UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS DE BAURU
FACULDADE DE CIÊNCIAS
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência

José Roberto Damasceno da Silva

ANÁLISES DE AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DOS JOGOS DE LINGUAGEM

BAURU
2022

JOSÉ ROBERTO DAMASCENO DA SILVA

ANÁLISES DE AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DOS JOGOS DE LINGUAGEM

Tese apresentada como requisito à obtenção do título de Doutor ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Câmpus Bauru.

Linha 06 – Linguagem, Discurso e Ensino de Ciências.

Orientador: Dr. Jair Lopes Junior

BAURU
2022

S586a

Silva, José Roberto Damasceno da
Análises de aulas de cálculo diferencial e integral na perspectiva dos jogos de linguagem / José Roberto Damasceno da Silva. -- Bauru, 2022
199 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Jair Lopes Junior

1. Jogos de Linguagem. 2. Ensino Superior. 3. EAD. 4. Ensino Presencial. 5. Cálculo Diferencial e Integral. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Campus de Bauru

Faculdade de Ciências

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE JOSÉ ROBERTO DAMASCENO DA SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - *CAMPUS* DE BAURU.

Aos 04 dias do mês de março do ano de 2022, às 15:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de JOSÉ ROBERTO DAMASCENO DA SILVA, intitulada **Processos de Ensino e de Aprendizagem de Conceitos Matemáticos na Perspectiva dos Jogos de Linguagem (*)**. A Comissão Examinadora foi constituida pelos seguintes membros: Prof. Dr. JAIR LOPES JUNIOR (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Psicologia / UNESPCampus de Bauru, Prof. Dr. THIAGO PEDRO PINTO (Participação Virtual) do(a) Instituto de Matemática / Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Prof. Dr. JACKSON GOIS DA SILVA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Educação / UNESP/Câmpus de São José do Rio Preto, Profa. Dra. FERNANDA CÁTIA BOZELLI (Participação Virtual) do(a) Departamento de Fisica e Quimica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira UNESP, Profa. Dra. MARIA EDNÉIA MARTINS (Participação Virtual) do(a) FC / UNESP/Bauru (SP). Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma virtual, o discente recebeu o conceito final APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. JAIR LOPES JUNIOR

(*) O título da tese foi alterado para:

ANÁLISES DE AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA PERSPECTIVA DOS JOGOS DE LINGUAGEM.

Bauru, 04 de março de 2022

Prof. Dr. Jair Lopes Junior
Orientador
Presidente da Banca

Dedico,

A Deus Pai, por absolutamente tudo.

AGRADECIMENTOS

Não há agradecimento suficiente a Deus Pai pela proteção durante toda a minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jair Lopes Junior, ou Jairzão, como carinhosamente sempre o chamei, por ter se prontificado a me orientar quando fiquei sem orientador, mesmo estando extremamente sobrecarregado de responsabilidades. E também por ter oferecido uma orientação muito competente por meio de diretrizes muito objetivas. Meu muito obrigado!

Um agradecimento especial à Prof.ª Dra. Maria Ednéia Martins Salandim e ao Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto por todo o esforço que dispensaram para me matricular na disciplina Tópicos Especiais em Educação Matemática: Wittgenstein na Educação – Módulos I e II, disciplina extremamente importante na construção da base teórica dessa pesquisa. Meu muito obrigado aos dois!

A todos os professores das disciplinas cursadas por mim, pelos ensinamentos apresentados que muito enriqueceram minha formação, meu muito obrigado!

A todos os servidores e servidoras da Seção Técnica de Pós-graduação da Faculdade de Ciências pela atenção dispensada, meu muito obrigado!

A todos os membros das bancas de qualificação e defesa pelos inúmeros apontamentos que vieram a enriquecer nossa tese, meu muito obrigado!

E por fim, meu agradecimento muito especial ao Programa de Pós-graduação em Ciências para a Educação da Unesp/Bauru por sua lisura e justiça no processo seletivo, pois foi graças a essas qualidades que obtive a honra de ser um doutorando dessa renomada instituição.

"A alegria que se tem em pensar e aprender faz-nos pensar e aprender ainda mais".

Aristóteles

RESUMO

Considera-se que posicionamentos dogmáticos derivados das divergências epistemológicas clássicas acerca dos fundamentos da Matemática e do conhecimento matemático mostram-se insuficientes para a superação dos obstáculos reiteradamente constatados nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Expressiva parcela da literatura sustenta consenso em advogar a consistência com a qual a perspectiva normativa da linguagem matemática, a saber, a constituição de sentido a partir da especificação de uma gramática de regras de uso, assume relevância na imprescindível tarefa de esclarecimento dos conceitos matemáticos, com implicações para as práticas pedagógicas. Assim, a expressão jogo de linguagem de Ludwig Wittgenstein, enquanto práticas linguísticas submetidas a uma gramática de usos que, por sua vez, é contextualizada em formas de vida, constitui-se reconhecidamente como recurso relevante para a interpretação de interações dialógicas em processos de ensino e de aprendizagem. Contudo, caberia indagar: A literatura que, convincentemente, atesta as convergências e os consensos acerca da relevância dos jogos de linguagem é igualmente provedora de recursos instrucionais para viabilizar as necessárias demonstrações de tal relevância? Deste modo, o presente estudo sustenta o objetivo de investigar e de demonstrar em que extensão a resolução de exercícios, a saber, modos de agir de universitários, sustentariam correspondências com as aprendizagens preconizadas relacionadas com conteúdos curriculares de cálculo diferencial e integral a partir da exposição dos alunos a uma sequência de aulas nas modalidades remota e presencial caracterizadas por variações nas descrições de regras de uso que definem um jogo de linguagem (procedimentos) de professores em atividades de ensino. Participaram 36 graduandos regularmente matriculados no curso de Engenharia Elétrica de uma universidade pública federal. Todos os alunos foram expostos consecutivamente a seis videoaulas nas quais foram apresentadas as definições e regras fundamentais para o cálculo de limites e de derivadas, sendo as videoaulas selecionadas utilizadas nos cursos de engenharia de uma universidade pública estadual com funcionamento exclusivo na modalidade EAD. Após cada videoaula, foram aplicados exercícios sobre o conteúdo apresentado na respectiva videoaula. O objetivo foi o de coletar informações sobre o entendimento dos conceitos trabalhados a partir do jogo de linguagem utilizado pelo professor durante a explanação de cada conceito nas videoaulas. Imediatamente após cada videoaula e a resolução dos exercícios referentes aos conceitos estudados, os discentes foram expostos a uma aula presencial (aula de intervenção) sobre os mesmos conceitos matemáticos visto na respectiva videoaula seguindo o plano de ensino da disciplina Cálculo I do curso. Desta feita, utilizando novos elementos do jogo de linguagem do professor/pesquisador. A exemplo do procedimento adotado com as videoaulas, após cada aula presencial, a turma foi exposta aos mesmos exercícios previamente aplicados na respectiva videoaula. Nos exercícios analisados, consistentemente os discentes atestaram, em magnitudes variadas, maiores índices de acerto nos exercícios efetuados após as aulas de intervenção. Admite-se demonstrado que a inserção de novos elementos descritivos de regras normativas de uso, no âmbito do jogo de linguagem demarcado nas duas modalidades de aulas, constituiu-se em condição crítica para a emissão, pelos alunos, de ações consistentes com as aprendizagens curriculares preconizadas.

Palavras-chave: Jogos de Linguagem. Ensino Superior. EAD. Ensino Presencial. Cálculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

It is considered that dogmatic positions derived from classic epistemological divergences about the foundations of Mathematics and mathematical knowledge are insufficient to overcome the obstacles repeatedly found in the teaching and learning processes of mathematical concepts. An expressive part of the literature supports a consensus in advocating the consistency with which the normative perspective of mathematical language, namely, the constitution of meaning from the specification of a grammar of rules of use, assumes relevance in the essential task of clarifying mathematical concepts, with implications for pedagogical practices. Thus, the expression “language game” by Ludwig Wittgenstein, as linguistic practices submitted to a grammar of uses that, in turn, is contextualized in forms of life, is recognized as a relevant resource for the interpretation of dialogic interactions in processes. of teaching and learning. However, it should be asked: Does the literature that convincingly attest to the convergences and consensus on the relevance of language games also provide instructional resources to enable the necessary demonstrations of such relevance? In this way, the present study supports the objective of investigating and demonstrating to what extent the resolution of exercises, namely, university students' ways of acting, would support correspondences with the recommended learning related to curricular contents of differential and integral calculus from the exposure students to a sequence of classes in remote and face-to-face modalities characterized by variations in the descriptions of rules of use that define a language game (procedures) of teachers in teaching activities. Thirty-six undergraduates regularly enrolled in the Electrical Engineering course at a federal public university participated. All students were consecutively exposed to six video classes in which the definitions and fundamental rules for the calculation of limits and derivatives were presented, with the selected video classes used in engineering courses at a state public university operating exclusively in the EAD modality. After each video class, exercises were applied on the content presented in the respective video class. The objective was to collect information about the understanding of the concepts worked from the language game used by the teacher during the explanation of each concept in the video classes. Immediately after each video class and the resolution of the exercises referring to the concepts studied, the students were exposed to a face-to-face class (intervention class) on the same mathematical concepts seen in the respective video class, following the teaching plan of the course's Calculus I discipline. This time, using new elements of the teacher/researcher language game. As with the procedure adopted with the video classes, after each face-to-face class, the class was exposed to the same exercises previously applied in the respective video class. In the analyzed exercises, the students consistently attested, in varying magnitudes, higher hit rates in the exercises performed after the intervention classes. It is admitted that the insertion of new descriptive elements of normative rules of use, in the scope of the language game demarcated in the two modalities of classes, constituted a critical condition for the issuance, by the students, of actions consistent with the curricular learning advocated.

Keywords: Language Games. Higher Education. Distance Learning. Classroom Teaching. Differential and Integral Calculus.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos estudos apontam diversos fatores que influenciam, positiva ou negativamente, no rendimento escolar, tais como: a motivação pessoal, a formação do professor, o uso de tecnologias no ensino, o aumento da jornada escolar, a educação infantil, as condições de trabalho do professor e da escola, entre outros.

Vários setores da nossa sociedade têm feito duras críticas ao atual nível da educação brasileira, responsabilizando a instituição escola, bem como a figura do professor, como principais responsáveis por essa situação do ensino, já que consideram o professor como sendo o personagem central no processo de formação intelectual das futuras gerações de brasileiros.

Sabemos que são inúmeros os problemas que contribuem para o fracasso escolar, porém nesse trabalho, mesmo que o professor reflita em sua prática docente a influência de qualquer das correntes de pensamento sobre os fundamentos da matemática e de como, via transposição didática, a matemática sob essas influências chega até ele, a partir das concepções de Wittgenstein[1] (como a de jogos de linguagem) estaremos defendendo a tese de que a inserção de mais elementos em um jogo de linguagem de um professor contribuirá para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem em matemática.

Admitimos que, sob condições de práticas linguísticas adequadas em interações em sala de aula, teríamos um bom aproveitamento nos desempenhos (modos de agir), nas aprendizagens dos alunos em relação aos conceitos matemáticos estudados. Caso contrário, situações de ensino caracterizadas por severas restrições na descrição das regras normativas que definem o significado, a saber, as condições de uso dos conceitos, constituirão as interações linguísticas em sala de aula diante das quais serão mantidos índices inaceitáveis de desempenho e de aprendizagens recorrentemente distantes do mínimo preconizado em documentos oficiais.

Entendemos que se o "significado" dos conceitos matemáticos envolvidos, a saber, a descrição das regras de utilização dos conceitos, não se constituírem, intencionalmente, em elementos das interações linguísticas (jogo) em contexto profissional de ensino, expressando (descrevendo) as formas de manifestação dos conceitos, o agir do aluno sustentará distanciamentos quanto às aprendizagens esperadas e relativas aos conceitos sob análise. Em consonância, Gottschalk (2008, p. 93) assevera que "só depois de apresentados os paradigmas para que o aluno possa 'jogar' é que tem sentido apresentar desafios na forma de problemas ou partir de situações empíricas". Como consequência, dessa ausência (ou de restrições severas)

---

[1] Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951) foi um filósofo austríaco que contribuiu para a filosofia moderna, nos campos da lógica, da filosofia da linguagem e da mente.

de contato, por interações linguísticas, com a descrição das regras de uso, não surpreenderia o desânimo, a falta de interesse, a suposta confirmação factual de incapacidades ou de limitações cognitivas (intelectuais) que podem, infeliz e equivocadamente convergirem para o surgimento de atos de indisciplina, para a evasão escolar, para o descrédito da instituição escolar, para a falta de perspectiva de um futuro melhor, entre outros.

Um ensino baseado em aplicações de ferramentas que privilegiam, simplesmente, o repasse de informações ou a memorização delas, há muito tempo tem se mostrado ineficiente. Esse tipo de ensino não atende às necessidades de um mundo globalizado, no qual o surgimento de novas informações e a velocidade com que elas se espalham, aumentam a cada dia.

Entendemos que as novas tecnologias de informação e comunicação podem aumentar sobremaneira as potencialidades da linguagem no processo de ensino-aprendizagem. Não conseguimos vislumbrar ensino ou aprendizagem sem o uso de uma linguagem rica em possibilidades para cada situação do meio ou histórico social do aluno. Porém, nessa pesquisa, como estamos lidando com estudos em curso de nível superior, teremos que imergir os alunos no meio social da formação técnica específica, ou seja, se ele escolheu fazer um curso de engenharia, então consideramos que esse aluno deve ser envolto por um ambiente de formação de engenheiro/engenharia que requer uma dedicação aos estudos de todas as disciplinas técnicas do curso. Portanto, devemos escolher um jogo de linguagem que privilegie o domínio de todas as regras necessárias para o aprendizado de conceitos técnicos dessa área.

No caso específico do ensino ou aprendizagem da matemática, não podemos deixar de perceber as suas características particulares: a própria Matemática se apresenta como uma linguagem poderosíssima rica em símbolos e significados.

Essa linguagem própria ajuda no desenvolvimento cognitivo do estudante, pois exige do mesmo o desenvolvimento de habilidades de fazer conjecturas, experimentação, interpretação, visualização, indução, abstração, generalização e demonstração. Sob essa forma de ver a matemática, um jogo de linguagem adequado envolverá a apresentação de conceitos próprios da matemática que deverão ser entendidos pelos alunos por meio de treinamentos que busquem o domínio dos fundamentos da linguagem matemática necessários para o entendimento dos conceitos específicos que serão estudados. Sempre com a consciência de que nessa área uma sólida formação de conceitos matemáticos se faz extremamente indispensável.

O aluno precisa tomar a iniciativa do fazer matemática por meio de uma metodologia de construção de significados, favorecido pelo uso das novas tecnologias educacionais e com o reforço das regras gramaticais próprias da matemática por meio de treinamentos do uso adequado das mesmas. Entendemos que o aluno jamais deva assumir um papel passivo nesse processo, seja por vontade própria ou por imposição da metodologia do professor, que ele deva desafiar suas capacidades cognitivas.

Entendemos que o professor de matemática por sua vez deva: ter a habilidade de separar as realidades de um matemático profissional e de um aprendiz comum; considerar os conhecimentos prévios do aluno sobre o que ele irá aprender, que também poderá favorecer demais todo o processo de ensino e de aprendizagem; procurar fazer uso de diferentes registros de representação semiótica[2], já que os registros são componentes importantes em nossa linguagem, também faz imensa diferença nos resultados desse processo; e, por fim, procurar se utilizar de uma linguagem simples, clara e objetiva, por meio de um jogo de linguagem que apresente elementos suficientes para buscar ajudar o aluno a alcançar seus objetivos de maneira prazerosa.

Admitimos os jogos de linguagem como essenciais para que o aluno sinta prazer em imergir no mundo da linguagem matemática, buscando desenvolver suas habilidades, concebendo a matemática como um campo de amplas possibilidades para o desenvolvimento de suas habilidades. Assim, o nosso foco está na demonstração da constituição de condições de contato dos alunos com elementos do jogo linguístico, a saber, com as descrições de regras de uso necessárias para a manifestação de ações consistentes com a compreensão de um determinado conceito matemático. Priorizamos constituir evidências que ressaltem a relevância de um olhar cuidadoso do professor para as características do seu jogo de linguagem, do ponto de vista acadêmico, como condição imprescindível para a sua prática de ensino e a consequente aprendizagem esperada de seu aluno.

Os jogos de linguagem têm uma inserção na literatura como posição teórica, segundo a qual o ensino da matemática deveria se pautar, de maneira intencional e determinada, em uma definição de regras de comunicação com o aluno. Assim, cabe-nos indagar: A inserção de novos elementos em um jogo de linguagem de um professor favorece o entendimento, pelos alunos, de conceitos matemáticos acerca de cálculo diferencial e integral, possibilitando-os resolver exercícios (modos de agir) a partir de suas interações com práticas de ensino dispostas em videoaulas, bem como em aulas presenciais? Em que consistiria, a saber, sob quais regras

[2] “Segundo Duval, um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções, ou seja, a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. Assim sendo, as representações semióticas apresentam dois aspectos, sua forma (o representante) e seu conteúdo (o representado)” (SILVA, 2005, p. 4). “[...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento” (DUVAL, 1993, p.39).

metodológicas seria possível demonstrar tal favorecimento? O capítulo 3, desta tese, é todo dedicado ao estudo do conceito de jogo de linguagem formulado por Ludwig Wittgenstein.

2 SOBRE A INSUFICIÊNCIA DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

2.1 A Filosofia da Matemática

Esse campo de estudo diz respeito ao pensar filosoficamente sobre assuntos relacionados à área da matemática. Busca responder questões sobre a realidade de objetos matemáticos, como eles são conhecidos e de que forma garantem as verdades das afirmações matemáticas, além de procurar entender se os objetos e leis da matemática são descobertos ou inventados.

Bicudo e Garnica (2011, p. 40) afirmam que: “O tratamento dessas questões é relevante para a compreensão e para a metacompreensão da matemática e necessário para a definição de propostas curriculares, por determinar escolhas de conteúdos, atitudes de ensino, expectativas de aprendizagem, indicadores de avaliação”. Em relação aos objetos matemáticos, esses autores afirmam que:

> A realidade desses objetos pode ser comparada àquela das formas perfeitas, cuja existência independe da ação humana. Existindo de maneira objetiva, sendo reais e perenes, independentes da realidade mundana, o conhecimento deles tem como base a descoberta e a intuição de sua essência. Entretanto, não se trata de uma descoberta ou intuição fruto de uma clarividência conseguida por graça ou casuisticamente, mas consequência de um árduo trabalho intelectual de perseguição à verdade. Trata-se de um processo lógico que privilegia as descrições dos objetos matemáticos e das relações e estruturas que os unem. (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 41)

Essa visão absolutista nos leva a uma crença a respeito da realidade dos objetos matemáticos que dá suporte à ideologia da certeza matemática, ancorada na geometria, que se fortalece até boa parte do século XIX. Porém essa crença começa a ser abalada a partir dos questionamentos sobre os fundamentos da matemática, que culmina com o surgimento das escolas logicista, construtivista (intuicionista) e formalista.

Os expoentes da escola logicista foram Bertrand Russell e Gottlob Frege. Para Baraldi (1999, p. 10), os logicistas tinham como objetivo mostrar que é possível reduzir todas as verdades matemáticas aos conceitos lógicos, isto é, uma proposição pode ser demonstrada a partir das leis gerais da Lógica, com o auxílio de afirmações, partindo dessas últimas. Isto é reforçado por Russell quando afirma que há identidade entre lógica e matemática, conforme suas palavras:

> Muito do trabalho matemático moderno encontra-se obviamente na fronteira da lógica, e a lógica moderna é tão simbólica e formal, que a relação muito estreita entre lógica e matemática tornou-se óbvia para todo o estudante instruído. A prova da sua identidade é, naturalmente, uma questão de pormenor: ao começar com premissas que seriam universalmente admitidas como pertencentes à lógica, e chegar, por dedução, a resultados que de modo igualmente óbvio pertencem à matemática, constatamos não haver um ponto pelo qual possa ser traçada uma linha distinta, a separar a lógica à esquerda e a matemática à direita. (RUSSELL, 1919, p. 191)

Baraldi (1999, p. 10) afirma que: "Essa visão de conhecimento matemático, implica um ensino e aprendizagem escolar, onde a Matemática é reduzida a uma mera linguagem desprovida de contextos reais e seu aprendizado é necessário, apenas, para se aprender mais Matemática".

O próprio Russell reconheceu não ser possível alcançar seu objetivo, reconhecendo que não havia mais nada que pudesse fazer para tornar o conhecimento matemático indubitável. Então surge a escola construtivista com o topólogo holandês L. E. J. Brouwer, cujo programa dessa linha, segundo Baraldi (1999, p. 12), "é o da reconstrução do conhecimento matemático – em ordem, a fim de resguardar-se de perdas de significados e contradições – através de métodos finitos". Essa escola envolve várias vertentes, e é o intuicionismo que representa a formulação mais ampla da filosofia construtivista da matemática. Para os intuicionistas,

> a Matemática deve tomar, primeiramente, lugar na mente, como um problema interno. As verdades e os objetos matemáticos são abstratos, são construídos e constituem um mundo à parte, ou seja, não decorrem do mundo exterior. A linguagem é tida como secundária. A Matemática é uma atividade totalmente autossuficiente. (BARALDI, 1999, p. 12)

Segundo Viana (1995 apud BARALDI, 1999, p. 12), "essa concepção matemática quase não aparece em sala de aula devido à pouca oportunidade de se reproduzir através da Matemática escolar".

A maioria dos matemáticos rejeitaram o trabalho de Brouwer, em particular Hilbert que deu início ao projeto formalista. Estabelecer a Matemática como a ciência dos sistemas formais é o objetivo dos formalistas. Para Hilbert, segundo Bicudo e Garnica (2011, p. 45), "o campo de estudo dessa ciência consiste no estudo dos sistemas completos e consistentes, tomando por objeto as teorias formais, e não as entidades matemáticas tradicionais, como números, conjuntos, funções algébricas, etc." Porém, usar a Matemática para demonstrar sua própria consistência se mostrou impossível.

Baraldi (1999, p. 11) afirma que: “Atualmente, a posição formalista transparece no ensino e aprendizagem escolar de Matemática nas demonstrações rigorosas de teoremas e de fórmulas”.

Wittgenstein foi um dos principais filósofos da virada linguística na filosofia do século passado. Foi enquanto estudava engenharia aeronáutica na Universidade de Manchester que se viu diante de problemas fundamentais da matemática que despertaram seu interesse pela filosofia da matemática. Procurou Frege para auxiliá-lo, mas Frege julgou Russell como o mais indicado para orientá-lo. Dessa forma, Wittgenstein tornou-se discípulo de Russell. Essa parceria culminou com a publicação de sua única obra em vida, o *Tractatus Logico-Philosophicus*. Porém, algum tempo depois, Wittgenstein começou a criticar seu próprio trabalho. Essa crítica culminou com a publicação de sua obra póstuma, *Investigações Filosóficas*. Essas duas obras são responsáveis por estudiosos considerar a existência de dois “Wittgenteins”, o Wittgenstein do *Tractatus* (1º Wittgenstein) e o Wittgenstein das *Investigações* (2º Wittgenstein). Ambas as obras tinham como foco principal o estudo da linguagem, porém com objetivos distintos, enquanto o centro da atenção do filósofo no *Tractatus* era o domínio da lógica, nas *Investigações* era a linguagem comum, isso fez com que ele saísse de uma ênfase na definição e na análise para a *semelhança de família* e os *jogos de linguagem*, além de trocar uma escrita filosófica sistemática por um estilo fragmentário e assistemático de escrita filosófica.

Segundo Cavassane (2010a): “A teoria presente no *Tractatus* que recebe mais contundentemente as posteriores críticas de seu autor, por tratar-se de uma teoria do significado linguístico, é a chamada teoria da figuração, cujo objetivo é responder à seguinte pergunta: como é possível falar sobre o mundo?”. Para entender esta pergunta Fann (1999 apud CAVASSANE, 2010a) afirma que o primeiro Wittgenstein acreditava que:

> Para que pensemos e falemos do mundo deve haver algo em comum entre a linguagem e o mundo. O elemento comum deve estar em suas estruturas. Podemos conhecer a estrutura de um deles se conhecemos a do outro. Já que a lógica nos revela a estrutura da linguagem, deve nos revelar também a estrutura do mundo[3]. (FANN 1999, p. 24 apud CAVASSANE, 2010a, p. 3)

Cavassane (2010a) reforça que:

> A teoria da figuração, deste modo, tenta explicar como é feita a ligação entre a estrutura lógica do mundo e a estrutura lógica da linguagem, ligação essa que possibilita que, através da linguagem, possamos falar sobre o mundo. [...] Tal como a

[3] Tradução dada por CAVASSANE (2010a).

> forma lógica dos objetos determina quais deles podem constituir fatos entre si, ou seja, quais fatos são possíveis, a forma lógica das palavras determina quais delas podem constituir frases com sentido. [...] Para o primeiro Wittgenstein, portanto, é possível pensar, e deste modo expressar, somente fatos logicamente possíveis. (CAVASSANE, 2010a, p. 3).

A convicção de Wittgenstein na lógica como estruturadora do pensamento, do mundo e da linguagem se desfaz a partir do momento que ele percebe a impossibilidade da exatidão do significado, com isso a teoria da figuração cai por terra. Nesse momento, ele passa a considerar que o significado das palavras está no seu uso. Esse trabalho se fundamenta no Wittgenstein das *Investigações.*

Mas, afinal, a Matemática foi descoberta ou inventada?

Para tentar responder a essa pergunta devemos considerar os três dogmas-padrão referentes aos fundamentos da matemática. São eles: o platonismo, o formalismo e o construtivismo. Sem uma compreensão mínima desses três dogmas poderemos estar sujeitos a um trabalho docente, no ensino de matemática, que poderá apresentar problemas para a aprendizagem dos alunos. Se um professor, inconscientemente, adotar um dentre esses dogmas poderá ter seu objetivo de ensino prejudicado. Vamos tentar entender de que forma isso pode ocorrer apresentando elementos sobre cada um desses dogmas. Porém desejamos ressaltar que quando falamos em “dogmas-padrão”, estamos nos referindo aos principais grupos de discussões sobre os fundamentos da matemática, no que diz respeito à sua natureza e à sua relação com a realidade. Mudando o foco para a crise dos fundamentos estaremos nos referindo às escolas logicista, construtivista e formalista, apesar de haver relações entre os dogmas e as escolas.

Uma ótima sintetização do dogma-padrão platonista referente aos fundamentos da matemática foi dada por Davis e Hersh (1985) em sua obra “A Experiência Matemática”.

> Segundo o platonismo, os objetos matemáticos são reais. Sua existência é um fato objetivo, totalmente independente de nosso conhecimento sobre eles. Conjuntos infinitos, conjuntos infinitos não-enumeráveis, variedades de dimensão infinita, curvas que enchem o espaço – todos os membros do zoológico matemático são objetos definidos, com propriedades definidas, algumas conhecidas, muitas desconhecidas. Estes objetos não são, naturalmente, físicos ou materiais. Existem fora do espaço e do tempo da experiência física. São imutáveis – não foram criados, e não mudarão ou desaparecerão. Qualquer pergunta significativa sobre um objeto matemático tem uma resposta definida, quer sejamos capazes ou não de determiná-la. Segundo o platonismo, um matemático é um cientista empírico, como um geólogo; não pode inventar nada, pois tudo já existe. O que pode fazer é descobrir coisas. (DAVIS; HERSH, 1985, p. 359).

No âmbito da filosofia da Matemática, platonismo e realismos são frequentemente considerados sinônimos. E essa concepção considera que objetos matemáticos existem de forma independente do sujeito que busca estudá-los.

Para o realismo, as propriedades dos objetos matemáticos, na realidade de um universo matemático, independem dos indivíduos, ou seja, não são criadas por eles, já são estabelecidas a priori apesar de não serem objetos materiais ou físicos. Reforçando essa ideia, Baraldi (1999, p. 9) afirma que "o conhecimento matemático é a descrição desses objetos preexistentes e os objetos do mundo real são apenas representações imperfeitas das ideias. O mundo das ideias era acessado por meio da razão". Portanto, sob essa perspectiva, a matemática só pode ser descoberta.

Muitos físicos e matemáticos acreditam que a essência da natureza ou o próprio universo é pura matemática, pois consideram que o mundo físico não tem apenas algumas propriedades matemáticas, mas que só tem propriedades matemáticas. Essa intrínseca relação entre a matemática e o universo conspira a favor dessa visão platonista aos fundamentos da matemática. Quando ouvimos afirmações do tipo: se o homem não existisse, mesmo assim existiria a matemática, temos mais um argumento em favor do platonismo. Ou do tipo: a sequência de Fibonacci não foi inventada por ele, mas apenas descoberta por meio da análise do crescimento de uma população de coelhos, pois ela já existia nas pétalas das flores, com destaque para as margaridas, na estrutura do abacaxi, nas espirais formadas pelas sementes de girassóis e em muitos outros exemplos na natureza. Assim como, as leis de Newton não foram inventadas por ele, apenas descobertas, pois elas já ocorriam no universo. Para esse dogma, os números, polígonos e equações são objetos reais.

Para os pitagóricos os números eram entidades ativas na natureza, eles acreditavam que o número um, chamado de "a mônada", era o responsável pela geração de todos os outros números e, portanto, a origem de tudo o que foi criado no universo. Sob a ótica do platonismo, vemos em Bicudo (1998, p. 312), que a matemática é uma ciência intermediária, em que "sua verdade reside em uma ciência superior, que está em relação a ela como ela mesma em relação à percepção do concreto". Logo, Platão considerava os conceitos matemáticos como independentes do conhecimento que temos deles, portanto, algo concreto. Enquanto Euclides considerava que o mundo natural eram as leis da matemática sendo manifestadas fisicamente.

> Platão, no Fédon e nos livros VI e VII da República, tenta tornar suas suposições aquelas que não têm de ser tomadas como certas para o presente caso particular; ele tenta torná-las aquelas que devem ser aceitas por todos. Essa é a procura do axioma fundamental que não se tem de pedir a alguém aceitá-lo; é algo que deve ser aceito por qualquer um, [...]. É por essa razão que Platão sugere à consideração o ideal

> axiomático: que deveríamos tentar e desenvolver o todo de nossa matemática por raciocínio dedutivo, διάνοια[4], a partir de alguns princípios, que ele (erradamente) pensou que poderiam ser estabelecidos além de toda questão possível. Platão apresentou seu programa. Seus discípulos, em grande parte, realizaram-no. Temos o resultado final , codificado por Euclides (LUCAS, 1967, p. 13 apud BICUDO, 1998, p. 313-314).

Não só os gregos antigos defendiam os conceitos matemáticos como pré-existentes no universo, mas também estudiosos da era moderna. Em 1960, o Nobel em Física, Eugene Wigner, defendeu a ideia de que a matemática é real e descoberta pelos homens quando profere a frase "A eficácia irracional da matemática". Para Wigner, muitas teorias, exclusivamente matemáticas, desenvolvidas do nada, sem nenhuma intenção de descrever algo concreto, se tornaram essenciais para explicar fenômenos do universo. No mesmo sentido apresentado por Wigner, séculos atrás alguns matemáticos franceses receberam muitas críticas sobre teorias que haviam sido desenvolvidas na época, pois naquela ocasião não serviam para nada. Porém se tornaram teorias fundamentais para que o homem fosse capaz de levar ônibus espaciais para o espaço.

Outro exemplo é a teoria dos números de Godfrey Hardy, que quando surgiu era considerada pelo próprio autor como totalmente inútil e hoje é fundamental para a criptografia, que por sua vez é essencial para a segurança na internet. Bem como, o que aconteceu com o princípio de Hardy-Weinberg na genética. A utilização, por Albert Einstein, da geometria riemanniana em sua teoria da relatividade geral muito tempo depois. São muitos exemplos que apresentam ligações de fenômenos do mundo real às teorias matemáticas e todos esses exemplos são utilizados por defensores do dogma plantonista para justificar suas escolhas.

Mesmo com tantos exemplos, devemos considerar que

> embora o platonismo dê conta da objetividade da matemática, há duas grandes fraquezas nesta corrente: primeiro, ela não oferece uma explicação adequada sobre como os matemáticos têm acesso ao conhecimento matemático do mundo ideal; segundo, tal corrente não explica adequadamente a utilidade da matemática, suas relações com as outras ciências, a atividade humana e cultural, e a gênese do conhecimento. (ERNEST, 1991 apud MENEGHETTI; TREVISANI, 2013, p. 150).

Essas fraquezas acabam por permitir o surgimento do dogma-padrão formalista, que também apresentará suas virtudes e fraquezas.

[4] διάνοια = Intelecto

Davis e Hersh (1985) também apresentam em sua obra “A Experiência Matemática” uma excelente síntese sobre o dogma-padrão formalista referente aos fundamentos da matemática.

> Segundo o formalismo, por outro lado, não há objetos matemáticos. A Matemática consiste somente em axiomas, definições e teoremas – em outras palavras, fórmulas. Em uma visão extrema, existem regras por meio das quais se deduz uma fórmula da outra, mas as fórmulas não são *sobre* alguma coisa: são somente cadeias de símbolos. Naturalmente o formalismo sabe que, por vezes, as fórmulas matemáticas são aplicadas a problemas físicos. Quando é dada uma interpretação física a uma fórmula, ela adquire um significado, e pode ser verdadeira ou falsa. Mas esta verdade ou falsidade tem a ver com a própria interpretação física. Como uma fórmula puramente matemática, ela não tem significado nem de uma verdade. (DAVIS; HERSH, 1985, p. 360).

Apesar de toda essa relação intrínseca entre a matemática e o universo, segundo o físico Marcelo Gleiser a matemática é uma invenção humana, é uma consequência de como o ser humano evoluiu no planeta Terra tentando dar sentido às coisas em sua volta, para sua própria sobrevivência. Como exemplo, os números complexos foram criados ou descobertos? Parece-nos que usar $\sqrt{-1}$ como a unidade imaginária para os números complexos não poderia ter sido extraída de nenhuma realidade física, por ocasião de sua convenção, o que não impediu que os físicos, tempos depois, a usassem para desenvolver a Física Quântica. E essa utilização só poderia ter sido concretizada após toda a estruturação matemática do conjunto dos números complexos.

Ainda de acordo com o físico Marcelo Gleiser, há muita matemática inútil, talvez até seja para um determinado espaço de tempo, mas não temos certeza de que um dia poderá ser utilizada para explicar algum fenômeno físico. Uma boa discussão parece ser: primeiro veio, a mente ou a realidade?

A resposta dele, para essa questão, é que o universo real veio primeiro por meio de sua parte observável, e após o surgimento do homo sapiens a mente vem criando conceitos úteis para dar sentido a tudo que acontece, seja do mundo físico observável ou do mundo abstrato das ideias. Quando afirmamos que criamos conceitos matemáticos para entender o universo ou que os números, polígonos e equações são meramente puríssimas representações de um ideal teórico, estamos adotando o dogma-padrão formalista referente aos fundamentos da matemática.

Para estudiosos contrários ao platonismo, embora os números possam ou não existirem fisicamente, as afirmações matemáticas definitivamente não existem, pois são necessárias regras criadas por humanos para julgá-las como verdadeiras. Mondini (2008, p. 3) afirma que:

“As ideias aristotélicas livram o homem de ser apenas um descobridor e o colocam como construtor do mundo matemático. Aristóteles considerou a Matemática uma Ciência dedutiva e foi o primeiro sistematizador da Lógica Formal”. Dessas afirmações, concluímos que a matemática é um esforço lógico inventado, pois não existe fora da mente humana, constituindo-se como uma linguagem de relações abstratas baseada em padrões reconhecidos pelo cérebro, de modo que essa linguagem use esses padrões cerebrais para estabelecer ordenações. Segundo destacam Meneghetti e Trevisani (2013):

> O formalismo foi importante para o desenvolvimento da matemática, pois estabeleceu critérios que permitiram o desenvolvimento de trabalhos em lógica matemática, gerou a teoria de modelos, a teoria de sistemas formais e a teoria de função recursiva. No entanto, o programa formalista não pode ser efetuado, visto que a matemática não foi capaz de provar sua própria consistência[5]. (MENEGHETTI; TREVISANI, 2013, p. 153).

Entre os defensores do formalismo encontra-se o matemático alemão Leopold Kronecker. Ele é o autor da famosa frase “Deus criou os números naturais, todo o restante é obra humana.”, em 1855. David Hilbert é o maior símbolo do dogma-padrão formalista, pois foi ele quem tentou axiomatizar toda a matemática. Para ele e outros matemáticos da época, a matemática era vista como um profundo jogo filosófico.

Outro destaque foi Henri Poincaré, considerado um dos pais da geometria não euclidiana[6], que com a sua geometria provou que a geometria euclidiana não era uma verdade universal, mas o uso de um conjunto específico de regras. As bases da matemática podem estar programadas em nosso cérebro, pois nos nossos mais tenros anos começamos a reconhecer formas e padrões presentes no universo e essa capacidade pode, muito bem, ser a gênesis da criação da matemática pelo homem.

Não deixa de ser espantoso como toda a física, seja básica ou extremamente avançada, funciona perfeitamente baseada em teorias matemáticas. Assim como os engenheiros constroem tudo, em sua maioria, usando aproximações dessas teorias matemáticas. Será que a matemática é uma verdade do universo? Ou será que ela tem algo a ver com a forma como os seres humanos percebem ou sentem esse universo? Para ajudar-nos a refletir sobre essas questões, destacamos um ponto negativo do formalismo nas palavras de Tiles (1991 apud MENEGHETTI; TREVISANI, 2013, p. 153): “A conceituação da atividade matemática que é incentivada pelo formalismo teve efeitos negativos em toda a ciência, pois se a matemática for

---

[5] O teorema de Gödel de 1931, por exemplo, mostrou que a formalização não pode ser considerada uma técnica por meio da qual se pode provar que a matemática é livre de contradição.
[6] Por seus trabalhos na geometria hiperbólica, em que desenvolveu os modelos do disco e do semiplano.

pensada como um jogo de fórmulas, então não há por que buscar significado no trabalho do matemático".

Além dos platonistas e dos formalistas, dentre os principais grupos de discussões sobre os fundamentos da matemática em relação à sua natureza e à sua relação com a realidade, temos ainda os construtivistas.

Davis e Hersh (1985) afirmam que:

> Os formalistas e platonistas estão em extremos opostos do problema da existência e da realidade; mas não discutem sobre que princípios de raciocínio deveriam ser admissíveis na prática matemática. Opostos a ambos estão os construtivistas. Os construtivistas consideram matemática genuína somente o que pode ser obtido por uma construção finita. O conjunto dos números reais, ou qualquer outro conjunto infinito, não pode ser obtido desta maneira. Consequentemente, o construtivista considera a hipótese de Cantor palavras sem sentido. Qualquer resposta seria pura perda de tempo. (DAVIS; HERSH, 1985, p. 361).

Nesse dogma-padrão, seus defensores se distanciam da discussão se a matemática é inventada ou descoberta para se concentrarem apenas na própria matemática independentemente de sua relação intrínseca com a natureza. Nessa corrente, teoremas considerados muito bem demonstrados na matemática tradicional são tidos como falsos na matemática dos construtivistas. Isso foge do interesse do nosso trabalho.

O platonismo, o formalismo e o construtivismo são dogmas-padrão que apresentam ideias distintas sobre o que é a Matemática. Existem entre eles divergências em vários pontos. Mas existir divergências não significa que um exclui o outro. Na realidade do ensino de matemática todos eles trazem pontos positivos a serem aproveitados em favor de um ensino significativo.

2.2 A Transposição didática na Educação Matemática

Nessa seção apresentaremos algumas considerações sobre a transposição didática, pois vemos esse conceito como fundamental para que entendamos a influência dos dogmas-padrão no modo de ensinar dos professores de matemática. Fiorentini (1995) nos apresenta uma excelente explicação para essa relação:

> Esse não é um ponto de vista particular nosso. Ele é defendido por vários educadores matemáticos como, por exemplo, ERNEST (1991), PONTE (1992), THOMPSON (1984), STEINER (1987) e ZÚÑIGA (1987), os quais sustentam que a forma como vemos/entendemos a Matemática tem fortes implicações no modo como entendemos e praticamos o ensino da Matemática e vice-versa. (FIORENTINI, 1995, p. 4)

Os grupos de discussão sobre os fundamentos da matemática baseiam-se no trabalho do matemático, debatem o conhecimento na esfera da matemática científica. Porém, esse conhecimento precisa chegar até a escola para ser ensinado, e é nesse momento que a transposição didática se faz necessária. Nas palavras de Chevallard (1991 apud MOREIRA; DAVID, 2010),

> [...] um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 45 apud MOREIRA; DAVID, 2010, p. 17-18)

Para melhor entendimento da transposição didática, Chevallard (2013) faz algumas considerações. "Há de fato uma grande diferença entre as ciências naturais e as ciências da cultura, a que a didática da matemática pertence" (CHEVALLARD, 2013, p. 3). Ou seja, as ciências da cultura fazem parte de sistemas que envolvem seres humanos de maneira intrínseca, o mesmo não acontece com as ciências naturais, pois tem a ver com a comunicação entre os seres humanos. Dentro desse contexto, a transposição didática demonstra ter uma relação direta com a linguagem, pois ela realiza o trabalho de adaptação da linguagem para outras necessidades de comunicação.

Outra consideração importante diz respeito à relação didática, que para ele "une três e não dois "objetos" a saber: o professor, o ensino e, por último, mas não menos importante, o *conhecimento ensinado*" (CHEVALLARD, 2013, p. 6). A união desses três "objetos" define uma situação social em que, segundo o autor: "Nenhum contrato pode ser celebrado com a sociedade a este respeito a menos que cada um dos três termos envolvidos - quem ensina *o quê* a quem? – sejam definidos. Não menos importante que os dois outros termos, o conhecimento deve ser declarado antecipadamente. Estar declarado é parte de poder ensiná-lo" (CHEVALLARD, 2013, p. 12). O autor reforça essa declaração quando afirma que:

> O conhecimento deve ser dado como certo, não deve ser questionado e, por falar nisso, não deve sequer ser mencionado, *porque é altamente questionável*. Esta é também, permita-me observar, a razão pela qual a teoria da transposição didática, por vezes, tem sido atacada. Esta teoria revela precisamente o que, para o bem da causa, deve permanecer oculto: o ensino fundamenta-se em um *contrato com a sociedade* e na *violação deste contrato*. A escola é uma utopia malfadada no coração da sociedade. [...] A quebra do contrato didático que tem sido central para o ensino em sua relação com a sociedade continua a ser a força motriz fundamental na sala de aula. (CHEVALLARD, 2013, p. 13)

Também considera que a matemática escolar, por exemplo, tem essencialmente evoluído da matemática dos matemáticos. “De modo mais geral, os corpos de conhecimentos ensinados são derivados de corpos de conhecimentos acadêmicos que lhes são correspondentes” (CHEVALLARD, 2013, p. 11). O conhecimento acadêmico é a fonte do conhecimento escolar, porém sofrerá a ação de um conjunto de transformações adaptativas para estar pronto para ser ensinado na escola básica. Aqui percebemos que esse conjunto de transformações adaptativas será tanto maior, quanto menor for o nível de escolaridade.

Como nossa pesquisa trata de matemática de nível superior para um curso de engenharia, perceberemos um conjunto de transformações adaptativas bem menor, do que aqueles necessários para a matemática da escola básica. E mais reduzido seria esse conjunto, caso o nosso curso em estudo fosse um bacharelado em Matemática. A seguir, Moreira e David (2010) apresentam uma justificativa que reforça essa ideia:

> [...] a prática do professor de Matemática da escola básica desenvolve-se num contexto ***educativo***, o que coloca a necessidade de uma visão fundamentalmente diferente. Nesse contexto, definições mais descritivas, formas alternativas (mais acessíveis ao aluno em cada um dos estágios escolares) para demonstrações, argumentações ou apresentação de conceitos e resultados [...] para a Matemática Escolar, não faz nem sentido argumentar: qualquer tipo de argumentação teria que pressupor a aceitação, sem provas, de afirmações mais complexas e menos evidentes do que a própria tese a ser provada. No entanto, para a Matemática Acadêmica, a demonstração faz sentido: entre outros objetivos possíveis, ela explicita para o futuro matemático em processo de formação essa espécie de "suspensão de certeza" a que devem ser submetidos todos os enunciados – até um como esse, impensável de se colocar em dúvida dentro da cultura escolar – para que se processe rigorosamente esse tipo de organização lógica da Matemática Científica, que é a axiomática. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 21, 24)

2.3 Os dogmas e o ensino da Matemática

Antes de analisarmos a relação entre o platonismo e o ensino de matemática precisamos ter clareza sobre a diferença entre os objetos matemáticos como entidades imateriais obtidas por abstração, e os objetos matemáticos acessíveis aos sentidos humanos, ou seja, uma coisa é um círculo perfeito no mundo ideal no pensamento humano e outra é uma representação desse mesmo círculo no mundo sensível, que nada mais é do que uma imagem desse círculo perfeito no mundo físico. Essa observação nos remete ao trabalho dos engenheiros que vivem constantemente produzindo aproximações dos objetos matemáticos do mundo ideal em nosso mundo natural. Para eles, os matemáticos lidam com o domínio absoluto desses objetos matemáticos, enquanto eles lidam com o domínio da aproximação. Para os engenheiros, eles não são pagos para fazerem as coisas de forma correta, mas para fazerem as coisas de forma suficientemente corretas. A cada dia percebemos isso ao nosso redor, pois vemos muitas coisas funcionando na engenharia, obtidas por cálculos aproximados, muitas vezes resultados de cálculos simplificados. Tudo em prol da aplicabilidade.

Bkouche, Charlot e Rouche (1991) afirmam que:

> Essa ideia de que fazer matemática é FAZER, não é o conceito dominante no mundo escolar de hoje. A concepção mais comum postula que a matemática não precisa ser produzida, mas descoberta. Os seres matemáticos já existem em algum lugar no céu das Ideias. Consequentemente, o papel do matemático não é criá-los, inventá-los, mas descobri-los, revelar verdades matemáticas que já existiam, mas ainda não eram conhecidas. As verdades matemáticas só podem ser declaradas através do trabalho do matemático, mas elas são o que são, dadas desde a eternidade, independentemente deste trabalho. O ensino clássico da matemática é baseado em uma epistemologia e ontologia platônicas, reforçadas pela reforma da matemática moderna: as ideias matemáticas têm uma realidade em si mesmas. (BKOUCHE; CHARLOT; ROUCHE, 1991, p. 175).

Devido ao histórico da formação de professores no Brasil, em décadas passadas, é muito comum vermos em nossas escolas esse tipo de prática no ensino clássico da matemática na educação brasileira. O que nos leva a considerar que o platonismo está impregnado nas concepções de ensino da matemática em nossos educadores. A defesa de que o aprendiz deve construir seus próprios conceitos vai motivada pelo objetivo de realizar descobertas durante sua aprendizagem. Mas não podemos deixar de considerar que a afirmação “só se aprende matemática fazendo (praticando)” também é bastante comum entre os professores de matemática em nosso país. Nessa concepção platonista a verdade matemática já está estabelecida tanto no mundo das ideias, quanto no mundo físico, bastando ser descoberta. Para alcançar essa descoberta, a qual já foi experimentada pelo professor, o aluno será orientado por ele pelos caminhos que ele já trilhou em busca dessa verdade.

Essa caminhada em busca da revelação da verdade matemática acaba sendo associada à ideia de iluminação, mentes iluminadas capazes de compreender a abstração matemática, onde os alunos[7] que compreendem são considerados inteligentes, brilhantes, iluminados e os que não alcançam a compreensão são considerados incapazes, cegos. A partir da ideia de se falar em aprendiz iluminado ou não para o aprendizado da matemática, somos remetidos às questões interpretativas de que o aluno só aprende matemática se tiver dom para compreender conceitos abstratos ou se tiver um capital cultural necessário para lidar com a linguagem abstrata da matemática.

---

[7] Segundo alguns educadores, o termo “aluno” refere-se a alguém sem luz.

Essas duas interpretações apresentam uma premissa comum, que segundo Bkouche, Charlot e Rouche (1991, p.176) são: “Os conceitos, o conhecimento e as culturas são concebidos como dados, transmitidos aos herdeiros na forma de doação natural ou capital sociocultural”. Os autores se opõem a essas interpretações, pois, segundo eles:

> A atividade matemática não é olhar e desvelar, mas criar, produzir, fabricar. Os conceitos matemáticos não são um bem cultural transmitido hereditariamente como um presente ou socialmente como capital, mas o resultado de uma obra de pensamento, a dos matemáticos ao longo da história, a da criança através de seu aprendizado. (BKOUCHE; CHARLOT; ROUCHE, 1991, p. 176).

E para quem fala em democratização do ensino da matemática, não há sentido imaginar que somente uma minoria privilegiada é capaz de aprender matemática, seja essa minoria advinda de grupos favorecidos por biogenética ou capital cultural. E, também, não há sentido em imaginar uma matemática num mundo intangível, pois, para nós, qualquer aluno é capaz de aprendê-la, bastando apenas aprender e cumprir suas regras. Claro que, para isto, o aprendiz precisa desejar. Defendemos a posição de que, em hipótese alguma, algum aluno seja incapaz de aprender matemática.

Sobre o dogma-padrão formalista e o ensino da matemática, iniciamos destacando uma certa confusão que ocorre quando interpretamos de forma equivocada o trabalho do matemático e, ainda por cima, trazemos à sala de aula esse entendimento para aplicarmos em nosso trabalho como professor. O que, de fato, é utilizado por muitos professores de matemática, em sala de aula, são os resultados da atividade do matemático: definições, axiomas, teoremas e demonstrações. Os professores acabam supervalorizando a forma como os resultados, do trabalho dos matemáticos, são apresentados e acabam gerando um grande conflito, pois, segundo Bkouche, Charlot e Rouche (1991),

> não é a forma que dá sentido aos resultados, pois só é determinada a posteriori quando os resultados foram adquiridos por outras formas, muito mais instáveis: nenhum matemático jamais inventou nada por meio de uma rigorosa demonstração respeitando as regras canônicas [...]. Consequentemente, a virtude matemática essencial se torna rigor e, em particular, o rigor da linguagem, já que, quando excluímos a atividade matemática, é o único suporte do conceito matemático. Além disso, o professor exige do aluno, imediatamente, desde seus primeiros passos, rigor de pensamento e linguagem, esquecendo que no próprio matemático esse rigor só ocorre no final, no final de um longo processo de aproximações e retificações. O conhecimento matemático aparece então ao aluno não como um sistema de conceitos que permite resolver conjuntos de problemas, mas como um grande discurso codificado, normalizado, simbólico e "abstrato". (BKOUCHE; CHARLOT; ROUCHE, 1991, p. 178).

Essa confusão conceitual é tão séria, que a adoção desse formalismo pelos professores causa fortíssimo fracasso escolar, fazendo com que os alunos percam o interesse pelo estudo da matemática com extrema facilidade, alegando em sua maioria, ser essa disciplina extremamente abstrata e criando-se um mito popular de que somente pessoas mentalmente privilegiadas possam aprender matemática. Para tentar resolver esse problema, os educadores criam etapas intermediárias para que os "mentalmente menos favorecidos" no campo da abstração atinjam essa capacidade em relação aos conceitos matemáticos. A ideia é que passo a passo eles sejam colocados em pé de igualdade em relação aos ditos "superdotados" em relação ao aprendizado da matemática. Para isso criam situações pedagógicas que julgam concretas, mas que no fundo exploraram um conceito abstrato, causando uma confusão entre atividade intelectual e física do aluno, quando ele trabalha com materiais manipuláveis.

Loureiro e Klüber (2015) inferem sobre a concepção/característica do formalismo que reescreve a matemática por meio de demonstrações rigorosas em um sistema formal que

> para alguns professores (sujeitos) têm-se um bom acadêmico, (seja de um curso de Licenciatura seja de Bacharelado), quando este sabe demonstrar com primazia, independendo se o aluno estabelece relações de sentido no que se demonstra, se o aluno de fato compreende o que está fazendo. [...] No entanto essa amarra imposta tolhe a capacidade intelectual do aluno de argumentar, de levantar hipóteses, de aprender com os próprios erros de admitir outras formas de expressão da Matemática. A transposição imediata deste princípio para o ensino mutila, tanto a compreensão do objeto matemático, como do sujeito do conhecimento. (LOUREIRO; KLÜBER, 2015, p. 11).

Esse dogma-padrão formalista tem uma influência muito forte em aulas de muitos professores de matemática, pois penetrou o ensino de matemática a partir dos seus alicerces, sendo responsável pelo surgimento da Matemática Moderna. Em minha prática docente, tenho visto muitos colegas professores de matemática começar suas aulas, demonstrando essa forte influência, pois como afirmam Davis e Hersh (1985, p. 383), "do ponto de vista formalista, não começamos a fazer realmente matemática antes de enunciar algumas hipóteses e começar uma demonstração". Isso diz muito em relação à muita prática docente no ensino da matemática. E essa influência é tão forte que para um formalista, geometria descritiva não é matemática, somente a dedutiva. Usar figuras, diagramas e até mesmo imagens mentais não deveriam ser concebíveis em uma sala de aula de matemática.

Como o platonismo defende a ideia de a matemática pertencer a um mundo ideal independente do mundo real em que vivemos, então o ensino baseado nesse dogma busca o entendimento dos conceitos matemáticos no universo desse mundo superior, conforme afirma Manacorda (1989 apud MIGUEL, 1995):

> De acordo com a doutrina platônica, ensinavam-se e estudavam-se as disciplinas matemáticas não por seus valores intrínsecos ou utilitários, mas como meios de elevação espiritual no sentido de conhecimento da natureza da verdade absoluta, a fim de se atingir a disciplina suprema (MANACORDA, 1989, p. 57 apud MIGUEL, 1995, p. 34).

Seguindo a ideia de elevação espiritual, a geometria de Euclides dá continuidade ao ideário platônico, mas com uma característica própria que é a busca da disciplina do espírito por meio do desenvolvimento de um rigor de raciocínio, conforme afirma Blanché (1987, p. 10 apud MIGUEL, 1995, p. 34) que “entre os gregos, quando se ensina geometria às crianças não é tanto para ensinar verdades, mas antes para lhes disciplinar o espírito, pois a prática da geometria criaria e desenvolveria o hábito do raciocínio rigoroso”. E é exatamente por meio da geometria euclidiana que se inicia um processo embrionário de formalismo que irá fazer a ponte entre o platonismo e o formalismo moderno, conforme podemos perceber nas palavras de Miguel (1995):

> É, portanto, com a concepção platônica da finalidade atribuída à educação matemática que aparece, pela primeira vez na história dessa área de conhecimento, um primeiro modo de ruptura entre forma e conteúdo matemático, sendo a ênfase posta no primeiro elemento desse par tensional. A ênfase na forma, no sentido de ênfase no método aristotélico-euclidiano de se reproduzir o conteúdo matemático já produzido de outra forma, foi a razão do aparecimento histórico do primeiro tipo de formalismo em Educação Matemática (MIGUEL, 1995, p. 34-35).

E essa relação continua presente em aulas de matemática atualmente, nas quais em várias oportunidades podemos presenciar os dogmas-padrão plantonista e formalista presentes na atuação dos educadores matemáticos.

Quando no final do século passado foram lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998), deu-se início a uma verdadeira corrida pela aplicabilidade dos conteúdos a serem estudados no ensino básico. Paralelamente surge o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que com sua proposta interdisciplinar, busca sintonia com os PCNs.

Em pouco tempo, testemunhamos o desaparecimento de alguns conteúdos matemáticos[8] do Ensino Médio nas provas do ENEM e, com isso, muitas instituições de ensino básico deixaram de cobrar em seus currículos os conteúdos que não estavam sendo exigidos nas provas do ENEM, pois eram considerados assuntos sem aplicabilidade para o dia a dia dos alunos. Essa

[8] Não estão presentes na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias no ENEM os seguintes objetos de conhecimento: frações geratrizes de dízimas periódicas, função composta, função inversa, função modular, determinantes, regra de três composta, lei dos cossenos, equações algébricas de grau superior a 2, triângulo de Pascal e desenvolvimento de binômios de Newton.

nova visão começa a causar alguns problemas no ensino da matemática, pois seus fundamentos começam a sofrer um certo abandono. E esse abandono está cobrando um alto preço nos dias de hoje, pois muitos alunos aprovados no ENEM não estão conseguindo acompanhar seus respectivos cursos superiores. Vemos, nesse problema, causas que tem relação com o que afirma Silveira et al. (2014) no contexto da supervalorização da aplicabilidade da matemática para o ensino básico. Para os autores:

> As proposições matemáticas como teoremas, corolários, assim como outra qualquer, são criadas com base na lógica e satisfazem necessidades teóricas intrínsecas à matemática. Portanto, não descrevem objetos ideais pertencentes a um reino platônico, tampouco surgem de experiências do mundo real. As proposições matemáticas exercem uma função normativa, são invenções humana e não descoberta. Nesse sentido, são de natureza convencional. (SILVEIRA et al, 2014, p. 155-156).

Segundo Hersh (1985, p. 361), “K. Gödel e P. J. Cohen mostraram que, baseando-se nos axiomas da teoria formal dos conjuntos, a hipótese do contínuo não pode nem ser demonstrada (Gödel, 1937) nem negada (Cohen, 1964)”. Portanto, esses dois trabalhos não garantem que o formalismo possa nos apresentar uma matemática sem contradições, a partir dessa premissa podemos considerar sensatas as palavras de Hersh (1985 apud MENEGHETTI; TREVISANI, 2013) quando

> sugere que se deve considerar o conhecimento da matemática como ele realmente é, ou seja, falível, corrigível, experimental e envolvente; tal como qualquer outro conhecimento humano. Ao invés de olharmos para fundamentações vãs ou nos sentirmos desorientados e não legitimados por uma fundamentação, devemos buscar olhar a matemática como ela realmente é. Isso implica em refletirmos sobre o que fazemos quando ensinamos, usamos, inventamos ou descobrimos matemática, seja pelo estudo da história, pela introspecção ou pela observação (imparcial) de nós mesmos. (HERSH, 1985 apud MENEGHETTI; TREVISANI, 2013, p. 154).

Essas palavras, principalmente em relação ao ensino, servem também para os defensores do dogma-padrão platonista, pois se ensinamos, usamos, inventamos ou descobrirmos matemática, então nenhuma defesa exclusiva de um desses dogmas daria conta da essência completa da matemática.

Acrescento, ainda, a observação da realidade que nos cerca para que possamos sentir e decidir que entendimento da matemática é o mais adequado para aplicarmos em nossas salas de aula, não esquecendo que em um mesmo curso poderemos estar utilizando as ideias defendidas pelos três dogmas-padrão de acordo com a necessidade que teremos de fazer nosso aluno alcançar o entendimento do assunto estudado.

Como já vimos, um engenheiro não usa de todo o rigor matemático para desenvolver seus projetos, trabalha com aproximações matemáticas. Então, qual é o sentido de cobrar deles, em nossas aulas de cálculo, todas as demonstrações dos teoremas apresentados ao longo da disciplina? Em contraposição, qual é o sentido de não cobrar dos alunos de um curso de bacharelado em matemática as demonstrações dos teoremas estudados em suas disciplinas?

Para tentar responder a essas questões, devemos considerar a escolha da linguagem que o professor irá utilizar para trabalhar suas disciplinas como importantíssima para o sucesso dos alunos na disciplina. No mínimo teremos que decidir se lançaremos mão de uma linguagem formal, uma linguagem mais natural ou se será necessário fazer uso de ambas, dependendo da situação. O importante é percebermos que independente da influência do dogma-padrão, que está sendo refletido no trabalho do professor em sala de aula, teremos sempre que buscar elementos no jogo de linguagem que favoreçam a aprendizagem dos alunos nos conceitos fundamentais para o ensino de qualquer parte da matemática, ou seja, devemos apresentar elementos no jogo que será jogado que façam a diferença no entendimento desses conceitos pelos alunos. Não só apresentar as regras, mas, também, treinar nossos alunos em relação ao uso adequado dessas regras.

Segundo Silveira et al. (2014), “Wittgenstein (2003) afirma que as proposições matemáticas não são empíricas, elas são normativas porque seguem regras, porém, o **uso** dessas proposições pode ser normativo ou empírico”. Portanto, em nosso ponto de vista, não adianta ficar criando discussões infindáveis sobre qual dogma-padrão melhor se aplica ao ensino da matemática, mas usarmos de maneira propícia o que eles têm de adequado para aquele assunto da matemática que estará sendo ensinado naquele momento, sem jamais esquecermos que antes de qualquer escolha deverá sempre ser apresentado os conceitos fundamentais para o entendimento por parte dos alunos do que será estudado, ou seja, apresentar com clareza as regras (normas) do jogo de linguagem que será utilizado.

> É certo que as ferramentas matemáticas nos ajudam a lidar com a realidade concreta. Seu uso reiterado no dia a dia e sua importância como linguagem das Ciências, em todas as áreas, são indiscutíveis. Mas há algo na Matemática que escapa a qualquer sentido prático/utilitário, que expressa relações, às vezes surpreendentes, e nos ajuda a construir significado do mundo da experiência, no mesmo sentido em que um poema o faz. Um poema nunca se deixa traduzir em termos de utilidade prática. [...] Para enfrentar as dificuldades com o ensino da matemática, mais do que despertar o interesse pelas suas aplicações práticas, é fundamental desvelar sua beleza intrínseca. (MACHADO, 2012, p. 13 apud SILVEIRA et al, 2014, p. 153).

De certa forma, os PCN com foco em aplicações imediatas no dia a dia dos estudantes fez com que os conceitos fundamentais ficassem em segundo plano e outros conceitos nem sequer ficaram em segundo plano, foram simplesmente abandonados[9]. Essa redução de conteúdos acabou prejudicando o aprendizado dos alunos que entraram em cursos superiores na área de exatas, pois os conteúdos com aplicações não imediatas no ensino básico fariam falta para o estudo de conceitos avançados no ensino superior. Defendemos a posição de que por ocasião da elaboração dos PCN, acabou passando despercebido que muitos desses alunos do ensino básico seguiriam carreiras na área de exatas e que os mesmos necessitariam de todos os conteúdos, tantos os de aplicações imediatas no nível básico, quanto aqueles conteúdos que seriam fundamentais para aplicações em nível superior, como, por exemplo, números complexos para a Engenharia Elétrica, funções compostas para o ensino do Cálculo em diversos cursos, dentre outras aplicações.

Toda essa discussão sobre dogmas-padrão aumenta nossa convicção de que nenhum deles se sobressairá em relação aos outros. Nós temos posições divergentes, mas essas divergências não estão amparadas em demonstrações empíricas, são pessoas de notório saber, são pessoas autorizadas a discutir isso, mas o professor de matemática que tem contato com essas discussões, talvez faça escolha por uma interpretação A ou uma interpretação B, olhando para a sua realidade, e que poderá prejudicar o seu trabalho, pois ele acaba criando uma narrativa teórica que defende uma posição no ensino da matemática, que talvez ele tenha dificuldade de se enxergar ali. Por isso, nossa perspectiva de tese é a de ampliar a possibilidade de o professor avaliar o que está em jogo por demonstrações empíricas. A intenção é que o professor consiga perceber nesse trabalho a importância dos jogos de linguagem, mais precisamente, a importância de elementos desses jogos de linguagem, que favoreceriam o trânsito em qualquer desses dogmas. Pois acreditamos que em cada uma dessas correntes da filosofia da matemática está refletido um trabalho docente que utiliza uma linguagem compatível com cada uma delas. O que desejamos é extrair dessas correntes os pontos positivos para o ensino dos conceitos matemáticos em um contexto de valorização de elementos de cada jogo de linguagem utilizado.

Para expandir o nosso entendimento, na sequência do trabalho iremos detalhar o conceito de jogos de linguagem de Ludwig Wittgenstein, base teórica do nosso estudo.

[9] Conforme já descrito na nota de rodapé 6.

3 JOGOS DE LINGUAGEM

Immanuel Kant é sem dúvida um dos mais expressivos nomes da filosofia ocidental e sua obra “Crítica da Razão Pura” é considerada uma das mais importantes obras na história da filosofia. Mas até mesmo esse gênio da humanidade em sua busca pela raiz comum entre sensibilidade e entendimento sofre uma crítica em relação ao seu trabalho. Se tivesse se perguntado “Como a capacidade de pensar é possível?”, Kant teria notado que “a faculdade de pensar repousa sobre a linguagem” (HAMANN, 1992, p. 144).

Não é difícil percebermos que ao tentarmos refletir sobre algo, imediatamente e simultaneamente, a linguagem se apresenta a nós, por meio da palavra. Portanto, a linguagem tem papel fundamental em todas as atividades do ser humano e, consequentemente, em atividades relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Como a comunicação é uma das funções da linguagem, então a ligação entre elas se faz presente. O ser humano carece de comunicação.

A base teórica desse estudo são os jogos de linguagem de Ludwig Wittgenstein, conceito apresentado em sua obra “Investigações Filosóficas”. O próprio Wittgenstein não define jogos de linguagem, pois, se assim o fizesse, estaria concordando com os conceitos de linguagem que defende que cada palavra está diretamente ligada a um objeto, visão filosófica que o segundo Wittgenstein abandona em sua nova fase e que critica nos conceitos agostinianos sobre a linguagem.

Wittgenstein, ao propor em sua filosofia da linguagem que não deve haver definições acabadas e rígidas, está se referindo ao projeto pessoal de Russell sobre o fundamento do significado estar na lógica clássica, e não sobre as definições existentes na matemática. Ao criticar sua própria filosofia do *Tractatus*, quando fala sobre linguagem, jogos de linguagem, Wittgenstein está propondo a oportunidade de se falar sobre alguma coisa em determinadas condições.

No “Investigações filosóficas”, Wittgenstein traz, ao invés de um estudo da linguagem, um entendimento sobre linguagens, sobre os modos como são usadas, sobre como ocorrem os *jogos de linguagem*: a atenção deve estar na utilização que se deve dar a essas linguagens. Diversas são as formas de se utilizar palavras, termos, linguagens em geral e, a essas formas de utilização, Wittgenstein dá o nome de *jogos de linguagem*.

Nesse estudo defenderemos a importância do uso do conceito de *jogos de linguagem* como forma de apresentar os conceitos matemáticos a serem ensinados aos alunos, tentando tirar do professor a obrigação de seguir regras rígidas de apresentação dos conteúdos que devem ensinar.

Ou seja, desejamos usar o potencial didático dos jogos de linguagem para buscarmos alternativas de compreensão dos conceitos matemáticos que pretendermos ensinar. Nosso problema não é uma interpretação do ensino de matemática à luz dos jogos de linguagem, e sim como demonstrar a influência exercida pelo professor na maneira como o aluno resolve exercícios. Dessa forma, desejamos mostrar que a presença ou ausência de determinados elementos em jogos de linguagem, podem fazer diferença para o entendimento de um conceito pelo aluno. Na literatura não há evidência empírica do potencial desses elementos. Na literatura encontramos inúmeros trabalhos em que o conceito criado por Wittgenstein pode ser aplicado em diversos contextos.

Diversos são os trabalhos que tratam da relação entre jogos de linguagem e a própria linguagem matemática como, por exemplo, Meira e Silveira (2019) que exploraram a tradução da linguagem matemática para a linguagem natural como um jogo de linguagem que se jogado de forma equivocada, ou seja, se forem cometidos erros nessa tradução haverá prejuízos para a aprendizagem do aluno. Segundo as autoras, "durante o processo de tradução da linguagem matemática, geralmente iniciado pelo professor, deve ser atribuído sentido ao que está sendo ensinado" (MEIRA; SILVEIRA, 2019, p. 79).

Silva (2019) discutiu o ensino da matemática na alfabetização a partir de uma perspectiva linguística. Para o autor, essa discussão se justifica por entender que a linguagem desempenha um papel fundamental na constituição dos conceitos matemáticos, possibilitando, assim, tornar o ensino dessa disciplina significativo. Para isso, ele recorreu ao conceito de *jogos de linguagem*, de Ludwig Wittgenstein, como condição de sentido para os enunciados linguísticos, tanto da linguagem natural quanto da linguagem matemática, fixando o significado dentro da própria linguagem sem necessidade de recorrer a entidades externas.

Segundo Silveira (2017), é por meio do uso da linguagem que os alunos podem compreender o seu significado. Para isso, o diálogo entre professor e aluno torna-se imprescindível para que as palavras pronunciadas em sala de aula tenham sentido para ambos. É no uso dos símbolos matemáticos que surge a possibilidade de compreensão. Atividades de ensino que possam propor a participação do aluno, de forma tal, que ele seja instigado a expor aquilo que interpretou das palavras do professor. O professor ao dar voz às dificuldades dos seus alunos pode recuperar as palavras mal interpretadas e usar outras na tentativa de que o sentido seja encontrado.

Fundamentados na obra *Investigações Filosóficas* de Ludwig Wittgenstein, Taschetto e Duarte (2015) colocaram sob suspeita uma ideia bastante difundida entre aqueles que se ocupam do ensino da matemática de que a *realidade* possibilitaria dar significado aos conteúdos trabalhados em sala de aula, especificamente, os conteúdos matemáticos. A importância de significar os conceitos escolares a partir de sua aparição na *realidade* teria um duplo efeito: por um lado, tornaria a escola atraente e, por outro, despertaria o interesse do aluno pela aprendizagem da matemática escolar. Os autores problematizaram a possibilidade de tal empreendimento, argumentando que os jogos de linguagem da matemática escolar e aqueles que constituem as práticas sociais, apesar de guardarem semelhanças de família entre si, são distintos e a *passagem* de um jogo de linguagem pertencente a uma forma de vida para a outra, não garantiria a permanência do significado, mas, sugere sua transformação.

Fredrich e Lara (2019) apontaram que nos jogos de linguagem utilizados pelas professoras[10], foi possível identificar categorias diferentes que indicam, por um lado, uma troca de terminologia que vise à facilitação da aprendizagem da Matemática, porém que podem possibilitar nos anos seguintes uma dificuldade no entendimento do uso desses termos na Matemática Escolar. Ainda, segundo as autoras, por outro lado, evidenciou-se a falta de preparação de algumas professoras que acabam utilizando de modo equivocado e incorreto alguns termos matemáticos. Elas concluíram que embora os estudos de Wittgenstein, apontem para a importância de jogos de linguagem que façam parte das formas de uso de um termo ou conceito, isso não significa que esse jogo tenha que fazer sentido apenas nesse uso. Ou seja, o professor não pode criar termos ou utilizar termos para suas aulas na Educação Infantil que quando usados em outro contexto não façam sentido.

Silveira (2017) apostou no conhecimento via linguagem, em que o sujeito constrói conceitos no uso das palavras, em meio a jogos de linguagem com seus colegas e com o professor. Nesse estudo, a autora analisou alguns problemas encontrados no ensino e na aprendizagem da matemática na educação básica que concernem ao uso de palavras com sentido. Para ela, os problemas de ordem linguística podem ser resolvidos por meio de jogos de linguagem entre professor e alunos, como também entre os próprios alunos.

Segundo Lacerda e Silveira (2013), a interpretação da linguagem matemática depende de jogos de linguagem que ocorrem durante a tradução do texto matemático para as linguagens dos alunos, bem como permite o reconhecimento das regras matemáticas implícitas no texto.

[10] Essa pesquisa foi realizada com 15 professoras que lecionam em uma escola municipal de Educação Infantil da Região Metropolitana de Porto Alegre.

Costa, Moraes e Silveira (2016) propuseram em seu trabalho fazer um levantamento acerca dos problemas de tradução relativos às propriedades de limite de função e verificaram que os problemas analisados podem ser minimizados se a linguagem tiver o tratamento adequado nas aulas de matemática, em qualquer nível de ensino.

Um dos pontos defendidos por Moraes (2019), em sua tese de doutoramento, é de que os jogos de linguagem matemáticos utilizados na Educação em Engenharia Civil têm como característica comum o uso do simbolismo matemático, sendo esse simbolismo o que torna possível expressá-los formalmente, com as regras que lhe dão sustentação.

Outras pesquisas trataram da relação entre jogos de linguagem e ensino de matemática baseado na modelagem matemática como, por exemplo, o estudo realizado por Veronez e Soares (2018). Os autores inferiram que no encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática, professores e alunos se encontram imersos no jogo de linguagem da linguagem matemática, mas se utilizam de expressões da linguagem natural para comunicar as ideias matemáticas. Segundo eles, tais expressões, nos jogos de linguagem em que são enunciadas, ganham significado, pois de um modo ou de outro carregam semelhanças de família.

Carvalho e Silveira (2019) buscaram evidenciar e analisar as contribuições da filosofia da linguagem de Wittgenstein em atividades de Modelagem Matemática desenvolvida com um grupo de alunos da disciplina de Pré-Cálculo no Curso de Engenharia Elétrica no IFMA – Campus Imperatriz. Utilizaram uma abordagem qualitativa buscando compreensões das atitudes dos alunos ao estabelecerem jogos de linguagem na tentativa de buscar significações às tarefas. Os autores concluíram que tais jogos estão presentes em todas as etapas do desenvolvimento de Modelagem Matemática, que a resolução de problemas surge a partir do contexto vivenciado pelos alunos e que são regidas por regras estabelecidas previamente.

Sousa e Almeida (2019) dirigiram a atenção para os diferentes jogos de linguagem associados ao desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e os significados constituídos pelos alunos no interior destes jogos de linguagem em relação a equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para as autoras, os resultados indicaram que a constituição de significado no interior de atividades de modelagem está associada à apropriação linguística dos alunos relativa às regras e técnicas que estão configuradas em jogos de linguagem específicos identificados nas atividades de Modelagem Matemática.

Souza e Barbosa (2019) analisaram a aprendizagem matemática que se constitui na modelagem matemática em sala de aula, entendendo modelagem matemático como organização de situações empíricas. Os autores analisaram essa temática a partir da compreensão de matemática como sistema *normativo regido por regras*. Para eles, trata-se de uma compreensão elaborada pelas análises das delimitações filosóficas de Ludwig Wittgenstein e dos entendimentos teóricos de Anna Sfard. A partir do experimento realizado observaram que os usos que os alunos e a professora atribuíram as palavras permitiram apontar que o jogo discursivo de modelagem é jogado sob as regras instituídas na forma de vida da matemática desenvolvida no contexto escolar.

Outras pesquisas trataram da relação entre jogos de linguagem e a etnomatemática como, por exemplo, Giongo e Monte (2019) que apresentaram alguns resultados de uma investigação que teve por objetivo central problematizar uma prática pedagógica efetivada na disciplina de Cálculo II, em um Curso de Engenharia da Computação. Tendo como aportes teórico-metodológicos o campo da etnomatemática em seus entrecruzamentos com as ideias do segundo Wittgenstein e algumas ferramentas foucaultianas. Segundo os autores, a análise do material de pesquisa permitiu compreender que, a matemática acadêmica é uma etnomatemática e, como tal, faz parte da formação dos engenheiros e seus saberes. Entretanto, para eles, é potente a abertura, nas disciplinas de Cálculo, para a linguagem dos profissionais da área.

Carvalho e Duarte (2017) propuseram apresentar entendimentos – às vezes desentendimentos – desenvolvidos em uma pesquisa de mestrado, concluída, envolvendo uma racionalidade matemática que se entrelaça com os modos de habitar o tempo e o espaço vivenciados pelos pescadores artesanais de Florianópolis/SC e Tramandaí/RS. As autoras procuraram evidenciar, a partir dos jogos de linguagem de quatro Camaradas D’água, modos de operar saberes como a medição, divisão, normatização e ordenação, assim como tecer semelhanças de família e descontinuidades entre os jogos de linguagem presentes em cada mar-lagoa.

Em seu artigo, Castro e Caldeira (2017) apresentaram as problematizações oriundas de uma pesquisa de doutorado em Educação desenvolvida na Universidade Federal de São Carlos – UFSCar. Trata-se de uma pesquisa do tipo etnográfica realizada junto à comunidade remanescente de quilombos da Agrovila de Espera, na cidade de Alcântara – MA, que teve por objetivo compreender o que está manifesto nas práticas matemáticas constituídas como jogos de linguagem matemáticos em uso nas atividades de trabalho e sobrevivência dos membros dessa comunidade, decodificando os efeitos de sentidos e significados mobilizados sobre elas. Na análise das práticas matemáticas, tendo por base a ação de empaneirar a farinha de mandioca, os autores buscaram destacar as interações e influências dos jogos de linguagem postos em usos com o ambiente sociocultural nos quais se desenvolvem.

Araújo e Tomaz (2020) analisaram tensões que ocorrem quando, ao desenvolver pesquisas sobre questões emergentes de sua comunidade, uma estudante indígena busca estabelecer relações entre práticas da tradição indígena e práticas matemáticas escolares, no contexto da licenciatura intercultural. As autoras basearam-se nos estudos sobre interculturalidade, na perspectiva decolonial e sobre etnomatemática, formulada a partir da obra tardia de Wittgenstein e do pensamento de Michel Foucault. Em sua análise, elas mostraram que as tensões emergem das relações de poder entre a matemática escolar ocidental e outras formas de produzir matemáticas, neste caso, tomando o conhecimento tradicional das pinturas corporais Pataxó como referência. Concluíram que dada à variedade de usos, funções e papéis da linguagem, com referências em diferentes epistemologias, torna-se impossível aceitar a existência de uma linguagem matemática universal, legitimando outras matemáticas que não dissociam a prática escolar do modo próprio de ser e viver do povo Pataxó.

Existem trabalhos que tratam da relação entre jogos de linguagem e metodologias que utilizam jogos para favorecer a aprendizagem dos alunos como, por exemplo, Cruz, Silveira e Silva (2018) que apresentaram a importância de se utilizar o jogo de xadrez no ambiente escolar como apoio pedagógico para o desenvolvimento de habilidades que favoreçam o domínio da linguagem matemática. Fazendo a relação entre o domínio das regras do jogo de xadrez e o domínio das regras utilizadas para a compreensão dos conceitos matemáticos. Como sabemos, o conceito de seguir regras está entrelaçado com o conceito de jogo de linguagem.

São muitas as contribuições em diversos aspectos. Apesar dessas diferentes interpretações, a literatura tem restrições, pois não encontramos trabalhos que demonstrassem, metodologicamente, a importância do jogo de linguagem. Isso é, exatamente, o que apresentaremos nesse trabalho, a partir da defesa de nossa tese. A seguir, faremos uma explanação sobre os conceitos relacionados aos jogos de linguagem.

3.1 Significação (uso) de uma "palavra"

Na filosofia de Wittgenstein, uma palavra por si só não garante o seu significado. Para ele o significado de uma palavra está diretamente relacionado ao seu uso, como o filósofo apresenta no parágrafo 43 em sua obra Investigações Filosóficas: "Pode-se, para uma *grande* classe de casos de utilização da palavra 'significação' — se não para *todos* os casos de sua utilização —, explicá-la assim: a significação de uma palavra é seu uso na linguagem" (WITTGENSTEIN, 1999, p. 43).

Convém reforçarmos que se tomarmos "uso" no sentido de "modo de uso", como uso correto, que segue regras, então poderemos considerar esse uso sinônimo de significado, segundo Wittgenstein. Para Freitas e Silva (2018, p. 142), “a única maneira de aprender o significado (*Bedeutung*) das palavras é aprendendo a usá-las”.

Para Wittgenstein esse modo de uso é determinado ou fixado pelo que denominou de *regras da gramática*, as regras relevantes da linguagem, semanticamente falando. Se proferirmos as palavras “mangueira”, “cola”, “pena”, a que estamos nos referindo? Ou as frases: “Ser humano não é fácil”; “Fui comprar um carro conversível, mas depois de testá-lo acabei desistindo por causa dos bancos”. O que podemos entender nessas duas frases? Esse tipo de discussão não progride se tivermos o modo de uso já determinado.

No parágrafo 13 das investigações, Wittgenstein (1999, p. 31) afirma que: “Quando dizemos: ‘cada palavra da linguagem designa algo’, com isso ainda não é dito absolutamente *nada*; a menos que esclareçamos exatamente qual a diferença que desejamos fazer”. Nessa afirmação, parece-nos claro que Wittgenstein está dizendo que não basta simplesmente apontar um objeto para entender o seu significado, mas que precisamos deixar explícita toda nossa intenção em relação a ele. Ou seja, a intenção deve se sobrepor ao propenso significado direto. Para Freitas e Silva (2018, p. 145), “é só no jogo de linguagem que o significado é conferido à palavra: é tão somente aí que ele se efetiva, inserido no ambiente ordinário no qual os falantes estão inseridos, proferindo seus enunciados, gestos e expressões com algum teor simbólico”.

> Qual é, então, o significado da palavra “água”, por exemplo? Depende do jogo de linguagem no qual ela é empregada; posso usá-la para referir-me ao elemento natural assim denominado que está à minha frente; posso usá-la para ensinar uma criança ou a um estrangeiro sua aplicação como nome; posso usá-la sob a forma de um pedido, quando estou sedento; posso usá-la como pedido de rendição a meu adversário; posso usá-la como pedido urgente daquilo que ela denomina, para apagar um incêndio; ou ainda, como uma exclamação, ante minha surpresa com a beleza cristalina da fonte inesperada; e podemos imaginar outros tantos usos possíveis da palavra, isto é, outras tantas situações de nossa vida em que é usada na linguagem como meio de comunicação e de expressão. (MORENO, 2000, p. 55-56).

Em sua exemplificação, Moreno (2000) também utiliza a expressão *jogo de linguagem*, conceito fundamental nesse estudo. Nesse mesmo trabalho reenquadra o conceito de *significado*, quando afirma que “consiste, dentro dessa nova perspectiva, no conjunto dos usos que fazemos dos enunciados, e cada situação de seu emprego revela uma parcela, um aspecto, desse conjunto, a ele ligado por semelhanças de família” (p. 58). Esse novo conceito é explicado pelo próprio Wittgenstein nos parágrafos 66 e 67 de sua obra “Investigações filosóficas”:

> Considere, por exemplo, os processos que chamamos de “jogos”. Refiro-me a jogos de tabuleiro, de cartas, de bola, torneios esportivos etc. O que é comum a todos eles? […], se você os contempla, não verá na verdade algo que fosse comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, e até toda uma série deles. […] Considere, por

> exemplo, os jogos de tabuleiro, com seus múltiplos parentescos. Agora passe para os jogos de cartas: […] mas muitos traços comuns desaparecem e outros surgem. Se passarmos agora aos jogos de bola, muita coisa comum se conserva, mas muitas se perdem. – São todos 'recreativos'? Compare o xadrez com o jogo de amarelinha. Ou há em todos um ganhar e um perder, ou uma concorrência entre os jogadores? Pense nas paciências. Nos jogos de bola há um ganhar e um perder; mas se uma criança atira a bola na parede e a apanha outra vez, este traço desapareceu. Veja que papéis desempenham a habilidade e a sorte. E como é diferente a habilidade no xadrez e no tênis. Pense agora nos brinquedos de roda: o elemento de divertimento está presente, mas quantos dos outros traços característicos desapareceram! E assim podemos percorrer muitos, muitos outros grupos de jogos e ver semelhanças surgirem e desaparecerem.
> E tal é o resultado desta consideração: vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente. Semelhanças de conjunto e de pormenor (Investigações Filosóficas, § 66).
> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão "semelhanças de família"; pois assim se envolvem e se cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc., etc. — E digo: os "jogos" formam uma família. (Investigações Filosóficas, § 67). (WITTGENSTEIN, 1999, p. 52).

A próxima seção será dedicada à compreensão do conceito de *jogo de linguagem*, sem a mínima pretensão de defini-lo, pois, como já dissemos, certamente não caberia tal definição na ideia proposta por Wittgenstein. Também devemos ficar atentos para o que dizem Freitas e Silva (2018), quando destacam a importância de entender que "os jogos de linguagem não substituem ou rejeitam definitivamente a concepção referencialista ou nominalista do significado", pois o que realmente Wittgenstein deseja é combater a ideia de se reduzir a compreensão da linguagem a este tipo de concepção e a própria definição ostensiva, pois a generalização provocada pela definição ostensiva quando estabelece uma relação biunívoca entre o nome e o objeto que ele representa é prejudicial para a compreensão da linguagem.

> Para combater isto, devemos compreender que a própria definição ostensiva é ou faz parte de um jogo de linguagem circunscrito em uma forma de vida, normalmente relacionada às situações de ensino, ou seja, de treino (*Abrichtung*): é a transformação, já explicitada, da definição ostensiva no ensino ostensivo (*hinweisendes Lehren*). Todavia, para que o ensino ocorra, as regras de uso da linguagem precisam ser explicadas de acordo com critérios públicos, nunca privados. (FREITAS; SILVA, 2018, p. 140).

Moreno (2000, p. 62) constata que "há múltiplas aplicações que fazemos das palavras e dos enunciados linguísticos, diferentes usos da linguagem, que nada mais são do que diferentes técnicas que desenvolvemos para manipular seus elementos". Na seção 3.3, estudaremos o conceito de formas de vida e como elas estão intimamente associadas aos jogos de linguagem que, por sua vez, estão relacionados com os modos de uso da linguagem.

Quanto à questão da significação, Bello (2010) afirma:

> Wittgenstein nega toda e qualquer possibilidade de uma significação última, ontológica, não fazendo mais sentido perguntar pelos significados dos objetos ou das categorias (sejam estes sociais ou empíricos) em situações ou contextos, isto é, perguntar-se pelo que uma coisa é; não faz mais sentido. E sim, perguntar: para que serve(m)? Como funciona(m)? Como se vê(em), trata-se de uma recondução da linguagem do seu emprego metafísico (o que é?) para seu emprego cotidiano (Para que serve? Como é usado/a?) (BELLO, 2010, p. 553).

Para responder a todas essas questões, Wittgenstein aponta a escolha de um jogo de linguagem que permita esclarecer de que maneira e em que contexto essa coisa deverá ser usada.

3.2 Regras da gramática e jogos de linguagem

Como já vimos, Wittgenstein não define o que seja um *jogo de linguagem*, mas nos apresenta muitos exemplos de jogos de linguagem. Da mesma forma que um professor de matemática não consegue definir *conjunto*, *ponto*, *reta* ou *plano*, pois são conceitos primitivos. Ou seja, sobre "conjunto" posso simbolizar, representar, estabelecer relações e, até mesmo, fazer operações, porém não podemos definir nenhum deles, o que não faz diferença no potencial de aplicações desses conceitos.

Na filosofia das "Investigações Filosóficas", o papel do filósofo é de descritor. Segundo Moreno (2000, p. 72), o filósofo pode "mostrar quais são as regras que introduzem os movimentos dos jogos e como elas são ensinadas ao aprendiz; o ensino das regras já é um jogo de linguagem, e tais regras podem ser usadas de diferentes maneiras". Como podemos perceber, em uma mesma situação, podemos ter múltiplos jogos de linguagem e quando escolhemos uma das diferentes maneiras de usar uma regra, não significa que essa seja a melhor escolha, nem tão pouco que aquele jogo de linguagem aplicado seja o perfeito. Para Wittgenstein todos os usos e jogos serão ótimos para atender aquela finalidade. Para o filósofo das *Investigações*

> não há critérios definidos, fixos e claros para orientar nosso trajeto; multiplicaremos os exemplos o mais que pudermos e diremos ao interlocutor "isto e outras coisas semelhantes", esperando, assim, que ele possa encontrar outros exemplos, isto é, que ele compreenda por si só as ligações internas entre os exemplos e possa prosseguir sozinho. (MORENO, 2000, p. 75).

Seguindo essa linha de raciocínio podemos questionar o ensino de matemática que não apresenta uma quantidade significativa de exemplos de aplicações do conceito, ficando restrito apenas a apresentação do conceito.

Retornando ao conceito de *jogo de linguagem*, podemos considerar que é um conjunto de regras compactuadas entre um grupo de pessoas, em que só há significado dentro desse próprio jogo. Ainda podemos considerar que incontáveis jogos de linguagem que se sobrepõem e se incluem compõem nossa linguagem, o que seria uma espécie de nebulosa de jogos de linguagem.

Ao falar sobre a dependência do critério de utilidade em relação aos jogos de linguagem, Gottschalk (2015) nos ajuda a compreender melhor a relação entre os conceitos apresentados por Wittgenstein. Segundo a autora,

> o próprio critério de utilidade depende dos jogos de linguagem em que são constituídos nossos conceitos, permeados por valores e princípios que regem os seus usos dentro de diferentes sistemas linguísticos inter-relacionados. Somos nós que os empregamos normativamente, constituindo a gramática que é cristalizada dentro de nós. Portanto, o que é útil e o que não é útil no campo do empírico, é determinado por esta gramática. E as regras que a constituem estão presentes *na* linguagem, e não fora dela. (GOTTSCHALK, 2015, p. 9).

A partir desse entendimento, Wittgenstein provoca uma crise na filosofia, nas primeiras décadas do século XX, pois reduz o trabalho filosófico a uma mera atividade de análise gramatical. Convém destacar que a linguagem não sofre nenhuma interferência da realidade, ela funciona como reguladora e normatizadora do uso exato das palavras em seus respectivos contextos. A noção de regra criada por Wittgenstein nos ajuda em relação ao conceito de jogos de linguagem, já que não podemos usar palavras e expressões de qualquer jeito e precisamos escolher um uso correto em meio a tantos significados possíveis consequentes de outras tantas possibilidades de usos possíveis. Figueiredo (2009) cita que uma das intenções, em relação à noção de regra,

> era explicitar as possibilidades de justificação dos usos das palavras (através da normatividade), ou seja, é possível mostrarmos com que função tivemos a intenção de usar determinado termo e, para isso, recorremos à regra que foi extraída da frequência do uso e da generalização, e não como um conceito central de uma teoria sobre a linguagem que sustente seu funcionamento. (FIGUEIREDO, 2009, p. 71).

Logo que inicia as Investigações, antes mesmo de nos apresentar os termos *jogo de linguagem*, Wittgenstein lança mão de um jogo inicial: um construtor e seu assistente manipulando lajotas, blocos e outros objetos relacionados à construção, com o objetivo de construir algo, por exemplo, uma parede, um prédio ou uma casa. Este jogo é chamado, por ele, de primitivo, pois é um pequeno exemplo de como as palavras são usadas por nós, de modo simplificado, quando queremos que as pessoas levem ou tragam algo.

> Imaginemos uma linguagem para a qual a descrição dada por Santo Agostinho esteja correta: a linguagem deve servir ao entendimento de um construtor A com um ajudante B. A constrói um edifício usando pedras de construção. Há blocos, colunas, lajes e vigas. B tem que lhe passar as pedras na sequência em que A delas precisa. Para tal objetivo, eles se utilizam de uma linguagem constituída das palavras: "bloco", "coluna", "laje", "viga". A grita as palavras; — B traz a pedra que aprendeu a trazer ao ouvir esse grito. — Conceba isto como uma linguagem primitiva completa. (WITTGENSTEIN, 1999, p. 28).

Para Figueiredo (2009, p. 69), é a partir desse exemplo, que surge a ideia de jogo de linguagem, "quando o autor questiona a diferença entre frases como 'Traga-me uma lajota' e 'Lajota!', que no jogo dos construtores pode significar a mesma coisa". Outro jogo inicial é quando a criança está aprendendo as primeiras palavras. Antes de saber o significado de uma palavra, a criança já entende o jogo, como exemplo: se um adulto pergunta: "Quantos anos você tem?", e a criança levanta três dedos. Para Figueiredo,

> da mesma forma ela é treinada para usar as palavras e reagir a elas. As pessoas são treinadas para reagir às palavras em diferentes situações, pois elas podem servir para indicar coisas diferentes, dependendo do jogo em que se encontram. O ouvinte irá julgar de acordo com o contexto e as circunstâncias. Nessas circunstâncias incluem-se: a observação de certa atividade exercida por outrem, a expressão do personagem, o comportamento, o tom de voz, o lugar em que se encontram, os hábitos já constituídos naquele lugar etc. Wittgenstein enumera uma série de exemplos de jogos, como dar ordens, descrever objetos, contar histórias, fazer piadas, perguntar, supor etc. Observar esses incontáveis jogos faz com que vejamos que existem diferentes regras para determinar os significados das palavras em diferentes situações. (FIGUEIREDO, 2009, p. 69).

Em Wittgenstein, significado e normatividade estão essencialmente relacionados entre si. Para Machado (2009, p. 65), "esse ponto é normalmente expresso naquelas passagens nas quais ele diz que o significado de uma expressão é o seu uso. Muitas dessas passagens mostram que um aspecto central do que ele chama de "uso" é sua normatividade".

Cada jogo de linguagem tem sua regra própria que deve ser seguida. Na construção de jogos de linguagem são necessárias regras. Machado (2009, p. 65) afirma que "se o uso significativo de uma expressão é um uso normativo, no sentido recém explicado, então conhecer o significado de uma expressão envolve conhecer regras que determinam o uso significativo dessa expressão”.

No parágrafo 23 das *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein (1999, p. 35) considera: “O termo ‘jogo de linguagem’ deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida”.

3.3 O conceito de *Formas de Vida*

O conceito de *jogo de linguagem* de Wittgenstein sempre está entrelaçado a uma “forma de vida”. Forma de vida no sentido de modo de vida em sociedade, ou seja, o complexo de regularidades que determinam a vida das pessoas em um ambiente social.

Para o antropólogo Malinowski (1923, p. 321) “o significado da coisa é composto de experiências de seus usos ativos e não de contemplação intelectual”. Para ele, é preciso participar do modo de vida para poder aprender uma linguagem de um povo primitivo. Assim corrobora Freitas e Silva (2018, p. 143), quando afirmam que a “atividade linguística em seu aspecto de uso se faz necessariamente como porção de conjunturas sociais e culturais denominadas formas de vida (*Lebensformen*)”.

Não fica totalmente clara essa afirmação de que deve haver a participação em um determinado modo de vida, é preciso também entender, assim como aponta esses autores, que: “De forma semelhante, devemos ter em vista que as formas de vida também são linguisticamente construídas, o que aponta uma inseparabilidade entre estes dois conceitos” (FREITAS; SILVA (2018, p. 143).

Esse entendimento nos faz afirmar que existe sempre um contexto para o uso de um jogo de linguagem que permitirá a compreensão do significado de acordo com as atitudes tomadas dentro desse contexto. Quando falamos que o significado da coisa é composto de experiências de seus usos ativos numa forma de vida, queremos aproveitar a oportunidade para chamar a atenção para o uso de um ensino ostensivo de uma palavra, como nos apresenta Cavassane (2010b):

> Wittgenstein concorda que a ostensão é importante no aprendizado das palavras, mas não enquanto definição ostensiva, e sim enquanto ensino ostensivo, como ele próprio deixa claro: “Tais formas primitivas da linguagem [Wittgenstein se refere à designação de objetos, R.P.C.] emprega a criança, quando aprende a falar. O ensino da linguagem não é aqui nenhuma explicação, mas sim um treinamento” (WITTGENSTEIN 1999, p. 29). A criança é, portanto, treinada para associar uma palavra a um objeto, mas não se trata de uma definição do objeto, haja vista a criança ainda não poder perguntar sobre a denominação. Além do fato de que nem todas as

> palavras se referem a objetos – o que já invalida por si só a definição ostensiva enquanto ato capaz de definir qualquer palavra –, a definição ostensiva só pode ser compreendida em um contexto, ela não é determinada. (CAVASSANE, 2010b, p. 145).

Peruzzo Júnior (2011, p. 73) apresenta as três condições observadas ao vincular o significado e o uso da linguagem, que segundo ele são: "A primeira diz respeito ao modo como as palavras são utilizadas (uso de regras); a segunda deve observar o contexto em que se empregam palavras (jogos de linguagem); e a terceira tem de atentar para as funções que elas devem desempenhar (formas de vida)". Essas condições demonstram que os três conceitos criados por Wittgenstein estão interligados, e isso nos ajuda a compreender a aplicação do conceito de jogos de linguagem, base deste estudo.

Cabe esclarecer que o conceito de *forma de vida* pode ser interpretado sob dois pontos de vista bastante distintos: o naturalista que faz com que o conceito tenha um caráter universal e o etnológico que imputa ao conceito um caráter relativista, assim como apresenta Santos (2016), quando afirma que

> A interpretação naturalista considera que Wittgenstein, quando usa a expressão, quer sublinhar que nossas práticas são, em alguma medida, restritas a nossas particularidades biológicas que distinguem e delimitam nosso modo de ser e agir diante das formas de vida de outras espécies naturais (como cães, leões etc.). Já a interpretação etnológica enfatiza a natureza social da linguagem e da conduta humanas, sua dependência de práticas e convenções culturais. Aqui a ênfase recai sobre o caráter irredutivelmente múltiplo das formas de vida humanas, convidando-nos a ler a expressão a partir de um viés relativista, em que se apaga qualquer lastro universal (ontológico, psicológico, biológico etc.) em favor de uma leitura do termo diante da multiplicidade de culturas humanas. (SANTOS, 2016, p. 26-27).

Consideramos importantes, para nossa prática docente por meio da transposição didática, tanto as ideias do dogma-padrão platonista, quanto as do dogma-padrão formalista, relativos aos fundamentos da matemática no que diz respeito à sua natureza e à sua relação com a realidade. Também consideramos importantes a compreensão das interpretações naturalista e etnológica sobre o conceito de *forma de vida*. Já que estamos falando de linguagem humana, a naturalista já está implícita, pois a nossa linguagem já nos diferencia das outras formas de vida biológicas. A atenção recai sobre a etnológica, pois ela enfatiza a natureza social da linguagem. Desta forma, teremos um leque de possibilidades ocasionadas por nossas práticas e convenções culturais, o que nos permite considerar, não uma, mas múltiplas formas de vida humanas. Portanto, consequentemente, nossa análise de dados estará sobre influência dessa interpretação etnológica.

Em sua obra, Wittgenstein não defende exclusivamente nenhuma dessas interpretações, pelo contrário, muitos leitores percebem o surgimento de uma espécie de *perspectivismo* como, por exemplo, aponta Bento Prado Jr. (2006, p. 20 apud SANTOS, 2016, p. 27), que associa às noções wittgensteinianas de *forma de vida* e *jogo de linguagem* "um 'perspectivismo aprofundado' que jamais se transforma em relativismo".

Retomando as três condições observadas ao vincular o significado e o uso da linguagem, segundo Peruzzo Júnior (2011), apresentaremos um exemplo para tentar reforçar o conceito de *formas de vida* e percebermos que a compreensão da palavra "rapariga" não estará vinculada ao fato de estarmos tratando da comunicação entre seres humanos, enquanto entes biológicos, ou seja, "forma de vida humana", mas enquanto seres sociais:

> No trecho de "O diário de Anne Frank": "Escrever um diário é uma experiência realmente estranha para uma pessoa como eu. Não só porque nunca escrevi nada antes, mas também porque me parece que, mais tarde, nem eu nem ninguém estará interessado nos devaneios de uma rapariga de treze anos". A função (nesse contexto, rapariga corresponde a moça) que está sendo atribuída à palavra (*forma de vida*) de acordo com o contexto (comunicação culta) em que está sendo utilizada (*jogo de linguagem*) e conforme as regras de uso (português padrão) pré-estabelecidas (*uso de regras*). E no ditado popular nordestino: "Mais perdido do que fí de rapariga em Dia dos Pais". A função (enquanto nesse contexto, rapariga corresponde a prostituta) que está sendo atribuída à palavra (*forma de vida*) de acordo com o contexto (comunicação popular) em que está sendo utilizada (*jogo de linguagem*) e conforme as regras de uso (português regional) pré-estabelecidas (*uso de regras*).

Portanto, percebemos que os três conceitos estão interrelacionados, não há sentido tentar entender qualquer um deles isoladamente. É dessa forma que pretendemos observá-los em ação aplicados ao ensino de conceitos da matemática.

3.4 Wittgenstein e o ensino da Matemática

Em se tratando do ensino de matemática, devemos observar que a linguagem da aula de matemática sofre influência de vários fatores, tais como: concepção do professor, conhecimentos prévios dos alunos, nível sociocultural e formação do professor, dentre outros. Devemos focar o ensino da Matemática em duas razões principais: "A primeira é que a Matemática é essencialmente uma linguagem — uma segunda linguagem; a outra, é que a Matemática e o ensino da Matemática são, no seu âmago, atividades sociais" (BAROODY, 1993, p. 99). Sobre o fato de a Matemática ser considerada uma linguagem, Machado (1993) afirma que, assim como a língua não se restringe a um código, a matemática não pode ser restrita a uma linguagem formal.

Portanto, podemos analisar se estabelecer um jogo de linguagem para ensinar, por exemplo, os conteúdos de limites e derivadas utilizando-se a linguagem formal da matemática é um jogo de linguagem interessante ou não, ou se é mais interessante utilizarmos um jogo de linguagem que privilegie a linguagem informal.

Para Garnica e Pinto (2010) a linguagem matemática, como ocorre na sala de aula, é híbrida, fruto do cruzamento de uma suposta linguagem matemática com a linguagem natural. Ressaltam os autores que num mesmo jogo de linguagem, seus participantes (os "jogadores") compartilham um mesmo significado (modo de uso) e que todas as formas de linguagem (gestuais, orais, escritas, pictóricas etc.) complementam-se na intenção de comunicar. Para os autores, não é que a linguagem é um hibridismo disso ou daquilo, ela se constitui um jogo próprio que tem semelhanças de família com a matemática acadêmica e que tem semelhanças de família com a matemática operada no cotidiano da rua, mas ela não é nenhuma nem outra. Ela não é uma mescla, nos termos da impregnação mútua citada pelo professor Nilson José Machado.

Ou seja, a sala de aula constitui jogos de linguagem próprios que não é uma mescla da matemática acadêmica com a da rua, mas ela tem interfaces, ela tem semelhança de família com a matemática acadêmica, ela tem semelhança de família com a matemática que a gente opera na rua, mas ela tem coisas próprias, porque tem regras que vale na sala de aula que o matemático profissional não aceita, tem regras que valem na sala de aula que a rua não aceita, não legitima, então tem regras diferentes, o que caracterizam jogos de linguagens diferentes.

Na aprendizagem de conceitos da matemática devemos levar em consideração alguns aspectos próprios da matemática, segundo o conceito de jogos de linguagem de Wittgenstein. Para Gottschalk (2008), segundo Wittgenstein, a essência dos conceitos e proposições da matemática é de natureza convencional e pragmática[11], portanto, o aprendizado da matemática difere sobremaneira das ciências naturais.

No entanto, continua a autora, segundo Wittgenstein, o matemático não descobre, apenas inventa. As relações que são estabelecidas são internas, gramaticais: são ligações de sentido. Inventam-se formas que atribuem determinados sentidos ao mundo. Portanto, conforme o exposto pela autora, concluímos que cometemos um erro ao achar que podemos

---

[11] Pragmática em sentido totalmente distinto de empírico.

ensinar matemática por meio de descobertas. Para ensinar matemática aos nossos alunos, devemos apresentar as regras do jogo de maneira clara, numa linguagem compatível com a sua *forma de vida*[12], e treiná-lo na utilização dessas regras para que ele as interiorize e, dessa forma, as utilize no entendimento dos conceitos matemáticos.

Como não se trata de descobertas, a intervenção do professor na apresentação das regras do jogo se faz imprescindível no que diz respeito a apresentação ao aluno de uma nova maneira de ver o que está à sua frente. Portanto, para Gottschalk (2008), o que vai nos dar a essência de um conceito matemático é a sua aplicação, pois é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda a sua gramática. Só adquire sentido para o aluno, portanto, ao ajudá-lo, o que envolve técnicas que são aprendidas e não de alguma forma intuídas ou descobertas. Continua a autora, só depois de apresentados os paradigmas para que o aluno possa "jogar" é que tem sentido apresentar desafios na forma de problemas ou partir de situações empíricas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) recomendam que o ensino de matemática priorize a aplicação da matemática em problemas do cotidiano dos alunos, o que faz com que o ensino da matemática seja reduzido a uma mera questão de utilidade, já que o alcance prático da matemática em situações corriqueiras dos alunos do ensino básico, bem como da maioria das pessoas é ínfimo. Por outro lado, Wittgenstein nos dá suporte para utilizarmos as proposições matemáticas sem a necessidade de fazermos experimentos com elas, já que não podemos atribuir valor de verdade às proposições matemáticas por meio da experimentação, "uma vez que desempenham uma função normativa e não descritiva. É a partir das proposições matemáticas normativas que podemos organizar nossas experiências no mundo real e não o contrário, como recomendam os PCNs", afirmam Silveira et al (2014, p. 157-158).

Ao calcular o limite de uma função, ou determinar a derivada de uma função num determinado ponto ou em um ponto qualquer do seu domínio, ou aplicarmos os conceitos de derivadas em problemas de otimização, ou na construção de gráfico de funções, ou na interpretação de um problema de cálculo diferencial e integral, estamos utilizando jogos de linguagem. "Por isso, não há uma essência que defina os diversos jogos de linguagem, uma vez que podem ser aplicados em diversos contextos. E esta variedade de usos em diferentes contextos é o que dá sentido aos conceitos", segundo Silveira et al (2014, p. 158).

O exemplo a seguir dado por Wittgenstein demonstra como podemos confundir o uso de uma regra pré-estabelecida com um procedimento empírico, vejamos:

---

[12] A *forma de vida* consistirá na concordância de respostas de qualquer certa comunidade linguística, o que consequentemente, desemboca na concordância de juízos e definições dentro de um discurso com valor de verdade. (JÚNIOR, 2011, p. 79)

> Coloque 2 maçãs em cima da tábua de uma mesa vazia, não deixe que ninguém chegue perto da mesa e nem que ela seja sacudida; agora coloque mais 2 maçãs em cima da tábua da mesa; conte as maçãs que estão ali. Você fez um experimento; o resultado da contagem é provavelmente 4. (Nós apresentaríamos o resultado assim: quando se coloca, sob tais e tais circunstâncias, primeiro 2 e depois mais 2 maçãs sobre a mesa, geralmente não se perde nenhuma, nem se agrega nenhuma.) E pode-se conduzir experimentos análogos com resultados iguais com todos os tipos de corpos sólidos. (WITTGENSTEIN, 1987, p. 30)

Esse exemplo comprova que 2 + 2 = 4, não porque houve uma constatação empírica, mas sim por estarmos seguindo uma regra. Silveira et al (2014, p. 159) ajudam a esclarecer o exemplo quando afirmam que “isto não significa que as proposições matemáticas não têm nada com a experiência, mas sim que elas organizam a mesma, isto é, têm uma função normativa”. Gottschalk (2004, p. 332) corrobora essa afirmação quando afirma que as proposições matemáticas “se situam entre o transcendental e o empírico, ou seja, não são entes transcendentes totalmente desvinculados de nosso mundo empírico, mas tampouco são descritivas desse mundo como as proposições empíricas”.

Um outro exemplo, bastante esclarecedor é apresentado a seguir: “Dois homens que vivem em paz entre si e três homens que vivem em paz entre si não fazem cinco homens que vivem em paz entre si. Mas isso não significa que 2 + 3 não seja mais 5; é apenas que a adição não pode ser aplicada dessa maneira”. (WITTGENSTEIN, 2003, p. 264). Esse próximo exemplo difere do exemplo apresentado por Wittgenstein, pois apesar dos questionamentos apresentados, estamos apenas utilizando um jogo de linguagem, que faz uma analogia com ações do cotidiano do aluno, que pode favorecer a compreensão do uso normativo da linguagem matemática, vejamos: Se cortarmos uma melancia em quatro partes poderemos afirmar que a junção das quatro partes nos dará a melancia inteira (¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1)? O primeiro questionamento seria: as quatro partes obtidas são realmente iguais? O segundo: e ao juntá-las, considerando todo o caldo que escorreu durante o corte, teríamos integralmente a melancia de volta? Teríamos vinculado ao primeiro questionamento a possibilidade de estarmos efetuando uma adição com termos diferentes e ao segundo a presença de um erro na totalização, mas esse não seria o objetivo no ensino da adição de frações. Poderia ter sido usado uma laranja, uma maçã, uma barra de chocolate etc. Isso ajuda a compreendermos que conceitos da matemática estariam a serviço de uma aplicabilidade básica em situações do cotidiano, mas claramente independente deles. Ou seja, estaríamos apenas fazendo um *uso* empírico de uma proposição matemática, sem que isso afetasse o seu uso normativo.

Isso é corroborado por Silveira et al (2014, p. 160) ao afirmar que "as construções da aritmética são autônomas e garantem sua aplicabilidade. A aritmética, neste sentido, não se justifica 'para dar troco' nas relações comerciais. Aliás, 'dar troco', se aprende mesmo sem que alguém precise frequentar a escola". Para Wittgenstein (2003, p. 242), "a aritmética não está interessada na sua aplicação. A sua aplicabilidade toma conta de si mesma". Segundo Silveira et al (2014),

> O campo próprio da matemática se desenvolve por necessidades lógicas. Necessidades que surgem no interior da linguagem matemática, para que esta continue coerente com o próprio sistema de regras e convenções que gerou. Por isso, o movimento desse campo é autônomo, autorregulado e, dessa forma, se torna independente. [...] Pode-se pensar claramente em adições de quaisquer números naturais, mas subtrações, apenas de naturais maiores por menores e não o contrário. Mas a ideia de subtrair um número natural menor por um maior já estava subentendida. O problema já estava previsto na própria ideia inicial de contagem. A utilização de números negativos vem ser colocada em uma prática social na Europa, apenas a partir do renascimento, para o uso comercial devido às noções de lucro e prejuízo. Mas tudo já era previsto na própria aritmética. Assim como a ideia de fração e o problema posterior dos incomensuráveis, que deu origem aos números irracionais e ao problema de raízes de índice par de números negativos, que originou os números complexos. (SILVEIRA et al, 2014, p. 160-161).

É essencial o professor ter em mente que, para os estudantes, pode haver formas diferentes de se realizar cálculos no dia a dia em comparação com os cálculos feitos em sala de aula, além de perceber que o contexto social do aluno vai afetar a forma como esse conceito se desenvolverá para ele, independente do formalismo utilizado pelo professor em sala de aula para ensinar o conceito. Cabe ao professor ensinar, ao aluno, as regras adequadas para a compreensão dos conceitos matemáticos e ajudá-lo a desenvolver a capacidade de seguir essas regras para que possa construir seu conhecimento matemático. Para isso, o jogo de linguagem utilizado pelo professor em aula deve apresentar elementos que permitam a esse aluno entender as regras necessárias para o domínio dos conceitos estudados, sendo capaz de utilizá-los em situações práticas. Este trabalho deseja mostrar que se os elementos do jogo de linguagem utilizado pelo professor não forem suficientes para garantir a aprendizagem do aluno, então uma busca por novos elementos deve ser considerada.

Silveira et al (2014, p. 163) alerta que "os jogos de linguagem no processo de ensino e de aprendizagem da matemática na sala de aula, às vezes, são diferentes das regras matemáticas aplicadas no cotidiano, pois podem ter outra conotação".

3.5 Afirmações fundamentais para a pesquisa

A análise dos dados desta pesquisa seguirá as interpretações das concepções atribuídas a Wittgenstein, baseadas em suas próprias afirmações e nas feitas pelos pesquisadores referenciados.

“Não consideramos, contudo, os jogos de linguagem como partes incompletas de uma linguagem, mas como linguagens completas em si mesmas, como sistemas completos da comunicação humana”, afirma Wittgenstein (1992, p. 14). “Não há uma essência que defina os diversos jogos de linguagem, uma vez que podem ser aplicados em diversos contextos. E esta variedade de usos em diferentes contextos é o que dá sentido aos conceitos”, afirma Silveira et al. (2014, p. 158). “Nem Wittgenstein se preocupou em definir precisamente noções como jogos de linguagem, forma de vida e regra”, afirma Julio (2016, p. 186). Essas três afirmações nos permite utilizar o conceito de jogos de linguagem de várias maneiras, e em todas as possibilidades, os jogos de linguagem podem ser vistos como “o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada” (WITTGENSTEIN, 1999, p. 30).

Nesse sentido, “ao afirmar que os exemplos de práticas que realizamos em nosso dia a dia são vistos como *jogos de linguagem*, Wittgenstein nos permite também afirmar que há uma conexão entre *jogos de linguagem* e práticas, sejam elas profissionais, formativas, dentre outras” (JULIO, 2019, p. 835). Em relação a essa conexão entre jogos de linguagem e práticas, Miguel (2010, p. 45) afirma que “ao mesmo tempo em que as práticas são vistas como jogos de linguagem, estes, por sua vez, são vistos como práticas. E é nesse sentido que os jogos de linguagem são, ao mesmo tempo, constitutivos das práticas e constituídos nas e pelas práticas”. Wittgenstein (2000, p. 67) corrobora as afirmações de Julio (2019) e Miguel (2010) quando afirma que “é o nosso atuar que se encontra na base do jogo de linguagem”.

Em acordo com todas as afirmações apresentadas, nosso trabalho diz respeito aos jogos de linguagem matemáticos presentes no conceito de limite e no conceito de derivada, bem como os jogos de linguagem presentes na prática docente dos professores de matemática envolvidos nessa pesquisa. Esses jogos estarão entrelaçados e o nosso atuar como docente pode determinar a presença de elementos de um jogo de linguagem corporal, bem como, destacar as funções das palavras limite e derivada. Dentro do jogo de linguagem para o ensino de um conceito matemático de nível superior, em nosso ver, fazer uma revisão de conceitos básicos não caracteriza uma mudança de jogo de linguagem, mas apenas uma ação que utiliza um elemento a mais no mesmo jogo.

Para Wittgenstein (1999, p. 68): “Os jogos de linguagem figuram muito mais como *objetos de comparação*, que, através de semelhanças e dissemelhanças, devem lançar luz sobre as relações de nossa linguagem”. Essa afirmação de Wittgenstein é a nossa base para a análise que faremos dos dados, em que o objetivo será observar elementos do jogo de linguagem de um professor, que não esteve presente no jogo de linguagem do outro e que impactou na resolução de exercício sobre o conceito pelos alunos.

Segundo Gottschalk (2008, p. 80), “formas de vida” (*Lebensformen*) é a expressão utilizada por Wittgenstein para designar nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades em geral, envolvidas com a linguagem. A partir dessa interpretação associaremos a expressão “formas de vida” às convenções de um meio acadêmico relativo à formação de futuros engenheiros eletricistas. Meio esse que traz consigo todas as regras de ação de um acadêmico que busca conhecimentos necessários para a sua formação e estão interligadas à sua linguagem.

Nesse presente trabalho, esperamos conscientizar nossos colegas professores de matemática de todos os níveis de ensino a não adotarem uma visão radical sobre os dogmas-padrão platonista ou formalista relativos aos fundamentos da matemática no que diz respeito à sua natureza e à sua relação com a realidade e, também, gostaríamos de reforçar que estamos em um contexto de forma de vida humana, portanto sob ação de práticas e convenções culturais. Assim sendo, esperamos que o entendimento do conceito de jogos de linguagem de Wittgenstein nos ajude a compreender que a defesa radical de algum desses dogmas é prejudicial para o nosso trabalho docente, prejudicando sobremaneira a aprendizagem do aluno.

Os jogos de linguagem estão em todas as partes da nossa comunicação e atendem a todos os contextos que se fizerem presentes no ato de ensinar matemática, mas sem esquecermos de que a matemática possui suas particularidades. A ideia é evitar, inclusive, que professores considerem que o sentido dado à matemática deva ser dependente de aspectos empíricos e/ou úteis, já que “a matemática possui aspectos específicos do seu campo de saber, por exemplo, suas regras, sua linguagem que, em muitos casos, não apresenta relação com o cotidiano. [...] o objeto matemático não está presente na realidade do aluno”. (Silveira et al, 2014, p. 165).

Essa pesquisa procura mostrar que os jogos de linguagem são essenciais para a compreensão dos significados e usos dos conceitos matemáticos, buscando demonstrar a influência exercida pelo professor, ao fazer uso de jogos de linguagem, na maneira como aluno resolve exercícios. Utilizaremos aulas de intervenção, após videoaulas prévias, sobre limites e derivadas para mostrar como que alunos erram questões e passam a acertar. Acreditamos estar criando um incômodo, uma agitação necessária para a ciência.

4 METODOLOGIA

Nessa pesquisa foram priorizadas a descrição e a análise qualitativa dos dados constituintes do seu corpo empírico, utilizando um procedimento de estudo de caso, com objetivo descritivo. Flick (2009, p. 135) salienta que o objetivo dos estudos de caso é a descrição exata de um caso, sendo que o termo "caso" deve ser entendido de uma forma bastante ampla, que se pode adotar, como tema de uma análise de caso, pessoas, comunidades sociais, organizações e instituições.

Para reforçar esse entendimento, Castro Filho et al (2021, p. 5-6) afirmam que o estudo de caso como uma metodologia qualitativa de investigação não está direcionado a obter generalizações estatísticas de uma pesquisa a partir de uma amostra da população, visto que o tipo de generalização buscada em um estudo de caso é interpretado e descrito pelo pesquisador. Segundo os autores, essa metodologia pode ser utilizada quando queremos estudar um único caso que serve a um propósito revelador. Além disso, o estudo de caso também pode ser múltiplo quando envolver mais de uma unidade de análise ou várias subunidades como, por exemplo, vários indivíduos, organizações, situações etc.

Dependendo do objeto de estudo e do objetivo de pesquisa, o estudo de caso utilizado pelo pesquisador apresentará diferentes perspectivas:

> **descritiva**, **exploratória** e **explanatória**. Essas perspectivas não são hierárquicas, cada uma delas tende a resolver um problema diferente, a partir da questão de pesquisa elaborada pelo pesquisador. Assim, o estudo descritivo preocupa-se com a descrição do fenômeno. Estudos exploratórios têm o objetivo de conhecer com maior profundidade questões pouco conhecidas. Já os estudos explanatórios (ou explicativos) se voltam nas possibilidades de explicação de causas e efeitos. (CASTRO FILHO et al, 2021, p. 6).

Diante do exposto, fizemos opção por estudo de caso descritivo, pois essa perspectiva de estudo possibilita a descrição do fenômeno que observamos por meio da aplicação de questionários em dois momentos distintos, após a exposição dos alunos a duas modalidades de aulas distintas.

A escolha por uma abordagem qualitativa, justifica-se nas palavras de Flick (2009):

> A pesquisa qualitativa é de particular relevância ao estudo das relações sociais devido à pluralização das esferas de vida. As expressões-chave para essa pluralização são a "nova obscuridade" (Habermas, 1996), a crescente "individualização das formas de vida e dos padrões biográficos" (Beck, 1992) e a dissolução de "velhas" desigualdades sociais dentro da nova diversidade de ambientes, subculturas, estilos e formas de vida.

> Essa pluralização exige uma nova sensibilidade para o estudo empírico das questões. (FLICK, 2009, p. 20).

E para reafirmar essa nossa escolha, compactuamos com as considerações de Minayo (2012, p. 624-625), que afirma que "o pesquisador pode articular as informações que recebe como num quebra-cabeças, e para enriquecê-las, buscar novos interlocutores e fazer novas observações"; que pondera que "a compreensão e a interpretação em seu formato final, também assinalam um momento na práxis do pesquisador"; e que: "Por exigir presença, envolvimento pessoal e interação do pesquisador em todo o processo, uma boa análise qualitativa deve explicitar suas ações no campo, assim como seus interesses e dificuldades na construção do objeto".

Nesta pesquisa foram utilizadas, como instrumentos de investigação, videoaulas ministradas por um docente com consolidada trajetória no ensino e na investigação científica concernentes aos conteúdos curriculares envolvidos vinculado à uma instituição pública de ensino superior exclusivamente voltada para a Educação à Distância (EAD).

De modo preliminar e sinteticamente, cumpre informar que, de acordo com o planejamento previsto, a constituição do corpo empírico desta tese encontra-se amparado nas aulas referentes à disciplina de Cálculo I atribuída regularmente ao pesquisador e autor desta tese durante o semestre letivo. O pesquisador selecionou temas dentro do conteúdo programático para a citada disciplina e, a seguir, exibiu aos alunos as videoaulas estimadas como adequadas para os respectivos temas das aulas, considerando características específicas dos jogos de linguagem envolvidos. Após a exibição de uma videoaula, foi aplicado um questionário (lista de exercícios). Em seguida, sem o acesso do pesquisador às resoluções dos alunos dos exercícios, o pesquisador ministrou presencialmente o mesmo conteúdo da respectiva videoaula, de acordo com o seu próprio jogo de linguagem e, imediatamente a seguir, reaplicou o questionário (mesma lista de exercícios).

Esta sequência para um determinado tema/conteúdo do programa da disciplina de Cálculo I (videoaula – lista de exercícios – aula presencial/aula de intervenção – reaplicação da mesma lista de exercícios) foi adotada para cada tema selecionado. Esse procedimento viabilizou, considerando conteúdos curriculares de cálculo diferencial, o cotejamento de características dos jogos de linguagem nas videoaulas ministradas pelo professor externo e com experiência consolidada no ensino e nas aulas ministradas pelo professor/pesquisador com dois momentos de aplicação do questionário, que forneceriam medidas comportamentais dos alunos/voluntários em relação aos conceitos matemáticos envolvidos, além das interações linguísticas em situação de aula.

Deste modo, seria possível observar a ocorrência de resultados, documentados nas resoluções dos exercícios em dois momentos distintos, bem como nas interações verbais nas aulas presenciais ministradas em um segundo momento pelo pesquisador (imediatamente após as videoaulas e, em seguida, imediatamente após a aula ministrada pelo professor/pesquisador sobre o mesmo conteúdo da videoaula), o que permitiria investigar possíveis relações entre a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e as características dos jogos de linguagem que definiram as videoaulas e, em seguida, as interações entre o professor/pesquisador e os alunos nas aulas presenciais.

A metodologia adotada viabiliza também a possibilidade de questionarmos um confronto desigual entre uma aula virtual e uma aula presencial. Um observador externo poderia apontar a impossibilidade de um aluno não poder tirar a dúvida no instante em que ela surgisse diretamente com o professor, porém temos em nossa defesa a escolha de uma videoaula com um professor renomadíssimo de uma instituição reconhecida internacionalmente e com uma estrutura privilegiada para a gravação de sua videoaula e, o mais importante, temos consciência de que nenhum professor se dispõe a apresentar sua aula sem a autoconsciência de que se fará ser entendido, principalmente se ele tiver um currículo e reputação bem reconhecidos.

Outro ponto muito importante a se considerar é a certeza de que não há garantias de que uma aula presencial será obrigatoriamente superior a uma aula virtual. Em nosso dia a dia no magistério, nos deparamos a todo instante com alunos renunciando às aulas presenciais, de várias disciplinas, para buscar o entendimento dos conteúdos que estão sendo dados nessas aulas em videoaulas. Com isso, mostra-se plausível admitir que professores possivelmente estejam utilizando características de jogos de linguagem que se mostram de alguma maneira mais efetivos para os alunos na modalidade de videoaulas em comparação com as características dos jogos de linguagem exibidas em aulas presenciais.

Estimamos que a metodologia utilizada e descrita mais detalhadamente a seguir viabilizou investigar relações entre características de jogos de linguagem sob condições distintas e medidas comportamentais de compreensão de conceitos matemáticos.

4.1 Justificativa

Após tanto observar em nossa prática docente, alunos deixando de assistir aula presencial para buscar videoaulas, motivados pelo não entendimento da linguagem utilizada pelos professores em suas aulas presenciais e acreditando ser possível expandir o potencial do conceito de jogos de linguagem de Wittgenstein, para ser utilizado como um apoio metodológico para o trabalho dos professores de matemática, beneficiando tanto o ensino do professor, quanto a aprendizagem dos alunos, é o que nos levou a propor essa pesquisa.

4.2 O problema de pesquisa

A inserção de novos elementos em um jogo de linguagem de um professor favorece o entendimento, pelos alunos, de conceitos matemáticos acerca de cálculo diferencial e integral, possibilitando-os resolver exercícios (modos de agir) a partir de suas interações com práticas de ensino dispostas em videoaulas, bem como em aulas presenciais?

4.3 Objetivos

4.3.1 Objetivo geral

Investigar e demonstrar em que extensão a resolução de exercícios, a saber, modos de agir de universitários, sustentariam correspondências com as aprendizagens preconizadas relacionadas com conteúdos curriculares de cálculo diferencial e integral a partir da exposição dos alunos a uma sequência de aulas nas modalidades a distância e presencial caracterizadas por variações nas descrições de regras de uso que definem um jogo de linguagem (procedimentos) de professores em atividades de ensino.

4.3.2 Objetivos específicos

a) Demonstrar um potencial metodológico presente nos jogos de linguagem;
b) Ampliar a possibilidade de o professor avaliar o que está em jogo durante a apresentação de conceitos matemáticos em suas aulas no que diz respeito ao seu jogo de linguagem;
c) Mostrar que se os elementos do jogo de linguagem utilizado pelo professor não forem suficientes para garantir a aprendizagem do aluno, então uma busca por novos elementos deve ser considerada;
d) Observar elementos do jogo de linguagem de um professor, que não esteve presente no jogo de linguagem do outro e que impactou na resolução de exercício sobre o conceito pelos alunos;
e) Demonstrar a influência exercida pelo professor, ao fazer uso de jogos de linguagem, na maneira como aluno resolve exercícios.

4.4 Participantes

Participaram deste estudo, além do pesquisador como executor das aulas de intervenção, 36 graduandos regularmente matriculados na disciplina de Cálculo I do curso de Engenharia Elétrica de uma universidade pública federal, em uma turma formada, em sua maioria, por alunos calouros. Os nomes desses graduandos foram listados em ordem alfabética e as posições desses nomes na lista determinaram seus respectivos pseudônimos. Assim, quando o aluno for citado no texto, será exibida a expressão “aluno 1”, “aluno 2”, “aluno 3”,... ou “aluno 36”.

A disciplina de Cálculo I para o curso de Engenharia Elétrica possui carga horária de 96 horas e é uma dentre várias outras disciplinas ofertadas pelo Departamento de Matemática para esse curso. A respectiva turma esteve sob responsabilidade do professor/pesquisador responsável pela execução desta pesquisa. Para que fosse efetivada a participação desses graduandos foi encaminhado ofício ao Coordenador do Curso para que, por meio de reunião do Colegiado do Curso, fosse autorizada a coleta de dados junto aos alunos do curso. O Colegiado autorizou prontamente. Os alunos que participaram como voluntários assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), esse termo encontra-se no APÊNDICE A.

4.5 Procedimento de coleta de dados

Os conceitos estudados foram sobre limites e derivadas de funções de uma variável real. Ao longo do semestre letivo, em nossas aulas, foram apresentadas seis videoaulas dos cursos de engenharia de uma universidade pública estadual, exclusivamente de educação a distância. Como critério de escolha foram consideradas as videoaulas nas quais foram apresentadas as definições dos conceitos de limites e de derivadas, além das regras fundamentais para o cálculo de ambos. Após a seleção das aulas, foram adotadas as seguintes designações para as videoaulas:

VD 1 (Videoaula 1) – Limites – Parte 1 – Duração 22:11;

VD 2 (Videoaula 2) – Limites – Parte 2 – Duração 21:09;

VD 3 (Videoaula 3) – Derivada – Duração 18:43;

VD 4 (Videoaula 4) – Regras de Derivação – Parte 1 – Duração 20:26;

VD 5 (Videoaula 5) – Regras de Derivação – Parte 2 – Duração 21:32;

VD 6 (Videoaula 6) – Regra da Cadeia – Duração 22:09;

Para cada uma das videoaulas acima designadas ocorreu uma aula de intervenção nomeada da seguinte maneira:

AI 1 (Aula de Intervenção 1) – Limites – Parte 1 – Duração 01:40:39;

AI 2 (Aula de Intervenção 2) – Limites – Parte 2 – Duração 01:56:22;

AI 3 (Aula de Intervenção 3) – Derivada – Duração 01:19:53;

AI 4 (Aula de Intervenção 4) – Regras de Derivação – Parte 1 – Duração 32:51;

AI 5 (Aula de Intervenção 5) – Regras de Derivação – Parte 2 – Duração 35:38;

AI 6 (Aula de Intervenção 6) – Regra da Cadeia – Duração 38:42;

Após cada videoaula escolhida foram aplicados alguns exercícios sobre o conteúdo apresentado nessa videoaula. O objetivo foi coletar informações sobre o entendimento dos conceitos trabalhados a partir do jogo de linguagem utilizado pelo professor durante a explanação de cada conceito. Imediatamente após a execução da videoaula e da resolução dos exercícios, foi efetuada uma intervenção no sentido de apresentar os mesmos conceitos utilizando o jogo de linguagem do professor/pesquisador. Essa intervenção ocorreu em uma aula padrão em sala seguindo o plano de ensino da disciplina do curso em questão. Em seguida, foram reaplicados os mesmos exercícios para verificar se elementos do jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador que não estiveram presentes no jogo do professor na videoaula favoreceram o entendimento do conceito apresentado ou se elementos do jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula e que não esteve presente na aula presencial favoreceram o entendimento do conceito apresentado.

Como o levantamento de dados foi realizado durante as aulas de responsabilidade do professor/pesquisador, que tinha a responsabilidade de cumprir a ementa da disciplina no tempo estabelecido pela estrutura curricular do curso, não foi considerada a possibilidade de se fazer a correção dos exercícios após cada videoaula para dar um *feedback* aos alunos por dois motivos: não havia tempo para esse procedimento por causa do fluxo contínuo da disciplina e porque tal *feedback* iria interferir na resolução das mesmas questões por ocasião da aplicação dos mesmos exercícios após a aula de intervenção, independentemente do jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador. Também não foi considerada a possibilidade de o professor/pesquisador fazer uma análise prévia do jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula, pois o objetivo era fazer uma análise a partir da forma natural como os professores desenvolvem suas aulas.

4.6 Planejamento das condições de construção do corpo empírico da tese

Antes das apresentações das videoaulas foram planejadas as condições de construção do corpo empírico da tese por meio de informações obtidas a partir das seguintes ações:

1.ª) Identificação da videoaula, especificando o tema e a duração.

2.ª) Apresentação das aprendizagens ou habilidades previstas como resultado da interação dos alunos com as condições didáticas da videoaula de acordo com o Projeto Político Pedagógico (PPP) do curso.

3.ª) Apresentação dos exercícios referente a cada videoaula, com a justificativa da proposição de cada exercício para cada videoaula com base nas aprendizagens esperadas e a explicação de como ele se constitui em instrumento para aferir a presença da aprendizagem esperada e o que o aluno deve fazer (na resolução) para evidenciar a aprendizagem esperada.

A partir dessas ações obtivemos as informações que constam no APÊNDICE B.

4.7 Instrumentos

Todas as videoaulas foram apresentadas em Datashow com o uso de um equipamento de som bluetooth tipo soundbar com dois canais de áudio (26W RMS) para que os alunos tivessem uma videoaula com excelente qualidade de som. Todas as aulas foram filmadas com uma câmera de vídeo de alta definição, tanto a parte de exibição da videoaula, quanto todo o restante da aula, incluindo o período da intervenção (aula padrão) e as aplicações dos exercícios, conforme explicitado no TCLE.

De acordo com os pressupostos da pesquisa qualitativa, esta investigação levantou informações por meio de dois questionários de pesquisa, nomeados de “Exercícios Experimentais A” e “Exercícios Experimentais B”, que apresentaram os mesmos exercícios para os conceitos trabalhados em cada videoaula e em cada aula em sala correspondente. Esses exercícios foram elaborados pelo professor/pesquisador a partir da necessidade de atender aos conteúdos da disciplina de Cálculo I, que normalmente são trabalhados nessa unidade curricular de acordo com a ementa da disciplina aprovada no Projeto Pedagógico de Curso de Graduação em Engenharia Elétrica. Foram elaboradas 38 questões distribuídas em 6 listas de exercícios (cada um referente aos conceitos estudados nas respectivas aulas) e, desse total, foram escolhidas 13 questões, julgadas pelo professor/pesquisador como de melhor potencial para análise, ou seja, aquelas questões que estavam relacionadas às explanações de conceitos por meio de jogos de linguagem que apresentaram mais elementos distintos entre eles. Essas questões tiveram representantes de cada uma das listas.

4.8 Tratamento dos dados

O tratamento dos dados prioriza o cotejamento (a) das características dos jogos de linguagem sob distintas condições de interação (videoaula e aula presencial de intervenção), bem como (b) das respostas emitidas pelos alunos nos dois questionários para os Exercícios Experimentais. Estima-se que os cotejamentos viabilizarão demarcar a relevância, em especial, das ações do professor na constituição de jogos de linguagem que, em última instância, estão inseridos no contexto de favorecer processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Cabe salientar que quando nos referirmos a aulas, tanto podemos estar nos referindo a videoaulas, quanto a aulas de intervenção.

5 RESULTADOS E ANÁLISE DE DADOS

Na teoria dos conjuntos podemos afirmar que o conjunto A = {1, 2} é um elemento do conjunto B = {0, {1, 2}, 3}, pois apesar de ser um conjunto, A está fazendo papel de elemento no conjunto B. Poderíamos representar esse conjunto B da seguinte maneira: B = {0, A, 3}. Para deixar claro o conceito de *Jogos de Linguagem* para o leitor desse trabalho, faremos uma analogia entre esse tópico da teoria dos conjuntos e a nossa base teórica. Quando, no capítulo 3, apresentamos a afirmação de Wittgenstein que não considerava os jogos de linguagem como partes incompletas de uma linguagem, mas como linguagens completas em si mesmas, estávamos querendo defender o seguinte entendimento sobre os jogos de linguagem que estamos apresentando nesse capítulo: ao falar sobre *Limites* estamos falando de um sistema completo de comunicação humana, um jogo de linguagem, pois nesse sistema temos as definições, propriedades, teoremas e todos os conceitos básicos necessários para se falar sobre a determinação do limite de uma função. Assim sendo, estaríamos associando *Limites* a uma "espécie" de conjunto B, que possui em seu interior o conceito de *Fatoração*, ou seja, uma "espécie" de conjunto A que, por sua vez, estaria fazendo o papel de *elemento* dentro do jogo de linguagem dos *Limites*. No entanto, não podemos esquecer que o próprio conceito de *Fatoração* também constitui um jogo de linguagem, pois apresenta suas definições e regras próprias. Em resumo, quando estivermos falando sobre um elemento de um jogo de linguagem, estaremos também nos referindo a um jogo de linguagem.

Outro ponto importante refere-se aos jogos de linguagem gestuais que aparecem ao longo do trabalho de um docente. Esses jogos estão entrelaçados aos jogos de linguagem dos próprios conceitos matemáticos. Gestos, entonação de voz, palavras de alerta, dentre outras ações fazem parte de um ambiente de ensino e compõem um jogo de linguagem de grande importância para alcançarmos os objetivos em nossa comunicação acadêmica.

Esses jogos de linguagem estão relacionados a uma forma de vida específica dentro desse trabalho, qual seja, ser um personagem de um meio acadêmico apropriado à formação de futuros engenheiros eletricistas, o que significa se comunicar em relação aos conceitos matemáticos e técnicos referente à profissão de engenheiro eletricista. Como a disciplina de Cálculo I é uma das primeiras disciplinas a serem estudadas pelos recém ingressantes na academia, esse meio deve envolvê-los nessa nova forma de vida que agora se apresenta a eles. Dessa maneira, todas as regras gramaticais referentes aos jogos de linguagem envolvidos nessa nova comunicação devem ser seguidas.

5.1 Resultados: Descrição e Análises

Após as apresentações das videoaulas e das aulas de intervenção, foram verificados os desempenhos dos participantes nos Exercícios Experimentais A e B. Na correção dos exercícios, foram atribuídas as letras maiúsculas, em vermelho, “B” para questão em branco, “E” para questão errada, “P” para questão parcialmente correta e “C” para questão correta. Para cada questão dos Exercícios Experimentais em que houve alguma ação dos participantes, foram realizadas as análises quanto aos impactos dos jogos de linguagem utilizados pelos professores nas respostas apresentadas nesses exercícios.

Quando um voluntário não realizou um dos Exercícios Experimentais por algum motivo, automaticamente tivemos que descartar o outro, pois perdemos a possibilidade de comparação entre as resoluções de cada par de questão. Para a análise da ação dos jogos de linguagem presentes nessa pesquisa, buscamos identificar na resolução de cada par de questões dos Exercícios Experimentais, como cada jogo de linguagem utilizado influenciou na resolução da respectiva questão pelo aluno voluntário.

As análises dos resultados foram realizadas a partir dos desempenhos dos participantes na disciplina de Cálculo I do curso de Engenharia Elétrica. Das 38 questões utilizadas nos 6 questionários, escolhemos 13 questões que correspondem às questões com o maior potencial de demonstração da influência dos jogos de linguagem utilizados pelos professores na resolução dessas questões pelos alunos.

Para cada transcrição das aulas (videoaulas ou aulas de intervenção) foram retirados e sombreados trechos referentes aos elementos dos jogos de linguagem utilizados na apresentação dos conceitos presentes em cada questão, seguidos de nossa análise que está escrita, em itálico, dentro de colchetes.

A partir dessas ações analisamos os seguintes resultados:

5.1.1 Análises da Aula 1

<u>AULA DE INTERVENÇÃO 1</u>

IDENTIFICAÇÃO:
AI 1 – Limites – Parte 1 – Duração 01:40:39.

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS DE LINGUAGEM PRESENTES NAS AULAS E OS DESEMPENHOS DOS ALUNOS NOS EXERCÍCIOS:

Aula 1 – Questão 5

Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

Essa questão está relacionada ao cálculo de um limite de um quociente de funções polinomiais que apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 1, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 1 transcrito a seguir:

"Olho para esse x^2 – 9, que está sobre x – 3, e fatoro x^2 – 9 usando diferença de quadrados. Lembra x^2 – 9, nós vimos nas nossas aulas de matemática, naquela disciplina preparatória, fatoração de diferença de quadrados (x – 3)(x + 3). x – 3 e x – 3 podem ser cancelados, então fica só x + 3, e quando x tende a 3, x + 3, tudo se passa como se aqui se aproximasse de 3, de fato, a soma se aproxima de 6". [*Elemento do jogo de linguagem da Fatoração. Para a solução desse tipo de limite, o jogo de linguagem do professor na videoaula está se utilizando de um exemplo, de forma técnica, onde o único destaque é o caso de fatoração de uma diferença de quadrados. Nessa comunicação, o professor faz referência às aulas de matemática da disciplina preparatória*.]

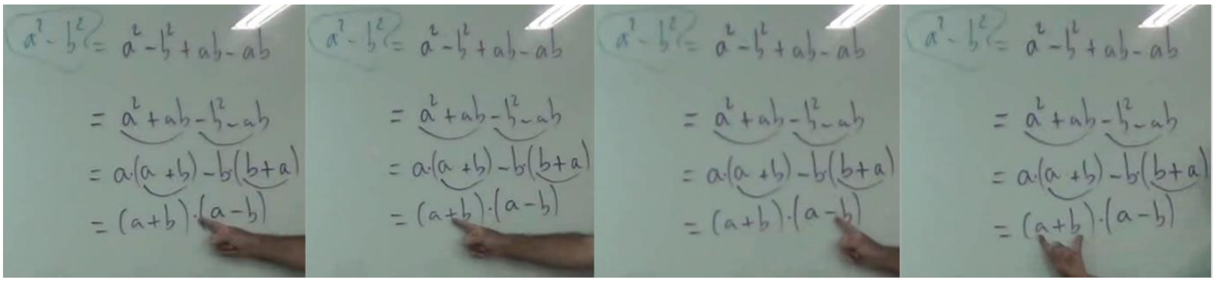
Observação: Todas as transcrições das videoaulas são bastante curtas, pois são gravadas em estúdio com utilização de uma tv de led conectada a um computador onde são exibidos os slides dos powerpoints com todos os conceitos já expostos e os cálculos já prontos, bastando apenas o professor ficar apontando na tela da tv. Além disso, jamais o professor revisa conteúdo do ensino básico necessários para o estudo do Cálculo, pois considera todos já vistos em videoaulas de conteúdos básicos disponibilizadas para os alunos anteriormente.

Após a aula de intervenção 1, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 1 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

"A maneira mais tradicional que tem é usar casos de fatoração, porque sempre eu vou trabalhar com polinômio em cima e polinômio em baixo. Se eu sei todos os casos de fatoração do oitavo ano, beleza! Você fica com uma mão na roda para poder resolver esse exercício. Por exemplo: eu olho para cima e vejo uma diferença de quadrados. Todo mundo sabe que x ao quadrado menos 16 pode virar x mais 4 vezes x menos 4. Raiz quadrada disso dá x, raiz quadrada desse dá 4, produto da soma pela diferença das duas raízes vai resultar a diferença entre dois quadrados.” [*Elemento do jogo de linguagem da Fatoração. Nesse jogo de linguagem, o professor/pesquisador na aula de intervenção está se utilizando de um outro exemplo, de forma técnica, onde também destaca o caso de fatoração de uma diferença de quadrados, porém fazendo referência aos produtos notáveis (produto da soma pela diferença de dois termos). Nessa comunicação, o professor/pesquisador faz uso de muitas palavras que fazem parte de um jogo de linguagem auxiliar, que ajuda a atrair a atenção do aluno em relação ao conteúdo que está sendo exposto. São elas: “mais tradicional”, “beleza”, “uma mão na roda” e “Todo mundo sabe”.*]

“Mas quando você quer deduzir mesmo, você tem que fazer assim: você olha para essa expressão e cria uma saída, uma saída para que você consiga fatorar a expressão por casos elementares que você conhece. Bom! Então a saída é: para quem tem bastante habilidade algébrica, para quem já tem experiência nisso, ele vai saber o seguinte: se eu pegar essa diferença e acrescentar ab e ao mesmo tempo retirar ab, eu não alterei a expressão original. Concorda? Quem coloca um valor e retira o mesmo valor, não fez nada. Um cancela o outro, não fez nada. Não é isso? Mas o simples fato de você criar essa possibilidade de escrita, já ajuda você fazer o seguinte: você já pode juntar o positivo aqui com esse outro positivo e esse negativo com esse outro negativo. Perceberam? Esse está com coeficiente positivo, esse também. Esse está com coeficiente negativo, esse também. Juntei os positivos, juntei os negativos. Quando eu faço essa juntada, aí eu lembro de um caso elementar de fatoração chamado de agrupamento. Existe o primeiro caso que é o fator comum, o segundo caso que é o agrupamento, a diferença de quadrados é o terceiro caso e assim vai. Mas o agrupamento e o fator comum são os básicos. E eu olho para cá, eu posso fazer o agrupamento, eu já fiz o agrupamento, quando eu juntei esse positivo com esse positivo, eu já estou formando um grupinho, e esse negativo com esse negativo, outro grupinho, então estou fazendo agrupamentos. Nesse agrupamento ou nesse grupinho, eu percebo que tem um fator comum, o fator comum é o a, e eu coloco o a em evidência, se eu colocar esse a em evidência, quem vai sobrar dentro dos parênteses? a ao quadrado pôr a sobra a, ab pôr a sobra b. Perfeito? Está certo isso? Ah, eu não sei se está certo. Faz a distributiva que você confere. a vezes a, a ao quadrado, a vezes b, ab. Então está correto. Aí, você vem para esse outro grupinho e percebe que dá para colocar menos b em evidência, menos b, se eu colocar menos b em evidência, o que vai sobrar dentro do parênteses? Menos por menos, mais, b ao quadrado por b, b. Perfeito? Menos por menos, mais, ab por b, cancela o b sobra apenas a. Observe que depois que eu faço os dois grupinhos e coloco em evidência, no primeiro eu coloquei o a e no segundo eu coloquei o menos b, apareceu dentro do parênteses duas coisas iguais, a mais b, e a mais b ou b mais a, que dá na mesma. Como essas duas coisas são iguais e aqui é um produto, e aqui é um produto, novamente eu tenho um caso de fator comum. Quem é o fator comum agora? O a mais b. Então eu vou colocar o a mais b em evidência, colocando-o em evidência, quem vai sobrar dentro do novo parênteses? a menos b. E está aí, o produto da soma pela diferença. Agora, eu pergunto para vocês: é melhor memorizar ou você quer sempre deduzir?" [*Outro elemento do jogo de linguagem da Fatoração. Esse elemento trata da dedução da forma equivalente ao caso de fatoração da diferença entre dois quadrados, que é o produto notável "produto da soma pela diferença de dois termos". Nessa fala, o professor/pesquisador também faz uso de algumas palavras que fazem parte de um jogo de linguagem auxiliar, que ajuda a atrair a atenção do aluno em relação ao conteúdo que está sendo exposto. São elas: "juntada", "beleza", "grupinho" e "grupinhos". Também se utiliza de perguntas impactantes, tais como: "Está certo isso? Ah, eu não sei se está certo.", essa acompanhada de uma resposta que garante o caráter impactante da pergunta; e "Agora, eu pergunto para vocês: é melhor memorizar ou você quer sempre deduzir?", que busca criar certa conscientização.*]

"Qual é o nome do produto notável? Produto da soma pela diferença de dois termos. E eu leio, eu leio, o nome do caso, eu não estou decorando o nome do caso, eu leio: produto, olha meu dedo,



produto da soma pela diferença de dois termos, o a e o b. Eu não decoro, eu uso a linguagem." [*Aqui temos um exemplo de jogo de linguagem gestual auxiliando o jogo de linguagem matemático dos produtos notáveis. A expressão "olha meu dedo" dá o ponta pé inicial nessa comunicação.*]

"Olha só! Não estou fazendo nada exotérico, não, estou só fazendo a distributiva, x vezes x, x^2, x vezes menos x'', menos $x.x''$, agora vamos para cá, menos x' vezes x, menos $x'.x$, e menos vezes menos, mais, mais o que? $x'.x''$. Certo, gente? Eu não fiz nada sobrenatural, fiz alguma coisa sobrenatural? Ó, atenção, atenção, atenção! a vezes, abre parênteses, x^2, vocês estão vendo que essa coisinha e essa daqui têm um fator comum? Quem é o fator comum? É o menos x. Então vamos colocar esse menos x em evidência. Menos x em evidência, vai sobrar quem dentro do parênteses? Menos por menos, mais, x por x, cancela, sobra quem? x'', o outro, menos por menos, mais, x por x, cancela, vai sobrar x', vejam se eu fiz o fator comum correto, meu fator comum está certo? Estou com dúvida, se você está com dúvida, você distribui, tem que voltar na mesma coisa, menos x vezes x'', menos $x.x''$, menos x vezes x', menos $x'.x$ ou menos $x.x'$, que dá na mesma. Perfeito? Está correto meu cálculo? E esse outro aqui, eu vou copiar, mais $x'.x''$. Pronto! Maravilha! Agora olha aqui, gente. a vezes, abre parênteses, x^2, menos x vezes a soma das raízes, ou seja, menos x vezes menos b sobre a, mais o produto das raízes, ou seja, c sobre a. Sabem distribuir? a vezes x^2, ax^2, este a vai multiplicar tudo isto, então esse a de cima cancela com esse a debaixo, vai sobrar menos x vezes menos b, quanto dá menos x vezes menos b? Mais bx, menos vezes menos, mais, b vezes x, bx, mais a vezes isso aqui? Esse a não vai cancelar com esse a debaixo? Vai sobrar quem, gente? Se ele cancelou sobra c. Essa expressão que apareceu aqui, tem alguma coisa a ver com essa?" [*Aqui temos um elemento do jogo de linguagem da fatoração, que é o caso da fatoração de um trinômio do 2º grau que não é um quadrado perfeito. Nesse elemento, está sendo apresentada a justificativa desse caso de fatoração. No jogo de linguagem auxiliar, o professor/pesquisador faz uso das expressões "Não estou fazendo nada exotérico, não", "Eu não fiz nada sobrenatural", "Ó, atenção, atenção, atenção!", "vocês estão vendo que essa coisinha", "Estou com dúvida, se você está com dúvida, você distribui" e "Pronto! Maravilha!", que buscam atrair a atenção do aluno em relação ao conteúdo que está sendo exposto.*]

"Quando eu fiz as fatorações diferença de quadrados e fatoração de um trinômio do segundo grau, apareceram esses dois produtos aqui e eu pude cancelar isso com isso. Esse cancelar isso com isso, não é uma espécie de simplificação de fração? É. É uma simplificação de fração. E você está cansado, calejado, de simplificar frações. Para você simplificar frações, você diz assim: eu tenho que dividir o numerador e o denominador pelo mesmo valor. Vou falar de novo: eu tenho que dividir o numerador e o denominador pelo mesmo valor. Não é assim? Pois bem, quem é o numerador do meu limite? x^2 menos 16. Quem é o denominador do meu limite? x^2 menos $5x$ mais 4. Beleza! Esse é o numerador, esse é o denominador. Se eu quero simplificar a fração, eu vou dividir tanto o numerador, quanto o denominador, eu vou dividir pelo mesmo valor. Que valor é esse, irmãos? Aí é que está o segredo, o bicho da goiaba. Ele está aqui: seu limite é x tendendo a 4, eu vou fazer bem grande, porque esse é o bicho da goiaba. Bem goiabona aqui, olha, olha, seu limite está fazendo x tender a 4, x tender a 4, certo? Estão enxergando? Muito bem. Se eu pegar esse 4 e passar para o outro lado, vai ficar x menos 4 tendendo a 0. E não era o x tendendo a 4 que estava causando o rebu aqui? Então você vai sempre, sempre, simplificar a nossa fração por esse x subtraído do valor para o qual ele está tendendo.” [*Esse é o jogo de linguagem auxiliar utilizado para introduzir o jogo de linguagem da divisão polinomial. Nele podemos observar expressões como: “E você está cansado, calejado, de simplificar frações”, “Aí é que está o segredo, o bicho da goiaba”, “Bem goiabona aqui, olha, olha” e “E não era o x tendendo a 4 que estava causando o rebu aqui?”. Essas expressões servem para prender a atenção dos alunos.*]

“Divisão polinomial é uma coisa que você olha uma vez e já aprende, porque ela é muito simples. Não precisa ficar memorizando vários casos de fatoração. Você vê uma só divisão polinomial e você sabe fazer todas. Ó! Você vê uma e sabe fazer todas. Você vê um caso de fatoração e sabe fazer todos? Não. Mas a divisão, sim. Olha aqui. Antes de começar dividir, eu quero lembrar a infância de vocês. 7 dividido por 3. Quanto dá 7 dividido por 3? Quero dividir 7 por 3, pronto, divisão natural e acabou. 7 dividido por 3 dá 2, o que você faz quando você descobre que é 2 aqui? Você pega o dois multiplica pelo divisor e manda para lá para subtrair do dividendo, não é assim? Olha o que eu vou fazer? 2 vezes 3, 6, eu pego esse 6 e passo para cá menos 6, que vai dar resto 1. Perceberam o truque? 2 vezes 3, 6 positivo, quando vai para lá, vai negativo.” [*O professor/pesquisador utiliza esse jogo de linguagem auxiliar para introduzir o jogo de linguagem da divisão polinomial. O destaque aqui fica por conta das expressões motivacionais, tais como: “Divisão polinomial é uma coisa que você olha uma vez e já aprende”, “ela é muito simples”, “Ó! Você vê uma e sabe fazer todas” e “Você vê um caso de fatoração e sabe fazer todos? Não. Mas a divisão, sim”. Além de apelar para a aritmética da infância para prender ainda mais a atenção da turma.*]

“Olha, x^2 dividido por x, maior grau daqui dividido pelo maior grau desse lado. Quanto dá x^2 dividido por x? x. Aí faz o processo de volta, x vezes x, x^2, troca sinal, menos x^2, x vezes menos 4, menos $4x$, troca sinal, mais $4x$, somou, cancela, e esse com esse aqui não são semelhantes, eu vou copiar os dois, vou copiar $4x$ menos 16, certo? Esse cara aqui tem grau igual ao grau daqui, enquanto o grau estiver, pelo menos, no mesmo nível, é possível continuar dividindo. Quando esse grau aqui ficar inferior, aí acabou. Mas, por enquanto, dá. $4x$ dividido por x, 4, 4 vezes x, $4x$, vem para cá menos $4x$, 4 vezes menos 4, menos 16, vem para cá mais 16, olha o resultado, 0, divisão exata.” [*Aqui temos o jogo de linguagem da divisão polinomial com suas regras sendo aplicadas.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 5 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 6: Exercícios Experimentais A

E 5) Calcule: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ $\quad \lim \frac{x^2-4x+3}{x-1}$; $\lim \frac{|x-1|(x+4-3)}{x-1}$

Aluno 6: Exercícios Experimentais B

C 5) Calcule: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ $\quad \lim\limits_{x\to1}\frac{1(\cancel{x-1}).(x-3)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to1} x-3 = -2$

$S=\frac{-b}{a}=4 \quad x'=1$

$P=\frac{c}{a}=3 \quad x''=3$

x^2-4x+3

$a(x-x').(x-x'')=1(x-1).(x-3)$

O jogo de linguagem do professor na videoaula não foi suficiente para que esse aluno utilizasse os casos de fatoração, talvez se ele tivesse tido acesso aos vídeos de conteúdos básicos citado pelo professor, ele poderia ter conseguido resolver essa questão. Mas a exposição do caso de fatoração de uma expressão polinomial do segundo grau presente no jogo de linguagem utilizado na aula de intervenção mostrou-se presente na resolução do aluno nos Exercícios Experimentais B.

Aluno 13: Exercícios Experimentais A

C 5) Calcule: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-3x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)-3x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x.(x-1)-3.(x-1)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1).(x-3)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to1} x-3 = 1-3 = -2$

Aluno 13: Exercícios Experimentais B

C 5) Calcule: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-3x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x.(x-1)-3.(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(\cancel{x-1}).(x-3)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to1} x-3 = -2$

Já para esse aluno, os jogos de linguagem dos professores não interferiram em suas resoluções, pois o professor na videoaula limitou-se a apresentar somente o caso da diferença de quadrados e o professor/pesquisador apesar de ter explorado mais possibilidades de casos de fatoração, além da divisão polinomial, não destacou o caso do agrupamento, apenas o utilizou numa demonstração dentro do caso de diferença de dois quadrados. Esse aluno demonstrou que já dominava o caso de agrupamento, os jogos de linguagem dos professores só serviram para que esse ele atentasse para a utilização de um caso de fatoração.

Aluno 16: Exercícios Experimentais A

B 5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

Aluno 16: Exercícios Experimentais B

C 5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

$\frac{x-3}{1} = \frac{1-3}{1} = 2$

$\frac{1^2-4+3}{1-1} = \frac{0}{0}$ $\quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-x+3}{x-1} = \boxed{2}$

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+3 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-3 \\ -3x+3 & \\ +3x-3 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x-1 & x-1 \\ \hline -x+1 & 1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Aluno 28: Exercícios Experimentais A

B 5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

Aluno 28: Exercícios Experimentais B

C 5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+3 & x-1 \\ \hline -x^2 & x-3 \\ -3x+3 & \\ -3x & \end{array}$$

$\frac{x-3}{1} = \frac{1+3}{1} = \frac{-2}{1} = -2$

Aluno 30: Exercícios Experimentais A

B 5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1}$

Aluno 30: Exercícios Experimentais B

C 5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} \div \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{1} = \frac{1-3}{1} = \boxed{-2}$

$x - 1 \to 0$

Enquanto os alunos 16, 28 e 30 demonstraram não terem nenhum domínio dos casos de fatoração, mesmo com o professor na videoaula e o professor/pesquisador na aula de intervenção apresentando alguns casos, eles não conseguiram aplicá-los. Somente conseguiram apresentar uma resposta nos Exercícios Experimentais B, pois utilizaram um elemento do jogo de linguagem do professor/pesquisador diferente dos casos de fatoração.

Aula 1 – Questão 6

Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?

Essa questão está relacionada aos conceitos de limites no infinito e limites infinitos. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 1, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 1 transcrito a seguir:

"quando x vai para infinito, ou seja, quando x fica muito grande, o que acontece com 1 sobre x, o inverso de um número muito grande é um número muito pequeno, limite é 0. $-5x^3$, quando x tende para infinito, bom, x ficando muito grande, x^3 fica muito grande, multiplicado por 5, continua um número que vai crescendo cada vez mais, com o menos ele vai tender para menos infinito. Raiz cúbica de $2x + 5$, x tendendo para infinito, $2x$ tende para infinito, com mais 5 tende para infinito e raiz cúbica de um número que cresce indefinidamente, também vai continuar crescendo e a raiz cúbica de $2x + 5$, quando x tende a infinito, o limite é mais infinito." [*Nesse jogo de linguagem dos limites no infinito, temos o uso de três situações de aplicações do limite no infinito, mas em nenhum momento há destaque para o que vem a ser um limite no infinito e um limite infinito.*]

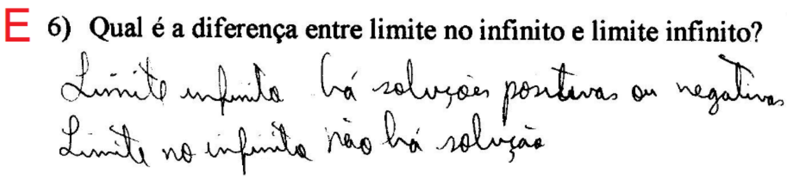
Após a aula de intervenção 1, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 1 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

"Limites no infinito e limites infinitos, qual é a diferença entre esses dois? Bom, quando é no infinito tem a ver com domínio, quando são limites infinitos tem a ver com imagens. De que maneira? Por exemplo, se eu tiver uma função como essa aqui, ó, limite, vou colocar essa aqui que todo mundo já conhece, não sei se conhece, vamos lá, $3x^2$ mais $2x$ menos 1 sobre x^2 mais x mais 3, quando x tende a infinito. Então quando eu tenho um limite desse tipo, a primeira coisa que eu devo lembrar é de uma propriedadezinha que será muito útil para a gente. Limite de funções polinomiais, vou pegar a de cima ali separada, só ela, bonitinha, separada e vamos aplicar aqui valores de x tendendo a infinito. Que quer dizer isso? Bom, se isso é um polinômio gente, todo mundo sabe qual é o gráfico dessa função, não é? Nesse caso aqui, qual é o gráfico? Parábola, beleza. E essa parábola é côncava para cima ou para baixo? Para cima. Eu não vou tentar fazer um desenho perfeito, não vou ver raiz, vértice, não vou ver nada. Eu só vou fazer um gráfico grosseiro aqui, que pode não ter nada com essa função aí, em termos de raiz, vértice e termo independente.” [*Em seu jogo de linguagem sobre os limites no infinito e limites infinitos, o professor/pesquisador inicia a exposição levantando uma questão sobre a diferença entre eles, pois são conceitos muito sutis. Logo em seguida, apresenta um exemplo que envolve uma razão entre funções polinomiais do 2º grau, que são mais familiares aos alunos. Esse jogo de linguagem envolve registros de representação semiótica algébrico e gráfico, o que contribui para o melhor entendimento dos alunos. No jogo de linguagem auxiliar vemos expressões e palavras que buscam conquistar a atenção dos alunos, tais como: “ó”, “propriedadezinha”, “bonitinha”, “beleza” e o trocadilho “todo mundo já conhece, não sei se conhece”.*]

“Se é uma função polinomial do segundo grau, o gráfico é esse aqui ou é uma coisa parecida com essa, e se eu faço os valores de x virem para o infinito, quanto mais o x vem para o infinito, mais, acontece o que com as imagens? O que está acontecendo com as imagens? Estão disparando também para o infinito, porque essa perna aqui vai seguir infinitamente, não vai? Quanto mais eu venho para o infinito no domínio, mais as imagens disparam para o infinito. Então eu sei que o resultado desse limite aqui vai ser infinito, só de olhar no gráfico. Perceberam isso? Quanto mais eu venho para o infinito no domínio, mais as imagens disparam para o infinito positivo.” [*Nessa parte do jogo de linguagem, o professor/pesquisador busca deixar claro por meio do exemplo da função polinomial do 2º grau, o que faz com que o limite seja no infinito e infinito.*]

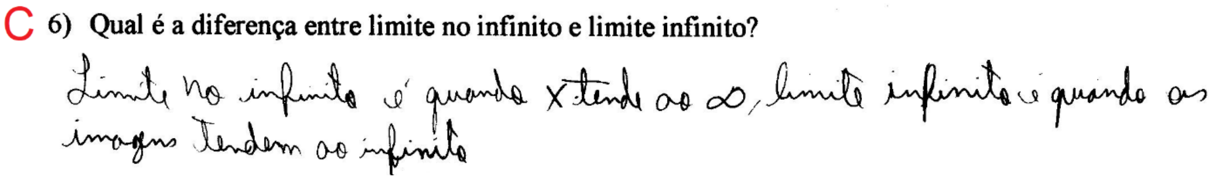
A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 6 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 14: Exercícios Experimentais A


E 6) Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?

Limite infinito há soluções positivas ou negativas
Limite no infinito não há solução

Aluno 14: Exercícios Experimentais B


C 6) Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?

Limite no infinito é quando x tende ao ∞, limite infinito é quando as imagens tendem ao infinito

Para esse aluno, o jogo de linguagem do professor na videoaula causou uma interpretação numérica sobre esses conceitos, pois o professor apresenta o conceito por meio de um exemplo para efetuar o cálculo. Somente com o detalhamento dos conceitos na aula de intervenção, esse aluno conseguiu entender as diferenças conceituais.

Aluno 15: Exercícios Experimentais A

P 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

limite no infinito é quando X é infinito
limite infinito é o resultado será infinito

Aluno 15: Exercícios Experimentais B

P 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

limite no infinito se encontra no domínio $(X \to \infty)$.
e limite infinito são os valores da imagem.

Nesse caso, na resposta apresentada nos Exercícios Experimentais A, o aluno demonstra que não entendeu o conceito de vizinhança infinitesimal do conceito de limites, quando afirma que *x* é igual a infinito. E nos Exercícios Experimentais B deixa o conceito de limite infinito vago, ou seja, o conceito está incompleto. Os jogos de linguagem utilizados tanto na videoaula, quanto na aula de intervenção não foram suficientes para perfeita distinção entre os dois conceitos.

Aluno 21: Exercícios Experimentais A

E 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

limite infinito é quando $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, e x estiver dividindo a $f = 0$
limite no infinito é quando o valor da função é infinita

no entanto, a explicação ficou um pouco trabalhosa p/ entendimento

Aluno 21: Exercícios Experimentais B

C 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

Limite no infinito é quando valor de x em $\lim_{x \to \infty}$ estiver próximo ao infinito
já quando o limite infinito é a imagem tendendo ao infinito

O exemplo utilizado no jogo de linguagem do professor na videoaula não foi suficiente para que esse aluno conseguisse distinguir os dois conceitos, fez com que ele criasse uma certa confusão entre esses conceitos. Deixando inclusive, na própria resolução da questão, uma observação de que achou que a explicação do professor ficou um pouco trabalhosa para entendimento. Na aula de intervenção o professor/pesquisador prioriza um jogo de linguagem que apresenta inicialmente uma ideia de distinção dos conceitos e logo em seguida mostra exemplos específicos para cada conceito, chegando até ao caso dos limites no infinito que são infinitos.

Aluno 26: Exercícios Experimentais A

E 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

Limite ao infinito é quando o limite pode tender a mais infinito ou a menos infinito

Aluno 26: Exercícios Experimentais B

C 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

Limite no infinito quando os valores x tendem ao infinito

Limite infinito quando as imagens tendem ao infinito

Com certa confusão na linguagem, o aluno tenta passar a ideia do exemplo dado pelo professor na videoaula. Depois da aula de intervenção apresenta a diferenciação dos conceitos. Parecem consequências claras dos jogos de linguagem utilizados.

Aluno 31: Exercícios Experimentais A

E 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

No caso do limite no infinito, utiliza-se o ∞ quando $\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = 0$, o limite infinito que L é igual a ∞

Aluno 31: Exercícios Experimentais B

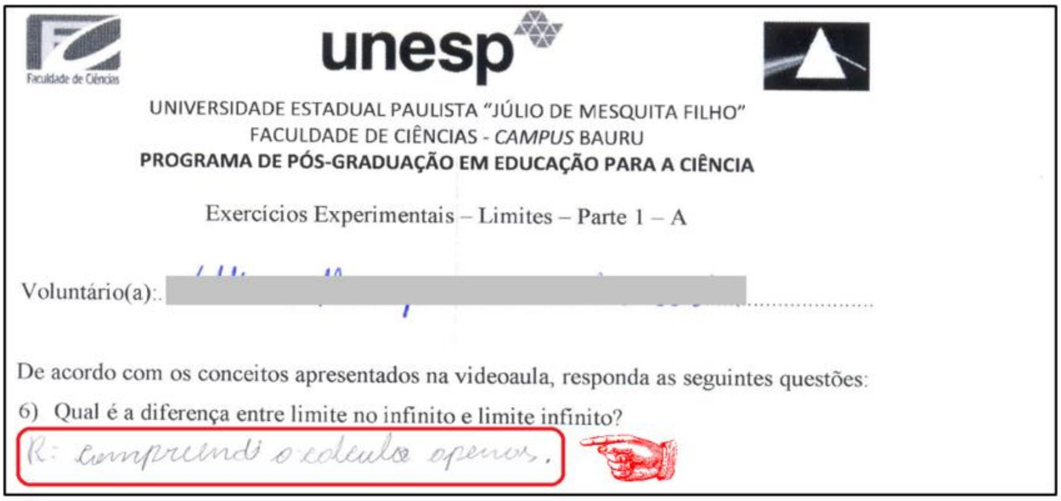
C 6) **Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?**

Limite no infinito, sendo $x \to \infty$, significa que o domínio tende ao infinito, onde sua imagem pode tender ao infinito, sendo um limite infinito também. Então diremos que um limite infinito é quando sua imagem tende ao infinito

O exemplo utilizado no jogo de linguagem do professor na videoaula novamente causou dificuldade para a compreensão do conceito de limites no infinito e, na resposta do aluno, observamos que a noção de vizinhança infinitesimal não aparece. Com o detalhamento desses conceitos no jogo de linguagem do professor/pesquisador, o aluno pôde diferenciá-los e demonstrar uma maior familiaridade com o conceito de vizinhança infinitesimal, pois deixa claro que tanto no domínio, quanto na imagem, os valores estão se aproximando (tendendo). Além de apresentar a possibilidade dos limites no infinito que são infinitos.

Nossa preocupação é com o jogo de linguagem que o professor irá usar para ensinar o seu aluno, pois muito nos preocupamos com situações como essa que ocorreu com um de nossos alunos voluntários ao tentar responder à questão 6 da parte 1 da aula de limites:

Figura 8. Resposta de um voluntário na questão 6 da aula 1 após a videoaula



Faculdade de Ciências

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS - *CAMPUS* BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

Exercícios Experimentais – Limites – Parte 1 – A

Voluntário(a): [redacted]

De acordo com os conceitos apresentados na videoaula, responda as seguintes questões:

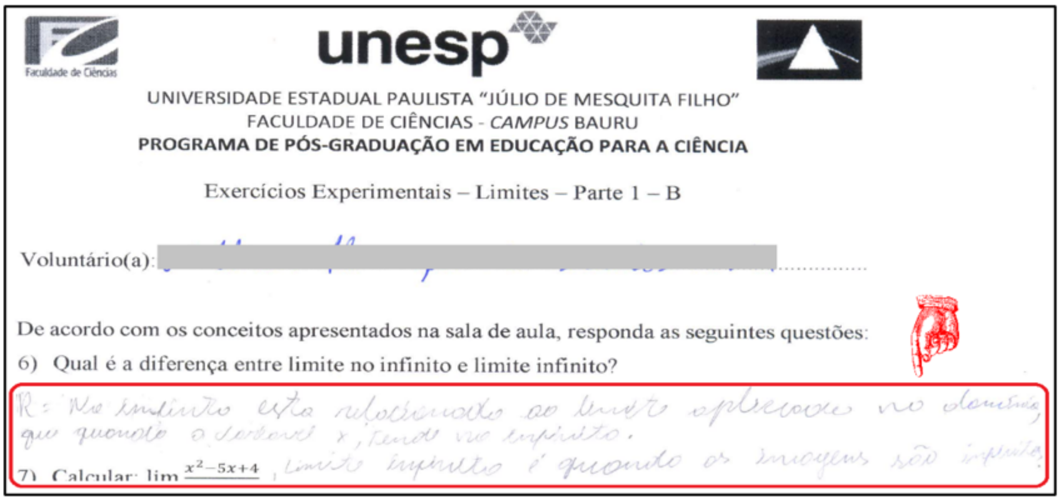
6) Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?

R: compreendi o cálculo apenas.

Fonte: O autor

Ou seja, o aluno 35 não entendeu os conceitos, apenas efetua cálculos. Isso caracteriza um ensino sem significado para esse aluno. Ele não será capaz de distinguir situações em que esses conceitos se fizerem presentes. Porém, quando o pesquisador apresentou um jogo de linguagem que contemplou a presença de uma ênfase na distinção entre esses conceitos, o aluno voluntário conseguiu apresentar uma resposta para a mesma questão como segue na figura a seguir:

Figura 9. Resposta de um voluntário na questão 6 da aula 1 após a intervenção



Faculdade de Ciências

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS - *CAMPUS* BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

Exercícios Experimentais – Limites – Parte 1 – B

Voluntário(a): [redacted]

De acordo com os conceitos apresentados na sala de aula, responda as seguintes questões:

6) Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?

R: No infinito esta relacionado ao limite aplicado no domínio, que quando a variável x, tende ao infinito. Limite infinito é quando as imagens são infinita.

7) Calcular: lim $\frac{x^2-5x+4}{}$

Fonte: O autor

Esse tipo de exemplo reforça a importância da atenção, por parte do professor, em relação ao jogo de linguagem que utilizará, pois caso o professor considere que seu jogo de linguagem está consolidado, então, certamente, poderá não conseguir atingir a aprendizagem esperada pelos alunos.

Aula 1 – Questão 8

Calcular: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1}{3x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x + 4}$

Aula 1 – Questão 9

Calcular: $\lim_{x \to 1} \frac{2x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1}{3x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x + 4}$

A questão 8 está relacionada ao conceito de limites no infinito de funções polinomiais, enquanto a questão 9 foi proposta para chamar a atenção de que a propriedade utilizada no cálculo do limite no infinito de uma função polinomial não se aplica para um limite de uma função polinomial que não tenha a variável independente tendendo ao infinito. As questões 8 e 9 foram propostas para serem confrontadas, ou seja, o aluno deveria perceber a diferença conceitual entre ambas. Esse confronto é um recurso didático possível dentro de um jogo de linguagem e favorece muito o entendimento dos conceitos apresentados. Para resolver essas questões dos Exercícios Experimentais A da aula 1, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 1 transcrito a seguir:

"Quando eu tenho $3x^2$ + 2 sobre x + 1, uma coisa que eu posso fazer para ver o limite quando x tende a mais infinito, porque é mais infinito e mais infinito, é técnica que vai dar certo sempre, fatora o termo de maior grau, fatorei $3x^2$ e x, observe que se eu fatoro o de maior grau, o primeiro termo vai ser sempre 1, 1 mais 2 sobre o $3x^2$ e aqui 1 mais 1 sobre x. Olha que bonitinho, o $3x^2$ e o x eu posso cancelar, deu $3x$, e todos os que estão entre parentes vão tender a 1, porque como eu coloquei em evidência o de maior grau, esse tende a 1 e esses outros todos tendem a 0, porque o x está indo para infinito e tem expoente embaixo, está tudo indo para 0, então acaba dominando o de maior grau. E se você fizer isso com $3x^4$, com $5x^4$, põe em evidência $3x^4$ e $5x^4$, x^4 vai cancelar com x^4, ao contrário desse que era x^2 e x, cancelou e sobrou um x, aqui é x^4, x^4, vai cancelar o x e vai sobrar o 3 e o 5, e os outros termos dentro do parênteses todos vão ser dominados por esse primeiro termo 1, então vai ficar um $3x^4$, um $5x^4$, cancelo x^4, 3 sobre 5, os outros todos 1, limite 3 sobre 5. E você pode generalizar esse fato, sempre que você tiver um quociente de funções polinomiais, basta olhar os termos de maior grau, os termos de maior grau são dominantes." [*Esse é um elemento do jogo de linguagem dos limites no infinito de quocientes de funções polinomiais, pois está apresentando a propriedade a ser utilizada para calcular de forma prática esse tipo de limite. O professor apresenta duas situações que podem ocorrer ao se utilizar essa propriedade. Em seu jogo de linguagem auxiliar, o professor utiliza a expressão "Olha que bonitinho" para atrair a atenção da audiência na videoaula.*]

Após a aula de intervenção 1, essas mesmas questões foram novamente apresentadas aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 1 para novas resoluções. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

"Como ela é uma função polinomial, toda função polinomial que vai para o infinito, eu a trato assim: eu pego o termo de maior grau da função e tento colocar em evidência, se eu colocar esse negócio em evidência, o que vai aparecer dentro do parênteses? Não é fator comum, está vendo que não é fator comum, mesmo assim, sem ser fator comum, eu quero colocar o termo de maior grau em evidência, o que vai acontecer dentro do parênteses? Qual vai ser o primeiro termo aqui, na hora que eu coloco isso em evidência? Menos $3x^2$ dividido por ele mesmo, 1, perfeito, $2x$ dividido por menos $3x^2$, ó, $2x$ dividido por menos $3x^2$, cancela o x daqui com um daqui, e o resto não dá para fazer nada, certo? Se não dá para fazer nada, vai sobrar quem? Menos eu coloco no meio, sobra 2 em cima e sobra $3x$ embaixo, sobrou isso aí, ficou claro para todo mundo, essa continha? A mesma coisa, eu vou fazer com o 1, quanto é 1 dividido por esse bicho feio aqui? 1 dividido por menos $3x^2$, não dá para fazer nada, só vou pegar o sinal de menos e colocar no meio, então vai ficar menos 1 sobre $3x^2$. Olha o que acontece aqui: como x está indo para infinito, essa fração aqui vai zerar, porque infinito vezes 3 dá infinito, um número dividido por um denominador extremamente gigante, vai fazer a fração ir para onde? Para 0. Então essa fração vai para 0, a mesma coisa aqui, infinito ao quadrado, infinito, vezes 3, infinito, um número finito dividido por um extremamente gigante, o que vai acontecer? Vai fazer a fração tender a 0. Se isso tende a 0, se isso tende a 0, só esse camaradinha aqui vai importar, então 1 menos 0 menos 0, vai dar 1, e 1 vezes o que está aqui, dá o próprio que está aqui, então se dá o próprio que está aqui, eu não preciso esquentar com ninguém para trás, correto? Então é como se eu simplesmente ignorasse isso aqui e ficasse apenas com o termo de maior grau, porque esse termo de maior grau é que realmente vai determinar qual é o valor do limite." [*Aqui está o jogo de linguagem do professor/pesquisador onde a propriedade a ser utilizada para calcular o limite no infinito de uma função polinomial é apresentada. Nesse* *jogo, as expressões: “ficou claro para todo mundo, essa continha?”, “quanto é 1 dividido por esse bicho feio aqui?”, “extremamente gigante”, “esse camaradinha”, “não preciso esquentar com ninguém para trás” e “simplesmente ignorasse isso aqui” são utilizadas com o objetivo de manter as atenções dos alunos sobre a apresentação das regras matemáticas necessárias.*]

“Você vai escrever que limite de menos $3x^2$ mais $2x$ mais 1, com x tendendo a infinito, ele vai dar limite de menos $3x^2$, com x tendendo a infinito, e isso vai dar menos infinito. Toda vez você pode fazer isso? Toda vez. Mas só vale, só vale, se for limite no infinito. E o que é um limite no infinito? Quando os valores do domínio, no caso, em cima do domínio, eu estou fazendo a variação de x e ele vai caminhar em direção ao infinito. Ou infinito positivo, ou infinito negativo. Se eu escrever isso aqui, ó, gente, limite de menos $3x^2$ mais $2x$ mais 1, com x tendendo a 7, isso é um limite no infinito? Não. Então se não é no infinito, eu posso fazer isso? Se você fizer isso, você cometeu um erro gravíssimo, porque essa coisa aqui não tem nada a ver com essa outra. Tá? Então a propriedade só vale, se for limite no infinito. Bom, gente, só que é o seguinte: vocês viram também que esse resultado aqui deu infinito negativo, certo? Se deu infinito negativo, quem está caminhando em direção ao menos infinito? As imagens estão tendendo a menos infinito. O que significa isso? Que eu tenho um limite que além de ser no infinito, ele também é um limite infinito. E se acontecer isso aqui, ó, você tiver limite de 1 sobre x, com x tendendo a infinito, vai tender a 0. É limite no infinito? Sim. É limite infinito? Não. Então esse aqui é apenas limite no infinito.” [*Essa parte do jogo de linguagem apresenta uma ênfase na condição de utilização da regra apresentada para cálculo de limites no infinito de funções polinomiais, ao deixar claro para o aluno a diferença entre um limite no infinito de função polinomial e um limite de função polinomial onde x está tendendo para um valor finito. A presença das expressões “Mas só vale, só vale”, “você cometeu um erro gravíssimo” e “essa coisa aqui” reforça essa diferenciação. O jogo de linguagem ainda apresenta a diferença entre limites no infinito e limites infinitos.*]

“Para ser limite infinito, não necessariamente tem que ser resultado de um limite no infinito, pode ser de um limite a um valor finito.” [*Aqui o jogo de linguagem chama a atenção para a existência de limites infinitos que não estão vinculados a limites no infinito.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram as questões 8 e 9 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 6: Exercícios Experimentais A

B 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

B 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

Aluno 6: Exercícios Experimentais B

C 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x^5}}{3x^6} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{3.\infty} = 0$

C 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$ → Apenas substituir o valor 1

Assim como o aluno 6, os alunos 3, 15, 16, 18, 22, 25, 28, 30, 32 e 34 tiveram dificuldades com o jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula, que colocava o termo de maior grau em evidência para limites no infinito de funções polinomiais e que não destacava a diferença entre um limite no infinito e um limite onde x tendia a um número finito. Como consequência, deixaram as questões 8 e 9 em branco nos Exercícios Experimentais A. Por outro lado, entenderam com bastante facilidade o jogo de linguagem que aplicava diretamente a propriedade para esse tipo de limite, utilizado pelo professor/pesquisador na aula de intervenção. Além da diferenciação entre os tipos de limites para funções que apresentam um quociente entre funções polinomiais.

Aluno 7: Exercícios Experimentais A

B 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

C 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$ $\lim\limits_{x\to 1} = \frac{2+7-3-5+1-4+1}{3-1+3-2-1+6+4}$ $\lim\limits_{x\to 1} = \frac{-1}{12}$

Aluno 7: Exercícios Experimentais B

C 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4} = \frac{2x^{\cancel{5}}}{3x^{\cancel{6}}} = \frac{2}{3x} = \frac{2}{\infty} = 0$

C 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4} = \frac{-1}{12}$

O jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula, que colocava o termo de maior grau em evidência para limites no infinito de funções polinomiais não foi entendido por esse aluno. Essa não compreensão do limite no infinito de um quociente de funções polinomiais não interferiu na aplicação da regra básica de cálculo de limites para funções que não geram indeterminações. Quando exposto ao jogo de linguagem do professor/pesquisador, parece ter achado tão simples que resolveu as questões de forma direta, apesar dos erros de formalidade na escrita usada no cálculo de limites.

Aluno 31: Exercícios Experimentais A

C 8) Calcular: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

$$\frac{x^6\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\left(3-\frac{1}{x^1}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{6}{x^5}+\frac{4}{x^6}\right)}$$

$1\ \frac{0}{3}=\frac{0}{3}=0$ ✓

B 9) Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

Aluno 31: Exercícios Experimentais B

C 8) Calcular: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{3x^6}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{3x^6}\Rightarrow\frac{2}{3x}\Rightarrow 0$

Um número que divide por um número muito grande, o resultado tende a zero.

C 9) Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$ $\cancel{\frac{-1}{12}}$

O jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula, que colocava o termo de maior grau em evidência para limites no infinito de funções polinomiais, foi perfeitamente entendido pelo aluno 31. Porém não foi suficiente para que ele distinguisse os dois limites. E o jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador na aula de intervenção, que aplicava diretamente a propriedade para esse tipo de limite, foi entendido. Além do aluno também ter tido o discernimento de que o limite da Questão 9 não gozava da mesma propriedade utilizada na Questão 8. Esse aluno ainda apresenta um registro de representação em linguagem natural para justificar o $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{3x^6}$.

Aluno 32: Exercícios Experimentais A

B 8) Calcular: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

B 9) Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

Difícil a compreensão da aplicação

Aluno 32: Exercícios Experimentais B

C 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$ $= \frac{\lim_{x\to\infty} 2x^5}{\lim_{x\to\infty} 3x^6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5}{3x^6} = \frac{2}{3x} = 0$ //

C 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$ $= \lim_{x\to 1} \frac{2(1)^6+7(1)^5-3(1)^3+(1)^2-4(1)+1}{3(1)^6+(1)^5+3(1)^4-2(1)^3-(1)^2+6(1)+4}$

$$= \frac{2+7-3-5+1-4+1}{3-1+3-2-1+6+4} = \frac{-1}{12} = \boxed{\frac{-1}{12}}$$

Pela declaração exposta pelo aluno nas questões 8 e 9 dos Exercícios Experimentais A, fica exposta sua dificuldade com o jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula. E mais uma vez, o jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador na aula de intervenção, que aplicava diretamente a propriedade para esse tipo de limite, foi rapidamente entendido. Além do aluno também ter tido o discernimento de que o limite da Questão 9 não gozava da mesma propriedade utilizada na Questão 8.

Aluno 35: Exercícios Experimentais A

C 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

um número dividido por infinito é igual a zero

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6 \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}{x^6 \cdot \left(3 - \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{6}{x^5} + \frac{4}{x^6}\right)} = \frac{1.0}{1.3} = \frac{0}{3} = 0 \text{ //}$$

C 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2.(1)^6+7.(1)^5-3.(1)^4-5.(1)^3+(1)^2-4.(1)+1}{3.(1)^6-(1)^5+3(1)^4-2(1)^3-(1)^2+6(1)+4} = \frac{2+7-3-5+1-4+1}{3-1+3-2-1+6+4} = -\frac{1}{12}$$

Aluno 35: Exercícios Experimentais B

C 8) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6\left(\frac{2}{x}\right)}{x^6.(3)} = \frac{\frac{2}{\infty}}{3} \to \frac{0}{3} = 0 \text{ //}$$

C 9) Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$ apenas substitui o valor 1 na função

$$\lim_{x\to 1} \frac{2.(1)^6+7(1)^5-3(1)^4-5(1)^3+(1)^2-4.1+1}{3(1)^6-(1)^5+3(1)^4-2(1)^3-(1)^2+6.1+4} = \frac{2+7-3-5+1-4+1}{3-1+3-2-1+6+4} = -\frac{1}{12}$$

Esse aluno demonstra ter entendido os dois jogos de linguagem utilizados pelos professores. Porém, mesmo já tendo domínio no uso do termo de maior grau em evidência, ele utiliza na questão 8 dos Exercícios Experimentais B, a praticidade do uso da propriedade apresentada no jogo de linguagem da aula de intervenção. O destaque para as resoluções desse aluno, ficou por conta de ele ter apresentado registros de representação em linguagem natural para representar elementos desses jogos.

5.1.2 Análises da Aula 2

AULA DE INTERVENÇÃO 2

IDENTIFICAÇÃO:
AI 2 – Limites – Parte 2 – Duração 01:56:22.

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS DE LINGUAGEM PRESENTES NAS AULAS E OS DESEMPENHOS DOS ALUNOS NOS EXERCÍCIOS:

Aula 2 – Questão 1

Calcular: $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Essa questão está relacionada às formas indeterminadas e propriedades operatórias dos limites. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 2, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 2 transcrito a seguir:

“Às vezes nós temos que eliminar a indeterminação. Limite para x tendendo a 5 de $\sqrt{x} - \sqrt{5}$ sobre x – 5, observe que se eu substituir x por 5 fica $\sqrt{5}$ – $\sqrt{5}$ que é 0, 5 – 5 que é 0 e eu não consigo fazer a conta. Mas se eu multiplicar em cima e embaixo por $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, é o conjugado do de cima, porque isso é uma diferença de quadrados, $(a - b)(a + b)$ é o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, isso vai me fornecer x – 5, que vai se cancelar com esse x – 5 aqui debaixo, fica x – 5 em cima e em baixo, e aqui embaixo vai sobrar 1 sobre $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, que não dá problema para calcular quando x tende a 5, porque é uma soma das duas raízes, então a gente multiplica em cima e embaixo por $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, faz o produto da diferença de quadrado, x – 5 cancela com o debaixo, um sobre $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, x tendendo a 5, a conta fica normal, 1 sobre $2\sqrt{5}$, que se nós racionalizarmos dá $\sqrt{5}$ sobre 10. Bom, isso chama-se eliminar a indeterminação." [*Esse é o jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula para resolução de limites que apresentam uma indeterminação envolvendo subtração de raízes quadradas. Nesse jogo, a ênfase é dada ao caso de fatoração da diferença de quadrados apresentada a partir de um exemplo específico de forma direta.*]

Após a aula de intervenção 2, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 2 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

"A pergunta primeira que não quer se calar é essa aqui: por que que eu tenho que usar o conjugado? Quem desconfia por que que eu tenho que usar o conjugado? Para acontecer isso, olha o que está escrito aqui. Aqui está escrito: alguém menos outro alguém. Está escrito $a - b$ que está multiplicando o conjugado que é $a + b$. Portanto, isso é um produto da soma pela diferença, que resulta a diferença entre dois quadrados. Então a pergunta que eu fiz que não queria se calar: por que que quando tem a diferença de raízes quadradas, eu multiplico pelo conjugado? Porque eu quero que apareça uma diferença de quadrados. E quando aparecer a diferença de quadrados, a raiz vai embora." [*O jogo de linguagem do professor/pesquisador inicia com um desafio, onde busca investigar se os alunos percebem a relação entre a multiplicação pelo conjugado e a utilização de um dos casos de produtos notáveis e, consequentemente, com o caso de fatoração "diferença entre dois quadrados". O professor/pesquisador tenta atrair a atenção dos alunos com expressões do tipo: "A pergunta primeira que não quer se calar" e "a raiz vai embora".*]

"Limite, limite de quem? $\frac{\sqrt{4x-3}-3}{\sqrt{2x-2}-2}$, com x tendendo a 3. Vamos jogar o 3 na expressão para ver se vai dar indeterminação? 3 vezes 4, 12, 12 tira 3, 9, $\sqrt{9}$, 3, 3 tira 3, 0. 2 vezes 3, 6, 6 tira 2, 4, $\sqrt{4}$, 2, 2 tira 2, 0. Deu indeterminação. Esse limite deu indeterminação e envolve diferença entre radicais. Que nesse caso, já veio, privilegiadamente, composto por dois de uma vez só, que é para ninguém reclamar de pobreza. Mas é assim, eu falei a pouco tempinho atrás, deu limite indeterminado de uma funçãozinha que envolve diferença de raízes quadradas, a mente da gente dispara imediatamente o que? Conjugado. Vou ter que usar o conjugado, não tem conversa, quando que eu vou ter que usar conjugado? Quando tiver uma função que envolve diferença de raízes quadradas. Não tem conversa, deu limite indeterminado e envolve subtração de raízes quadradas, o cérebro dispara a necessidade do conjugado. Esse aqui deu 0 sobre 0 e tem diferença de radicais? Tem. Vai precisar de conjugado? Vai. Qual é a diferença desse para aquele outro? Que nesse aqui nós vamos ter trabalho duplicado. Nós vamos precisar de dois conjugados e lá era só um.” [*Esse elemento do jogo de linguagem que fala sobre limites que envolvem diferença entre duas raízes quadradas é proposto pelo professor/pesquisador para exemplificar duplamente a utilização da regra de multiplicação pelo conjugado. Esse trecho da fala do professor/pesquisador: “Que nesse caso, já veio, privilegiadamente, composto por dois de uma vez só, que é para ninguém reclamar de pobreza. Mas é assim, eu falei a pouco tempinho atrás, deu limite indeterminado de uma funçãozinha que envolve diferença de raízes quadradas, a mente da gente dispara imediatamente o que? Conjugado. Vou ter que usar o conjugado, não tem conversa, quando que eu vou ter que usar conjugado? Quando tiver uma função que envolve diferença de raízes quadradas. Não tem conversa, deu limite indeterminado e envolve subtração de raízes quadradas, o cérebro dispara a necessidade do conjugado. Esse aqui deu 0 sobre 0 e tem diferença de radicais? Tem. Vai precisar de conjugado? Vai.” apresenta uma linguagem bastante informal, porém enfática, para que o aluno associe imediatamente a diferença de raízes quadradas ao uso do conjugado.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 1 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 13: Exercícios Experimentais A

C 1) **Calcular**: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}\cdot(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}//$

Aluno 13: Exercícios Experimentais B

C 1) **Calcular**: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}\,\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}//$

Os alunos 1, 18, 21, 30, 31 e 35 não apresentaram dificuldades em nenhum dos jogos de linguagem, como também foi o caso do aluno 13, exceção para pequenos erros na escrita formal.

Aluno 14: Exercícios Experimentais A

B 1) **Calcular**: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Aluno 14: Exercícios Experimentais B

C 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

Aluno 15: Exercícios Experimentais A

B 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

Aluno 15: Exercícios Experimentais B

C 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1\,\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ //

O aluno 23, assim como, os alunos 14 e 15 não entenderam o jogo de linguagem utilizado pelo professor no trecho da videoaula referente a esse assunto e deixaram essa questão em branco nos Exercícios Experimentais A, mas demonstraram perfeito entendimento no jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador, pois dois elementos desse jogo fizeram diferença. Foram eles: ter mostrado o uso do conjugado relacionado ao produto da soma pela diferença de dois termos de forma bem explícita e ter usado um outro exemplo mais exigente para reforçar essa relação.

Aluno 16: Exercícios Experimentais A

E 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{(\sqrt{1}-1)}.(\sqrt{1}+1)}{(\cancel{1-1}).(\sqrt{1}+1)} = 1.1 = \boxed{1}$

Aluno 16: Exercícios Experimentais B

C 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = 0$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{x-1\cdot\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Aluno 34: Exercícios Experimentais A

E 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \to \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \to \frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}$

Aluno 34: Exercícios Experimentais B

C 1) Calcular: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Os alunos 5, 7, 10, 11 e 17 cometeram erros semelhantes aos alunos 16 e 34, não conseguiram entender o conceito de conjugado dentro do jogo de linguagem do professor na videoaula e cometeram muitos erros de cálculo na resolução dessa questão nos Exercícios Experimentais A, demonstrando fragilidade no domínio de conceitos da matemática básica. Assim como os alunos 13, 14, 15, 16 e 34, os alunos 1, 5, 7, 10, 11, 17, 18, 21, 23, 30 e 35 demonstraram perfeito entendimento no uso das regras para a solução desse tipo de limite, a partir do jogo de linguagem utilizado na aula de intervenção. Com destaque para o aluno 34 que utilizou um registro de representação algébrico, além do aluno 7 que utilizou um registro de representação em linguagem natural para demonstrarem o perfeito entendimento da regra a ser usada.

Aula 2 – Questão 4

Defina função contínua com suas próprias palavras?

Essa questão está relacionada ao conceito de continuidade de funções. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 2, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 2 transcrito a seguir:

"Esse exercício[13] motiva a seguinte consideração: nós dizemos que uma função é contínua em um ponto c, se, primeiro de tudo, existe $f(c)$, quer dizer: se c está no domínio. Se existe o limite para x tendendo aquele ponto e se o valor da função no ponto é igual o limite da função no ponto. Então tem três coisas para ser continua: primeiro tem que estar definida no ponto, que é óbvio, se uma função não está definida no ponto, não vou falar nada daquele ponto. Então primeiro imagine que existe a função definida no ponto, imagina que exista o limite para x tendendo ao ponto, imagine que o limite e o valor da função, ambos existem, as duas existências estão garantidas no 1 e no 2, se esses dois são iguais, então a função é contínua." [*O professor na videoaula utiliza o jogo de linguagem padrão para a apresentação do conceito de função contínua. Ou seja, ele apresenta as três condições que devem ser obedecidas para que uma função seja contínua, a partir da função* $f(x) = \begin{cases} 2x+5, se\ x \geq 1 \\ x^2+5, se\ x < 1 \end{cases}$ *como exemplo.*]

---

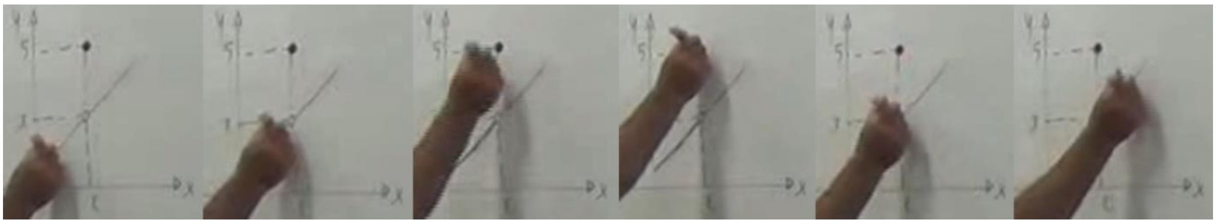
[13] $Calcule\colon \lim_{x\to 1} \begin{cases} 2x+5, se\ x \geq 1 \\ x^2+5, se\ x < 1 \end{cases}$

Após a aula de intervenção 2, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 2 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

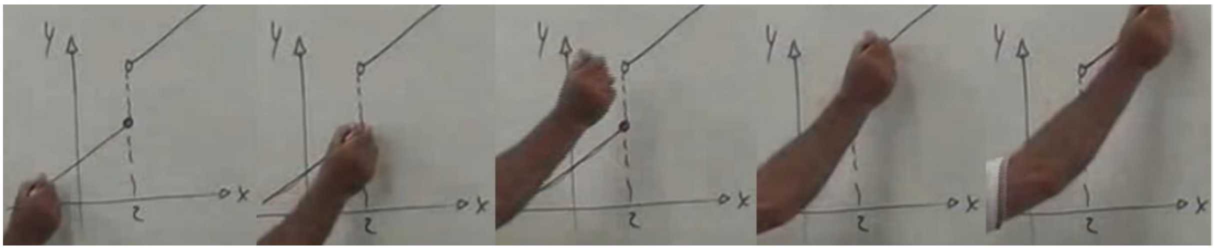
“Só vou acrescentar uma coisinha, porque esse é o conceito não dá para a gente fugir. Mas o que eu vou acrescentar para vocês é isso aqui, ó: se você pegar seu lápis, sua caneta, seja lá o que for, e colocar no início da função, e você conseguir desenhar o gráfico da função inteirinho sem tirar a caneta do papel, lápis do papel, é porque ela é contínua. Aqui eu consegui fazer isso, ó.

Mas aqui eu não consigo, ó.

Perceberam? Tem um buraco, então eu tenho que tirar a caneta, por causa desse buraco e depois continuar. Aqui é a mesma coisa, ó,



esse ainda é pior, faço isso, aí dou um salto lá para esse valor, aí depois volto aqui, então eu tirei ele duas vezes, ó, tirei para ir lá e tirei para voltar e continuar. Então se você for obrigado a tirar o lápis do papel na hora que você está desenhando o gráfico, é porque ela não é contínua. Ela tem falha, seja lá um buraquinho como esse aqui. E um exemplo que não foi mostrado no vídeo, de função que não é contínua e que é muito, muito, muito, muito usada é essa aqui, ó,



por exemplo: seu gráfico começa aqui, está definido no ponto, bonitinho, aí dá um salto e continua, assim. Essa também não é contínua, porque eu venho desenhando a função, chego aqui, eu sou obrigado tirar o lápis do papel, esse ponto também não vai servir para mim, mas eu continuo daqui para a frente. Só de ter tirado o lápis do papel, eu já sei que a função não é contínua." [*Esse jogo de linguagem para apresentação de funções contínuas é bastante informal e caracteriza-se por ser visual, além de se utilizar de vários diminutivos, tais como: "coisinha", "inteirinho", "buraquinho" e "bonitinho", que buscam estabelecer uma proximidade maior com os alunos. Também é usada uma expressão que busca a atenção por meio do exagero, é ela: "que é muito, muito, muito, muito usada".*]

"E agora a gente pode analisar todos os casos, eu vou começar exatamente por esse caso aqui, ó: esse caso é de uma função que não é contínua, porque logo de cara a primeira parte dançou, vocês estão vendo que a primeira parte dançou? Aqui está dizendo que tem que ter os limites laterais e esses limites laterais têm que ser iguais, quando eu venho nesse exemplo, eu pego a vizinhança do 2 aqui, o que vai acontecer? Deixa eu colocar aqui, só para ficar parecido com aqueles, 3 aqui e 5 aqui. Então se eu venho pela direita de 2, as imagens estão indo para onde? Para 5. Então nesse caso, eu falo que o limite lateral dessa função, quando x se aproxima de 2 pela direita fez as imagens se aproximarem de 5, mas se eu fizer a mesma coisa, limite dessa função, quando x se aproxima de 2 pela esquerda, o que vai acontecer? Agora vem pela esquerda, as imagens estão se aproximando de 3. Então o que que aconteceu? Tem limites laterais? Tem. Só que deu valores diferentes. Se deu valores diferentes, qual é a conclusão que eu tiro a respeito disso aqui? Isso aqui ó. Não existe. Por quê? Ele não existe porque os laterais são diferentes. Então se não existe o limite, já falhou na primeira, você nem precisa se preocupar com o resto." [*Ainda em relação ao jogo de linguagem das funções contínuas, o professor/pesquisador aproveita a exposição gráfica e faz a relação de cada gráfico com as condições necessárias para a garantia da continuidade. Ele ainda utiliza, no início da conversa, o termo "dançou" para atrair a atenção dos alunos em relação às falhas nas verificações das condições para a garantia da continuidade.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 4 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 7: Exercícios Experimentais A

E 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Se existe limite a quem x está tendendo

Aluno 7: Exercícios Experimentais B

C 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Deve existir limite laterais iguais para ter um limite e o limite tem que ser igual a função

Aluno 18: Exercícios Experimentais A

B 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Aluno 18: Exercícios Experimentais B

C 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Quando a funcão obedece 3 regras, 1º- a função tem que possuir limite, 2º tem que possuir imagem; 3º o limite e a função devem ser iguais.

Aluno 21: Exercícios Experimentais A

E 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Uma função contínua é aquela que possui um ponto definido no domínio de f, também deve conter o valor de $f(c) = f(x)$ sendo $c = x$.

Aluno 21: Exercícios Experimentais B

C 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Função contínua deve possuir limites dos laterais iguais, a imagem de $f(x)$ deve existir e a imagem de $f(x)$ deve resultar no limite.

Aluno 23: Exercícios Experimentais A

B 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Aluno 23: Exercícios Experimentais B

C 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Função contínua é a função onde não há interrupção no gráfico.

Aluno 32: Exercícios Experimentais A

E 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Quando o valor do ponto e vale o mesmo que a imagem

Aluno 32: Exercícios Experimentais B

C 4) **Defina função contínua com suas próprias palavras?**

Função contínua é a função onde não há interrupção.

Ter introduzido o conceito de continuidade de uma função associando-o ao uso comum do termo “continuidade” pelos alunos e, em seguida, relacionando cada tipo de falha no desenho do gráfico da função a uma desobediência de uma das condições exigidas pela definição de continuidade, foi fundamental para que 19 alunos conseguissem responder à questão 4 dos Exercícios Experimentais B. Tanto que os alunos 23 e 32 se sentiram à vontade para responder essa questão de maneira bem informal. O jogo de linguagem do professor na videoaula que apresenta diretamente as três condições que devem ser satisfeitas para que uma função seja contínua, não foi entendido pela maioria dos alunos que assistiram a essa videoaula. O parágrafo seguinte nos mostra a experiência de um dos alunos na resolução dos Exercícios Experimentais A.

O jogo de linguagem é tão importante que não passa despercebido pelo aluno 29. Nessa pesquisa tivemos o prazer de encontrar nas respostas de um dos questionários aplicados na primeira etapa, as seguintes observações:

1 - Explicação faltando alguns passos;

2 - Falta a fundamentação que justifica o procedimento, e quando tem é muito superficial;

3 - Explicação muito rápida.

O primeiro ponto é muito comum ocorrer em aulas de matemática, pois muitos professores pulam etapas de explicações, pois alegam ser passos triviais. Essa situação vai de encontro a presença de alunos que não estão perfeitamente adaptados à forma de vida esperada pelo professor. Principalmente em turmas numerosas onde podemos praticamente garantir que passos triviais não serão considerados por todos. Quando afirma faltar fundamentação para justificar o procedimento, isso é uma clara demonstração de que as regras do jogo não estão suficientemente claras. Bem como, jogar um jogo numa rotação que não poderá ser alcançada pelo aprendiz também não faz sentido. O aluno se sentirá fora desse jogo e a aprendizagem não ocorrerá. Essas observações ocorreram no questionário apresentado a seguir:

Figura 22. Observações de um voluntário sobre a videoaula 2

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS - *CAMPUS* BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

Exercícios Experimentais – Limites – Parte 2 – A

Voluntário(a):...

De acordo com os conceitos apresentados na videoaula, responda as seguintes questões:

1) Calcular: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2) Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{4senx}{3x} = 0$

$\lim_{x\to 0} = \frac{4}{3}$?

De modo geral os vídeos apresentados em sala de aula tem alguns problemas
→ 1 - Explicação faltando alguns passos
→ 2 - Falta a fundamentação que justifica o procedimento, e quando tem é muito superficial
-3- Explicação muito rápida

3) Calcule $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{\frac{2x^3+2x^2+8}{x^2+2x-4}}$ utilizando os teoremas básicos.

4) Defina função contínua com suas próprias palavras?

Função contínua é toda função com limite definido para $x \to 1$

5) Calcular: $\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x(x+4)} - x]$

6) Calcular: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

7) Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$

Fonte: O autor

5.1.3 Análises da Aula 3

<u>AULA DE INTERVENÇÃO 3</u>

IDENTIFICAÇÃO:

AI 3 – Derivada – Duração 01:19:53.

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS DE LINGUAGEM PRESENTES NAS AULAS E OS DESEMPENHOS DOS ALUNOS NOS EXERCÍCIOS:

Aula 3 – Questão 2

Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?

Aula 3 – Questão 3

Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?

Essas questões estão relacionadas à definição da derivada de uma função. Para resolver essas questões dos Exercícios Experimentais A da aula 3, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 3 transcrito a seguir:

"A gente tem um conceito de variação média de uma de uma grandeza que é o que a gente chama de $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, Δf é a variável dependente e x é a variável independente e a variação daquela grandeza em relação à variação do parâmetro, pode ser variação de preços, preço final menos preço inicial dividido pelo tempo, pode ser a posição de uma partícula, pode ser qualquer grandeza que você tenha essa relação de dependência. Variação da grandeza do valor dependente dividido pelo valor independente. E a gente tem a variação instantânea que é o limite disso quando esse intervalo na variável independente fica muito pequeno, então aqui é o limite para x_1 tendendo a x_2 do $f(x_1)$ menos $f(x_2)$, x_1 menos x_2, isso é a variação média, eu faço o limite para esse x_1 se aproximando desse x_2, limite no sentido que nós estudamos nas aulas anteriores e isso chama-se variação instantânea. É o limite para o Δx tendendo a 0 do Δf sobre Δx. A importância das aulas anteriores está no seguinte: quando você fizer x_1 tendendo a x_2, não vai dar para calcular esse limite por substituição, porque se eu fizer $x_1 = x_2$ da $f(x_2)$ menos $f(x_2)$ que é zero, x_2 menos x_2 que é zero, pela própria construção do conceito de taxa de variação não dá para calcular o limite por substituição direta, a gente recai sempre em um daqueles casos que eu chamei nas aulas anteriores de indeterminação e que a gente tinha a tarefa de, ou usar algum teorema específico, ou eliminar a indeterminação. Então no conceito de derivada, isso vai acontecer sempre." [*Em seu jogo de linguagem na videoaula, o professor busca introduzir o conceito de derivada a partir dos conceitos de variação média e variação instantânea. Para tanto, inicia a conversa buscando atrair a audiência por meio de uma valorização do conceito introdutório, como segue: "pode ser variação de preços, preço final menos preço inicial dividido pelo tempo, pode ser a posição de uma partícula, pode ser qualquer grandeza que você tenha essa relação de dependência"*.]

"Significado geométrico disso: a derivada no ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto de coordenada $(a, f(a))$. Então o significado do cinemático é o que eu acabei de falar, da posição é a velocidade, agora o geométrico é o coeficiente angular da reta tangente. Entender isso com mais cuidado, isso é bem sutil. Você pega uma função, eu quero focar no ponto de abscissa 2, esse ponto, eu gostaria de calcular a reta tangente ao gráfico nesse ponto. Se eu tenho, eu sei que ela passa pelo ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, nesse caso aqui. Eu preciso saber o coeficiente angular da reta para obter equação da reta tangente. Como é que eu obtenho o coeficiente angular? Olha que observação interessante! É fácil obter o coeficiente angular da reta secante ao gráfico, secante precisa de dois pontos. O $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto base, vai ficar fixado. Pegar um ponto auxiliar, no meu exemplo é $(3, 4)$, e vou pegar a reta secante que passa por esses dois pontos, reta secante está em verde aqui, reta secante passando por esses dois pontos. O coeficiente angular da secante é $f(x)$ menos $f(a)$ dividido por x menos a. Esse é o coeficiente angular da secante, quando eu tenho a reta secante que passa por dois pontos se eu pegar o Δf sobre o Δx dá cateto oposto por cateto adjacente em um triângulo aqui e tangente desse ângulo, cateto oposto sobre adjacente é tangente desse ângulo, tangente desse ângulo é o coeficiente angular. Então o coeficiente angular da reta secante é $f(x)$ menos $f(a)$ sobre x menos a. Como que daí eu vou para tangente? Eu vou fazer a secante tender para posição tangente. Como que eu faço a secante tender para posição tangente? O ponto base $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ vai ficar parado, esse ponto vai andar se aproximando do ponto $(2, f(2))$, isso vai me fazer o limite disso quando x tende a a. O jeito de chegar na tangente é fazer a secante se aproximar da tangente fazendo esse ponto descer em direção a esse. Olha como isso é bonito! Como isso é rico! E aí fazer esse ponto tender para cá faz com que o coeficiente da secante, o x tende a a, então esse limite é o coeficiente angular da tangente. Então, olha que bonito! O coeficiente angular da reta tangente é a derivada no ponto. É uma outra maneira de chegar nesse conceito. E aí a equação da reta tangente, o significado geométrico é o coeficiente angular, a equação da reta tangente fica y menos y_0 ou $f(a)$, x menos a, é igual a $f'(a)$, que é equação usual de reta tangente. y menos y_0, x menos x_0 é igual ao coeficiente angular.” [*Esse é o jogo de linguagem do professor na videoaula sobre o conceito de derivada, após ter introduzido via conceitos de variação média e variação instantânea. Para apresentar o conceito por meio da inclinação da reta tangente, o professor faz uso de um exemplo numérico e busca a atenção da audiência por meio de expressões como: “Entender isso com mais cuidado, isso é bem sutil”, “Olha como isso é bonito!”, “Como isso é rico!” e “Então, olha que bonito!”.*]

Após a aula de intervenção 3, essas mesmas questões foram novamente apresentadas aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 3 para novas resoluções. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

“Para a gente estudar derivadas, eu primeiro preciso considerar uma função como essa aqui, uma função como essa, e tomar nessa função dois pontos, um ponto aqui e um ponto aqui, esse ponto, eu vou dizer que ele é um x_0, quando a gente faz em um desenho qualquer a representação de um ponto e usa esses índices aqui, x_0, x_1, x_2, se eu colocar um índice na variável como está aqui, eu estou dizendo que isso é um ponto fixo, eu estou fixando esse valor, eu sei, exatamente, quem é esse valor. Quem é esse valor? x_0. E se ele é x_0, ele está aqui, não vai estar aqui, nem aqui, nem aqui, nem em lugar nenhum, ele vai estar aqui, então isso é um ponto fixo. Se isso aqui, eu chamo de função f, então esse cara quando eu rebato aqui, ele dá $f(x_0)$. Concorda? Beleza! Aí, ao mesmo tempo que eu pego um ponto fixo, eu pego um ponto variável, esse ponto variável, eu vou chamar apenas de x. Então se eu não coloco índice, esse x que eu coloquei aqui, poderia ter posto aqui, aqui, aqui, aqui, aqui, onde eu quisesse. Esse não, mas esse sim. Bom! Esse ponto variável que vocês viram que eu posso colocar em qualquer posição, ele tem imagem $f(x)$. Se eu tenho dois pontos numa curva, o que acontece, se eu traçar uma reta cortando essa curva nesses dois pontos aqui, eu acabo de desenhar uma reta? Secante. Ela é secante, exatamente, por ter tocado o gráfico da curva em dois pontos distintos. Então isso aqui é uma reta secante. Bom! O que que acontece? Eu tenho uma reta secante e faço a seguinte pergunta: com essas informações que estão aqui no quadro, eu sou capaz de dizer qual é a inclinação dessa reta secante? Aí entra um detalhezinho, eu tenho que saber que inclinação de qualquer reta que seja, eu já expliquei isso aqui na matemática básica, quando eu dei função de primeiro grau, eu expliquei isso, falei: olha! Toda reta representa uma função do primeiro grau, e toda função de primeiro grau tem um coeficiente angular, e o coeficiente angular não é o ângulo, é o quê? A tangente do ângulo. Então aqui existe um ângulo, bem aqui existe um ângulo beta, esse ângulo beta não é o coeficiente angular, não é, mas isso aqui é o coeficiente angular, a tangente desse ângulo vai dar o coeficiente angular dessa reta secante. Ficou clara a diferença entre ser ângulo e ser coeficiente angular? O ângulo é a abertura que a reta faz em relação ao sentido positivo do eixo x, é o ângulo, agora a inclinação da reta não é o ângulo, é a tangente desse ângulo e essa inclinação dessa reta é chamada de coeficiente angular, então isso aqui é o coeficiente angular da reta secante. Tem como eu calcular o coeficiente angular da reta secante? Tranquilo, porque olha só, se eu fizer esse desenhinho aqui, fica muito claro como é que eu vou fazer esse cálculo, eu continuo a linha pontilhada aqui, se fechar isso aqui e aqui, eu estou formando um triângulo retângulo, se eu formo um triângulo retângulo, eu tenho o valor desse cateto e tenho o valor desse cateto também. Vou começar por baixo, qual é o valor desse catetinho aqui? É a diferença entre x e x_0, essa diferença aqui vai ser esse cateto. E quem é esse comprimento aqui? É $f(x) - f(x_0)$. Eu tenho um triângulo retângulo, essa aqui é a hipotenusa, não vou precisar dela, mas eu tenho bem definido quem é esse cateto aqui e quem é esse outro cateto. Se o ângulo beta está aqui e essa linha é paralela ao eixo x, então esse ângulo aqui também vale beta, porque retas paralelas cortada por uma transversal, ângulos correspondentes, se aqui vale beta, aqui também vale beta, se isso aqui vale beta, eu acabei de colocar um ângulo dentro de um triângulo retângulo, e aí, se eu tenho um ângulo dentro de um triângulo retângulo, está resolvido minha parada. Para descobrir quem é a tangente desse beta, que é o mesmo beta que está aqui embaixo, basta eu fazer cateto oposto dividido pelo cateto adjacente. Então está aqui, a tangente de beta é o cateto oposto, quem é o cateto oposto? $f(x) - f(x_0)$. Isso é o cateto oposto. E o cateto adjacente? O cateto adjacente é $x - x_0$. Se vocês entenderam até aqui, está quase garantido o conceito de derivadas para vocês. Então o que eu fiz até agora? Peguei uma curva que representa uma função f, marquei dois pontos, tracei uma reta e calculei a inclinação da reta secante, porque se toca dois pontos ela é secante. Existem dois camaradinhas, dois gênios da humanidade, um deles vocês conhecem demais, que é o Isaac Newton, o outro é o Leibniz, um britânico e o outro germânico. Esses dois camaradas sem saber que um estava fazendo a mesma coisa que o outro, simplesmente tiveram essa ideia aqui, foi feita uma pergunta, a pergunta é: como é que eu faço, tendo uma reta secante, se eu tenho esse ponto aqui podendo variar e esse ponto aqui fixo, como é que eu posso, fazendo esse ponto aqui variar na curva e se aproximar desse outro até os dois estarem extremamente próximos, tão próximos, que eu vou achar que minha reta secante, virou uma reta tangente? Porque a ideia é essa aqui: se esse ponto descer, a reta vai mudando a inclinação, vocês estão percebendo? Quando esse ponto chegar muito próximo desse aqui, quando eu falo muito próximo, é muito próximo em termos do que? De limite. Então eu coloco tão próximo, tão próximo, que eu tenho a impressão de que os dois pontos viraram um só. E aí, eu deixo de ter uma reta secante para ter uma reta tangente, a curva está aqui, ó, essa é a curva, eu vou destacar a reta tangente assim: essa reta em azul é a reta tangente. A reta secante foi inclinando, inclinando, inclinando, inclinando até se transformar em uma tangente, porque esse ponto variável chegou tão próximo desse ponto fixo, que os dois se confundiram e eu passei a enxergar uma reta tangente, e enxergando essa reta tangente, eu quis responder a seguinte pergunta: eu não, Newton e Leibniz, quiseram responder à seguinte pergunta: qual é a inclinação dessa reta tangente? Aí, eles perceberam isso aqui, ó, quando eu faço a inclinação da reta tangente, eu tenho um probleminha sério, eu formei esse triângulo, formando esse triângulo, esse ângulo que está aqui, se eu chamar ele de alfa, esse ângulo aqui também vai ser alfa e, aí, esse ângulo alfa dentro desse triangulozinho, ele podia me dar tranquilamente a inclinação da reta tangente, ele podia muito bem me dar a tangente de alfa. Bom! Só que é o seguinte: quando eu olho para o bendito do triângulo, eu continuo tendo aqui embaixo o cateto adjacente, mas quando eu olho aqui, qual é o valor do cateto oposto? Vocês estão conseguindo ver o valor do cateto oposto? Não tem. Por que que não tem? Porque esse ponto aqui não está no gráfico, então se ele não está no gráfico, qual vai ser a imagem desse cara? Não faz parte do gráfico, não tem imagem. Então se não tem imagem, eu não tenho esse valor. Mas eu preciso saber qual é a inclinação da reta tangente. Como é que eu vou saber, se eu não tenho essa medida aqui? Aí entra a genialidade do Isaac Newton e do Leibniz, os caras simplesmente pensaram nisso aqui: a gente tem na mão a inclinação da reta secante, os dois gêniosinhos pensaram assim, então vamos fazer esse x variável tender a x_0, se eu fizer esse x tender a x_0, eu vou converter a reta secante numa reta tangente, então automaticamente, eu vou converter o coeficiente angular da reta secante no coeficiente angular da reta tangente. Então essa tangente de alfa, eles simplesmente pensaram assim, nós vamos pegar a tangente de beta que é $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e vou só fazer isso aqui, ó: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Todo sentido do mundo que só dois gênios poderiam enxergar naquela época. Se eu fizer o x se aproximar do x_0, tanto quanto eu queira, eu vou converter uma reta secante em uma reta tangente, então o coeficiente angular da reta secante vai virar o coeficiente angular da reta tangente. E agora vocês vão entender de vez o seguinte: essa tangente aqui, que é a tangente do ângulo alfa, que é a inclinação da reta tangente, isso aqui é simbolizado como a derivada da função no ponto x_0. Então a inclinação da reta tangente é a derivada da função naquele ponto. Só isso! Então se alguém pergunta para vocês: o que é a derivada da função em um ponto? É a inclinação da reta tangente àquela curva exatamente naquele ponto.” [*Esse é o jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador para introduzir o conceito de derivada, onde faz opção por iniciar pela definição de derivada de uma função em um ponto específico. Ele executa a transformação de uma reta secante em reta tangente e valoriza a contribuição de Isaac Newton e Leibniz para o conhecimento matemático. Em nenhum momento lança mão dos conceitos de variação média e variação instantânea. Mostra a distinção entre ângulo e coeficiente angular. Vários são os diminutivos usados para suavizar o peso da linguagem formal matemática da definição de derivada, tais como: “detalhezinho”, “desenhinho”, “catetinho”, “camaradinhas”, “probleminha” e “gêniosinhos”. Nessa exposição o professor/pesquisador opta por uma conversa com aspecto não acadêmico.*]

“Não fiz derivada de uma função, eu fiz apenas a derivada de uma função em um ponto específico, em um único ponto. Mas aí vem a pergunta: tem como eu calcular a derivada da função inteirinha? Se eu fiz para esse ponto aqui, eu poderia ter feito para esse, para esse, para esse, para esse, para esse, para esse, eu poderia ter feito para qualquer ponto. A ideia vai ser essa aqui, ó: novo gráfico, está aqui o gráfico, aqui está um ponto, aqui está outro ponto, vou passar novamente uma reta secante, essa reta secante tem esse ângulo aqui e eu pergunto para vocês: se eu tenho o ângulo ali e uma secante, eu posso muito bem calcular a inclinação dela, não posso? É só calcular a tangente do ângulo beta. Mas aqui nós vamos fazer uma modificação, gente, ó, atenção para isso aqui agora. Vou fazer uma modificaçãozinha, a modificação é a seguinte: no exemplo anterior, eu tinha chamado esse ponto aqui de x_0, não é isso? E quando eu falei x_0, esse ponto é fixo, não foi? Esse ponto que era fixo, agora vai ser variável. E esse ponto aqui, também vai ser variável, mas a variação vai acontecer dessa maneira aqui, ó: eu estou no x e daqui para cá, essa distância aqui eu vou dizer que corresponde a uma variação de x, a um delta x. Então se eu pego um ponto variável e acrescento uma variação no ponto variável, o que eu consigo aqui na frente? Uma coisa variável também. Concorda? E qual é o valor dessa coisa variável? Eu estou aqui, daqui para cá, da origem para cá, eu tenho x de comprimento e eu estou acrescentando, nesse comprimento, outro comprimentinho. Vai dar x mais delta x. Não é óbvio isso? Então se você tem um pontinho variável e você acrescenta uma outra variaçãozinha em cima dele, a soma dos dois pedaços vai dar a nova localização. Certo? Então se isso está certo, se eu pegar esse cara aqui e rebater aqui, se isso aqui é função f, então isso aqui é $f(x)$. Correto? E se eu pegar esse outro aqui, bate aqui, rebate aqui, o que é isso aqui? $f(x + \Delta x)$. Concorda? Então a imagem de x é $f(x)$ e a imagem de $x + \Delta x$ é $f(x + \Delta x)$. E com essas informações aqui, eu pergunto a vocês: quem é a tangente de beta? Quem é a tangente do ângulo beta? Cateto oposto sobre cateto adjacente. Quem é o cateto oposto? $f(x + \Delta x) - f(x)$. Sobre o delta x, porque o delta x não é essa variação? Se eu fizer $x + \Delta x$ menos x, cancela x com x, só sobra delta x. Isso é óbvio, porque o delta x era a variação. Isso aqui é a inclinação da reta secante, levando em consideração quaisquer dois pontos do gráfico que você queira. Está claro isso? Aqui tinha um ponto fixo, lá não, lá é ponto variável. Então aquela reta secante é qualquer reta secante que você imaginar. Essa não, essa é uma reta secante determinada por esse ponto aqui. Ela vai variar? Vai. Porque esse ponto aqui vai andar, mas ela fica presa aqui e aquela não fica presa, pode ser qualquer ponto da curva inteira. O detalhe agora é o seguinte: isso daqui é inclinação de que reta? Secante. E se eu fizer, eu não vou fazer esse ponto se aproximar desse como eu fiz naquela, eu vou simplesmente fazer uma coisa muito bonitinha, eu vou pegar essa variação de x aqui e vou fazer essa variação de x tender a 0, se essa variação de x tender a 0, o que vai acontecer com a reta secante? Se essa diferença acabar, os dois pontos vão se grudar, essa é a ideia, e os dois pontos se grudando vira uma reta? Tangente. Então se eu pegar a mesma inclinação da secante e fizer o delta x tender a 0, não vai ser mais inclinação da reta secante, vai ser inclinação da reta tangente. Então isso aqui vai dar a derivada da função para qualquer valor de x. Olha a diferença, ó, aqui é a derivada da função inteira e aqui era a derivada da função apenas no ponto x_0." [*Aqui é o jogo de linguagem que o professor/pesquisador utiliza para apresentar a definição de derivada de uma função em um ponto qualquer, ou, simplesmente, derivada de uma função. Esse jogo segue o padrão do jogo utilizado para apresentar a definição de derivada de uma função em um ponto específico. Também com a presença de vários diminutivos, sendo utilizados com a mesma intenção. Dessa vez: "inteirinha", "modificaçãozinha", "comprimentinho", "variaçãozinha"* e *"bonitinha".*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram as questões 2 e 3 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 8: Exercícios Experimentais A

E 2) **Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?**

Se existir limite e ele for finito

B 3) **Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?**

Aluno 8: Exercícios Experimentais B

C 2) **Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?**

Determinando angulo de enclinação tg através de limite $f'(x_0) = tg = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

C 3) **Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?**

Usando o calculo da secante $tg = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

utilizando $\Delta x \to 0$ ou seja

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Δx sendo a variação de x

Aluno 31: Exercícios Experimentais A

E 2) **Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?**

Diz-se derivada de um ponto onde f(x) é um ponto definido

E 3) **Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?**

Define-se que a derivada dum ponto qualquer é o coeficiente angular de um ponto em relação a reta tangente/geometricamente vel

Aluno 31: Exercícios Experimentais B

C 2) Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?

A derivada de uma função é a inclinação da reta tangente neste mesmo ponto dado nesta curva..

C 3) Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?

Definimos que a inclinação da reta tangente em relação a um ponto qualquer, definida por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Para os alunos 8 e 31, o jogo de linguagem que introduziu o conceito de derivada a partir dos conceitos de variação média e variação instantânea, usuais no estudo da Física, não garantiu a diferenciação entre as duas definições solicitadas nas questões 2 e 3. O jogo de linguagem que introduziu o conceito de derivada a partir do conceito de inclinação da reta tangente foi melhor entendido pelos alunos, pois teve cada conceito apresentado separadamente com destaque para suas diferenças. Possibilitou, inclusive, que o aluno 8 apresentasse registros de representação na linguagem formal da matemática nas respostas das questões 2 e 3. Observando que o aluno 31 também apresentou um registro desse tipo em sua resposta na questão 3.

Aluno 18: Exercícios Experimentais A

B 2) Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?

B 3) Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?

Aluno 18: Exercícios Experimentais B

C 2) Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?

É a inclinação da reta tangente naquele ponto.

C 3) Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?

É a inclinação da reta tangente em qualquer ponto.

Aluno 28: Exercícios Experimentais A

B 2) Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?

B 3) Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?

Aluno 28: Exercícios Experimentais B

C 2) **Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?**

É a inclinação da reta tangente naquele ponto.

C 3) **Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?**

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ É a inclinação da reta tangente em qualquer ponto.

Os alunos 18 e 28, além do aluno 9, deixaram ambas as questões 2 e 3 em branco nos Exercícios Experimentais A. Não conseguiram entendimento a partir da introdução do conceito por taxas de variação. Porém, assim como os alunos 8 e 31, entenderam a partir do conceito de inclinação da reta tangente nos moldes como foi apresentado no jogo de linguagem utilizado na aula de intervenção.

Aluno 22: Exercícios Experimentais A

C 2) **Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?**

$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$, onde esse limite tem que ser finito

C 3) **Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?**

Se define pelo coeficiente angular da reta tangente desta ponto.

Aluno 22: Exercícios Experimentais A

C 2) **Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?**

Inclinação da reta tangente nesse determinado ponto.

C 3) **Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?**

Inclinação das retas tangentes de uma determinada função sem uma posição definida.

É importante destacar que o aluno 22 não apresentou dificuldades de entendimento do conceito de derivada em nenhum dos jogos de linguagem utilizados.

Aula 3 – Questão 4

Quais são as notações para a derivada de uma função?

Essa questão está relacionada à definição da derivada de uma função. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 3, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 3 transcrito a seguir:

“Antes de continuar com as interpretações vamos fazer alguma continha para ver exemplo de função que é derivável, função que não é derivável. A notação para isso vai ser $f'(c)$ ou $\frac{df}{dx}$ no ponto c, justamente o limite do $f(x)$ menos $f(c)$, x menos c, limite da razão incremental. Essas são as duas notações clássicas, existe também uma notação que é $\dot{f}$, um pontinho em cima, mas é bem menos usado.” [*Nesse jogo de linguagem, o professor na videoaula apresenta de maneira direta as notações para a derivada de uma função em um ponto c, mas quando faz referência ao limite da razão incremental, pode induzir o aluno a confundir notação com definição.*]

Após a aula de intervenção 3, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 3 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram ao trecho dessa aula transcrito a seguir:

“E o símbolo? Vocês perceberam o símbolo aqui, $f'(x_0)$? Isso é símbolo de derivada. Como aqui dentro está x_0, é a derivada da função no ponto x_0. E para ficar bem completo, existe também essa forma de representar $\frac{df(x_0)}{dx}$, esse símbolo aqui é a mesma coisa que esse.” [*Em seu jogo de linguagem, o professor/pesquisador também apresenta a notação de derivada de maneira direta, mas fica restrito a notação da derivada de uma função em um ponto específico. Deixando para o aluno a conclusão, a partir das definições que foram apresentadas, de que basta trocar x_0 por x para obter a notação da derivada de uma função em um ponto qualquer.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 4 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 1: Exercícios Experimentais A

E **4) Quais são as notações para a derivada de uma função?**

a função deve ser contínua e o limite no ponto dado deve existir e ser finito.

Aluno 1: Exercícios Experimentais B

C **4) Quais são as notações para a derivada de uma função?**

$f'(x)$ e $\frac{df(x)}{dx}$

Aluno 7: Exercícios Experimentais A

E 4) **Quais são as notações para a derivada de uma função?**

Para existir derivada tem que ser um limite finito.

Aluno 7: Exercícios Experimentais B

C 4) **Quais são as notações para a derivada de uma função?**

$f'(x) = \frac{Dy}{Dx}$

Nas respostas dadas pelos alunos 1 e 7 percebemos que os alunos não conseguissem distinguir a simbologia da própria definição, a partir do jogo de linguagem utilizado na videoaula. Na aula de intervenção foi usada uma linguagem mais direta sobre a forma de simbolizar derivada. Isso ajudou em um entendimento rápido, que fez muitos alunos responderem à questão 4 sem dificuldades.

Aluno 10: Exercícios Experimentais A

B 4) **Quais são as notações para a derivada de uma função?**

Aluno 10: Exercícios Experimentais B

C 4) **Quais são as notações para a derivada de uma função?**

$f' = \frac{df}{dx}$

O caso do aluno 10 representou um exemplo extremo de nenhuma tentativa de se usar o jogo de linguagem da videoaula. Não houve entendimento ou até mesmo confusão com o próprio conceito de derivada, como fizeram os alunos 1 e 7.

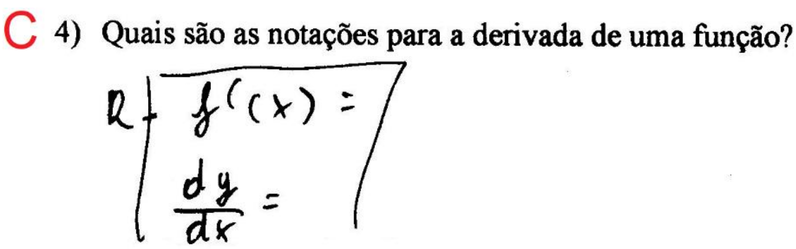
Aluno 35: Exercícios Experimentais A

C 4) **Quais são as notações para a derivada de uma função?**

$f'(x) \rightarrow$ f linha de x

$\frac{df}{dx} \rightarrow$ derivado da função em relação a x

Aluno 35: Exercícios Experimentais B


C 4) **Quais são as notações para a derivada de uma função?**

R/ $f'(x) =$

$\frac{dy}{dx} =$

Na resolução dessa questão, o aluno 35 demonstrou, assim como os alunos 13, 21, 26, 29, 30, 31 e 36, não ter tido dificuldades com nenhum dos jogos de linguagem. Inclusive na resolução dessa questão nos Exercícios Experimentais A, utilizou registros de representação em linguagem natural associados ao respectivo registro simbólico.

5.1.4 Análises da Aula 4

AULA DE INTERVENÇÃO 4

IDENTIFICAÇÃO:
AI 4 – Regras de Derivação – Parte 1 – Duração 32:51.

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS DE LINGUAGEM PRESENTES NAS AULAS E OS DESEMPENHOS DOS ALUNOS NOS EXERCÍCIOS:

Aula 4 – Questão 1

Calcule a derivada da seguinte função: $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

Essa questão trata das regras de derivação de uma função constante, da função identidade e de uma função potência, além das propriedades da derivada de uma soma de funções e do produto de uma constante por uma função. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 4, os alunos assistiram aos trechos da videoaula 4 transcritos a seguir:

"Vou fazer um exemplo de uma função do tipo polinomial, x^4, vocês podem observar que há por trás disso uma estratégia e que vai funcionar igualzinha, se for x^5 ou x^6 com adaptação mais simples. Então pensemos na função x^4, eu quero calcular a derivada no ponto p, é o limite para x tendendo a p, a função calculada em x, que é x^4, p^4, e x menos p. Nas nossas aulas de matemática básica nós recordamos a estratégia de fatoração de uma expressão desse tipo: x elevado à potência menos y elevado a mesma potência. E esse x^4 menos p^4 se fatora assim: x

menos p, e aí uma série de termos de grau 3 começando com toda potência em x, x^3, aí vai diminuindo uma unidade no expoente de x e passando para o expoente do p, que fica x^2p, xp^2 e p^3, todos os sinais de mais, esse x menos p cancela com esse x menos p, sobram quatro termos, não é coincidência, quatro, porque aqui era x^4, se eu tivesse fazendo com x a quinta, sobrariam cinco termos, todos os termos são de grau 3, x está tendendo a p, já cancelamos o x menos p, não tem mais indeterminação, todos os termos vão ficar iguais a p^3, porque o x está atendendo a p e todos eles têm soma de expoente 3, e eu fico com quatro termos p^3, então a derivada é $4p^3$, se eu tivesse fazendo com x^5, eu teria cinco termos de ordem 4, de grau 4, e a derivada daria $5p^4$. Isso vale para qualquer p, então eu vou agora escrever com a variável x, eu digo que se a função é a função x^4, a derivada em qualquer p é $4p^3$, isso cria uma nova função, que eu vou escrever como variável x, que é a função derivada, que é $4x^3$, então dada uma função do tipo potência, x elevado a um expoente, a derivada foi obtida abaixando esse expoente, 4, e uma unidade a menos, isso não é uma regrinha que vem do nada, ela vem daquela fatoração que a gente acabou de fazer. Isso vale para qualquer expoente que eu coloque aqui no lugar do 4, se eu colocar x^5, a regra vai ser que a derivada é $5x^4$ e, na verdade, vale para qualquer expoente, mesmo que não seja um número inteiro. Essa regra de derivação, ela, é bastante ampla e eu vou em seguida fazer vários exemplos com diferentes expoentes. Importante, então, observar que vale para qualquer expoente, esse expoente não precisa ser inteiro, eu acabei de fazer um x^4, estou observando que valeria para qualquer expoente inteiro do tipo x^5 ou x^6, mas na verdade vale para qualquer expoente, nós vamos fazer vários exemplos deste tipo.” [*Aqui está o jogo de linguagem do professor na videoaula para apresentar a regra da derivada de uma função potência. O elemento de destaque nesse jogo é a fatoração de uma diferença de potências de mesmo expoente, mostrada a partir de um exemplo, com comentário de que essa técnica foi apresentada nas aulas de matemática básica. Destaca em sua fala que essa regra pode ser generalizada para funções potência com expoente não inteiro, indicando que fará vários exemplos para comprovar essa generalização.*]

“Algo semelhante ocorre com a multiplicação por constante, quando eu multiplico uma função por uma constante a derivada é a própria constante vezes a derivada que já existia, isso significa, que a constante, ela não afeta a derivação, eu tenho constante vezes função, na hora de derivar fica constante vezes a derivada. Demonstração é parecida com a anterior, faça o limite da razão incremental, tem uma constante que eu posso pôr em evidência, constante vezes f, constante vezes f, ela pode ser posta em evidência, e a outra parte, $f(x)$ menos $f(p)$, x menos p, limite para x tendendo a p é a derivada, então essa constante ficou em evidência e aparece multiplicando a derivada da função. Então as primeiras propriedades operatórias de derivadas, vocês vejam bem que são fáceis de serem demonstradas.” [*Esse é o jogo de linguagem utilizado pelo professor para apresentar a regra de derivação do produto de uma constante por uma função. Ele faz a apresentação da regra de maneira genérica, por meio de um paralelo com a demonstração da regra da potência, comentando que as primeiras propriedades operatórias de derivadas são fáceis de serem demonstradas.*]

Após a aula de intervenção 4, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 4 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

“Agora essa daqui é a vedete do show. Essa daqui é a coisa mais importante que a gente tem em regras de derivação. Para vocês entenderem isso aí, eu preciso fazer uma coisinha antes, que é essa: como é que eu faço para desenvolver isso aqui, ó? Vai dar ela mesma. Ou melhor, vou começar logo do 0. Quanto dá $(x+h)^0$? 1. Quanto dá $(x+h)^1$? Ela mesma. Quanto dá $(x+h)^2$? Quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo. Perfeito? Quanto dá $(x+h)^3$? Cubo do primeiro, mais 3 vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo, mais 3 vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo, mais o cubo do segundo. Perfeito? Esses casos aqui, principalmente o segundo e o terceiro são casos de produtos notáveis, que são estudados lá no oitavo ano do Ensino Fundamental. Mas daqui para a frente, não. Se eu escrever $(x+h)^4$, como é que vai ficar desenvolvido isso aqui? x^4, mais 4 vezes x^3h, mais 6 vezes x^2h^2, mais 4 vezes xh^3, mais h^4. Perfeito? Ô, gente! Eu posso fazer a quinta potência também. A quinta fica de que maneira? x^5, mais 5 vezes x^4h, mais 10 vezes x^3h^2, mais 10 vezes x^2h^3, mais 5 vezes xh^4, mais h^5. Isso que nós estamos fazendo aqui é desenvolvimento do Binômio de Newton. Se vocês prestaram atenção, bonitinho, o expoente que aparece aqui, aqui, aqui e aqui, ele começa a potência de maior grau, e ele vai decrescendo, aqui ele era 2, aí o x passou ter 1 como expoente e aqui tem o x também, só que ele está elevado a 0, por isso que ele sumiu, então era 2, 1 e 0, só que o 0 não precisa escrever. E aí, o h é o contrário, o h começa com h elevado a 0, que não precisa escrever, h à primeira e depois fica h à segunda, então enquanto a primeira variável tem o expoente decrescente, a segunda variável tem o expoente crescente formando parzinho com a primeira variável. Aqui é a mesma coisa, 3, 3, 2, 1, 0, sumiu, de trás para a frente, 3, 2, 1 e 0 que, ele, não precisa ser escrito aqui, h elevado a 0, que dá 1. O 4, 4, 3, 2, 1, 0 e o h ao contrário, 4, 3, 2, 1, 0. O x, 5, 4, 3, 2, 1, 0, o h, 5, 4, 3, 2, 1, 0, e vai sempre assim. O que muda são os coeficientes, esses coeficientes que a gente escreve aqui, eles saem do Triângulo de Pascal. O Triângulo de Pascal é esse aqui: 1; depois 1 e 1; 1, você soma isso aqui dá 2 e 1; 1, sempre começa com 1, você soma isso aqui, dá 3, você soma isso aqui, dá 3, e acaba com 1; começa com 1, você soma isso aqui, dá 4, você soma isso aqui, dá 6, você soma isso aqui, dá 4, e termina com 1; sempre começa com 1, acaba com 1 e os termos intermediários, eu vou obtendo das somas, então o próximo, 1; qual seria o próximo aqui? 5, 10, 10, 5, 1; se eu quiser a sexta linha aqui, a sexta não, no caso vai ser a sétima linha, porque começa a partir do 0, sétima linha seria 1, 6, 15, 20, 15, 6 e 1; e dessa maneira você vai formando o Triângulo de Pascal. De onde é que saíram esses valores todos? Esses valores todos aqui, eles saem do Triângulo de Pascal, mas escrito assim, ó: $\binom{0}{0}$; depois $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$; depois $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$; $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$; e dessa maneira é formado o Triângulo de Pascal. O Triângulo de Pascal não são os números colocados do jeito que eu fiz, o Triângulo de Pascal são os números binomiais, quando você resolve um número binomial desse, aparece esses valores aqui. Quem lembra qual é a fórmula de número binomial? É n fatorial sobre n menos k fatorial vezes k fatorial. Quem viu isso aqui no Ensino Médio deve ter visto isso aqui também e fazendo o cálculo de cada valor desse usando essa fórmula dá esse triângulo aqui. Quem não viu, é uma matéria imensa para ser estudada, então o que eu peço a vocês, paciência, só memorizem esse triângulo, que esse triângulo aqui, desse jeito, já resolve o problema. Esse triângulo já resolve o problema. Então é o seguinte: vocês viram como eu desenvolvi, certo? Só que para fazer o exercício que vai aparecer aqui, eu vou jogar essa coisa bonita dentro da definição de derivadas e eu quero ver como vou usar esse negócio dentro da definição de derivadas.” [*Esse é um elemento do jogo de linguagem de apresentação da regra de derivação de funções potência. Aqui o professor/pesquisador fala sobre o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal, jogos de linguagem matemáticos do Ensino Médio. Esses conceitos são fundamentais para a demonstração da regra de derivação de funções potência. Expressões como: “Agora essa daqui é a vedete do show”, “Essa daqui é a coisa mais importante que a gente tem em regras de derivação” e “coisa bonita”, além dos diminutivos: “coisinha”, “bonitinho” e “parzinho”, aparecem nessa comunicação para chamar os alunos mais para dentro da conversa.*]

“Então vai ser assim, ó: nós vamos fazer a derivada da função mais importante para cálculo de derivadas, que é a função potência. Então aplicando limite, $f'(x)$ vai ser limite de $f(x+h)$ menos $f(x)$, sobre h, com h tendendo a 0. Então eu vou fazer isso aqui, simplesmente colocando, no lugar de x vai entrar $x+h$. Então eu vou ter $x+h$ elevado a n, essa coisa aqui dentro da função dá isso aqui, menos a própria função, menos x elevado a n. Tudo isso, opa, cometi um erro aqui, derivada é o limite, se eu não coloco o limite aqui, eu não estou derivando. Então vai ser, eu joguei aqui, deu $x + h$ elevado a n, menos ela própria, dividido por h. Então $f'(x)$ vai ser igual a limite de h tendendo a 0 e aí, nessa hora, é que eu preciso saber como se desenvolve o Binômio de Newton para um expoente qualquer, isso que eu fui fazendo com vocês aqui, a gente faz aqui igualzinho, se eu fizer igualzinho, qual é o comportamento das variáveis? Começa com expoente máximo a primeira variável e vai decrescendo até zerar, aí faz a outra ao contrário, então vamos ter isso aqui: x elevado ao expoente máximo n, qual seria o expoente do h? 0. Não precisa escrever, mas já que coloquei aqui, fica então; quem o próximo termo? x elevado a n menos 1, está caindo uma unidade, enquanto o h vai subir uma unidade, h vai ficar 1; quem vai ser o próximo termo? x elevado a n menos 2, vezes h elevado a que? h elevado a quanto? 2. Então olha só, o expoente do x está caindo de 1 em 1 e o expoente do h está subindo de 1 em 1 e, assim, vai até chegar ao final, o que vai ser no final aqui? Como é que vai ficar no final aqui? Vamos ver, aqui eu vou colocar ponto, ponto, ponto, mais, como é que vai ficar no final aqui? Percebam que o expoente do x está caindo, caindo, caindo, lá na frente, lá na frente, ele vai ficar x elevado a 0, vezes h elevado a quanto? n. Exatamente. O expoente do h foi crescendo até chegar no n e o expoente do x foi caindo até chegar no 0. Só que falta umas coisinhas aqui, o que que falta? Falta os coeficientes. E os coeficientes são aqueles termos do Triângulo de Pascal em forma de binômio. Então o primeiro aqui, seria quem? $\binom{n}{0}$, esse é $\binom{n}{1}$, esse aqui é $\binom{n}{2}$, até chegar no último que vai ser quem? $\binom{n}{n}$. Esse trambolho desse tamanho é o desenvolvimento dessa coisinha aqui. Perfeito? Tudo isso, menos x elevado a n, sobre h. Que que vai acontecer com esse limitão? x elevado a n, ele vai cancelar com esse x elevado a n, porque o número binomial de ordem n e classe 0, $\binom{n}{0}$, vale sempre 1, toda vez que a classe é 0, vale 1. Se a gente lembrar do Triângulo de Pascal, o Triângulo de Pascal começa sempre por 1. Então é 1 e depois vai mudando os valores aqui. Então esse aqui é 1, aqui eu tenho x elevado a n, vezes 1, que dá x elevado a n, que eu estou cancelando com x elevado a n, todo o resto que sobrou tem o h envolvido na fórmula. Então o que eu vou fazer com esse h? Colocar em evidência. Então vai ficar limite com h em evidência, vai sobrar quem? Esse h ficou em evidência, vai dar $\binom{n}{1}$, vezes x elevado a n menos 1; esse outro, $\binom{n}{2}$, x elevado a n menos 2, com h elevado à primeira, mais, ponto, ponto, ponto, no final vai ficar o que aqui? $\binom{n}{n}$, x elevado a 0 dá 1 e aqui fica h elevado a quanto? n menos 1, porque um foi para evidência.

Fechou isso aqui, tudo sobre h, com h tendendo a 0. Resultado dessa boniteza vai ser: sai h com h, e se eu jogar o limitão aqui, ó, em tudo que tem h vai zerar, porque o h está tendendo a 0, aqui zera, aqui vai zerar, aqui tem h, vai zerar, todo mundo que está nesse meio tem h, todos vão zerar e só vai sobrar esse cara que não tem h, quem é esse cara que sobrou? É $\binom{n}{1}$, x elevado a n menos 1. Se você usar a fórmula de número binomial, esse valor aqui vai dar o n. Toda vez que um número binomial tem classe 1, o resultado dele é a própria ordem, isso é teoria de números binomiais do Ensino Médio, toda vez que a classe é 1, a ordem é o valor do número, x elevado a n menos 1. Aqui está a fórmula. Está demonstrada a fórmula para esse bonito e daqui para frente, eu não quero saber mais desse limite, não vou usar esse limite nunca mais."

[*Esse é o jogo de linguagem da regra de derivação da função potência, a partir do elemento do jogo mostrado no jogo anterior. Mesmo com toda a sequência de passos lógicos na demonstração da fórmula, palavras e expressões de um jogo de linguagem auxiliar não faltam nessa forma de se comunicar do professor/pesquisador. Palavras como: "igualzinho", "coisinhas", "limitão"* e *"boniteza"; e expressões* como: *"Então vai ser assim, ó: nós vamos fazer a derivada da função mais importante para cálculo de derivadas", que inicia o jogo buscando prender a atenção do aluno,* e *"Está demonstrada a fórmula para esse bonito e daqui para frente, eu não quero saber mais desse limite, não vou usar esse limite nunca mais",* que *finaliza o jogo de uma forma dramática, tentando destacar a importância do domínio da regra de derivação apresentada.*]

"Olha gente! Fora isso, a aula dele encerra com esse assunto aqui, ó, vou chamar atenção mais uma vez, não vão confundir, pelo amor de qualquer coisa, a aula dele encerrou com a regra do produto, não foi? A regra do produto. Eu só quero que vocês não façam isso aqui, gente, ó, olha só! Vou dar um exemplo aqui, só para comentar o que eu quero para vocês não caírem nessa, ó: $f(x)$ é igual a 7 vezes seno de x, tem muita gente, que o professor pode se esgoelar de tanto falar isso, mas ele continua cometendo o mesmo erro, olha para cá e fala: tem um produto, se tem um produto, eu vou usar a regra do produto, ô gente, tem um produto? Tem. Mas é entre uma função e uma constante. É regra do produto? É. Se você quiser usar a regra do produto vai dar certo? Vai. Mas você vai dar um tiro de canhão para matar uma formiga. Porque, como é a regra do produto? Se eu usar a regra do produto vai ser assim: primeira vezes a derivada da segunda, derivada de seno é cosseno, mais a segunda vezes a derivada da primeira, quem é a primeira? É uma constante. Qual é a derivada de uma constante? 0. Então, percebam que por conta dessa constante, essa parte aqui zerou. Então sobrou apenas que a derivada dessa função é 7 cosseno de x. E o que é 7 cosseno de x? É a constante que estava aqui bonitinha, que ficou esperando eu apenas derivar a função e a derivada de seno é cosseno. Acabou. Está feita a derivada.” [*Aqui está o jogo de linguagem do professor/pesquisador para apresentar a regra de derivação de uma constante por uma função. O destaque nessa comunicação está no estardalhaço que o professor/pesquisador faz para que o aluno não aplique a regra de derivação do produto entre duas funções quaisquer para derivar um produto em que uma das funções é uma constante. Para tanto, faz uso das expressões: “vou chamar atenção mais uma vez, não vão confundir, pelo amor de qualquer coisa”, “para vocês não caírem nessa”, “tem muita gente, que o professor pode se esgoelar de tanto falar isso, mas ele continua cometendo o mesmo erro”, “Mas você vai dar um tiro de canhão para matar uma formiga” e “É a constante que estava aqui bonitinha, que ficou esperando eu apenas derivar a função” para chamar a atenção dos alunos.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 1 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 8: Exercícios Experimentais A

E 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$f'x = 4x^3 - \frac{2}{2x^2} - \frac{8}{1} + 1 + 0$

Aluno 8: Exercícios Experimentais B

C 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$y = 4x^3 + 6x^{-4} + 8x^{-2} + 1$

$y = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^2} + 1$

Aluno 17: Exercícios Experimentais A

E 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$4x^3 - \frac{2}{3x^2} - 8 + 1$

$\boxed{4x^3 - \frac{2}{3x^2} - 7}$

Aluno 17: Exercícios Experimentais B

C 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$x^4 - 2x^{-3} - 8x^{-1} + x + 2$

$4x^3 + 6x^{-4} + 8x^{-2} + 1$

$y' = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^2} + 1$

Aluno 19: Exercícios Experimentais A

B 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$4x^3$

Aluno 19: Exercícios Experimentais B

C 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$x^4 + 2x^{-3} - 8x^{-1} + x + 2$

$4x^3 - 6x^{-4} + 8x^{-2} + 1$

Aluno 21: Exercícios Experimentais A

E 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x^1 + 2$

$f'(x) = x^3 - \frac{2}{3x^2} - \frac{8}{1x^0} + 1 + 0$

$f'(x) = x^3 - \frac{2}{3x^2} - 8 + 1 = f'y = x^3 - \frac{2}{3x^2} - 7$

Aluno 21: Exercícios Experimentais B

C 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$f(x) = x^4 - 2x^{-3} - 8x^{-1} + x^1 + 2$

$f'(x) = 4x^3 + 6x^{-4} + 8x^{-2} + 1$

$f'(x) = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^{-2}} + 1$

Aluno 30: Exercícios Experimentais A

E 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$y = \left(x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x^1 + \cancel{2}^{0}\right)$

$y = 4x^3 -$

Aluno 30: Exercícios Experimentais B

C 1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

$y = x^4 - 2x^{-3} - 8x^{-1} + x + 2$

$y' = 4x^3 - (-6x^{-4}) - (-8x^{-2}) + 1$

$y' = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^2} + 1$

O jogo de linguagem utilizado na videoaula priorizou apenas dois elementos: 1º) apresentar a demonstração da regra da potência utilizando, como exemplo, a derivada de $f(x) = x^4$, onde o foco da demonstração era a fatoração da diferença entre potências de mesmo expoente; 2º) comentar a regra da derivada do produto de uma constante por uma função. Para os alunos 8, 17, 19, 21 e 30, além dos alunos 14 e 16, esses elementos do jogo de linguagem do professor na videoaula não foram suficientes para que eles obtivessem a derivada dessa função. Na aula de intervenção, o professor/pesquisador optou por demonstrar a regra da potência utilizando o desenvolvimento do Binômio de Newton e por detalhar a regra do produto de uma constante por uma função. A opção por detalhar, utilizando outros exemplos, e não apenas comentar, foi crucial para que muitos alunos conseguissem calcular a derivada dessa função. Foi um elemento efetivo nesse jogo de linguagem.

Aula 4 – Questão 2

Calcule a derivada da seguinte função: $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

Essa questão está relacionada à regra de derivação de uma função potência, além das propriedades da derivada de uma soma de funções e do produto de uma constante por uma função. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 4, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 4 transcrito a seguir:

“Então aqui já tem alguns exemplos para mostrar a amplitude desta regra, se eu tivesse x^{10}, faria aquele mesmo limite, aquela mesma fatoração e a derivada era $10x^9$. Se eu tenho raiz de x, essa é uma função que é importante vocês estarem muito familiarizados com a derivada de raiz, ela aparece muito e, aí, é bom que a gente rapidamente consiga escrever a derivada. Raiz de x, a derivada vai ser 1 sobre 2 raiz de x e vamos ver por quê. Porque raiz de x elevado a meio, pela regra que nós acabamos de analisar a derivada eu abaixo o expoente meio por isso que vai ter esse 2 aqui no denominador e o x elevado a uma unidade a menos no expoente, sempre subtrai uma unidade no expoente quando a gente deriva, como eu tinha expoente meio, quando eu subtraio 1 dá menos meio e, expoente negativo é 1 sobre, então esse x elevado a meio vem para o denominador, x elevado a meio é raiz de x, 1 sobre 2 raiz de x. Olha para essa função agora, raiz quinta de x ao quadrado. Como é que eu vou derivar? Eu não olho como uma raiz, eu transformo numa potência, então eu escrevo x elevado a $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, essa propriedade de raízes de ordens e com expoentes aqui, nós analisamos em uma aula lá na nossa introdução na matemática de revisão de matemática básica, x elevado a $\frac{2}{5}$ abaixamos o expoente $\frac{2}{5}$, por isso vai ter esse $\frac{2}{5}$ nessa fórmula final e x elevado a uma unidade a menos, $\frac{2}{5}$ menos 1, quando você faz $\frac{2}{5}$ menos 1, fica menos $\frac{3}{5}$, de novo esse expoente é negativo, então vai ser 1 sobre e no denominador a gente vai ter raiz quinta, porque o denominador aqui é 5, de x^3, então fica $\frac{2}{5}$ raiz quinta de x^3 no denominador.” [*Esse é o jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula para apresentar a derivação de funções que apresentam radicais. Ele inicia apresentando uma regra imediata para a derivação de uma raiz quadrada, e em seguida utiliza um exemplo para derivar uma raiz que não é quadrada. Para isso, recorre à regra de derivação da função potência, onde refere-se a conceitos de matemática básica vistos nas aulas de revisão para manipular radicais.*]

Após a aula de intervenção 4, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 4 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram ao trecho dessa aula transcrito a seguir:

“Bom! Para encerrar essa matéria, o que o pessoal tem muita dificuldade é com a questão dos expoentes fracionários, dos expoentes negativos, quando, por exemplo, eu preciso fazer a derivada de uma função como essa aqui, ó, quero derivar agora no terceiro exemplo, essa funçãozinha: $f(x)$ igual a 7 sobre x a sexta mais 1 sobre raiz cúbica de x ao quadrado. Bom!

Eu tenho essa função para derivar, primeira coisa que eu preciso fazer é ajeitar a função e colocar nesse formato aqui, ó, porque esse formato aqui resolve minha paradinha através dessa regrinha. E eu sei que toda vez que eu tenho uma fração e tem potências envolvidas ou radicais, eu posso transformar tudo em potência e mudar de posição, numerador, denominador, de acordo com a necessidade, só que eu tenho que lembrar que toda vez que eu mudo uma potência de posição dentro de um numerador ou de um denominador, eu sou obrigado a trocar o sinal do expoente, então vai ficar, ajeitando a função, ó, $f(x)$ vai ser igual, essa potência 6 aqui em baixo, eu posso mandar ela para o numerador, só que ela vai com expoente negativo, toda troca que eu fizer de posição entre numerador e denominador, a potência muda de sinal, se ela tem expoente positivo, mudou, fica com expoente negativo, se ela tivesse expoente negativo e mudasse, ela ficaria com expoente positivo, essa regra é básica lá no Ensino Fundamental. Essa outra aqui, antes de fazer a mudança, eu tenho que converter o radical em uma potência de expoente fracionário, porque todo radical nada mais é do que uma potência de expoente fracionário e aí tem aquele macetinho, como que é o macetinho? Quem está no sol, quem está no sol é o 3, vai para a sombra e quem está na sombra é o 2, vai para o sol. Então a raiz cúbica de x ao quadrado, nada mais é do que x elevado a dois terços. E aí, para ficar prontinho para usar a regra da potência, eu tenho que dar um jeito de levantar esse troço aqui, mandando ele para cima, como aqui está 1, não vai atrapalhar em nada, então vai ficar x elevado a menos dois terços. Algum problema até aqui nessa mudança? Se você sabe fazer isso aqui, você vai fazer um monte de exercícios de derivadas. Estão prontos para eu utilizar apenas a regra da potência. Então, se é só usar a regra da potência, vamos fazer a derivada, derivada vai dar, que regra que eu uso aqui? Deixa a constante esperando e deriva x elevado a menos 6, o professor insistiu várias vezes no vídeo que a gente fizesse esse negócio direto, ao mesmo tempo que você aplica a regra da potência, você já faz o produto com essa constante, então esse menos 6, ele vai cair, não vai? Se ele cai aqui, ele vai cair multiplicando o 7, se ele cai multiplicando o 7, menos 6 vezes 7, menos 42, já faz direto. Perfeito? E o x vai ficar elevado ao expoente anterior menos 1, se eu tenho o menos 6 e tiro 1, menos 7, exatamente. Então está aí, já usei a regra da potência na primeira parcela, bonitinho, sem problema nenhum. Na segunda, aqui na frente, eu não escrevi, mas o coeficiente é 1, o que descer aqui multiplicando o 1, dá o próprio valor que descer, então quem vai descer nesse aqui? Menos dois terços, menos dois terços desceu, multiplicando 1 dá ele mesmo, vezes x elevado a menos dois terços menos 1, menos dois terços menos 1, menos cinco terços. Gente, não sofra com isso não, você olha para isso e fala, ah, eu tenho que tirar o mínimo, oh, não, quando tiver inteiro envolvido, denominador multiplica e o resultado você soma com esse aqui, 3 vezes menos 1, menos 3, somado com menos 2 dá menos

5 e repete o denominador. Essa é a maneira de fazer rápida quando você tem um inteiro. Bom! Isso aqui já é resposta do exercício? É. Mas acontece, se você está fazendo uma prova de múltipla escolha, pode ser que a resposta não esteja assim. Se o problema que deu origem, ele só tinha expoente positivo e radical, eu não posso ficar esperando deixar uma resposta com expoente negativo e sem radical. Já que tem expoente fracionário, isso vai ter radical envolvido. Então eu volto no que era antes, volto o que era antes não, eu faço ficar expoente positivo e faço aparecer radical. Então esse expoente negativo, se eu mandar o x para baixo, vai ficar menos 42 sobre x elevado a sétima, pronto. E esse daqui? Menos 2 sobre 3, e o x que está elevado a expoente negativo, vai descer e o expoente vai ficar positivo. Perfeito? Então para finalizar, aqui não tem absolutamente nada para fazer, não precisa fazer nada aqui, copia, mas aqui eu tenho o que fazer, esse x elevado a cinco terços é a raiz cúbica, quem está na sombra vai voltar para o sol e quem está no sol vai ficar agora na sombra e esse exercício só não está encerrado, porque dentro do radicando, eu tenho uma potência que tem expoente superior ao valor do índice, então posso arrancar termo aqui de dentro e mandar para fora. Então eu vou fazer $f'(x)$ igual a menos 42 sobre x elevado a sétima, menos 2 sobre 3 raiz cúbica de x ao cubo vezes x ao quadrado. Perfeito? Isso aqui é x a quinta, esse que está ao cubo cancela com a raiz, ele vai sair, então vai ficar menos 42 sobre x elevado a sétima, menos 2 sobre 3, quem vai acompanhar o 3 agora? x e o outro que não conseguiu sair fora, vai continuar dentro da raiz cúbica, que é o x ao quadrado. Essa é a resposta final com os expoentes todos positivos, envolvendo radical.” [*No jogo de linguagem para derivar funções que apresentam radicais, o professor/pesquisador aproveita a ocasião e apresenta a preparação das funções que ficarão com potências de expoentes negativos. Ele utiliza apenas a regra da derivação da função potência, tanto para as funções que ficarão com expoentes negativos, quanto para as que ficarão com expoentes fracionários. Para isso, recorre a um reforço de conteúdos matemáticos do ensino básico, por meio de um jogo de linguagem próprio para esse nível de ensino, onde palavras e expressões como: “funçãozinha”, “resolve minha paradinha”, “regrinha”, “aí tem aquele macetinho, como que é o macetinho? Quem está no sol, quem está no sol é o 3, vai para a sombra e quem está na sombra é o 2, vai para o sol”, “prontinho”, “bonitinho, sem problema nenhum”, “Gente, não sofra com isso não” e “quem está na sombra vai voltar para o sol e quem está no sol vai ficar agora na sombra”, comuns no ensino básico.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 2 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 8: Exercícios Experimentais A

E 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f'x = \frac{2}{5}x - 3\cdot\frac{1}{4}x - \frac{4}{\frac{2}{3}x}$

$f'x = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - 3\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{x^2}} - \frac{4}{\frac{2}{3\sqrt[3]{x^3}}}$

Aluno 8: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y: \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

Aluno 16: Exercícios Experimentais A

E 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y' = x^{\frac{2}{5}} - 3\cdot x^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - 3\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{4}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}$

$\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - 3.$

Aluno 16: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y = x^{\frac{2}{5}} - 3.x^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}$

$y = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - 4.x^{-\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - 3.\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 4.(-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}}$

$y' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

$y' = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} - \frac{3}{4x^{\frac{3}{4}}} + \frac{8}{3.x^{\frac{5}{3}}}$

$y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^3}.x^2}$

Aluno 17: Exercícios Experimentais A

E 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$ $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}} = \boxed{\frac{2}{5}.x^{-\frac{3}{5}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{4}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}}$

$\boxed{\frac{2}{5x^{3/5}} - \frac{3}{4x^{3/4}} - 6x^{1/3}}$

Aluno 17: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{1/4} - 4x^{-\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{5}\cdot x^{-\frac{3}{5}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}$ $\boxed{y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} + \frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}}$

Aluno 28: Exercícios Experimentais A

P 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} - ?$

Aluno 28: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

Aluno 30: Exercícios Experimentais A

B 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$?

$y = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} -$

não sei

Aluno 30: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$y = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}$

$y = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - 4 \cdot x^{-\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \left(-\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)$

$y' = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} - \frac{3}{4x^{\frac{3}{4}}} + \frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}}$

$y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}}$

Na questão 2, o professor na videoaula inicia o seu jogo de linguagem sugerindo o uso memorizado da fórmula da derivada de uma raiz e, logo em seguida, em outro exemplo, apresenta a transformação da raiz em potência de expoente fracionário, considerando o domínio dos alunos nessa técnica de transformação, pois foi apresentada nas videoaulas de matemática básica. Em seguida, inicia o cálculo por meio do uso da regra de derivação de funções potências. Essa escolha não gerou entendimento das técnicas, o que ficou demonstrado nas resoluções dos alunos 8, 16, 17, 28 e 30, além do aluno 31. O elemento de destaque no jogo de linguagem do professor/pesquisador foi optar por uma única forma para o cálculo de derivadas envolvendo radicais, além de reforçar as regras básicas de potenciação praticadas no ensino fundamental. Os resultados nos Exercícios Experimentais B foram muito satisfatórios.

5.1.5 Análises da Aula 5

AULA DE INTERVENÇÃO 5

IDENTIFICAÇÃO:

AI 5 – Regras de Derivação – Parte 2 – Duração 35:38.

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS DE LINGUAGEM PRESENTES NAS AULAS E OS DESEMPENHOS DOS ALUNOS NOS EXERCÍCIOS:

Aula 5 – Questão 5

Calcule a derivada da seguinte função: $y = x^4 ln(x)$

Essa questão está relacionada à derivada da função $f(x) = ln(x)$. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 5, os alunos assistiram ao trecho da videoaula 5 transcrito a seguir:

“Agora vamos ver coisas novas, coisas importantíssimas, essa daqui não pode confundir com a função potência de polinômio, não é x elevado a uma potência fixa, não estou falando agora de x^5, que a derivada é $5x^4$, nós estamos falando agora de 5^x, não x^5, cuja derivada de $5x^4$, estamos falando de 5^x e a derivada de um real a constante elevado a x repete a mesma potência, o 5^x, e o logaritmo de a na base e, eu vou terminar de falar duas, três formas e vou falar um pouquinho do e, que tem alguma coisa importante para gente. Em particular, se a gente colocar a base e aqui, aí o logaritmo de e na base e, lembre-se que ln é logaritmo na base e, logaritmo natural, também chamado logaritmo neperiano, então quando nós colocamos aqui $ln(e)$, logaritmo de e na própria base e, e logaritmo de um número na base que é ele próprio, isso dá sempre 1, então por isso que a derivada de e^x é o próprio e^x. E a derivada de logaritmo de x numa base a é 1 sobre x logaritmo neperiano da base a e, portanto, se eu estou falando da derivada do logaritmo neperiano, do $ln(x)$, vai aparecer aqui $ln(e)$, de novo, é o logaritmo de e na base e que dá 1, então a derivada do logaritmo neperiano é 1 sobre x.” [*Esse é o jogo de linguagem que o professor na videoaula usa para apresentar as derivadas das funções* $y = a^x, y = e^x, y = log_a(x)$ *e* $ln(x)$. *Para atrair a atenção da audiência, inicia sua fala utilizando a expressão “coisas importantíssimas” e, a partir daí, enfatiza a diferença entre a função potência e a função exponencial. Em seguida, destaca a diferença entre as derivadas das funções* $y = a^x$ *e* $y = e^x$. *Seguindo a mesma lógica, destaca a diferença entre as derivadas das funções* $y = log_a(x)$ *e* $ln(x)$.]

Após a aula de intervenção 5, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 5 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

“Qual é a derivada da função a^x? É ela mesma vezes o ln da base. Derivada de e^x é ela mesma, ela mesma é maneira de falar, porque, na realidade, eu teria que escrever aqui na frente igual está aqui na parte de cima, eu teria que escrever $ln(e)$, só que $ln(e)$ vale 1, porque logaritmando e base são iguais, logaritmo natural, neperiano, tem base e, se o logaritmando for e também, vai dar 1, então não preciso escrever, mas eu tenho o 1 aqui na frente que é o resultado de $ln(e)$.” [*Nesse jogo de linguagem, o professor/pesquisador apresenta as fórmulas de derivadas das funções* $y = a^x$ *e* $y = e^x$ *de forma direta, apenas fazendo uma rápida observação de que a fórmula é a mesma, pois* $ln(e)$ *vale 1.*]

“Fórmula 12, a 12 vai ser $f(x) = log_a x$, qual é a derivada de $log_a x$? $f'(x)$ é $\frac{1}{xln(a)}$. Isso é base a, vai ter $ln(a)$. Já a última fórmula, se eu usar $ln(x)$, a base é e, se a base é e, então a derivada vai ser apenas $\frac{1}{x}$, então não preciso escrever $ln(e)$, porque $ln(e)$ vai dar 1, igual aqui.” [*Assim como no jogo de linguagem utilizado para as funções exponenciais, o professor/pesquisador apresenta as fórmulas de derivadas das funções* $y = log_a(x)$ *e* $ln(x)$ *de forma direta, apenas fazendo uma rápida observação de que a fórmula é a mesma, pois* $ln(e)$ *vale 1.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 5 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 1: Exercícios Experimentais A

C 5) $y = x^4 lnx$

$$(x^4)' . \ln x + x^4 \underbrace{(\ln x)'}_{\to \frac{1}{x}} \to 4x^3 . \ln x + x^4 \frac{1}{x} \to 4x^3 . \ln x + x^3$$

$$\underline{x^3(4 \ln x + 1)}$$

Aluno 1: Exercícios Experimentais B

C 5) $y = x^4 lnx$

$$(x^4)' \ln x + x^4 . (\ln x)'$$

$$4x^3 \ln x + x^4 \frac{1}{\cancel{x}} \to 4x^3 \ln x + x^3 \to \underline{x^3 (4 \ln x + 1)}$$

Aluno 12: Exercícios Experimentais A

C 5) $y = x^4 lnx$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^4 . \ln(x)\right) = y' = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) . \ln(x) + x^4 . \frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right) = y' = 4x^3 . \ln(x) + x^4 . \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = 4x^3 . \ln(x) + x^3}$$

Aluno 12: Exercícios Experimentais B

C 5) $y = x^4 lnx$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^4 . \ln(x)\right)$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) . \ln(x) + x^4 . \frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right)$$

$$y' = 4x^3 . \ln(x) + x^4 \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = 4x^3 . \ln(x) + x^3}$$

Aluno 16: Exercícios Experimentais A

E 5) $y = x^4 lnx$

$$\Rightarrow y = 4x^3 . d \ln x$$

Aluno 16: Exercícios Experimentais B

E 5) $y = x^4 lnx$

$$y' = 4x^3 . \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{3x^3}{x} \Rightarrow \boxed{y' = 3x^2}$$

Aluno 35: Exercícios Experimentais A

C 5) $y = x^4 lnx$

$$y' = 4x^3 . \ln x + x^4 . \frac{1}{x}$$

$$y' = 4x^3 . \ln x + x^3$$

$$y' = x^3 (4 \ln x + 1)$$

Aluno 35: Exercícios Experimentais B

C 5) $y = x^4 lnx$

$$y' = 4x^3 \ln x + x^4 . \frac{1}{x}$$

$$y' = x^3 (4 \ln x + 1)$$

Essa questão apresenta um aspecto muito importante em nosso trabalho. Como os jogos de linguagem na videoaula e na aula de intervenção foram muito semelhantes, por serem exposições de regras de derivação, no caso, a regra de derivação de funções logarítmicas, os alunos 1, 12, 16 e 35 apresentaram os mesmos desempenhos em ambos os questionários. Ou seja, os alunos 1, 12 e 35 acertaram ambos e o aluno 16 errou ambos. Para a apresentação dos conteúdos necessários para a resolução desse exercício, não tivemos um elemento nos jogos de linguagem em destaque.

5.1.6 Análises da Aula 6

AULA DE INTERVENÇÃO 6

IDENTIFICAÇÃO:
AI 6 – Regra da Cadeia – Duração 38:42.

ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE OS JOGOS DE LINGUAGEM PRESENTES NAS AULAS E OS DESEMPENHOS DOS ALUNOS NOS EXERCÍCIOS:

Aula 6 – Questão 2

Calcule a derivada da seguinte função: $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

Essa questão está relacionada à derivada de funções compostas com a utilização da regra da cadeia envolvendo função polinomial. Para resolver essa questão dos Exercícios Experimentais A da aula 6, os alunos assistiram aos trechos da videoaula 6 transcritos a seguir:

"Vamos começar analisando a função $senx^2$, o que eu queria que vocês percebessem é que nós já falamos da função $senx$, aqui não é $senx$, a variável independente, o x, está afetada, é seno de x^2, é nesse caso que a gente vai usar a regra da cadeia, você tem uma fórmula, se a variável for x, você deriva pela fórmula que a gente viu, raiz quinta de x, deriva normal com o que nós aprendemos de raiz quinta, agora se for raiz quinta de x + 1, raiz quinta de 3x + 5, aí, vou precisar da regra da cadeia. Primeira coisa que eu queria que vocês percebessem para essa função h igual a seno, eu vou fazer a pergunta: Quanto que dá a derivada em um x genérico e a derivada no 0? Uma resposta ingênua, que seria uma primeira resposta bastante razoável, apesar de ser ingênua, uma resposta muito razoável. Ah! Sim, se derivada de seno é cosseno, talvez a derivada de $senx^2$ seja $cosx^2$, porque para derivar $senx$ é $cosx$, para derivar $senx^2$, talvez seja $cosx^2$, chega a ser natural essa resposta. Se isso estivesse certo, se isso fosse verdadeiro, a derivada calculada em 0, seria cosseno de 0, e cosseno de 0 é 1, então a resposta inicial, assim nessa tentativa seria $cosx^2$ e 1. E eu vou mostrar que as respostas estão erradas, olhando o gráfico de $senx^2$, $senx^2$ é uma função par, lembra que se eu fizer aqui x positivo ou correspondente valor negativo, como eu elevo ao quadrado antes de calcular o seno, é seno do argumento do ângulo ao quadrado, quero calcule no π ou no menos π, eu vou primeiro elevar ao quadrado, então vai desaparecer o sinal de menos e vai dar o mesmo valor, se a função, ela é par, neste sentido que ela vale do lado positivo o mesmo que ela vale do lado negativo. Como será o gráfico de $senx^2$? Não é um gráfico óbvio, eu vou mostrar o gráfico para vocês, está aqui nesta planilha. Essa função par, observe que ela é igualzinha do lado mais e do lado menos, e ela tem essa oscilação típica do seno, mas que vai ficando mais apertadinha por causa do x^2, e na origem ela faz essa barriguinha que está mostrada aqui, olha como que ela é na origem. Se você pensar em termos de reta tangente, quem é a reta tangente a este gráfico no ponto x igual a 0? É a reta horizontal, é o próprio eixo x, é só olhar atentamente o gráfico, que você vai ver, que no ponto x igual a 0, o gráfico da $senx^2$ tangencia o eixo x e, portanto, a derivada da função na origem é 0. Lembra que eu mostrei no slide anterior? Ah! A resposta ingênua poderia ser que a derivada fosse $cosx^2$ e aí, a derivada na origem seria 1, se a derivada na origem fosse 1, a reta tangente seria inclinada, que seria a reta bissetriz com coeficiente 1, mas a reta tangente não é inclinada, é horizontal, a reta tangente tem que ser 0, e a derivada tem que ser 0, não pode ser 1, então aquela resposta que eu mostrei agora, que a $h'(0)$ poderia ser 1, está errado, então não pode ser $cosx^2$, porque se fosse $cosx^2$, a derivada na origem seria 1 e nós estamos vendo que isso está errado, porque derivada na origem tem que ser 0. Eu acabei de concluir que a derivada na origem tem que ser 0, olhando geometricamente para o gráfico, eu não fiz a conta. Eu vou em seguida mostrar como que a gente faz esta conta, esse slide e essa análise, até agora, é para mostrar para vocês que a resposta não pode ser aquela que eu havia comentado, aquela primeira resposta, tem que ser uma resposta mais complicada, mais elaborada.” [*O professor na videoaula inicia seu jogo de linguagem sobre a regra da cadeia mostrando a diferença entre uma função considerada "simples" e uma função composta por meio de alguns exemplos. Com a pergunta “Quanto que dá a derivada em um x genérico e a derivada no 0?”, o professor mostra ao aluno, fazendo cálculos e utilizando registros gráficos, que derivar uma função composta da mesma maneira que se deriva uma função "simples" pode levá-lo a cometer erros. Nesse jogo, ele faz uso do conceito de função par, ao escolher a função* $sen(x^2)$*, e, com o apoio do gráfico dessa função, aponta o erro cometido na derivada, caso o aluno derive a função* $sen(x^2)$ *como se deriva a função* $sen(x)$*. Nessa demonstração gráfica, o professor se utiliza de alguns diminutivos para prender a atenção da audiência, tais como “igualzinha”, “apertadinha” e “barriguinha”.*]

“O teorema que fornece a derivada da composta de duas funções deriváveis chama-se regra da cadeia, porque é uma derivação em sequência ou cadeia, e vem, porque a gente deriva de uma forma que parece uma corrente, você deriva aqui, depois ali e vai derivando sucessivamente. O enunciado é o seguinte: é um teorema, não é a regra da cadeia, se você tem duas funções deriváveis e suponha que existe a composta, f composta com g, a gente indica por esse símbolo, que é a f calculada em g. Por que eu coloco na hipótese que existe a composta? Nem sempre eu posso compor duas funções? A resposta é não. Nem sempre. Imagina que a f é raiz quadrada e imagina que a g é menos x^2 menos 7, menos x^2 menos 7, por causa desses menos todos, dá sempre negativa, se a f é raiz quadrada, não dá para fazer raiz quadrada de uma g negativa, para que exista composta entre duas funções tem que ter uma coerência entre os domínios, a g tem que ter uma imagem, ela tem que está definida em um valor de x, ela tem que ter um domínio tal, que a sua imagem caiba dentro do domínio da f e essa conta, seja uma conta possível de ser feita. Bom! Respeitada a condição de existência, se f e g são deriváveis, então a composta é derivável e a derivada da composta é dada pela derivada da função da esquerda f', mas não calculada em x, calculada em $g(x)$, e vezes a derivada da g, por isso que chama regra da cadeia, você vê que está uma derivação em sequência, uma derivação em cadeia. Eu faço a derivada da primeira vezes a derivada da segunda, só que cada uma vai sendo calculada no que está na frente, a f é calculada em g e a g é calculada em x." [*Aqui está o jogo de linguagem que o professor utiliza na videoaula para apresentar de maneira informal, mesmo citando o termo "teorema", a regra da cadeia a partir da garantia das condições de existência para que isso ocorra. Para mostrar que nem sempre ocorre a composição de funções, o professor apresenta um exemplo.*]

"Então eu vou fazer agora exemplos numéricos para explicar como que essa regra funciona, nos meus primeiros exemplos, eu vou destacar esse aspecto de composta de funções, vou jogar muito holofote na composta de funções. E, em seguida, eu vou passar para outros exemplos em que eu vou começar a fazer a conta cada vez mais rapidamente. Tá? Então vamos fazer primeiro uma conta com todo detalhe de composição, porque eu quero que vocês entendam bem esta fórmula, depois nós passamos para a parte mais operacional." [*Nesse trecho do seu jogo de linguagem sobre a regra da cadeia, o professor cita que fará vários exemplos, onde iniciará aplicando a regra da cadeia com detalhes para finalmente alcançar o uso dessa regra de forma automática.*]

"Então para ilustrar aquela fórmula, eu vou pegar $senx^2$, o exemplo que a gente acabou de ver, isso é a composta da função f igual a seno com a função g igual a x^2, $h(x)$ é $f(g(x))$, é a função seno que é a f, mas não $senx$, $senx^2$, então f composta com g. Esta h, $senx^2$, é a composição, é o resultado da composição da função seno com a função x^2, ela é composta de seno com x^2. Certo? Bem formal, bem rigoroso. Agora vamos usar a regra da cadeia, para usar regra da cadeia, eu tenho que ter a derivada da f e a derivada da g, e o contexto é esse. Então a derivada da f é a derivada da função seno, que é cosseno, e a derivada da g é a derivada de x^2, derivada de x^2, $2x$, a derivada da composta, derivada de f composta com g, regra da cadeia, f' de g, g' de x, então f' que é cosseno, mas não de x, eu não devo escrever cosseno de x, porque é cosseno calculado em $g(x)$, $g(x)$ era x^2, g', $2x$, mas g, x^2, então a f' é cosseno calculado em g, cosseno de x^2 e g', normal, $2x$. Então olha só, como é que o derivo o $senx^2$ que está aqui, ó, derivada de $senx^2$, eu faço derivada do seno que é cosseno em x^2, $\cos x^2$, vezes a derivada do x^2, e lembra que todo esse exemplo começou a um minuto atrás quando mostrando que a derivada dessa função tinha que ser 0 na origem, se agora eu calcular isso em 0, $h'(0)$ é cosseno de 0 que é 1, vezes duas vezes 0, que é 0, e dá 0 como tinha que dar. Certo?" [*Aqui apresenta o primeiro exemplo da forma como menciona no trecho anterior. Ou seja, detalhando quem são as funções que compõem a função composta e mostrando como são operacionalizadas na regra da cadeia.*]

"Fazer mais exemplos numéricos. Umas aulas atrás, na aula de regra de derivação, que eu estava ensinando para vocês a regra do produto, eu peguei a função $sen2x$, descrevi como $2senxcosx$, transformei em um produto e usando a regra de derivada do produto, eu mostrei que a derivada dava $2cos2x$. Por que que dava isso? O 2 era uma constante, ficava na frente multiplicando, derivada do produto, derivada do primeiro vezes o segundo, como a derivada do seno é cosseno, dava cosseno, cosseno, cosseno ao quadrado, com o 2 aqui na frente, e daí, mais o seno vezes a derivada do cosseno, ficava seno, derivada do cosseno era menos seno, menos seno ao quadrado, então ficava duas vezes, o 2 na frente, cosseno ao quadrado menos seno ao quadrado que é o cosseno de $2x$, então naquela aula a gente obteve a derivada do $sen2x$, via regra do produto, e deu $2cos2x$. Com a regra da cadeia também dá direto isso, vamos derivar $sen2x$, derivada do seno, cosseno, calculo em $2x$, $cos2x$, e a derivada do $2x$, que é 2, então $2cos2x$, e não é que a derivada do $sen2x$, não é certo dizer que a derivada do $sen2x$ é $cos2x$, isso é errado, é $2cos2x$." [*Nesse trecho do jogo, o professor utiliza um exemplo já resolvido por meio da regra do produto para comprovar o resultado obtido pela regra da cadeia e justificar que se calculasse a derivada dessa função composta como se fosse uma função "simples", não teria obtido o mesmo resultado que o da regra do produto. Em todo o restante da videoaula referente à regra da cadeia, o professor faz vários exemplos com outras funções, mas mantém esse mesmo padrão de resolução.*]

Observação: A transcrição da videoaula 6 nos surpreendeu, já que todas as outras foram bastante curtas, conforme apresentado em observação anterior, enquanto essa ficou bastante extensa. Atribuímos esse fato à importância que o professor na videoaula dá ao estudo da regra da cadeia para o cálculo de derivadas, pois, realmente, é a regra mais utilizada no estudo sobre derivadas.

Após a aula de intervenção 6, essa mesma questão foi novamente apresentada aos alunos nos Exercícios Experimentais B da aula 6 para nova resolução. Para realizar esta tarefa, eles assistiram aos trechos dessa aula transcritos a seguir:

"A regra da cadeia é simplesmente uma regra para fazer derivada de função composta. Na realidade toda função, até as simples, a gente diz que é composta, mas para diferenciar a gente fala que é simples. Por que eu falo que tudo é composto? O que acontece com essa função aqui, ó, $f(x) = x$ e $g(x) = sen(x)$, se eu chegar para vocês e pedir isso aqui? Quem é a $(fog)(x)$? A $(fog)(x)$ é a $f(g(x))$. Se é $f(g(x))$, a função g vai entrar dentro da f, e a f é x. Se a f é x, a g tem que entrar no lugar de x. Então se ela entrar no lugar de x, vai ficar o espaço do x. Como a gente fazia na aula de composta de funções? Abria a função f e colocava dentro a função g, como a função f só tem a variável x sozinha, ela aberta fica assim, e nessa entrada aqui, vou colocar g inteirinha que é $sen(x)$. Portanto, com parênteses ou não, isso aqui é a função $sen(x)$. Se é a função $sen(x)$, eu estou dizendo que a função composta é a própria função g. Isso aqui eu escrevi só para mostrar a vocês que toda função simples, eu posso considerar ela uma composta. Basta que eu faça a composição usando a função identidade. Vai dar ela mesma. Eu nem precisava ter falado isso. Eu só falei para justificar: toda função, mesmo simples, a gente pode considerar ela uma composta." [*Para a apresentação da regra da cadeia, o jogo de linguagem do professor/pesquisador começa pela justificativa de que toda função é composta, até mesmo as que nós chamamos de "simples". Essa justificativa é apresentada por meio de uma breve revisão de como é realizada a composição de funções, utilizando, para isso, a função* $g(x) = sen(x)$ *como exemplo e finalizando com a afirmação de que isso ocorre devido à presença da função identidade.*]

"E a regra da cadeia é uma regra para fazer derivação de função composta. Então ela é específica para isso. Se eu tenho a função $f(g(x))$, se eu quiser calcular a derivada dessa composta, colocando a linha aqui, eu vou calcular derivando a função f e multiplicando ela pela derivada da função g, com um pequeno detalhe, como é f composta com g, a derivada da f vai ser feita em relação à própria g, enquanto a g vai ser feita em relação à variável x. Isso é fazer a composição. Quando eu falo fog, eu derivo a f, mas eu tenho que entender que a g que vai entrar na derivada da f está funcionando como se fosse a varável da derivada da f, por isso que eu escrevo ela inteira e multiplico pela derivada da função g em cima da variável da função g que é o x. Então, quando eu faço composta, eu não estou jogando a g dentro da f? Então estou fazendo a g funcionar como se fosse variável da f. Por quê? Porque ela vai usar a variável da f aqui dentro, eu vou substituir a variável da f que é o x. Então, eu faço a g funcionar como variável, por isso, quando eu estou fazendo a derivada da composta, na primeira derivada que é a função f, a variável é entendida como sendo toda a função g e depois eu derivo a função g normalmente. E o resultado da derivada da composta é exatamente o produto entre essas duas derivadas. Ó o detalhe! Aqui é a função g e aqui é a variável x. Como funciona para fazer uma derivada como, por exemplo, a primeira função que o professor colocou na aula dele? Que é o $sen(x^2)$. Para derivar $sen(x^2)$, eu vou ter que usar a regra da cadeia, porque essa aqui é uma função composta. Concorda? Como é que eu identifico que ela é composta só de olhar? Porque eu vou falar que eu quero $senx$, mas quando eu olho para o x, eu não tenho x, eu tenho x^2. Se eu não tenho x e tenho x^2, é como se eu tivesse o seno de uma outra função e essa outra função quem é? x^2. Primeira coisa que eu vou falar: quero calcular a derivada da função y. Qual é a função y? É seno. Beleza! Eu sei calcular a derivada de seno. Só que aqui não é $sen(x)$, aqui é seno de uma outra função. Então a maioria dos professores quando vai explicar a regra da cadeia ou aplicar a regra da cadeia a primeira vez, eles preferem fazer assim, ó: eles preferem pegar essa função que vocês perceberam aqui e chamar de um outro símbolo. Então eu estou chamando x^2 que é uma função, que eu percebi que é uma função, eu estou chamando de função u. Se eu estou chamando de função u, essa função original, ela vai ficar sendo $sen(u)$. Para aplicar a regra da cadeia, eu vou fazer o seguinte: eu vou imaginar que nem tenho regra da cadeia para usar. Por quê? Porque eu quero derivar essa função. E quando eu vou derivar essa função, eu faço: ôpa! Seno de uma variável u, olha o que eu falei: seno de uma varável u. A derivada de seno de uma variável u é cosseno da variável u. Concorda? Beleza! Só que aí, boom! Dá um estalo no coco da gente, a luz liga, e eu enxergo que esse u não é a variável original da função, porque a variável original da função é x e aqui está u, u não é a variável original da função. Isso indica o quê? Que o que eu fiz de derivada aqui, eu sou obrigado, pela regra da cadeia, a multiplicar pela derivada do u. Sempre que a variável que eu usei aqui, não for a variável original, a regra da cadeia exige que você multiplique pela derivada dessa variável. Aí você completou a regra da cadeia. Você derivou o seno em relação à variável u e multiplicou pela derivada de u. Depois vou mandar uma tabela de fórmulas para vocês, que vocês vão ver que a tabela inteira vem considerando todas as funções compostas, porque essa tabela vai usar esse u aqui. Então o que eu fiz? Quis derivar isso, derivei, só que eu percebi que u não era variável original, então pela regra da cadeia, eu vou sempre multiplicar pela derivada dessa nossa variável. Vou acabar essa daqui para vocês perceberem. Então eu usei a regra da cadeia aqui? Eu usei a regra da cadeia. Está derivada? Está derivada. Mas não está respondido. Por que não está respondido? Porque a variável original da função era x e aqui tem variável u. Mas o meu u representa x^2, então se eu voltar a substituição no final, aqui vai ficar cos (x^2), que é o u, a derivada do u, eu ainda não fiz, mas como é uma funçãozinha simples, a derivada do u vai ser $2x$ e eu coloco a derivada do u substituída por $2x$. Pronto! Agora está aplicada a regra da cadeia e a variável original da função está na resposta, está encerrada a questão. O máximo que você pode fazer aqui, para não confundir esse x^2 com esse $2x$, é colocar esse $2x$ aqui na frente para deixar o cosseno atrás, para ficar sem dúvida nenhuma de quem é o ângulo e quem não é o ângulo. O ângulo aqui é x^2, $2x$ é outra coisa. Está derivado.” [*Nesse trecho do jogo de linguagem, o professor/pesquisador apresenta a regra da cadeia, iniciando com um pequeno exercício de identificação do porquê a função é composta, para, em seguida, utilizar uma variável auxiliar u. Ao usar essa variável u, o professor/pesquisador apela para algumas palavras e expressões de uma linguagem auxiliar que buscam facilitar o entendimento da regra pelos alunos. Palavras e expressões como: “ôpa!”, “boom!”, “Dá um estalo no coco da gente”, “a luz liga” e “funçãozinha”.*]

“$f(x) = \ln cos\, x$, então ó: como eu resolvo derivada de função composta para mim? Eu resolvo sempre assim: $f'(x)$ vai ser igual. Eu olho para a função e procuro identificar quem é a função interna e quem é a função externa. Quem vocês acham que é interna e quem vocês acham que é externa? Porque a regra da cadeia é sempre derivada da externa vezes a derivada da interna. Então se vocês identificarem quem é externa e quem é interna, está resolvido o problema. Como que a gente cria prática para identificar quem é interna e quem é externa? Fazendo a leitura da função e perceber onde deveria ter uma variável x sozinha e não tem. Então quando eu leio isso, eu vou ler o que? ln de alguma coisa. Concorda? Então se eu vou ler ln de alguma coisa, essa alguma coisa deveria ser a variável x, mas não é. Quem está no lugar desse x? O cosseno. Então o cosseno é a minha função interna e o ln é a minha função externa. Então a derivada pela regra da cadeia é a derivada da externa, que é o ln, vezes a derivada da interna, que é o cosseno. Só que eu vou fazer a derivada falando dessa maneira: derivada de ln de fulano, se eu quero derivar ln de fulano, qual é a formulazinha de ln de fulano? 1 sobre o fulano. Se esse fulano fosse x, seria 1 sobre x. Mas não é x, é 1 sobre fulano. E como é um fulano, eu devo multiplicar essa derivada pela derivada do fulano. Quem é a derivada do fulano, que é cosseno? Menos seno. Pronto! Então ó, derivada de ln de fulano, e eu vou falar assim naturalmente, porque na minha leitura, eu não tenho como ler a função de outra maneira, ln de alguém, ln de um fulano, para derivar ln de um fulano, pela tabelinha de fórmulas é 1 sobre o fulano. Como é fulano, eu sou obrigado a multiplicar pela derivada desse fulano. E a derivada de cosseno é menos seno. Para dar a resposta final, seno sobre cosseno é tangente, então vai ficar menos tangente de x. Pronto!" [*Nesse trecho do jogo de linguagem, o professor/pesquisador apresenta outro exemplo de função composta para ser derivada. Nesse cálculo, ele introduz a ideia de função interna e externa de uma função composta. Para colocar em prática essa ideia, ele usa e abusa do termo "fulano", que aqui está substituindo a variável auxiliar u para obter uma resolução mais fluida. Para o caso de funções compostas por mais de duas funções, além do termo "fulano", o professor/pesquisador faria uso dos termos "beltrano", "sicrano", e assim por diante.*]

A partir dessas exposições, os alunos resolveram a questão 2 dos respectivos Exercícios Experimentais. A seguir são mostradas algumas dessas resoluções:

Aluno 21: Exercícios Experimentais A

B 2) $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

Aluno 21: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$ $u = (x^2+x+1)$

$y = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ $u' = 2x+1$

$y' = u^{1/3} \cdot u' \Rightarrow y' = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1} \cdot u' \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x+1)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-2/3} \cdot (2x+1) \Rightarrow y' = \frac{1}{3(x^2+x+1)^{2/3}} \cdot (2x+1)$ $\boxed{y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{^2(x^2+1)}}}$

Aluno 31: Exercícios Experimentais A

E 2) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

$y' = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (2x+1)$

$y' = \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} \cdot (2x+1)$

$y' = \frac{6x}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

$(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}-1}$

$f(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$

$f(x) = \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$

$g(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = 2x + 1$

$y' = \frac{6x}{x^2\sqrt[3]{3x^2+3x+1}} + \frac{3}{x^2\sqrt[3]{3x^2+3x+1}}$

$y' = \frac{6}{x\sqrt[3]{3x^2+3x+1}} + \frac{3}{x^2\sqrt[3]{3x^2+3x+1}}$

Aluno 31: Exercícios Experimentais B

C 2) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}} \cdot (2x+1) =$

$\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

Aluno 36: Exercícios Experimentais A

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$g(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3x^{-\frac{2}{3}}}$

Aluno 36: Exercícios Experimentais B

E 2) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}} \cdot 2x$

$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

C 2) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$

$y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x+1$

$y' = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

O jogo de linguagem do professor na videoaula inicia-se com uma justificativa, por meio de um exemplo, do porquê não devemos derivar uma função composta da mesma forma que derivamos uma função simples e prossegue destacando a necessidade de se observar a condição de existência para funções compostas, então apresenta a regra da cadeia. Finaliza apresentando vários exemplos de como se aplica essa regra, justificando que após vários exercícios o aluno já consegue aplicar essa regra de forma automática. O professor/pesquisador, em seu jogo de linguagem, apresenta a regra da mesma forma que o professor na videoaula, pois é uma maneira de certa forma padronizada entre professores de Cálculo, mas para os exemplos iniciais utiliza funções auxiliares com os símbolos *u*, *v*, *w*, ... Porém, termos como fulano, beltrano, sicrano são presentes em seu jogo de linguagem para representar as funções envolvidas na composta e agilizar o cálculo da derivada. O aluno 21 consegue resolver a questão com o auxílio da variável auxiliar *u*, como indicada no elemento do jogo de linguagem do professor/pesquisador. Para o aluno 31, os jogos de linguagem sobre a regra da cadeia parecem ter sido entendidos sem dificuldades. A questão do erro e do acerto nos Exercícios Experimentais A e B, respectivamente, estão relacionados aos jogos de linguagem utilizados na aula 4. A resolução apresentada pelo aluno 36 pode ter sido desenvolvida a partir do uso de termos como “fulano”, “beltrano”, “sicrano”, dentre outros, após transformar o radical em potência de expoente fracionário, como sugerida no jogo de linguagem da aula de intervenção 4.

6 CONCLUSÕES

Essa pesquisa nos trouxe de imediato um grande desafio em relação à coleta de dados. O conceito de jogos de linguagem nos permite fazer comparações, conforme afirma o próprio Wittgenstein (1999, p. 68): “Os jogos de linguagem figuram muito mais como *objetos de comparação*, que, através de semelhanças e dissemelhanças, devem lançar luz sobre as relações de nossa linguagem”. Porém, para atender ao nosso objetivo, gostaríamos de ter tido a possibilidade de imergir um grupo de alunos em duas práticas de ensino presenciais. Mas como fazer isso em pleno semestre letivo e com todos os professores de Cálculo I cumprindo seus encargos em suas respectivas turmas? E mesmo que conseguisse fazer, não teria fisicamente como ter esse grupo de alunos em dois locais simultaneamente, pois se não fosse ao mesmo tempo, já teríamos o grupo de alunos no segundo momento em vantagem de maturação em relação ao primeiro momento. Além do mais ficaria muito difícil de gerir esse grupo em dois momentos distintos com os nossos encargos em curso. Isso confirma que a nossa coleta de dados foi realizada ao mesmo tempo que estamos trabalhando normalmente no semestre letivo. Outro problema causado pela burocracia, pois não tínhamos como usar a estrutura da universidade, enquanto estivéssemos na condição de afastado para capacitação.

Poderíamos pensar em duas turmas de Cálculo I, sob nossa responsabilidade. Mas também estaríamos gerando um outro problema, só teríamos um jogo de linguagem em ação. Então a comparação de jogos ficaria impossibilitada, pois não seria justo para com uma das turmas deixá-la em falta de elementos do jogo, fundamental para a sua aprendizagem.

A solução encontrada foi a de envolver a nossa turma de Cálculo I da Engenharia Elétrica em uma prática de ensino a mais, porém disposta em videoaulas. Uma vez que em nossa prática docente, já era comum ver alunos deixando de assistir aula presencial para buscar videoaulas, motivados pelo não entendimento da linguagem utilizada pelos professores em suas aulas presenciais. Mas não poderia ser videoaulas de baixa qualidade. Portanto, escolhemos o que temos de melhor em termos de prática de ensino virtual. Videoaulas de um professor renomadíssimo de uma instituição reconhecida internacionalmente, resultante de um grande projeto governamental de ensino a distância. Videoaulas geradas a partir de uma estrutura de excelência que utiliza variados recursos tecnológicos. Sob a competência de um professor altamente qualificado. Tão qualificado, que muitas de suas videoaulas de cálculo diferencial e integral foram utilizadas por outra instituições de ensino superior, inclusive a nossa, durante o período de aulas virtuais na pandemia do Covid-19.

Estivemos convictos de que foi uma excelente escolha. Além de ter sido possível em várias aulas, um espaço temporal bastante pequeno, que não causaria maiores complicações em relação ao tempo de maturação dos conceitos vistos pelos alunos na videoaula em relação aos mesmos conceitos vistos na aula presencial.

Todos os casos mostrados no capítulo anterior, confirmaram a nossa tese de que novos elementos inseridos em um jogo de linguagem definido por variações nas descrições das regras de uso vinculadas com práticas normativas que demarcam o ensino de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral convergiram em apontar medidas comportamentais próximas das aprendizagens preconizadas para os respectivos conteúdos.

Sustentamos que as recorrentes evidências empíricas definidas pelas transcrições das intervenções nas videoaulas e nas aulas de intervenção, assim como evidências expressas nas resoluções dos exercícios pelos alunos, interpretadas como modos de agir contingentes às descrições das regras de uso, configuram demonstrações válidas e convincentes, obtidas sob a perspectiva metodológica adotada nesta tese, da extensão dos jogos de linguagem para a fundamentação das interpretações das interações discursivas em contexto de ensino de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral.

Estimamos, portanto, que a tese, amparada nas especificidades metodológicas adotadas, documente contribuição aos professores de matemática, de qualquer nível de ensino, na demonstração da relevância da dimensão linguística, mais exatamente, da descrição das regras de uso como condição necessária, para viabilizar as aprendizagens envolvidas. Acreditamos que quanto maior o grau de aprimoramento de nossa linguagem em nossa prática de ensino, melhores resultados alcançaremos no benefício da aprendizagem de nossos alunos. Não é uma questão de melhor ou pior jogo de linguagem, o que desejamos mostrar é que quando o professor investe em um aprimoramento de sua linguagem em sua prática de ensino, ele poderá contribuir com a melhoria da aprendizagem dos seus alunos.

Amparados nas perspectivas pragmática e terapêutica da noção de jogos de linguagem, a pesquisa ora apresentada busca fazer um alerta a todos nós, professores de matemática, quanto ao uso que fazemos da linguagem compartilhada, empregada e que, em última instância define o exercício de ensinar os alunos, conseguindo de fato atingir a tão sonhada aprendizagem por parte deles.

Quando falamos em professores de matemática, queremos nos referir, à princípio, aos professores de todos os níveis de ensino, apesar dessa pesquisa ter sido aplicada ao nível superior envolvendo o ensino de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Acreditamos que os mesmos resultados também se apliquem às outras áreas das ciências exatas, apesar de termos desenvolvido um trabalho específico para a questão da linguagem matemática.

Outro alerta importante é sobre as questões referentes às defesas de dogmas-padrão referentes aos fundamentos da matemática a que muitos professores se apegam. Nesse trabalho, também queremos alertar a todos nós sobre a pouca importância que há em querer defender um ponto de vista platonista, formalista ou construtivista no ensino da matemática, pois todos esses dogmas apresentam algum tipo de problema quando tentamos adotá-los integralmente, ao mesmo tempo que possuem pontos positivos para a matemática escolar considerando a transposição didática.

Segundo Silveira et al (2014, p. 155-156), as proposições matemáticas como teoremas, corolários, assim como outra qualquer, são criadas com base na lógica e satisfazem necessidades teóricas intrínsecas à matemática. Portanto, não descrevem objetos ideais pertencentes a um reino platônico, tampouco surgem de experiências do mundo real. As proposições matemáticas exercem uma função normativa, são invenções humana e não descobertas. Nesse sentido, são de natureza convencional. E, segundo Hersh (1985, p. 361), K. Gödel e P. J. Cohen mostraram que, baseando-se nos axiomas da teoria formal dos conjuntos, a hipótese do contínuo não pode nem ser demonstrada (Gödel, 1937) nem negada (Cohen, 1964). Sustentamos que o foco se encontra na linguagem assim como nos mostrou Wittgenstein, pois para conseguirmos ensinar matemática para nossos alunos, precisamos treiná-los em todas as suas regras, para que eles alcancem uma compreensão satisfatória dos conceitos que serão estudados dentro da matemática. Para que isso aconteça, sempre deveremos buscar a utilização de um jogo de linguagem que favoreça o entendimento dos conceitos em cada situação de ensino.

Haverá contextos em que o uso de uma linguagem mais informal se fará necessário, assim como também ocorrerão situações apropriadas para se utilizar uma linguagem formal no ensino da matemática. Esses momentos estarão vinculados ao aprendizado das regras matemáticas que serão entendidas com uma boa dose de treinamento para, posteriormente, propiciarem as condições necessárias para que os aprendizes possam fazer aplicações práticas desse conhecimento matemático no mundo real. Ou seja, não cabe defesas de dogmas, pois todas as correntes devem se fazer presentes no ensino de matemática para obtermos um uso mais significativo dessa maravilhosa ciência. O que queremos é estar atentos às palavras de Silveira et al (2014), quando afirmam que não há uma essência que defina os diversos jogos de linguagem, uma vez que podem ser aplicados em diversos contextos. E esta variedade de usos em diferentes contextos é o que dá sentido aos conceitos.

Devemos também considerar que o domínio das regras da linguagem matemática, além de possibilitar a aplicabilidade da matemática do mundo real, também irá propiciar ao estudante a possibilidade de estabelecer novas relações entre esses elementos matemáticos que poderão favorecer a descoberta de outras propriedades dentro da própria matemática ou, até mesmo, possibilitar a criação de outros conceitos matemáticos, sejam pela observação do mundo real ou da própria estrutura da matemática. Portanto, para nós, a discussão entre a matemática ser criada ou inventada é totalmente desnecessária. O conhecimento matemático seguirá seu curso natural, favorecido, em seu contexto aplicado, ou no âmbito do ensino de conceitos matemáticos, pelas práticas de descrição do uso das regras que o constitui.

Para Wittgenstein é fundamental que o professor treine seus alunos nas regras básicas que compõem um conceito matemático para que eles dominem as ferramentas que o fará manipular esse conceito de forma eficiente em contextos de relações desses conceitos com outros conceitos e em contextos de aplicações práticas no mundo real. Reforçando que para o ensino, não é interessante ficar discutindo se a matemática é criada ou inventada, se é uma ciência originada a partir do mundo das ideias ou do mundo físico, mas ter como foco sua linguagem. Que dominada permitirá o acesso a todos os contextos.

É sempre importante ressaltar que não existe o melhor jogo de linguagem para ensinar matemática, pois existem variadas formas de vida que poderão estar sendo submetidas a um determinado jogo. O que nos importa é sempre termos consciência de que qualquer que seja o jogo de linguagem, sempre existirão novos elementos a serem incorporados no jogo para se atingir um objetivo cada vez melhor. Isso significa que os resultados mais favoráveis nas resoluções das questões da segunda etapa de aplicação dos questionários nessa pesquisa, não indicam que o jogo de linguagem utilizado pelo professor/pesquisador é superior ao jogo de linguagem utilizado pelo professor na videoaula, mas que o pesquisador teve a oportunidade de apresentar outros elementos do jogo que favoreceu o entendimento por parte dos alunos voluntários. Poderia, perfeitamente, ocorrer de outro professor após observar a aula do pesquisador aplicar outros elementos no jogo de linguagem que melhoraria ainda mais o rendimento dos alunos nos questionários. Com isso demonstramos a importância dos jogos de linguagem para o ensino de conceitos matemáticos no ensino superior, ou seja, demonstramos a influência exercida pelo professor na maneira como aluno resolve exercícios. Estamos convictos de que esse cuidado do professor em buscar novos elementos de jogos de linguagem para a melhoria do ensino de conceitos matemáticos se aplica a todos os níveis de ensino.

Podemos observar um outro aspecto bastante importante que gostaríamos de ressaltar como contribuição dessa pesquisa: nos referimos ao problema do ensino a distância. Da forma como o ensino a distância está sendo praticado atualmente em todo o mundo, faz-se urgente que os professores criadores de videoaulas prestem ainda mais atenção aos jogos de linguagem que estão utilizando em suas produções, pois sem a possibilidade de interação em tempo real com os alunos, ele poderá não perceber o quão falho está sendo o seu ensino.

As recorrentes evidências observadas na análise dos dados dessa pesquisa apontaram para uma maior aproximação ou correspondência dos desempenhos (modos de agir) dos alunos em relação às aprendizagens preconizadas para os respectivos conteúdos após a exposição dos alunos às descrições de uso adotadas nas aulas de intervenção, ou seja, com a inserção de novos elementos definidos pelas práticas previstas no jogo, sendo que tais evidências nos remetem a responder à questão de pesquisa: A inserção de novos elementos (regras de descrição de usos) em um jogo de linguagem de um professor apresenta-se como condição favorecedora para a emissão de ações (desempenhos) correspondentes com as aprendizagens previstas pelos alunos sobre cálculo diferencial e integral, possibilitando-os a resolver exercícios a partir de suas interações com práticas de ensino dispostas em videoaulas, bem como em aulas presenciais? A resposta objetiva para essa questão é: Sim, a presença de outros elementos no jogo de linguagem que possibilita um treinamento mais efetivo das regras que dão suporte ao conceito matemático, em estudo, favorecem a aprendizagem dos alunos.

Sob as condições metodológicas adotadas, evidências de desempenho dos alunos mais próximas das aprendizagens previstas mostraram-se diretamente vinculadas com a inserção, pelo professor das aulas de intervenção, de elementos novos no jogo de linguagem, a saber, de diferentes descrições de uso pertinentes aos conceitos estudados.

Nessa pesquisa, não tivemos a menor intenção de apresentar um jogo de linguagem privilegiado em relação a outro. O nosso objetivo foi o de demonstrar, sob condições metodológicas específicas, que quando o professor lança um olhar atento ao seu jogo de linguagem e se permite também observar os jogos de linguagem utilizados pelos seus colegas ou até mesmo por professores que não sejam do seu meio de convívio, ele poderá melhorar seu jogo de linguagem, que permitirá a ele, aumentar as possibilidades de entendimento dos conceitos estudados por seus alunos. Em suma, não somos os donos do saber, nem os detentores da didática de ouro; diferentemente, as evidências ora expostas nesta tese, convergem em apontar como atribuição necessária e imperativa ao ensino de conceitos matemáticos, e possivelmente como elemento complementar aos recursos de transposição didática, a receptividade e a adesão às condições favorecedoras de aprendizagens fundamentadas em experiências coletivas, devidamente mapeadas e documentadas em termos de interpretações "pragmáticas e terapêuticas" das interações linguísticas.

REFERÊNCIAS

ALSTON, P. W. **Filosofia da linguagem.** 2ª ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1977.

ARAÚJO, M. D.; TOMAZ, V. S. **"Matemáticas indígenas": tensionamentos na formação intercultural para professores.** Arquivos Analíticos de Políticas Educativas, Arizona, vol. 28, n. 80, 2020.

AZIZE, R. L. **Os inícios da abertura pragmática de Wittgenstein: o princípio do contexto.** Cognitio/Estudos: Revista Eletrônica de Filosofia, n. 1, PUC-SP, 2004, p. 3-10.

BARALDI, I. M. **Refletindo sobre as concepções matemáticas e suas implicações para o ensino diante do ponto de vista dos alunos.** MIMESIS, Bauru, v. 20, n. 1, 1999, p. 07-18.

BELLO, S. E. L. **Jogos de linguagem, práticas discursivas e produção de verdade_ contribuições para a educação (matemática) contemporânea.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010, p. 545-588.

RUSSELL, B. **Introduction to mathematical philosophy.** Londres: George Allen & Unwin, 1919.

BICUDO, I. **Platão e a matemática.** LETRAS CLÁSSICAS, n. 2, 1998, p. 301-315.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática.** — 4. ed. — Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

BKOUCHE, R.; CHARLOT, B.; ROUCHE, N. **Faire des mathématiques_ le plaisir du sens.** Paris: Armand Colin, 1991, p. 175-179.

CARVALHO, A. M. F. T. **'Da Vesp' assada: perspectivas psicanalíticas dos efeitos linguísticos na sala de aula de matemática.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010, p. 91-128.

CARVALHO, D. S.; SILVEIRA, M. R. A. **Jogos de linguagem na perspectiva de Wittgenstein evidenciados em atividades de modelagem matemática.** REnCiMa - Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v. 10, n. 5, 2019.

CARVALHO, J. G.; DUARTE, C. G. **Tempo e espaço flutuantes: jogos de linguagem entre camaradas d'água.** Revista Latinoamericana de Etnomatemática, Nariño, vol. 10, n. 1, 2017.

CASTRO, R. S.; CALDEIRA, A. D. **Entrelaçamentos e possibilidades dos jogos de linguagem matemáticos: seus usos na comunidade remanescente de quilombos da Agrovila de Espera, Alcântara – MA.** Revista Exitus, Santarém, vol. 7, n. 2, p. 32-54, 2017.

CASTRO FILHO, J. A.; FREIRE, R. S.; MAIA, D. L. Estudo de Caso como método de pesquisa em Informática na Educação. In: PIMENTEL, M.; SANTOS, E. (Org.) Metodologia de pesquisa científica em Informática na Educação: abordagem qualitativa. Porto Alegre:

SBC, 2021. (**Série Metodologia de Pesquisa em Informática na Educação, v. 3**) Disponível em: <https://metodologia.ceie-br.org/livro-3/>

CAVASSANE, R. P. **A crítica de Wittgenstein ao seu "Tractatus" nas "Investigações Filosóficas".** Revista de Iniciação Científica da FFC – Unesp – v. 10, n. 2, 2010a, p. 1-8.

_______ . O conceito de gramática nas Investigações Filosóficas de Ludwig Wittgenstein. FILOGÊNESE – FFC – Unesp – v. 3, n. 1, 2010b, p. 142-152.

CHEVALLARD, Y. **Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias.** Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 3, n. 2, p. 1-14, mai./ago. 2013.

CLARETO, S. M.; ROTONDO, M. S. **Experiências no labirinto: linguagens, conhecimentos e subjetividades.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010, p. 589-620.

COSTA, D. E.; MORAES, M. S. F.; SILVEIRA, M. R. A. **Um estudo sobre problemas de tradução relativos às propriedades de limites de função real de uma variável real.** EMP - Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 203-216, 2016.

CRUZ, J. V.; SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V. **A prática dos jogos de regras para o ensino da matemática sob a perspectiva da filosofia da linguagem de Wittgenstein.** II SENALEM – Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática. Rio de Janeiro – RJ, 3 a 5 de dezembro de 2018.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

FIGUEIREDO, N. M. **Estudo sobre regras e linguagem privada.** A divergência de interpretações sobre a noção de regra nas *Investigações Filosóficas*. 2009. 120f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – ano 3, n. 4, 1995, p. 1-38.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa** [recurso eletrônico] / Uwe Flick; tradução Joice Elias Costa. – 3. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Artmed, 2009.

FREDRICH, L. S.; LARA, I. C. M. **Jogos de linguagem e ensino de matemática: uma análise de sua utilização na educação infantil.** Revista Exitus, Santarém, vol. 9, n. 4, p. 576-605, 2019.

FREITAS, E. S.; SILVA, I. G. **Gramática dos jogos de linguagem e significado no segundo Wittgenstein.** KÍNESIS, Vol. X, n° 25, dez. 2018, p. 128-148.

GARNICA, A. V. M.; PINTO, T. P. **Considerações sobre a linguagem e seus usos na sala de aula de matemática.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010, p. 207-244.

GIONGO, I. M.; MONTE, M. T. **Gramática e números: formas de vida e jogos de linguagem matemáticos.** EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife, vol. 10, n. 2, 2019.

GOTTSCHALK, C. M. C. **A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana.** Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 75-96, jan./abr. 2008. Disponível em http://www.cedes.unicamp.br

________ . **A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais.** Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

________ . A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. In: Congreso Latinoamericano de Filosofía de la Educación, ALFE, 3., 2015. Ciudad de México, DF. **Anais**... DF, México: ALFE, 2015, p. 1-16.

HAMANN, J. G. **Metacrítica sobre o purismo da razão.** GIL, F. (org.). Recepção da Crítica da razão pura: antologia de escritos sobre Kant (1786-1844). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1992, p. 139-153.

JULIO, R. S. **Como as entrevistas com engenheiros eletrônicos da Petrobras nos ajudam a pensar matemática nos cursos de serviço.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 832-853, ago. 2019.

________ . **Contribuições wittgensteinianas para a realização e a leitura de entrevistas envolvendo matemática nas práticas de engenheiros.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 178-192, 2016.

LACERDA, A. G.; SILVEIRA, M. R. A. **Linguagem, escrita e comunicação: uma análise através de jogos de linguagem da interação entre pares pela busca da leitura/tradução do texto em processos de ensino e aprendizagem da matemática.** RPEM – Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, vol. 2, n. 3, 2013.

LOUREIRO, D. Z.; KLÜBER, T. E. As escolas do Formalismo, Logicismo e Intuicionismo: Um olhar para o Ensino de Matemática. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, CIAEM, 14., 2015. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. **Anais**... Chiapas, México: CIAEM, 2015, p. 1-14.

MACHADO, A. N. **Conhecimento, verdade e significado.** DOISPONTOS, Curitiba, São Carlos, vol. 6, n. 2, p. 55-78, outubro, 2009.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua.** São Paulo: Cortez, 1993.

MALINOWSKI, B. **The problem of meaning in primitive languages.** Supplement I to C. K. Ogden and I. A. Richards: The Meaning of Meaning. A study of the influence of language on thought and of the science of symbolism. London: K. Paul, Trend, Trubner, 1923, p. 296-336.

MEIRA, J. L.; SILVEIRA, M. R. A. **A tradução da linguagem matemática na aprendizagem da geometria por estudantes da educação básica.** REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Belém, ano 14, n. 31, p. 63-81, 2019.

MENEGHETTI, R. C. G.; TREVISANI, F. M. **Futuros matemáticos e suas concepções sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. 1, 2013, p. 147-178.

MIGUEL, A. **Constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – Ano 3, n. 3, 1995, p. 34-35.

_______ . **Percursos indisciplinares na atividade de pesquisa em história (da Educação Matemática): entre jogos discursivos como práticas e práticas como jogos discursivos.** Bolema. Rio Claro (SP): v. 23, n. 35a, p. 1-57, 2010.

MINAYO, M. C. S. **Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade.** Ciência & Saúde Coletiva, v. 17, n. 3, p. 621-626, 2012.

MONDINI, F. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. In Encontro Brasileiro dos Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, EBRAPEM, 12., 2008, Rio Claro, São Paulo. **Anais**… São Paulo, Brasil: EBRAPEM, 2008, p. 1-10.

MORAES, J. M. S. **Jogos de linguagem matemáticos no ensino em engenharia civil.** 2019. 200f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS, São Leopoldo, 2019.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

PERUZZO JÚNIOR, L. **O conceito de lebensform (formas de vida) na filosofia de Wittgenstein.** Revista Ítaca, Rio de Janeiro, n. 17, p. 73-85, 2011.

ROSA, M.; OREY, D. C. **A influência dos fatores linguísticos no ensino-aprendizagem em matemática: o caso dos Estados Unidos.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010, p. 485-504.

SANTOS, A. P. **Linguagem, forma de vida, heteronímia: Pessoa e Wittgenstein.** 2016. 108f. Tese (Doutorado em Letras) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2016.

SILVA, C. E. S. **Alfabetização matemática na perspectiva da linguagem.** REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Belém, ano 14, n. 31, p. 28-48, 2019.

SILVA, J. C. S. P. **Filosofia e terapia em Wittgenstein.** Analytica. Revista de Filosofia, Rio de Janeiro, v. 9, n. 2, p. 87-114, 2005.

SILVA, J. R. D. **Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções.** 2005. 111f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campo Grande, 2005.

SILVEIRA, M. R. A. **Compreensão da matemática no uso de símbolos e da gramática.** Revista Científica Guillermo de Ockham, Cali, vol. 15, n. 1, 2017.

_______ . **Jogos de linguagem entre professor e alunos: possibilidades de aprender e ensinar matemática.** UNIÓN - Revista IberoAmericana de Educación Matemática, Andujar, vol. 13, n. 50, p. 78-91, 2017.

SILVEIRA, M. R. A. et al. **Reflexões acerca da contextualização dos conteúdos no ensino da matemática.** Currículo sem Fronteiras, v. 14, n. 1, p. 151-172, jan./abr. 2014.

SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. **Apropriação linguística e significado em atividades de modelagem matemática.** Bolema, Rio Claro, vol. 33, n. 65, p. 1195-1214, 2019.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. **A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática.** Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Ciudad de México, vol. 22, n. 1, p. 39-66, 2019.

TASCHETTO, L. R.; DUARTE, C. G. **Educação matemática e jogos de linguagem na escola: reverberações.** Revista Reflexão e Ação, Santa Cruz do Sul, v. 23, n. 1, p. 186-203, 2015.

VERONEZ, M. R. D.; SOARES, J. R. **Comunicação de conhecimentos nas aulas de matemática a partir de jogos de linguagem.** ENSINO EM RE-VISTA, Uberlândia, vol. 25, n. 3, p. 834-854, 2018.

WITTGENSTEIN, L. **Da certeza**. Trad. Maria Elisa Costa. Portugal: Edições 70, 2000.

_______ . **Gramática filosófica.** São Paulo: Edições Loyola, 2003.

_______ . **Investigações filosóficas.** São Paulo: Nova Cultural, 1999.

_______ . **O livro castanho**. Trad. de Jorge Marques. Lisboa: Edições 70, 1992.

_______ . **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.** Madrid: Alianza Editorial, 1987.

APÊNDICES

APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

O(A) Sr.(ª) está sendo convidado(a) a participar de um projeto que teve a sua base na observação das práticas docentes, em todos os níveis (Educação Básica e Educação Superior) em que nem sempre às explicações dos conteúdos matemáticos correspondem as aprendizagens esperadas dos alunos.

Assim, o objetivo é o de pesquisar fatores que poderiam contribuir para o aprimoramento das aprendizagens de conceitos matemáticos na Educação Superior. Nesta pesquisa, os alunos serão expostos a videoaulas devidamente selecionadas dos cursos de engenharia da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP) sobre limites e derivadas de funções de uma variável real, ou seja, conteúdos curriculares previstos na sua formação acadêmica. Após cada videoaula serão aplicados alguns exercícios sobre os conceitos apresentados na respectiva videoaula para coletar informações sobre o seu entendimento dos conceitos apresentados. A partir dessas informações faremos uma intervenção no sentido de apresentar novos elementos para a compreensão dos conceitos envolvidos. Em seguida, reaplicaremos os mesmos exercícios para investigarmos se os novos elementos apresentados pelo professor de modo presencial favoreceram a compreensão dos conceitos apresentados.

A participação do voluntário nessa pesquisa ocorrerá através (1) da presença na aula, (2) assistir às videoaulas, (3) resolução dos exercícios após as videoaulas e após as aulas presenciais e (4) assistir às aulas presenciais ministradas após às videoaulas. Todas as videoaulas serão apresentadas em Datashow com o uso de um equipamento de som bluetooth tipo soundbar com dois canais de áudio (26W RMS) para que os alunos tenham uma videoaula com excelente qualidade de som. Toda a aula será filmada com uma câmera de vídeo de alta definição, tanto a parte de exibição da videoaula, quanto todo o restante da aula, incluindo o período de intervenção e as aplicações dos exercícios.

Os vídeos, áudios e resoluções dos exercícios, bem como qualquer observação feita pelo voluntário poderão ser usados durante a qualificação, a defesa e a publicação da tese, porém de forma totalmente anônima, sem envolver qualquer identificação dos alunos. Nenhum aluno será filmado, nem mesmo os participantes da pesquisa. Durante a videoaula a câmera focará apenas a parte da parede da sala de aula onde está sendo feita a projeção pelo datashow da referida videoaula. Durante a aula do pesquisador também não haverá filmagem de nenhum aluno, pois a câmera focará apenas o pesquisador em ação no quadro branco ou de giz. Nas duas ocasiões, a câmera estará fixa num tripé sem ninguém manuseando-a. Será ligada no *início da videoaula e desligada ao final para a mudança de posição para ser novamente ligada no início da aula do pesquisador e desligada ao final. Os riscos mínimos previstos dizem respeito ao trânsito de algum aluno que precise sair de sala de aula para ir ao sanitário ou que precise sair por qualquer outro motivo e passe em frente à câmera. Caso ocorra a exposição da imagem do aluno, ela será retirada do vídeo através do corte do trecho do vídeo ou por uso do recurso de borrar imagem numa edição do vídeo. Se houver qualquer áudio não condizente com o ambiente de sala de aula, também será removido. A prioridade recai (a) nas videoaulas, (b) na resolução dos exercícios sem identificação do(a) aluno(a) e (c) na aula ministrada pelo pesquisador.*

Caso seja necessário se referir a alguma resolução de exercício, obviamente que a autoria dela será por meio de pseudônimos, sem qualquer possibilidade de identificação do aluno.

As identificações dos alunos serão exclusivamente para a finalidade de controle de frequência dos alunos, como ocorre em qualquer disciplina curricular do seu curso.

A participação dos voluntários, bem como a do pesquisador nessa pesquisa terá como resultado um trabalho que possa vir beneficiar novas gerações de estudantes através da aplicação da experiência apresentada nesse trabalho, por parte dos educadores que venham tomar conhecimento dessa pesquisa, e que implementem em suas aulas os conhecimentos adquiridos por meio desse trabalho.

As atividades previstas na pesquisa estão inseridas no plano de ensino da disciplina. Sua participação é voluntária. Você tem o direito de solicitar, a qualquer momento deste semestre: (1) o acesso às gravações efetuadas em sala de aula e (2) a retirada dos seus exercícios do material a ser utilizado pelo pesquisador para tabulação e análise dos dados.

Todos os procedimentos e interações previstos entre o pesquisador e os participantes estão fundamentados na observância das condições estabelecidas na Resolução no. 466 de 12 de dezembro de 2012 e na Resolução no. 510 de 07 de abril de 2016, com aprovação pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UNESP – Faculdade de Ciências, Campus Bauru (vide endereço e coordenação em epígrafe, acima).

Caso concorde em participar, você assinará o presente Termo de Consentimento Livre e Esclarecido em duas vias, sendo que a 1ª via lhe pertence e a 2ª via será arquivada pelo pesquisador.

Em caso de dúvidas, basta entrar em contato com o pesquisador.

Eu, ____, declaro ter sido informado e concordo em ser participante, do projeto de pesquisa acima descrito.

APÊNDICE B – IDENTIFICAÇÃO, APREDIZAGENS ESPERADAS E EXERCÍCIOS PREVISTOS PARA CADA VIDEOAULA

VIDEOAULA 1

IDENTIFICAÇÃO:

VD 1 – Limites – Parte 1 – Duração 22:11.

APRENDIZAGENS ESPERADAS:

Nessa unidade, espera-se que o participante

a) compreenda o conceito de limites e infinitésimos.
b) aplique o conceito de limites para determinar o limite de uma função.
c) reconheça os limites laterais como partes fundamentais no cálculo do limite de uma função.
d) reconheça a diferença entre limites infinitos e limites no infinito.
e) calcule limites no infinito de funções polinomiais utilizando a propriedade específica.
f) calcule limites infinitos.
g) identifique as formas indeterminadas presentes no cálculo de limites.

EXERCÍCIOS PREVISTOS:

1) Como você define limite de uma função?

   Essa questão atende ao tópico “Limite de uma função”. Objetiva por meio da definição de limite de uma função a compreensão do conceito de limites. O aluno deverá ser capaz de definir intuitivamente o limite de uma função, apresentando a seguinte resposta: seja $f{:}[a;b] \to \Re$ uma função e seja $c \in [a;b]$, dizemos que o limite de *f* quando *x* tende a *c* é *L*, se quando *x* se aproximar de *c*, os valores de *f(x)* se aproximarem do valor *L*. Ou utilizar suas próprias palavras para dar essa definição.

2) O quanto próximo de *f(x)* está *L*?

   Essa questão foi proposta para confirmar a compreensão da definição de limite de uma função da questão anterior. Objetiva a verificação da compreensão do conceito de infinitésimos. Espera-se que o aluno responda que *f(x)* está extremamente próximo de *L*. Ou apresentar essa ideia com suas próprias palavras, usando a representação que julgue mais adequada para essa resposta.

3) O quanto próximo de *x* está *c*?

Essa questão reforça a anterior e espera que o aluno responda que *x* está extremamente próximo de *c*. Ou apresentar essa ideia com suas próprias palavras, usando a representação que julgue mais adequada para essa resposta.

4) Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$:

Essa questão também atende ao tópico "Limite de uma função". Objetiva apresentar um dos casos do tópico "Formas indeterminadas" e verificar se o aluno compreendeu a técnica de eliminação da indeterminação apresentada na videoaula. Nessa questão, ele deverá demonstrar o domínio da fatoração de uma diferença entre dois cubos. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3$. Ou apresentar uma outra forma de resolução.

5) Calcule: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

Essa questão é um reforço da questão anterior. Porém, ele deverá demonstrar o domínio da fatoração de um trinômio do 2º grau. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1).(x-3)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x - 3) = -2$. Ou apresentar uma outra forma de resolução.

6) Qual é a diferença entre limite no infinito e limite infinito?

Essa questão atende aos tópicos "Limites infinitos e Limites no infinito". Objetiva verificar se o aluno é capaz de diferenciar os dois conceitos. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resposta: se *f(x)* tende ao infinito, temos um limite infinito. Se *x* tende ao infinito, temos um limite no infinito. Ou apresentar essa ideia com suas próprias palavras, usando a representação que julgue mais adequada para essa resposta.

7) Calcular: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x}$

Essa questão atende ao tópico "Limites laterais". Objetiva verificar se o aluno percebe a necessidade de calcular $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x}$ e $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x}$ para poder concluir sobre a existência do limite proposto. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resposta: como $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x} = -\infty$, conclui-se que não existe o limite proposto. Ou apresentar uma outra forma de resolução.

8) Calcular: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1}{3x^6 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x + 4}$

Essa questão atende ao tópico "Limite no infinito". Objetiva verificar se o aluno domina a propriedade de limites no infinito para uma razão entre funções polinomiais. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{3x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x}=0$. Ou apresentar uma outra forma de resolução.

9) Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}$

Essa questão foi proposta para chamar a atenção do aluno que, mesmo apresentando uma destacada razão entre polinômios, não se trata de um limite no infinito, pois *x* está tendendo a 1, logo não se deve aplicar a propriedade utilizada no exercício anterior. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^6+7x^5-3x^4-5x^3+x^2-4x+1}{3x^6-x^5+3x^4-2x^3-x^2+6x+4}=\frac{2.1^6+7.1^5-3.1^4-5.1^3+1^2-4.1+1}{3.1^6-1^5+3.1^4-2.1^3-1^2+6.1+4}=\frac{-1}{12}=-\frac{1}{12}$. Ou apresentar uma outra forma de resolução.

<u>VIDEOAULA 2</u>

IDENTIFICAÇÃO:

VD 2 – Limites – Parte 2 – Duração 21:09.

APRENDIZAGENS ESPERADAS:

Nessa unidade, espera-se que o participante

a) opere com as propriedades operatórias dos limites.
b) reconheça outras formas indeterminadas.
c) reconheça os limites fundamentais.
d) calcule limites de funções que utilizam limites fundamentais.
e) conceitue continuidade de funções.

EXERCÍCIOS PREVISTOS:

1) Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Essa questão atende ao tópico “Limites fundamentais”. Objetiva apresentar uma das estratégias de eliminação de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e verificar se o aluno compreendeu a técnica de eliminação da indeterminação apresentada na videoaula. Nessa questão, ele deverá demonstrar o domínio de produtos notáveis, utilizando o caso do produto da soma pela diferença de dois termos, que permite ao aluno fazer uma racionalização do numerador. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1).(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$. Ou outra resolução qualquer.

2) Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4senx}{3x}$

Essa questão atende ao tópico "Limites fundamentais". Objetiva apresentar uma das estratégias de utilização de um limite fundamental, onde o aluno deverá ser capaz de perceber que a função *f(x)* = $\frac{4senx}{3x}$ pode ser representada como um produto de duas outras funções, ou seja, que *f(x)* = *g(x).h(x)*, onde *g(x)* = $\frac{4}{3}$ e *h(x)* = $\frac{senx}{x}$. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4senx}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{senx}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x} = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}$. Ou outra resolução qualquer.

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{2x^3+2x^2+8}{x^2+2x-4}}$ utilizando os teoremas básicos.

Essa questão atende ao tópico "Propriedades operatórias dos limites". Objetiva apresentar a utilização das propriedades operatórias para o cálculo de um limite. O aluno deverá encontrar o valor desse limite de maneira direta, porém consciente de que esse cálculo direto somente é possível por estar respaldado pelas propriedades operatórias dos limites. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{2x^3+2x^2+8}{x^2+2x-4}} = \sqrt[3]{\frac{2.2^3+2.2^2+8}{2^2+2.2-4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Ou outra resolução qualquer.

4) Defina função contínua com suas próprias palavras?

Essa questão atende ao tópico "Continuidade de funções". Objetiva apresentar a definição de função contínua. O aluno deverá ser capaz de compreender a seguinte definição:

Uma função *f* = *f(x)* é contínua em *c* se:

i) Existe *f(c)*, isto é, $c \in$ Dom *f;*

ii) Existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$*;*

iii) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Ou, simplesmente, que o aluno apresente a seguinte resposta: é toda função em que seu gráfico não apresenta "buracos", "falhas" ou "saltos" em todo o seu domínio. Ou que responda com suas palavras, desde que transmita essa ideia.

5) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{x(x+4)} - x]$

Essa questão também atende ao tópico "Formas indeterminadas". Objetiva apresentar uma indeterminação do tipo ∞ - ∞ (*que não foi tratada na videoaula, porém temos o objetivo de* *verificar se a teoria de limites dada nas duas videoaulas sobre o assunto daria conta de resolver questões sobre limites desse tipo*) e verificar se o aluno consegue realizar manipulações algébricas que favoreçam a eliminação da indeterminação. Nessa questão, ele deverá demonstrar o domínio de produtos notáveis, utilizando o caso do produto da soma pela diferença de dois termos, que permite ao aluno fazer uma racionalização do numerador. Além de calcular um limite no infinito para quociente de funções polinomiais. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução:

$\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{x(x+4)}-x] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x(x+4)}-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{x(x+4)}+x}{\sqrt{x(x+4)}+x}\right] =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x(x+4)}+x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}\right] =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4x}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x})}+x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}\right] = \frac{4}{2} = 2.$ Ou outra resolução qualquer para esse limite.

6) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

Essa questão atende ao tópico "Limites fundamentais". Objetiva apresentar uma das estratégias de utilização de um limite fundamental, onde o aluno deverá ser capaz de perceber que o limite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$ pode ser resolvido com a ajuda do limite fundamental $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (*que também não foi tratado na videoaula, porém temos o objetivo de verificar se a teoria de limites dada nas duas videoaulas sobre o assunto daria conta de resolver questões sobre limites desse tipo*). Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{5k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^5 = \left[\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^5 = e^5$. Ou outra resolução qualquer para esse limite.

7) Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

Essa questão atende ao tópico "Limites fundamentais". Objetiva apresentar uma das estratégias de utilização de um limite fundamental, onde o aluno deverá ser capaz de perceber que o limite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$ pode ser resolvido com a ajuda do limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$ (*que também não foi tratado na videoaula, porém temos o objetivo de verificar se a teoria de limites dada nas duas videoaulas sobre o assunto daria conta de resolver questões sobre limites desse tipo*). Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução:

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{k \to 0} \frac{e^k-1}{\frac{k}{3}} = \lim_{k \to 0} \left[3 \cdot \left(\frac{e^k-1}{k}\right)\right] = \lim_{k \to 0} 3 \cdot \lim_{k \to 0} \frac{e^k-1}{k} = 3 \cdot 1 = 3$. Ou outra forma de resolução para esse limite.

VIDEOAULA 3

IDENTIFICAÇÃO:

VD 3 – Derivada – Duração 18:43.

APRENDIZAGENS ESPERADAS:

Nessa unidade, espera-se que o participante

a) conceitue derivada de uma função.
b) interprete geometricamente e fisicamente a derivada de uma função.

EXERCÍCIOS PREVISTOS:

1) Um objeto se move de modo que no instante t a distância é dada por $s(t) = t^3 - 3t$ (s em metros e t em segundos). Qual é a velocidade e a aceleração desse objeto no instante t = 2s? Essa questão atende ao tópico "Interpretar fisicamente a derivada de uma função". Objetiva verificar a compreensão do aluno sobre como a derivada de uma função é interpretada a partir de conceitos da física. Nessa questão o aluno deve perceber que a aceleração instantânea é obtida a partir da derivada da função velocidade no instante t = 2s e que a velocidade instantânea é obtida a partir da derivada da função que representa a distância percorrida no instante t = 2s. Espera-se que o aluno apresente a seguinte resolução:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(t^3 - 3t) - (t_0{}^3 - 3t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{t^3 - 3t - t_0{}^3 + 3t_0}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{t^3 - t_0{}^3 - 3t + 3t_0}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(t^3 - t_0{}^3) - 3(t - t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)(t^2 + t \cdot t_0 + t_0{}^2) - 3(t - t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)(t^2 + t \cdot t_0 + t_0{}^2 - 3)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} (t^2 + t \cdot t_0 + t_0{}^2 - 3) = t_0{}^2 + t_0 \cdot t_0 + t_0{}^2 - 3 = t_0{}^2 + t_0{}^2 + t_0{}^2 - 3 = 3t_0{}^2 - 3$$

Como $v(t_0) = 3t_0{}^2 - 3$, temos, de forma geral, que $v(t) = 3t^2 - 3$. Dessa forma, para $t = 2s$, $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9\ m/s$ e

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(3t^2 - 3) - (3t_0{}^2 - 3)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{3t^2 - 3 - 3t_0{}^2 + 3}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{3t^2 - 3t_0{}^2}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{3(t^2 - t_0{}^2)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{3(t + t_0)(t - t_0)}{t - t_0} =$$

$$\lim_{t \to t_0} 3(t + t_0) = 3(t_0 + t_0) = 3(2 \cdot t_0) = 6 \cdot t_0$$

Como $a(t_0) = 6 \cdot t_0$, temos, de forma geral, que $a(t) = 6 \cdot t$. Dessa forma, para $t = 2s$, $a(2) = 6 \cdot 2 = 12\ m/s^2$. Ou outro modo de resolver o problema.

2) Como você define a derivada de uma função em um ponto dado?

   Essa questão atende aos tópicos “Definir a derivada de uma função e Interpretar geometricamente a derivada de uma função”. Objetiva verificar se o aluno será capaz de definir a derivada de uma função em um ponto dado. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: Seja $f:]a, b[\to \Re$ e $c \in]a, b[$. Dizemos que f é derivável em c, se existir e for finito o limite $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Ele também poderá responder a essa questão, atribuindo o significado geométrico da derivada de uma função em um ponto dado, ou seja, $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto de coordenadas $(c, f(c))$. Resumidamente, $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Ou utilizando suas próprias palavras.

3) Como você define derivada de uma função em um ponto qualquer?

   Essa questão também atende ao tópico “Definir a derivada de uma função”. Objetiva verificar se o aluno será capaz de generalizar a definição da questão anterior. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: após determinar a função $f'(c)$, que representa a derivada da função f em um ponto dado de abscissa c, fazemos a generalização para $f'(x)$, onde x representa a abscissa de um ponto qualquer do gráfico de f. Ou utilizando suas próprias palavras.

4) Quais são as notações para a derivada de uma função?

Essa questão atende ao tópico "Definir a derivada de uma função". Objetiva verificar se o aluno conhece as notações mais usuais da derivada de uma função. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ou $\frac{df}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Ou a notação utilizada por muitos físicos.

5) Por que uma função derivável é contínua?

Essa questão atende aos tópicos "Definir a derivada de uma função e Continuidade de funções". Objetiva verificar se o aluno compreende que as condições para que uma função seja derivável são suficientes para que a mesma função seja contínua. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: vamos mostrar que $\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = 0$. De fato, pois

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) =$$

$$\lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} f(c) =$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) =$$

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] =$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c) =$$

$f'(c) \cdot 0 = 0$. Ou utilizando suas próprias palavras.

6) Por que uma função contínua, nem sempre é derivável?

Essa questão também atende aos tópicos "Definir a derivada de uma função e Continuidade de funções". Objetiva verificar se o aluno compreende que as condições para que uma função seja contínua não são suficientes para que a mesma função seja derivável. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: basta tomar a função $f(x) = |x|$ como um contraexemplo, pois sabemos que ela é contínua, mas não é derivável em $x = 0$. Ou utilizando suas próprias palavras.

<u>VIDEOAULA 4</u>

IDENTIFICAÇÃO:

VD 4 – Regras de Derivação – Parte 1 – Duração 20:26.

APRENDIZAGENS ESPERADAS:

Nessa unidade, espera-se que o participante

a) compreenda e aplique as regras de derivação de uma função constante, da função identidade e de uma função potência.
b) compreenda e opere com as propriedades da derivada de uma soma de funções e do produto de uma constante por uma função.
c) compreenda e aplique as regras de derivação da função $f(x) = senx$ e da função $f(x) = cosx.$
d) compreenda e opere com a regra de derivação do produto entre duas funções.

EXERCÍCIOS PREVISTOS:

Calcule a derivada das seguintes funções:

1) $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2$

Essa questão atende aos tópicos "Derivada de uma função constante", "Derivada da função identidade" e "Derivada de uma função potência". Objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar as regras básicas de derivação associadas às propriedades da derivada de uma soma de funções e do produto de uma constante por uma função, com destaque para a transformação de quocientes que envolvem potências de expoentes inteiros positivos em produtos de constantes por potências de expoentes inteiros negativos. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + x + 2 \Rightarrow y = x^4 - 2x^{-3} - 8x^{-1} + x + 2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 6x^{-4} + 8x^{-2} + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^2} + 1$. Ou outra resolução.

2) $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

Essa questão atende ao tópico "Derivada de uma função potência". Objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar a regra básica de derivação de uma potência associada às propriedades da derivada de uma soma de funções e do produto de uma constante por uma função, com destaque para a transformação de radicais em potências de expoentes fracionários. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = \sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow y = x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{4}} - 4x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{5x^{\frac{3}{5}}} - \frac{3}{4x^{\frac{3}{4}}} + \frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}} \Rightarrow y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}} \Rightarrow y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. Ou outra resolução.

3) $y = 3senx + 4cosx$

Essa questão atende aos tópicos "Derivada da função $f(x) = senx$ e Derivada da função $f(x) = cosx$". Objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar as regras básicas de derivação das funções seno e cosseno. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = 3senx + 4cosx \Rightarrow y' = 3cosx + 4(-senx) \Rightarrow y' = 3cosx - 4senx$. Ou outra resolução.

4) $y = (4x^2 + 2x - 3).(5x^2 - 8x + 4)$

Essa questão atende ao tópico "Derivada do produto entre duas funções". Objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar a regra de derivação para um produto entre duas funções, com destaque para a comparação entre o cálculo feito com o uso da regra e o cálculo feito utilizando a propriedade distributiva de imediato. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = (4x^2 + 2x - 3).(5x^2 - 8x + 4) \Rightarrow y' = (4x^2 + 2x - 3).(10x - 8) + (5x^2 - 8x + 4).(8x + 2) \Rightarrow y' = 40x^3 - 32x^2 + 20x^2 - 16x - 30x + 24 + 40x^3 + 10x^2 - 64x^2 - 16x + 32x + 8 \Rightarrow y' = 80x^3 - 66x^2 - 30x + 32$. Ou outra forma de se resolver.

5) $y = x^3cosx$

Essa questão também atende ao tópico "Derivada do produto entre duas funções". Objetiva verificar se o aluno será capaz de perceber que, nesse caso, aplicar a regra de derivação para um produto entre duas funções é a forma mais eficiente para se obter a derivada. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta:
$y = x^3cosx \Rightarrow y' = x^3(-senx) + (cosx)3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2cosx - x^3senx$. Ou outro modo de resolução.

<u>VIDEOAULA 5</u>

IDENTIFICAÇÃO:
VD 5 – Regras de Derivação – Parte 2 – Duração 21:32.

APRENDIZAGENS ESPERADAS:
Nessa unidade, espera-se que o participante

a) compreenda e aplique as regras de derivação das funções $f(x) = a^x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = log_a(x)$ e $f(x) = ln(x)$.
b) compreenda e aplique a regra de derivação do quociente entre duas funções.
c) compreenda e aplique as regras de derivação das funções $f(x) = tg(x)$, $f(x) = cotg(x)$, $f(x) = sec(x)$ e $f(x) = cossec(x)$.

EXERCÍCIOS PREVISTOS:

Calcule a derivada das seguintes funções:

1) $y = \frac{1}{x^3}$

Essa questão atende ao tópico "Derivada do quociente entre duas funções". Objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar a regra de derivação para um quociente entre duas funções. Porém, o destaque será verificar sua capacidade de realização do cálculo sem o uso dessa regra. Espera-se que ele apresente uma dentre as seguintes respostas: $y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = \frac{x^3.0 - 1 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} \Rightarrow y' = \frac{-3x^2}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{-3}{x^4}$ ou $y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-4} \Rightarrow y' = \frac{-3}{x^4}$.

2) $y = \frac{\pi}{x^2} + log(4)$

Essa questão também atende ao tópico "Derivada do quociente entre duas funções". Também objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar a regra de derivação para um quociente entre duas funções. Além de verificar sua capacidade de realização do cálculo sem o uso dessa regra, observará se ele percebe que log 4 é uma constante. Espera-se que ele apresente uma dentre as seguintes respostas: $y = \frac{\pi}{x^2} + log(4) \Rightarrow y' = \frac{x^2.0 - \pi.2x}{(x^2)^2} + 0 \Rightarrow y' = \frac{-2\pi.x}{x^4} \Rightarrow y' = \frac{-2\pi}{x^3}$ ou $y = \frac{\pi}{x^2} + log(4) \Rightarrow y = \pi.x^{-2} + log(4) \Rightarrow y' = -2\pi.x^{-3} + 0 \Rightarrow y' = \frac{-2\pi}{x^3}$.

3) $y = x^3 \sqrt[4]{x^3}$

Essa questão atende ao tópico "Derivada do produto entre duas funções" da videoaula anterior. Porém, objetiva verificar se o aluno, assim como nas duas questões anteriores sobre regra do quociente, será capaz de realizar o cálculo sem o uso específico dessa regra. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = x^3 \sqrt[4]{x^3} \Rightarrow y = x^3.x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y = x^{\frac{15}{4}} \Rightarrow y' = \frac{15}{4}x^{\frac{11}{4}} \Rightarrow y' = \frac{15}{4}\sqrt[4]{x^{11}} \Rightarrow y' = \frac{15}{4}\sqrt[4]{x^4.x^4.x^3} \Rightarrow y' = \frac{15}{4}x.x\sqrt[4]{x^3} \Rightarrow y' = \frac{15}{4}x^2\sqrt[4]{x^3}$.

4) $y = xtg(x)$

Essa questão atende ao tópico "Derivada da função $f(x) = tg(x)$". Objetiva verificar se o aluno realizará o cálculo usando diretamente a regra da derivada da função tangente ou se utilizará a regra do quociente para determinar a derivada da função tangente a partir da razão $\frac{sen(x)}{cos(x)}$. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = xtg(x) \Rightarrow y' = xsec^2(x) + tg(x)$. Ou calcule primeiro a derivada da função $f(x) = tg(x)$, usando a razão $\frac{sen(x)}{cos(x)}$ para depois utilizar o resultado na derivada do produto. Para fazer esse cálculo deverá proceder da seguinte maneira:

$f(x) = tg(x) \Rightarrow f(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{cos(x).cos(x) - sen(x).(-sen(x))}{cos^2(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \Rightarrow f'(x) = sec^2(x).$

5) $y = x^4 ln(x)$

Essa questão atende ao tópico "Derivada da função $f(x) = ln(x)$". Objetiva verificar se o aluno aplicará de maneira correta a regra da derivada da função logaritmo natural dentro da derivada de um produto. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = x^4 ln(x) \Rightarrow y' = x^4.\frac{1}{x} + (ln(x)).4x^3 \Rightarrow y' = x^3 + 4x^3 ln(x) \Rightarrow y' = x^3(1 + 4ln(x)) = x^3(1 + ln(x^4)).$

6) $y = \frac{x+2}{x^2-2x-4}$

Essa questão também atende ao tópico "Derivada do quociente entre duas funções". Objetiva verificar se o aluno será capaz de aplicar a regra de derivação para um quociente entre duas funções envolvendo uma razão entre dois polinômios. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = \frac{x+2}{x^2-2x-4} \Rightarrow y' = \frac{(x^2-2x-4).1-(x+2)(2x-2)}{(x^2-2x-4)^2} \Rightarrow y' = \frac{x^2-2x-4-2x^2+2x-4x+4}{(x^2-2x-4)^2} \Rightarrow y' = \frac{-x^2-4x}{(x^2-2x-4)^2}.$

7) $y = \frac{2x^4}{e^x}$

Essa questão atende ao tópico "Derivada da função $f(x) = e^x$". Objetiva verificar se o aluno aplicará de maneira correta a regra da derivada da função exponencial de base "e" dentro da derivada de um quociente. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = \frac{2x^4}{e^x} \Rightarrow y' = \frac{e^x.8x^3-2x^4.e^x}{(e^x)^2} \Rightarrow y' = \frac{2x^3e^x(4-x)}{(e^x)^2} \Rightarrow y' = \frac{2x^3(4-x)}{e^x}.$

VIDEOAULA 6

IDENTIFICAÇÃO:

VD 6 – Regra da Cadeia – Duração 22:09.

APRENDIZAGENS ESPERADAS:

Nessa unidade, espera-se que o participante

- reconheça uma função composta.

- compreenda e aplique a regra da cadeia.

EXERCÍCIOS PREVISTOS:

Calcule a derivada das seguintes funções:

1) $y = (x^2 + 1)^5$

   Essa questão atende ao tópico "Derivada de funções compostas". Objetiva verificar se o aluno conseguirá identificar uma função composta e se aplicará de maneira correta a regra da cadeia para calcular sua derivada. Essa questão foi proposta para desestimular o aluno a desenvolver a potência para determinar a derivada sem o uso da regra da cadeia. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = (x^2 + 1)^5 \Rightarrow y' = 5(x^2 + 1)^4 . 2x = 10x(x^2 + 1)^4$.

2) $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

   Essa questão também atende ao tópico "Derivada de funções compostas". Objetiva verificar se o aluno conseguirá identificar uma função composta e se aplicará de maneira correta a regra da cadeia para calcular sua derivada. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \Rightarrow y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{2}{3}} . (2x + 1) \Rightarrow y' = \frac{2x+1}{3.(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow y' = \frac{2x+1}{3.\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

3) $y = sen(2x) + tg(4x)$

   Essa questão também atende ao tópico "Derivada de funções compostas". Objetiva verificar se o aluno conseguirá identificar as duas funções compostas e se aplicará de maneira correta a regra da cadeia para calcular suas derivadas, utilizando a propriedade da adição de derivadas para dar o resultado. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = sen(2x) + tg(4x) \Rightarrow y' = (\cos(2x)) . 2 + \left(sec^2(4x)\right) . 4 = 2\,cos(2x) + 4\,sec^2(4x)$.

4) $y = e^{5x} . ln(x^2 - 2)$

   Essa questão também atende ao tópico "Derivada de funções compostas". Objetiva verificar se o aluno conseguirá identificar as duas funções compostas e se aplicará de maneira correta a regra da cadeia para calcular suas derivadas, utilizando a regra do produto para dar o resultado. Espera-se que ele apresente a seguinte resposta: $y = e^{5x} . ln(x^2 - 2) \Rightarrow y' = e^{5x} \cdot \frac{1}{x^2-2} \cdot 2x + [ln(x^2 - 2)]e^{5x} \cdot 5 = \frac{2xe^{5x}}{x^2-2} + 5e^{5x}ln(x^2 - 2)$.

APÊNDICE C – TRANSCRIÇÕES DAS VIDEOAULAS

VIDEOAULA 1

TEMPO DE GRAVAÇÃO

22 minutos e 11 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:08:56] “Olho para esse $x^2 - 9$, que está sobre $x - 3$, e fatoro $x^2 - 9$ usando diferença de quadrados. Lembra $x^2 - 9$, nós vimos nas nossas aulas de matemática, naquela disciplina preparatória, fatoração de diferença de quadrados $(x - 3)(x + 3)$. $x - 3$ e $x - 3$ podem ser cancelados, então fica só $x + 3$, e quando x tende a 3, $x + 3$, tudo se passa como se aqui se aproximasse de 3, de fato, a soma se aproxima de 6. Essa função se parece, se você fizer um gráfico, com aquele caso 2 dos três gráficos que eu mostrei, em que a função não está definida no 3, lá naquele exemplo era 1, claro, eu troquei, mas aqui no caso seria o 3, ela não está definida no 3, tem uma bolinha aberta ali, mas fora do 3, ela atende muito bem para o 6. Isso que a gente fez chama-se eliminar a indeterminação”. [00:10:01]

[00:12:49] Limites também podem ser tratados quando a variável vai para o infinito e da mesma forma que a gente interpretou quando o x se aproxima de c, eu olho o que acontece com a imagem. Vamos ver aqui: quando x vai para infinito, ou seja, quando x fica muito grande, o que acontece com 1 sobre x, o inverso de um número muito grande é um número muito pequeno, limite é 0. $-5x^3$, quando x tende para infinito, bom, x ficando muito grande, x^3 fica muito grande, multiplicado por 5, continua um número que vai crescendo cada vez mais, com o menos ele vai tender para menos infinito. Raiz cúbica de $2x + 5$, x tendendo para infinito, $2x$ tende para infinito, com mais 5 tende para infinito e raiz cúbica de um número que cresce indefinidamente, também vai continuar crescendo e a raiz cúbica de $2x + 5$, quando x tende a infinito, o limite é mais infinito. Então essa ideia que nós estamos começando a analisar de limites, também pode ser tratada quando o x vai para infinito e o resultado pode ser infinito também. [00:14:07]

[00:19:24] Quando eu tenho $3x^2$ + 2 sobre x + 1, uma coisa que eu posso fazer para ver o limite quando x tende a mais infinito, porque é mais infinito e mais infinito, é técnica que vai dar certo sempre, fatora o termo de maior grau, fatorei $3x^2$ e x, observe que se eu fatoro o de maior grau, o primeiro termo vai ser sempre 1, 1 mais 2 sobre o $3x^2$ e aqui 1 mais 1 sobre x. Olha que bonitinho, o $3x^2$ e o x eu posso cancelar, deu $3x$, e todos os que estão entre parentes vão tender a 1, porque como eu coloquei em evidência o de maior grau, esse tende a 1 e esses outros todos tendem a 0, porque o x está indo para infinito e tem expoente embaixo, está tudo indo para 0, então acaba dominando o de maior grau. E se você fizer isso com $3x^4$, com $5x^4$, põe em evidência $3x^4$ e $5x^4$, x^4 vai cancelar com x^4, ao contrário desse que era x^2 e x, cancelou e sobrou um x, aqui é x^4, x^4, vai cancelar o x e vai sobrar o 3 e o 5, e os outros termos dentro do parênteses todos vão ser dominados por esse primeiro termo 1, então vai ficar um $3x^4$, um $5x^4$, cancelo x^4, 3 sobre 5, os outros todos 1, limite 3 sobre 5. E você pode generalizar esse fato, sempre que você tiver um quociente de funções polinomiais, basta olhar os termos de maior grau, os termos de maior grau são dominantes. Isso é muito bonito, a gente vai fazer mais exercícios com isso. [00:21:02]

VIDEOAULA 2

TEMPO DE GRAVAÇÃO

21 minutos e 09 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:00:48] O que nós vimos na aula passada? Em alguns cálculos de limite nós podemos fazer o cálculo diretamente, não havia nenhum obstáculo, o que eu chamava de indeterminação ou condição de existência, nada impedia. Limite para x tendendo a 2 do logaritmo na base 2 de $2x$ + 4, $3x$ menos 4, se eu substituir x por 2 fica log de 4 mais 4, 8, sobre 6 menos 4, 2, log de 8 na base 2 é o expoente tal que 2 a ele vai dar 8, esse é o expoente 3, log de 8 na base 2 é 3, sobre 2, limite três meios, básico, deu para fazer a conta, fizemos. Às vezes nós temos que eliminar a indeterminação. Limite para x tendendo a 5 de $\sqrt{x} - \sqrt{5}$ sobre x – 5, observe que se eu substituir x por 5 fica $\sqrt{5}$ – $\sqrt{5}$ que é 0, 5 – 5 que é 0 e eu não consigo fazer a conta. Mas se eu multiplicar em cima e embaixo por $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, é o conjugado do de cima, porque isso é uma diferença de quadrados, $(a - b)(a + b)$ é o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, isso vai me fornecer x – 5, que vai se cancelar com esse x – 5 aqui debaixo, fica x – 5 em cima e em baixo, e aqui embaixo vai sobrar 1 sobre $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, que não dá problema para calcular quando x tende a 5, porque é uma soma das duas raízes, então a gente multiplica em cima e embaixo por $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, faz o produto da diferença de quadrado, x – 5 cancela com o debaixo, um sobre $\sqrt{x} + \sqrt{5}$, x tendendo a 5, a conta fica normal, 1 sobre $2\sqrt{5}$, que se nós racionalizarmos dá $\sqrt{5}$ sobre 10. Bom, isso chama-se eliminar a indeterminação. [00:02:42]

[00:17:06] Esse exercício[14] motiva a seguinte consideração: nós dizemos que uma função é contínua em um ponto c, se, primeiro de tudo, existe $f(c)$, quer dizer: se c está no domínio. Se existe o limite para x tendendo aquele ponto e se o valor da função no ponto é igual o limite da função no ponto. Então tem três coisas para ser continua: primeiro tem que estar definida no ponto, que é óbvio, se uma função não está definida no ponto, não vou falar nada daquele ponto. Então primeiro imagine que existe a função definida no ponto, imagina que exista o limite para x tendendo ao ponto, imagine que o limite e o valor da função, ambos existem, as duas existências estão garantidas no 1 e no 2, se esses dois são iguais, então a função é contínua. [00:18:00]

<u>VIDEOAULA 3</u>

TEMPO DE GRAVAÇÃO
18 minutos e 43 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO
Padrão

[00:01:13] A gente tem um conceito de variação média de uma de uma grandeza que é o que a gente chama de $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, Δf é a variável dependente e x é a variável independente e a variação daquela grandeza em relação à variação do parâmetro, pode ser variação de preços, preço final menos preço inicial dividido pelo tempo, pode ser a posição de uma partícula, pode ser qualquer grandeza que você tenha essa relação de dependência. Variação da grandeza do valor

---

[14] $Calcule\colon \lim_{x\to 1}\begin{cases} 2x+5, se\ x \geq 1 \\ x^2+5, se\ x < 1 \end{cases}$

dependente dividido pelo valor independente. E a gente tem a variação instantânea que é o limite disso quando esse intervalo na variável independente fica muito pequeno, então aqui é o limite para x_1 tendendo a x_2 do $f(x_1)$ menos $f(x_2)$, x_1 menos x_2, isso é a variação média, eu faço o limite para esse x_1 se aproximando desse x_2, limite no sentido que nós estudamos nas aulas anteriores e isso chama-se variação instantânea. É o limite para o Δx tendendo a 0 do Δf sobre Δx. A importância das aulas anteriores está no seguinte: quando você fizer x_1 tendendo a x_2, não vai dar para calcular esse limite por substituição, porque se eu fizer x_1 = x_2 da $f(x_2)$ menos $f(x_2)$ que é zero, x_2 menos x_2 que é zero, pela própria construção do conceito de taxa de variação não dá para calcular o limite por substituição direta, a gente recai sempre em um daqueles casos que eu chamei nas aulas anteriores de indeterminação e que a gente tinha a tarefa de, ou usar algum teorema específico, ou eliminar a indeterminação. Então no conceito de derivada, isso vai acontecer sempre. Por isso que a gente precisa de uma base de limites para poder avançar aqui. [00:03:06]

[00:06:14] Formalizando essa ideia nós obtemos o seguinte: se uma função definida no intervalo aberto, aqui eu vou querer aberto, e um ponto interior no intervalo aberto, eu vou dizer que a função é derivável nesse ponto c, se existir e for finito o limite $f(x)$ menos $f(c)$, x menos c, exatamente o limite da taxa de variação como nos exemplos anteriores. Se esse limite existir e for finito, então eu digo que a função é derivável no ponto. [00:06:47]

[00:06:49] Antes de continuar com as interpretações vamos fazer alguma continha para ver exemplo de função que é derivável, função que não é derivável. A notação para isso vai ser $f'(c)$ ou $\frac{df}{dx}$ no ponto c, justamente o limite do $f(x)$ menos $f(c)$, x menos c, limite da razão incremental. Essas são as duas notações clássicas, existe também uma notação que é $\dot{f}$, um pontinho em cima, mas é bem menos usado. Noção de taxa de variação: taxa de variação da posição é velocidade, da velocidade é aceleração, da aceleração é aceleração da aceleração, de preços é inflação, de população é taxa de crescimento, portanto uma gama enorme de aplicações. [00:07:37]

[00:07:38] Significado geométrico disso: a derivada no ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto de coordenada $(a, f(a))$. Então o significado do cinemático é o que eu acabei de falar, da posição é a velocidade, agora o geométrico é o coeficiente angular da reta tangente. Entender isso com mais cuidado, isso é bem sutil. Você pega uma função, eu quero focar no ponto de abscissa 2, esse ponto, eu gostaria de calcular a reta tangente ao gráfico nesse ponto. Se eu tenho, eu sei que ela passa pelo ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, nesse caso aqui. Eu preciso saber o coeficiente angular da reta para obter equação da reta tangente. Como é que eu obtenho o coeficiente angular? Olha que observação interessante! É fácil obter o coeficiente angular da reta secante ao gráfico, secante precisa de dois pontos. O $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto base, vai ficar fixado. Pegar um ponto auxiliar, no meu exemplo é $(3, 4)$, e vou pegar a reta secante que passa por esses dois pontos, reta secante está em verde aqui, reta secante passando por esses dois pontos. O coeficiente angular da secante é $f(x)$ menos $f(a)$ dividido por x menos a. Esse é o coeficiente angular da secante, quando eu tenho a reta secante que passa por dois pontos se eu pegar o Δf sobre o Δx dá cateto oposto por cateto adjacente em um triângulo aqui e tangente desse ângulo, cateto oposto sobre adjacente é tangente desse ângulo, tangente desse ângulo é o coeficiente angular. Então o coeficiente angular da reta secante é $f(x)$ menos $f(a)$ sobre x menos a. Como que daí eu vou para tangente? Eu vou fazer a secante tender para posição tangente. Como que eu faço a secante tender para posição tangente? O ponto base $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ vai ficar parado, esse ponto vai andar se aproximando do ponto $(2, f(2))$, isso vai me fazer o limite disso quando x tende a a. O jeito de chegar na tangente é fazer a secante se aproximar da tangente fazendo esse ponto descer em direção a esse. Olha como isso é bonito! Como isso é rico! E aí fazer esse ponto tender para cá faz com que o coeficiente da secante, o x tende a a, então esse limite é o coeficiente angular da tangente. Então, olha que bonito! O coeficiente angular da reta tangente é a derivada no ponto. É uma outra maneira de chegar nesse conceito. E aí a equação da reta tangente, o significado geométrico é o coeficiente angular, a equação da reta tangente fica y menos y_0 ou $f(a)$, x menos a, é igual a $f'(a)$, que é equação usual de reta tangente. y menos y_0, x menos x_0 é igual ao coeficiente angular. [00:11:13]

<u>VIDEOAULA 4</u>

TEMPO DE GRAVAÇÃO

20 minutos e 26 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:02:35] Vou fazer um exemplo de uma função do tipo polinomial, x^4, vocês podem observar que há por trás disso uma estratégia e que vai funcionar igualzinha, se for x^5 ou x^6 com adaptação mais simples. Então pensemos na função x^4, eu quero calcular a derivada no ponto p, é o limite para x tendendo a p, a função calculada em x, que é x^4, p^4, e x menos p. Nas nossas aulas de matemática básica nós recordamos a estratégia de fatoração de uma expressão desse tipo: x elevado à potência menos y elevado a mesma potência. E esse x^4 menos p^4 se fatora assim: x menos p, e aí uma série de termos de grau 3 começando com toda potência em x, x^3, aí vai diminuindo uma unidade no expoente de x e passando para o expoente do p, que fica x^2p, xp^2 e p^3, todos os sinais de mais, esse x menos p cancela com esse x menos p, sobram quatro termos, não é coincidência, quatro, porque aqui era x^4, se eu tivesse fazendo com x a quinta, sobrariam cinco termos, todos os termos são de grau 3, x está tendendo a p, já cancelamos o x menos p, não tem mais indeterminação, todos os termos vão ficar iguais a p^3, porque o x está atendendo a p e todos eles têm soma de expoente 3, e eu fico com quatro termos p^3, então a derivada é $4p^3$, se eu tivesse fazendo com x^5, eu teria cinco termos de ordem 4, de grau 4, e a derivada daria $5p^4$. Isso vale para qualquer p, então eu vou agora escrever com a variável x, eu digo que se a função é a função x^4, a derivada em qualquer p é $4p^3$, isso cria uma nova função, que eu vou escrever como variável x, que é a função derivada, que é $4x^3$, então dada uma função do tipo potência, x elevado a um expoente, a derivada foi obtida abaixando esse expoente, 4, e uma unidade a menos, isso não é uma regrinha que vem do nada, ela vem daquela fatoração que a gente acabou de fazer. Isso vale para qualquer expoente que eu coloque aqui no lugar do 4, se eu colocar x^5, a regra vai ser que a derivada é $5x^4$ e, na verdade, vale para qualquer expoente, mesmo que não seja um número inteiro. Essa regra de derivação, ela, é bastante ampla e eu vou em seguida fazer vários exemplos com diferentes expoentes. Importante, então, observar que vale para qualquer expoente, esse expoente não precisa ser inteiro, eu acabei de fazer um x^4, estou observando que valeria para qualquer expoente inteiro do tipo x^5 ou x^6, mas na verdade vale para qualquer expoente, nós vamos fazer vários exemplos deste tipo. [00:05:44]

[00:05:45] Então aqui já tem alguns exemplos para mostrar a amplitude desta regra, se eu tivesse x^{10}, faria aquele mesmo limite, aquela mesma fatoração e a derivada era $10x^9$. Se eu tenho raiz de x, essa é uma função que é importante vocês estarem muito familiarizados com a derivada de raiz, ela aparece muito e, aí, é bom que a gente rapidamente consiga escrever a derivada. Raiz de x, a derivada vai ser 1 sobre 2 raiz de x e vamos ver por quê. Porque raiz de x elevado a meio, pela regra que nós acabamos de analisar a derivada eu abaixo o expoente meio por isso que vai ter esse 2 aqui no denominador e o x elevado a uma unidade a menos no expoente, sempre subtrai uma unidade no expoente quando a gente deriva, como eu tinha expoente meio, quando eu subtraio 1 dá menos meio e, expoente negativo é 1 sobre, então esse x elevado a meio vem para o denominador, x elevado a meio é raiz de x, 1 sobre 2 raiz de x. Olha para essa função agora, raiz quinta de x ao quadrado. Como é que eu vou derivar? Eu não olho como uma raiz, eu transformo numa potência, então eu escrevo x elevado a $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, essa propriedade de raízes de ordens e com expoentes aqui, nós analisamos em uma aula lá na nossa introdução na matemática de revisão de matemática básica, x elevado a $\frac{2}{5}$ abaixamos o expoente $\frac{2}{5}$, por isso vai ter esse $\frac{2}{5}$ nessa fórmula final e x elevado a uma unidade a menos, $\frac{2}{5}$ menos 1, quando você faz $\frac{2}{5}$ menos 1, fica menos $\frac{3}{5}$, de novo esse expoente é negativo, então vai ser 1 sobre e no denominador a gente vai ter raiz quinta, porque o denominador aqui é 5, de x^3, então fica $\frac{2}{5}$ raiz quinta de x^3 no denominador. [00:07:53]

[00:11:15] Algo semelhante ocorre com a multiplicação por constante, quando eu multiplico uma função por uma constante a derivada é a própria constante vezes a derivada que já existia, isso significa, que a constante, ela não afeta a derivação, eu tenho constante vezes função, na hora de derivar fica constante vezes a derivada. Demonstração é parecida com a anterior, faça o limite da razão incremental, tem uma constante que eu posso pôr em evidência, constante vezes f, constante vezes f, ela pode ser posta em evidência, e a outra parte, $f(x)$ menos $f(p)$, x menos p, limite para x tendendo a p é a derivada, então essa constante ficou em evidência e aparece multiplicando a derivada da função. Então as primeiras propriedades operatórias de derivadas, vocês vejam bem que são fáceis de serem demonstradas. [00:12:12]

<u>VIDEOAULA 5</u>

TEMPO DE GRAVAÇÃO

21 minutos e 32 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:03:22] Agora vamos ver coisas novas, coisas importantíssimas, essa daqui não pode confundir com a função potência de polinômio, não é x elevado a uma potência fixa, não estou falando agora de x^5, que a derivada é $5x^4$, nós estamos falando agora de 5^x, não x^5, cuja derivada de $5x^4$, estamos falando de 5^x e a derivada de um real a constante elevado a x repete a mesma potência, o 5^x, e o logaritmo de a na base e, eu vou terminar de falar duas, três formas e vou falar um pouquinho do e, que tem alguma coisa importante para gente. Em particular, se a gente colocar a base e aqui, aí o logaritmo de e na base e, lembre-se que ln é logaritmo na base e, logaritmo natural, também chamado logaritmo neperiano, então quando nós colocamos aqui $ln(e)$, logaritmo de e na própria base e, e logaritmo de um número na base que é ele próprio, isso dá sempre 1, então por isso que a derivada de e^x é o próprio e^x. E a derivada de logaritmo de x numa base a é 1 sobre x logaritmo neperiano da base a e, portanto, se eu estou falando da derivada do logaritmo neperiano, do $ln(x)$, vai aparecer aqui $ln(e)$, de novo, é o logaritmo de e na base e que dá 1, então a derivada do logaritmo neperiano é 1 sobre x. [00:05:04]

<u>VIDEOAULA 6</u>

TEMPO DE GRAVAÇÃO

22 minutos e 09 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:01:24] Vamos começar analisando a função $senx^2$, o que eu queria que vocês percebessem é que nós já falamos da função $senx$, aqui não é $senx$, a variável independente, o x, está afetada, é seno de x^2, é nesse caso que a gente vai usar a regra da cadeia, você tem uma fórmula, se a variável for x, você deriva pela fórmula que a gente viu, raiz quinta de x, deriva normal com o que nós aprendemos de raiz quinta, agora se for raiz quinta de x + 1, raiz quinta de 3x + 5, aí, vou precisar da regra da cadeia. Primeira coisa que eu queria que vocês percebessem para essa função h igual a seno, eu vou fazer a pergunta: Quanto que dá a derivada em um x genérico e a derivada no 0? Uma resposta ingênua, que seria uma primeira resposta bastante razoável, apesar de ser ingênua, uma resposta muito razoável. Ah! Sim, se derivada de seno é cosseno, talvez a derivada de $senx^2$ seja $cosx^2$, porque para derivar $senx$ é $cosx$, para derivar $senx^2$, talvez seja $cosx^2$, chega a ser natural essa resposta. Se isso estivesse certo, se isso fosse verdadeiro, a derivada calculada em 0, seria cosseno de 0, e cosseno de 0 é 1, então a resposta inicial, assim nessa tentativa seria $cosx^2$ e 1. E eu vou mostrar que as respostas estão erradas, olhando o gráfico de $senx^2$, $senx^2$ é uma função par, lembra que se eu fizer aqui x positivo ou correspondente valor negativo, como eu elevo ao quadrado antes de calcular o seno, é seno do argumento do ângulo ao quadrado, quero calcule no π ou no menos π, eu vou primeiro elevar ao quadrado, então vai desaparecer o sinal de menos e vai dar o mesmo valor, se a função, ela é par, neste sentido que ela vale do lado positivo o mesmo que ela vale do lado negativo. Como será o gráfico de $senx^2$? Não é um gráfico óbvio, eu vou mostrar o gráfico para vocês, está aqui nesta planilha. Essa função par, observe que ela é igualzinha do lado mais e do lado menos, e ela tem essa oscilação típica do seno, mas que vai ficando mais apertadinha por causa do x^2, e na origem ela faz essa barriguinha que está mostrada aqui, olha como que ela é na origem. Se você pensar em termos de reta tangente, quem é a reta tangente a este gráfico no ponto x igual a 0? É a reta horizontal, é o próprio eixo x, é só olhar atentamente o gráfico, que você vai ver, que no ponto x igual a 0, o gráfico da $senx^2$ tangencia o eixo x e, portanto, a derivada da função na origem é 0. Lembra que eu mostrei no slide anterior? Ah! A resposta ingênua poderia ser que a derivada fosse $cosx^2$ e aí, a derivada na origem seria 1, se a derivada na origem fosse 1, a reta tangente seria inclinada, que seria a reta bissetriz com coeficiente 1, mas a reta tangente não é inclinada, é horizontal, a reta tangente tem que ser 0, e a derivada tem que ser 0, não pode ser 1, então aquela resposta que eu mostrei agora, que a $h'(0)$ poderia ser 1, está errado, então não pode ser $cosx^2$, porque se fosse $cosx^2$, a derivada na origem seria 1 e nós estamos vendo que isso está errado, porque derivada na origem tem que ser 0. Eu acabei de concluir que a derivada na origem tem que ser 0, olhando geometricamente para o gráfico, eu não fiz a conta. Eu vou em seguida mostrar como que a gente faz esta conta, esse slide e essa análise, até agora, é para mostrar para vocês que a resposta não pode ser aquela que eu havia comentado, aquela primeira resposta, tem que ser uma resposta mais complicada, mais elaborada. [00:05:30]

[00:05:34] O teorema que fornece a derivada da composta de duas funções deriváveis chama-se regra da cadeia, porque é uma derivação em sequência ou cadeia, e vem, porque a gente deriva de uma forma que parece uma corrente, você deriva aqui, depois ali e vai derivando sucessivamente. O enunciado é o seguinte: é um teorema, não é a regra da cadeia, se você tem duas funções deriváveis e suponha que existe a composta, f composta com g, a gente indica por esse símbolo, que é a f calculada em g. Por que eu coloco na hipótese que existe a composta? Nem sempre eu posso compor duas funções? A resposta é não. Nem sempre. Imagina que a f é raiz quadrada e imagina que a g é menos x^2 menos 7, menos x^2 menos 7, por causa desses menos todos, dá sempre negativa, se a f é raiz quadrada, não dá para fazer raiz quadrada de uma g negativa, para que exista composta entre duas funções tem que ter uma coerência entre os domínios, a g tem que ter uma imagem, ela tem que está definida em um valor de x, ela tem que ter um domínio tal, que a sua imagem caiba dentro do domínio da f e essa conta, seja uma conta possível de ser feita. Bom! Respeitada a condição de existência, se f e g são deriváveis, então a composta é derivável e a derivada da composta é dada pela derivada da função da esquerda f', mas não calculada em x, calculada em $g(x)$, e vezes a derivada da g, por isso que chama regra da cadeia, você vê que está uma derivação em sequência, uma derivação em cadeia. Eu faço a derivada da primeira vezes a derivada da segunda, só que cada uma vai sendo calculada no que está na frente, a f é calculada em g e a g é calculada em x. [00:07:36]

[00:07:38] Então eu vou fazer agora exemplos numéricos para explicar como que essa regra funciona, nos meus primeiros exemplos, eu vou destacar esse aspecto de composta de funções, vou jogar muito holofote na composta de funções. E, em seguida, eu vou passar para outros exemplos em que eu vou começar a fazer a conta cada vez mais rapidamente. Tá? Então vamos fazer primeiro uma conta com todo detalhe de composição, porque eu quero que vocês entendam bem esta fórmula, depois nós passamos para a parte mais operacional. [00:08:10]

[00:08:13] Então para ilustrar aquela fórmula, eu vou pegar $senx^2$, o exemplo que a gente acabou de ver, isso é a composta da função f igual a seno com a função g igual a x^2, $h(x)$ é $f(g(x))$, é a função seno que é a f, mas não $senx$, $senx^2$, então f composta com g. Esta h, $senx^2$, é a composição, é o resultado da composição da função seno com a função x^2, ela é composta de seno com x^2. Certo? Bem formal, bem rigoroso. Agora vamos usar a regra da cadeia, para usar regra da cadeia, eu tenho que ter a derivada da f e a derivada da g, e o contexto é esse. Então a derivada da f é a derivada da função seno, que é cosseno, e a derivada da g é a derivada de x^2, derivada de x^2, $2x$, a derivada da composta, derivada de f composta com g, regra da cadeia, f' de g, g' de x, então f' que é cosseno, mas não de x, eu não devo escrever cosseno de x, porque é cosseno calculado em $g(x)$, $g(x)$ era x^2, g', $2x$, mas g, x^2, então a f' é cosseno calculado em g, cosseno de x^2 e g', normal, $2x$. Então olha só, como é que o derivo o $senx^2$ que está aqui, ó, derivada de $senx^2$, eu faço derivada do seno que é cosseno em x^2, cosx^2, vezes a derivada do x^2, e lembra que todo esse exemplo começou a um minuto atrás quando mostrando que a derivada dessa função tinha que ser 0 na origem, se agora eu calcular isso em 0, $h'(0)$ é cosseno de 0 que é 1, vezes duas vezes 0, que é 0, e dá 0 como tinha que dar. Certo? [00:10:20]

[00:10:24] Fazer mais exemplos numéricos. Umas aulas atrás, na aula de regra de derivação, que eu estava ensinando para vocês a regra do produto, eu peguei a função $sen2x$, descrevi como $2senxcosx$, transformei em um produto e usando a regra de derivada do produto, eu mostrei que a derivada dava $2cos2x$. Por que que dava isso? O 2 era uma constante, ficava na frente multiplicando, derivada do produto, derivada do primeiro vezes o segundo, como a derivada do seno é cosseno, dava cosseno, cosseno, cosseno ao quadrado, com o 2 aqui na frente, e daí, mais o seno vezes a derivada do cosseno, ficava seno, derivada do cosseno era menos seno, menos seno ao quadrado, então ficava duas vezes, o 2 na frente, cosseno ao quadrado menos seno ao quadrado que é o cosseno de $2x$, então naquela aula a gente obteve a derivada do $sen2x$, via regra do produto, e deu $2cos2x$. Com a regra da cadeia também dá direto isso, vamos derivar $sen2x$, derivada do seno, cosseno, calculo em $2x$, $cos2x$, e a derivada do $2x$, que é 2, então $2cos2x$, e não é que a derivada do $sen2x$, não é certo dizer que a derivada do $sen2x$ é $cos2x$, isso é errado, é $2cos2x$. [00:11:52]

[00:11:55] Mais exemplos numéricos e nós vamos aos poucos caminhar na direção de reduzir o foco na composição e tentar fazer cada vez mais automaticamente. Olha essa função aqui, $(x^3-1)^2$, isso é composta de duas funções, da função x^2, está vendo ela que é $(x^3-1)^2$, então tem um x^2 aqui, e tem um $g(x)$, que é o que está aqui dentro, x^3 – 1. Então isso é a composta f de g, f é x quadrado, então é f calculado em g, é elevar ao quadrado o x^3 – 1. Derivadas, derivada do x^2 é $2x$, derivada do g é $3x^2$, regra da cadeia, a composta, isso é a composta, f, x^2, com a g, que é x^3 – 1, é a derivada da f vezes g vezes g', derivada da f, $2x$, só que não calcula em x, calcula em $g(x)$, $g(x)$ é x^3 – 1, então f' que é duas vezes o x^3 – 1, vezes a derivada do x^3 – 1, que é $3x^2$, aí, abaixa o expoente aqui, e tudo isso dá, esse $3x^2$ com esse x^3 dá x^5, o 2 com o 3 dá $6x^5$, e aqui dá menos um $6x^2$, eu gostaria que vocês caminhassem na direção de automatizar o seguinte procedimento: como é que eu derivo isso? Abaixa o 2, porque a derivada de x^2 é $2x$, então abaixa o 2, x^3 – 1 elevado a uma unidade a menos, é a regra do produto, do quociente, da potência, desculpa, regra da potência, abaixo o 2, x^3 – 1 elevado a 1, e a derivada do que está aqui dentro, que é esse $3x^2$ que aparece aqui. A grande novidade é que a gente aplica a regra usual e multiplica pela derivada do que está dentro. E só para ajudar a concretizar nesse caso concreto, podia fazer até de outra forma, não precisava da regra da cadeia, eu podia elevar isso ao quadrado, quadrado do primeiro, x^6, menos o duplo produto, menos $2x^3$, mais o quadrado do segundo, mais 1. E aí, derivar por polinômio, $6x^5$ menos, abaixo o 3, $6x^2$, e aí, obtive a mesma resposta, claro. Eu mostrei vários exemplos para vocês em que a gente pode obter a derivada pela regra da cadeia ou diretamente fazendo aquelas contas. [00:14:46]

[00:14:48] Fazer mais exemplo desse procedimento. $\ln(cosx)$, eu coloquei aqui no domínio, x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, primeiro quadrante, só para garantir que cosseno é positivo e, portanto, $\ln(cosx)$ está bem definido, a história da coerência para dizer que existe a composta. Só existe a composta, se esta função de dentro cair dentro do domínio da função de fora, então $\ln(cosx)$ está bem definida, tudo funciona direitinho, está bem definida no x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Queria que vocês derivassem já diretamente. Vamos fazer a derivada diretamente? Sem precisar ficar remetendo para as composições. Olha só! Que que é a derivada do $\ln x$, 1 sobre x, então a derivada aqui vai ser 1 sobre, mas 1 sobre o quê? 1 sobre o cosseno, então derivada, 1 sobre o cosseno. E a novidade? Vezes a derivada do que está aqui dentro que é menos seno, derivada do cosseno é menos seno, então fica menos seno sobre cosseno, menos tangente. Olha que engraçado, que relação do logaritmo com o seno e com a tangente, a derivada do logaritmo do cosseno é menos tangente, legal isso, e claro, nós estamos falando desse intervalo, onde está tudo bem definido. [00:16:16]

[00:16:17] Vou fazer um outro exemplo de duas coisas distintas para ficar bem claro. Seno ao cubo de x, depois vou fazer seno de x ao cubo. Seno ao cubo de x é a mesma coisa que seno de x, ao cubo, tudo elevado ao cubo. Então o que eu espero que vocês derivem, vocês derivem direto, seno ao cubo de x, derivada de cubo é $3x^2$, então 3, abaixo o 3, e o seno elevado a uma unidade a menos, não escreve $3x^2$, escreve 3 seno ao quadrado de x. E a novidade? É que aparece a derivada do seno, a função que está elevada ao cubo, que é o cosseno, então $g'(x)$ é $3sen^2xcosx$. Compara com $senx^3$, qual que é a diferença, hein? Aqui quem está o cubo é o resultado de calcular o seno, como eu pus no slide anterior, isso aqui é seno de x, você calculou o seno e eleva ao cubo. Aqui, quem que você eleva ao cubo? Nesse segundo, você eleva ao cubo, o ângulo, antes de calcular o seno você eleva ao corpo, nesse você primeiro calcula o seno, depois eleva ao cubo, aqui, primeiro eleva ao cubo, depois calcula seno. E como que é a derivada? Então observe que isso é o cubo composto com o seno e isso é o seno composto com o cubo, derivada do seno, cosseno de x ao cubo e derivada do x^3, que é $3x^2$. Esse slide, é um slide muito importante, queria que vocês se detivessem sobre ele, olhassem com bastante cuidado, refletissem bem, que se você entender esse slide, você entendeu bem a regra da cadeia. A diferença de fazer seno ao cubo de x e seno de x ao cubo em termos de derivadas, sem precisar falar tanto da composição, seno ao cubo de x, eu estou elevando ao cubo o seno, então a derivada é, abaixo o expoente 3, seno ao quadrado, com uma unidade a menos, vezes a derivada da base. Aqui é seno de x ao cubo, a derivada é cosseno do x ao cubo vezes a derivada do x ao cubo que é $3x^2$. Esse é um exemplo bem importante, gostaria que refletissem sobre ele, olhasse várias vezes para perceber se vocês absorveram bem essa regra da cadeia. [00:18:38]

[00:18:41] Um outro exemplo, vou fazer direto só para ver se está tudo bem, raiz quadrada de x^3 + 1, eu digo, aquela história de que existe a composta o x^3 + 1 e a raiz quadrada, tem uma questão de domínio aqui, só posso trabalhar quando a x^3 + 1 for positiva, porque eu estou fazendo raiz quadrada, no pedaço em que a x^3 + 1 é negativa, a x^3 + 1 existe, mas a composta não vai existir, aí, eu não vou ter regra da cadeia. Derivação da raiz quadrada, 1 sobre duas vezes a raiz, mas eu não escrevo raiz de x, eu escrevo raiz do que está aqui, x^3 + 1, vezes a derivada do que está aqui, que é $3x^2$, $3x^2$ sobre duas vezes raiz quadrada de x^3 + 1. Esse é outro slide que eu gostaria que vocês olhassem com muito cuidado e vissem se perceberam como é que está funcionando a regra da cadeia. [00:19:33]

[00:19:36] Lembra que nós começamos com seno de x^2? Eu queria só mostrar para vocês, a título de treino, a segunda derivada, nós vimos que a primeira derivada é $2xcosx^2$, derivada de seno, cosseno de x^2 vezes a derivada de x^2 que é $2x$. E a segunda derivada? Na aula passada nós falamos de derivadas de ordem mais alta, segunda derivada, você tem que derivar isso. E aí, é uma mistura de todas as regras que nós já estudamos, é uma mistura de regra da cadeia com regra do produto, começa com regra do produto, $2xcosx^2$, então é $2x$ vezes o cosseno, regra do produto, derivada do primeiro vezes o segundo, derivada de $2x$ é 2, então vai começar com $2cosx^2$, que é a derivada do primeiro vezes o segundo, e daí, aparece agora o $2x$ vezes a derivada de $cosx^2$, derivada de $cosx^2$ é regra da cadeia, derivada de cosseno, menos seno, do x^2, e vezes a derivada do x^2, que é $2x$, e claro que isso aqui vai dá um menos, vai dar um $4x^2$, e eu escrevo tudo como $2cosx^2$, e aqui eu tenho menos $4x^2senx^2$. Exemplo também muito importante, gostaria que vocês olhassem bem esse exemplo até que ficasse bem claro para vocês esses mecanismos de fazer essas derivações. [00:21:11]

APÊNDICE D – TRANSCRIÇÕES DAS AULAS DE INTERVENÇÃO

AULA DE INTERVENÇÃO 1

TEMPO DE GRAVAÇÃO

01 hora 40 minutos e 39 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:14:26] “Vocês precisam dominar essa teoria aqui ó, eu quero resolver um exercício específico da lista de vocês que eu acabei de passar no grupo, que é muito bom, é um exerciciozinho que ajuda fazer muitos, é esse aqui, ó: o exercício 7 da lista é limite de x ao quadrado menos 16 sobre x ao quadrado menos $5x$ mais quatro, com x tendendo a 4, olha que beleza, é isso aí. Bom, como se resolve um limite desse? É, se eu falo, que, o valor para onde eu vou me aproximar do domínio tem uma imagem e essa imagem serve de referência para a aproximação das imagens da função, então eu posso chegar aqui direto e mandar o 4 aqui dentro e fazer o cálculo, é isso o que eu vou fazer. Colocando o 4 aqui fica 4 ao quadrado menos 16 e aqui vai ficar 4 ao quadrado menos 5 vezes 4 mais 4 que vai dar 0 em cima e que vai dar 0 embaixo e logo de cara eu peguei um exercício que dá uma indeterminação, toda vez que aparece 0 sobre 0 eu tenho uma indeterminação, o que quer dizer isso? Que está escondido aqui um limite para essa função quando x se aproxima de 4 ou não, pode ser que não tenha, mas eu não posso falar nada enquanto estiver na forma indeterminada, não posso falar nada. Bom! Toda vez que um limite cair em 0/0, para a gente remover a indeterminação, eu preciso dar um jeito de modificar a expressão e o jeito de modificar a expressão é tentar fazer manipulações algébricas para tentar fazer alguma simplificação e, nessa simplificação, eu me livrar dessa bagaceira aqui. A maneira mais tradicional que tem é usar casos de fatoração, porque sempre eu vou trabalhar com polinômio em cima e polinômio em baixo. Se eu sei todos os casos de fatoração do oitavo ano, beleza! Você fica com uma mão na roda para poder resolver esse exercício. Por exemplo: eu olho para cima e vejo uma diferença de quadrados. Todo mundo sabe que x ao quadrado menos 16 pode virar x mais 4 vezes x menos 4. Raiz quadrada disso dá x, raiz quadrada desse dá 4, produto da soma pela diferença das duas raízes vai resultar a diferença entre dois quadrados. Isso é um caso de fatoração, que para quem sabe já pode dar a resposta. Tem alguém que não sabia esse caso? Todo mundo sabia fazer a diferença entre dois quadrados? Não. Toda vez que você tem uma diferença entre dois quadrados, a forma fatorada vai dar o produto da soma pela diferença. Por quê? Se você fizer a distributiva aqui, você volta na original. Você faz a vezes a, a ao quadrado, a vezes menos b, menos ab, b vezes a, mais, b vezes a ou a vezes b dá na mesma, deixa b vezes a e b vezes b, b ao quadrado, menos, porque aqui é mais e aqui é menos, menos, aqui é menos. Aí, você tem ab ou você tem ba, você tem a mesma coisa, não tem? Só que os dois estão com sinais opostos, então cancela, cancela, sobrou quem? Sobrou a ao quadrado menos b ao quadrado, que é esses dois aqui. Certo? Então, matemática é linguagem, se é linguagem, então ela tem suas regras gramaticais, e uma regra gramatical é: eu tenho que dominar diferença de quadrados, então eu tenho que memorizar que a diferença de quadrados corresponde ao produto da soma pela diferença. Tem que memorizar. É uma regra. Tá? Se não toda vez, você tem que ficar deduzindo isso. Eu nem mostrei a dedução, eu só justifiquei. Isso que eu fiz aqui não é a dedução, é uma justificativa de que, realmente, esse lado corresponde a esse. A dedução mesmo, eu tenho que sair do zero aqui, fazer as magias matemáticas e chegar aqui, ou melhor, desculpa, e chegar aqui. Vou mostrar para vocês. Na realidade, vocês já viram o que eu fiz aqui. Tá? Vocês já viram com isso aí, já ficou justificado que realmente as duas coisas são iguais, eu posso usar à vontade. Mas quando você quer deduzir mesmo, você tem que fazer assim: você olha para essa expressão e cria uma saída, uma saída para que você consiga fatorar a expressão por casos elementares que você conhece. Bom! Então a saída é: para quem tem bastante habilidade algébrica, para quem já tem experiência nisso, ele vai saber o seguinte: se eu pegar essa diferença e acrescentar ab e ao mesmo tempo retirar ab, eu não alterei a expressão original. Concorda? Quem coloca um valor e retira o mesmo valor, não fez nada. Um cancela o outro, não fez nada. Não é isso? Mas o simples fato de você criar essa possibilidade de escrita, já ajuda você fazer o seguinte: você já pode juntar o positivo aqui com esse outro positivo e esse negativo com esse outro negativo. Perceberam? Esse está com coeficiente positivo, esse também. Esse está com coeficiente negativo, esse também. Juntei os positivos, juntei os negativos. Quando eu faço essa juntada, aí eu lembro de um caso elementar de fatoração chamado de agrupamento. Existe o primeiro caso que é o fator comum, o segundo caso que é o agrupamento, a diferença de quadrados é o terceiro caso e assim vai. Mas o agrupamento e o fator comum são os básicos. E eu olho para cá, eu posso fazer o agrupamento, eu já fiz o agrupamento, quando eu juntei esse positivo com esse positivo, eu já estou formando um grupinho, e esse negativo com esse negativo, outro grupinho, então estou fazendo agrupamentos. Nesse agrupamento ou nesse grupinho, eu percebo que tem um fator comum, o fator comum é o a, e eu coloco o a em evidência, se eu colocar esse a em evidência, quem vai sobrar dentro dos parênteses? a ao quadrado pôr a sobra a, ab pôr a sobra b. Perfeito? Está certo isso? Ah, eu não sei se está certo. Faz a distributiva que você confere. a vezes a, a ao quadrado, a vezes b, ab. Então está correto. Aí, você vem para esse outro grupinho e percebe que dá para colocar menos b em evidência, menos b, se eu colocar menos b em evidência, o que vai sobrar dentro do parênteses? Menos por menos, mais, b ao quadrado por b, b. Perfeito? Menos por menos, mais, ab por b, cancela o b sobra apenas a. Observe que depois que eu faço os dois grupinhos e coloco em evidência, no primeiro eu coloquei o a e no segundo eu coloquei o menos b, apareceu dentro do parênteses duas coisas iguais, a mais b, e a mais b ou b mais a, que dá na mesma. Como essas duas coisas são iguais e aqui é um produto, e aqui é um produto, novamente eu tenho um caso de fator comum. Quem é o fator comum agora? O a mais b. Então eu vou colocar o a mais b em evidência, colocando-o em evidência, quem vai sobrar dentro do novo parênteses? a menos b. E está aí, o produto da soma pela diferença. Agora, eu pergunto para vocês: é melhor memorizar ou você quer sempre deduzir? Larga mão, memorização em matemática faz parte do jogo de linguagem. É uma, é uma, qual é a palavra? Seria uma espécie de uma regra matemática para ser usada. A gente usa à vontade. Então está dominado agora? Diferença de quadrados resulta o produto da soma pela diferença. Quem fez aí o oitavo ano, quando você saía daqui e vinha para cá, você fazia fatoração, porque fatoração é transformar uma subtração ou adição em uma multiplicação. Transformei. E se você quiser sair daqui e voltar no que era antes, aí você está realizando um produto notável. Qual é o nome do produto notável? Produto da soma pela diferença de dois termos. E eu leio, eu leio, o nome do caso, eu não estou decorando o nome do caso, eu leio: produto, olha meu dedo, produto da soma pela diferença de dois termos, o a e o b. Eu não decoro, eu uso a linguagem. Tá? E aqui , a mesma coisa, se eu estou em um caso de fatoração, a leitura é: diferença entre dois quadrados, óbvio. Ou está escrito outra coisa diferente que eu possa ler de maneira diferente? Não. Só tem essa leitura. Ó, isso é um caso que eu preciso usar na parte de cima, já fiz. Então você vai perceber que, como é que se usa isso? Olha lá! Já tirei a raiz. Você tira a raiz quadrada de a ao quadrado, você tira a raiz quadrada de b ao quadrado. O que é raiz quadrada de a ao quadrado? É a. Quem é a raiz quadrada de b ao quadrado? É b. Aí, você junta o a e b na soma e na diferença. Aqui é a mesma coisa. Quem é a raiz quadrada de x ao quadrado? x. Quem é a raiz quadrada de 16? 4. Junta na soma e na diferença. Como eu faço o caso de fatoração da parte de baixo? E a parte de baixo como é que eu faço a fatoração?" [00:27:05]

[00:28:27] “Como você aprendeu no nono ano do ensino fundamental a fatorar uma expressão como essa? No nono ano do ensino fundamental foi ensinado como fazer a fatoração de uma expressão como essa. Eu quero saber qual é a expressão que resulta da fatoração daquela expressão ali. Isso aqui, ó. a vezes x menos uma raiz vezes x menos a outra raiz. Todo mundo aqui lembra dessa forma fatorada? Quem não lembra? Levante o mãozão. Minha nossa Senhora! Eu fiz a pergunta errada. Quem lembra? Levante o mãozão. Só dois. Gente, olha, tudo bem! Eu vou fazer o seguinte: eu vou deixar aquele troço de lado. Tá? Já que muita gente nunca viu, vamos deixar sem ver. Mas vamos deixar sem ver por enquanto , por enquanto eu quero relembrar um negócio com vocês. Se você tem uma equação do segundo grau, como é que você calcula as raízes sem usar o algoritmo de resolução da equação de segundo grau? Sem usar. Você vai usar as propriedades de soma e produto. Vai calcular a soma das raízes, que é x linha mais x duas linhas, e vai calcular o produto das raízes, que é x linha vezes x duas linhas. Quem é a soma das raízes? Menos b sobre a. Quem é o produto? c sobre a. Perfeito! Quem sabe resolver equação do segundo grau usando a propriedade da soma e do produto, vai usar essas duas formulazinhas. É a maneira mais rápida que tem de resolver. Tá? Todo mundo lembrava disso? Quem não lembra levanta a mão. Bom gente, ó, para continuar eu só preciso de uma coisa. Como eu já mostrei a dedução da soma e do produto em sala de aula, eu só quero que vocês confirmem, para mim, se, quando precisar usar a soma e o produto, se vai lembrar que é a soma é menos b sobre a e que o produto é c sobre a. Se você lembrar disso, você vai resolver uma equação de segundo grau bem rapidinho. Eu vou até resolver essa aqui. Tá? Eu vou pegar essa expressão que está aqui e vou igualar zero, e vou aplicar a soma e o produto, já para treinar isso aqui. Então a expressão é x ao quadrado menos $5x$ mais 4, vou igualar a zero. Então fazendo o cálculo da soma, soma é menos b sobre a, produto é c sobre a, então vamos colocar soma e produto, menos b, o b é menos 5, com menos da fórmula, 5, o a é 1, então 5 dividido por 1, 5, produto, c sobre a, quem é o c? 4, quem é o a? 1, 4 dividido por 1, 4. Aí, eu faço a pergunta: quais são dois números que somados dão 5 e que multiplicados dão 4? 1 e 4 ou 4 e 1. Vou colocar 1 e 4, 1 mais 4, 5, 1 vezes 4, 4. Pela soma e produto eu já sei que as raízes são 1 e 4. Está correto isso aqui, gente? Tem alguém que não acompanhou esse cálculo? Levanta a mão. Ainda bem, vamos lá!” [00:33:32]

[00:34:31] “Atenção para essa coisa que eu reservei para vocês. Irmãozinho Alex, você lembrou disso, mas você sabe por que que isto é a forma fatorada disto? Saber por que isso fatorado fica assim. O pessoal só fala: ó, memoriza aí, acabou. Memoriza. No frigir dos ovos, o que vai acontecer é isso, a gente vai usar é a memorização. Mas se alguém chegar para vocês e fizer isso, eu tenho certeza de que vocês vão achar muito gostoso. Querem ver? Olha só! Não estou fazendo nada exotérico, não, estou só fazendo a distributiva, x vezes x, x^2, x vezes menos x'', menos $x.x''$, agora vamos para cá, menos x' vezes x, menos $x'.x$, e menos vezes menos, mais, mais o que? $x'.x''$. Certo, gente? Eu não fiz nada sobrenatural, fiz alguma coisa sobrenatural? Ó, atenção, atenção, atenção! a vezes, abre parênteses, x^2, vocês estão vendo que essa coisinha e essa daqui têm um fator comum? Quem é o fator comum? É o menos x. Então vamos colocar esse menos x em evidência. Menos x em evidência, vai sobrar quem dentro do parênteses? Menos por menos, mais, x por x, cancela, sobra quem? x'', o outro, menos por menos, mais, x por x, cancela, vai sobrar x', vejam se eu fiz o fator comum correto, meu fator comum está certo? Estou com dúvida, se você está com dúvida, você distribui, tem que voltar na mesma coisa, menos x vezes x'', menos $x.x''$, menos x vezes x', menos $x'.x$ ou menos $x.x'$, que dá na mesma. Perfeito? Está correto meu cálculo? E esse outro aqui, eu vou copiar, mais $x'.x''$. Pronto! Maravilha! Agora olha aqui, gente. a vezes, abre parênteses, x^2, menos x vezes a soma das raízes, ou seja, menos x vezes menos b sobre a, mais o produto das raízes, ou seja, c sobre a. Sabem distribuir? a vezes x^2, ax^2, este a vai multiplicar tudo isto, então esse a de cima cancela com esse a debaixo, vai sobrar menos x vezes menos b, quanto dá menos x vezes menos b? Mais bx, menos vezes menos, mais, b vezes x, bx, mais a vezes isso aqui? Esse a não vai cancelar com esse a debaixo? Vai sobrar quem, gente? Se ele cancelou sobra c. Essa expressão que apareceu aqui, tem alguma coisa a ver com essa? Você gostou Alex? Você entendeu que realmente essa coisa aqui é igual a essa? Se você já entendeu, ótimo, porque daqui para a frente, eu não vou mais fazer isso, não vou fazer de novo, não vou fazer de novo, não vou fazer de novo, não vou fazer de novo. Eu só vou fazer o que? Memorizar que a forma fatorada de um trinômio do segundo grau é o coeficiente da variável de grau dois vezes o produto de x menos uma raiz por x menos a outra raiz. Isso tem que ser memorizado. Tá? Se é assim, eu posso usar essa informação que eu acabei de passar para fatorar esta bonita funçãozinha aqui. Então, vamos lá! Está tudo na minha mão. Essa expressão que está aqui é um trinômio do segundo grau? Sim. Então vai ser a vezes x menos x' vezes x menos x''. Quem é o a dessa bonita? É 1. 1 vezes x menos uma raiz vezes x menos a outra raiz. Quais foram as raízes que eu encontrei? 1 e 4. Então aqui vai ficar x menos 1 e aqui x menos 4. Então qual é a forma fatorada desse trinômio do segundo grau? x menos 1 vezes x menos 4. Ah, não acredito! Pode acreditar. Olha aqui, x menos 1 vezes x menos 4, x vezes x, x^2, x vezes menos 4, menos $4x$, menos 1 vezes x, menos x, menos 1 vezes menos 4, menos 4. x^2, quanto dá essa junção?

Menos $5x$, mais 4. Essa expressão é a nossa original? Sim. Olha, gente! Eu estou dando um trinômio do segundo grau. Em algum momento, eu falei que esse trinômio era quadrado perfeito? Não. Essa é a maneira de fatorar trinômio do segundo grau que não é quadrado perfeito, porque quando é um quadrado perfeito, a gente já sabe das técnicas do oitavo ano. Quando é um quadrado perfeito é assim: a ao quadrado mais $2ab$ mais b ao quadrado, a ao quadrado menos $2ab$ mais b ao quadrado. Isso é um trinômio quadrado perfeito? É. Esse outro é um trinômio quadrado perfeito? É. Então não preciso de nada diferente, a não ser fazer isso: tiro a raiz do primeiro, a, pega o sinal que está no meio, mais, tira a raiz quadrada do último quadrado aqui, b, e eleva tudo ao quadrado. Aqui debaixo é a menos b ao quadrado. Então trinômio quadrado perfeito, resulta o que? Se for esse trinômio quadrado perfeito, vai resultar o quadrado da soma de dois termos. Se for esse outro trinômio quadrado perfeito, vai resultar o quadrado da diferença de dois termos. E eu estou lendo o que está escrito, do jeito que está escrito. Quadrado da soma de dois termos. Quadrado da diferença de dois termos. São duas maneiras de fatorar trinômios quadrados perfeitos. Mas quando o trinômio não é quadrado perfeito, a maneira correta de fatorar é esta daqui”. [00:47:05]

[00:49:40] “Quando eu fiz as fatorações diferença de quadrados e fatoração de um trinômio do segundo grau, apareceram esses dois produtos aqui e eu pude cancelar isso com isso. Esse cancelar isso com isso, não é uma espécie de simplificação de fração? É. É uma simplificação de fração. E você está cansado, calejado, de simplificar frações. Para você simplificar frações, você diz assim: eu tenho que dividir o numerador e o denominador pelo mesmo valor. Vou falar de novo: eu tenho que dividir o numerador e o denominador pelo mesmo valor. Não é assim? Pois bem, quem é o numerador do meu limite? x^2 menos 16. Quem é o denominador do meu limite? x^2 menos $5x$ mais 4. Beleza! Esse é o numerador, esse é o denominador. Se eu quero simplificar a fração, eu vou dividir tanto o numerador, quanto o denominador, eu vou dividir pelo mesmo valor. Que valor é esse, irmãos? Aí é que está o segredo, o bicho da goiaba. Ele está aqui: seu limite é x tendendo a 4, eu vou fazer bem grande, porque esse é o bicho da goiaba. Bem goiabona aqui, olha, olha, seu limite está fazendo x tender a 4, x tender a 4, certo? Estão enxergando? Muito bem. Se eu pegar esse 4 e passar para o outro lado, vai ficar x menos 4 tendendo a 0. E não era o x tendendo a 4 que estava causando o rebu aqui? Então você vai sempre, sempre, simplificar a nossa fração por esse x subtraído do valor para o qual ele está tendendo. Então é sempre a variável subtraída do valor para o qual ela está tendendo. Então vai ser x menos 4. Você divide aqui por x menos 4 e divide por x menos 4. Se você está dividindo pelo mesmo valor, você não está tentado simplificar? Sim. Então qual é a única coisa que faltava de importante? Saber que quem eu devo usar como simplificador é, exatamente, o x menos o 4. E é sempre assim em todo limite que você tiver indeterminação com polinômio em cima, polinômio embaixo. É sempre x menos o valor para o qual ele está tendendo. Agora olha aqui, vamos ver se vocês são bons de divisão polinomial. Divisão polinomial é uma coisa que você olha uma vez e já aprende, porque ela é muito simples. Não precisa ficar memorizando vários casos de fatoração. Você vê uma só divisão polinomial e você sabe fazer todas. Ó! Você vê uma e sabe fazer todas. Você vê um caso de fatoração e sabe fazer todos? Não. Mas a divisão, sim. Olha aqui. Antes de começar dividir, eu quero lembrar a infância de vocês. 7 dividido por 3. Quanto dá 7 dividido por 3? Quero dividir 7 por 3, pronto, divisão natural e acabou. 7 dividido por 3 dá 2, o que você faz quando você descobre que é 2 aqui? Você pega o dois multiplica pelo divisor e manda para lá para subtrair do dividendo, não é assim? Olha o que eu vou fazer? 2 vezes 3, 6, eu pego esse 6 e passo para cá menos 6, que vai dar resto 1. Perceberam o truque? 2 vezes 3, 6 positivo, quando vai para lá, vai negativo. O que quer dizer isso? Vai para lá trocando o sinal. Então é só fazer a mesma coisa aqui, gente. Eu já sabia desde o princípio que a divisão era exata. Por que que eu já sabia que desde o princípio que a divisão era exata? Porque gente, porque tem uma teoria lá na matéria de polinômios do terceirão do Ensino Médio, teoria de polinômios do terceirão do Ensino Médio que diz o seguinte: se esse polinômio que está sendo dividido por esse binômio do primeiro grau, tiverem a mesma raiz, então a divisão é exata. Se eu estou dividindo um polinômio por um binômio do primeiro grau e os dois apresentam uma raiz em comum, que no caso a raiz é 4, porque 4 zera essa expressão e zera essa, concorda? Então se o 4 zera essa e zera essa, então o 4 é raiz das duas. Se o 4 é raiz das duas expressões, com certeza, essa divisão será exata. A teoria garante isso. Se não tem a mesma raiz nos dois, aí você não pode falar nada, mas se for, vai ser exata. Deu exata, eu sabia que ia dar exata. Essa daqui também vai dar exata. Como que eu sei que essa vai dar exata? Porque o 4 zerou a parte dessa daqui e o 4 zera essa expressão também, então o 4 é raiz desse binômio e o 4 é raiz desse polinômio do segundo grau, como o 4 é raiz dos dois, na hora que eu efetuar a divisão, com certeza, a divisão será exata. Isso é teoria do terceiro ano do Ensino Médio. Tá? Agora olha aqui, ó. Olha que maravilha, ó. x^2 dividido por x, x, x vezes x, x^2, vem para cá menos x^2, x vezes menos 4, menos $4x$, vem para cá mais $4x$, somou, cancela, somou dá menos x, correto? Baixa 4. Maior grau, menos x, dá para dividir pelo maior grau? Dá. Menos x dividido por x, menos 1, menos 1 vezes x, menos x, vem para cá mais x, menos 1 vezes menos 4, mais 4, vem para cá menos 4, olha a divisão exata de novo. Deu exata de novo? Deu, porque 4 era raiz desse binômio do primeiro grau e 4 também era raiz dessa expressão de segundo grau aqui. Olha, se você simplificou as duas, o seu limite, irmão, não vai ficar só isso aqui, ó, aí. Quando eu simplifiquei, quem sobrou na parte de cima? x mais 4. Quando eu simplifiquei, o que sobrou na parte de baixo? x menos 1. Eu só quero que fique claro o seguinte: toda vez que você for calcular um limite e tiver uma divisão polinomial e esse limite for para um valor finito, finito, e acontecer essa indeterminação, você sempre vai poder dividir numerador e denominador por esse binômio, formado dessa maneira. Sempre, sempre. Sempre que você tiver um limite de uma divisão polinomial com x tendendo a um valor finito e der indeterminação $\frac{0}{0}$, você sempre vai poder simplificar a fração utilizando o binômio x menos o valor para o qual ele está tendendo". [01:01:28]

[01:01:30] Limites no infinito e limites infinitos, qual é a diferença entre esses dois? Bom, quando é no infinito tem a ver com domínio, quando são limites infinitos tem a ver com imagens. De que maneira? Por exemplo, se eu tiver uma função como essa aqui, ó, limite, vou colocar essa aqui que todo mundo já conhece, não sei se conhece, vamos lá, $3x^2$ mais $2x$ menos 1 sobre x^2 mais x mais 3, quando x tende a infinito. Então quando eu tenho um limite desse tipo, a primeira coisa que eu devo lembrar é de uma propriedadezinha que será muito útil para a gente. Limite de funções polinomiais, vou pegar a de cima ali separada, só ela, bonitinha, separada e vamos aplicar aqui valores de x tendendo a infinito. Que quer dizer isso? Bom, se isso é um polinômio gente, todo mundo sabe qual é o gráfico dessa função, não é? Nesse caso aqui, qual é o gráfico? Parábola, beleza. E essa parábola é côncava para cima ou para baixo? Para cima. Eu não vou tentar fazer um desenho perfeito, não vou ver raiz, vértice, não vou ver nada. Eu só vou fazer um gráfico grosseiro aqui, que pode não ter nada com essa função aí, em termos de raiz, vértice e termo independente. O termo independente, eu posso até apelar, porque esse aqui está 1, está facinho, eu faço isso aqui, e venho aqui e digo que é 1, agora eu não sei se ela realmente vai ter duas raízes, ela não vai ter raízes, ela não vai ter raízes, não vai ter raízes, porque o delta aqui vai ser negativo, então eu fiz um gráfico totalmente errado. Já que eu vi que o delta é negativo, então vamos dar uma ajeitadinha, eu também não sei qual vai ser o vértice, então mesmo que eu não tenha que determinar as raízes aqui, eu não tenho garantia nenhuma que é esse gráfico aqui tem a ver, mas já serve para mostrar o que eu preciso. Se é uma função polinomial do segundo grau, o gráfico é esse aqui ou é uma coisa parecida com essa, e se eu faço os valores de x virem para o infinito, quanto mais o x vem para o infinito, mais, acontece o que com as imagens? O que está acontecendo com as imagens? Estão disparando também para o infinito, porque essa perna aqui vai seguir infinitamente, não vai?

Quanto mais eu venho para o infinito no domínio, mais as imagens disparam para o infinito. Então eu sei que o resultado desse limite aqui vai ser infinito, só de olhar no gráfico. Perceberam isso? Quanto mais eu venho para o infinito no domínio, mais as imagens disparam para o infinito positivo. Se fosse a mesma função, mas aqui fosse um sinal negativo. Então, o que ia acontecer? Aí a função, ela seria virada ao contrário aqui, ó, nesse caso ela teria raiz? Vamos ver: b^2, 2^2, 4, menos 4 vezes menos 3 dá mais 12, vezes 1, 12, com 4, 16, esse tem raízes. Então, essa daqui vai tocar o eixo x, bonitinho, mas quanto mais eu vier para o infinito positivo, mais vai acontecer o que com as imagens? Eu posso começar aqui pertinho do 0, imagem subiu um pouquinho, agora começou a descer, começou descer, e agora vai descer, está desesperadamente descendo, e vem para cá, continua descendo, continua descendo, continua descendo, e quanto mais eu vou para o infinito positivo nos valores de x, mais vai acontecer o que? Mais ela vai para menos infinito. Perfeito? [01:05:52]

[01:05:55] Como ela é uma função polinomial, toda função polinomial que vai para o infinito, eu a trato assim: eu pego o termo de maior grau da função e tento colocar em evidência, se eu colocar esse negócio em evidência, o que vai aparecer dentro do parênteses? Não é fator comum, está vendo que não é fator comum, mesmo assim, sem ser fator comum, eu quero colocar o termo de maior grau em evidência, o que vai acontecer dentro do parênteses? Qual vai ser o primeiro termo aqui, na hora que eu coloco isso em evidência? Menos $3x^2$ dividido por ele mesmo, 1, perfeito, $2x$ dividido por menos $3x^2$, ó, $2x$ dividido por menos $3x^2$, cancela o x daqui com um daqui, e o resto não dá para fazer nada, certo? Se não dá para fazer nada, vai sobrar quem? Menos eu coloco no meio, sobra 2 em cima e sobra $3x$ embaixo, sobrou isso aí, ficou claro para todo mundo, essa continha? A mesma coisa, eu vou fazer com o 1, quanto é 1 dividido por esse bicho feio aqui? 1 dividido por menos $3x^2$, não dá para fazer nada, só vou pegar o sinal de menos e colocar no meio, então vai ficar menos 1 sobre $3x^2$. Olha o que acontece aqui: como x está indo para infinito, essa fração aqui vai zerar, porque infinito vezes 3 dá infinito, um número dividido por um denominador extremamente gigante, vai fazer a fração ir para onde? Para 0. Então essa fração vai para 0, a mesma coisa aqui, infinito ao quadrado, infinito, vezes 3, infinito, um número finito dividido por um extremamente gigante, o que vai acontecer? Vai fazer a fração tender a 0. Se isso tende a 0, se isso tende a 0, só esse camaradinha aqui vai importar, então 1 menos 0 menos 0, vai dar 1, e 1 vezes o que está aqui, dá o próprio que está aqui, então se dá o próprio que está aqui, eu não preciso esquentar com ninguém para trás, correto? Então é como se eu simplesmente ignorasse isso aqui e ficasse apenas com o termo de maior grau, porque esse termo de maior grau é que realmente vai determinar qual é o valor do limite. E se eu colocar infinito aqui, infinito ao quadrado, infinito, infinito vezes 3, infinito, só que com o sinal de menos, menos infinito. Então, isso aqui eu mostrei para dizer a vocês, ó, se você tem um limite no infinito, o que quer dizer no infinito? Quando os valores do domínio estão tendendo a infinito, não vou falar os valores tendendo ao infinito, quando a variável x está tendendo ao infinito. Se a variável x está tendendo ao infinito, se chama limite no infinito, e se for limite no infinito de função polinomial, basta eu tomar o termo de maior grau e simplesmente ignorar o restante. Eu posso ignorar o restante toda vez, porque vocês viram aqui, ó, que não afeta nada. Vai dar sempre 1 aqui dentro do parênteses e 1 vezes o primeiro termo, é o próprio primeiro termo. Perfeito? Desculpa gente, eu falei primeiro termo, linguagem errada, termo de maior grau, porque o maior grau, necessariamente, não precisa estar nessa posição, o maior grau pode estar em qualquer lugar. Tá? Então é o termo de maior grau. Entenderam essa propriedade? Daqui para a frente, se você for resolver um limite no infinito e não usar essa propriedade, então você quer ficar perdendo tempo, porque basta pegar o termo de maior grau e fazer o cálculo do infinito aqui dentro. Tá? [01:10:11]

[01:10:30] Você vai escrever que limite de menos $3x^2$ mais $2x$ mais 1, com x tendendo a infinito, ele vai dar limite de menos $3x^2$, com x tendendo a infinito, e isso vai dar menos infinito. Toda vez você pode fazer isso? Toda vez. Mas só vale, só vale, se for limite no infinito. E o que é um limite no infinito? Quando os valores do domínio, no caso, em cima do domínio, eu estou fazendo a variação de x e ele vai caminhar em direção ao infinito. Ou infinito positivo, ou infinito negativo. Se eu escrever isso aqui, ó, gente, limite de menos $3x^2$ mais $2x$ mais 1, com x tendendo a 7, isso é um limite no infinito? Não. Então se não é no infinito, eu posso fazer isso? Se você fizer isso, você cometeu um erro gravíssimo, porque essa coisa aqui não tem nada a ver com essa outra. Tá? Então a propriedade só vale, se for limite no infinito. Bom, gente, só que é o seguinte: vocês viram também que esse resultado aqui deu infinito negativo, certo? Se deu infinito negativo, quem está caminhando em direção ao menos infinito? As imagens estão tendendo a menos infinito. O que significa isso? Que eu tenho um limite que além de ser no infinito, ele também é um limite infinito. E se acontecer isso aqui, ó, você tiver limite de 1 sobre x, com x tendendo a infinito, vai tender a 0. É limite no infinito? Sim. É limite infinito? Não. Então esse aqui é apenas limite no infinito. E se for assim? Não sei se está na hora de mostrar esse, mas eu já vou dar uma antecipada. Limite de 1 sobre módulo de x, com x tendendo a 0. x está tendendo a quanto? 0. Se eu jogar zero aqui dentro, módulo de 0 continua 0. 1 dividido por um número extremamente pequenininho faz a fração virar o que? Um número extremamente gigante. Então isso aqui vai dar mais infinito. É só você não esquecer do conceito de limite. Quando falo que x está tendendo a 0, x não vai ser 0, gente. Não é isso? A aula passada foi para isso. Vai ser um valor mais próximo de 0 que você possa imaginar e, mesmo assim, aquele que você imaginou pode ser superado por um outro mais próximo ainda. Por quê? Porque eu não vou chegar no 0 nunca e sempre vai ter um espacinho entre quem eu penso que está na vizinhança e o 0. Está tão perto, tão perto, que eu estou achando que está no mesmo lugar, não está no mesmo lugar. Se é limite, não está no mesmo lugar. Então tem um espacinho? Tem. Limite é extrema proximidade, mesmo assim, a gente sempre supera, mas jamais atinge o valor limite. A palavra limite, gente, não é porque eu estou me aproximando, é porque quem está servindo de referência para aproximar, ele jamais será alcançado. A ideia de limite é: existe uma barreira, existe um limite que você jamais vai atingir. É nesse sentido: existe uma barreira, existe um limite que você jamais vai atingir. O que vai acontecer é o seguinte: quanto mais próximo você estiver do valor limite, menor é o erro. Então dependendo do fenômeno que você vai estudar, se você quiser muita precisão, você tem que fazer os infinitésimos serem extremamente infinitésimos mesmo, bem pequenininho, porque senão, não dá a precisão que você necessita. Depende do fenômeno que vai estudar. Isso daqui é limite no infinito? Não. É limite infinito. Então se é assim, gente, ó, eu posso pegar esse bonitão aqui e aplicar aquela propriedade duas vezes. O que quer dizer, aplicar aquela propriedade duas vezes? Quer dizer o seguinte: eu não tenho um limite de um quociente? Uma das propriedades de limites é essa aqui, básica: limite de um quociente é o quociente dos limites. Então você poderia escrever isso aqui, assim, ó: faria limite da parte de cima e faria limite da parte de baixo. Isso você está dizendo o quê? Você está dizendo que limite de um quociente é o quociente dos limites. Então, aqui seria $3x^2$ mais $2x$ menos 1 e aqui x^2 mais x mais 3. Limite de um quociente é o quociente dos limites, isso não vai ser possível usar aquela propriedade? E aqui também? Então, quando eu usar aquela propriedade aqui e usar aqui, não vai ficar o maior grau aqui e o maior grau aqui? Para que eu vou ter o trabalho de gastar essa caneta preciosa escrevendo tudo isso, se no final das contas, eu vou ficar com o maior grau daqui, o maior grau de cá. E olha só o tanto que eu tenho que escrever, limite de $3x^2$, com x tendendo a infinito, sobre limite de x^2, com x tendendo a infinito. Para ser limite infinito, não necessariamente tem que ser resultado de um limite no infinito, pode ser de um limite a um valor finito. O que eu queria dizer para vocês é o seguinte: usei uma propriedade de limites, que é: limite do quociente é o quociente dos limites, aí, como eu vi que é um polinômio e está no infinito, eu usei a propriedade que eu mostrei lá, e ficou assim e assim, se ficou assim e assim, eu vou desmanchar esse negócio, eu vou desmanchar, quociente de limites pode virar um limite de um quociente. Vocês viram que eu comecei a propriedade usando limite de um quociente separando, agora que ele estava separado, eu quis juntar de novo e juntei. Por que eu quis juntar? Porque fica fácil observar que, se está junto aqui, esses dois termos vão desaparecer. E aí vai ficar apenas uma constante. E limite de constante é a própria constante. Então o resultado disso aqui é 3. Então você acabou de ver que eu tenho um limite no infinito que não é infinito. Agora eu preciso ficar perdendo tempo e gastando caneta preciosa com tudo isso aqui? De jeito nenhum. Isso aqui eu não faço nunca, eu só faço uma vez só para atender objetivo didático aqui e só. Nunca mais eu faço isso aí, eu vejo isso aqui, eu já pego o maior grau e pego o maior grau, coloco aqui e já faço a simplificação que der e já acabo. Não perco tempo com isso não, eu só mostrei para vocês entenderem que está seguindo as propriedades. Só para ver que tem um processo aí. Assim como, pegar o maior grau aqui, pegar o maior grau, o processo é esse aqui, a explicação é essa. Por isso que eu pego o maior grau, quando é polinômio no infinito. Se o maior grau estiver embaixo? Vamos fazer aqui, vamos aproveitar toda tinta já gasta, aproveitando a tinta gasta, praticamente toda, eu arranco esse quadrado e coloco um cubo, e aí, se eu coloquei um cubo, ele é o maior grau, aqui é x^3, e aí, dois de cima só corta com dois de baixo, ainda sobra um embaixo, se sobrou um embaixo, se o x está indo para o infinito, 3 sobre infinito vai para 0, aí antes que me perguntem, agora coloco o maior grau em cima, eu tiro o 2 e coloco o 4, pois o 4, o que vai acontecer? Vai ficar x^4 e aqui vai ficar x^3, sai daqui os três daqui com os três de cá, sobrou quem? $3x$ na parte de cima, se eu colocar o infinito no x, infinito vezes 3, infinito, né? Eu acabei de falar que essa propriedade de limite no infinito para poder pegar só o termo de maior grau, obviamente, é de polinômios, né? Se não for de polinômios, você vai analisar a função que foi dada na forma dela. Então, é assim, o pessoal que pega lista de exercícios aí, e fica sofrendo à toa, é porque quer sofrer à toa, porque aqui é assim, sempre que for limite de uma divisão polinomial, no infinito, aquela propriedade vale, aí você vai analisar e vê o seguinte, se os graus forem iguais, o resultado vai ser só os coeficientes das variáveis, 3 dividido por 1, dá 3, se o grau de cima for maior, aí o resultado vai dar mais infinito ou menos infinito, dependendo se o x está indo para o infinito positivo ou negativo, e se o x maior grau estiver em baixo, se eu jogar mais infinito ou menos infinito em baixo, a fração sempre vai zerar. Então eu tenho três resultados possíveis: ou dá infinito, ou dá a divisão entre os dois coeficientes, ou dá 0. Para dar infinito, o grau superior tem que estar em cima, para dar 0, o grau superior tem que estar embaixo e para dar a divisão dos coeficientes, os dois graus tem que ser iguais. Pronto! [01:25:39]

AULA DE INTERVENÇÃO 2

TEMPO DE GRAVAÇÃO

01 hora 56 minutos 22 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO

Padrão

[00:25:54] A pergunta primeira que não quer se calar é essa aqui: por que que eu tenho que usar o conjugado? Quem desconfia por que que eu tenho que usar o conjugado? Para acontecer isso, olha o que está escrito aqui. Aqui está escrito: alguém menos outro alguém. Está escrito $a - b$ que está multiplicando o conjugado que é $a + b$. Portanto, isso é um produto da soma pela diferença, que resulta a diferença entre dois quadrados. Então a pergunta que eu fiz que não queria se calar: por que que quando tem a diferença de raízes quadradas, eu multiplico pelo conjugado? Porque eu quero que apareça uma diferença de quadrados. E quando aparecer a diferença de quadrados, a raiz vai embora. [00:27:02]

[00:29:52] Limite, limite de quem? $\frac{\sqrt{4x-3}-3}{\sqrt{2x-2}-2}$, com x tendendo a 3. Vamos jogar o 3 na expressão para ver se vai dar indeterminação? 3 vezes 4, 12, 12 tira 3, 9, $\sqrt{9}$, 3, 3 tira 3, 0. 2 vezes 3, 6, 6 tira 2, 4, $\sqrt{4}$, 2, 2 tira 2, 0. Deu indeterminação. Esse limite deu indeterminação e envolve diferença entre radicais. Que nesse caso, já veio, privilegiadamente, composto por dois de uma vez só, que é para ninguém reclamar de pobreza. Mas é assim, eu falei a pouco tempinho atrás, deu limite indeterminado de uma funçãozinha que envolve diferença de raízes quadradas, a mente da gente dispara imediatamente o que? Conjugado. Vou ter que usar o conjugado, não tem conversa, quando que eu vou ter que usar conjugado? Quando tiver uma função que envolve diferença de raízes quadradas. Não tem conversa, deu limite indeterminado e envolve subtração de raízes quadradas, o cérebro dispara a necessidade do conjugado. Esse aqui deu 0 sobre 0 e tem diferença de radicais? Tem. Vai precisar de conjugado? Vai. Qual é a diferença desse para aquele outro? Que nesse aqui nós vamos ter trabalho duplicado. Nós vamos precisar de dois conjugados e lá era só um. Então aqui vai ficar assim: $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{4x-3}-3}{\sqrt{2x-2}-2}$ multiplicando, aí vocês vão escolher, vocês querem primeiro o conjugado do que está em cima ou do que está em baixo? Tanto faz. Então vamos colocar o de cima primeiro: $\frac{\sqrt{4x-3}+3}{\sqrt{4x-3}+3}$. Então eu usei em cima e em baixo o conjugado do que está em cima. E vou precisar usar em cima e em baixo o conjugado do que está em baixo. Quem é o conjugado desse aqui? $\frac{\sqrt{2x-2}+2}{\sqrt{2x-2}+2}$. Pronto! É assim que se faz. Aquele eu só precisei de um, porque só tinha na parte de cima, esse aqui eu preciso dos dois. Agora, olha só: na hora de resolver, vou fazer esse carinha vezes esse carinha, esses dois vai resultar um produto da soma pela diferença de dois termos, produto da soma pela diferença é a diferença entre dois quadrados. Que é o que eu falei antes. Para que é que eu quero conjugado? Para aparecer uma diferença de quadrados. E para que aparecer diferença de quadrados? Para o radical desaparecer. Então aqui é a mesma coisa. Esses dois vão fazer aparecer uma diferença de quadrados, que vai fazer esse radical desaparecer. E aqui embaixo, aí a coisa já vai ser assim: este com este, esses dois aqui também vai dar produto da soma pela diferença, que vai resultar diferença entre dois quadrados, e aparecendo a diferença entre dois quadrados a raiz sai. Certo? Mas vocês viram que tanto em cima, quanto em baixo, tem dois sujeitinhos que não vão ser usados, então se eles não vão ser usados, a gente copia os dois. Então vai ficar limite, com x tendendo a 3, quem eu não estou usando? $\sqrt{2x-2}+2$ na parte de cima e $\sqrt{4x-3}+3$ na parte de baixo. Só que essa coisa aqui vai multiplicar alguém aqui e essa aqui também vai multiplicar alguém aqui. Que alguém é esse? O resultado do produto da soma pela diferença desses dois e na parte de baixo o resultado do produto da soma pela diferença desses dois. Então quanto vai dar na parte de cima? Na parte de cima é diferença entre dois quadrados para esse e para esse. Quanto é quadrado dessa raiz? Vai ficar só o radicando. A raiz corta e sobra $4x-3$, tem o menos da fórmula, coloca o menos da fórmula aqui, coloquei, e o outro é o que? É quadrado do b. O b é quem está aqui, ó. Quem é o b aqui? 3. Quadrado de 3, 9. Então $4x-3$ é o quadrado do primeiro termo e 9 é o quadrado do segundo termo. E esse sinal de menos é o sinal de menos da diferença entre dois quadrados. Embaixo é a mesma coisa. Quem é o quadrado do primeiro na parte de baixo? $2x-2$. Quadrado dessa raiz aqui, a raiz sai, sobra $2x-2$, menos da fórmula, quadrado do segundo, quadrado de 2, 4. Limite de x tendendo a 3 de $\sqrt{2x-2}+2$ que multiplica $4x-12$ e, na parte de baixo, $\sqrt{4x-3}+3$, vezes quem? Vezes $2x-6$. Meu problema ainda não está resolvido, mas ele vai ser resolvido agora. Isso que apareceu aqui, eu posso pegar na parte de cima e colocar, posso colocar 2 em evidência, apenas. A pergunta é: e por que você quer colocar o 2 em evidência? Porque se eu colocar o 2 em evidência, o que vai sobrar no parênteses? $2x-6$. Não é exatamente o que está em baixo? Eu quero que fiquem iguais para eu poder cortar os dois. Ou se você não quiser pensar muito, você coloca o 4 em evidência em cima e o 2 em evidência em baixo, que vai sobrar $x-3$ aqui e vai sobrar $x-3$ aqui, vai ser cancelado do mesmo jeito. Eu vou colocar tudo em evidência, vai ficar assim: $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{2x-2}+2).4(x-3)}{(\sqrt{4x-3}+3).2(x-3)}$. Não é quando eu jogo o 3, não é esse termo que faz zerar tudo? Ela não vai mais fazer zerar. Pronto! Saiu. Antes de continuar, a simplificação que eu quis evitar, colocando só o 2 na parte de cima, mas já que eu coloquei tudo em evidência, eu posso cortar agora o 2 com o 4, não posso? Fica 1, fica 2. E agora eu posso calcular o limite sem ter problema de indeterminação. Jogo o 3 aqui agora, duas vezes 3, 6, 6 menos 2, 4, $\sqrt{4}$, 2, 2 mais 2, 4, 4 vezes 2, 8. 3 vezes 4, 12, 12 menos 3, 9, $\sqrt{9}$, 3, 3 mais 3, 6, 6 vezes 1, 6. Oito sextos, dá para simplificar por 2, sobra 4, sobra 3. Essa resposta ou essa. [00:40:33]

[01:08:08] Só vou acrescentar uma coisinha, porque esse é o conceito não dá para a gente fugir. Mas o que eu vou acrescentar para vocês é isso aqui, ó: se você pegar seu lápis, sua caneta, seja lá o que for, e colocar no início da função, e você conseguir desenhar o gráfico da função inteirinho sem tirar a caneta do papel, lápis do papel, é porque ela é contínua. Aqui eu consegui fazer isso, ó. Mas aqui eu não consigo, ó. Perceberam? Tem um buraco, então eu tenho que tirar a caneta, por causa desse buraco e depois continuar. Aqui é a mesma coisa, ó, esse ainda é pior, faço isso, aí dou um salto lá para esse valor, aí depois volto aqui, então eu tirei ele duas vezes, ó, tirei para ir lá e tirei para voltar e continuar. Então se você for obrigado a tirar o lápis do papel na hora que você está desenhando o gráfico, é porque ela não é contínua. Ela tem falha, seja lá um buraquinho como esse aqui. E um exemplo que não foi mostrado no vídeo, de função que não é contínua e que é muito, muito, muito, muito usada é essa aqui, ó, por exemplo: seu gráfico começa aqui, está definido no ponto, bonitinho, aí dá um salto e continua, assim. Essa também não é contínua, porque eu venho desenhando a função, chego aqui, eu sou obrigado tirar o lápis do papel, esse ponto também não vai servir para mim, mas eu continuo daqui para a frente. Só de ter tirado o lápis do papel, eu já sei que a função não é contínua. [01:10:19]

[01:10:20] E agora a gente pode analisar todos os casos, eu vou começar exatamente por esse caso aqui, ó: esse caso é de uma função que não é contínua, porque logo de cara a primeira parte dançou, vocês estão vendo que a primeira parte dançou? Aqui está dizendo que tem que ter os limites laterais e esses limites laterais têm que ser iguais, quando eu venho nesse exemplo, eu pego a vizinhança do 2 aqui, o que vai acontecer? Deixa eu colocar aqui, só para ficar parecido com aqueles, 3 aqui e 5 aqui. Então se eu venho pela direita de 2, as imagens estão indo para onde? Para 5. Então nesse caso, eu falo que o limite lateral dessa função, quando x se aproxima de 2 pela direita fez as imagens se aproximarem de 5, mas se eu fizer a mesma coisa, limite dessa função, quando x se aproxima de 2 pela esquerda, o que vai acontecer? Agora vem pela esquerda, as imagens estão se aproximando de 3. Então o que que aconteceu? Tem limites laterais? Tem. Só que deu valores diferentes. Se deu valores diferentes, qual é a conclusão que eu tiro a respeito disso aqui? Isso aqui ó. Não existe. Por quê? Ele não existe porque os laterais são diferentes. Então se não existe o limite, já falhou na primeira, você nem precisa se preocupar com o resto. Vai ter isso aqui, nesse caso? Nesse exemplo aqui que eu dei, nessa figura, vai ter o segundo ponto? Isso aqui é o primeiro ponto da definição, segundo ponto, terceiro ponto. O segundo ponto vai existir? A função está definida no 2, gente? Olha aqui no meu desenho, tem uma bola fechada aqui no 2, então se ela está fechada no 2, ela tem imagem? Tem. Então isso aqui está valendo. Esse primeiro não valeu, esse está valendo, mas como o primeiro não valeu, o terceiro também não tem condição de valer, porque a imagem tem que ser igual ao limite, como não existe o limite, então essa daqui não valeu. Para ser contínua, tem que obedecer aos três pontos, o primeiro diz: tem que existir o limite, para existir os limites, tem que existir os laterais e eles tem que ser iguais. Quando eu fiz o cálculo dos limites laterais, um deu 5 e o outro deu 3, então já falhou, não existe o limite. Então essa primeira aqui falhou. A segunda está dizendo que tem que ter a imagem da função no ponto c, se eu chegar aqui no gráfico que eu estou usando como exemplo e pegar o 2, se eu subir, vai bater na bolinha fechada, se bate aqui é porque tem imagem, qual é a imagem dele? 3. Então se eu calcular o $f(2)$, eu estou chegando à conclusão que $f(2)$ vale 3. Acontece que o $f(2)$ igual a 3, ele é igual a esse limite lateral que está aqui, mas não é igual a esse outro. Então como esses dois limites laterais foram diferentes, não existiu o limite. Então eu não vou poder dizer que o limite lá do x tendendo a 2 é igual a imagem de 2. Não posso, porque a imagem de 2 é 3 e o limite, simplesmente, não existe. Então falhou aqui, falhou na primeira, a única que deu certo foi essa, mas não adianta, para ser contínua tem que bater as três. Aí, se eu venho para cá, aqui se eu for calcular o limite pela direita, para onde está indo? Para onde está indo o limite pela direita? 3. Para onde está indo o limite pela esquerda? 3 também. Então os laterais deu 3 de cada lado, não foi? Então vai existir o limite? Sim. E quanto vai valer o limite? 3. O limite dessa função, quando x tende a 2 vale 3, porque os laterais existem e são iguais a 3. Nesse caso, o primeiro ponto bateu. Tem limite e o limite vale 3. Segundo ponto. O que que é o segundo ponto? Tem que ter imagem. Tem imagem do 2? Tem aqui em cima, ele passa pelo buraco, mas ele bate aqui. Se ele bateu aqui, reflete aqui, qual é a imagem do 2? 5. A imagem do 2 vale 5. Se a imagem do 2 vale 5, então está definida a imagem. Existe um valor para a imagem, essa imagem vale 5. Então o segundo ponto bateu. Mas o terceiro ponto melou. Por que o terceiro ponto melou? Porque o terceiro ponto está dizendo que o limite deve ser igual a imagem. O limite aqui foi quanto? Quanto foi o limite? 3. Então o limite de $f(x)$, quando x tende a 2, é 3. E esse 3 é obviamente diferente de $f(2)$. A imagem vale 5 e o limite vale 3, então os dois são diferentes. Se eles são diferentes, está de acordo com isso? Não. A terceira falhou. E foi só a terceira que fez essa função aqui não ser contínua. Só a terceira. Aqui a primeira e a terceira atrapalharam. Aqui só a terceira. E nesse caso aqui? Tem limite? Limite tem, ó. Quanto vale esse limite? 3. Esse limite vale 3. Existe a imagem de 2? Não. Ó, gente! Não existe a imagem de 2. O primeiro ponto bateu, o segundo ponto, não tem a imagem de 2, falhou. E, aí, se não tem a imagem de 2, como é que essas duas coisas podem ser iguais? Não tem como. Simplesmente, o ponto três também falha. Não é contínua por dois motivos, não é contínua por um motivo, não é contínua por dois motivos. Já essa aqui, é a única das quatro que é contínua. Quanto é a imagem? A imagem é 3. Limite da função, quando x tende a 2, vale 3. Qual é a imagem da função? Qual é a imagem do 2 nessa função? Ôpa! A bolinha está fechada, bate aqui, rebate aqui, a imagem vale 3. Se a imagem vale 3 e o limite vale 3, conclusão: o limite da função, quando x tende a 2, vai ser a própria imagem do 2. São iguais? 3 e 3. Então, nesse caso, item um bateu, item dois bateu, item três bateu. Então a única contínua é essa. E a gente já tinha visto que a única contínua era ela, porque dos quatro exemplos, esse é o único exemplo que eu desenho o gráfico inteirinho sem tirar o lápis do papel. Então você pode começar e ir até o final sem interromper em lugar nenhum. Isso é função contínua. Só isso. [01:19:29]

AULA DE INTERVENÇÃO 3

TEMPO DE GRAVAÇÃO
01 hora 17 minutos 30 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO
Padrão

[00:00:00] Para a gente estudar derivadas, eu primeiro preciso considerar uma função como essa aqui, uma função como essa, e tomar nessa função dois pontos, um ponto aqui e um ponto aqui, esse ponto, eu vou dizer que ele é um x_0, quando a gente faz em um desenho qualquer a representação de um ponto e usa esses índices aqui, x_0, x_1, x_2, se eu colocar um índice na variável como está aqui, eu estou dizendo que isso é um ponto fixo, eu estou fixando esse valor, eu sei, exatamente, quem é esse valor. Quem é esse valor? x_0. E se ele é x_0, ele está aqui, não vai estar aqui, nem aqui, nem aqui, nem em lugar nenhum, ele vai estar aqui, então isso é um ponto fixo. Se isso aqui, eu chamo de função f, então esse cara quando eu rebato aqui, ele dá

$f(x_0)$. Concorda? Beleza! Aí, ao mesmo tempo que eu pego um ponto fixo, eu pego um ponto variável, esse ponto variável, eu vou chamar apenas de x. Então se eu não coloco índice, esse x que eu coloquei aqui, poderia ter posto aqui, aqui, aqui, aqui, aqui, onde eu quisesse. Esse não, mas esse sim. Bom! Esse ponto variável que vocês viram que eu posso colocar em qualquer posição, ele tem imagem $f(x)$. Se eu tenho dois pontos numa curva, o que acontece, se eu traçar uma reta cortando essa curva nesses dois pontos aqui, eu acabo de desenhar uma reta? Secante. Ela é secante, exatamente, por ter tocado o gráfico da curva em dois pontos distintos. Então isso aqui é uma reta secante. Bom! O que que acontece? Eu tenho uma reta secante e faço a seguinte pergunta: com essas informações que estão aqui no quadro, eu sou capaz de dizer qual é a inclinação dessa reta secante? Aí entra um detalhezinho, eu tenho que saber que inclinação de qualquer reta que seja, eu já expliquei isso aqui na matemática básica, quando eu dei função de primeiro grau, eu expliquei isso, falei: olha! Toda reta representa uma função do primeiro grau, e toda função de primeiro grau tem um coeficiente angular, e o coeficiente angular não é o ângulo, é o quê? A tangente do ângulo. Então aqui existe um ângulo, bem aqui existe um ângulo beta, esse ângulo beta não é o coeficiente angular, não é, mas isso aqui é o coeficiente angular, a tangente desse ângulo vai dar o coeficiente angular dessa reta secante. Ficou clara a diferença entre ser ângulo e ser coeficiente angular? O ângulo é a abertura que a reta faz em relação ao sentido positivo do eixo x, é o ângulo, agora a inclinação da reta não é o ângulo, é a tangente desse ângulo e essa inclinação dessa reta é chamada de coeficiente angular, então isso aqui é o coeficiente angular da reta secante. Tem como eu calcular o coeficiente angular da reta secante? Tranquilo, porque olha só, se eu fizer esse desenhinho aqui, fica muito claro como é que eu vou fazer esse cálculo, eu continuo a linha pontilhada aqui, se fechar isso aqui e aqui, eu estou formando um triângulo retângulo, se eu formo um triângulo retângulo, eu tenho o valor desse cateto e tenho o valor desse cateto também. Vou começar por baixo, qual é o valor desse catetinho aqui? É a diferença entre x e x_0, essa diferença aqui vai ser esse cateto. E quem é esse comprimento aqui? É $f(x) - f(x_0)$. Eu tenho um triângulo retângulo, essa aqui é a hipotenusa, não vou precisar dela, mas eu tenho bem definido quem é esse cateto aqui e quem é esse outro cateto. Se o ângulo beta está aqui e essa linha é paralela ao eixo x, então esse ângulo aqui também vale beta, porque retas paralelas cortada por uma transversal, ângulos correspondentes, se aqui vale beta, aqui também vale beta, se isso aqui vale beta, eu acabei de colocar um ângulo dentro de um triângulo retângulo, e aí, se eu tenho um ângulo dentro de um triângulo retângulo, está resolvido minha parada. Para descobrir quem é a tangente desse beta, que é o mesmo beta que está aqui embaixo, basta eu fazer cateto oposto dividido pelo cateto adjacente. Então está aqui, a tangente de beta é o cateto oposto, quem é o cateto oposto? $f(x) - f(x_0)$. Isso é o cateto oposto. E o cateto adjacente? O cateto adjacente é $x - x_0$. Se vocês entenderam até aqui, está quase garantido o conceito de derivadas para vocês. Então o que eu fiz até agora? Peguei uma curva que representa uma função f, marquei dois pontos, tracei uma reta e calculei a inclinação da reta secante, porque se toca dois pontos ela é secante. Existem dois camaradinhas, dois gênios da humanidade, um deles vocês conhecem demais, que é o Isaac Newton, o outro é o Leibniz, um britânico e o outro germânico. Esses dois camaradas sem saber que um estava fazendo a mesma coisa que o outro, simplesmente tiveram essa ideia aqui, foi feita uma pergunta, a pergunta é: como é que eu faço, tendo uma reta secante, se eu tenho esse ponto aqui podendo variar e esse ponto aqui fixo, como é que eu posso, fazendo esse ponto aqui variar na curva e se aproximar desse outro até os dois estarem extremamente próximos, tão próximos, que eu vou achar que minha reta secante, virou uma reta tangente? Porque a ideia é essa aqui: se esse ponto descer, a reta vai mudando a inclinação, vocês estão percebendo? Quando esse ponto chegar muito próximo desse aqui, quando eu falo muito próximo, é muito próximo em termos do que? De limite. Então eu coloco tão próximo, tão próximo, que eu tenho a impressão de que os dois pontos viraram um só. E aí, eu deixo de ter uma reta secante para ter uma reta tangente, a curva está aqui, ó, essa é a curva, eu vou destacar a reta tangente assim: essa reta em azul é a reta tangente. A reta secante foi inclinando, inclinando, inclinando, inclinando até se transformar em uma tangente, porque esse ponto variável chegou tão próximo desse ponto fixo, que os dois se confundiram e eu passei a enxergar uma reta tangente, e enxergando essa reta tangente, eu quis responder a seguinte pergunta: eu não, Newton e Leibniz, quiseram responder à seguinte pergunta: qual é a inclinação dessa reta tangente? Aí, eles perceberam isso aqui, ó, quando eu faço a inclinação da reta tangente, eu tenho um probleminha sério, eu formei esse triângulo, formando esse triângulo, esse ângulo que está aqui, se eu chamar ele de alfa, esse ângulo aqui também vai ser alfa e, aí, esse ângulo alfa dentro desse triangulozinho, ele podia me dar tranquilamente a inclinação da reta tangente, ele podia muito bem me dar a tangente de alfa. Bom! Só que é o seguinte: quando eu olho para o bendito do triângulo, eu continuo tendo aqui embaixo o cateto adjacente, mas quando eu olho aqui, qual é o valor do cateto oposto? Vocês estão conseguindo ver o valor do cateto oposto? Não tem. Por que que não tem? Porque esse ponto aqui não está no gráfico, então se ele não está no gráfico, qual vai ser a imagem desse cara? Não faz parte do gráfico, não tem imagem. Então se não tem imagem, eu não tenho esse valor. Mas eu preciso saber qual é a inclinação da reta tangente. Como é que eu vou saber, se eu não tenho essa medida aqui? Aí entra a genialidade do Isaac Newton e do Leibniz, os caras simplesmente pensaram nisso aqui: a gente tem na mão a inclinação da reta secante, os dois gêniosinhos pensaram assim, então vamos fazer esse x variável tender a x_0, se eu fizer esse x tender a x_0, eu vou converter a reta secante numa reta tangente, então automaticamente, eu vou converter o coeficiente angular da reta secante no coeficiente angular da reta tangente. Então essa tangente de alfa, eles simplesmente pensaram assim, nós vamos pegar a tangente de beta que é $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e vou só fazer isso aqui, ó: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Todo sentido do mundo que só dois gênios poderiam enxergar naquela época. Se eu fizer o x se aproximar do x_0, tanto quanto eu queira, eu vou converter uma reta secante em uma reta tangente, então o coeficiente angular da reta secante vai virar o coeficiente angular da reta tangente. E agora vocês vão entender de vez o seguinte: essa tangente aqui, que é a tangente do ângulo alfa, que é a inclinação da reta tangente, isso aqui é simbolizado como a derivada da função no ponto x_0. Então a inclinação da reta tangente é a derivada da função naquele ponto. Só isso! Então se alguém pergunta para vocês: o que é a derivada da função em um ponto? É a inclinação da reta tangente àquela curva exatamente naquele ponto. [00:15:58]

[00:15:59] E o símbolo? Vocês perceberam o símbolo aqui, $f'(x_0)$? Isso é símbolo de derivada. Como aqui dentro está x_0, é a derivada da função no ponto x_0. E para ficar bem completo, existe também essa forma de representar $\frac{df(x_0)}{dx}$, esse símbolo aqui é a mesma coisa que esse. [00:16:26]

[00:16:27] Aqui está a simbologia, o significado a partir disso, mas tudo o que eu fiz aqui foi: derivada da função f no ponto de abscissa x_0 ou, se você quiser colocar $x = x_0$. Se você quiser colocar sem escrever de abscissa, podia não escrever assim, podia escrever assim, ó: no ponto $(x_0, f(x_0))$, porque aqui você está representando o ponto inteiro e aqui você só está representando a abscissa. Não fiz derivada de uma função, eu fiz apenas a derivada de uma função em um ponto específico, em um único ponto. Mas aí vem a pergunta: tem como eu calcular a derivada da função inteirinha? Se eu fiz para esse ponto aqui, eu poderia ter feito para esse, para esse, para esse, para esse, para esse, para esse, eu poderia ter feito para qualquer ponto. A ideia vai ser essa aqui, ó: novo gráfico, está aqui o gráfico, aqui está um ponto, aqui está outro ponto, vou passar novamente uma reta secante, essa reta secante tem esse ângulo aqui e eu pergunto para vocês: se eu tenho o ângulo ali e uma secante, eu posso muito bem calcular a inclinação dela, não posso? É só calcular a tangente do ângulo beta. Mas aqui nós vamos fazer uma modificação, gente, ó, atenção para isso aqui agora. Vou fazer uma modificaçãozinha, a modificação é a seguinte: no exemplo anterior, eu tinha chamado esse ponto aqui de x_0, não é isso? E quando eu falei x_0, esse ponto é fixo, não foi? Esse ponto que era fixo, agora vai ser variável. E esse ponto aqui, também vai ser variável, mas a variação vai acontecer dessa maneira aqui, ó: eu estou no x e daqui para cá, essa distância aqui eu vou dizer que corresponde a uma variação de x, a um delta x. Então se eu pego um ponto variável e acrescento uma variação no ponto variável, o que eu consigo aqui na frente? Uma coisa variável também. Concorda? E qual é o valor dessa coisa variável? Eu estou aqui, daqui para cá, da origem para cá, eu tenho x de comprimento e eu estou acrescentando, nesse comprimento, outro comprimentinho. Vai dar x mais delta x. Não é óbvio isso? Então se você tem um pontinho variável e você acrescenta uma outra variaçãozinha em cima dele, a soma dos dois pedaços vai dar a nova localização. Certo? Então se isso está certo, se eu pegar esse cara aqui e rebater aqui, se isso aqui é função f, então isso aqui é $f(x)$. Correto? E se eu pegar esse outro aqui, bate aqui, rebate aqui, o que é isso aqui? $f(x + \Delta x)$. Concorda? Então a imagem de x é $f(x)$ e a imagem de $x + \Delta x$ é $f(x + \Delta x)$. E com essas informações aqui, eu pergunto a vocês: quem é a tangente de beta? Quem é a tangente do ângulo beta? Cateto oposto sobre cateto adjacente. Quem é o cateto oposto? $f(x + \Delta x) - f(x)$. Sobre o delta x, porque o delta x não é essa variação? Se eu fizer $x + \Delta x$ menos x, cancela x com x, só sobra delta x. Isso é óbvio, porque o delta x era a variação. Isso aqui é a inclinação da reta secante, levando em consideração quaisquer dois pontos do gráfico que você queira. Está claro isso? Aqui tinha um ponto fixo, lá não, lá é ponto variável. Então aquela reta secante é qualquer reta secante que você imaginar. Essa não, essa é uma reta secante determinada por esse ponto aqui. Ela vai variar? Vai. Porque esse ponto aqui vai andar, mas ela fica presa aqui e aquela não fica presa, pode ser qualquer ponto da curva inteira. O detalhe agora é o seguinte: isso daqui é inclinação de que reta? Secante. E se eu fizer, eu não vou fazer esse ponto se aproximar desse como eu fiz naquela, eu vou simplesmente fazer uma coisa muito bonitinha, eu vou pegar essa variação de x aqui e vou fazer essa variação de x tender a 0, se essa variação de x tender a 0, o que vai acontecer com a reta secante? Se essa diferença acabar, os dois pontos vão se grudar, essa é a ideia, e os dois pontos se grudando vira uma reta? Tangente. Então se eu pegar a mesma inclinação da secante e fizer o delta x tender a 0, não vai ser mais inclinação da reta secante, vai ser inclinação da reta tangente. Então isso aqui vai dar a derivada da função para qualquer valor de x. Olha a diferença, ó, aqui é a derivada da função inteira e aqui era a derivada da função apenas no ponto x_0. E vocês pegando livros para ler a respeito do conceito de derivadas, vocês vão ver alguns livros que ao invés de usar delta x, ele prefere usar isso aqui, tem muito livro que escreve assim: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Por que que os autores preferem esse aqui? Para não ficar confundindo delta x com x e também porque a gente escreve mais, ficar escrevendo delta x, delta x, a gente escreve mais. Então, para não escrever mais e não confundir os dois, eles trocam a variação de x pelo valor h. Bom! Mas isso aqui, eu chamei atenção, porque se alguém vê nos livros um h vai saber que se trata do próprio delta x. Isso é o conceito de derivada. [00:26:31]

[00:45:45] Então vamos lá! Para a velocidade, se eu quero no tempo 1s e a fórmula é $S'(t_0) = V(t_0)$, então isso é o $\lim_{t \to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$. Como eu quero para o tempo 1s, eu já vou retirar o t_0 aqui, em todo lugar da definição e já vou colocar o valor dele, 1. Então esse limite vai ficar assim: velocidade para 1s vai ser a derivada da função horária para 1s, que vai ser o $\lim_{t \to 1} \frac{S(t)-S(1)}{t-1}$, porque o t_0 é 1. Acabei de montar a definição de derivada para $t = 1$. O que quer dizer isso? Que se eu considerar a curva da função horária, isso que eu estou encontrando é o coeficiente angular da reta tangente a essa curva aqui, exatamente, quando t vale 1. É isso que significa. E agora é só fazer conta. O pessoal já fez prova de limites, então já está craque. Vou substituir $S(t)$, então vai ficar limite de $S(t)$, quem é o $S(t)$ para eu substituir? $t^3 + 5t$. Isso daqui é o $S(t)$, menos $S(1)$, quem é o $S(1)$? Aí eu tenho que substituir aqui, o $S(1)$, quanto vai ser o $S(1)$? $S(1)$ vai ser 1 ao cubo mais 5 vezes 1, vai dar 6. Então $S(1)$ é 6. A expressão que fica na parte de cima é $t^3 + 5t - 6$ e na parte de baixo, $t - 1$, com t tendendo a 1. Cai em um limite que eu já sei resolver faz tempo. Limite de um polinômio do terceiro grau dividido por um polinômio do primeiro grau, com t tendendo a 1. Se eu substituir 1 na parte de cima vai zerar, se eu substituir 1 na parte de baixo, também vai zerar. Então esse limite é uma indeterminação. Se é uma indeterminação, eu tenho as técnicas para remover a indeterminação. Nesse caso aqui, qual foi a técnica preferida nossa? Divisão polinomial. Então eu vou pegar $t^3 + 5t - 6$ e vou dividir por alguém, e vou pegar $t - 1$ e vou dividir por alguém. Quem é esse alguém para eu fazer a divisão? $t - 1$. Então aqui é $t - 1$ e aqui é $t - 1$. Desse lado já está pronto. Uma coisa dividida por ela mesma dá sempre 1 e o resto é zero. E aqui, maior grau daqui, t^3, dividido pelo maior grau daqui que é t dá t^2, t^2 vezes t, gente, eu vou acelerar esse cálculo aqui, eu já fiz bastante. Como já era esperado. Visualizada. Então quer dizer o que? Que para eu remover essa indeterminação é como se eu estivesse fazendo uma simplificação do numerador e do denominador por $t - 1$. E feita a simplificação, na parte de cima sobra isso e na parte de baixo sobra 1. Então esse limite todinho aqui, vai ficar só isso aqui, ó, $\lim_{t \to 1}(t^2 + t + 6)$, que se eu jogar 1 aqui vai dar 8. Se eu estou considerando segundo para tempo e considerar o sistema internacional, significa que o espaço vai ser dado em metros e o tempo em segundos. Portanto a velocidade é metros por segundo. Espaço em metros, tempo em segundos. Então qual é a velocidade instantânea, eu falo velocidade instantânea porque é no instante t igual a 1. Qual é a velocidade instantânea para esse exemplo que o professor escolheu? 8 m/s. [00:50:50]

[00:53:23] Vou me concentrar nesse aqui, ó: $S(t) = t^3 + 5t$ e eu não estou nenhum pouco interessado no $t = 1s$. Eu vou fazer para qualquer t. Então sendo para qualquer t, a velocidade aqui para t é o $S'(t)$ e o $S'(t)$ é $\lim_{h \to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h}$. Estou usando a definição de derivada para um ponto qualquer. Então se é assim, esse limite, com h tendendo a 0, vai ser $S(t+h)$, vou jogar $t+h$ aqui dentro, jogando aqui dentro, $(t+h)^3 + 5(t+h)$, perfeito! Substituí $t+h$ no lugar desse t e no lugar desse t. Perfeito? Está substituído certinho? $(t+h)^3 + 5(t+h)$. Perfeito? Continuando, menos a própria função, quem é a função que eu vou colocar aqui? $t^3 + 5t$. Então a parte de cima depois da substituição ficou desse tamanhão aí. E a parte de baixo? h. Qual é o trabalho que eu devo ter para resolver esse limitão aqui? Não tem outra saída a não ser desenvolver essa potência aqui e fazer as contas com essas outras coisas aqui. É isso que eu vou fazer. Eu vou fazer essa conta aqui rapidinho para não perder tempo. h tendendo a 0 vai ficar o quê? $(t+h)^3$ é. Caso de produto notável, ó: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, cubo da soma de dois termos resulta cubo perfeito. Se fosse com o sinal de menos no meio, a única coisa que ia mudar era a alternância de sinal, começa com positivo, depois vem negativo, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Então esses são os dois produtos notáveis que eu posso utilizar quando desenvolver um cubo. O que está aqui é a soma, se é a soma, é o de cima. Então vai ser $t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3$, tudo isso aqui é esse cubo $(t+h)^3$, que sai disso aqui $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Aí está feito o cubo, e agora eu tenho que fazer 5 vezes t e 5 vezes h, e subtrair esses dois aqui. Tem um pessoal que não gosta de usar parênteses, se não usar parênteses, nessa hora erra. Porque ao invés de fazer o jogo de sinal para todo mundo, acaba deixando o sinal só para o primeiro, vai errar com certeza. Então aqui vai trocar o sinal de todo mundo, vai ficar menos t^3, menos $5t$, tudo isso sobre h. Esse limite vai ficar sendo, cancela t^3 com menos t^3, cancela $5t$ com menos $5t$ e o resto que sobra, esse tem h, esse tem h, esse tem h e esse tem h, todos os que sobraram tem h, se todos tem h, eu posso colocar h em evidência, se eu colocar h em evidência, o que vai sobrar? Esse h está em evidência, sobra $3t^2$, um h que vai para evidência, vai sobrar outro, então vai sobrar $3th$, mais $3th$. O que mais? h sai um, sobra h^2, e desse aqui saindo o h, sobra o 5. Pronto! Tudo isso sobre h. E graças a ter colocado esse h em evidência, aqui é multiplicação, se é multiplicação, esse h simplifica com esse h. Perfeito? Acabou o problema de indeterminação no limite, não vai dar mais 0 sobre 0. É só colocar o h aqui que está feito o exercício. Se eu colocar o h aqui, o h tendendo a 0, isso desaparece, isso desaparece e vai sobrar quem? $3t^2 + 5$. Esse troço representa a velocidade para t. Essa aqui não é a função velocidade? Se eu tenho a função velocidade completa na mão, eu posso jogar qualquer tempo aqui dentro? Posso. Qual é o tempo que eu quero jogar? 1. Vamos jogar o 1 aqui? $3 \cdot 1^2 + 5$. Resultado: 8 m/s. [01:02:32]

AULA DE INTERVENÇÃO 4

TEMPO DE GRAVAÇÃO
32 minutos e 51 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO
Padrão

[00:04:43] Agora essa daqui é a vedete do show. Essa daqui é a coisa mais importante que a gente tem em regras de derivação. Para vocês entenderem isso aí, eu preciso fazer uma coisinha antes, que é essa: como é que eu faço para desenvolver isso aqui, ó? Vai dar ela mesma. Ou melhor, vou começar logo do 0. Quanto dá $(x+h)^0$? 1. Quanto dá $(x+h)^1$? Ela mesma. Quanto dá $(x+h)^2$? Quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo. Perfeito? Quanto dá $(x+h)^3$? Cubo do primeiro, mais 3 vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo, mais 3 vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo, mais o cubo do segundo. Perfeito? Esses casos aqui, principalmente o segundo e o terceiro são casos de produtos notáveis, que são estudados lá no oitavo ano do Ensino Fundamental. Mas daqui para a frente, não. Se eu escrever $(x+h)^4$, como é que vai ficar desenvolvido isso aqui? x^4, mais 4 vezes x^3h, mais 6 vezes x^2h^2, mais 4 vezes xh^3, mais h^4. Perfeito? Ô, gente! Eu posso fazer a quinta potência também. A quinta fica de que maneira? x^5, mais 5 vezes x^4h, mais 10 vezes x^3h^2, mais 10 vezes x^2h^3, mais 5 vezes xh^4, mais h^5. Isso que nós estamos fazendo aqui é desenvolvimento do Binômio de Newton. Se vocês prestaram atenção bonitinho, o expoente que aparece aqui, aqui, aqui e aqui, ele começa a potência de maior grau, e ele vai decrescendo, aqui ele era 2, aí o x passou ter 1 como expoente e aqui tem o x também, só que ele está elevado a 0, por isso que ele sumiu, então era 2, 1 e 0, só que o 0 não precisa escrever. E aí, o h é o contrário, o h começa com h elevado a 0, que não precisa escrever, h à primeira e depois fica h à segunda, então enquanto a primeira variável tem o expoente decrescente, a segunda variável tem o expoente crescente formando parzinho com a primeira variável. Aqui é a mesma coisa, 3, 3, 2, 1, 0, sumiu, de trás para a frente, 3, 2, 1 e 0 que, ele, não precisa ser escrito aqui, h elevado a 0, que dá 1. O 4, 4, 3, 2, 1, 0 e o h ao contrário, 4, 3, 2, 1, 0. O x, 5, 4, 3, 2, 1, 0, o h, 5, 4, 3, 2, 1, 0, e vai sempre assim. O que muda são os coeficientes, esses coeficientes que a gente escreve aqui, eles saem do Triângulo de Pascal. O Triângulo de Pascal é esse aqui: 1; depois 1 e 1; 1, você soma isso aqui dá 2 e 1; 1, sempre começa com 1, você soma isso aqui, dá 3, você soma isso aqui, dá 3, e acaba com 1; começa com 1, você soma isso aqui, dá 4, você soma isso aqui, dá 6, você soma isso aqui, dá 4, e termina com 1; sempre começa com 1, acaba com 1 e os termos intermediários, eu vou obtendo das somas, então o próximo, 1; qual seria o próximo aqui? 5, 10, 10, 5, 1; se eu quiser a sexta linha aqui, a sexta não, no caso vai ser a sétima linha, porque começa a partir do 0, sétima linha seria 1, 6, 15, 20, 15, 6 e 1; e dessa maneira você vai formando o Triângulo de Pascal. De onde é que saíram esses valores todos? Esses valores todos aqui, eles saem do Triângulo de Pascal, mas escrito assim, ó: $\binom{0}{0}$; depois $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$; depois $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$; $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$; e dessa maneira é formado o Triângulo de Pascal. O Triângulo de Pascal não são os números colocados do jeito que eu fiz, o Triângulo de Pascal são os números binomiais, quando você resolve um número binomial desse, aparece esses valores aqui. Quem lembra qual é a fórmula de número binomial? É n fatorial sobre n menos k fatorial vezes k fatorial. Quem viu isso aqui no Ensino Médio deve ter visto isso aqui também e fazendo o cálculo de cada valor desse usando essa fórmula dá esse triângulo aqui. Quem não viu, é uma matéria imensa para ser estudada, então o que eu peço a vocês, paciência, só memorizem esse triângulo, que esse triângulo aqui, desse jeito, já resolve o problema. Esse triângulo já resolve o problema. Então é o seguinte: vocês viram como eu desenvolvi, certo? Só que para fazer o exercício que vai aparecer aqui, eu vou jogar essa coisa bonita dentro da definição de derivadas e eu quero ver como vou usar esse negócio dentro da definição de derivadas. [00:12:12]

[00:12:13] Então vai ser assim, ó: nós vamos fazer a derivada da função mais importante para cálculo de derivadas, que é a função potência. Então aplicando limite, $f'(x)$ vai ser limite de $f(x+h)$ menos $f(x)$, sobre h, com h tendendo a 0. Então eu vou fazer isso aqui, simplesmente colocando, no lugar de x vai entrar $x+h$. Então eu vou ter $x+h$ elevado a n, essa coisa aqui dentro da função dá isso aqui, menos a própria função, menos x elevado a n. Tudo isso, opa, cometi um erro aqui, derivada é o limite, se eu não coloco o limite aqui, eu não estou derivando. Então vai ser, eu joguei aqui, deu $x+h$ elevado a n, menos ela própria, dividido por h. Então

$f'(x)$ vai ser igual a limite de h tendendo a 0 e aí, nessa hora, é que eu preciso saber como se desenvolve o Binômio de Newton para um expoente qualquer, isso que eu fui fazendo com vocês aqui, a gente faz aqui igualzinho, se eu fizer igualzinho, qual é o comportamento das variáveis? Começa com expoente máximo a primeira variável e vai decrescendo até zerar, aí faz a outra ao contrário, então vamos ter isso aqui: x elevado ao expoente máximo n, qual seria o expoente do h? 0. Não precisa escrever, mas já que coloquei aqui, fica então; quem o próximo termo? x elevado a n menos 1, está caindo uma unidade, enquanto o h vai subir uma unidade, h vai ficar 1; quem vai ser o próximo termo? x elevado a n menos 2, vezes h elevado a que? h elevado a quanto? 2. Então olha só, o expoente do x está caindo de 1 em 1 e o expoente do h está subindo de 1 em 1 e, assim, vai até chegar ao final, o que vai ser no final aqui? Como é que vai ficar no final aqui? Vamos ver, aqui eu vou colocar ponto, ponto, ponto, mais, como é que vai ficar no final aqui? Percebam que o expoente do x está caindo, caindo, caindo, lá na frente, lá na frente, ele vai ficar x elevado a 0, vezes h elevado a quanto? n. Exatamente. O expoente do h foi crescendo até chegar no n e o expoente do x foi caindo até chegar no 0. Só que falta umas coisinhas aqui, o que que falta? Falta os coeficientes. E os coeficientes são aqueles termos do Triângulo de Pascal em forma de binômio. Então o primeiro aqui, seria quem? $\binom{n}{0}$, esse é $\binom{n}{1}$, esse aqui é $\binom{n}{2}$, até chegar no último que vai ser quem? $\binom{n}{n}$. Esse trambolho desse tamanho é o desenvolvimento dessa coisinha aqui. Perfeito? Tudo isso, menos x elevado a n, sobre h. Que que vai acontecer com esse limitão? x elevado a n, ele vai cancelar com esse x elevado a n, porque o número binomial de ordem n e classe 0, $\binom{n}{0}$, vale sempre 1, toda vez que a classe é 0, vale 1. Se a gente lembrar do Triângulo de Pascal, o Triângulo de Pascal começa sempre por 1. Então é 1 e depois vai mudando os valores aqui. Então esse aqui é 1, aqui eu tenho x elevado a n, vezes 1, que dá x elevado a n, que eu estou cancelando com x elevado a n, todo o resto que sobrou tem o h envolvido na fórmula. Então o que eu vou fazer com esse h? Colocar em evidência. Então vai ficar limite com h em evidência, vai sobrar quem? Esse h ficou em evidência, vai dar $\binom{n}{1}$, vezes x elevado a n menos 1; esse outro, $\binom{n}{2}$, x elevado a n menos 2, com h elevado à primeira, mais, ponto, ponto, ponto, no final vai ficar o que aqui? $\binom{n}{n}$, x elevado a 0 dá 1 e aqui fica h elevado a quanto? n menos 1, porque um foi para evidência. Fechou isso aqui, tudo sobre h, com h tendendo a 0. Resultado dessa boniteza vai ser: sai h com h, e se eu jogar o limitão aqui, ó, em tudo que tem h vai zerar, porque o h está tendendo a 0, aqui zera, aqui vai zerar, aqui tem h, vai zerar, todo mundo que está nesse meio tem h, todos vão zerar e só vai sobrar esse cara que não tem h, quem é esse cara que sobrou? É $\binom{n}{1}$, x elevado a n menos 1. Se você usar a fórmula de número binomial, esse valor aqui vai dar o n. Toda vez que um número binomial tem classe 1, o resultado dele é a própria ordem, isso é teoria de números binomiais do Ensino Médio, toda vez que a classe é 1, a ordem é o valor do número, x elevado a n menos 1. Aqui está a fórmula. Está demonstrada a fórmula para esse bonito e daqui para frente, eu não quero saber mais desse limite, não vou usar esse limite nunca mais. [00:19:13]

[00:20:34] Olha gente! Fora isso, a aula dele encerra com esse assunto aqui, ó, vou chamar atenção mais uma vez, não vão confundir, pelo amor de qualquer coisa, a aula dele encerrou com a regra do produto, não foi? A regra do produto. Eu só quero que vocês não façam isso aqui, gente, ó, olha só! Vou dar um exemplo aqui, só para comentar o que eu quero para vocês não caírem nessa, ó: $f(x)$ é igual a 7 vezes seno de x, tem muita gente, que o professor pode se esgoelar de tanto falar isso, mas ele continua cometendo o mesmo erro, olha para cá e fala: tem um produto, se tem um produto, eu vou usar a regra do produto, ô gente, tem um produto? Tem. Mas é entre uma função e uma constante. É regra do produto? É. Se você quiser usar a regra do produto vai dar certo? Vai. Mas você vai dar um tiro de canhão para matar uma formiga. Porque, como é a regra do produto? Se eu usar a regra do produto vai ser assim: primeira vezes a derivada da segunda, derivada de seno é cosseno, mais a segunda vezes a derivada da primeira, quem é a primeira? É uma constante. Qual é a derivada de uma constante? 0. Então, percebam que por conta dessa constante, essa parte aqui zerou. Então sobrou apenas que a derivada dessa função é 7 cosseno de x. E o que é 7 cosseno de x? É a constante que estava aqui bonitinha, que ficou esperando eu apenas derivar a função e a derivada de seno é cosseno. Acabou. Está feita a derivada. [00:22:39]

[00:24:26] Bom! Para encerrar essa matéria, o que o pessoal tem muita dificuldade é com a questão dos expoentes fracionários, dos expoentes negativos, quando, por exemplo, eu preciso fazer a derivada de uma função como essa aqui, ó, quero derivar agora no terceiro exemplo, essa funçãozinha: $f(x)$ igual a 7 sobre x a sexta mais 1 sobre raiz cúbica de x ao quadrado. Bom! Eu tenho essa função para derivar, primeira coisa que eu preciso fazer é ajeitar a função e colocar nesse formato aqui, ó, porque esse formato aqui resolve minha paradinha através dessa regrinha. E eu sei que toda vez que eu tenho uma fração e tem potências envolvidas ou radicais, eu posso transformar tudo em potência e mudar de posição, numerador, denominador, de acordo com a necessidade, só que eu tenho que lembrar que toda vez que eu mudo uma potência de posição dentro de um numerador ou de um denominador, eu sou obrigado a trocar o sinal do expoente, então vai ficar, ajeitando a função, ó, $f(x)$ vai ser igual, essa potência 6 aqui em baixo, eu posso mandar ela para o numerador, só que ela vai com expoente negativo, toda troca que eu fizer de posição entre numerador e denominador, a potência muda de sinal, se ela tem expoente positivo, mudou, fica com expoente negativo, se ela tivesse expoente negativo e mudasse, ela ficaria com expoente positivo, essa regra é básica lá no Ensino Fundamental. Essa outra aqui, antes de fazer a mudança, eu tenho que converter o radical em uma potência de expoente fracionário, porque todo radical nada mais é do que uma potência de expoente fracionário e aí tem aquele macetinho, como que é o macetinho? Quem está no sol, quem está no sol é o 3, vai para a sombra e quem está na sombra é o 2, vai para o sol. Então a raiz cúbica de x ao quadrado, nada mais é do que x elevado a dois terços. E aí, para ficar prontinho para usar a regra da potência, eu tenho que dar um jeito de levantar esse troço aqui, mandando ele para cima, como aqui está 1, não vai atrapalhar em nada, então vai ficar x elevado a menos dois terços. Algum problema até aqui nessa mudança? Se você sabe fazer isso aqui, você vai fazer um monte de exercícios de derivadas. Estão prontos para eu utilizar apenas a regra da potência. Então, se é só usar a regra da potência, vamos fazer a derivada, derivada vai dar, que regra que eu uso aqui? Deixa a constante esperando e deriva x elevado a menos 6, o professor insistiu várias vezes no vídeo que a gente fizesse esse negócio direto, ao mesmo tempo que você aplica a regra da potência, você já faz o produto com essa constante, então esse menos 6, ele vai cair, não vai? Se ele cai aqui, ele vai cair multiplicando o 7, se ele cai multiplicando o 7, menos 6 vezes 7, menos 42, já faz direto. Perfeito? E o x vai ficar elevado ao expoente anterior menos 1, se eu tenho o menos 6 e tiro 1, menos 7, exatamente. Então está aí, já usei a regra da potência na primeira parcela, bonitinho, sem problema nenhum. Na segunda, aqui na frente, eu não escrevi, mas o coeficiente é 1, o que descer aqui multiplicando o 1, dá o próprio valor que descer, então quem vai descer nesse aqui? Menos dois terços, menos dois terços desceu, multiplicando 1 dá ele mesmo, vezes x elevado a menos dois terços menos 1, menos dois terços menos 1, menos cinco terços. Gente, não sofra com isso não, você olha para isso e fala, ah, eu tenho que tirar o mínimo, oh, não, quando tiver inteiro envolvido, denominador multiplica e o resultado você soma com esse aqui, 3 vezes menos 1, menos 3, somado com menos 2 dá menos 5 e repete o denominador. Essa é a maneira de fazer rápida quando você tem um inteiro. Bom! Isso aqui já é resposta do exercício? É. Mas acontece, se você está fazendo uma prova de múltipla escolha, pode ser que a resposta não esteja assim. Se o problema que deu origem, ele só tinha expoente positivo e radical, eu não posso ficar esperando deixar uma resposta com expoente negativo e sem radical. Já que tem expoente fracionário, isso vai ter radical envolvido. Então eu volto no que era antes, volto o que era antes não, eu faço ficar expoente positivo e faço aparecer radical. Então esse expoente negativo, se eu mandar o x para baixo, vai ficar menos 42 sobre x elevado a sétima, pronto. E esse daqui? Menos 2 sobre 3, e o x que está elevado a expoente negativo, vai descer e o expoente vai ficar positivo. Perfeito? Então para finalizar, aqui não tem absolutamente nada para fazer, não precisa fazer nada aqui, copia, mas aqui eu tenho o que fazer, esse x elevado a cinco terços é a raiz cúbica, quem está na sombra vai voltar para o sol e quem está no sol vai ficar agora na sombra e esse exercício só não está encerrado, porque dentro do radicando, eu tenho uma potência que tem expoente superior ao valor do índice, então posso arrancar termo aqui de dentro e mandar para fora. Então eu vou fazer $f'(x)$ igual a menos 42 sobre x elevado a sétima, menos 2 sobre 3 raiz cúbica de x ao cubo vezes x ao quadrado. Perfeito? Isso aqui é x a quinta, esse que está ao cubo cancela com a raiz, ele vai sair, então vai ficar menos 42 sobre x elevado a sétima, menos 2 sobre 3, quem vai acompanhar o 3 agora? x e o outro que não conseguiu sair fora, vai continuar dentro da raiz cúbica, que é o x ao quadrado. Essa é a resposta final com os expoentes todos positivos, envolvendo radical. [00:32:47]

AULA DE INTERVENÇÃO 5

TEMPO DE GRAVAÇÃO
35 minutos e 38 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO
Padrão

[00:19:25] Qual é a derivada da função a^x? É ela mesma vezes o ln da base. Derivada de e^x é ela mesma, ela mesma é maneira de falar, porque, na realidade, eu teria que escrever aqui na frente igual está aqui na parte de cima, eu teria que escrever $ln(e)$, só que $ln(e)$ vale 1, porque logaritmando e base são iguais, logaritmo natural, neperiano, tem base e, se o logaritmando for e também, vai dar 1, então não preciso escrever, mas eu tenho o 1 aqui na frente que é o resultado de $ln(e)$. [00:20:23]

[00:21:53] Fórmula 12, a 12 vai ser $f(x) = log_a x$, qual é a derivada de $log_a x$? $f'(x)$ é $\frac{1}{xln(a)}$. Isso é base a, vai ter $ln(a)$. Já a última fórmula, se eu usar $ln(x)$, a base é e, se a base é e, então a derivada vai ser apenas $\frac{1}{x}$, então não preciso escrever $ln(e)$, porque $ln(e)$ vai dar 1, igual aqui. [00:22:35]

[00:33:10] $Log(x)$, qual é a derivada de $log(x)$? $log(x)$ é 1 sobre x vezes ln da base, então aqui vai ser 1 sobre x vezes ln da base, qual é a base? 10. Quando não está escrito a base é porque a base é 10. O que mais? Mais derivada de 3^x. 3^x é o a^x, se é o a^x, é ela mesma vezes o ln da base. Sempre que a base não for o e, você sempre vai precisar colocar esse ln aqui e aqui, ln, ln. Então aqui vai ser ela mesma vezes ln da base, se a base é 3, $ln(3)$. [00:34:16]

AULA DE INTERVENÇÃO 6

TEMPO DE GRAVAÇÃO
38 minutos e 42 segundos

MODALIDADE DE TRANSCRIÇÃO
Padrão

[00:00:00] A regra da cadeia é simplesmente uma regra para fazer derivada de função composta. Na realidade toda função, até as simples, a gente diz que é composta, mas para diferenciar a gente fala que é simples. Por que eu falo que tudo é composto? O que acontece com essa função aqui, ó, $f(x) = x$ e $g(x) = sen(x)$, se eu chegar para vocês e pedir isso aqui? Quem é a $(fog)(x)$? A $(fog)(x)$ é a $f(g(x))$. Se é $f(g(x))$, a função g vai entrar dentro da f, e a f é x. Se a f é x, a g tem que entrar no lugar de x. Então se ela entrar no lugar de x, vai ficar o espaço do x. Como a gente fazia na aula de composta de funções? Abria a função f e colocava dentro a função g, como a função f só tem a variável x sozinha, ela aberta fica assim, e nessa entrada aqui, vou colocar g inteirinha que é $sen(x)$. Portanto, com parênteses ou não, isso aqui é a função $sen(x)$. Se é a função $sen(x)$, eu estou dizendo que a função composta é a própria função g. Isso aqui eu escrevi só para mostrar a vocês que toda função simples, eu posso considerar ela uma composta. Basta que eu faça a composição usando a função identidade. Vai dar ela mesma. Eu nem precisava ter falado isso. Eu só falei para justificar: toda função, mesmo simples, a gente pode considerar ela uma composta. [00:02:04]

[00:02:05] E a regra da cadeia é uma regra para fazer derivação de função composta. Então ela é específica para isso. Se eu tenho a função $f(g(x))$, se eu quiser calcular a derivada dessa composta, colocando a linha aqui, eu vou calcular derivando a função f e multiplicando ela pela derivada da função g, com um pequeno detalhe, como é f composta com g, a derivada da f vai ser feita em relação à própria g, enquanto a g vai ser feita em relação à variável x. Isso é fazer a composição. Quando eu falo fog, eu derivo a f, mas eu tenho que entender que a g que vai entrar na derivada da f está funcionando como se fosse a varável da derivada da f, por isso que eu escrevo ela inteira e multiplico pela derivada da função g em cima da variável da função g que é o x. Então, quando eu faço composta, eu não estou jogando a g dentro da f? Então estou fazendo a g funcionar como se fosse variável da f. Por quê? Porque ela vai usar a variável da f aqui dentro, eu vou substituir a variável da f que é o x. Então, eu faço a g funcionar como variável, por isso, quando eu estou fazendo a derivada da composta, na primeira derivada que é a função f, a variável é entendida como sendo toda a função g e depois eu derivo a função g normalmente. E o resultado da derivada da composta é exatamente o produto entre essas duas derivadas. Ó o detalhe! Aqui é a função g e aqui é a variável x. Como funciona para fazer uma derivada como, por exemplo, a primeira função que o professor colocou na aula dele? Que é o $sen(x^2)$. Para derivar $sen(x^2)$, eu vou ter que usar a regra da cadeia, porque essa aqui é uma função composta. Concorda? Como é que eu identifico que ela é composta só de olhar? Porque eu vou falar que eu quero $senx$, mas quando eu olho para o x, eu não tenho x, eu tenho x^2. Se eu não tenho x e tenho x^2, é como se eu tivesse o seno de uma outra função e essa outra função quem é? x^2. Primeira coisa que eu vou falar: quero calcular a derivada da função y. Qual é a função y? É seno. Beleza! Eu sei calcular a derivada de seno. Só que aqui não é $sen(x)$, aqui é seno de uma outra função. Então a maioria dos professores quando vai explicar a regra da cadeia ou aplicar a regra da cadeia a primeira vez, eles preferem fazer assim, ó: eles preferem pegar essa função que vocês perceberam aqui e chamar de um outro símbolo. Então eu estou chamando x^2 que é uma função, que eu percebi que é uma função, eu estou chamando de função u. Se eu estou chamando de função u, essa função original, ela vai ficar sendo $sen(u)$. Para aplicar a regra da cadeia, eu vou fazer o seguinte: eu vou imaginar que nem tenho regra da cadeia para usar. Por quê? Porque eu quero derivar essa função. E quando eu vou derivar essa função, eu faço: ôpa! Seno de uma variável u, olha o que eu falei: seno de uma varável u. A derivada de seno de uma variável u é cosseno da variável u. Concorda? Beleza! Só que aí, boom! Dá um estalo no coco da gente, a luz liga, e eu enxergo que esse u não é a variável original da função, porque a variável original da função é x e aqui está u, u não é a variável original da função. Isso indica o quê? Que o que eu fiz de derivada aqui, eu sou obrigado, pela regra da cadeia, a multiplicar pela derivada do u. Sempre que a variável que eu usei aqui, não for a variável original, a regra da cadeia exige que você multiplique pela derivada dessa variável. Aí você completou a regra da cadeia. Você derivou o seno em relação à variável u e multiplicou pela derivada de u. Depois vou mandar uma tabela de fórmulas para vocês, que vocês vão ver que a tabela inteira vem considerando todas as funções compostas, porque essa tabela vai usar esse u aqui. Então o que eu fiz? Quis derivar isso, derivei, só que eu percebi que u não era variável original, então pela regra da cadeia, eu vou sempre multiplicar pela derivada dessa nossa variável. Vou acabar essa daqui para vocês perceberem. Então eu usei a regra da cadeia aqui? Eu usei a regra da cadeia. Está derivada? Está derivada. Mas não está respondido. Por que não está respondido? Porque a variável original da função era x e aqui tem variável u. Mas o meu u representa x^2, então se eu voltar a substituição no final, aqui vai ficar cos (x^2), que é o u, a derivada do u, eu ainda não fiz, mas como é uma funçãozinha simples, a derivada do u vai ser $2x$ e eu coloco a derivada do u substituída por $2x$. Pronto! Agora está aplicada a regra da cadeia e a variável original da função está na resposta, está encerrada a questão. O máximo que você pode fazer aqui, para não confundir esse x^2 com esse $2x$, é colocar esse $2x$ aqui na frente para deixar o cosseno atrás, para ficar sem dúvida nenhuma de quem é o ângulo e quem não é o ângulo. O ângulo aqui é x^2, $2x$ é outra coisa. Está derivado. [00:09:20]

[00:22:33] $f(x) = \ln cos\, x$, então ó: como eu resolvo derivada de função composta para mim? Eu resolvo sempre assim: $f'(x)$ vai ser igual. Eu olho para a função e procuro identificar quem é a função interna e quem é a função externa. Quem vocês acham que é interna e quem vocês acham que é externa? Porque a regra da cadeia é sempre derivada da externa vezes a derivada da interna. Então se vocês identificarem quem é externa e quem é interna, está resolvido o problema. Como que a gente cria prática para identificar quem é interna e quem é externa? Fazendo a leitura da função e perceber onde deveria ter uma variável x sozinha e não tem. Então quando eu leio isso, eu vou ler o que? ln de alguma coisa. Concorda? Então se eu vou ler ln de alguma coisa, essa alguma coisa deveria ser a variável x, mas não é. Quem está no lugar desse x? O cosseno. Então o cosseno é a minha função interna e o ln é a minha função externa. Então a derivada pela regra da cadeia é a derivada da externa, que é o ln, vezes a derivada da interna, que é o cosseno. Só que eu vou fazer a derivada falando dessa maneira: derivada de ln de fulano, se eu quero derivar ln de fulano, qual é a formulazinha de ln de fulano? 1 sobre o fulano. Se esse fulano fosse x, seria 1 sobre x. Mas não é x, é 1 sobre fulano. E como é um fulano, eu devo multiplicar essa derivada pela derivada do fulano. Quem é a derivada do fulano, que é cosseno? Menos seno. Pronto! Então ó, derivada de ln de fulano, e eu vou falar assim naturalmente, porque na minha leitura, eu não tenho como ler a função de outra maneira, ln de alguém, ln de um fulano, para derivar ln de um fulano, pela tabelinha de fórmulas é 1 sobre o fulano. Como é fulano, eu sou obrigado a multiplicar pela derivada desse fulano. E a derivada de cosseno é menos seno. Para dar a resposta final, seno sobre cosseno é tangente, então vai ficar menos tangente de x. Pronto! [00:25:35]