

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

**TRANSIÇÃO DE DIFUSÃO CAÓTICA LIMITADA PARA ILIMITADA NO MAPA
CHIRIKOV-TAYLOR COM DISSIPACÃO**

Raphael Moratta Vieira Rocha

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro (SP)

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Raphael Moratta Vieira Rocha

Transição de Difusão Caótica Limitada para Ilimitada no Mapa de
Chirikov-Taylor com Dissipação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas -
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP
2020

R672t Rocha, Raphael Moratta Vieira
Transição de difusão caótica limitada para ilimitada no
mapa de Chirikov-Taylor com dissipação / Raphael
Moratta Vieira Rocha. -- Rio Claro, 2021
38 f.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Física estatística. 2. Transformações de fase. 3.
Comportamento caótico nos sistemas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

RESUMO

Neste trabalho investigamos as transições de fase que ocorrem em mapeamentos discretos com e sem dissipação. Exploramos as transições de fase com enfoque na transição de difusão limitada para difusão ilimitada da ação no mapa padrão dissipativo. Caracterizamos este comportamento através da solução analítica da equação da difusão, que fornece a probabilidade de se observar uma ação específica em um determinado instante de tempo. Seguimos com uma descrição fenomenológica para a determinação dos expoentes críticos, que poderá ser comparada com uma descrição analítica que será desenvolvida. A partir do conhecimento da ação quadrática média, caracterizamos totalmente esta transição de fase, identificando o parâmetro de ordem, a ordem dessa transição, a excitação elementar, a quebra de simetria do sistema e os defeitos topológicos que impactam o transporte das partículas.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Caos. Transição de Fase. Difusão Ilimitada. Mapas Padrão.

ABSTRACT

In this work our aim is to investigate the phase transitions in discrete mappings in the presence and absence of dissipation. We explore these transitions with an emphasis on the transition from limited to unlimited diffusion of the action in a dissipative standard mapping. We characterize this behavior using the analytical solution of the diffusion equation, which gives the probability of observing a specific action at a specific time. Following a phenomenological approach for the critical exponents, we can compare these results with the analytic description. From the knowledge of the root mean square of the action, we fully characterize this transition, identifying the order parameter, the order of the transition, elementary excitation, the break of symmetry and the topological defects which impact the transport of particles.

Keywords: Dynamics Systems. Chaos. Phase Transition. Unlimited Diffusion. Standard Mapping.

AGRADECIMENTOS

Escrever um trabalho é mais difícil do que eu imaginava, mas também é muito gratificante. Nada disso seria possível sem meu orientador, Edson Denis Leonel, que me ajudou nesse momento difícil e esteve presente em todas as minhas dificuldades.

Sou eternamente grato a minha companheira Deborah, que me ajudou a enfrentar os anos de graduação, me ensinou disciplina, amor, respeito e muito do que me ajudou a terminar o curso. Tudo isso só foi possível com este enorme apoio.

Agradeço também a minha família, especialmente minha mãe Zélia, que me apoiou desde o início e sempre me motivou a dar meu melhor para concluir a graduação com sucesso. Ao meu pai Arlon, agradeço o enorme apoio que me deu para morar em outra cidade e ir em busca do meu sonho.

Ao meu amigo Gustavo, sou eternamente grato pelas horas que investiu em mim me ensinando outro idioma. E aos meus amigos Fernando e Vinicius, que me ajudaram a enfrentar meus medos e inseguranças.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Contexto Histórico	7
1.2	Conexão com a equação da difusão	9
1.3	Contexto das transições de fase	12
1.4	Transição de fase em um sistema magnético	12
1.5	Organização do trabalho	14
2	Mapa padrão	16
2.1	Contextualização do mapa	16
2.2	Determinação de um mapeamento a partir de um hamiltoniano	17
2.3	Mapa padrão conservativo	19
2.4	Espaços de fases do mapa padrão conservativo	20
2.4.1	Transição de integrabilidade para não integrabilidade.	20
2.4.2	Transição de caos local para caos global.	21
3	Mapa padrão dissipativo	23
3.1	O mapa e o espaço de fases	23
3.2	Hipóteses de escala e expoentes críticos	25
4	Equação da difusão	29
4.1	Solução da equação da difusão	29
4.2	Técnica da transformada de Fourier	30
4.3	Casos particulares de I_{rms}	31
4.4	Discussão da transição de fase $\gamma = 0$ para $\gamma \neq 0$	32
5	Conclusões	35

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto Histórico

Em 1666 Isaac Newton resolveu o que chamamos de problema de dois corpos [1], o que possibilitou explicar as órbitas elípticas dos planetas. Para isso ele precisou negligenciar todos os outros planetas do sistema solar, bem como todos os outros objetos no universo. Contudo, é evidente que não existem apenas dois corpos, mais sim muitos, se considerarmos todos os objetos espaciais que nos cercam, fazendo com que o problema de dois corpos se tornasse um problema de três ou n -corpos [1]. Newton não foi capaz de resolver esses problemas envolvendo mais de dois corpos, e os cientistas trabalharam nestes problemas por muitas décadas [1].

Por volta do final do século XIX, ninguém havia resolvido os problemas de muitos corpos, até que o matemático francês Jules Henri Poincaré concluiu que na verdade não é possível resolver esses problemas [1]. Poincaré introduziu uma abordagem geométrica baseada em um conceito chamado de espaço de fases, ao invés da abordagem analítica do cálculo integral e diferencial. Com isso ele foi capaz de visualizar o que hoje chamamos de Caos [1].

Caos é um fenômeno que ocorre em sistemas determinísticos, ou seja, sistemas que são regidos por alguma regra que é livre de aleatoriedade e estocasticidade [1]. Nesses sistemas se um instante é conhecido, é possível determinar com certeza o estado do sistema posterior a este instante. Estes sistemas determinísticos podem exibir comportamento não periódico e aparentemente imprevisível. Como dito, os sistemas são determinísticos, porém, são sensíveis as condições iniciais de modo que uma pequena variação na condição inicial faz com que estas diverjam a medida que o tempo passa, o que faz com que uma previsão a longo tempo seja praticamente impossível. Esse fato não pode ser confundido

com aleatoriedade [1] pois previsões em tempos curtos ainda podem ser possíveis.

Como dito anteriormente os trabalhos de Poincaré foram desenvolvidos no final do século XIX, neste período o maior enfoque estava na Mecânica Quântica [1]. As ideias de Planck, o efeito fotoelétrico [2] e a relatividade [3] foram desenvolvidas e a física do problema de três corpos foi deixada de lado. Anos depois, por volta de 1960, Lorenz publicou [4] um trabalho que utilizava um modelo caótico para descrever a convecção atmosférica, que poderia ser o início da revolução do caos, porém seu trabalho ficou desconhecido por um tempo. Durante esse tempo, matemáticos continuaram seguindo o caminho de Poincaré e em meados 1975 tudo começou. O biólogo Robert May [5] observou caos em mapeamentos discretos. Tais mapeamentos são simples expressões matemáticas e são escritos como [1]

$$x_{n+1} = f(x_n); \quad (1.1)$$

onde o tempo (n) é discreto.

May estudou, em particular, a equação logística em biologia de população [5]. Este é um dos mais simples modelos que exibem caos bastante conhecido hoje. Após estes trabalhos pode ser estabelecida uma conexão entre os sistemas não lineares e a mecânica estatística.

Em 1980 o caos e dinâmica não linear se tornaram populares [1], de fato, foi quando a comunidade acadêmica tomou conta da importância desse assunto. Foi também o período onde tiveram confirmações experimentais dessas ideias [1].

Nas décadas mais recentes ficou evidente que sistemas dinâmicos caóticos são uma regra ao invés de uma exceção na natureza [1]. Muitos cientistas no entanto, especialmente os astrônomos que trabalham com mecânica celeste, acreditam que a maioria dos sistemas de interesse apresentam um comportamento regular. Porém métodos utilizados para o estudo de sistemas regulares não podem ser aplicado a sistemas caóticos. Um desses métodos é a teoria de probabilidade [1] e o modelo mais comum utilizado para a descrição da evolução caótica de sistemas dinâmicos é o chamado modelo da caminhada aleatória [6].

Esse modelo fornece uma maneira simples de representar o comportamento aleatório e complexo de vários sistemas do cotidiano, como por exemplo o movimento das moléculas de ar em uma sala [6], a dispersão de um corante em água [6], a flutuação de bolsas de valores ao longo do tempo [6], entre outros. O movimento de todas as partículas microscópicas, como células, moléculas, grãos de pólen, podem ser descritos dessa forma. Analisar o movimento de cada partícula individualmente pode ser demasiadamente complicado e portanto nós utilizamos um modelo matemático simplificado para explicar a dinâmica.

Esse é o modelo da caminhada aleatória [6]. Uma partícula move-se para uma certa

direção ao longo de um eixo com passos discretos de tamanho definido (para direita ou para esquerda, no caso de uma dimensão) e com uma certa probabilidade. Após uma quantidade grande de passos verificamos um movimento como mostrado na Figura 1.1. A partir deste modelo podemos extrair diversas informações relevantes para a caracterização da dinâmica [6].

Um exemplo de caminhada aleatória pode ser verificado no chamado movimento Browniano [7]. Este movimento foi descoberto em virtude das pesquisas do biólogo escocês Robert Brown. Brown descobriu que partículas do tamanho de grãos de pólen, ou menores, quando colocadas na superfície de um fluido, se moviam de uma maneira aparentemente aleatória.

Em 1828, enquanto investigava o pólen de diversas plantas, Brown observou que este pólen se dispersava em uma enorme quantidade de pequenas partículas quando colocado na água, ele percebeu nessas partículas um movimento ininterrupto e irregular. Brown imaginou que essa dinâmica estava relacionada com o fato das partículas serem orgânicas, e que o movimento estava relacionado a vida. Com isso ele concluiu que este fenômeno era intrínseco de seres que possuíam vida, ou seja, organismos que eram capazes de se movimentarem sozinhos. Brown experimentou grãos de pólen de diferentes plantas e o comportamento ainda sim era observado. Brown acreditou que sua explicação estivesse correta, porém ao trocar as partículas de pólen por um sal inorgânico, o fenômeno ainda era observado. Posteriormente este fenômeno foi explicado por Albert Einstein [7], que descreveu o movimento dessas partículas em suspensão, que na verdade era devido a colisão entre as moléculas e átomos do fluido com as partículas em suspensão.

1.2 Conexão com a equação da difusão

Como as partículas não são criadas nem destruídas, podemos considerar que existe uma grandeza que é localmente preservada no sistema [6]. Chamamos essa grandeza de densidade de partículas ρ . É conhecida da equação da continuidade, utilizada para descrever o transporte de partículas de uma quantidade que é preservada [6], que:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}; \quad (1.2)$$

onde $J(x, t)$ é a corrente de partículas que cruza um determinado ponto ao longo de um eixo horizontal.

Podemos escrever a corrente J a partir da densidade utilizando a lei de Fick [6]. Essa lei descoberta empiricamente pelo físico alemão Adolf Eugen Fick contribuiu para a compreensão dos processos de difusão. Para tal, vamos considerar um conjunto de partículas que se movem no espaço de acordo com a caminhada aleatória em uma dimensão. Neste

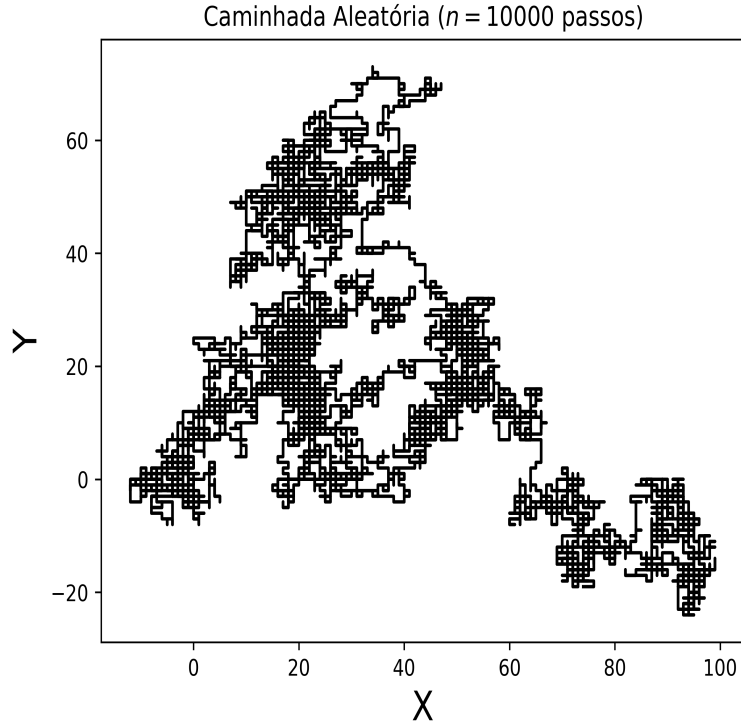


Figura 1.1: Gráfico que mostra a caminhada aleatória bidimensional para um total de 10^4 passos. Essa figura foi construída utilizando a linguagem de programação Python. Os eixos X e Y indicam a posição do caminhante em um plano bidimensional.

caso foi escolhido o eixo das abscissas x . Dessa forma, a cada intervalo de tempo Δt , cada partícula pode se deslocar Δx , sendo $N(x, t)$ o número de partículas que estão na posição x no instante t [6].

Como as partículas se movem de acordo com a caminhada aleatória, parte delas se move para a direita com probabilidade p e parte se move para a esquerda com probabilidade $q = p - 1$. Com isso, em um determinado instante de tempo, metade delas vai para direita e metade vai para a esquerda. As partículas na posição x foram para a direita, ao passo que as partículas em $x + \Delta x$ foram para a esquerda, de modo que podemos definir um deslocamento efetivo de partículas como

$$\Delta = -\frac{1}{2}[N(x + \Delta x, t) - N(x, t)]. \quad (1.3)$$

O fluxo de partículas define as partículas que cruzam uma determinada área de seção em um determinado intervalo de tempo. Portanto, tem-se que

$$J = \frac{\Delta}{a\Delta t} = -\frac{1}{2a\Delta t}[N(n+, t) - N(x, t)]. \quad (1.4)$$

Multiplicando e dividindo o lado direito por $(\Delta x)^2$, temos

$$J = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t \Delta x} \left[\frac{N(x + \Delta x, t) - N(x, t)}{a\Delta x} \right]. \quad (1.5)$$

Podemos ainda escrever a densidade de partículas por unidade de volume como

$$\rho(x, t) = \frac{N(x, t)}{a\Delta x}. \quad (1.6)$$

Logo, podemos reescrever a Equação (1.5) como

$$J = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left[\frac{\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x, t)}{\Delta x} \right]. \quad (1.7)$$

Tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$, identificamos uma derivada de $\rho(x)$ em relação a x no termo entre colchetes. Sabendo que o coeficiente de difusão em uma dimensão é dado por

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}; \quad (1.8)$$

temos, que a lei de Fick é dada por

$$J(x, t) = -D \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}; \quad (1.9)$$

onde D é chamado coeficiente de difusão.

Se introduzirmos este resultado na Equação (1.2), temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (1.10)$$

A Equação (1.10) é chamada de equação da difusão [8]. Nos capítulos posteriores utilizaremos a solução analítica dessa equação para obter o observável natural para a caracterização da difusão ilimitada do mapa padrão [9], a chamada ação quadrática média I_{rms} .

A técnica utilizada para a solução da equação da difusão foi o método da transformada de Fourier [10], que consiste em decompor a densidade $\rho(x, t)$ em uma família de ondas planas da forma

$$\rho(x, t) = \rho_k(t) e^{ikx}, \quad (1.11)$$

onde k identifica o vetor de onda.

Substituindo a Equação (1.11) na Equação (1.2), temos

$$\frac{\partial \rho_k(t) e^{ikx}}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \rho_k(t) e^{ikx}}{\partial x^2}, \quad (1.12)$$

o que nos leva a

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} e^{ikx} = -Dk^2 \rho_k e^{ikx}. \quad (1.13)$$

A solução da Equação (1.13) é da forma

$$\rho_k(t) = \rho_k(0) e^{-Dk^2 t}. \quad (1.14)$$

Por fim, devemos obter densidade $\rho(x, t)$. Tomando transformada inversa de Fourier da Equação (1.14), temos

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_k(0) e^{ikx} e^{-Dk^2 t} dk. \quad (1.15)$$

Os coeficientes

$$\rho_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, 0) e^{-ikx} dx, \quad (1.16)$$

são dados pela transformada de Fourier da densidade inicial.

1.3 Contexto das transições de fase

Vamos agora introduzir o conceito de transições de fase. Esses fenômenos ocorrem em diversos sistemas físicos, por exemplo supercondutores, mistura de líquidos e materiais magnéticos [6].

Segunda a classificação feita pelo físico austríaco Paul Ehrenfest [11], a ordem de uma certa transição de fase em um sistema termodinâmico está relacionada com a derivada da energia livre que é descontínua em $T = T_c$, onde T_c é o ponto em que ocorre a transição de fase. Em transições de primeira ordem a derivada primeira da energia livre é descontínua, o que afeta o comportamento de grandezas como calor latente e magnetização. Em transições de segunda ordem a derivada segunda é descontínua. No caso de um sistema termodinâmico, o calor específico ou a susceptibilidade apresentam descontinuidades. Em classificações modernas essas transições também incluem transições de fase de terceira ordem ou mais.

1.4 Transição de fase em um sistema magnético

Consideramos um ferromagneto unidimensional constituído de uma rede de *spins* que podem interagir uns com os outros. Assumindo que essa interação seja local e de baixa intensidade, uma consequência disso é a ocorrência de domínios magnéticos ao longo da rede [6].

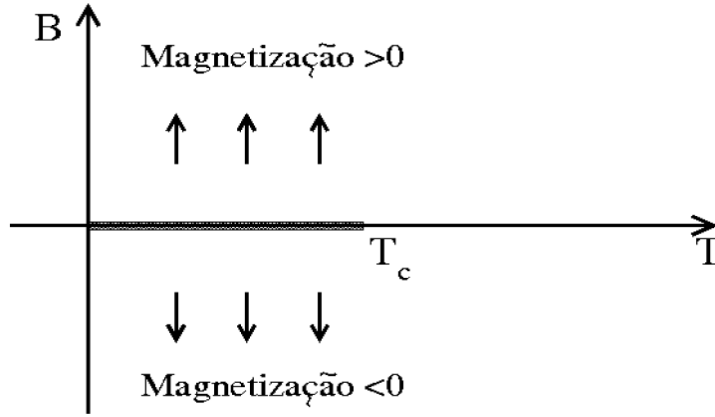


Figura 1.2: Esboço do diagrama B vs. T para um ferromagneto unidimensional. Figura retirada da Ref.[6].

Podemos desenhar um diagrama do espaço de fases B vs. T para esse sistema. B identifica o campo magnético e T a temperatura. Conforme ilustrado na Figura 1.2 podemos identificar três comportamentos.

1. Para $T < T_c$:

Nesse regime os *spins* se alinham conforme o campo magnético externo. Esses *spins* criam uma certa magnetização (m). No caso que $B > 0$, $m > 0$ (alinhado ao campo magnético). E no caso $B < 0$, $m < 0$. Sobre a linha $B = 0$ devemos ter igualdade entre as energias livre, por conta disso as magnetizações das fases tem o mesmo módulo, porém sinais opostos.

2. Para $T > T_c$:

A medida que aumentamos a temperatura o sistema se aproxima da transição de fase. Nessa janela, o sistema exibe uma magnetização espontânea, ou seja, todos os *spins* estão alinhados no mesmo sentido. Com o aumento da temperatura para $T > T_c$ a magnetização se torna nula e o sistema sofre uma quebra de simetria caracterizada pelo desalinhamento dos *spins*. Esse desalinhamento causado pelo aumento da temperatura constitui uma transição de fase.

Visto isso, devemos adotar um parâmetro que define um grau de organização do sistema, chamado parâmetro de ordem [12]. De um modo geral, parâmetros de ordem aparecem por conta da quebra de simetria de um determinado sistema e podem ter dependência de outros parâmetros de controle. Para este sistema o parâmetro de ordem é a magnetização m .

Para caracterizar o comportamento próximo a transição de fase em $T = T_c$, vamos definir

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.17)$$

onde t é a temperatura reduzida.

Conhecemos da literatura as seguintes propriedades do sistema do ferromagneto unidimensional [13, 14]:

1. Calor específico, dado por

$$c = A|t|^{-\alpha}, \quad (1.18)$$

onde α é um expoente crítico e A é uma constante.

2. Magnetização espontânea, dada por

$$m \propto (-t)^\beta. \quad (1.19)$$

Essa magnetização é o próprio parâmetro de ordem e deve se anular para $B = 0$ no regime $T > T_c$. Resultados experimentais [6] indicam que $\beta \cong 1/3$.

3. Susceptibilidade magnética, dada por

$$\chi \propto |t|^{-\gamma}. \quad (1.20)$$

A susceptibilidade magnética fornece a variação do parâmetro de ordem frente a variação do campo magnético externo. O expoente $\gamma = 1,3 \pm 0,1$.

4. Magnetização por partícula, dada por

$$m \propto B^{1/\delta}. \quad (1.21)$$

A magnetização é dada para $B \neq 0$, e o expoente $\delta \cong 3$.

1.5 Organização do trabalho

Este trabalho foi organizado da forma: O Capítulo 1 contextualiza a dinâmica caótica de sistemas não lineares, apresentando o problema da caminhada aleatória e um sistema magnético. No Capítulo 2, é feita uma investigação do mapa padrão não dissipativo, estudando a construção de um mapa a partir de um hamiltoniano. Também é discutido o espaço de fases e as transições de fase que ocorrem em uma mapa padrão conservativo, incluindo transição de integrabilidade para não integrabilidade e transição de caos global para caos local. Em seguida, no Capítulo 3, tratamos do mapa padrão dissipativo, com enfoque na obtenção das leis de escala que descrevem o seu comportamento, bem como os

expoentes críticos obtidos analiticamente. No Capítulo 4 resolvemos a equação da difusão aplicada ao mapa dissipativo, utilizando a técnica da transformada de Fourier. Falamos também sobre o comportamento da variável ação em limites específicos da variável n , com enfoque na transição de difusão limitada para ilimitada. Por fim é feita uma análise dessa transição, onde tentamos caracterizá-la totalmente. No Capítulo 5 apresentamos as considerações finais.

Capítulo 2

Mapa padrão

2.1 Contextualização do mapa

Em 1979 o mapa padrão foi desenvolvido por Taylor e foi analisado por Chirikov [15]. O chamado mapa de Chirikov-Taylor é um modelo que foi utilizado para descrever um pêndulo de massa m , comprimento do fio l , a um ângulo θ da vertical que é perturbado por uma ação de pequenos pulsos externos de um campo gravitacional homogêneo $g(t)$ [16].

Em mapeamentos desse tipo conhecemos relações de recorrência para as quantidades físicas de interesse, que podem ser obtidas pela discretização temporal das suas equações. A partir realimentação dessas equações podemos resolver problemas complexos de forma numérica [17].

Neste trabalho trataremos de mapas bidimensionais conservativos que são descritos em termos das variáveis ângulo θ e ação I . O espaço de fases desse tipo de mapeamento contém uma dinâmica bastante complexa, exibindo ilhas periódicas, mar de caos e curvas que funcionam como barreiras que impedem a difusão das partículas para a região de caos, chamadas de curvas invariantes do tipo *spanning*. Nosso interesse está na transição da difusão limitada para ilimitada da variável ação, que ocorre quando há destruição das curvas invariantes. Usaremos a solução da equação da difusão para confirmar analiticamente os resultados que são conhecidos da literatura acerca dos expoentes críticos e das leis de escalas [18].

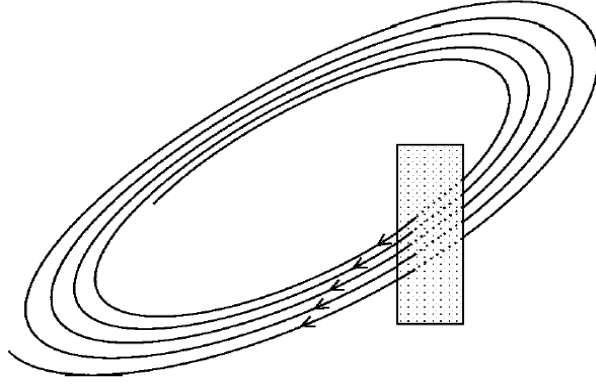


Figura 2.1: Ilustração de uma seção de Poincaré. Figura retirada da Ref.[20].

2.2 Determinação de um mapeamento a partir de um hamiltoniano

Mapeamentos podem, em princípio, ser construídos a partir de um hamiltoniano. Assumiremos um sistema dinâmico ligeiramente perturbado, de dois graus de liberdade e integrável. Um sistema é dito integrável, quando existem quantidades que são preservadas, como por exemplo, ação e energia [19].

Consideraremos um hamiltoniano escrito como

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2). \quad (2.1)$$

Esse hamiltoniano é composto de duas partes. H_0 é a parte que descreve o sistema integrável e H_1 descreve a parte não integrável. ϵ é um parâmetro de controle que controla a transição de integrável ($\epsilon = 0$), quando a quantidade de constantes do sistema é igual ao número de graus de liberdade (número de coordenadas que especificam completamente a posição do sistema) para não integrável ($\epsilon \neq 0$). Neste último caso pode-se ter um espaço de fases misto.

Como H é independente do tempo, podemos eliminar a variável I_2 , restando apenas três variáveis. Consideraremos que θ_2 é constante (mod 2π) e também uma seção de Poincaré dada pelo plano I_1 vs. θ_1 . Uma seção de Poincaré consiste de um hiperplano que intercepta um fluxo de soluções de um conjunto de equações diferenciais de N dimensões de forma que a dinâmica pode ser estudada a partir de um mapeamento discreto. Um exemplo de seção de Poincaré pode ser observado na figura 2.1. No caso da figura o sistema evolui de acordo com $\dot{x} = f(x)$, S é uma seção de dimensão $(n - 1)$ [19].

A partir disso, um mapeamento genérico pode ser escrito como

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}), \\ [\theta_{n+1} = \theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \mod(2\pi). \end{cases} \quad (2.2)$$

As funções h , K , e p , são funções lineares de suas variáveis. O índice n corresponde à n -ésima iterada do mapa.

Este mapeamento foi obtido a partir de um hamiltoniano, isso implica que área do espaço de fases deve ser preservada, o que é uma condição imposta pelo teorema de Liouville [14]. De fato, a condição que define essa preservação de área é que o determinante da matriz jacobiana deve ser igual a 1. Podemos escrever essa matriz como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Calculando os elementos da matriz jacobiana temos que

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 + \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{1}{1 - \epsilon \left[\frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right]}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= \frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \\ &= \left[\frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \\ &= 1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \left[\frac{\partial k(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A partir desses coeficientes podemos calcular o determinante da matriz jacobiana, da seguinte forma

$$Det \mathbf{J} = \frac{1 + \epsilon \left[\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \right]}{1 - \epsilon \left[\frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right]}. \quad (2.8)$$

Uma análise da Equação (2.12) mostra que se a condição

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0, \quad (2.9)$$

for satisfeita, então o mapeamento preserva a área do espaço de fases.

Para diversos sistemas, a função $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e em alguns $h(\theta_n) = \sin(\theta_n)$, é uma função periódica. Podemos ilustrar diferentes aplicações encontradas na literatura [21, 22, 23]:

1. $K(I_{n+1}) = I_{n+1}$ este descreve o mapa padrão;
2. $K(I_{n+1}) = \frac{2}{I_{n+1}}$ este descreve o modelo do acelerador de Fermi;
3. $K(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$, com ζ constante, descreve o modelo bouncer;

4.

$$K(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\zeta^2 \left(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 - \frac{1}{\zeta^2}} \right) & \text{se } I_{n+1} > \frac{1}{\zeta} \\ 4\zeta^2 I_{n+1} & \text{se } I_{n+1} \leq \frac{1}{\zeta} \end{cases} \quad (2.10)$$

Recuperamos o modelo híbrido Fermi-Ulam-Bouncer;

5. $K(I_{n+1}) = I_{n+1} + \zeta I_{n+1}^2$ descreve o mapa logístico *twist*.

2.3 Mapa padrão conservativo

Como mencionado na seção anterior, se $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$, $h(\theta_n) = \sin(\theta_n)$ e $K(I_{n+1}) = I_{n+1}$, temos o mapa na forma

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta), \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \mod(2\pi). \end{cases} \quad (2.11)$$

O mapa padrão de Chirikov-Taylor é conservativo pois

$$Det\mathbf{J} = \frac{1 + \epsilon \left[\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \right]}{1 - \epsilon \left[\frac{\partial h(\theta_n)}{\partial I_{n+1}} \right]} = \frac{1 + \epsilon \left[\frac{\partial \theta}{\partial \theta_n} \right]}{1 - \epsilon \left[\frac{\partial \theta}{\partial I_{n+1}} \right]} = 1. \quad (2.12)$$

Esse mapa é capaz de modelar sistemas físicos reais, com aplicações para descrever localmente a dinâmica dos sistemas que possuem características caóticas.

A partir do mapa, podemos descrever completamente a dinâmica do sistema, visto que, dadas as condições iniciais θ_0 e I_0 , podemos obter os valores de θ_n e I_n para todos os valores de n subsequentes. Propriedades físicas interessantes ocorrem no espaço de fases desse mapeamento conforme variamos o parâmetro ϵ .

2.4 Espaços de fases do mapa padrão conservativo

2.4.1 Transição de integrabilidade para não integrabilidade.

Quando $\epsilon = 0$ temos um sistema integrável. Nesse sistema o número de constantes do movimento é igual ao número de graus de liberdade do sistema. O espaço de fases para este caso pode ser observado na figura 2.2 [24].

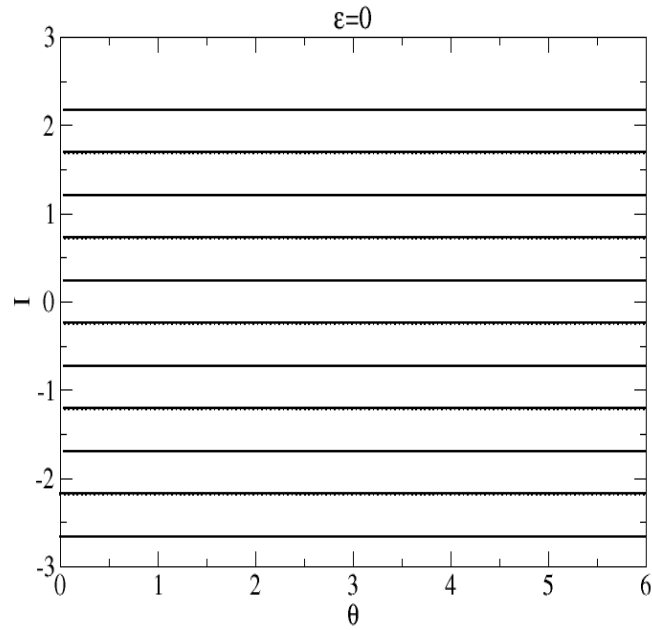


Figura 2.2: Espaço de fase para o mapa padrão conservativo para do parâmetro de controle $\epsilon = 0$.

Quando $\epsilon \neq 0$ o sistema não é mais integrável. O espaço de fases se torna misto, contendo ilhas de periodicidade, caos e curvas invariantes do tipo *spanning*. Dessa forma é evidente que o parâmetro ϵ controla a transição de integrável para não integrável. A Figura 2.3 mostra o espaço de fase para $\epsilon = 0,6$.

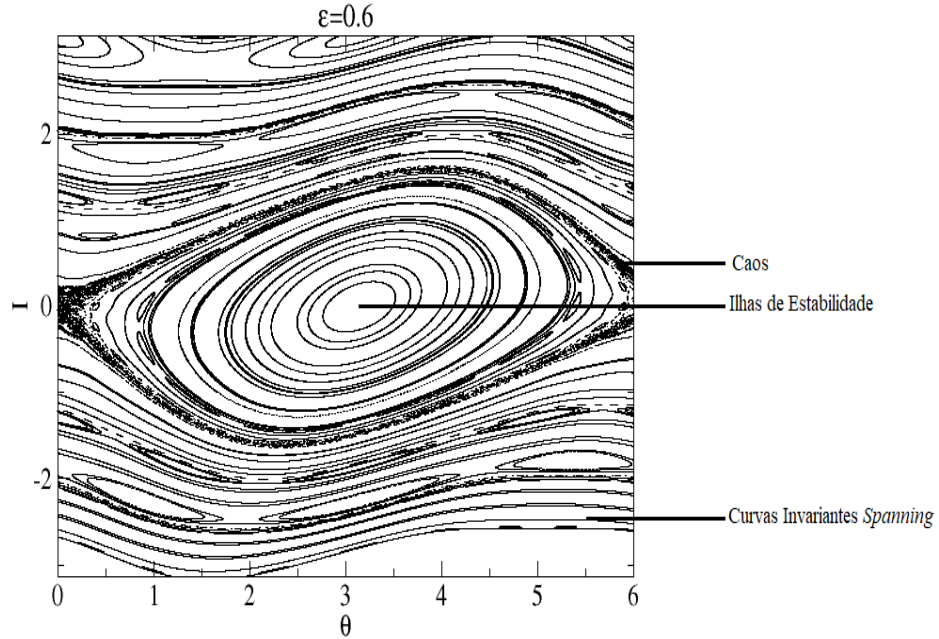


Figura 2.3: Espaço de fase para o mapa padrão conservativo para parâmetro de controle $\epsilon = 0,6$. O gráfico exibe um espaço de fases com ilhas periódicas, caos e curvas invariantes do tipo *spanning*.

2.4.2 Transição de caos local para caos global.

Outro caso de interesse no mapa padrão conservativo é quando o parâmetro de controle $\epsilon > 0,9716$. No valor crítico de $\epsilon = 0,9716\dots$ ocorre outra transição de fase [19, 24]. Neste caso o sistema sofre uma transição de caos local para caos global, as curvas invariantes são destruídas permitindo que a ação se difunda ilimitadamente. Uma consequência imediata da destruição dessas curvas é a difusão ilimitada da ação.

Os espaços de fases podem ser observados nas Figura 2.4.

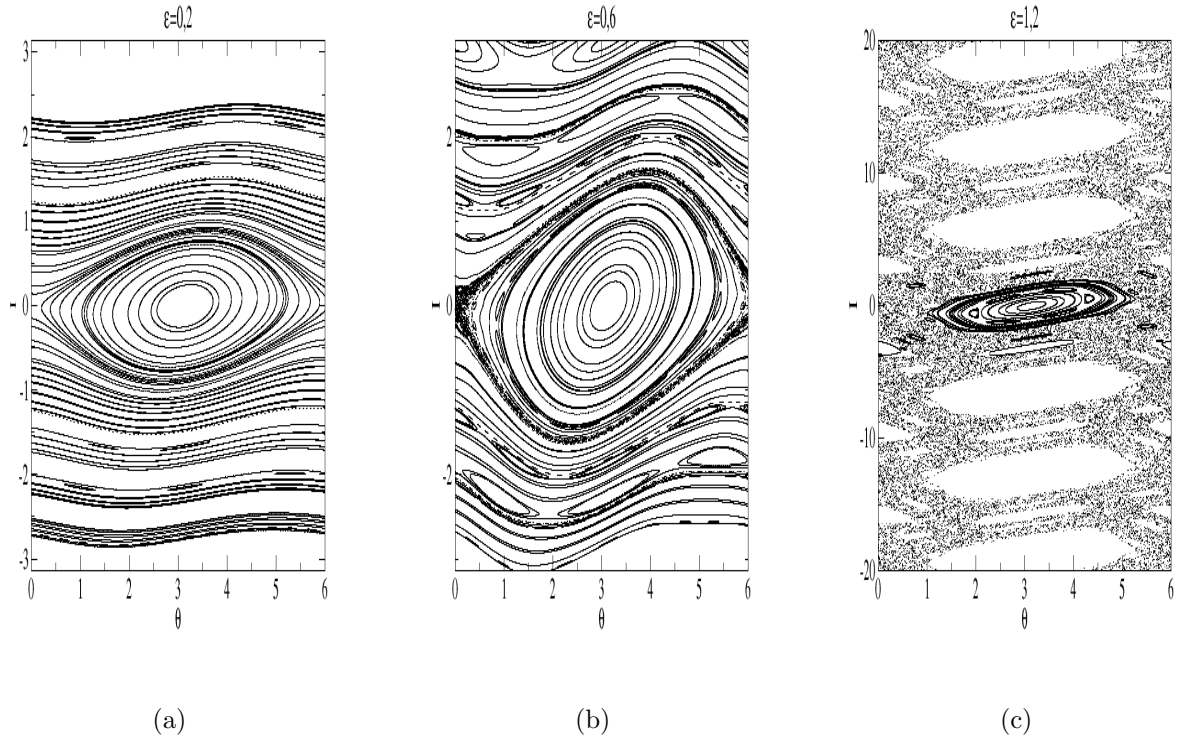


Figura 2.4: Gráfico do espaço de fases I vs. θ . Em (a), o espaço de fases exibe curvas invariantes bem definidas; Em (b) ainda vemos as curvas, mas em menor quantidade; E em (c) ocorre a destruição das curvas invariantes e a difusão ilimitada da ação no espaço de fases.

Observamos que na figura 2.4 (a), temos a coexistência de todas as estruturas no espaço de fases, ilhas de periodicidade, curvas invariantes do tipo *spanning* e mar de caos. A medida que aumentamos o parâmetro ϵ o espaço de fase se modifica, ao passo que, para valores de $\epsilon > 0,9716$ o mar de caos se difunde livremente.

Capítulo 3

Mapa padrão dissipativo

3.1 O mapa e o espaço de fases

A forma matemática do mapa padrão dissipativo é similar a do conservativo, porém, introduzimos um termo de dissipação $\gamma \in [0, 1]$. O mapa é escrito como

$$\begin{cases} I_{n+1} = (1 - \gamma)I_n + \epsilon \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \mod(2\pi). \end{cases} \quad (3.1)$$

Vimos que quando o sistema é conservativo, o volume no espaço de fases é preservado. Isso foi verificado a partir da investigação do determinante da matriz jacobiana. Se o determinante da matriz for ± 1 então o sistema é conservativo. Quando $\gamma \neq 0$ o sistema exibe atratores. Esses atratores são um conjunto de pontos para os quais a dinâmica converge para tempos suficientemente longos [25]. Devido a existência de atratores, uma consequência imediata de $\gamma \neq 0$ é a supressão da difusão ilimitada da ação. Isso caracteriza a transição de difusão ilimitada para limitada da variável ação, I .

Ao analisarmos as vizinhanças dessa transição vemos que a ação quadrática média será uma boa candidata para ser o observável que caracteriza a difusão, ao passo que ela obedece leis de escala bem definidas e que são conhecidas da literatura [26].

Podemos ver na figura 3.1 os espaços de fases para diferentes valores do parâmetro ϵ . Nestas figuras as estruturas observadas foram compostas por um conjunto de pontos indicando uma dinâmica caótica, logo compondo um atrator. Os parâmetros de controle usados foram $\gamma = 10^{-2}$ e: (a) $\epsilon = 10$; (b) $\epsilon = 10^2$; (c) $\epsilon = 10^3$.

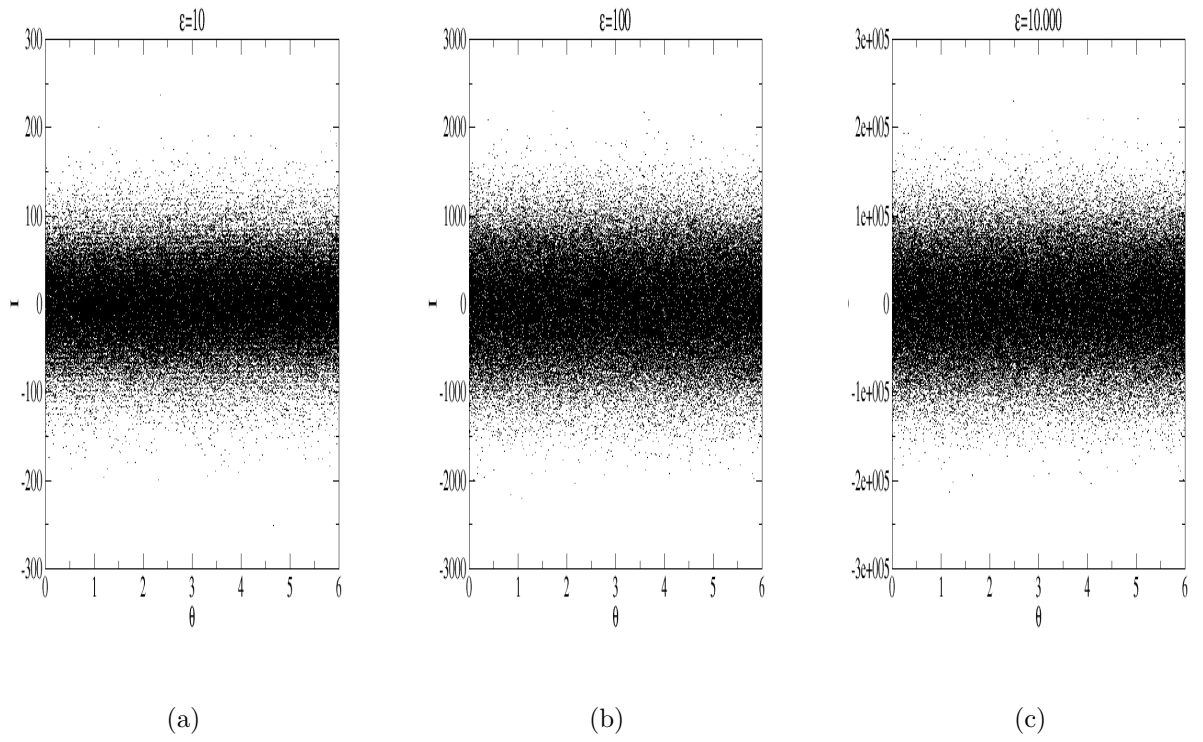


Figura 3.1: Gráfico do espaço de fases para o mapa padrão dissipativo considerando $\gamma = 10^{-2}$ e três valores para ϵ conforme mostrado nas figuras.

3.2 Hipóteses de escala e expoentes críticos

O espaço de fases do mapeamento (3.1) possui uma simetria em relação a I . Por conta disso notamos que o $\bar{I} = 0$, portanto $\bar{I}$ não é um bom observável a ser investigado. Consideramos então a variável $I_{rms} = \sqrt{\bar{I}^2}$. Este observável é determinado a partir de duas médias, sendo

$$\bar{I}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2 \right], \quad (3.2)$$

onde n identifica o número de iterações do mapa, enquanto M especifica o número de condições iniciais utilizadas. O somatório em j identifica uma média ao longo da órbita, enquanto o somatório em i identifica uma média sobre o conjunto de condições iniciais.

Podemos observar o comportamento de I *vs.* n para alguns valores de ϵ e γ conforme indicados na figura 3.2. Vemos que para tempos curtos essa curva apresenta um comportamento crescente e após um determinado número de iterações, o comportamento muda e as curvas passam para um regime de saturação marcadas por um regime constante.

Podemos notar que as curvas crescem e saturam em valores diferentes, de acordo com o parâmetro de controle. O regime aumenta conforme o parâmetro de controle aumenta. Por outro lado, as curvas crescem e saturam em diferentes alturas para um certo valor de n , de forma que podemos fazer a transformação $n \rightarrow n\epsilon^2$ para reescalar o eixo horizontal evidenciando que as curvas crescem juntas e separam-se em platôs de saturação diferentes.

Observamos na figura 3.3 a sobreposição das curvas da figura 3.2 em uma única curva universal após as transformações de escala apropriadas. As transformações são $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/(\epsilon^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2})$ e $n \rightarrow n/(\epsilon^{z_1}\gamma^{z_2})$. O gráfico inserido na figura 3.3 mostra o decaimento exponencial ao atrator caótico.

Baseando-se no comportamento das curvas, pode-se propor as seguintes hipóteses de escala:

1. Para $n \ll n_x$, as curvas são descritas por

$$I_{rms} \propto (n\epsilon^2)^\beta. \quad (3.3)$$

neste caso β é chamado de expoente de aceleração.

2. Para $n \gg n_x$, as curvas se aproximam de um platô constante. São descritas por

$$I_{rms,sat} \propto \epsilon^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}. \quad (3.4)$$

onde α é chamado de expoente de crescimento.

3. O número de iterações que marca a mudança de crescimento para platô constante é dado por

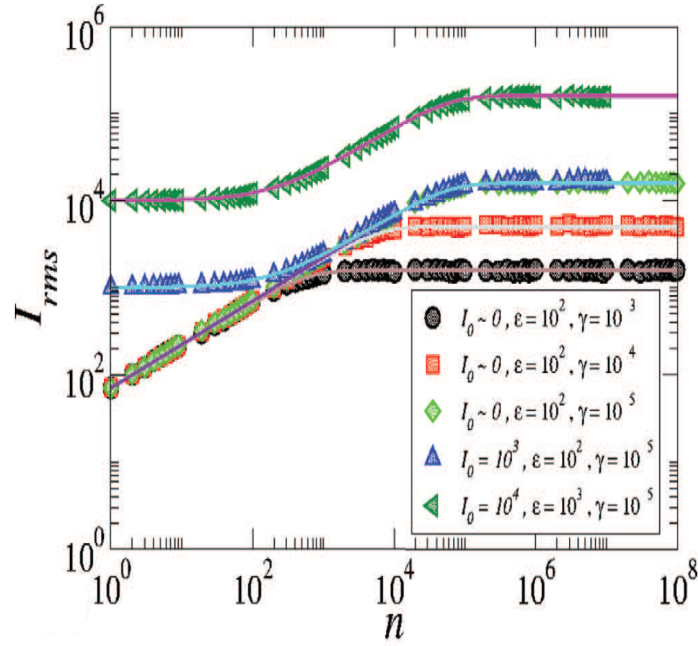


Figura 3.2: Gráfico de I_{rms} vs. n para diferentes parâmetros de controle e condições iniciais, conforme indicado na figura. Figura retirada da Ref.[8].

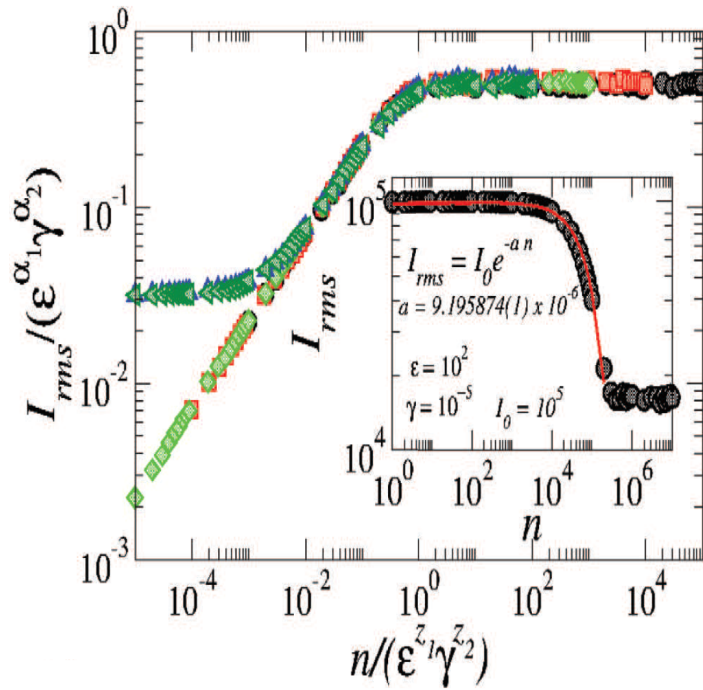


Figura 3.3: Superposição das curvas da figura 3.2 em um único gráfico após as transformações de escala apropriadas. O gráfico inserido nesta figura mostra o decaimento exponencial ao atrator caótico. Figura retirada da Ref.[8].

$$n_x \propto \epsilon^{z_1} \gamma^{z_2}, \quad (3.5)$$

onde os z_1 e z_2 são expoentes críticos e n_x é chamado de número de interação de *crossover*.

De fato, podemos utilizar uma função homogênea generalizada para descrever o comportamento proposto pelas hipóteses de escala, sendo essa escrita como

$$I_{rms}(n\epsilon^2, \epsilon, \gamma) = l I_{rms}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon, l^c \gamma), \quad (3.6)$$

onde l é um fator de escala, a , b e c são expoentes característicos.

Como l é um fator de escala, então podemos escolher, sem perda de generalidade $l^a n\epsilon^2 = 1$, o que fornece

$$l = (n\epsilon^2)^{-1/a}. \quad (3.7)$$

Substituindo essa expressão na Equação (3.6), obtemos

$$I_{rms} = (n\epsilon^2)^{\frac{-1}{a}} I_{rms}(1, (n\epsilon^2)^{\frac{-b}{a}} \epsilon, (n\epsilon^2)^{\frac{c}{a}} \gamma), \quad (3.8)$$

onde o termo $I_{rms}(1, (n\epsilon^2)^{\frac{-b}{a}} \epsilon, (n\epsilon^2)^{\frac{c}{a}} \gamma)$ é constante para $n \ll n_x$. Comparando a Equação (3.7) com a Equação (3.3), concluímos que $\beta = \frac{-1}{a}$. Em simulações numéricas, obtemos um valor de $\beta \cong \frac{1}{2}$, logo $a = 2$.

Escolhendo $l^b \epsilon = 1$, temos que

$$l = \epsilon^{\frac{-1}{b}}. \quad (3.9)$$

Substituindo esta expressão na Equação (3.6), temos

$$I_{rms} = \epsilon^{\frac{-1}{b}} I_{rms}(n\epsilon^2 \epsilon^{\frac{-a}{b}}, 1, \epsilon^{\frac{-c}{b}} \gamma), \quad (3.10)$$

em que o termo $I_{rms}(n\epsilon^2 \epsilon^{\frac{-a}{b}}, 1, \epsilon^{\frac{-c}{b}} \gamma)$ é constante para $n \gg n_x$. Um resultado imediato vem da comparação dessa expressão com a Equação (3.5), sendo esse $\alpha_1 = \frac{-1}{b}$.

Por último, escolhendo $l^c \gamma = 1$, temos que

$$l = \gamma^{\frac{-1}{c}}. \quad (3.11)$$

Substituindo essa expressão na Equação (3.6), obtemos

$$I_{rms} = \gamma^{\frac{-1}{c}} I_{rms}(\gamma^{\frac{-1}{c}} n\epsilon^2, \gamma^{\frac{-b}{c}}, 1). \quad (3.12)$$

Considerando $I_{rms}(\gamma^{\frac{-1}{c}} n\epsilon^2, \gamma^{\frac{-b}{c}}, 1)$ constante para $n \gg n_x$ e comparando com a Equação (3.5), concluímos que $\alpha_2 = \frac{-1}{c}$.

Podemos agora fazer uma comparação entre as equações obtidas acima para determinar os expoentes z_1 e z_2 . Comparando as Equações (3.7) e (3.9), temos que

$$n = \epsilon^{\frac{\alpha_1}{\beta} - 2}. \quad (3.13)$$

Comparando esse resultado com a hipótese da Equação (3.5), com γ fixo, obtemos que

$$z_2 = \frac{\alpha_1}{\beta} - 2. \quad (3.14)$$

Comparando as Equações (3.7) e (3.11), temos

$$n = \epsilon^{-2} \gamma^{\frac{\alpha_2}{\beta}}. \quad (3.15)$$

Comparando com a Equação (3.5), obtemos

$$z_1 = \frac{\alpha_2}{\beta}. \quad (3.16)$$

Essa última equação define uma relação entre os expoentes críticos, estabelecendo assim uma lei de escala.

O conhecimento dos expoentes α_1 e β define o expoente z_1 , por outro lado, o conhecimento dos expoentes z_1 e β definem α_1 .

Estes expoentes podem ser determinados de diversas maneiras distintas. Neste trabalho os expoentes foram tomados como conhecidos a partir da Ref.[18]. Pode-se obtê-los a partir de simulações numéricas, utilizando os seguintes procedimentos. O expoente β é obtido a partir do crescimento das curvas de I_{rms} *vs.* n através de um ajuste em lei de potência cujo resultado é $\beta = \frac{1}{2}$. O expoente α_1 é obtido a partir do gráfico I_{rms} *vs.* ϵ , o valor deste expoente é $\alpha_1 = 1,002$. Já o α_2 , é obtido a partir do gráfico I_{rms} *vs.* γ , o valor é $\alpha_2 = -0,5038$ [18].

Para obter os expoentes z_1 e z_2 , devemos analisar o comportamento de n_x *vs.* ϵ e n_x *vs.* γ . Os valores desses expoentes são $z_1 = -0,002$ e $z_2 = -1,16$ [18].

Capítulo 4

Equação da difusão

O observável natural para caracterizar a difusão caótica é a ação quadrática média I_{rms} . Para obtermos este observável, devemos resolver a equação da difusão, que fornece a probabilidade de se observar uma ação específica I em um determinado instante n , ou seja, $P(I, n)$ [8].

4.1 Solução da equação da difusão

A equação a ser resolvida é

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (4.1)$$

onde D identifica o coeficiente de difusão. Podemos obtê-lo a partir da primeira equação do mapeamento (3.1). Elevando ao quadrado ambos os lados da primeira equação do mapa (3.1), temos que

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 - 2\gamma I_n^2 + \gamma^2 I_n^2 + 2(1 - \gamma)I_n \epsilon \sin(\theta_n) + \epsilon^2 \sin^2(\theta_n). \quad (4.2)$$

Se considerarmos uma média sobre o ensemble de $\theta \in [0, 2\pi]$, e assumindo independência estatística entre I e θ , temos que

$$\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2} = (\gamma^2 - 2\gamma)\overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (4.3)$$

Podemos dividir ambos os lados da Equação (4.3) por dois e então reagrupar convenientemente para chegar a

$$\frac{\overline{I_{n+1}^2} - \overline{I_n^2}}{2} = \frac{\gamma(\gamma - 2)}{2}\overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{4}, \quad (4.4)$$

onde podemos identificar o coeficiente de difusão D como

$$D(\gamma, \epsilon, n) = \frac{\gamma(\gamma - 2)}{2} \overline{I}_n^2 + \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (4.5)$$

Para obtermos uma solução única para a equação da difusão (4.1), impomos as seguintes condições de contorno, $\lim_{I \rightarrow \pm\infty} P(I) = 0$ com a condição inicial $P(I, 0) = \delta(I - I_0)$, que fornece todas as partículas partindo da mesma ação inicial, porém com M em diferentes fases iniciais pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$. Essa última condição garante que todas as partículas iniciem sua dinâmica a partir da mesma ação inicial, porém com M fases iniciais diferentes.

O coeficiente D pode ser um problema na solução da equação (4.1), devido a sua dependência temporal. No entanto, sua variação do instante n para o instante $n + 1$ é lenta, de forma que podemos considerá-lo constante para obtermos a solução da equação da difusão. Entretanto, no momento que esta solução for obtida, devemos incorporar a equação de D de volta na solução.

4.2 Técnica da transformada de Fourier

A técnica utilizada para resolver a Equação (4.1) é transformada de Fourier [10]. Pelo fato da probabilidade ser normalizada temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(I, n) dI = 1. \quad (4.6)$$

Podemos definir uma função

$$R(k, n) = F\{P(I, n)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(I, n) e^{ikI} dI. \quad (4.7)$$

Pela propriedade da transformada de Fourier $F\{\frac{\partial^2 P}{\partial I^2}\} = -k^2 R(k, n)$, e diferenciando $R(k, n)$ em relação a n , temos

$$\frac{dR(k, n)}{dn} = -Dk^2 R(k, n). \quad (4.8)$$

Essa equação nos fornece

$$R(k, n) = R(k, 0) e^{-Dk^2 n}. \quad (4.9)$$

Aplicando as condições iniciais, temos $F\{\delta(I - I_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikI_0}$. Invertendo a expressão de $R(k, n)$, obtemos

$$P(I, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k, n) e^{-ikI} dk = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-\frac{(I-I_0)^2}{4Dn}}, \quad (4.10)$$

A Equação (4.10) satisfaz tanto a condição de contorno quanto a condição inicial assim como a equação da difusão. O observável que queremos caracterizar é

$$\overline{I^2(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} I^2 P(I, n) dI \Rightarrow \quad (4.11)$$

$$\overline{I^2(n)} = \sqrt{2Dn + I_0^2}. \quad (4.12)$$

Nesse momento devemos incorporar a Expressão (4.5) na Equação (4.12). E com isso obtemos a expressão de I_{rms} , sendo

$$I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + F(n) \left[I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \right]}, \quad (4.13)$$

onde,

$$F(n) = \frac{n\gamma(\gamma - 2)}{n + 1} \left[\frac{1 - e^{-(n+1)\gamma(2-\gamma)}}{1 - e^{-\gamma(2-\gamma)}} \right]. \quad (4.14)$$

4.3 Casos particulares de I_{rms}

Utilizando os resultados das Equações (4.13) e (4.14) podemos extrair alguns casos particulares:

1. Caso $n = 0$, temos que

$$I_{rms}(0) = \sqrt{I_0^2 + F(0) \left[I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \right]}. \quad (4.15)$$

Analisando a Equação 4.14 vemos que $F(0) = 0$ o que resulta em

$$I_{rms}(0) = \sqrt{I_0^2} = I_0. \quad (4.16)$$

Podemos observar que a Equação (4.16) confirma o esperado. Quando $n = 0$, o valor de $I_{rms} = I_0$, que é exatamente a condição inicial.

2. No limite $n \rightarrow \infty$

Para essa análise notamos que $\frac{n}{(n+1)} \cong 1$, logo temos que

$$I_{rms}(n \rightarrow \infty) = \sqrt{I_0^2 + \gamma(\gamma - 2) \left[I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2\gamma(\gamma - 2)} \frac{1}{1 - e^{-\gamma(2-\gamma)}} \right]} \quad (4.17)$$

$$I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2(2 - \gamma)}} \epsilon \gamma^{-1/2}. \quad (4.18)$$

É conhecido da literatura que os expoentes críticos α_1 e α_2 podem ser extraídos das hipóteses de escala [26]. Para valores de n muito grandes, o estado estacionário é descrito por

$$I_{rms} \propto \epsilon^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2}. \quad (4.19)$$

De fato, comparando essa hipótese de escala com a Equação (4.18), concluímos imediatamente que $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Esses resultados concordam com a discussão fenomenológica que já é conhecida [9].

3. No limite n pequeno. Assumindo que a condição inicial seja $I_0 \cong 0$, temos que

$$I_{rms}(n) \cong \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2}n}. \quad (4.20)$$

Esse resultado prova que para valores pequenos de n , um conjunto de partículas se difunde ao longo do atrator caótico analogamente ao problema da caminhada aleatória. Conclui-se então que o expoente de decaimento é $\beta = 1/2$, ou seja difusão normal [9].

A partir da análise feita na sessão 3.2, uma hipótese de escala para o limite em que n é pequeno é $I_{rms}(n) \propto (n\epsilon^2)^\beta$ com $\beta = 1/2$, ou seja, este resultado concorda com as previsões teóricas discutidas.

4. Limite n pequeno. Com condição inicial $0 < I_0 < I_{sat}$.

Nestes parâmetros um ponto de *crossover* é observado em $n'_x \cong 2\frac{I_0^2}{\epsilon^2}$. Esse ponto de *crossover* já foi observado em uma análise fenomenológica das hipóteses de escala [27].

5. Limite n pequeno com $I_0 \cong 0$

Nesse limite temos um crescimento em I_{rms} seguido por um *crossover*, levando ao regime de saturação. Esse ponto de *crossover* é dado por

$$n_x \cong \frac{1}{2-\gamma} \gamma^{-1}. \quad (4.21)$$

Conforme discutido na sessão 3.2, $n_x \cong \epsilon^{z_1} \gamma^{z_2}$, dessa forma temos que $z_1 = 0$ e $z_2 = -1$.

4.4 Discussão da transição de fase $\gamma = 0$ para $\gamma \neq 0$

Conforme mencionado na sessão 3.1, para $\gamma \neq 0$ o espaço de fases apresenta atratores, isso nos leva a concluir que o teorema de Liouville [28] é violado pois $\det J = (1-\gamma) \neq \pm 1$. Para valores elevados de ϵ , ou seja $\epsilon > 10$, regiões do espaço de fase onde a dinâmica fica aprisionada a uma determinada órbita, os chamados *sinks*, são inexistentes e por isso a dinâmica possui atratores caóticos para valores pequenos de γ . É nesse limite que temos

a transição de difusão limitada ($\gamma \neq 0$) para difusão ilimitada ($\gamma = 0$) da variável ação [8].

Devemos agora caracterizar essa transição de fase. Para isso, iremos tomar como base quatro itens necessários para investigar uma transição de fase. Conforme os estudos do físico James P. Sethna,[12] devemos identificar o parâmetro de ordem, discutir a excitação elementar do sistema, verificar os defeitos topológicos que impactam o transporte de partículas e, por fim, identificar a quebra de simetria do sistema [12].

Vamos analisar cada item individualmente.

1. Parâmetro de ordem:

Podemos supôr que o parâmetro de ordem desse sistema é o próprio I_{rms} . Para que isso seja verdade, ele deve ir continuamente a zero à medida que o parâmetro dissipativo γ tende a zero. Analisando a Equação (4.18)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2(2-\gamma)}} \epsilon \gamma^{-1/2}. \quad (4.22)$$

O resultado desse limite é ∞ . De fato, no limite em que $\gamma \rightarrow 0$, temos que $I_{rms} \rightarrow \infty$. Como I_{rms} diverge em tal limite, não temos um bom candidato para ser o parâmetro de ordem. Uma estratégia para solucionar este problema é propôr uma variável σ , tal que

$$\sigma = \frac{1}{I_{rms}}, \quad (4.23)$$

Dessa forma,

$$\sigma = \frac{1}{\frac{\epsilon \gamma^{-1/2}}{\sqrt{2(2-\gamma)}}} = \frac{\sqrt{2(2-\gamma)}}{\epsilon \gamma^{-1/2}}. \quad (4.24)$$

E analisando novamente o limite, vemos que

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sigma = \frac{\sqrt{2(2-\gamma)}}{\epsilon \gamma^{-1/2}} = 0. \quad (4.25)$$

Com isso concluímos que σ é um bom candidato à parâmetro de ordem, tendo em vista que ele tende a zero conforme γ vai a zero.

Para completar essa análise, vamos analisar o comportamento da derivada de I_{rms} em relação a γ , ou seja, a resposta do parâmetro de ordem frente a variação de γ . Chamamos essa grandeza de susceptibilidade. Vejamos,

$$\chi = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\frac{\sqrt{2(2-\gamma)}}{\epsilon \gamma^{-1/2}} \right] = \frac{1}{4(4-2\gamma)^{1/2}} \epsilon \gamma^{1/2}. \quad (4.26)$$

Tomando o limite da Equação (4.26) com γ tendendo a zero, vemos que o resultado é ∞ . Essa a divergência da susceptibilidade implica em uma transição de fase de segunda ordem [12].

2. Excitação elementar:

Identificamos a excitação elementar do sistema como sendo o termo $\epsilon \sin(\theta_n)$, pois este é o unico termo capaz de alterar a ação.

3. Defeitos topológicos:

Concluimos que os defeitos topológicos desse sistema estão relacionados com os pontos fixos do tipo *sink*. Para o regime de interesse onde ocorre a transição de fase esses *sinks* são inexistentes.

4. Quebra de simetria:

A última pergunta a ser respondida é sobre a quebra de simetria dessa transição de fase. Este item, assim como o item 1, constitui um problema em aberto na comunidade de dinâmica não linear e por isso temos apenas perspectivas.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo o estudo da dinâmica de mapeamentos bidimensionais com enfoque nas transições de fases, especialmente a que diz respeito a transição de difusão limitada para ilimitada no mapa padrão de Chirikov-Taylor. Neste mapeamento foi caracterizado o comportamento da ação quadrática média nos regimes de transição de fase. Também foram apresentadas as leis de escala e os expoentes críticos, que foram obtidos de maneira analítica a partir da solução da equação da difusão pela transformada de Fourier.

O formalismo desenvolvido nesse trabalho possibilita uma aplicação à sistemas mais complicados, como um sistema de bilhares dependentes do tempo. A equação da difusão foi utilizada com enorme sucesso na análise da transição de difusão limitada para ilimitada, possibilitando uma descrição analítica da invariância de escala presente em uma transição desse tipo.

A partir da solução analítica da equação da difusão foi possível propôr uma grandeza que atende bem o comportamento de um parâmetro de ordem, sendo essa o inverso da ação quadrática média. Essa investigação consiste na solução de um problema em aberto na comunidade de dinâmica não linear o que dá a originalidade ao presente estudo.

Referências Bibliográficas

- [1] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. New York: Westview Press, 2000.
- [2] Albert Einstein. On a heuristic viewpoint concerning the production and transformation of light. *Annalen der Physik*, 17:132–148, 1905.
- [3] Annalen der physik. *Folge*, 17:891–921, 1905.
- [4] Edward N. Lorenz. Maximum simplification of the dynamic equations. *Tellus*, 12(3):243–254, 1960.
- [5] Robert M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976.
- [6] Edson D. Leonel. *Fundamentos da Física Estatística*. São Paulo: Blucher, 2015.
- [7] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. New York: Courier Corporation, 1956.
- [8] Edson D. Leonel, Célia M. Kuwana, Makoto Yoshida, and Juliano A. de Oliveira. Application of the diffusion equation to prove scaling invariance on the transition from limited to unlimited diffusion. *EPL*, 131(1):10004, 2020.
- [9] Diego F. M. Oliveira, Marko Robnik, and Edson D. Leonel. Statistical properties of a dissipative kicked system: Critical exponents and scaling invariance. *Physics Letters A*, 376(5):723–728, 2012.
- [10] Eugene Butkov. *Mathematical Physics*. Califórnia: Addison-Wesley, 1973.
- [11] Gregg Jaeger. The Ehrenfest classification of phase transitions: introduction and evolution. *Archive for history of exact sciences*, 53(1):51–81, 1998.
- [12] James Sethna. *Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity*. New York: Oxford University Press, 2006.

- [13] John Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [14] Sílvia R.A. Salinas. *Introdução a física estatística*. São Paulo: Edusp, 1997.
- [15] Boris V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5):263 – 379, 1979.
- [16] Giulio Casati, Boris V. Chirikov, Felix M. Izraelev, and Joseph Ford. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation. In *Stochastic behavior in classical and quantum Hamiltonian systems*, pages 334–352. Springer, 1979.
- [17] Allan J. Lichtenberg and Michael A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*. New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] Rivania M. N. Teixeira. Leis de escala em mapeamentos discretos. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2016.
- [19] Allan J. Lichtenberg and Max A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*. New York: Mocsow, Mir, 1984.
- [20] Edson D. Leonel. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Nao Lineares*. São Paulo: Editora Blucher, 2019.
- [21] Denis G. Ladeira and Edson D. Leonel. Dynamical properties of a dissipative hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17(1):823, 2007.
- [22] Denis G. Ladeira and Jafferson K. L. da Silva. Scaling of dynamical properties of the fermi-ulam accelerator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(23):5707–5715, 2008.
- [23] James E. Howard and Jeffrey Humpherys. Nonmonotonic twist maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 80(3):256–276, 1995.
- [24] Edson D. Leonel, Makoto Yoshida, and Juliano A. de Oliveira. Characterization of a continuous phase transition in a chaotic system. *EPL (Europhysics Letters)*, 131(2):20002, 2020.
- [25] Luiz H. A. Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.

- [26] Juliano A. de Oliveira, Rafael A. Bizão, and Edson D. Leonel. Finding critical exponents for two-dimensional hamiltonian maps. *Physical Review E*, 81(4):046212, 2010.
- [27] Edson D. Leonel, Peter V. E. McClintock, and Jafferson K. L. da Silva. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, 93(1):014101, 2004.
- [28] Gerald J. Sussman, Jack Wisdom, and Meinhard E. Mayer. *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. Massachusetts: Cambridge University Press, 2003.