figura 26

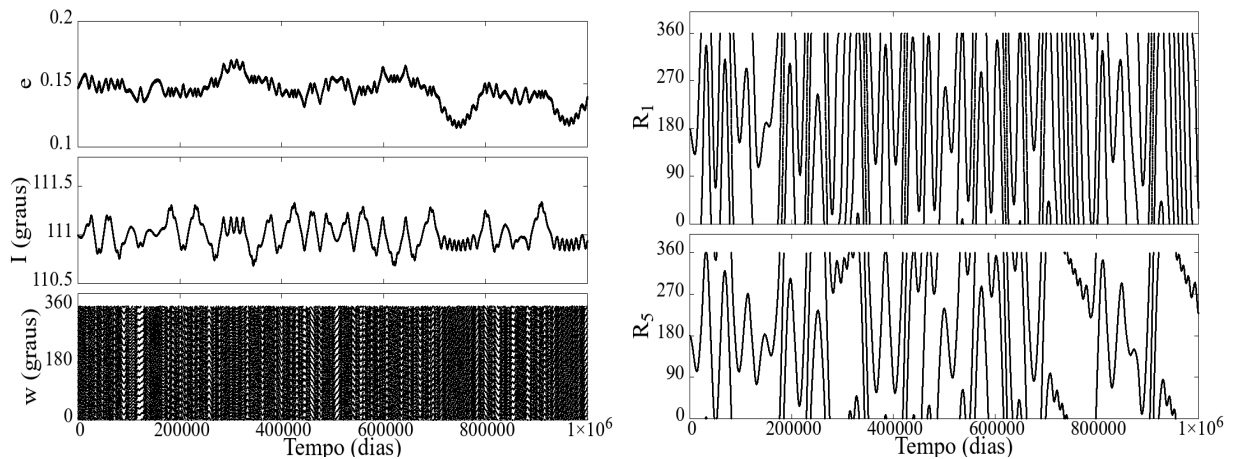


Figura 26 – Satélite em ressonância dupla R_1 e R_5 em $a = 1,2R_{\oplus}$, $e = 0.1468$ $I = 110.9932^\circ$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

A ressonância R_2 com R_5 ocorre próxima a $I = 69^\circ$ e, assim como na ressonância R_1 e R_5 , pode ser encontrada próxima a faixa de $a = 1,19R_{\oplus}$ e $a = 1,20R_{\oplus}$. Tomando

$a = 1,19R_{\oplus}$, obtemos como condição $e = 0.0844$ e $I = 69.0067^{\circ}$. Integramos utilizando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ e obtemos os dados presentes na Figura 27.

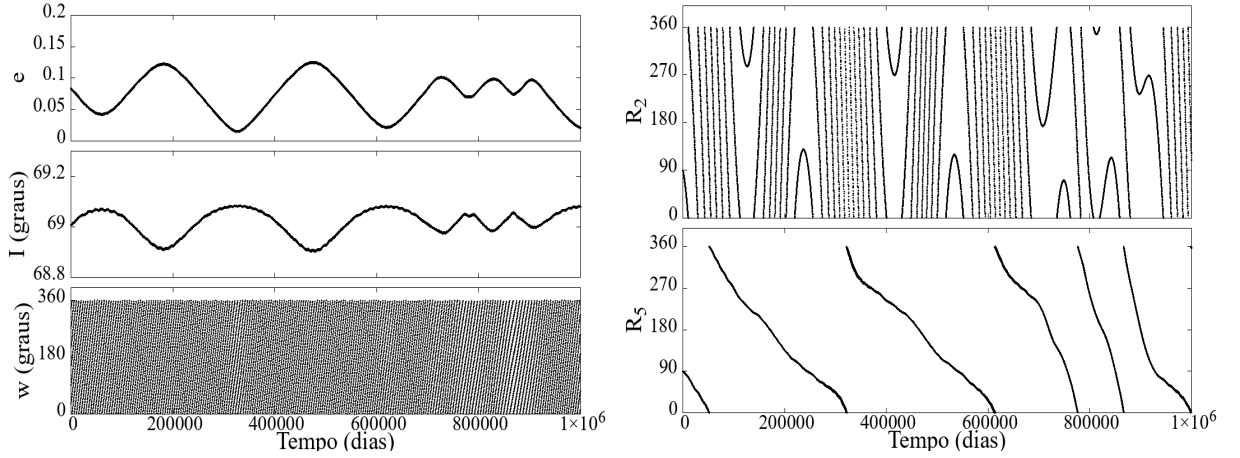


Figura 27 – Satélite em ressonância dupla R_2 e R_5 em $a = 1,19R_{\oplus}$, $e = 0.0844$ $I = 69.0067^{\circ}$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 180^{\circ}$ e $\Omega = 0^{\circ}$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

A ressonância R_3 com R_4 ocorre próximo a $I = 90^{\circ}$, e pode ser encontrada em $1,59R_{\oplus}$ a $1,80R_{\oplus}$. Tomando $a = 1,59R_{\oplus}$, obtemos como solução $e = 0.03196$ e $I = 90^{\circ}$. Integrando usando $\beta = 5 \times 10^{-5}$ obtemos os resultados mostrados na Figura 28.

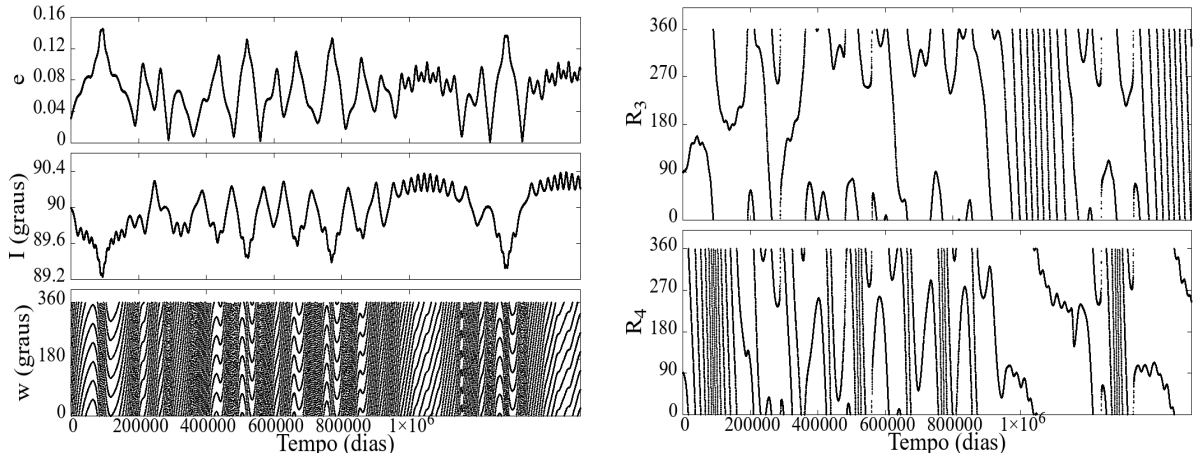


Figura 28 – Satélite em ressonância dupla R_3 e R_4 em $a = 1,59R_{\oplus}$, $e = 0,03196$ $I = 90,0^{\circ}$ com $\beta = 5 \times 10^{-5}$, $w = 120^{\circ}$ e $\Omega = 90^{\circ}$. A esquerda elementos orbitais mais relevantes do satélite e a direita as duas combinações ressonantes.

8.1.6 Conclusão acerca das Ressonâncias Duplas

Ao longo desta seção pudemos verificar o quanto as ressonâncias duplas podem afetar a dinâmica de um satélite no sistema Terra-Sonda-Sol. Confirmamos que quando as ressonâncias agem separadamente, o satélite permanece estável, sem irregularidades nas variações dos elementos orbitais e com o ângulo ressonante librando de forma clara durante toda a integração. Entretanto, quando ocorre o cenário onde duas ressonâncias

agem simultaneamente (ressonância dupla), a dinâmica do satélite é drasticamente afetada, seus elementos orbitais passam a apresentar comportamentos irregulares e os dois ângulos ressonantes, que antes libravam quando agiam sozinhos, passam a apresentar comportamentos caóticos. Podemos afirmar, com certa propriedade, que se um satélite real se deparar com uma situação dessa natureza, estará irremediavelmente perdido. Nesse cenário, perderíamos completamente o controle sobre ele.

As informações organizadas com todas as combinações dos ângulos ressonantes e a faixa onde as ressonâncias ocorrem estão na Tabela 4. Ressaltamos que todas as ressonância duplas estudadas nesta seção ocorrem também no sistema exato, validando todo o estudo até então.

Ressonâncias	a
R_1R_3	$1,54 - 1,71R_{\oplus}$
R_2R_4	$1,54 - 1,71R_{\oplus}$
R_3R_5	$1,59 - 1,80R_{\oplus}$
R_3R_6	$1,35 - 1,41R_{\oplus}$
R_1R_5	$1,19 - 1,20R_{\oplus}$
R_2R_5	$1,19 - 1,20R_{\oplus}$
R_3R_4	$1,59 - 1,80R_{\oplus}$

Tabela 4 – Localização de todas as ressonâncias duplas.

8.2 Ressonâncias duplas para valores altos de β

Na última sessão, vimos que as ressonâncias duplas afetam drasticamente a dinâmica do satélite. Entretanto, para todos os casos estudados, utilizamos $\beta = 5 \times 10^{-5}$ que, de certa forma é um valor relativamente baixo para a PRS. Para todas as ressonâncias duplas, quando aumentamos β o sistema passa a ficar ainda mais instável, apresentando um risco ainda maior ao satélite. Em especial, para duas ressonâncias duplas R_1R_3 e R_2R_4 , por estarem localizadas na inclinação crítica, alguns valores altos e específicos de β , podem resultar em estabilidade para o satélite assim como veremos a seguir.

Tomemos primeiramente a ressonância R_1R_3 nas mesmas condições tomadas na Figura 19, porém com $w = 90^\circ$. Quando utilizamos $\beta = 8 \times 10^{-4}$ (Figura 29), e analisarmos o período inicial da integração, percebemos que o satélite apresenta um comportamento, de certa forma, um pouco mais regular quando comparado com os casos de ressonâncias duplas anteriores, com w librando em torno de 90° nesse período. Contudo, não podemos dizer que o satélite de fato é estável durante toda a simulação, pois após esse período inicial ele passa a apresentar o comportamento comum de satélites em condições de dupla ressonância.

Quando utilizamos $\beta = 9 \times 10^{-4}$, o satélite passa a apresentar o mesmo comportamento inicial do caso anterior, porém durante toda a simulação. Os elementos orbitais

ficam mais estáveis quando comparados ao caso de $\beta = 8 \times 10^{-5}$ e w passa a librar em torno de 90° durante toda a simulação. O motivo para isto acontecer é de que, quando aumentamos β suficientemente, o satélite sai da região de ressonância dupla e entra em uma ressonância de inclinação crítica, a qual é menos intensa que a anterior e, por isso, o satélite se comporta de forma estável. Apesar de e atingir valores maiores nestes casos, não ocorre colisão.

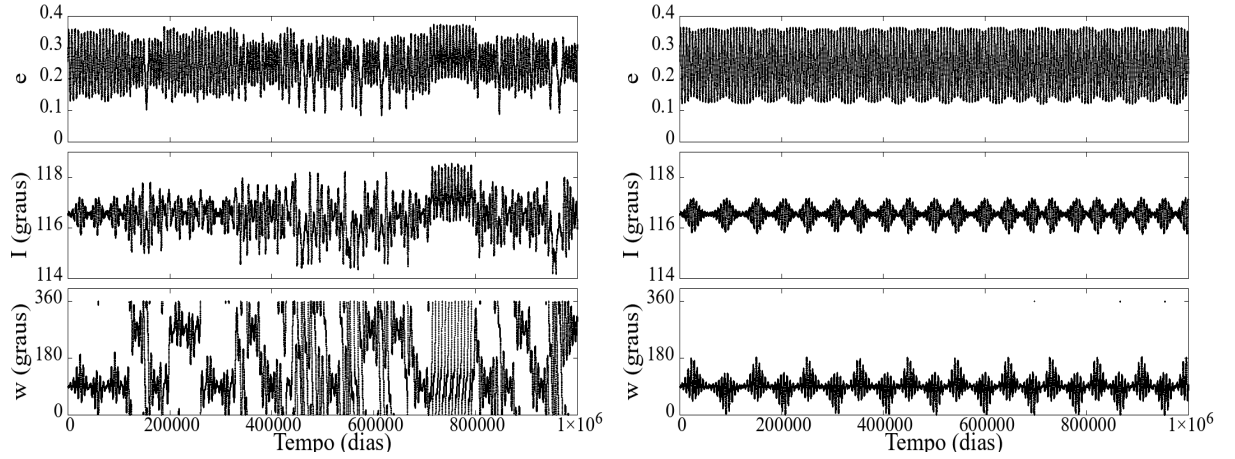


Figura 29 – Satélites em ressonância dupla R_1 e R_3 em $a = 1,6R_\oplus$, $e = 0,2560$, $I = 116,5650^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. A esquerda utilizamos $\beta = 8 \times 10^{-4}$ e a direita $\beta = 9 \times 10^{-4}$.

Situações em que w libra em torno de 90° na ressonância dupla R_1R_3 fixando $a = 1,6R_\oplus$ ocorrem para um intervalo que varia de $\beta = 9 \times 10^{-4}$ a $\beta = 2 \times 10^{-3}$. Para $\beta > 2 \times 10^{-3}$, a PRS se torna muito intensa, destruindo completamente a dinâmica do satélite e ocasionando a colisão com o planeta.

Em relação à ressonância dupla R_2R_4 , é possível observar um cenário semelhante ao discutido anteriormente. Ao fixar $a = 1,6R_\oplus$, obtemos $e = 0,2560$ e $I = 63,434^\circ$ como solução do sistema 8.2. Durante as simulações do satélite (Figura 30), notamos que, ao utilizar $\beta = 3 \times 10^{-3}$, o comportamento do satélite permanece caótico, como esperado de uma ressonância dupla. No entanto, ao ajustar $\beta = 4 \times 10^{-3}$, o comportamento do satélite se regulariza, com w oscilando em torno de 90° durante toda a simulação.

Novamente, temos um caso em que o satélite, com o aumento de β , deixa a região de ressonância dupla e entra em uma ressonância de inclinação crítica. Este cenário, para $a = 1,6R_\oplus$, ocorre no intervalo de $\beta = 4 \times 10^{-3}$ a $\beta = 1 \times 10^{-2}$. Para $\beta > 1 \times 10^{-2}$ a dinâmica é completamente destruída.

Nesta seção, observamos que para satélites sujeitos às condições das duplas ressonâncias R_1R_3 e R_2R_4 , é possível, mediante ajustes no valor de β , escapar dessas ressonâncias e entrar em uma ressonância de inclinação crítica. Neste estado, w passa a librar em torno de 90° , resultando em um estado de maior estabilidade para o satélite em comparação quando o mesmo estava em condições de ressonância dupla. Isso ocorre

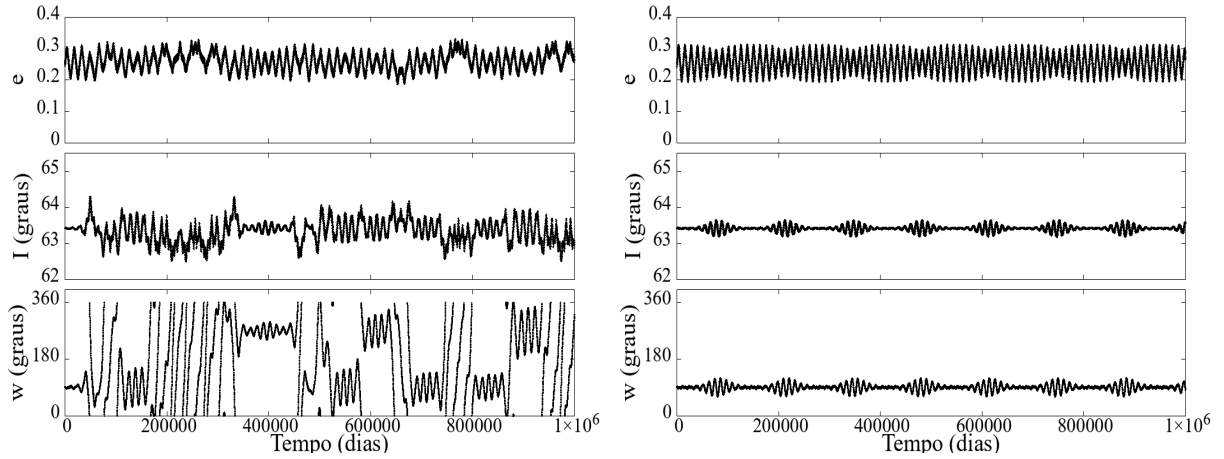


Figura 30 – Satélites em ressonância dupla R_2 e R_4 em $a = 1,6R_{\oplus}$, $e = 0,2560$, $I = 63.434^\circ$, $w = 90^\circ$ e $\Omega = -16,2220^\circ$. A esquerda utilizamos $\beta = 3 \times 10^{-3}$ e a direita $\beta = 4 \times 10^{-3}$.

porque a ressonância dupla é significativamente mais intensa do que uma ressonância de inclinação crítica. No entanto, se continuarmos a aumentar β , eventualmente a PRS atingirá um patamar significativo que ocasionará em colisão.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS A RESPEITO DO SISTEMA MÉDIO

Ao longo deste trabalho desenvolvemos e utilizamos dois sistemas de equações: o médio e o exato. Ao compará-los, concluímos que o sistema médio é confiável por desempenhar resultados próximos aos resultados do exato. Entretanto, se observarmos novamente as comparações realizadas neste trabalho, percebemos que os resultados obtidos através do sistema médio nem sempre representam de fato a média, no sentido literal da palavra, dos resultados do sistema exato. Ou seja, tomando as Figuras 9(a) - 9(d) e 10(a) - 10(d) por exemplo, as curvas em vermelho (médio) apesar de muito próximas às curvas pretas (exato), para verdadeiramente representar uma média, deveriam se situar dentro dos limites estabelecidos pelos resultados exatos.

O motivo disto ocorrer é simples: as condições iniciais não podem ser as mesmas em ambos os sistemas. Para as equações exatas utilizamos como condição inicial coordenadas osculadoras (instantâneas), mas para as equações médias, não podemos usar as mesmas condições iniciais e esperar que o resultado seja de fato uma média do sistema exato. Para resolver isto, devemos integrar o sistema médio utilizando coordenadas médias, as quais são obtidas observando os resultados iniciais do sistema exato. Assim, neste capítulo, apresentaremos alguns resultados comparativos e discutiremos como realizar as correções necessárias para se obter resultados satisfatórios utilizando o sistema médio.

Para começar, analisemos um caso mais simples onde apenas o harmônico zonal J_2 atua como perturbação em um satélite terrestre. Este caso é trivial, pois se tomarmos apenas J_2 , a variação de e é nula segundo a equação (7.1) e, portanto, na integração no sistema médio e será constante. Na Figura 31 podemos ver a comparação dos dois sistemas, exato (preto) e médio (vermelho) tomando apenas a perturbação J_2 . A princípio integramos apenas o sistema exato, e em aproximadamente $t = 48$ dias, onde e atinge seu valor máximo de $e \approx 0,03038$, guardamos as coordenadas (osculadoras) do satélite deste instante e as utilizamos para integrar o sistema médio. Neste caso, apesar da variação de e ser pequena no sistema exato, não há concordância alguma na comparação, e o motivo está no fato de utilizarmos as coordenadas osculadoras para o sistema médio.

Agora, vamos expandir nossa análise para o mesmo satélite, mas considerando os harmônicos zonais J_2 , J_3 e J_4 como elementos perturbadores. Utilizando as mesmas condições iniciais para ambos os sistemas obtemos o resultado presente na Figura 32. No gráfico da esquerda, a excentricidade do sistema médio (vermelho), em toda a simulação, está sempre na parte superior dos dados da integração do sistema exato (preto). Entretanto, observando o gráfico da direita, observamos que a concordância ainda é satisfatória. Mas o objetivo é obter resultados que representem de fato uma média em relação ao sistema exato e, para isso, devemos fazer ajustes nas condições iniciais para integrar as equações médias,

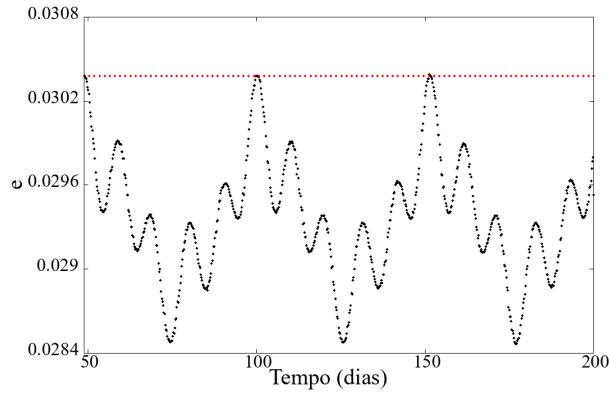
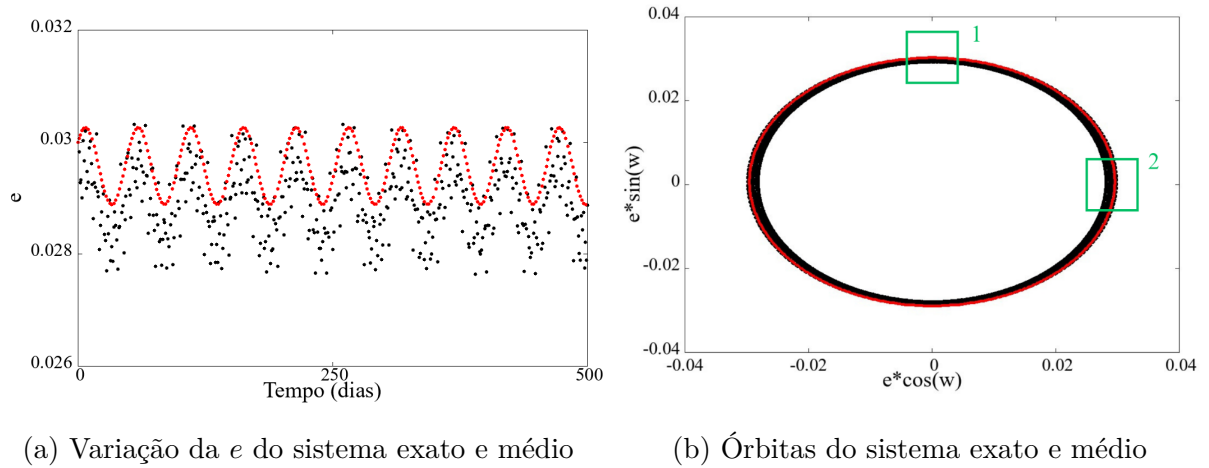


Figura 31 – Comparação sistema exato (preto) e médio (vermelho) usando apenas o harmônico J_2 como perturbador. Condições iniciais: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,03038$, $I = 140^\circ$, $w = 40^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.

sendo que estes ajustes serão feitos observando regiões estratégicas, como as destacadas em quadro verde na Figura 32.

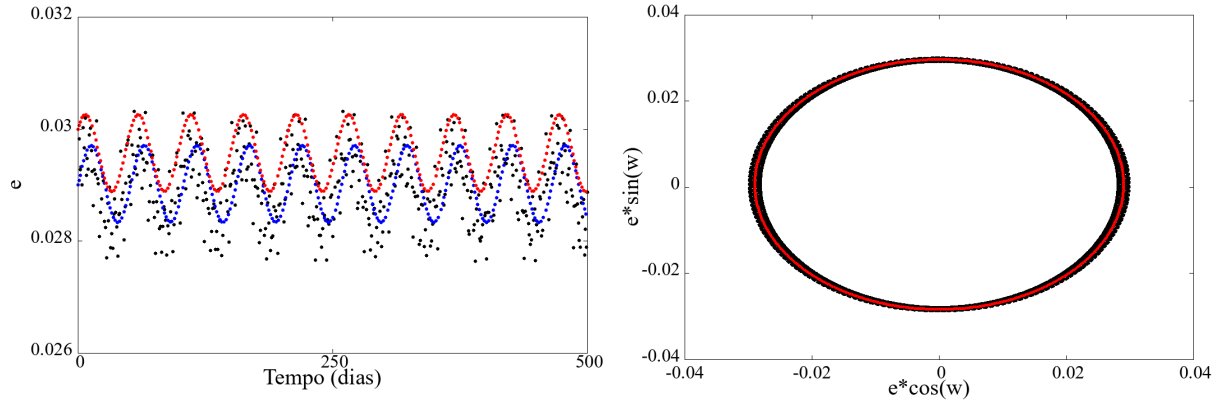


(a) Variação da e do sistema exato e médio

(b) Órbitas do sistema exato e médio

Figura 32 – Comparação sistema exato (preto) e médio (vermelho) usando apenas os harmônicos J_2 , J_3 e J_4 como perturbadores. As regiões dos quadros verdes são regiões estratégicas para se fazer o ajuste nas condições iniciais. Condições iniciais: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,03$, $I = 140^\circ$, $w = 40^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.

Para obter as coordenadas médias vamos observar os dados da Figura 32(b). Na região do quadro verde numerado como "1", podemos ver como a curva vermelha passa bem pela borda externa da curva preta. Logo, um bom ajuste seria aproximar a curva vermelha ao centro da curva preta. Dito isto, tomaremos $e = 0,290$ e $w = 0^\circ$ como ajustes nas condições iniciais no sistema médio. A comparação do sistema exato, médio e do sistema médio com as coordenadas iniciais ajustadas pode ser vista na Figura 33, onde podemos ver claramente um resultado muito mais satisfatório após as correções. Em 33(b), vemos claramente a curva vermelha mais no centro da preta. Portanto, podemos afirmar que o sistema médio com as condições iniciais médias desempenha de fato uma média do sistema exato.

(a) Variação da e .

(b) Órbitas do sistema exato e médio

Figura 33 – Comparação sistema exato (preto), médio (vermelho) e médio ajustado (azul) usando apenas os harmônicos J_2 , J_3 e J_4 como perturbadores. Condições iniciais osculadoras: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,03$, $I = 140^\circ$, $w = 40^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Condições iniciais médias: $a = 7000\text{km}$, $e = 0,029$, $I = 140^\circ$, $w = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.

Ao longo deste capítulo executamos mais algumas comparações entre os dois sistemas de equações desenvolvidas neste trabalho. A princípio, os resultados esperados do sistema médio eram de que fossem extremamente próximos ou até iguais ao do sistema exato. Entretanto, os dados mostram que isso não é possível. Os resultados corretos, que devemos esperar, é de que o sistema médio atue como uma média do sistema exato, mas ao longo de diversas comparações, percebemos que o mesmo não se comportava desta maneira. O motivo para isto ocorrer é de que, rigorosamente, não devemos utilizar as mesmas condições (osculadoras) iniciais que utilizamos no sistema exato no sistema médio. Para resolver este problema, as condições iniciais para integrar o sistema médio devem ser condições iniciais médias, as quais são obtidas observando os resultados do sistema exato, como discutido neste capítulo.

As considerações finais a respeito do sistema médio é de que, apesar de ser muito mais vantajoso utilizá-lo quando consideramos os custos computacionais, devemos nos atentar a forma correta de usá-lo. Pois, se integrarmos as equações médias com as mesmas coordenadas do sistema exato, os resultados gerados podem não representar dados corretos, assim como na Figura 31. Ressaltamos também, que apesar de termos utilizado as mesmas coordenadas para ambos os sistemas ao longo do trabalho, sempre acompanhamos os resultados obtidos pelo sistema médio via comparações com o exato, verificando e validando os dados obtidos.

10 CONCLUSÃO

Para o estudo da dinâmica de uma sonda (vela solar) orbitando Mercúrio ou a Terra, tomamos as perturbações: achatamento do planeta hospedeiro, Sol e a Pressão de Radiação Solar (PRS). Consideramos os principais harmônicos do achatamento do planeta, incluindo não só os zonais mas também os tesserais. Estes dois planetas, por serem rochosos, é flagrante a não existência de uma simetria axial em relação ao eixo polar do planeta. Devido a isso, alguns autores, levantaram a hipótese de que tais termos tesserais poderiam ser relevantes, em especial no caso de Mercúrio.

O efeito da PRS é importante devido à proximidade do Sol. A modelagem desta força é feita de maneira clássica admitindo que a vela está sempre iluminada pelo Sol, e, além disso, é admitido que a normal à superfície da vela está sempre dirigida ao Sol. Nestas condições, é possível escrever a força da PRS como gradiente de uma função escalar que é uma parcela (β) da própria perturbação gravitacional solar.

Mostramos que a parte da PRS pode gerar ressonâncias simultâneas, ou seja, duas combinações de ângulos independentes. Estas ocorrem com os ângulos de longo período, argumento do pericentro, longitude do nodo ascendente da vela e anomalia média do Sol. Para este estudo foi necessária a representação de toda a função perturbadora em termos dos elementos orbitais e obter sua média na anomalia média da sonda. As simulações mostram o claro efeito de duas ressonâncias. O efeito simultâneo produz uma dinâmica extremamente irregular, ao contrário do caso quando elas ocorrem isoladamente. É importante observar que situações de dupla ressonância só ocorrem para sondas da Terra, uma vez que no caso de Mercúrio o movimento médio do Sol é muito mais rápido que as frequências do nodo ascendente e argumento do pericentro da sonda. Muitas outras simulações também mostraram que para valores de β ligeiramente maiores do que 1×10^{-5} , o movimento de uma sonda, em especial no caso de Mercúrio, pode se tornar bastante irregular com o tempo. No entanto, para missões limitadas a alguns anos, tais variações poderiam ser toleradas, pois não levam a escape ou colisão com o planeta, para tempos limitados (em geral, menos que dez anos).

Apesar do sistema médio desenvolvido neste trabalho gerar resultados bastantes satisfatórios quando comparados aos do sistema exato, ele não representava de fato uma média do sistema de exato. Para o uso correto do sistema médio, não podemos utilizar as mesmas coordenadas (osculadoras) que utilizávamos para o sistema exato. A solução encontrada foi de utilizar coordenadas iniciais médias para integrar as equações médias. Estas condições iniciais são obtidas através de observações dos resultados das equações exatas. Em (NIE; GURFIL, 2018), para a utilização do sistema médio, os autores desenvolvem uma transformação inversa da operação de média (no caso media de Von

Zeipel), o que permite obter as condições iniciais para integrar um sistema médio.

REFERÊNCIAS

- BROUWER, D.; CLEMENCE, G. M. **Methods of celestial mechanics**. [*S.l.: s.n.*]: Elsevier, 1961.
- CARVALHO, J.; MORAES, R. Vilhena de. A semi-analytical approach using the single and double averaged methods and the lidov–kozai mechanism. **The European Physical Journal Special Topics**, Springer, v. 229, n. 8, p. 1491–1500, 2020.
- CARVALHO, J. P.; YOKOYAMA, T.; MOURÃO, D. C. Single-averaged model for analysis of frozen orbits around planets and moons. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 134, n. 4, p. 35, 2022.
- KONOPLIV, A.; PARK, R.; ERMAKOV, A. The mercury gravity field, orientation, love number, and ephemeris from the messenger radiometric tracking data. **Icarus**, Elsevier, v. 335, p. 113386, 2020.
- MAZARICO, E. *et al.* The gravity field, orientation, and ephemeris of mercury from messenger observations after three years in orbit. **Journal of Geophysical Research: Planets**, Wiley Online Library, v. 119, n. 12, p. 2417–2436, 2014.
- MCINNES, C. R. **Solar sailing: technology, dynamics and mission applications**. [*S.l.: s.n.*]: Springer Science & Business Media, 2004.
- MONTENBRUCK, O.; GILL, E. Satellite orbits: models, methods, and applications. **Appl. Mech. Rev.**, v. 55, n. 2, p. B27–B28, 2002.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [*S.l.: s.n.*]: Cambridge university press, 1999.
- NIE, T.; GURFIL, P. Lunar frozen orbits revisited. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 130, n. 10, p. 61, 2018.
- SAEDELEER, B. D. Analytical theory of a lunar artificial satellite with third body perturbations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 95, p. 407–423, 2006.
- TRESACO, E. *et al.* Averaged model to study long-term dynamics of a probe about mercury. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 130, n. 2, p. 9, 2018.
- TRESACO, E.; ELIPE, A.; CARVALHO, J. P. S. Frozen orbits for a solar sail around mercury. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 39, n. 7, p. 1659–1666, 2016.
- TZIRTI, S.; TSIGANIS, K.; VARVOGLIS, H. Quasi-critical orbits for artificial lunar satellites. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 104, p. 227–239, 2009.
- VALLADO, D. A. **Fundamentals of Astrodynamics and Applications**. 4. ed. Hawthorne, CA: Microcosm Press, 2013.

VERMA, A. K.; MARGOT, J.-L. Mercury's gravity, tides, and spin from messenger radio science data. **Journal of Geophysical Research: Planets**, Wiley Online Library, v. 121, n. 9, p. 1627–1640, 2016.