

UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Campus de São José do Rio Preto

Gregório Luís Dalle Vedove Nosaki

Dinâmica das Transformações de Intercâmbio de Intervalos

São José do Rio Preto

2015

Gregório Luís Dalle Vedove Nosaki

Dinâmica das Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Dissertação apresentada para obtenção do
título de Mestre em Matemática, área de
Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de
Pós-Graduação em Ciência da
Computação, do Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",
Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia

São José do Rio Preto
2015

Gregório Luís Dalle Vedove Nosaki

Dinâmica das Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Dissertação apresentada para obtenção do
título de Mestre em Matemática, área de
Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de
Pós-Graduação em Ciência da
Computação, do Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",
Campus de São José do Rio Preto.

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha
Professor Adjunto
UFBA - Salvador

Prof. Dr. Ali Messaoudi
Professora Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

05 de março de 2015

Às minhas sete mulheres

Agradecimentos

Ao final de mais essa etapa gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos:

A minha mãe, Marcília, que sempre desejou o melhor pra mim e tornou meus caminhos mais fáceis da maneira que só uma pessoa que me ama do tamanho do mundo e muito mais poderia fazer;

A meu pai, Pedro, que me apoiou e incentivou durante toda a minha formação e me ensinou a ser sempre uma pessoa humilde;

Ao professor Márcio pela orientação durante todos esses anos;

Aos professores do IBILCE e da UNESP de Presidente Prudente que sempre foram muito solícitos a todas as minhas necessidades;

Às amigas da época do ensino médio e que continuam e vão continuar para sempre comigo;

Aos amigos da graduação que sempre estiveram comigo sob toda e qualquer circunstância;

Aos novos amigos que fiz em São José do Rio Preto e que me ajudaram muito nessa nova fase da minha vida;

A minha família que sempre depositou em mim muita confiança e sempre esteve presente em todos os momentos;

A Deus que me deu esperanças para continuar;

À Donatella minha fiel companheira;

A todos que de certa forma contribuíram para a realização desse trabalho;

À CAPES pelo auxílio financeiro;

Ao Bento.

Resumo

Neste trabalho estaremos interessados em compreender a dinâmica de transformações de intercâmbio de intervalos. Dentro desse contexto estudaremos o processo de renormalização de Rauzy-Veech e algumas consequências. Por fim analisaremos a relação entre as transformações de intercâmbio de intervalos e homeomorfismos do círculo onde provaremos a convergência do operador de renormalização para o caso de homeomorfismos do círculo suave por pedaços.

Palavras-chave: Transformações de intercâmbio de intervalo. Renormalização de Rauzy-Veech. Homeomorfismo do círculo.

Abstract

In this work we are interested in the dynamics of intervals exchange transformations. In this context we study the Rauzy- Veech renormalization process and some consequences. Finally we analyze the relationship between the intervals exchange transformations and homeomorphisms on the circle where we prove the convergence of the renormalization operator in the case of piecewise smooth homeomorphisms on the circle.

Keywords: Intervals exchange transformation. Rauzy-Veech renormalization. Homeomorphisms on the circle.

Sumário

1	Introdução	9
2	Transformações de Intercâmbio de Intervalos	11
2.1	Renormalização de Rauzy-Veech	18
2.2	Condição de Keane	25
2.3	Minimalidade	28
2.4	Dinâmica da função de renormalização	31
2.5	Classes de Rauzy	37
3	Funções $C^{2+\nu}$ e Transformações de Möbius	45
3.1	Definições	45
3.2	Não-Linearidade	47
3.3	Transformações de Möbius	53
3.4	Comparando funções $C^{2+\nu}$ e Möbius	55
4	T.i.i.g. e Homeomorfismos do Círculo	71
4.1	Outros Resultados	81
4.1.1	Cilindros e Palavras Admissíveis	81

Capítulo 1

Introdução

As transformações de intercâmbio de intervalo, apesar de sua definição simples e intuitiva, apresentam uma dinâmica unidimensional muito rica quando trabalhamos com o algoritmo de renormalização de Rauzy-Veech. Esse sistema dinâmico discreto vem sendo amplamente estudado e possui resultados muito recentes, como por exemplo o trabalho de Mota e Smania [1] publicado em 2012, onde eles provam a convergência das transformações de intercâmbio de intervalos com um número finito de ramos para um conjunto de transformações lineares fracionárias. Além de ser o principal resultado que estudamos, ele é uma generalização de um outro devido a Kanin e Vul [8] onde foi mostrado a convergência para transformações de intercâmbio de intervalos com apenas dois ramos.

Esse trabalho de dissertação está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos um estudo inicial sobre transformações de intercâmbio de intervalos. Definimos as transformações de intercâmbio de intervalos generalizadas (t.i.i.g.) e nos aprofundamos dentro de uma classe específica dessas transformações, ou seja, as transformações de intercâmbio de intervalos standard (t.i.i.s.). Nesse capítulo provamos uma condição denominada Condição de Keane, a qual é uma condição necessária e suficiente para que uma classe de transformações de intercâmbio de intervalos seja infinitamente renormalizável pelo algoritmo de Rauzy-Veech. Em cima dessa teoria que nos baseamos para iniciar nossos estudos nessa subárea dos sistemas dinâmicos discretos. Apresentamos ainda os conceitos de minimalidade e classes de Rauzy que agrupam as possíveis combinatórias para cada um dos casos das t.i.i.s. com o mesmo número de ramos.

No Capítulo 3 são apresentadas algumas definições pertinentes e um breve estudo sobre transformações de Möbius e transformações de classe $C^{2+\nu}$. Apresentamos aqui as fórmulas gerais para as transformações que estamos particularmente interessados nesse trabalho. Nesse capítulo enunciamos e provamos um resultado encontrado em [1] que

generaliza uma condição necessária para a prova do resultado principal que estudamos. Tal resultado foi fruto da generalização de um resultado de Kanin e Vul [8] e por não estar explicitado de forma mais geral foi incluído no artigo de Mota e Smania [1]. Finalmente no Capítulo 4 apresentamos a relação entre as transformações de intercâmbio de intervalos com os homeomorfismos suave por pedaços do círculo, onde enunciaremos e provaremos o principal resultado deste trabalho, o qual se encontra em [1]. Também apresentaremos outros dois resultados de [1]. Mais precisamente, um estabelece uma estimativa da não-linearidade N_α^n da transformação de Möbius para a qual cada ramo da transformação de intercâmbio de intervalos converge e outro garante que no caso em que a transformação de intercâmbio de intervalos possui não-linearidade zero cada ramo irá convergir para uma transformação afim. Um fato importante sobre esses resultados é que, apesar da dinâmica das transformações de intercâmbio de intervalos ser dentro de um espaço de dimensão infinita, as transformações de intercâmbio de intervalos infinitamente renormalizáveis convergem para uma aplicação de Möbius que vive dentro do espaço das transformações de Möbius, o qual possui dimensão finita.

Capítulo 2

Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado fechado no seu extremo esquerdo e aberto no extremo direito, ou seja, o intervalo I é da forma $I = [a, b)$. Por simplicidade tomaremos sempre $a = 0$.

Seja $\mathcal{P} = \{I_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ uma partição do intervalo I em subintervalos indexada por um conjunto de índices denotado aqui por $\mathcal{A}$ contendo $d \geq 2$ elementos.

Definição 1. Diremos que a tripla $(f, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, onde $f : I \rightarrow I$ é uma bijeção, é uma transformação de intercâmbio de intervalos generalizada com d intervalos (t.i.i.g. com d intervalos, para simplificar), se $f|_{I_\alpha}$ for um homeomorfismo preservando a orientação para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

Na maioria das vezes iremos fazer um abuso de notação e dizer que f é uma t.i.i.g. com d intervalos. A ordem dos subintervalos no domínio e na imagem constituem a combinatória de f .

Definição 2. Uma transformação de intercâmbio de intervalos standard f (ou de forma abreviada t.i.i.s.) é uma t.i.i.g. que apenas translada cada um dos subintervalos I_α .

Uma t.i.i.s. f é determinada por uma combinatória dos intervalos e um vetor com d entradas referente ao comprimento de cada subintervalo. Descrevemos esses dois elementos a seguir.

1. Uma combinatória é um par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ de bijeções $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$ com $\epsilon \in \{0, 1\}$ onde π_0 descreve a ordem dos subintervalos I_α antes da transformação ser aplicada e π_1 descreve a ordem dos subintervalos I_α depois da transformação

ser aplicada. Esse par de bijeções será representado por

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \dots & \alpha_d^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_d^1 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_j^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(j)$ para $\epsilon \in \{0, 1\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, d\}$;

2. Um vetor $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ com valores reais positivos, onde cada entrada λ_α representa o comprimento de cada um dos subintervalos I_α .

No caso das t.i.i.s. podemos representá-las apenas por sua combinatória e seu vetor λ , ou seja, para toda t.i.i.s. f existe um único par (π, λ) que a representa, portanto podemos usar ambas as notações sem distinções.

Definição 3. *Dado um par de bijeções $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ chamaremos $p = \pi_1 \circ \pi_0^{-1} : \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$ de **monodromia invariante** do par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$.*

A notação acima pode ser um pouco redundante, já que dado um par (π, λ) podemos tomar qualquer bijeção $\phi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ e definir

$$\pi'_\epsilon = \pi_\epsilon \circ \phi, \quad \epsilon \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad \lambda'_{\alpha'} = \lambda_{\phi(\alpha')}, \quad \alpha' \in \mathcal{A}'$$

e assim obter um novo par (π', λ') que possui a mesma monodromia invariante que o primeiro par (π, λ) e que define a mesma transformação de intercâmbio de intervalos. Assim podemos tomar $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ e $\pi_0 = id$ e deste modo π_1 irá coincidir com a monodromia invariante p . Quando for apropriado usaremos a notação $p = (p(1)p(2)\dots p(d))$ para a combinatória de f

Exemplo 1. *Observe a Figura 2.1 que representa uma transformação de intercâmbio de intervalos standard.*

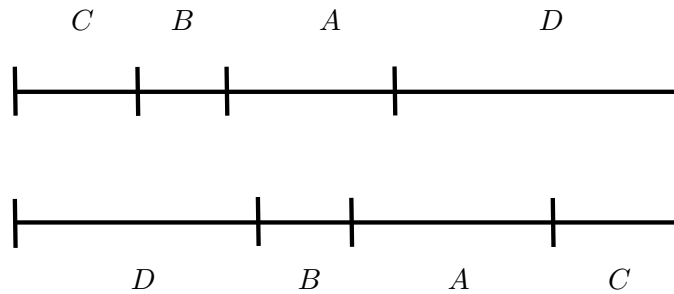


Figura 2.1:

Tal transformação corresponde ao par

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 & \alpha_4^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \alpha_4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & B & A & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix}.$$

Neste caso podemos calcular a monodromia invariante da seguinte forma

$$\begin{aligned} p(1) &= \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) = \pi_1(\pi_0^{-1}(1)) = \pi_1(C) = 4, \\ p(2) &= \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(2) = \pi_1(\pi_0^{-1}(2)) = \pi_1(B) = 2, \\ p(3) &= \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(3) = \pi_1(\pi_0^{-1}(3)) = \pi_1(A) = 3, \\ p(4) &= \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(4) = \pi_1(\pi_0^{-1}(4)) = \pi_1(D) = 1. \end{aligned}$$

Portanto a monodromia invariante deste exemplo é dada por $p = (4, 2, 3, 1)$.

Exemplo 2. Quando $d = 2$ temos apenas uma combinação possível diferente da própria identidade para π que é dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

A t.i.i.s. f associada a (π, λ) neste caso é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \lambda_B, & \text{se } x \in I_A \\ x - \lambda_A, & \text{se } x \in I_B. \end{cases}$$

A Figura 2.2 representa o gráfico da transformação f .

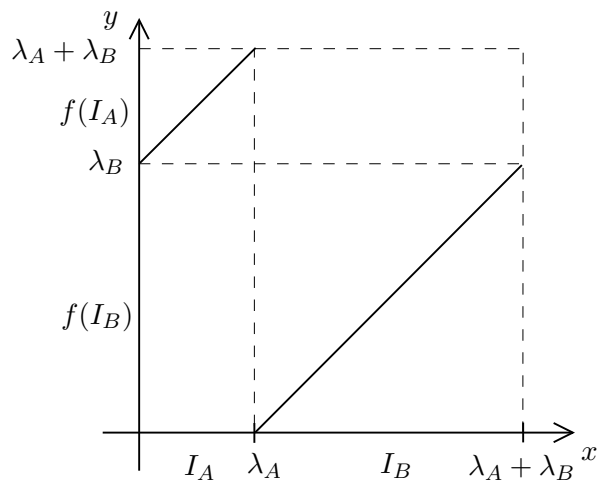


Figura 2.2:

Se identificarmos o intervalo I com o círculo $\mathbb{R}/(\lambda_A + \lambda_B)\mathbb{Z}$ teremos

$$f(x) = x + \lambda_B \pmod{(\lambda_A + \lambda_B)\mathbb{Z}}. \quad (2.1)$$

Essa transformação corresponde à rotação de um ângulo $\lambda_B/(\lambda_A + \lambda_B)$.

Exemplo 3. O par (π, λ) não é unicamente determinado pela f . Considere a seguinte permutação

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}.$$

Dado qualquer vetor $\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C)$, a transformação de intercâmbio de intervalos f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + \lambda_B + \lambda_C, & \text{se } x \in I_A \\ x - \lambda_A, & \text{se } x \in I_B \cup I_C. \end{cases}$$

Note que essa representação de f é a mesma para os seguintes casos:

- (π, λ') para todo λ' tal que $\lambda'_A = \lambda_A$ e $\lambda'_B + \lambda'_C = \lambda_B + \lambda_C$;
- $(\tilde{\pi}, \tilde{\lambda})$ onde

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} A & D \\ D & A \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\lambda}_A = \lambda_A \text{ e } \tilde{\lambda}_D = \lambda_B + \lambda_C.$$

Dada uma combinatória $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \Omega_\pi : \mathbb{R}^{\mathcal{A}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{A}}, \\ \lambda &\mapsto \Omega_\pi(\lambda) = \omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, \end{aligned}$$

onde cada componente ω_α do vetor ω é dada por

$$\Omega_\pi(\lambda) = \omega \quad \text{e} \quad \omega_\alpha = \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta. \quad (2.2)$$

Dado um vetor ω como acima podemos definir uma t.i.i.s. f associada ao par (π, λ) da seguinte maneira

$$f(x) = x + \omega_\alpha, \text{ para } x \in I_\alpha.$$

Definição 4. O vetor $\omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ com ω_α dado por (2.2) é denominado **vetor de translação** de f .

Observe que a matriz $\Omega_\pi = (\Omega_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathcal{A}}$ é dada por

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \begin{cases} +1 & \text{se } \pi_1(\alpha) > \pi_1(\beta) \text{ e } \pi_0(\alpha) < \pi_0(\beta) \\ -1 & \text{se } \pi_1(\alpha) < \pi_1(\beta) \text{ e } \pi_0(\alpha) > \pi_0(\beta) \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Exemplo 4. Considere a t.i.i.g. representada na Figura 2.3.

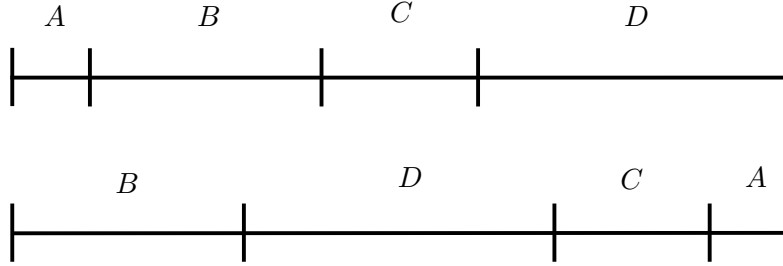


Figura 2.3:

Neste caso a combinatória $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ é dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix},$$

e o vetor λ é tal que

$$\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D) = (1, 3, 2, 4).$$

Dessa forma o vetor de translação é dado por

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D) \\ &= (\lambda_B + \lambda_D + \lambda_C, -\lambda_A, \lambda_B + \lambda_D - \lambda_A - \lambda_B, \lambda_B - \lambda_A - \lambda_B - \lambda_C) \\ &= (9, -1, 3, -3). \end{aligned}$$

Agora podemos determinar facilmente a transformação f associada ao par (π, λ) .

$$f : [0, 10) \rightarrow [0, 10)$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 9, & x \in A \\ x - 1, & x \in B \\ x + 3, & x \in C \\ x - 3, & x \in D. \end{cases}$$

Na Figura 2.4 temos o gráfico da t.i.i.s. f .

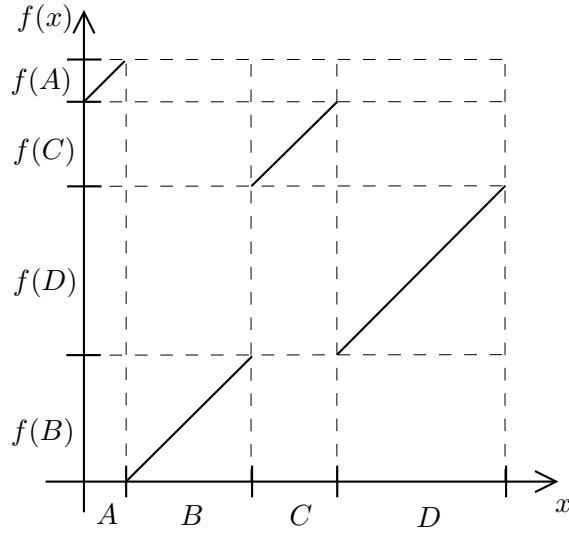


Figura 2.4:

Exemplo 5. Consideremos a t.i.i.s. dada no Exemplo 1, ou seja,

$$\pi = \begin{pmatrix} C & B & A & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix}.$$

Para essa t.i.i.s. temos

$$\omega = (\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D) = (\lambda_D - \lambda_C, \lambda_D - \lambda_C, \lambda_D + \lambda_B + \lambda_A, -\lambda_C - \lambda_B - \lambda_A).$$

A imagem de Ω_π é

$$\begin{aligned} \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}} : \omega_A = \omega_B = \omega_C + \omega_D\} &= \{(\omega_C + \omega_D, \omega_C + \omega_D, \omega_C, \omega_D) \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}\} \\ &= \{\omega_C \cdot (1, 1, 1, 0) + \omega_D \cdot (1, 1, 0, 1), \omega_C, \omega_D \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

ou seja, um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$.

Exemplo 6. Consideremos a seguinte permutação $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$.

Temos

$$\omega = (\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D) = (\lambda_D + \lambda_C + \lambda_B, \lambda_D + \lambda_C - \lambda_A, \lambda_D - \lambda_B - \lambda_A, -\lambda_C - \lambda_B - \lambda_A)$$

e assim a imagem de Ω_π é

$$\{\lambda_A \cdot (0, -1, -1, -1) + \lambda_B \cdot (1, 0, -1, -1) + \lambda_C \cdot (1, 1, 0, -1) + \lambda_D \cdot (1, 1, 1, 0)\}$$

e como os vetores $(0, -1, -1, -1)$, $(1, 0, -1, -1)$, $(1, 1, 0, -1)$ e $(1, 1, 1, 0)$ são linearmente independentes, segue que Ω_π é uma bijeção de $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ nele mesmo.

Lema 1. Dado o vetor ω definido como em (2.2) e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ temos $\lambda \cdot \omega = 0$.

Demonstração: A igualdade segue como consequência imediata do fato que Ω_π é anti-simétrica. Da definição de ω temos

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \omega &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \omega_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \left(\sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right) = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \right). \end{aligned}$$

Estamos variando $\alpha \in \mathcal{A}$ e tomando $\beta \in \mathcal{A}$ com $\beta \neq \alpha$ temos que $\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)$ ou $\pi_0(\beta) > \pi_0(\alpha)$, portanto temos que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\pi_0(\beta) > \pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta.$$

O mesmo vale quando tomamos π_1 no lugar de π_0 , pois sob as mesmas condições anteriores temos que $\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)$ ou $\pi_1(\beta) > \pi_1(\alpha)$ e portanto

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\pi_1(\beta) > \pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta.$$

Assim temos

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 0.$$

■

Obs: A **involução canônica** é o operador no espaço de (π, λ) correspondente a troca de papéis entre π_0 e π_1 mantendo λ inalterado. Obviamente, por este operador a monodromia invariante p e a transformação f são substituídos pelos seus inversos. Além disso, Ω_π é substituído por $-\Omega_\pi$ assim como o vetor translação é substituído pelo seu simétrico.

2.1 Renormalização de Rauzy-Veech

Seja $(f, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ uma t.i.i.g., onde $\mathcal{A}$ tem d elementos e $\mathcal{P}$ é uma partição do intervalo como definido na Definição 1. Para cada $\epsilon \in \{0, 1\}$ denotaremos por $\alpha(\epsilon)$ o último símbolo da expressão de π_ϵ , ou seja

$$\alpha(\epsilon) = \pi_\epsilon^{-1}(d) = \alpha_d^\epsilon.$$

Vamos assumir que os subintervalos $I_{\alpha(0)}$ e $I_{\alpha(1)}$ possuem comprimentos diferentes. Com isso em mente definimos o tipo de uma t.i.i.g..

Definição 5. Diremos que uma t.i.i.g. f tem tipo 0 se $\lambda_{\alpha(0)} > \lambda_{\alpha(1)}$ e que f tem tipo 1 se $\lambda_{\alpha(0)} < \lambda_{\alpha(1)}$. Em ambos os casos o intervalo de comprimento maior será chamado de ganhador e o outro, que possui o menor comprimento, será chamado de perdedor.

Seja $J = J_{R(f)}$ o subintervalo de I obtido pela retirada do subintervalo perdedor. Assim temos que

$$J_{R(f)} = \begin{cases} I - f(I_{\alpha(1)}) & \text{se } (\pi, \lambda) \text{ tem tipo 0} \\ I - I_{\alpha(0)} & \text{se } (\pi, \lambda) \text{ tem tipo 1.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Definição 6. A renormalização de Rauzy-Veech de f é a função de primeiro retorno de f , denotada por $\hat{R}(f)$, ao subintervalo J .

Vejamos mais precisamente como a renormalização de Rauzy-Veech funciona.

Se f tem tipo 0 tome $J_\alpha = I_\alpha$ para $\alpha \neq \alpha(0)$ e $J_{\alpha(0)} = I_{\alpha(0)} - f(I_{\alpha(1)})$. Esses intervalos formam a partição de J . Note que $f(J_\alpha) \subset J$ para todo $\alpha \neq \alpha(1)$. Isso significa que $\hat{R}(f) = f$ restrita a tais J_α . Por outro lado, $f(J_{\alpha(1)}) = f(I_{\alpha(1)}) \subset I_{\alpha(0)}$ e então $f^2(J_{\alpha(1)}) \subset f(I_{\alpha(0)}) \subset J$. Consequentemente, $\hat{R}(f) = f^2$ restrita a $J_{\alpha(1)}$. Veja a Figura 2.5.

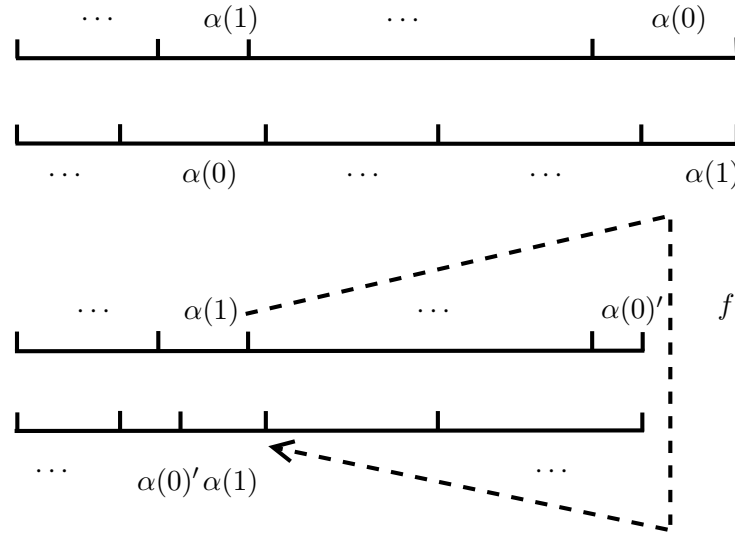


Figura 2.5:

Se f tem tipo 1, tome $J_{\alpha(0)} = f^{-1}(I_{\alpha(0)})$, $J_{\alpha(1)} = I_{\alpha(1)} - J_{\alpha(0)}$ e $J_\alpha = I_\alpha$ para todos os outros valores de α . Assim temos $f(J_\alpha) \subset J$ para todo $\alpha \neq \alpha(0)$ e então $\hat{R}(f) = f$ restrita a tais J_α . Por outro lado temos $f^2(J_{\alpha(0)}) = f(I_{\alpha(0)}) \subset J$ e portanto $\hat{R}(f) = f^2$ restrito a $J_{\alpha(0)}$. Veja a Figura 2.6.

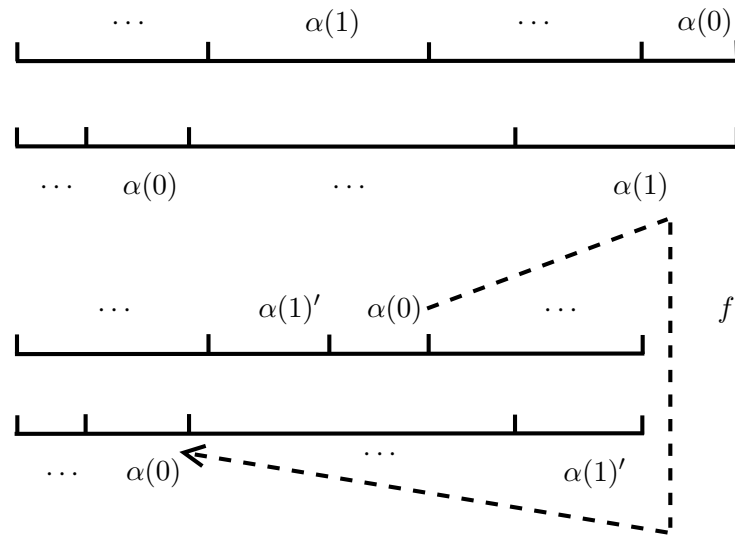


Figura 2.6:

Observe que a função de renormalização $\hat{R}(f)$ não está definida quando temos o dois últimos subintervalos do mesmo tamanho, pois se aplicarmos o processo de renormalização de Rauzy-Veech em uma t.i.i.g. f nessa condições teríamos uma redução no número de subintervalos da partição como mostra a Figura 2.7.

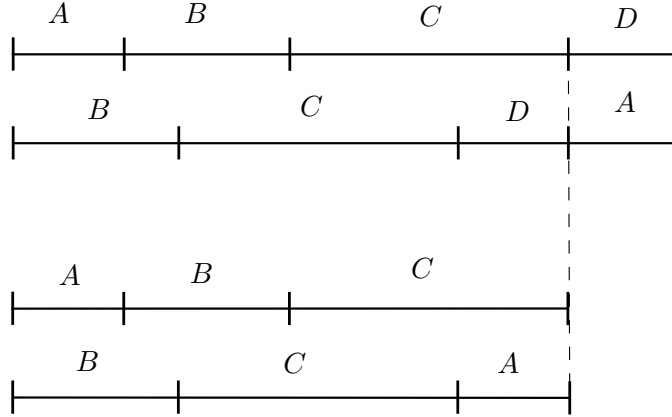


Figura 2.7:

Assim podemos observar que a própria renormalização de Rauzy-Veech $\hat{R}(f)$ é uma transformação de intercâmbio de intervalos com d intervalos. Dessa forma podemos fazer a mesma análise para $\hat{R}(f)$ e verificar se $\hat{R}(f)$ tem tipo 0 ou tipo 1 e obter a função de primeiro retorno de $\hat{R}(f)$ denotada por $\hat{R}^2(f)$, a um novo intervalo $J = J_{R^2(f)}$. Novamente obtemos $\hat{R}^2(f)$ como uma t.i.i.g. com d intervalos e podemos fazer a mesma análise e assim por diante, constituindo assim um algoritmo.

Supondo que a n -ésima iterada $\hat{R}^n(f)$ está definida para algum $n \geq 1$ e considerando I^n o seu domínio, obtemos desse algoritmo de renormalização que $\hat{R}^n(f)$ é a função de primeiro retorno de f ao intervalo I^n . Da mesma forma temos que $\hat{R}^n(f)^{-1} = \hat{R}^n(f^{-1})$ é a função de primeiro retorno de f^{-1} ao intervalo I^n . Vamos denotar por $q_\alpha^n \in \mathbb{N}$ o primeiro retorno do intervalo I_α^n para o intervalo I^n , isto é, $\hat{R}^n(f|_{I_\alpha^n}) = f^{q_\alpha^n}$ para algum $q_\alpha^n \in \mathbb{N}$.

Alguns autores tratam por renormalização de Rauzy-Veech o mesmo algoritmo acima com uma única diferença: após cada iteração há um renormalização do intervalo $J_{R(f)}$ de modo que ele retorne a ter o mesmo comprimento do intervalo inicial I onde está definida a transformação f . A dinâmica do algoritmo é a mesma nos dois casos, mas dentre desse trabalho usaremos o processo de renormalização de Rauzy-Veech sem readequar o tamanho do intervalo gerado pelas iterações.

Vamos expressar a função $f \rightarrow \hat{R}(f)$ em termos das coordenadas (π, λ) no espaço das transformações de intercâmbio de intervalos standard.

Se (π, λ) tem tipo 0 então a transformação $\hat{R}(f)$ é descrita por (π', λ') onde

- $\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{k-1}^0 & \alpha_k^0 & \alpha_{k+1}^0 & \cdots & \cdots & \alpha(0) \\ \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha(0) & \alpha(1) & \alpha_{k+1}^1 & \cdots & \alpha_{d-1}^1 \end{pmatrix}$, ou, em outra representação

$$\alpha_j^{0'} = \alpha_j^0 \text{ e } \alpha_j^{1'} = \begin{cases} \alpha_j^1 & \text{se } j \leq k \\ \alpha(1) & \text{se } j = k+1 \\ \alpha_{j-1}^1 & \text{se } j > k+1 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ está definido por $\alpha_k^1 = \alpha(0)$.

- $\lambda' = (\lambda'_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde

$$\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha \quad \text{para } \alpha \neq \alpha(0) \text{ e } \lambda'_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha_0} - \lambda_{\alpha(1)}. \quad (2.5)$$

Analogamente, se (π, λ) tem tipo 1 então $\hat{R}(f)$ é descrita por (π', λ') onde

- $\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{k-1}^0 & \alpha(1) & \alpha(0) & \alpha_{k+1}^0 & \cdots & \alpha_{d-1}^0 \\ \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha_k^1 & \alpha_{k+1}^1 & \cdots & \cdots & \alpha(1) \end{pmatrix}$, ou, em outra representação

$$\alpha_j^{0'} = \begin{cases} \alpha_j^0 & \text{se } j \leq k \\ \alpha(0) & \text{se } j = k+1 \\ \alpha_{j-1}^0 & \text{se } j > k+1 \end{cases} \text{ e } \alpha_j^{1'} = \alpha_j^1 \quad (2.6)$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ está definido por $\alpha_k^0 = \alpha(1)$.

- $\lambda' = (\lambda'_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde

$$\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha \quad \text{para } \alpha \neq \alpha(1) \text{ e } \lambda'_{\alpha(1)} = \lambda_{\alpha(1)} - \lambda_{\alpha(0)}. \quad (2.7)$$

Exemplo 7. Se $\pi = \begin{pmatrix} B & C & A & E & D \\ A & E & B & D & C \end{pmatrix}$ e $\lambda_D < \lambda_C$, ou seja, π é do tipo 1 então

$$\pi' = \begin{pmatrix} B & C & D & A & E \\ A & E & B & D & C \end{pmatrix}$$

e $\lambda' = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C - \lambda_D, \lambda_D, \lambda_E)$.

Vamos agora comparar os vetores de translação ω e ω' de f e $\hat{R}(f)$ respectivamente.

No caso em que (π, λ) é do tipo 0 temos

$$\omega'_\alpha = \omega_\alpha \text{ para } \alpha \neq \alpha(1), \text{ e } \omega'_{\alpha(1)} = \omega_{\alpha(1)} + \omega_{\alpha(0)}.$$

Analogamente, segue que, para o caso em que (π, λ) é do tipo 1 temos

$$\omega'_\alpha = \omega_\alpha \text{ para } \alpha \neq \alpha(0), \text{ e } \omega'_{\alpha(0)} = \omega_{\alpha(0)} + \omega_{\alpha(1)}.$$

Podemos então expressar essa relação por meio de um operador linear $\Theta : \mathbb{R}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ de tal modo que

$$\omega' = \Theta(\omega). \quad (2.8)$$

No caso em que (π, λ) é do tipo 0, a matriz $(\Theta_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$ é dada por

$$\Theta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 1 & \text{se } \alpha = \alpha(1) \text{ e } \beta = \alpha(0) \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Já no caso em que (π, λ) é do tipo 1, a matriz $(\Theta_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$ é dada por

$$\Theta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 1 & \text{se } \alpha = \alpha(0) \text{ e } \beta = \alpha(1) \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Vale observar que o operador Θ depende apenas de π e de λ . Observe também que em ambos os casos o operador Θ é invertível. Quando (π, λ) é do tipo 0 temos

$$\Theta_{\alpha, \beta}^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ -1 & \text{se } \alpha = \alpha(1) \text{ e } \beta = \alpha(0) \\ 0 & \text{nos outros casos;} \end{cases}$$

e quando (π, λ) tem tipo 1 temos

$$\Theta_{\alpha, \beta}^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ -1 & \text{se } \alpha = \alpha(0) \text{ e } \beta = \alpha(1) \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Assim, as relações (2.5) e (2.7) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\lambda' = \Theta^{-1*}(\lambda) \text{ ou } \lambda = \Theta^*(\lambda') \quad (2.11)$$

onde Θ^* denota o operador adjunto de Θ , ou seja, o operador cuja matriz é a transposta da matriz de Θ .

Exemplo 8. *Consideremos a t.i.i.s. do Exemplo 4. Aplicando o processo de renormalização de Rauzy-Veech nela obtemos a situação representada na Figura 2.8.*

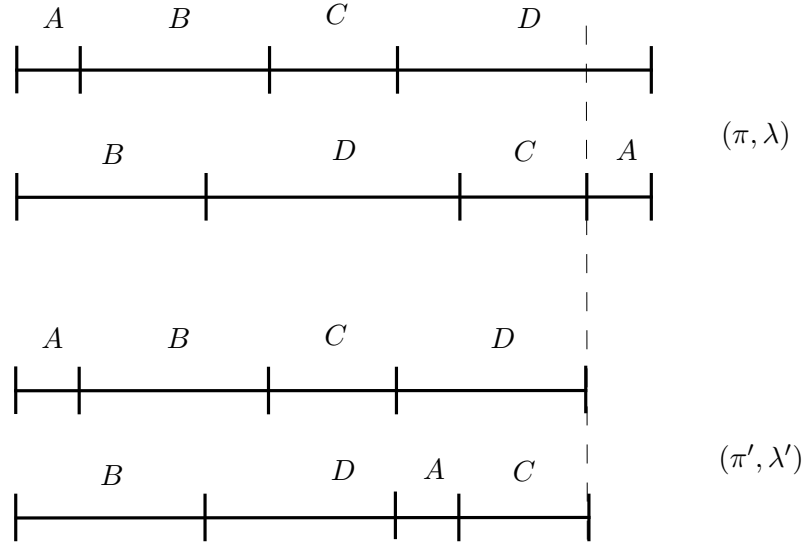


Figura 2.8:

Consideremos

$$\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D) = (1, 3, 2, 4).$$

Neste caso (π, λ) tem tipo 0 e $\alpha(0) = D$ e $\alpha(1) = A$. Podemos calcular o vetor λ' por (2.5) e assim obtemos

$$\lambda' = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D - \lambda_A) = (1, 3, 2, 3).$$

Podemos também calcular a matriz θ e θ^{-1} de (π, λ) .

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por (2.11) temos

$$\lambda' = \theta^{-1*}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e assim temos que $\lambda' = (1, 3, 2, 3)$ como esperado.

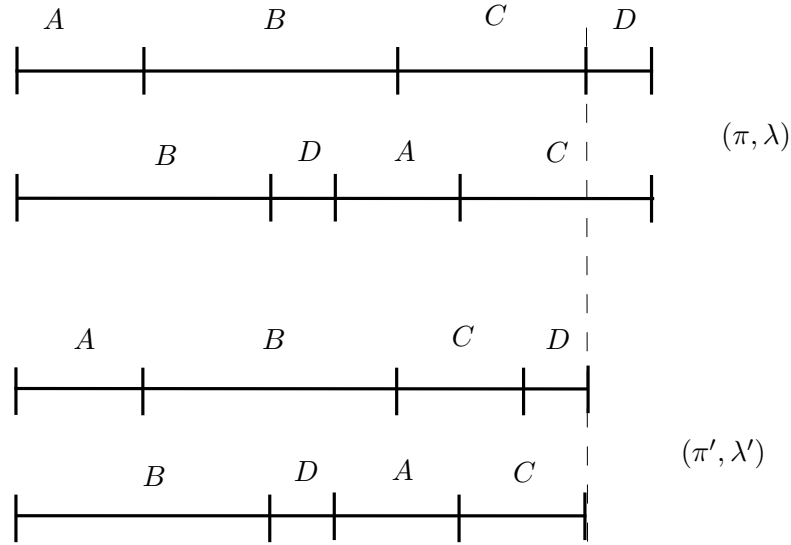


Figura 2.9:

Exemplo 9. Consideremos a t.i.i.s. representada na Figura 2.9 onde já está aplicado o processo de renormalização de Rauzy-Veech.

Consideremos

$$\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D) = (2, 4, 3, 1).$$

Neste caso (π, λ) tem tipo 1 e $\alpha(0) = D$ e $\alpha(1) = C$. Podemos calcular o vetor λ' por (2.7) e obtemos

$$\lambda' = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C - \lambda_D, \lambda_D) = (2, 4, 2, 1).$$

Podemos também calcular a matriz θ e θ^{-1} de (π, λ) .

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por (2.11) temos

$$\lambda' = \theta^{-1*}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e assim temos que $\lambda' = (2, 4, 2, 1)$ como esperado.

2.2 Condição de Keane

Como vimos anteriormente, a renormalização de Rauzy-Veech pode ser expressa pela transformação $\hat{R}$ dada por

$$\hat{R}(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda')$$

onde π' é dado por (2.4) e (2.6), e λ' é dado por (2.5) e (2.7). A transformação $\hat{R}$ não está definida quando os dois últimos subintervalos à direita têm o mesmo comprimento, ou seja, $\lambda_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(1)}$. Precisaremos considerar $\hat{R}$ como um sistema dinâmico no espaço das transformações de intercâmbio de intervalo, mas para que isso aconteça precisamos considerar o subconjunto de (π, λ) tais que $\hat{R}^n(\pi, \lambda)$ esteja definido para todo $n \geq 1$. Vamos começar a restrição dessas transformações de intercâmbio de intervalos com a definição de um par redutível.

Definição 7. Dizemos que um par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ é um **par redutível** se existe $k \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ tal que

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, 2, \dots, k\}) = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Desta forma, sendo $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ um par redutível, temos que para qualquer escolha de λ o subintervalo

$$J = \bigcup_{\pi_0(\alpha) \leq k} I_\alpha = \bigcup_{\pi_1(\alpha) \leq k} I_\alpha$$

é invariante pela transformação f correspondente ao par (π, λ) , bem como o seu complementar. Isso significa que a transformação f se divide em duas transformações de intercâmbio de intervalos, com uma combinatória mais simples. Neste caso diremos que a t.i.i.g. f (ou (π, λ)) é redutível. Assim a transformação $(\pi', \lambda') = \hat{R}(\pi, \lambda)$ também é redutível com os mesmos subintervalos invariantes.

Definição 8. Diremos que um par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ é **irredutível** quando não for redutível. O mesmo vale para uma t.i.i.g. f , ou seja, a transformação f é irredutível quando não for redutível.

De agora em diante nos restringiremos aos casos irredutíveis.

Uma possibilidade natural para a restrição do nosso algoritmo seria considerar o subconjunto dos vetores *racionalmente independentes* $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$.

Definição 9. Um vetor $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ é **racionalmente independente** se $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} n_\alpha \lambda_\alpha \neq 0$ para todo vetor com entradas inteiras não todas nulas $(n_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$.

Fica claro que a condição dada pela Definição 9 é invariante pela renormalização de Rauzy-Veech, ou seja, se $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ é racionalmente independente, então, por (2.5) e (2.7) segue que λ' também é racionalmente independente, o que implica que todas as iteradas de $\hat{R}^n(\pi, \lambda)$ estão definidas.

Vamos considerar ∂I_γ o extremo esquerdo do subintervalo I_γ , consideraremos a origem como o extremo esquerdo do intervalo I . Assim

$$\partial I_\gamma = \sum_{\pi_0(\eta) < \pi_0(\gamma)} \lambda_\eta$$

para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Definição 10. Diremos que uma t.i.i.g. f satisfaz a **condição de Keane**, ou que não possui conexões, se a órbita dos extremos esquerdos de cada subintervalo são disjuntas, ou seja

$$f^m(\partial I_\alpha) \neq \partial I_\beta, \forall m \geq 1 \text{ e } \alpha, \beta \in \mathcal{A} \text{ com } \pi_0(\beta) \neq 1. \quad (2.12)$$

Assim, se uma t.i.i.g. f satisfaz a condição de Keane segue que π é irredutível e $(\pi', \lambda') = \hat{R}(\pi, \lambda)$ está bem definida. Além disso, a propriedade (2.12) é invariante pelas iterações de $\hat{R}$, porque as órbitas de $\hat{R}(f)$ estão contidas nas órbitas de f . Então a condição de Keane é suficiente para que todas as iteradas $(\pi^n, \lambda^n) = \hat{R}^n(\pi, \lambda)$, $n \geq 0$, estejam bem definidas.

A condição dada em (2.12) não muda caso estejamos restritos a $\pi_1(\alpha) > 1$. De fato, suponha que $f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta > 0$ com $\pi_1(\alpha) = 1$ e $m > 1$. Então $f(\partial I_\alpha) = 0 = \partial I_\gamma$ para algum $\gamma \in \mathcal{A}$. Logo, $f^{m-1}(\partial I_\gamma) = \partial I_\beta$. Além disso, $\pi_1(\gamma) > 1$ pois π é irredutível e $\pi_0(\gamma) = 1$.

O resultado a seguir fornece uma condição suficiente para que uma t.i.i.s. (π, λ) satisfaça a condição de Keane.

Proposição 1. Se λ é racionalmente independente e π é irredutível então (π, λ) satisfaz a condição de Keane.

Demonstração: Vamos supor por contradição que (π, λ) não satisfaz a condição de Keane, ou seja, vamos supor que existam $m \geq 1$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ tais que $f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta$ e $\pi_0(\beta) > 1$. Defina β_j , $0 \leq j \leq m$ por

$$f^j(\partial I_\alpha) \in I_{\beta_j}.$$

Note que $\beta_0 = \alpha$ e $\beta_m = \beta$. Assim

$$\partial I_\beta - \partial I_\alpha = \sum_{0 \leq j < m} \omega_{\beta_j}$$

onde $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{A}}$ é o vetor translação definido em (2.2). De maneira equivalente temos

$$\sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_m)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma = \sum_{0 \leq j < m} \left(\sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma \right).$$

Podemos ainda reescrever essa igualdade como sendo

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A}} n_\gamma \lambda_\gamma = 0, \quad (2.13)$$

onde

$$n_\gamma = \#\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} - \#\{0 \leq j < m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\}.$$

Sendo λ racionalmente independente obtemos de (2.13) que $n_\gamma = 0$ para todo $\gamma \in \mathcal{A}$.

Seja $D = \max\{\pi_0(\beta_j), \pi_1(\beta_i); 0 < j \leq m, 0 \leq i < m\}$. Observe que $D \geq \pi_0(\beta) > 1$.

Assim, como assumimos a irredutibilidade de π , existe $\gamma \in \mathcal{A}$ tal que

$\pi_0(\gamma) < D \leq \pi_1(\gamma)$. A última desigualdade implica que $\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma)$ para todo $0 \leq j < m$. Como temos $n_\gamma = 0$, isso implica que $\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma) < D$ para todo $0 < j \leq m$. Analogamente chegamos que $\pi_1(\beta_j) < D$ para $0 \leq j < m$. Isso contradiz a definição de D e portanto temos que (π, λ) satisfaz a condição de Keane como queríamos.

■

Exemplo 10. Suponha $d = 2$. Por 2.1 a transformação de intercâmbio de intervalos é dada por $f(x) = x + \lambda_B \bmod(\lambda_A + \lambda_B)\mathbb{Z}$. Então a condição de Keane significa que dado qualquer $m \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$

$$m\lambda_B \neq \lambda_A + n(\lambda_A + \lambda_B) \text{ e } \lambda_A + m\lambda_B \neq \lambda_A + n(\lambda_A + \lambda_B).$$

Está claro que isso vale se e somente se (λ_A, λ_B) é racionalmente independente.

Exemplo 11. A partir de $d = 3$ a condição de Keane pode ser estritamente mais fraca que a condição de ser racionalmente independente. Considere, por exemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}.$$

Neste caso $f(x) = x + \lambda_C \bmod(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)\mathbb{Z}$ e a condição de Keane significa que

$$m\lambda_C, \lambda_A + m\lambda_C \text{ e } \lambda_A + \lambda_B + m\lambda_C$$

são diferentes de

$$\lambda_A + n(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C) \text{ e } \lambda_A + \lambda_B + n(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C)$$

para todo $m \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$.

2.3 Minimalidade

Definição 11. Uma transformação é denominada **minimal** se para toda órbita é densa em todo seu domínio de definição.

De maneira equivalente podemos dizer que uma transformação é minimal se o domínio é o único conjunto invariante fechado e não vazio.

Proposição 2. Se a t.i.i.s. f associada ao par (π, λ) satisfaz a condição de Keane então f é minimal.

Para provar essa proposição vamos inicialmente observar que a função de primeiro retorno da transformação f a um intervalo $J \subset I_\alpha$ é também uma função de intercâmbio de intervalos.

Lema 2. Dado qualquer subintervalo $J = [a, b)$ de algum I_α , existe uma partição $\{J_j : 1 \leq j \leq k\}$ de J e inteiros $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1$ com $k \leq d + 2$ tais que

1. $f^i(J_j) \cap J = \emptyset$ para todo $0 < i < n_j$ e $1 \leq j \leq k$;
2. cada $f^{n_j}|_{J_j}$ é uma translação de J_j para algum subintervalo de J ;
3. os subintervalos $f^{n_j}(J_j)$, $1 \leq j \leq k$ são dois a dois disjuntos.

Demonstração: Seja A a união das fronteiras $\{a, b\}$ de J com o conjunto dos extremos de todos os intervalos I_γ , $\gamma \in \mathcal{A}$, excluindo os extremos de I . Note que $\sharp A \leq d + 1$. Seja $B \subset J$ o conjunto dos pontos $z \in J$ para os quais exista algum $m \geq 1$ de tal forma que $f^i(z) \notin J$ para todo $0 < i < m$ e $f^m(z) \in A$. A aplicação $B \ni z \mapsto f^m(z) \in A$ é injetiva, pois f é injetiva e não há iteradas em J antes da iterada m . Consequentemente temos que $\sharp B \leq \sharp A$. Considere agora a partição de J dada pelos pontos do conjunto B . Essa partição tem no máximo $d + 2$ elementos. Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, para cada elemento $J_j = [a_j, b_j)$ dessa partição, existe $n_j \geq 1$ tal que $f^{n_j}(J_j)$ intersecta J . Tomamos n_j o menor inteiro que satisfaz essa condição. Pela definição de B segue que a restrição $f^{n_j}|_{J_j}$ é uma translação e a imagem está contida em J . Finalmente, $f^{n_j}(J_j)$, $1 \leq j \leq k$ são dois a dois disjuntas pois f é injetiva e n_j é a iterada de primeiro retorno a J como definimos anteriormente. ■

Na verdade, a afirmação do Lema acima é verdadeira para qualquer intervalo $J \subset I$ como demonstrado em [17].

Corolário 1. Assumindo as condições do Lema 2, temos que a união $\hat{J}$ de todas as iteradas futuras de J é uma união finita de intervalos e é também um conjunto invariante pela f , ou seja, $f(\hat{J}) = \hat{J}$.

Demonstração: O primeiro resultado segue diretamente da primeira parte do Lema 2

$$\hat{J} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(J) = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=0}^{n_j-1} f^i(J_j).$$

Além disso, a segunda e terceira parte do Lema 2 juntas com a condição a seguir

$$\sum_{j=1}^k |f^{n_j}(J_j)| = \sum_{j=1}^k |J_j| = |J|,$$

onde $|\cdot|$ representa o comprimento do subintervalo, nos leva a concluir que J coincide com $\bigcup_{j=1}^k f^{n_j}(J_j)$. Isso implica que $\hat{J}$ é invariante. ■

Lema 3. *Se a t.i.i.s. f associada ao par (π, λ) satisfaz a condição de Keane então f não possui pontos periódicos.*

Demonstração: Suponha que existam $m \geq 1$ e $x \in I$ de tal forma que $f^m(x) = x$. Defina β_j , $0 \leq j \leq m$ pela condição de que $f^j(x) \in \beta_j$. Seja J o conjunto de todos os pontos y tais que $f^j(y) \in \beta_j$ para todo $0 \leq j < m$. Assim J é um intervalo e f^m restrita a ele é uma translação. Como $f^m(x) = x$, temos que $f^m|_J = id$. Em particular, $f^m(\partial J) = \partial J$. Pela definição de J segue que existem $1 \leq k \leq m$ e $\beta \in \mathcal{A}$ tais que $f^k(\partial J) = \partial I_\beta$. Então $f^m(\partial I_\beta) = \partial I_\beta$. Se $\pi_0(\beta) > 1$, isso contradiz a condição de Keane. Se $\pi_0(\beta) = 1$ então existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $f(\partial I_\alpha) = 0 = \partial I_\beta$. Note que $\alpha \neq \beta$ e portanto $\partial I_\alpha \neq 0$, pois π é irredutível. Assim, $f^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\alpha$ contradizendo a condição de Keane. Essas duas contradições provam que não pode existir tal ponto periódico x suposto no início da demonstração. ■

Demonstração da Proposição 2: Suponha que existe $x \in I$ tal que $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ não é denso em I . Dessa forma podemos escolher um subintervalo $J = [a, b)$ de algum I_α de tal forma que o fecho da órbita de x não intersekte J . Seja $\hat{J}$ a união de todas as iteradas de J . Pelo Corolário 1, $\hat{J}$ é uma união finita de intervalos que é invariante por f .

Afirmção: O conjunto $\hat{J}$ não pode ser da forma $[0, \hat{b})$.

Provaremos essa afirmação por contradição. Seja $\mathcal{B}$ o subconjunto de $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que I_α está contido em $\hat{J}$. Assim $\pi_0(\mathcal{B}) = \{1, 2, \dots, k\}$ para algum valor de k . Como $\hat{J}$ é invariante por f temos que $\pi_1(\mathcal{B}) = \{1, 2, \dots, k\}$ e portanto

$$\pi_0^{-1}(\{1, 2, \dots, k\}) = \mathcal{B} = \pi_1^{-1}(\{1, 2, \dots, k\}). \quad (2.14)$$

É claro que $k < d$, pois $\hat{J}$ evita o fecho da órbita de x , e portanto $\hat{J}$ não pode ser o intervalo I inteiro. Se $k = 0$ então $\hat{J}$ está contido em algum I_α , onde $\pi_0(I_\alpha) = 1$; pela invariância do conjunto $\hat{J}$ temos que $\hat{J} \subset f(I_\alpha)$ e portanto $\pi_1(I_\alpha) = 1$ o que contradiz a irredutibilidade que é uma consequência da condição de Keane. Assim k deve ser positivo. Por (2.14) temos uma contradição na irredutibilidade, e portanto provamos a afirmação.

Como consequência, chegamos a conclusão que existe uma componente conexa $[\hat{a}, \hat{b})$ de $\hat{J}$ com $\hat{a} > 0$. Se $f^n(\hat{a}) \neq \partial I_\beta$ para todo $n \geq 0$ e $\beta \in \mathcal{A}$, então pela continuidade da f e pela invariância de $\hat{J}$ todo ponto $f^n(\hat{a})$, $n \geq 0$, será parte da fronteira de uma componente conexa de $\hat{J}$. Como existe finitas componentes conexas, f terá em determinado momento um ponto periódico, que já vimos que não é possível pelo Lema 3. De maneira análoga, se $f^n(\hat{a}) \neq f(\partial I_\alpha)$ para todo $n \geq 0$ e $\alpha \in \mathcal{A}$, então todo ponto $f^n(\hat{a})$, com $n \leq 0$ estaria na fronteira de alguma componente conexa de $\hat{J}$. Assim como no caso anterior isso implicaria na existência de um ponto periódico, que não é possível como vimos. Devem existir $n_1 \leq 0 \leq n_2$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ tais que

$$f^{n_1}(\hat{a}) = f(\partial I_\alpha) \text{ e } f^{n_2}(\hat{a}) = \partial I_\beta. \quad (2.15)$$

Se $\partial I_\beta > 0$, isso contradiz a condição de Keane, basta tomar $m = n_2 - n_1 + 1$. Se $\partial I_\beta = 0$ então $n_2 > 0$, pois tomamos $\hat{a} > 0$. Entretanto, $\partial I_\beta = f(\partial I_\gamma)$, onde $\pi_1(\gamma) = 1$. Isso significa que (2.15) continua válida se substituirmos β por γ e n_2 por $n_2 - 1$. Como $\gamma \neq \beta$, pela irredutibilidade temos que $I_\gamma > 0$ o que nos leva a contradição do caso anterior.

■

Obs: A condição de Keane não é necessária para a minimalidade. Considere a transformação de intercâmbio de intervalos ilustrada na Figura 2.10 onde $\lambda_A = \lambda_C$, $\lambda_B = \lambda_D$ e $\lambda_A/\lambda_B = \lambda_C/\lambda_D$ é irracional. Assim, f não satisfaz a condição de Keane, mas ainda assim é minimal.

Definição 12. *Uma transformação é chamada de unicamente ergódica se admite exatamente uma probabilidade invariante (que é necessariamente ergódica).*

Assim, temos que a transformação é minimal restrita ao suporte desta probabilidade. Note que as transformações de intercâmbio de intervalos sempre preservam a medida de Lebesgue. Portanto, nesse contexto, a unicidade ergódica significa que toda medida invariante é um múltiplo da medida de Lebesgue. Para mais detalhes sobre ergodicidade ver [7].

Em [3] Keane conjecturou que toda transformação de intercâmbio de intervalos minimal é unicamente ergódica e verifica a validade desse argumento para $d = 2, 3$. Entretanto,

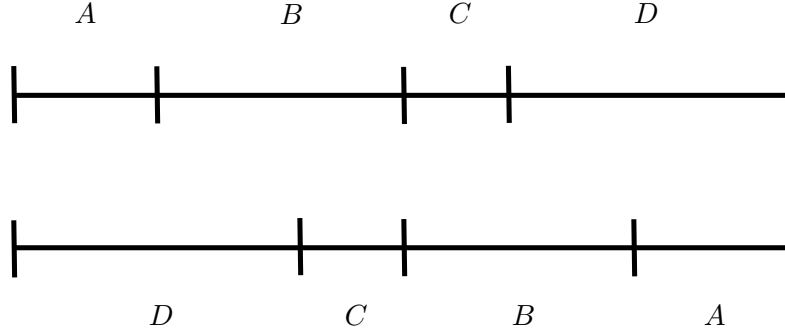


Figura 2.10:

em [5] encontramos um exemplo com $d = 5$ onde existem duas probabilidades invariantes ergódicas. Em contrapartida eles conjecturam que a independência racional deve ser suficiente para a unicidade ergódica. Novamente um contraexemplo é dado em [4] por Keane com $d = 4$ e duas probabilidades invariantes ergódicas. Assim surge uma nova conjectura.

Conjectura: Quase toda transformação de intercâmbio de intervalos é unicamente ergódica.

Essa afirmação foi provada por em [10] e [18], por volta da década de 80.

2.4 Dinâmica da função de renormalização

Vamos considerar uma t.i.i.g. f de tal forma que as iteradas $f_n = \hat{R}^n(f)$ estejam definidas para todo $n \geq 0$. Vamos considerar aqui que f satisfaz a condição de Keane. Para cada $n \geq 0$, seja $\epsilon^n \in \{0, 1\}$ o tipo e $\alpha^n, \beta^n \in \mathcal{A}$ o subintervalo que ganha e o que perde de f_n respectivamente. Deste modo, temos que α^n e β^n são os dois subintervalos do extremo direito das duas linhas de π^n , com $\lambda_{\alpha^n} > \lambda_{\beta^n}$, ou então, $\pi_{\epsilon^n}(\alpha^n) = d = \pi_{1-\epsilon^n}(\beta^n)$.

A sequência $(\epsilon^n)_n$ possui infinitos valores 0 e 1, pois supondo que isso não aconteça e portanto a partir de um determinado ponto a sequência se torna constante teríamos que α^n seria também constante assim como λ_{α^n} para todo $\alpha \neq \alpha^n$. Deste modo

$$\lambda_{\alpha^{n+1}}^{n+1} = \lambda_{\alpha^n}^{n+1} = \lambda_{\alpha^n}^n - \lambda_{\beta^n}^n$$

para todo n suficientemente grande. Como temos $\lambda_{\beta^n}^n$ sempre positivo, eventualmente teremos $\lambda_{\alpha^n}^n$ negativo, o que é uma contradição.

Proposição 3. *As sequências $(\alpha^n)_n$ e $(\beta^n)_n$ assume todos os valores de $\alpha \in \mathcal{A}$ infinitas vezes.*

Demonstração: Tomando $\alpha \in \mathcal{A}$ qualquer. Considere o intervalo de tempo maximal $[p, q)$ tal que $\alpha^n = \alpha$ para todo $n \in [p, q)$. Ao final deste intervalo o tipo da transformação deve mudar

$$\epsilon^q = 1 - \epsilon^{q-1} \text{ e } \pi_{1-\epsilon^q}^q(\alpha) = d.$$

Em outras palavras, $\alpha = \beta^q$. Assim cabe apenas provar que a afirmação vale para a sequência $(\alpha^n)_n$ que obtemos o resultado para ambas as sequências.

Seja $\mathcal{B}$ o subconjunto de símbolos $\beta \in \mathcal{A}$ tais que eles ocorrem finitas vezes na sequência $(\alpha^n)_n$. Tomando uma determinada iterada conveniente de (π, λ) podemos supor que tais símbolos não aparecem na sequência $(\alpha^n)_n$. Desta forma temos $\lambda_\beta^n = \lambda_\beta$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$ e $n \geq 0$. Como

$$\lambda_{\alpha^{n+1}}^{n+1} = \lambda_{\alpha^n}^n - \lambda_{\beta^n}^n,$$

isso implica que todos os símbolos $\beta \in \mathcal{B}$ também aparecem finitas vezes na sequência $(\beta^n)_n$. Novamente passamos a uma iterada de (π, λ) de forma que nenhum símbolo de $\mathcal{B}$ ocorra na sequência $(\beta^n)_n$. Assim, para todo $\beta \in \mathcal{B}$ as sequências

$$\pi_0^n(\beta) \text{ e } \pi_1^n(\beta), n \geq 0,$$

são não decrescentes. Mais uma vez passamos a uma iterada de (π, λ) de forma que as sequências descritas acima sejam constantes. Afirmamos que

$$\pi_\epsilon(\beta) < \pi_\epsilon(\alpha) \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}/\mathcal{B}, \beta \in \mathcal{B}, \text{ e } \epsilon \in \{0, 1\}. \quad (2.16)$$

De fato, suponha que exista α, β e ϵ de tal forma que $\pi_\epsilon(\alpha) < \pi_\epsilon(\beta)$. Como a sequência $\pi_\epsilon^n(\beta)$ é não decrescente segue que a sequência $\pi_\epsilon^n(\alpha)$ também é não decrescente. Em particular $\pi_\epsilon(\alpha) < d$ para todo $n \geq 0$. Se $\alpha \notin \mathcal{B}$, isso implica que $\pi_{1-\epsilon}^n(\alpha) = d$ e $\epsilon^n = 1 - \epsilon$ para algum valor de n . Assim

$$\begin{pmatrix} \cdots & \alpha & \cdots & \beta & \cdots & \gamma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdots & \alpha & \gamma & \cdots & \beta & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Então $\pi_\epsilon^{n+1}(\beta) = \pi_\epsilon^n(\beta) + 1$ contradizendo o fato de que $\pi_\epsilon^n(\beta)$ é constante. Essa contradição prova a afirmação.

Finalmente por (2.16) temos

$$\pi_0(\mathcal{B}) = \{1, \dots, k\} = \pi_1(\mathcal{B})$$

para algum valor de $k < d$. Como π é irredutível devemos ter $k = 0$ fazendo com que o conjunto $\mathcal{B}$ seja vazio. Isso completa a prova da afirmação para a sequência $(\alpha^n)_n$ e, portanto, a conclusão do resultado.

■

Corolário 2. *O comprimento do domínio I^n da transformação $\hat{R}^n(f)$ tende a zero quando n tende a infinito.*

Demonstração: Como as sequências λ_α^n são não crescentes para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ basta provarmos que elas convergem para zero. Suponha que existam $\beta \in \mathcal{A}$ e $c > 0$ tal que $\lambda_\beta^n \geq c$ para todo $n \geq 0$. Para qualquer valor de n tal que $\beta^n = \beta$ temos

$$\lambda_{\alpha^n}^{n+1} = \lambda_{\alpha^n}^n - \lambda_{\beta^n}^n \leq \lambda_{\alpha^n}^n - c.$$

Pela Proposição 3 isso ocorre infinitas vezes. Como $\mathcal{A}$ é um conjunto finito de símbolos, segue que existe algum $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que

$$\lambda_\alpha^{n+1} \leq \lambda_\alpha^n - c.$$

para infinitos valores de n . Isso contradiz o fato de que $\lambda_\alpha^n > 0$.

■

Corolário 3. *Seja f uma t.i.i.s., então para cada $m \geq 0$ existe $n \geq 1$ de tal forma que*

$$\Theta_{\pi^m, \lambda^m}^{*n} > 0,$$

ou seja, todas as entradas da matriz são positivas.

Demonstração: Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $m \geq 0$, $n \geq 1$ representaremos por $\Theta^*(\alpha, \beta, m, n)$ a entrada da linha α e coluna β da matriz $\Theta_{\pi^m, \lambda^m}^{*n}$. Pelas definições (2.9) e (2.10) temos

$$\Theta^*(\alpha, \beta, m, 1) = 1 \text{ se } \alpha = \beta \text{ ou } (\alpha, \beta) = (\alpha^m, \beta^m), \quad (2.17)$$

e $\Theta^*(\alpha, \beta, m, 1) = 0$ nos outros casos. Note que todo $\Theta^*(\alpha, \beta, m, n)$ é não decrescente em n pois

$$\begin{aligned} \Theta^*(\alpha, \beta, m, n+1) &= \sum_{\gamma} \Theta^*(\alpha, \gamma, m, n) \Theta^*(\gamma, \beta, m+n, 1) \\ &\geq \Theta^*(\alpha, \beta, m, n) \Theta^*(\beta, \beta, m+n, 1) \\ &\geq \Theta^*(\alpha, \beta, m, n). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Seja α fixo. Vamos construir uma enumeração $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d \in \mathcal{A}$ e obter inteiros $n_1, n_2, \dots, n_d$ tais que

$$\Theta^*(\alpha, \gamma_i, m, n) > 0 \text{ para todo } n > n_i, \text{ e } i = 1, 2, \dots, d. \quad (2.19)$$

Provando isso estaremos provando o corolário com β igual a um desses γ_i .

Para $i = 1$ basta tomar $\gamma_1 = \alpha$ e $n_1 = 0$. As relações dadas em (2.17) e (2.18) implicam diretamente na relação expressa em (2.19). Usando a Proposição 3 encontramos um valor $m_2 > m$ tal que o ganhador α^{m_2} coincida com γ_1 . Seja $\gamma_2 = \beta^{m_2}$ o perdedor. Note que $\gamma_2 \neq \gamma_1$ pela irredutibilidade. Entretanto, (2.17) nos dá que $\Theta^*(\gamma_1, \gamma_2, m_2, 1) = 1$, e isso implica que $\Theta^*(\gamma_1, \gamma_2, m, n) > 0$ para todo $n > m_2 - m$. Isso implica em (2.19) para $i = 2$ tomando $n_2 = m_2 - m$. Se $d = 2$ então não há mais nada a ser provado, e então assumimos que $d > 2$. Usando a Proposição 3 duas vezes, obtemos primeiramente $p_2 > m_2$ tal que o ganhador α^{p_2} não é γ_1 nem γ_2 , e também podemos obter $m_3 > p_2$ tal que o ganhador $\alpha^{m_3} = \gamma_j$ para $j = 1$ ou $j = 2$. Considere o menor m_3 , e seja $\gamma_3 = \beta^{m_3}$ o perdedor. Note que $\gamma_3 = \alpha^{m_3-1}$ e portanto não é igual a γ_1 nem a γ_2 . Entretanto, a expressão (2.17) nos dá que $\Theta^*(\gamma_j, \gamma_3, m_3, 1) = 1$ e isso implica que

$$\Theta^*(\gamma_1, \gamma_3, m, n) \geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_3 - m) \Theta^*(\gamma_j, \gamma_3, m_3, n - m_3 + m) > 0$$

para $n > m_3 - m$. Note que $m_3 - m > m_2 - m = n_2$. Isso completa a prova para $i = 3$ tomando $n_3 = m_3 - m$.

O caso geral dessa enumeração é análogo. Suponha que construímos $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{A}$, todos distintos, e inteiros $n_1, \dots, n_k$ tais que (2.19) esteja satisfeita para $0 \leq 1 \leq k$.

Assumindo $k < d$ podemos usar a Proposição 3 duas vezes afim de encontrarmos $p_k > m_k$ de forma que o ganhador α^{p_k} não seja um elemento de $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ e $m_{k+1} > p_k$ de modo que o ganhador $\alpha^{m_{k+1}} = \gamma_j$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Tomamos o menor m_{k+1} e consideremos $\gamma_{k+1} = \beta^{m_{k+1}}$ o perdedor. Assim $\gamma_{k+1} = \alpha^{m_{k+1}-1}$ e portanto não é um elemento de $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$. A expressão dada em (2.17) nos dá $\Theta^*(\gamma_j, \gamma_{k+1}, m_{k+1}, 1) = 1$ e portanto

$$\Theta^*(\gamma_1, \gamma_{k+1}, m, n) \geq \Theta^*(\gamma_1, \gamma_j, m, m_k + 1 - m) \Theta^*(\gamma_j, \gamma_{k+1}, m_{k+1}, n - m_{k+1} + m)$$

é estritamente positivo para todo $n > n_{k+1} = m_{k+1} - m$. Isso completa a construção da recorrência e, consequentemente, o resultado do corolário. ■

Agora podemos provar que (π, λ) pode ser iterada indefinidamente se, e somente se, satisfaz a condição de Keane. Já provamos que satisfazer a condição de Keane é necessário para podermos iterar (π, λ) indefinidamente, então agora só nos resta provar que essa condição também é suficiente.

Corolário 4. *Se $(\pi^n, \lambda^n) = \hat{R}^n(\pi, \lambda)$ está definida para todo $n \geq 0$ então (π, λ) satisfaz a condição de Keane.*

Demonstração: Suponha que, para algum $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e $m \geq 1$,

$$f^{m-1}(\partial f(I_\alpha)) = \partial I_\beta. \quad (2.20)$$

Escolha o menor inteiro $m \geq 1$ que satisfaça essa igualdade. Em particular temos que $\partial f(I_\alpha) > 0$. Pela definição de $f_n = \hat{R}^n(f)$ temos

$$\partial f(I_\alpha) = \partial f_n(I_\alpha^n), \text{ e } \partial I_\beta = \partial I_\beta^n$$

para todo n tal que $\partial f(I_\alpha)$ e ∂I_β estejam no domínio I_n de f^n . Tome n o máximo tal que ambos os pontos estejam no domínio I^n . Como f_n é a função de primeiro retorno de f a I^n a nossa hipótese (2.20) implica que

$$f_n^k(\partial f(I_\alpha)) = \partial I_\beta, \text{ para algum } 0 \leq k \leq m-1. \quad (2.21)$$

Entretanto, I_β ou $f_n(I_\alpha^n)$ ou os dois estão no extremo direito da partição para f_n . Se $\partial f(I_\alpha) = \partial I_\beta$ então $f_n(I_\alpha^n) = \partial I_\beta^n$, ou seja, os dois intervalos do extremo direito de f_n têm o mesmo comprimento. Veja na Figura 2.11.

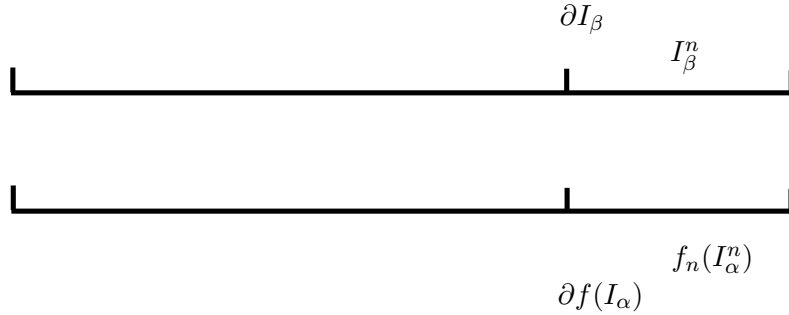


Figura 2.11:

Dessa forma, $f_{n+1} = \hat{R}^{n+1}(f)$ não está definida, o que contradiz a hipótese. Temos provado a afirmação para este caso.

Vamos supor agora que f_n tem tipo 0, ou seja, $\partial I_\beta < \partial f(I_\alpha)$. Pela definição

$$f_{n+1}(\partial I_\alpha^{n+1}) = f_n^2(\partial I_\alpha^n) = f_n(\partial f(I_\alpha)) \text{ e } \partial I_\beta^{n+1} = \partial I_\beta^n = \partial I_\beta.$$

Veja Figura 2.12.

Comparando com (2.21) temos

$$f_{n+1}(\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1})) = f_n^k(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta = \partial I_\beta^{n+1}.$$

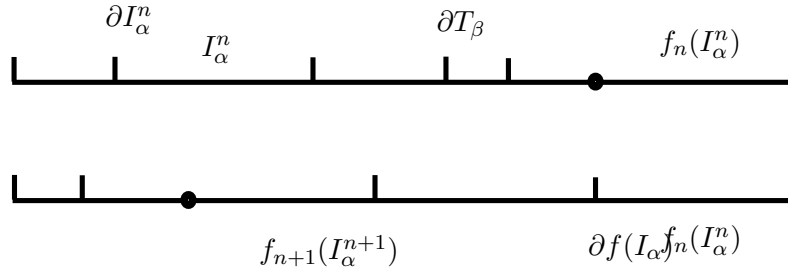


Figura 2.12:

Como os dois pontos estão em I_α^{n+1} e f_{n+1} é a função de retorno de f^n a I_α^{n+1} , podemos reescrever essa igualdade como sendo

$$f_{n+1}^{l-1}(\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1})) = \partial I_\beta^{n+1}, \text{ para algum } 0 \leq l \leq k < m. \quad (2.22)$$

Já no caso em que f_n tem tipo 1, ou seja, $\partial I_\beta > \partial f(I_\alpha)$, segue da definição que

$$\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1}) = \partial f_n(I_\alpha^n) = \partial f_n(f(I_\alpha)) \text{ e } \partial I_\beta^{n+1} = f_n^{-1}(\partial I_\beta^n) = f_n^{-1}(\partial I_\beta).$$

Veja Figura 2.13.

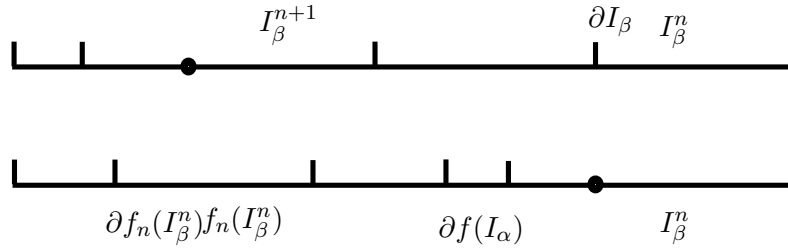


Figura 2.13:

Comparando com (2.21) temos

$$f_{n+1}^{k-1}(\partial f_{n+1}(I_\alpha^{n+1})) = f_n^{k-1}(\partial I_\alpha) = f_n^{-1}(\partial I_\beta) = \partial I_\beta^{n+1}.$$

Como f_{n+1} é a função de retorno de f^n a I_α^{n+1} , podemos reescrever essa igualdade como sendo

$$f_{n+1}^{l-1}(\partial I_\alpha^{n+1}) = \partial I_\beta^{n+1}, \text{ para algum } l \leq k < m. \quad (2.23)$$

Em ambos os casos descritos acima mostramos que (2.20) implica numa relação similar (2.22) ou (2.23), onde f é substituída por uma função induzida f_{n+1} e $m \geq 2$ é

substituído por um l menor. Iterando esse procedimento, encontraremos um caso em que $m = 1$ e que já foi tratado anteriormente, completando assim a prova deste corolário para todos os casos. ■

2.5 Classes de Rauzy

Dado os pares π e π' , diremos que π' é um sucessor de π se existem $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ tais que $\hat{R}(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda')$. Cada par π possui exatamente dois sucessores, um correspondendo ao tipo 0 e outro correspondendo ao tipo 1. Da mesma forma temos que π' é exatamente sucessor de exatamente dois pares π . Observe que π é irredutível se, e somente se, π' é irredutível. Desta forma essa relação define uma ordem parcial no conjunto dos pares irredutíveis que iremos representar aqui como o diagrama G .

Definição 13. *Definimos como **Classes de Rauzy** as componentes conexas desses diagramas. Iremos denotar uma classe de Rauzy por $C(\pi)$ onde π é uma das combinatórias pertencente a essa classe.*

Exemplo 12. *Tomemos a mesma combinatória π do Exemplo 4, ou seja*

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix}.$$

Se aplicarmos o processo de renormalização de Rauzy-Veech com tipo 0 na combinatória π obtemos por (2.4) que o sucessor de π será π' onde

$$\pi' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix}.$$

Se aplicarmos o processo de renormalização de Rauzy-Veech com tipo 1 na combinatória π obtemos por (2.6) que o sucessor de π será π'' onde

$$\pi'' = \begin{pmatrix} A & D & B & C \\ B & D & C & A \end{pmatrix}.$$

A combinatória π possui apenas dois antecessores, um antecessor π^ que quando aplicado o processo de Rauzy-Veech com tipo 0 como descrito em (2.4) obtemos π e outro antecessor π^{**} que quando aplicamos o processo de Rauzy-Veech com tipo 1 com descrito em (2.6) obtemos π . π^* e π^{**} são as seguintes combinatórias.*

$$\pi^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix} \text{ e } \pi^{**} = \begin{pmatrix} A & C & D & B \\ B & D & C & A \end{pmatrix}.$$

Representado na Figura 2.14 os antecessores e sucessores de π .

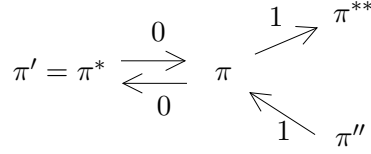


Figura 2.14:

O resultado a seguir nos diz que cada classe de Rauzy é um conjunto conexo por caminhos orientados.

Lema 4. *Se π e π' estão na mesma classe de Rauzy então existe um caminho orientado em G começando em π e terminando em π' .*

Demonstração: Seja $A(\pi)$ o conjunto de todos os pares π' que podem ser ligados por um caminho orientável começando em π . Como vimos, cada vértice do diagrama G tem exatamente duas setas saindo e duas setas chegando. Pela definição, cada caminho começando em algum vértice de $A(\pi)$ deve terminar em algum ponto de $A(\pi)$. Segundo o mesmo argumento, temos também que cada caminho que termina em um vértice de $A(\pi)$ deve começar em algum outro vértice de $A(\pi)$. Isso significa que $A(\pi)$ é uma componente conexa de G , e portanto coincide com a classe de Rauzy $C(\pi)$. ■

Quando $d = 2$ temos duas possibilidades de monodromias invariantes, mas apenas uma delas é irredutível: $(2, 1)$. Assim o diagrama G para $d = 2$ é representado pela Figura 2.15.

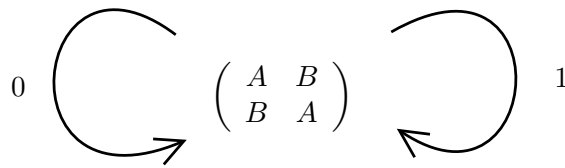


Figura 2.15:

Para $d = 3$ existem seis possibilidades de monodromias invariantes, mas apenas três delas são irredutíveis: $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(3, 2, 1)$. O diagrama G quando $d = 3$ é o apresentado na Figura 2.16

Conforme vimos acima, quando $d = 2$ ou $d = 3$ temos apenas uma classe de Rauzy.

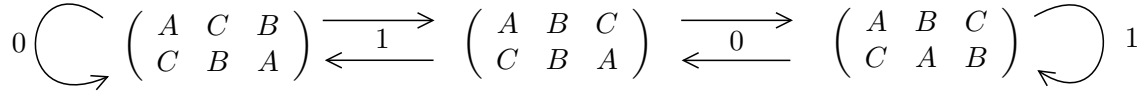


Figura 2.16:

Para $d = 4$ temos 24 possibilidades de monodromias invariantes, sendo 13 delas irredutíveis. São elas:

$$\begin{aligned} & (4, 3, 2, 1), \quad (4, 1, 3, 2), \quad (3, 1, 4, 2), \quad (4, 2, 1, 3), \quad (2, 4, 3, 1), \\ & (3, 2, 1, 4), \quad (2, 4, 1, 3), \quad (4, 2, 3, 1), \quad (4, 1, 2, 3), \quad (4, 3, 1, 2), \\ & (3, 4, 1, 2), \quad (2, 3, 4, 1), \quad (3, 4, 1, 2). \end{aligned}$$

Uma das classes de Rauzy quando $d = 4$ é a mostrada na Figura 2.17. Ela contém 7 vértices que correspondem as sete primeiras monodromias invariantes apresentadas. Os outros seis valores de monodromia invariante pertencem a outra classe de Rauzy representada na Figura 2.18.

Nesta classe de Rauzy temos representada cada monodromia invariante duas vezes. Os motivos para essa duplicação de cada vértice é explicado mais a frente.

Todos esses diagramas tem uma simetria com relação ao eixo vertical. Essa simetria corresponde a involução canônica, isto é, a troca de papéis de π_0 e π_1 . O último diagrama possui um centro de simetria adicional: os pares que são opostos pelo centro de simetria possuem a mesma monodromia invariante, e portanto, correspondem a mesma transformação de intercâmbio de intervalos. Identificando esses pares temos o seguinte diagrama reduzido da classe de Rauzy representado na Figura 2.19:

Abaixo listamos as classes de Rauzy quando $d = 2, 3, 4, 5$.

d	Representante	Número de vértices	Número de vértices (forma reduzida)
2	(2, 1)	1	1
3	(3, 2, 1)	3	3
4	(4, 3, 2, 1)	7	7
4	(4, 2, 3, 1)	12	6
5	(5, 4, 3, 2, 1)	15	15
5	(5, 3, 2, 4, 1)		11
5	(5, 4, 2, 3, 1)		35
5	(5, 2, 3, 4, 1)		10

Definição 14. Um par $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ é chamado de **standard** se o último símbolo em cada linha corresponde ao primeiro símbolo da outra linha. Em outras palavras a monodromia invariante satisfaz

$$\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) = d \quad e \quad \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(d) = 1.$$

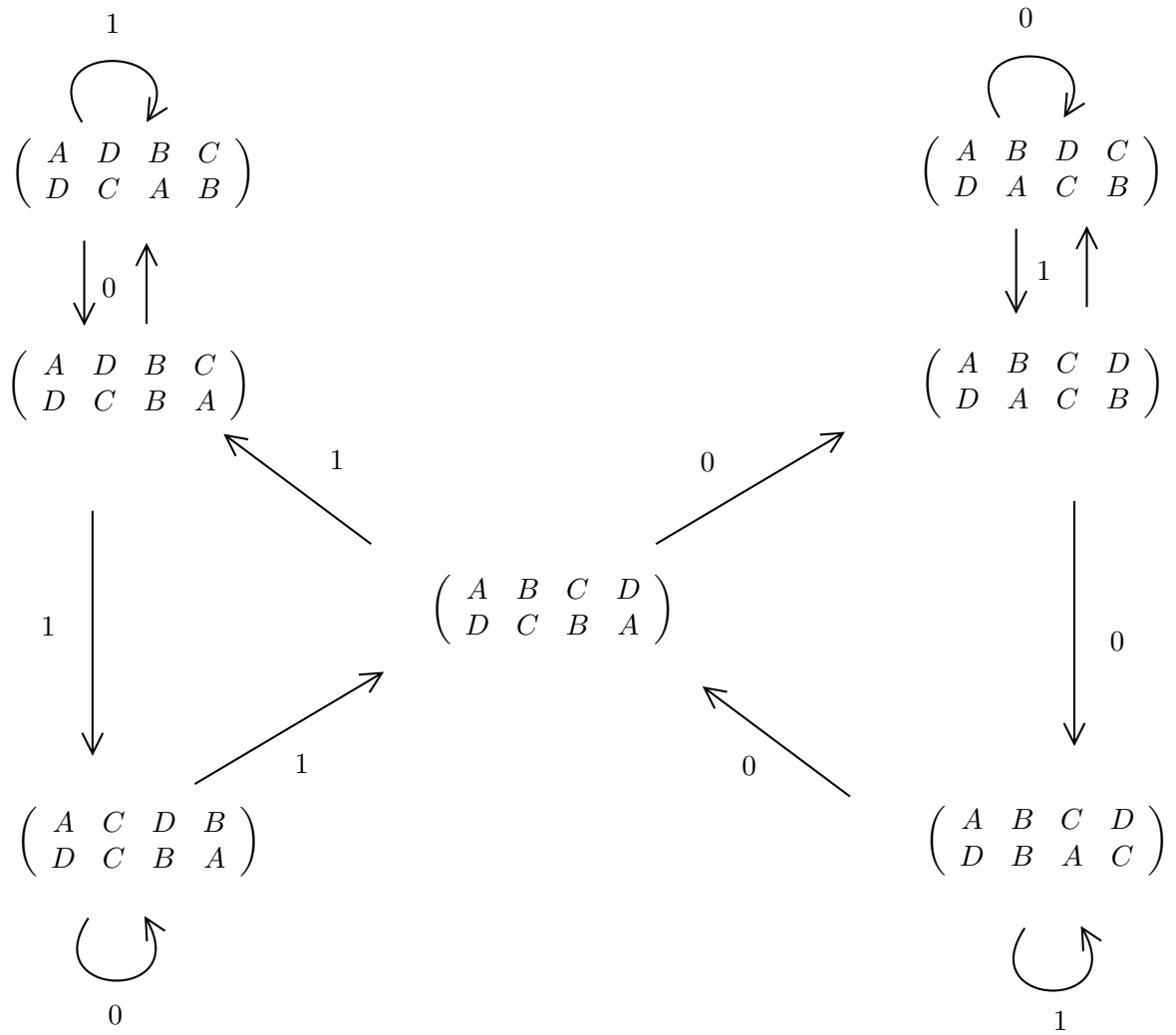


Figura 2.17:

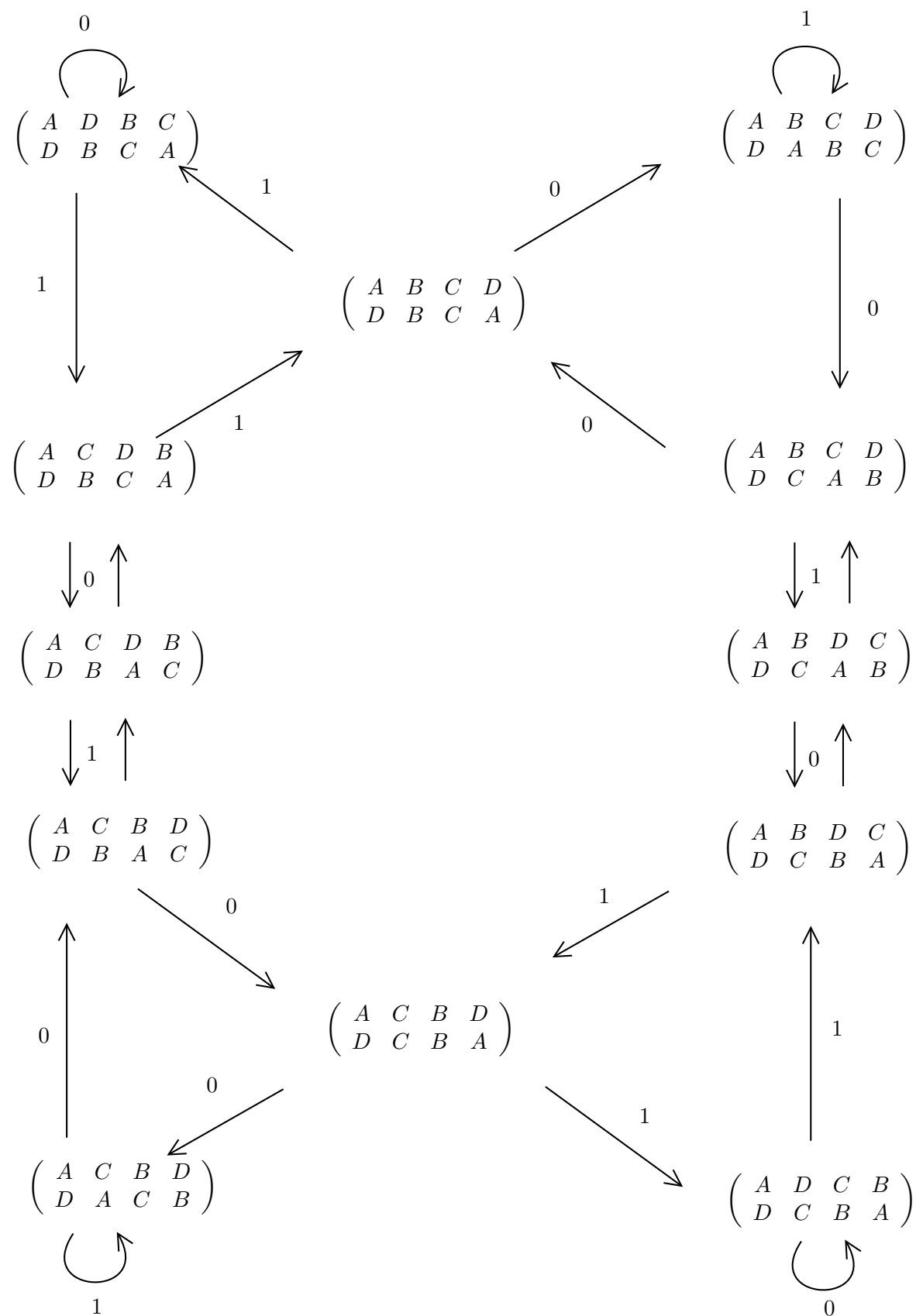


Figura 2.18:

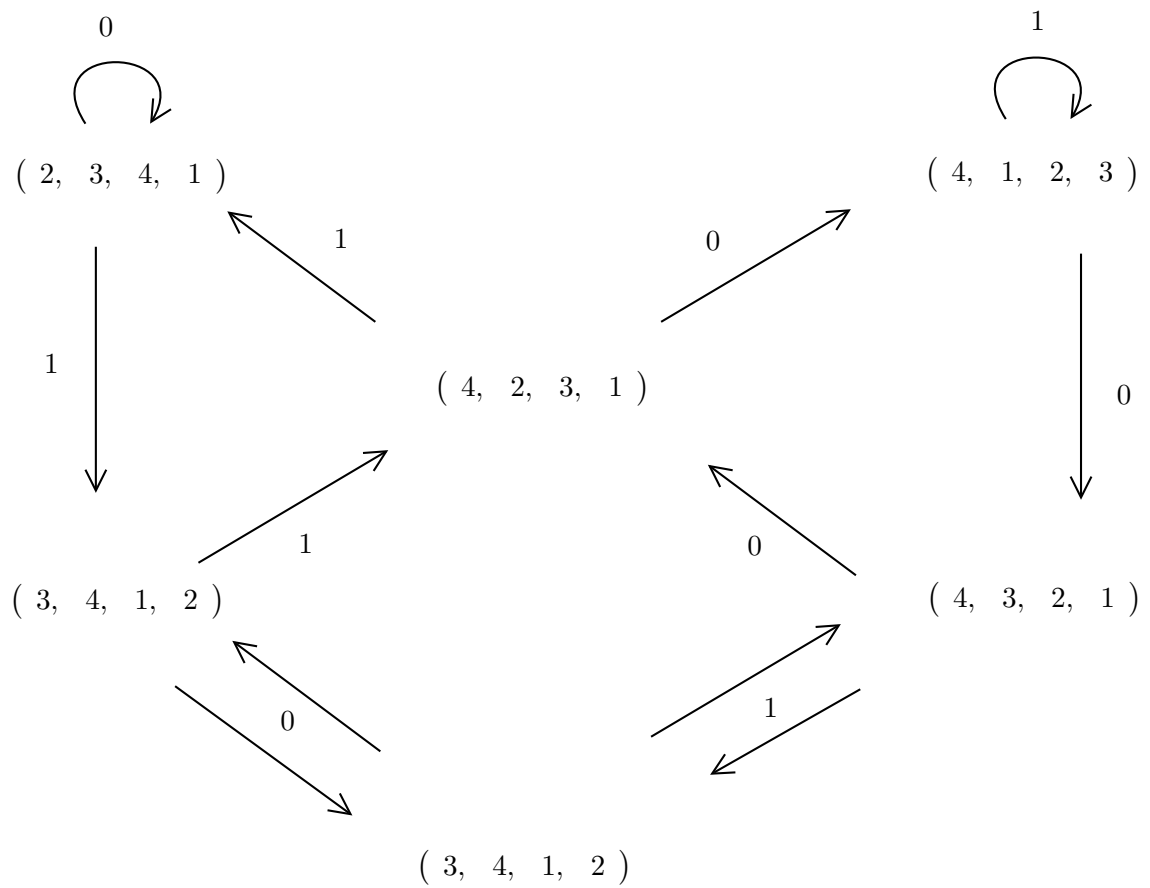


Figura 2.19:

A existência de um par standard em cada classe de Rauzy é o que assegura a próxima proposição.

Proposição 4. *Cada classe de Rauzy contém algum par standard.*

Note que o operador de Rauzy-Veech mantém os primeiros símbolos $\alpha_1^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ inalterados por toda classe de Rauzy. A prova da proposição 4 é baseada no lema 5 abaixo.

Lema 5. *Dado $\epsilon \in \{0, 1\}$ e $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $\pi_\epsilon(\beta) \neq 1$, então existe algum par π' na classe de Rauzy $C(\pi)$ tal que $\pi'_\epsilon(\beta) = d$, isto é, β é o último símbolo da linha ϵ de π' .*

Demonstração: Para cada $\epsilon \in \{0, 1\}$ seja $\mathcal{A}_\epsilon$ o subconjunto de $\beta \in \mathcal{A}$ tais que $\pi'_\epsilon(\beta) < d$ para cada π' na classe de Rauzy. Como vimos anteriormente, $\alpha_1^\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$. Seja $k(\epsilon)$ a posição mais a direita atingida por esses símbolos, ou seja, o maior valor de $\pi'_\epsilon(\beta)$ para todo π' em $C(\pi)$ e todo $\beta \in \mathcal{A}_\epsilon$. Pela definição, $k(\epsilon) < d$. Nossa meta é provar que $k(\epsilon) = 1$ e portanto $\mathcal{A}_\epsilon = \{\alpha_1^\epsilon\}$ para qualquer $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Fixemos $\beta_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$ para o qual o máximo seja atingido. Então $\pi'_\epsilon(\beta_\epsilon) = k(\epsilon)$ para todo π' em $C(\pi)$. Isso porque os símbolos γ tais que $\pi_\epsilon(\gamma) < d$ só se movem para a direita pelo processo de iteração de Rauzy-Veech e, se isso acontecer, haveria uma contradição com a hipótese de que $k(\epsilon)$ é o máximo. (Lema 4). Pelo mesmo argumento mostramos que todos os símbolos a esquerda de β_ϵ são constante dentro da classe de Rauzy:

$$(\pi'_\epsilon)^{-1}(i) = \pi_\epsilon^{-1}(i), \text{ para todo } 1 \leq i \leq k(\epsilon). \quad (2.24)$$

Em particular, nenhum símbolo a esquerda de β_ϵ na linha ϵ pode chegar a última posição na linha $1 - \epsilon$:

$$\pi_\epsilon(\alpha) < k(\epsilon) \Rightarrow \pi'_{1-\epsilon}(\alpha) < d \Rightarrow \pi'_{1-\epsilon} \leq k(1 - \epsilon), \quad (2.25)$$

para qualquer par π' em $C(\pi)$. Vamos escrever

$$\pi' = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{k(0)}^0 & \cdots & \cdots & \alpha_d^0 \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \alpha_{k(1)}^1 & \cdots & \alpha_d^1 \end{pmatrix}, \alpha_i^\epsilon = (\pi'_\epsilon)^{-1}(i), \epsilon \in \{0, 1\}.$$

Como visto em (2.24), a relação expressa em (2.25) implica

$$\{\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_{k(\epsilon)-1}^\epsilon\} \subset \{\alpha_1^{1-\epsilon}, \dots, \alpha_{k(1-\epsilon)}^{1-\epsilon}\}, \text{ para } \epsilon \in \{0, 1\}. \quad (2.26)$$

Em particular, $k(\epsilon) - 1 \leq k(1 - \epsilon) \leq k(\epsilon) + 1$. Existem quatro possibilidades:

1. $k(0) = k(1) + 1$: então o caso $\epsilon = 0$ em (2.26) implica $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(1)}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)}^1\}$, e isso contradiz o fato da irreduzibilidade;

2. $k(0) = k(1) - 1$: esse caso é análogo ao anterior usando $\epsilon = 1$ na expressão (2.26);
3. $k(0) = k(1)$ e $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{k(0)-1}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1\}$: isso contradiz a irredutibilidade a menos que $k(0) = k(1) = 1$;
4. $k(0) = k(1)$ e existe $1 \leq i < k(0)$ tal que $\alpha_i^0 = \alpha_{k(1)-i}^1$: junto com o caso em que $\epsilon = 1$ em (2.26) temos

$$\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k(1)-1}^1, \alpha_{k(1)}^1\} = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_k(0)^0\}$$

e isso implica que os conjuntos coincidem, portanto existe $1 \leq j < k(1)$ tal que $\alpha_j^1 = \alpha_{k(0)}^0$, contradizendo mais uma vez a irredutibilidade.

Isso completa a prova deste lema. ■

Demonstração da Proposição 4: Como observado antes, os primeiros símbolos α_1^ϵ de cada linha permanecer inalterados pelo processo de iteração de Rauzy-Veech. Pela irredutibilidade, eles são necessariamente distintos. Assim, usando o Lema 5, podemos encontrar um par π' em $C(\pi)$ tal que $\pi'_0(\alpha_1^1) = d$, ou seja, o último símbolo da linha de cima coincide com o último símbolo da linha de baixo. Agora, iterando π' pelo processo de Rauzy-Veech com tipo 0, nós mantemos a linha de cima inalterada, enquanto os símbolos da linha de baixo se movimentam a direita de α_1^1 . Então, eventualmente, encontraremos um par π'' que satisfaça $\pi''_1(\alpha_1^0) = d$, e claro $\pi''_0(\alpha_1^1) = d$. Assim π'' é standard. ■

Capítulo 3

Funções $C^{2+\nu}$ e Transformações de Möbius

Antes de enunciarmos e provarmos os principais resultados estudados nesse trabalho precisamos estudar um pouco a composição de funções de classe $C^{2+\nu}$ e também compará-la com as transformações de Möbius. Além desse estudo mais detalhado, apresentamos também nesse capítulo algumas definições que serão usadas nos resultados principais.

3.1 Definições

Uma t.i.i.g. f é infinitamente renormalizável se $R^n(f)$ está bem definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Para simplificar a notação usaremos $f_n = R^n(f)$. Vamos considerar aqui que f satisfaz a condição de Keane, uma propriedade que é invariante por iterações como mostrado anteriormente para t.i.i.s., mas que também é válida para t.i.i.g.. Em [3] prova-se que essa condição é necessária para que a t.i.i.g. f seja infinitamente renormalizável.

Seja ϵ_n o tipo da n -ésima renormalização, $\alpha_n(\epsilon_n)$ o ganhador e $\alpha_n(1 - \epsilon_n)$ o perdedor da n -ésima renormalização.

Definição 15. Diremos que f é uma t.i.i.g. infinitamente renormalizável e tem **combinatória k -limitada** se para cada natural $n \in \mathbb{N}$ e letras $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$ existem naturais $n_1, p \geq 0$, com $|n - n_1| < k$ e $|n - n_1 - p| < k$, tais que $\alpha_{n_1}(\epsilon_{n_1}) = \beta$, $\alpha_{n_1+p}(1 - \epsilon_{n_1+p}) = \gamma$ e $\alpha_{n_1+i}(1 - \epsilon_{n_1+p}) = \alpha_{n_1+i+1}(\epsilon_{n_1+i})$ para todo $0 \leq i < p$.

Definição 16. Diremos que a t.i.i.g. $f : I \rightarrow I$ tem **genus um** como em [18] (ou que pertence a classe de rotação como em [13]) se f tem no máximo duas descontinuidades.

Note que toda t.i.i.g. com dois ou três intervalos possui genus um. Se f é renormalizável e tem genus um, é fácil verificar que $R(f)$ também possui genus um.

Exemplo 13. A seguinte transformação de intercâmbio de intervalos representada na Figura 3.1 tem genus um.

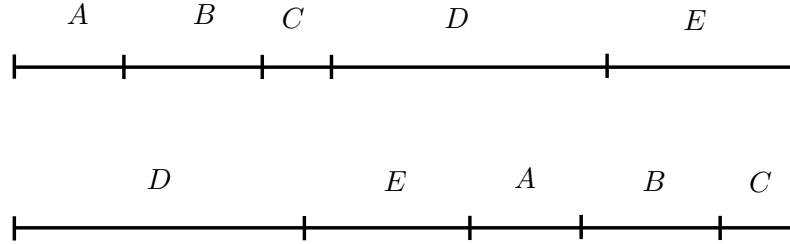


Figura 3.1:

No entanto a transformação do Exemplo 1 não tem genus um.

Definição 17. Dada duas t.i.i.g. f e g , definidas sobre o mesmo alfabeto $\mathcal{A}$, diremos que f e g possuem a mesma combinatória se $\pi(f) = \pi(g)$ e a n -ésima renormalização de f e a n -ésima renormalização de g tem o mesmo tipo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\pi^n(f) = \pi^n(g)$ para todo n , onde $\pi^n(f)$ é a combinatória da n -ésima renormalização de f .

Definição 18. Seja $\mathcal{B}_k^{2+\nu}$, $k \in \mathbb{N}$ e $\nu > 0$ o conjunto das t.i.i.g. $f : I \rightarrow I$ tais que

1. para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ podemos estender f a $\bar{I}_\alpha$ como um difeomorfismo preservando orientação de classe $C^{2+\nu}$;
2. a t.i.i.g. f possui combinatória k -limitada;
3. a função f tem genus um e satisfaz a condição de Keane.

Definição 19. Seja H um intervalo não degenerado e $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo. Definimos o **Zoom** de g em H , denotado por $Z_H(g)$, como sendo a transformação $Z_H(g) = A_2 \circ g \circ A_1$, onde A_1 e A_2 são funções afins preservando orientação que mandam $[0, 1]$ em H e $g(H)$ em $[0, 1]$ respectivamente.

Exemplo 14. Seja $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $g(x) = x^3$ um difeomorfismo. Vamos considerar $H = [1/2, 1] \subset [0, 1]$. Calculando a função zoom de g em H obtemos

$$Z_H(g) = A_2 \circ g \circ A_1,$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 : [0, 1] &\mapsto H = [1/2, 1] \\ x &\mapsto A_1(x) = \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 : g(H) = [1/8, 1] &\mapsto [0, 1] \\ x &\mapsto A_2(x) = \frac{8x-1}{7}. \end{aligned}$$

Considere o conjunto $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ de todas as funções C^2 $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma usual

$$d_{C^2}(f, g) := \sum_{i=0}^2 \sup_{x \in [0, 1]} |D^{(i)}f(x) - D^{(i)}g(x)|, \quad (3.1)$$

onde $D^{(i)}f$ e $D^{(i)}g$ denotam a i -ésima derivada de f e g respectivamente.

Denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto das funções de Möbius $M : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tais que $M(0) = 0$, $M(1) = 1$ e que preservam a orientação. Cada elemento $M \in \mathcal{M}$ tem a forma

$$M = M_N(x) = \frac{xe^{\frac{-N}{2}}}{1 + x(e^{\frac{-N}{2}} - 1)} \quad (3.2)$$

para algum valor de $N \in \mathbb{R}$. Mais adiante justificamos a fórmula geral para as transformações de Möbius que pertencem a esse conjunto.

3.2 Não-Linearidade

Definição 20. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ um difeomorfismo C^2 que preserva orientação. Definimos a não linearidade de f como sendo a função $n_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$n_f(x) = \frac{D^2f(x)}{Df(x)} = D(\ln Df(x)). \quad (3.3)$$

Lema 6. *Sejam f e g difeomorfismos de classe C^2 . A não linearidade da composição $f \circ g$ é*

$$n_{f \circ g}(x) = n_f(g(x))Dg(x) + n_g(x).$$

Demonstração: Podemos usar a definição dada em 3.3 e calcular a não linearidade da composição de difeomorfismos de classe C^2 , ou seja, se f e g são difeomorfismos de classe C^2 temos que a não linearidade da composta é dada por

$$n_{f \circ g}(x) = \frac{D^2[(f \circ g)(x)]}{D[(f \circ g)(x)]}. \quad (3.4)$$

Como

$$\begin{aligned} D^2[(f \circ g)(x)] &= D[D[(f \circ g)(x)]] \\ &= D[Df(g(x)) \cdot Dg(x)] \\ &= D^2f(g(x)) \cdot Dg(x) \cdot Dg(x) + Df(g(x)) \cdot D^2g(x) \end{aligned}$$

e

$$D[(f \circ g)(x)] = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

segue de 3.4 que

$$\begin{aligned} n_{f \circ g}(x) &= \frac{D^2[(f \circ g)(x)]}{D[(f \circ g)(x)]} \\ &= \frac{D^2f(g(x)) \cdot Dg(x) \cdot Dg(x) + Df(g(x)) \cdot D^2g(x)}{Df(g(x)) \cdot Dg(x)} \\ &= \frac{D^2f(g(x))}{Df(g(x))} \cdot Dg(x) + \frac{D^2g(x)}{Dg(x)} \\ &= n_f(g(x)) \cdot Dg(x) + n_g(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$n_{f \circ g}(x) = n_f(g(x))Dg(x) + n_g(x).$$

■

Corolário 5. Se f_i é um difeomorfismo de classe C^2 tal que $f = f_n \circ \dots \circ f_1$ está definido em $[a, b]$ temos

$$\int_{[a,b]} \frac{D^2f(x)}{Df(x)} dx = \sum_{i=1}^n \int_{f^{i-1}[a,b]} \frac{D^2f_i(x)}{Df_i(x)} dx. \quad (3.5)$$

onde $f^i[a, b] = (f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ \dots \circ f_1)([a, b])$, para $i \geq 1$ e $f^0[a, b] = [a, b]$.

Demonstração: Vamos provar esse corolário por indução em n . Tomando $n = 2$ temos que $f = f_2 \circ f_1$ e portanto

$$\int_{[a,b]} n_f(x) dx = \int_{[a,b]} n_{f_2 \circ f_1}(x) dx.$$

Pelo Lema 6 temos $n_{f_2 \circ f_1} = n_{f_2}(f_1(x)) \cdot Df_1(x) + n_{f_1}(x)$ e portanto

$$\int_{[a,b]} n_{f_2 \circ f_1}(x) dx = \int_{[a,b]} n_{f_2}(f_1(x)) dx \cdot Df_1(x) + \int_{[a,b]} n_{f_1}(x) dx.$$

Tomamos $y = f_1(x)$ na primeira parcela do lado direito da igualdade acima e além disso temos $dy = Df_1(x)dx$ e como $a \leq x \leq b$ então $f_1(a) \leq y \leq f_1(b)$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} n_f(x)dx &= n_{f_2}(f_1(x)) \cdot Df_1(x) + \int_{[a,b]} n_{f_1}(x)dx \\ &= \int_{f_1[a,b]} n_{f_2}(y)dy + \int_{[a,b]} n_{f_1}(x)dx \\ &= \int_{f^1[a,b]} n_{f_2}(y)dy + \int_{f^0[a,b]} n_{f_1}(x)dx. \end{aligned}$$

Portanto a equação 3.5 vale para $n = 2$.

Suponha que a equação 3.5 vale para $n = k$, ou seja,

$$\int_{[a,b]} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx = \sum_{i=1}^k \int_{f^{i-1}[a,b]} \frac{D^2 f_i(x)}{Df_i(x)} dx \quad (3.6)$$

onde $f = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$.

No caso $n = k + 1$ temos $f = f_{k+1} \circ f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$. Chamando $g = f_{k+1} \circ f_k$ obtemos $f = g \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$ como uma composição de k difeomorfismos de classe C^2 e usando a hipótese de indução em 3.6 que vale para composição de k difeomorfismos obtemos

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx &= \sum_{i=1}^k \int_{f^{i-1}[a,b]} \frac{D^2 f_i(x)}{Df_i(x)} dx \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{f^{i-1}[a,b]} \frac{D^2 f_i(x)}{Df_i(x)} dx + \int_{f^{k-1}[a,b]} \frac{D^2 g(x)}{Dg(x)} dx, \end{aligned}$$

aplicando o passo com $n = 2$ para o termo $\int_{f^{k-1}[a,b]} \frac{D^2 g(x)}{Dg(x)} dx$ obtemos

$$\int_{f^{k-1}[a,b]} \frac{D^2 g(x)}{Dg(x)} dx = \int_{f_k(f^{k-1}[a,b])} \frac{D^2 f_{k+1}(x)}{Df_{k+1}(x)} dx + \int_{f^{k-1}[a,b]} \frac{D^2 f_k(x)}{Df_k(x)} dx.$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{f^{i-1}[a,b]} \frac{D^2 f_i(x)}{Df_i(x)} dx + \int_{f^{k-1}[a,b]} \frac{D^2 g(x)}{Dg(x)} dx \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{f^{i-1}[a,b]} \frac{D^2 f_i(x)}{Df_i(x)} dx + \int_{f^{k-1}[a,b]} \frac{D^2 f_k(x)}{Df_k(x)} dx + \int_{f_k(f^{k-1}[a,b])} \frac{D^2 f_{k+1}(x)}{Df_{k+1}(x)} dx \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{f^{i-1}[a,b]} n_{f_i}(x) dx + \int_{f^{k-1}[a,b]} n_{f_k}(x) dx + \int_{f^k[a,b]} n_{f_{k+1}}(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \int_{f^{i-1}} n_{f_i}(x) dx
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Proposição 5. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [f(0), f(1)]$ um difeomorfismo preservando a orientação. Se $[a, b] \subset [0, 1]$ e $\tilde{f} = Z_{[a,b]}(f)$ é o zoom de f em $[a, b]$, então a não-linearidade do zoom de f é*

$$n_{\tilde{f}}(x) = (b-a)n_f(a+x(b-a)). \quad (3.7)$$

Demonstração: Da definição 19 temos que $\tilde{f} = A_2 \circ f \circ A_1$ tal que

$$\begin{aligned}
A_1 : [0, 1] &\rightarrow [a, b] \\
x &\mapsto A_1(x) = (b-a)x + a
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_2 : [f(a), f(b)] &\rightarrow [0, 1] \\
x &\mapsto A_2(x) = \frac{x-f(a)}{f(b)-f(a)}.
\end{aligned}$$

Assim as derivadas de $\tilde{f}(x)$ são

$$\begin{aligned}
D\tilde{f}(x) &= DA_2(f \circ A_1(x)) \cdot Df(A_1(x)) \cdot DA_1(x) \\
&= \frac{1}{f(b)-f(a)} \cdot Df((b-a)x + a) \cdot (b-a) \\
&= \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot Df((b-a)x + a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{f}(x) &= D(D\tilde{f}(x)) \\ &= \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot D^2 f((b-a)x-a) \cdot (b-a) \\ &= \frac{(b-a)^2}{f(b)-f(a)} \cdot D^2 f((b-a)x-a) \end{aligned}$$

Pela definição de não-linearidade em 3.3 obtemos

$$\begin{aligned} n_{\tilde{f}}(x) &= \frac{D^2 \tilde{f}(x)}{D\tilde{f}(x)} \\ &= \frac{\frac{(b-a)^2}{f(b)-f(a)} \cdot D^2 f((b-a)x-a)}{\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot Df((b-a)x-a)} \\ &= (b-a) \cdot \frac{D^2 f((b-a)x-a)}{Df((b-a)x-a)} \\ &= (b-a) \cdot n_f((b-a)x-a). \end{aligned}$$

■

Definição 21. Se $[a, b] = [0, 1]$ definimos como não linearidade média o número N_f dado por

$$N_f = \int_{[0,1]} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx.$$

Proposição 6. Suponha que existam constantes $C_0 > 0$ e $C_1 > 0$ tais que

$$|n_f(x) - n_f(y)| \leq C_0 \cdot |x - y|^\nu \quad (3.8)$$

para $x, y \in [0, 1]$ e defina

$$|n_f|_{C^0[0,1]} := \sup_{x \in [0,1]} \{|n_f(x)|\} \leq C_1.$$

Então por (3.8) e (3.7) temos

$$|n_{Z(f)}(x) - n_{Z(f)}(y)| \leq C_0 \cdot \delta^{1+\nu} \text{ e } |n_{Z(f)}|_{C^0[0,1]} \leq C_1 \cdot \delta, \quad (3.9)$$

com $x, y \in [0, 1]$ e $\delta = b - a$. Além disso, a não-linearidade média da função zoom é dada por

$$N_{Z(f)} = \int_0^1 (b-a) \cdot n_f(a + x(b-a)) dx = \int_{[a,b]} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx. \quad (3.10)$$

Demonstração: Para a primeira desigualdade partimos de 3.7 e assim obtemos

$$\begin{aligned} |n_{Z(f)}(x) - n_{Z(f)}(y)| &= |(b-a)n_f(a+x(b-a)) - (b-a)n_f(a+y(b-a))| \\ &= |(b-a)(n_f(a+x(b-a)) - n_f(a+y(b-a)))| \\ &\leq (b-a) \cdot C_0 \cdot |a+x(b-a) - (a+y(b-a))|^\nu \\ &= C_0 \cdot (a-b) \cdot |(b-a)(x-y)|^\nu. \end{aligned}$$

Como $x, y \in [0, 1]$, segue que $|x - y| \leq 1$ e portanto

$$\begin{aligned} |n_{Z(f)}(x) - n_{Z(f)}(y)| &= C_0 \cdot (a-b) \cdot |(b-a)(x-y)|^\nu \\ &\leq C_0 \cdot (a-b)^{1+\nu} \\ &= C_0 \cdot \delta^{1+\nu}. \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade também partimos de 3.7 e temos que

$$\begin{aligned} |n_{Z(f)}(x)| &= |(b-a)n_f(a+x(b-a))| \\ &= (b-a) \cdot |n_f(a+x(b-a))|. \end{aligned}$$

Basta agora tomar o supremo variando $x \in [0, 1]$ nos dois lados da igualdade e assim

$$|n_{Z(f)}|_{C^0[0,1]} = (b-a) \sup_{x \in [0,1]} |n_f(a+x(b-a))| \leq C_1 \cdot \delta.$$

Para o cálculo da não-linearidade média usamos a expressão em 3.4. Logo

$$N_{Z(f)} = \int_0^1 n_{Z(f)}(x) dx = \int_0^1 (b-a)n_f(a+x(b-a)) dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis com $y = a + x(b-a)$ e assim $dy = (b-a)dx$ com $a \leq y \leq b$ dado que $0 \leq x \leq 1$ obtemos

$$N_{Z(f)} = \int_a^b n_f(y) dy = \int_a^b \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx$$

concluindo assim o resultado. ■

A função n_f define f bem como seu domínio e imagem. De fato, dada uma função contínua $n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único difeomorfismo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^2 tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $n_f = n$. Existe uma fórmula interessante para um dado difeomorfismo satisfazendo essas condições e que foi provada em [11]. Como faremos uso dessa fórmula vamos prová-la aqui.

Proposição 7. Se $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é um difeomorfismo com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ então

$$f(x) = \frac{\int_0^x \exp(\int_0^z n(y)dy)dz}{\int_0^1 \exp(\int_0^z n(y)dy)dz}, \quad (3.11)$$

onde $n = n_f$ é dado por 3.3.

Demonstração: Como $n_f(y) = D(\ln Df(y))$ temos que

$$\int_0^t n_f(y)dy = \int_0^t D(\ln Df(y)) = \ln Df(t) - \ln Df(0) = \ln \frac{Df(t)}{Df(0)},$$

e assim

$$Df(t) = Df(0) \cdot e^{\int_0^t n_f(y)dy}.$$

Integrando novamente obtemos

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x Df(t)dt = Df(0) \cdot \int_0^x e^{\int_0^t n_f(y)dy} dt.$$

Como $f(1) = 1$ podemos obter o valor de $Df(0)$

$$1 = f(1) = Df(0) \cdot \int_0^1 e^{\int_0^t n_f(y)dy} dt \Rightarrow Df(0) = \frac{1}{\int_0^1 e^{\int_0^t n_f(y)dy} dt}$$

e portanto fica provada a expressão apresentada em (3.11). ■

3.3 Transformações de Möbius

A fórmula geral para uma transformação de Möbius é da forma $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.12)$$

com a, b, c e d números complexos e $ad - bc \neq 0$, pois caso contrário teríamos

$$M'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = 0,$$

para todo z .

Vamos trabalhar aqui com transformações de Möbius $M : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que preservam a orientação e tais que $M(0) = 0$ e $M(1) = 1$. Como uma transformação de Möbius é da

forma $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$, para que ela satisfaça $M(0) = 0$ devemos ter $b = 0$ e para que $M(1) = 1$ devemos ter $a = c + d$. Além disso, para M preservar a orientação devemos ter $c + d$ e d com o mesmo sinal. Nesse caso a função não-linearidade de M é dada por

$$n_M(x) = \frac{D^2M(x)}{DM(x)} = \frac{-2c}{cx + d},$$

e a não-linearidade média de M é dada por

$$N_M = 2 \ln \frac{d}{c+d}. \quad (3.13)$$

A Proposição 8 determina uma fórmula geral para as transformações de Möbius que iremos usar nesse trabalho.

Proposição 8. *A fórmula para uma transformação de Möbius que satisfaça $M_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com $M_N(0) = 0$, $M_N(1) = 1$, preservando a orientação e com não-linearidade média N é dada por*

$$M(x) = M_N(x) = \frac{xe^{\frac{-N}{2}}}{1 + x(e^{\frac{-N}{2}} - 1)}. \quad (3.14)$$

Demonstração: Considerando a fórmula geral para as transformações de Möbius em 3.12 e as hipóteses acima temos que a não-linearidade média da transformação de Möbius M_N é dada por 3.13, ou seja,

$$\begin{aligned} N = 2 \ln \frac{d}{c+d} &\Rightarrow \frac{N}{2} = \ln \frac{d}{c+d} \Rightarrow e^{N/2} = \frac{d}{c+d} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c+d = d \cdot e^{-N/2} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = e^{-N/2} - 1. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} M(x) = M_N(x) &= \frac{ax}{cx+d} = \frac{(c+d)x}{d(1+\frac{c}{d}x)} \\ &= \frac{d \cdot e^{-N/2}x}{d(1+\frac{c}{d}x)} = \frac{e^{-N/2}x}{1+\frac{c}{d}x} \\ &= \frac{e^{-N/2}x}{1+x(e^{-N/2}-1)}. \end{aligned}$$

■

3.4 Comparando funções $C^{2+\nu}$ e Möbius

Proposição 9. *Sejam $f : [0, 1] \rightarrow [f(0), f(1)]$ um difeomorfismo $C^{2+\nu}$ preservando a orientação, $[a, b] \subset [0, 1]$ e defina $\tilde{f} = Z_{[a,b]}(f)$. Assim*

$$d_{C^2}(\tilde{f}, M_{N_{\tilde{f}}}) = O(\delta^{1+\nu})$$

onde $\delta = b - a$.

Antes de provar essa proposição vamos provar o seguinte lema.

Lema 7. *Seja $f_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ um difeomorfismo tal que $n_f(x) = N \in [0, 1]$ para todo $x \in [0, 1]$ e tal que $f_N(0) = 0$ e $f_N(1) = 1$. Então*

$$d_{C^2}(f_N, M_N) = O(N^2).$$

Demonstração: Pela equação (3.11) temos

$$f_N(x) = \frac{\int_0^x e^{Nz} dz}{\int_0^1 e^{Nz} dz} = \frac{e^{Nx} - 1}{e^N - 1}.$$

Derivando a expressão de $f_N(x)$ obtemos

$$Df_N(x) = \frac{Ne^{Nx}}{e^N - 1} \text{ e } D^2f_N(x) = \frac{N^2e^{Nx}}{e^N - 1}.$$

Nossa função de Möbius é dada por

$$M_N(x) = \frac{x^{-N/2}}{1 + x(e^{-N/2} - 1)}.$$

Derivando a expressão de $M_N(x)$ obtemos

$$DM_N(x) = \frac{e^{-N/2}}{[1 + x(e^{-N/2} - 1)]^2} \text{ e } D^2M_N(x) = \frac{-2e^{-N/2}(e^{-N/2} - 1)}{[1 + x(e^{-N/2} - 1)]^3}.$$

Deste modo podemos calcular o módulo da diferença entre as funções e suas derivadas.

$$\begin{aligned} |f_N(x) - M_N(x)| &= \left| \frac{e^{Nx} - 1}{e^N - 1} - \frac{x e^{-N/2}}{1 + x(e^{-N/2} - 1)} \right| \\ &= \left| \frac{(1 + Nx + N^2x^2/2 + O(N^3)) - 1}{(1 + Nx + N^2/2 + O(N^3)) - 1} - \frac{x(1 - N/2 + O(N^2))}{1 + x((1 - N/2 + O(N^2)) - 1)} \right| \\ &= \left| \frac{Nx + N^2x^2/2 + O(N^3)}{N + N^2/2 + O(N^3)} - \frac{x(1 - N/2 + O(N^2))}{1 + x(-N/2 + O(N^2))} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{N(x+Nx^2/2+O(N^2))}{N(1+N/2+O(N^2))} - \frac{x(1-N/2+O(N^2))}{1-(Nx/2+O(N^2))} \right| \\
&= \left| \frac{x+Nx^2/2+O(N^2)}{1-(-N/2+O(N^2))} - \frac{x(1-N/2+O(N^2))}{1-(Nx/2+O(N^2))} \right| \\
&= |(x+Nx^2/2+O(N^2))(1-N/2+O(N^2)) - \\
&\quad -(x(1-N/2+O(N^2)))(1+Nx/2+O(N^2))| \\
&= |(x-Nx/2+Nx^2/2+O(N^2)) - (x+Nx^2/2-Nx/2+O(N^2))| \\
&= O(N^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Df_N(x) - DM_N(x)| &= \left| \frac{Ne^{Nx}}{e^N-1} - \frac{e^{-N/2}}{[1+x(e^{-N/2}-1)]^2} \right| \\
&= \left| \frac{N(1+Nx+O(N^2))}{(1+N+N^2/2+O(N^3))-1} - \frac{e^{-N/2}}{[1-Nx/2+O(N^2)]^2} \right| \\
&= \left| \frac{1+Nx+O(N^2)}{1+N/2+O(N^2)} - (e^{-N/2})(1+Nx/2+O(N^2))^2 \right| \\
&= \left| \frac{1+Nx+O(N^2)}{1-(-N/2+O(N^2))} - \right. \\
&\quad \left. -(e^{-N/2})(1+2 \cdot 1 \cdot (Nx/2+O(N^2)) + (Nx/2+O(N^2))) \right| \\
&= |(1+Nx+O(N^2))(1-N/2+O(N^2)) - (e^{-N/2})(1+Nx+O(N^2))| \\
&= |(1+Nx-N/2+O(N^2)) - (1-N/2+O(N^2))(1+Nx+O(N^2))| \\
&= |(1+Nx-N/2+O(N^2)) - (1-N/2+Nx+O(N^2))| \\
&= O(N^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|D^2f_N(x) - D^2M_N(x)| &= \left| \frac{N^2e^{Nx}}{e^N-1} - \frac{-2e^{-N/2}(e^{-N/2}-1)}{[1+x(e^{-N/2}-1)]^3} \right| \\
&= \left| \frac{N^2(1+Nx+O(N^2))}{(1+N+O(N^2))-1} - (-2e^{-N/2}(e^{-N/2}-1))(1-Nx/2+O(N^2))^3 \right| \\
&= \left| \frac{N(1+Nx+O(N^2))}{1+O(N^2)} - \right. \\
&\quad \left. -(-2)(1-N/2+O(N^2))(-N/2+O(N^2))(1-Nx/2+O(N^2))^3 \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{N(1+Nx+O(N^2))}{1-O(N^2)} - (N+O(N^2))(1-Nx/2+O(N^2)) \right|^3 \\
&= |(N+O(N^2))(1-O(N^2)) - \\
&\quad -(N+O(N^2))(1+3 \cdot 1 \cdot (Nx/2+O(N^2))+O(N^2))| \\
&= |(N+O(N^2)) - (N+O(N^2))| \\
&= O(N^2).
\end{aligned}$$

Pela definição dada em (3.1) segue que

$$d_{C^2}(f_N, M_N) = O(N^2).$$

■

Demonstração da Proposição 9: Pela relação estabelecida em (3.9) temos

$$|N_{\tilde{f}}| \leq |n_f|_{C^0[0,1]} \cdot \delta,$$

ou seja

$$\tilde{N} = O(\delta). \quad (3.15)$$

Denotaremos $\tilde{N} = N_{\tilde{f}}$. Note que

$$d_{C^2}(\tilde{f}, M_{\tilde{N}}) \leq d_{C^2}(\tilde{f}, f_{\tilde{N}}) + d_{C^2}(f_{\tilde{N}}, M_{\tilde{N}})$$

pela desigualdade triangular. Como vimos no Lema 7 temos um limitante superior para a parcela $d_{C^2}(f_{\tilde{N}}, M_{\tilde{N}})$ e portanto precisamos apenas majorar a parcela $d_{C^2}(\tilde{f}, f_{\tilde{N}})$. Note que

$$\tilde{N} = \int_0^1 n_{\tilde{f}}(s) ds = n_{\tilde{f}}(\theta)$$

para algum valor de $\theta \in [0, 1]$ dado pelo Teorema do Valor Médio para integrais. Se

$$|n_f(x) - n_f(y)| \leq C_0 |x - y|^\nu,$$

então por (3.9) temos

$$|n_{\tilde{f}} - \tilde{N}| = |n_{\tilde{N}}(x) - n_{\tilde{f}}(\theta)| \leq C_0 \cdot \delta^{1+\nu},$$

e então

$$n_{\tilde{f}}(x) = \tilde{N} + n_{\tilde{f}}(x) - \tilde{N} = \tilde{N} + O(\delta^{1+\nu}). \quad (3.16)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t n_{\tilde{f}}(x)dx &= \int_0^t (\tilde{N} + O(\delta^{1+\nu}))dx \\ &= Nt + tO(\delta^{1+\nu});\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}e^{\int_0^t n_{\tilde{f}}(x)dx} &= e^{Nt+tO(\delta^{1+\nu})} \\ &= 1 + t(\tilde{N} + O(\delta^{1+\nu})) + O(t^2(\tilde{N} + O(\delta^{1+\nu}))^2) \\ &= 1 + t(\tilde{N} + O(\delta^{1+\nu})) + t^2O(\delta^2); \\ \int_0^x e^{\int_0^t n_{\tilde{f}}(x)dx} dt &= \int_0^x 1 + t(\tilde{N} + O(\delta^{1+\nu})) + t^2O(\delta^2)dt \\ &= x + \tilde{N}\frac{x^2}{2} + O(\delta^{1+\nu})\frac{x^2}{2} + O(\delta^2)\frac{x^3}{3} \\ &= x(1 + \tilde{N}\frac{x}{2} + O(\delta^{1+\nu})),\end{aligned}$$

e fazendo $x = 1$ obtemos

$$\int_0^1 e^{\int_0^t n_{\tilde{f}}(x)dx} dt = 1 + \frac{\tilde{N}}{2} + O(\delta^{1+\nu}).$$

Portanto a expressão de $\tilde{f}(x)$ dada por 3.11 é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{\int_0^x \exp(\int_0^z n_{\tilde{f}}(y)dy)dz}{\int_0^1 \exp(\int_0^z n_{\tilde{f}}(y)dy)dz} \\ &= \frac{x(1 + \tilde{N}\frac{x}{2} + O(\delta^{1+\nu}))}{1 + \frac{\tilde{N}}{2} + O(\delta^{1+\nu})} \\ &= x(1 + \tilde{N}\frac{x}{2} + O(\delta^{1+\nu}))(1 - \frac{\tilde{N}}{2} + O(\delta^{1+\nu})) \\ &= x(1 - \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{\tilde{N}}{2}x + O(\delta^{1+\nu})).\end{aligned}$$

Por consequência temos

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= x(1 - \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{\tilde{N}}{2}x + O(\delta^{1+\nu})) \Rightarrow \\ D\tilde{f}(x) &= 1 + \tilde{N}x - \frac{\tilde{N}}{2} + O(\delta^{1+\nu}) \Rightarrow \\ D^2\tilde{f}(x) &= \tilde{N} + O(\delta^{1+\nu}).\end{aligned}$$

A expressão de $f_{\tilde{N}}(x)$ pode ser obtida a partir de 3.11 e é da forma

$$\begin{aligned}f_{\tilde{N}}(x) &= \frac{\int_0^x e^{\tilde{N}z}dz}{\int_0^1 e^{\tilde{N}z}dz} \\ &= \frac{e^{\tilde{N}x} - 1}{e^{\tilde{N}} - 1} \\ &= \frac{(1 + \tilde{N}x + \tilde{N}^2x^2/2 + O(\tilde{N}^3)) - 1}{(1 + \tilde{N} + \tilde{N}^2/2 + O(\tilde{N}^3)) - 1} \\ &= x(1 + \frac{\tilde{N}}{2}x - \frac{\tilde{N}}{2}) + O(\tilde{N}^2).\end{aligned}$$

Por consequência temos

$$\begin{aligned} f_{\tilde{N}}(x) &= x(1 + \frac{\tilde{N}}{2}x - \frac{\tilde{N}}{2} + O(\tilde{N}^2)) \Rightarrow \\ Df_{\tilde{N}}(x) &= 1 - \frac{\tilde{N}}{2} + \tilde{N}x + O(\tilde{N}^2) \Rightarrow \\ D^2f_{\tilde{N}}(x) &= \tilde{N} + O(\tilde{N}^2). \end{aligned}$$

Comparando as funções $\tilde{f}(x)$, $D\tilde{f}(x)$ e $D^2\tilde{f}(x)$ com $f_{\tilde{N}}(x)$, $Df_{\tilde{N}}(x)$ e $D^2f_{\tilde{N}}(x)$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - f_{\tilde{N}}(x)| &= |x(1 - \frac{\tilde{N}}{2} + \frac{\tilde{N}}{2}x + O(\delta^{1+\nu})) - x(1 + \frac{\tilde{N}}{2}x - \frac{\tilde{N}}{2} + O(\tilde{N}^2))| \\ &= |xO(\delta^{1+\nu}) + O(\tilde{N}^2)| \\ &= O(\delta^{1+\nu}); \\ |D\tilde{f}(x) - Df_{\tilde{N}}(x)| &= |1 + \tilde{N}x - \frac{\tilde{N}}{2} + O(\delta^{1+\nu}) - (1 - \frac{\tilde{N}}{2} + \tilde{N}x + O(\tilde{N}^2))| \\ &= |O(\delta^{1+\nu}) + O(\tilde{N}^2)| \\ &= O(\delta^{1+\nu}); \\ |D^2\tilde{f}(x) - D^2f_{\tilde{N}}(x)| &= |\tilde{N} + O(\delta^{1+\nu}) - (\tilde{N} + O(\tilde{N}^2))| \\ &= |O(\delta^{1+\nu}) + O(\tilde{N}^2)| \\ &= O(\delta^{1+\nu}). \end{aligned}$$

Portanto temos

$$d_{C^2}(\tilde{f}, f_{\tilde{N}}) = O(\delta^{1+\nu})$$

e por consequência

$$\begin{aligned} d_{C^2}(\tilde{f}, M_{\tilde{N}}) &\leq d_{C^2}(\tilde{f}, f_{\tilde{N}}) + d_{C^2}(f_{\tilde{N}}, M_{\tilde{N}}) \\ &= O(\delta^{1+\nu}) + O(\tilde{N}^2) \\ &= O(\delta^{1+\nu}) \end{aligned}$$

pois de 3.15 sabemos que $\tilde{N} = O(\delta)$ e assim $O(\tilde{N}^2) = O(\delta^{1+\nu})$. E com isso provamos a proposição. ■

De agora em diante consideraremos $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$, um difeomorfismo de classe $C^{2+\nu}$ com $f_i(0) = 0$, $f_i(1) = 1$ e tal que existam $C_0, C_1 > 0$ satisfazendo

$$|n_{f_i}(x) - n_{f_i}(y)| \leq C_0 \cdot |x - y|^\nu \quad (3.17)$$

e

$$|n_{f_i}|_{C^0[0,1]} \leq C_1 \quad (3.18)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Além disso, também vamos considerar $[a_i, b_i] \subset [0, 1]$, $\delta_i = b_i - a_i$, $\tilde{f}_i = Z_{[a_i, b_i]}(f_i)$, $M_i = M_{N_{\tilde{f}_i}}$,

$$\tilde{f}_1^n = \tilde{f}_n \circ \tilde{f}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{f}_1 \quad (3.19)$$

e

$$M_1^n = M_n \circ M_{n-1} \circ \cdots \circ M_1. \quad (3.20)$$

O resultado seguinte é o principal dessa seção. Ele compara a composição de $\tilde{f}_i$ e M_i .

Proposição 10. *Seja f_i como definido acima. Dado uma constante $C_2 > 0$ existe uma constante $C_3 > 0$ obedecendo a seguinte propriedade: Se $\sum_{i=1}^n \delta_i \leq C_2$, então*

$$|\tilde{f}_1^n - M_1^n|_{C^2} \leq C_3 \cdot \left(\max_{1 \leq j \leq n} \delta_j \right)^\nu.$$

A prova do Teorema 1 em [8] foi a principal motivação para a Proposição 10 enunciada [1]. Como esta proposição não estava explicitada no artigo de Khanin e Vul no caso mais geral, ela foi incluída com um argumento mais completo. Precisaremos de alguns lemas para a prova desta proposição.

Lema 8. *Existe uma constante $C_4 = C_4(C_1, C_2) > 0$ de tal forma que*

$$e^{-C_4} \leq D\tilde{f}_1^n(x) \leq e^{C_4},$$

para todo $x \in [0, 1]$ e para todo $n \geq 0$.

Demonstração: Primeiramente observamos que

$$\begin{aligned}
\ln \frac{D\tilde{f}_1^n(x)}{D\tilde{f}_1^n(y)} &= \ln \frac{D\tilde{f}_n(\tilde{f}_1^{n-1}(x)) \cdot D\tilde{f}_{n-1}(\tilde{f}_1^{n-2}(x)) \cdots D\tilde{f}_1(x)}{D\tilde{f}_n(\tilde{f}_1^{n-1}(y)) \cdot D\tilde{f}_{n-1}(\tilde{f}_1^{n-2}(y)) \cdots D\tilde{f}_1(y)} \\
&= \ln \left(\frac{D\tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x))}{D\tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(y))} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \ln D\tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x)) - \ln D\tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(y)) \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\tilde{f}_1^{j-1}(y)}^{\tilde{f}_1^{j-1}(x)} \frac{D^2\tilde{f}_j(s)}{D\tilde{f}_j(s)} ds \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{D^2\tilde{f}_j(z_{j-1})}{D\tilde{f}_j(z_{j-1})} |\tilde{f}_1^{j-1}(x) - \tilde{f}_1^{j-1}(y)|,
\end{aligned}$$

para algum valor de $z_{j-1} \in [\tilde{f}_1^{j-1}(y), \tilde{f}_1^{j-1}(x)]$ dado pelo Teorema do Valor Médio para integrais.

Por (3.9) temos

$$\begin{aligned}
\left| \ln \frac{D\tilde{f}_1^n(x)}{D\tilde{f}_1^n(y)} \right| &\leq \sum_{j=1}^n \frac{D^2\tilde{f}_j(z_{j-1})}{D\tilde{f}_j(z_{j-1})} |\tilde{f}_1^{j-1}(x) - \tilde{f}_1^{j-1}(y)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \frac{D^2\tilde{f}_j(z_{j-1})}{D\tilde{f}_j(z_{j-1})} \\
&\leq C_1 \cdot \sum_{j=1}^n \delta_j \\
&\leq C_1 C_2 = C_4.
\end{aligned}$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo, do fato que $f_i(0) = 0$ e $f_i(1) = 1$ e de 3.19, temos que

$$\int_0^1 D\tilde{f}_1^n(s) ds = \tilde{f}_1^n(1) - \tilde{f}_1^n(0) = 1 - 0 = 1 \quad (3.21)$$

Logo, aplicando o Teorema do Valor Médio a $\tilde{f}_1$ no intervalo $[0, 1]$ e usando 3.21 podemos tomar $y \in [0, 1]$ de tal forma que $D\tilde{f}_1^n(y) = 1$. Tomando $y \in [0, 1]$ como descrito temos provado o resultado.

■

Lema 9. *Existe uma constante $C_5 = C_5(C_1, C_2) > 0$ tal que*

$$|D^2 \tilde{f}_1^n(x)| \leq C_5,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e todo $n \geq 0$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} |D^2 \tilde{f}_1^n(x)| &= \left| \frac{D^2 \tilde{f}_1^n(x)}{D \tilde{f}_1^n(x)} \right| \cdot |D \tilde{f}_1^n(x)| = \left| \frac{\sum_{j=1}^n D^2 \tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x)) \cdot D \tilde{f}_1^{j-1}(x)}{\sum_{j=1}^n D \tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x))} \right| \cdot |D \tilde{f}_1^n(x)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\sum_{j=1}^n D^2 \tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x))}{\sum_{j=1}^n D \tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x))} \right| \cdot \sum_{j=1}^n |D \tilde{f}_1^{j-1}(x)| \cdot e^{C_4} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\sum_{j=1}^n D^2 \tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x))}{\sum_{j=1}^n D \tilde{f}_j(\tilde{f}_1^{j-1}(x))} \right| \cdot e^{C_4} \cdot e^{C_4} \\ &\leq C_1 \cdot \sum_{j=1}^n \delta_j \cdot e^{2C_4} \\ &\leq C_1 \cdot C_2 \cdot e^{2C_4} = C_5. \end{aligned}$$

■

Lema 10. *Existem constantes $C_6 = C_6(C_1, C_2) > 0$, $C_7 = C_7(C_1, C_2) > 0$ e $C_8 = C_8(C_1, C_2) > 0$ tais que*

$$e^{-C_6} \leq |DM_1^n(x)| \leq e^{C_6}, \quad |D^2 M_1^n(x)| \leq C_7, \quad |D^3 M_1^n(x)| \leq C_8,$$

para todo $x \in [0, 1]$ e todo $n \geq 0$.

Demonstração: $\mathcal{M}$ é um grupo de Lie comutativo e portanto temos $M_1^n = M_N$ onde

$N = \sum_{i=1}^n N_{\tilde{f}_i}$. Por (3.9) temos que $|N_{\tilde{f}_i}| \leq C_1 \delta_i$ e portanto $|N| \leq C_1 \cdot C_2$.

Vamos derivar a expressão de $M_N(x)$ dada por (3.2). Obtemos

$$\begin{aligned} M_N(x) &= \frac{x e^{\frac{-N}{2}}}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)} \Rightarrow DM_N(x) = \frac{e^{\frac{-N}{2}}}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^2} \\ &\Rightarrow D^2 M_N(x) = \frac{-2e^{\frac{-N}{2}}(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^3} \\ &\Rightarrow D^3 M_N(x) = \frac{6e^{\frac{-N}{2}}(e^{\frac{-N}{2}}-1)^2}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^4} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |N| \leq C_1 \cdot C_2 &\Rightarrow \frac{-C_1 C_2}{2} \leq \frac{N}{2} \leq \frac{C_1 C_2}{2} \\ &\Rightarrow \frac{C_1 C_2}{2} \geq \frac{-N}{2} \geq \frac{-C_1 C_2}{2} \\ &\Rightarrow e^{\frac{-C_1 C_2}{2}} \leq e^{\frac{-N}{2}} \leq e^{\frac{C_1 C_2}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando $h(x) = 1 + x(e^{\frac{-N}{2}} - 1)$ com $x \in [0, 1]$ e sabendo que $N > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 < e^{\frac{-N}{2}} \leq h(x) \leq 1 &\Rightarrow e^{\frac{-N}{2}} \geq \frac{1}{h(x)} \geq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{(h(x))^2} \leq e^N \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Assim

$$\begin{aligned} e^{\frac{-C_1 C_2}{2}} \leq e^{\frac{-N}{2}} \leq e^{\frac{C_1 C_2}{2}} \text{ e } 1 \leq \frac{1}{(h(x))^2} \leq e^N &\Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{-C_1 C_2}{2}} \leq \frac{e^{\frac{-N}{2}}}{(h(x))^2} \leq e^{\frac{C_1 C_2}{2}} + N = e^{\frac{3C_1 C_2}{2}} &\Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\frac{-3C_1 C_2}{2}} \leq e^{\frac{-C_1 C_2}{2}} \leq DM_N(x) \leq e^{\frac{3C_1 C_2}{2}} \end{aligned}$$

Portanto

$$e^{-C_6} = e^{\frac{-3C_1 C_2}{2}} \leq DM_N(x) \leq e^{\frac{3C_1 C_2}{2}} = e^{C_6}.$$

Agora vamos trabalhar com a expressão de $D^2M_N(x)$. Temos

$$\begin{aligned} D^2M_N(x) &= \frac{-2e^{\frac{-N}{2}}(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^3} \\ &= \frac{e^{\frac{-N}{2}}}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^2} \cdot \frac{-2(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)} \\ &= DM_N(x) \cdot \frac{-2(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)}. \end{aligned}$$

Como

$$e^{\frac{-N}{2}} \leq e^{\frac{C_1C_2}{2}} \Rightarrow |-2(e^{\frac{-N}{2}}-1)| \leq 2(e^{\frac{C_1C_2}{2}}-1)$$

e

$$\frac{1}{h(x)} \leq e^{\frac{-N}{2}} \Rightarrow \frac{1}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)} \leq e^{\frac{-N}{2}} \leq e^{\frac{C_1C_2}{2}}, \quad (3.22)$$

segue que

$$\begin{aligned} D^2M_N(x) &= DM_N(x) \cdot \frac{-2(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)} \\ &\leq e^{C_6} \cdot 2(e^{\frac{C_1C_2}{2}}-1) \cdot e^{\frac{C_1C_2}{2}} \\ &= 2e^{\frac{5C_1C_2}{2}} - 2e^{2C_1C_2} = C_7. \end{aligned}$$

Por fim iremos trabalhar com a expressão de $D^3M_N(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} D^3M_N(x) &= \frac{6e^{\frac{-N}{2}}(e^{\frac{-N}{2}}-1)^2}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^4} \\ &= \frac{-2e^{\frac{-N}{2}}(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{[1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)]^3} \cdot \frac{3(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)} \\ &= D^2M_N(x) \cdot \frac{3(e^{\frac{-N}{2}}-1)}{1+x(e^{\frac{-N}{2}}-1)}. \end{aligned}$$

Temos válida a expressão em 3.22 e além disso

$$e^{\frac{-N}{2}} \leq e^{\frac{C_1C_2}{2}} \Rightarrow |3(e^{\frac{-N}{2}}-1)| \leq 3(e^{\frac{C_1C_2}{2}}-1).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
D^3 M_N(x) &= D^2 M_N(x) \cdot \frac{3(e^{\frac{-N}{2}} - 1)}{1 + x(e^{\frac{-N}{2}} - 1)} \\
&\leq C_7 \cdot 3(e^{\frac{-N}{2}} - 1) \cdot e^{\frac{C_1 C_2}{2}} \\
&= (2e^{\frac{5C_1 C_2}{2}} - 2e^{2C_1 C_2}) \cdot (3e^{\frac{3C_1 C_2}{2}} - 3e^{\frac{C_1 C_2}{2}}) \\
&= 6(e^{4C_1 C_2} - e^{3C_1 C_2} - e^{\frac{7C_1 C_2}{2}} + e^{\frac{5C_1 C_2}{2}}) = C_8.
\end{aligned}$$

■

Demonstração da Proposição 10: Vamos reescrever a diferença $\tilde{f}_1^n - M_1^n$ da seguinte forma

$$\tilde{f}_1^n - M_1^n = \sum_{i=1}^n M_{i+1} \circ \tilde{f}_1^i - M_i^n \circ \tilde{f}_1^{i-1},$$

onde $M_{n+1}^n = f_1^0 = Id$.

Desse modo obtemos

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}_1^n(x) - M_1^n(x)| &\leq \sum_{i=1}^n |M_{i+1}(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^i)(x) - M_i^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1})(x)| \\
&\leq e^{C_6} \cdot \sum_{i=1}^n |\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^i(x) - M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)| \\
&\leq e^{C_6} \cdot C \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^{1+\nu} \\
&\leq e^{C_6} \cdot C \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i)^\nu \sum_{i=1}^n \delta_i \\
&\leq e^{C_6} \cdot C \cdot C_2 \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i)^\nu,
\end{aligned}$$

onde $C > 0$ é a constante apresentada na Proposição 9.

Para a diferença entre as derivadas temos a estimativa

$$\begin{aligned}
|D\tilde{f}_1^n(x) - DM_1^n(x)| &= \left| \sum_{i=1}^n [DM_{i+1}(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i+1}(x)) \cdot D\tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) - \right. \\
&\quad \left. - DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))] D\tilde{f}_1^{i-1}(x) \right| \\
&\leq e^{C_4} \cdot \sum_{i=1}^n |DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot D\tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) - \\
&\quad - DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))|.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))$ na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
|D\tilde{f}_1^n(x) - DM_1^n(x)| &\leq e^{C_4} \cdot e^{C_6} \cdot \sum_{i=1}^n |D\tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) - DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))| + \\
&\quad + e^{C_4} \cdot e^{C_6} \cdot \sum_{i=1}^n |DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) - DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x))| \\
&\leq e^{C_4} \cdot e^{C_6} \cdot C \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^{1+\nu} + e^{C_4} \cdot e^{C_6} \cdot C_7 \cdot C \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i^{1+\nu} \\
&\leq e^{C_4} \cdot e^{C_6} \cdot (1 + C_7) \cdot C \cdot C_2 \cdot \left(\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \right)^\nu.
\end{aligned}$$

Vamos dividir a diferença $D^2\tilde{f}_1^n(x) - D^2M_1^n(x)$ em três parcelas para facilitar a demonstração. Assim

$$D^2\tilde{f}_1^n(x) - D^2M_1^n(x) = (I) + (II) + (III),$$

onde

$$\begin{aligned}
(I) &= \sum_{i=1}^n D^2M_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}) \cdot (D\tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 \cdot (D\tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 - \\
&\quad - \sum_{i=1}^n D^2M_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot (DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)))^2 \cdot (D\tilde{f}_1^{i-1}(x))^2,
\end{aligned}$$

$$(II) = \sum_{i=1}^n DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}) \cdot D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x) \cdot (D \tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 - \\ - \sum_{i=1}^n DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot D^2 M_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot (D \tilde{f}_1^{i-1}(x))^2,$$

e

$$(III) = \sum_{i=1}^n DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}) \cdot D \tilde{f}_1^{i-1}(x) \cdot D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x) - \\ - \sum_{i=1}^n DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x).$$

Vamos trabalhar com cada uma das parcelas separadamente. Com relação a parcela (I) vamos somar e subtrair $\sum_{i=1}^n D^2 M_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot (DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)))^2 \cdot (D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x))^2$ e assim obtemos

$$(I) = \sum_{i=1}^n [(D \tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}))^2 - (DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)))^2] \cdot (a) - \\ - \sum_{i=1}^n [D^2 M_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) - D^2 M_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x))] \cdot (b) \\ \leq C \cdot (e^{C_4} + e^{C_6}) \cdot (a) - C_8 \cdot C \cdot (b)$$

onde

$$(a) = \sum_{i=1}^n D^2 M_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot (D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 \\ \leq C^7 \cdot e^{2C_4},$$

e

$$(b) = \sum_{i=1}^n (DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)))^2 \cdot (D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 \\ \leq e^{C_6} \cdot e^{2C_4}.$$

Portanto obtemos que

$$|(I)| \leq 2 \cdot \max\{C_9, C_{10}\} \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i)^\nu,$$

onde $C_9 = C_2 \cdot C_7 \cdot C \cdot e^{2C_4}(e^{C_4} + e^{C_6})$ e $C_{10} = C \cdot C_2 \cdot C_8 \cdot e^{2C_4} \cdot e^{C_6}$.

Agora com a parcela (II) iremos somar e subtrair o seguinte termo

$\sum_{i=1}^n DM_{i+1}(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot D^2 \tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot (D\tilde{f}_1^{i-1}(x))^2$ e assim obtemos

$$\begin{aligned}
 (II) &= \sum_{i=1}^n [DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) - DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x))] \cdot (c) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n [D^2 \tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) - D^2 M_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))] \cdot (d) \\
 &\leq C_7 \cdot \sum_{i=1}^n [\tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) - M_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))] \cdot (c) - \\
 &\quad C \cdot (d) \\
 &\leq C_7 \cdot C \cdot (c) - C \cdot (d)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 (c) &= \sum_{i=1}^n (D^2 \tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))) \cdot (D\tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 \\
 &\leq C_5 \cdot e^{2C_4}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (d) &= \sum_{i=1}^n (DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x))) \cdot (D\tilde{f}_1^{i-1}(x))^2 \\
 &\leq e^{C_6} \cdot e^{2C_4}.
 \end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$(II) \leq 2 \cdot \max\{C_{11}, C_{12}\} \cdot (\max_{1 \leq i \leq n} \delta + i)^\nu,$$

onde $C_{11} = C \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot C_7 \cdot e^{2C_4}$ e $C_{12} = C \cdot C_2 \cdot e^{2C_4+C_6}$.

Finalmente iremos trabalhar com a parcela (III). Somamos e subtraímos o seguinte

termo $\sum_{i=1}^n DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) \cdot D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x)$ e assim obtemos

$$\begin{aligned} (III) &= \sum_{i=1}^n [D\tilde{f}_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x)) - DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))] \cdot (h) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n [DM_{i+1}^n(M_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x)) - DM_{i+1}^n(\tilde{f} \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x))] \cdot (k) \\ &\leq C \cdot (h) - C_7 \cdot C \cdot (k) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} (h) &= \sum_{i=1}^n (DM_{i+1}^n(\tilde{f}_i \circ \tilde{f}_1^{i-1}(x))) \cdot (D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \\ &\leq e^{C_6} \cdot C_5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (k) &= \sum_{i=1}^n (DM_i(\tilde{f}_1^{i-1}(x))) \cdot (D^2 \tilde{f}_1^{i-1}(x)) \\ &\leq e^{C_6} \cdot C_5. \end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$|(III)| \leq 2 \cdot \max\{C_{13}, C_{14}\} \cdot \left(\max_{1 \leq i \leq n} \delta_i\right)^\nu,$$

onde $C_{13} = C \cdot C \cdot C_5 \cdot e^{C_6}$ e $C_{14} = C \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot C_7 \cdot e^{C_6}$.

Para obtermos o resultado basta tomar $C_3 = 6 \max\{C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$.

■

Capítulo 4

T.i.i.g. e Homeomorfismos do Círculo

Como podemos ver uma t.i.i.g. f como um homeomorfismo suave por partes do círculo torna-se muito importante o estudo da dinâmica das transformações de intercâmbio de intervalos.

Podemos classificar os homeomorfismos suave por partes do círculo pelo seu número de rotação que, de uma maneira simplista, mede a taxa média de rotação das órbitas de uma aplicação entorno do círculo. Se o número de rotação é racional então podemos garantir a existência de um ponto periódico e todas as outras órbitas irão convergir para a órbita periódica de tal ponto, tanto no passado como no futuro. Se o número de rotação for irracional então não existem pontos periódicos e portanto a suavidade da aplicação f irá definir dinâmica do sistema. Um resultado de Denjoy garante a existência de uma conjugação entre a aplicação f e a rotação rígida com ângulo $\rho(f)$ caso a aplicação f seja de classe C^2 . Outros autores como Herman, Yoccoz, Khanin e Sinai, Katznelson e Ornstein estudaram sobre a suavidade dessa conjugação e chegaram a demonstraram que caso a aplicação f seja de classe C^3 ou $C^{2+\nu}$ e $\rho(f)$ satisfaça a condição diofantina, então essa conjugação será no mínimo de classe C^1 .

Uma generalização natural dos difeomorfismos do círculo são os difeomorfismos com descontinuidade, isto é, difeomorfismos do círculo que possuem saltos na primeira derivada em um número finito de pontos. Em [8] temos que para difeomorfismos com apenas dois ramos o operador de renormalização converge para um espaço bidimensional das transformações lineares fracionárias. Uma generalização desse resultado foi provado em [1] onde os autores Cunha e Smiana consideraram difeomorfismos do círculo com um número finito de ramos. Esse é o principal resultado dessa dissertação, o qual enunciaremos e demonstraremos a seguir.

Pela definição do operador de renormalização sabemos que

$$[0, 1) = \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigvee_{i=0}^{q_n^\alpha - 1} f^i(I_\alpha^n),$$

onde $\bigvee$ representa uma união disjunta. Dessa forma, os elementos $f^i(I_\alpha^n)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ e para todo $0 \leq i \leq q_n^\alpha - 1$ formam uma partição do intervalo $[0, 1)$ que denotaremos por $\mathcal{P}^n$. A norma de $\mathcal{P}^n$ é definida por

$$|\mathcal{P}^n| = \max_{\alpha \in \mathcal{A}, 0 \leq i \leq q_n^\alpha - 1} \{|f^i(I_\alpha^n)|\}.$$

Em particular temos a desigualdade

$$\sum_{i=0}^{q_n^\alpha - 1} |f^i(I_\alpha^n)| \leq 1.$$

Vamos agora enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho provando que quando o nível da renormalização de Rauzy-Veech para um classe de funções $C^{2+\nu}$ aumenta, os ramos da função se aproximam de uma transformação de Möbius.

Teorema 1. *Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\nu}$. Então existem $C = C(f) > 0$ e $0 < \lambda = \lambda(k) < 1$ tais que*

$$d_{C^2}(Z_{I_\alpha^n}(R^n(f)), M_{N_\alpha^n}) \leq C\lambda^n$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Aqui temos

$$N_\alpha^n = \int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 R^n(f)(x)}{D R^n(f)(x)} dx.$$

Em particular

$$d_{C^2}(Z_{I_\alpha^n}(R^n(f)), \mathcal{M}) \leq C\lambda^n.$$

Demonstração do Teorema 1: Vamos utilizar a seguinte proposição cuja demonstração é dada mais adiante.

Proposição 11. *Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\nu}$. Então para um valor de n suficientemente grande existe $\lambda = \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ com $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$|\mathcal{P}^{n+k}| \leq \lambda |\mathcal{P}^n|.$$

Aplicando essa proposição temos

$$\sup_{0 \leq i \leq q_\alpha^n - 1} |f^i(I_\alpha^n)| \leq |\mathcal{P}^n| \leq \lambda^{n/k-1}.$$

Usando a definição de $R^n(f)$ e da aplicação zoom obtemos

$$\begin{aligned} Z_{I_\alpha^n}(R^n(f)) &= Z_{I_\alpha^n}(f^{q_\alpha^n}) \\ &= Z_{f^{q_\alpha^n-1}(I_\alpha^n)}(f) \circ \cdots \circ Z_{f(I_\alpha^n)}(f) \circ Z_{I_\alpha^n}(f). \end{aligned}$$

Em seguida aplicando a Proposição 10 às aplicações $Z_{I_\alpha^n}(R^n(f))$ e M_1^n obtemos

$$|Z_{I_\alpha^n}(R^n(f)) - M_1^n|_{C^2} \leq C_3 \cdot \lambda^{\mu(n/k-1)}.$$

Além disso temos que $M_a \circ M_b = M_{a+b}$ e portanto

$$M_1^n = M_N$$

onde

$$N = \sum_{i=0}^{q_\alpha^n-1} N_{Z_{f^i(I_\alpha^n)}}(f) = \sum_{i=0}^{q_\alpha^n-1} \int_{f^i(I_\alpha^n)} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx = \int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 R^n(f)(x)}{DR^n(f)(x)} dx$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

■

Para demonstrar a Proposição 11 iremos precisar de alguns resultados anteriores.

Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\nu}$ uma t.i.i.g. com d intervalos com apenas uma descontinuidade. Dessa forma podemos identificar os extremos do intervalo do domínio I e assim obtermos um homeomorfismo suave por partes do círculo com rotação irracional. Podemos aplicar o teorema de Denjoy para essa função e assim concluir que não existem intervalos errantes. Essa é a diferença principal entre t.i.i.g. de genus um e as com genus maior (até mesmo t.i.i.g. afim por partes com genus maior que um possui intervalo errante). Vamos assumir que f possui apenas uma descontinuidade. Podemos ver f como uma t.i.i.g. com $f \in \mathcal{B}_k^{0+1}$ com dois intervalos. Se $I_\alpha = (c_\alpha, d_\alpha)$, onde d_α é o único ponto de descontinuidade de f , basta definirmos

$$\begin{aligned} J_A &:= \overline{\bigcup_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} I_\beta}, \\ J_B &:= \overline{\bigcup_{\pi_0(\beta) > \pi_0(\alpha)} I_\beta}, \end{aligned}$$

e assim $(f, \{A, B\}, \{J_A, J_B\})$ é uma t.i.i.g. com dois intervalos apenas. Vamos denotar as renormalizações da t.i.i.g. com d intervalos por

$$R_d(f), \quad R_d^2(f), \quad R_d^3(f), \quad \dots$$

e as renormalizações da t.i.i.g. com dois intervalos por

$$R_2(f), \quad R_2^2(f), \quad R_2^3(f), \quad \dots$$

Dessa forma R_d^i será a i -ésima renormalização com d intervalos e R_2^i será a i -ésima renormalização com 2 intervalos.

Se enxergarmos f como um homeomorfismo do círculo podemos considerar a renormalização usual do círculo. A sequência de renormalizações denotada por $R_{rot}^i(f)$ acaba sendo uma aceleração do processo de renormalização de Rauzy-Veech consistindo em uma subsequência $R_2^{n_i}(f)$ definida da seguinte forma: $n_0 = 0$ e n_{i+1} é o primeiro $n > n_i$ cujo tipo é distinto da n_i -ésima iterada da renormalização com 2 intervalos. A relação entre as sequências de renormalizações com 2 e d intervalos é dada pela proposição a seguir.

Proposição 12. *Seja $f \in \mathcal{B}_k$ uma t.i.i.g. com genus um e d intervalos e com apenas uma descontinuidade, onde $\pi_0(\alpha_0) = 1$ e $\pi_1(\alpha_1) = 1$. Assim, um desses dois casos deve acontecer*

(A) *Se tivermos*

$$\overline{\bigcup_{\pi_1(\beta) \geq \pi_1(\alpha_0)} f(I_\beta)} \subset \overline{\bigcup_{\pi_0(\beta) \geq \pi_0(\alpha_1)} I_\beta},$$

então f é 2-renormalizável de tipo 0 e $R_2(f) = R_d^n(f)$ onde n é a primeira d -renormalização cuja letra α_ ganha de α_0 . Aqui α_* é tal que $f(c_{\alpha_0}) \in I_{\alpha_*}$;*

(B) *Se tivermos*

$$\overline{\bigcup_{\pi_0(\beta) \geq \pi_0(\alpha_1)} I_\beta} \subset \overline{\bigcup_{\pi_1(\beta) \geq \pi_1(\alpha_0)} f(I_\beta)},$$

então f é 2-renormalizável de tipo 1 e $R_2(f) = R_d^n(f)$ onde n é a primeira d -renormalização cuja letra α_1 ganha de α_ . Aqui α_* é tal que $c_{\alpha_*} \in f(I_{\alpha_1})$.*

Demonstração: Vamos provar o caso descrito no item (A) e a prova para o caso (B) é similar. A letra α_* vence da letra α_0 pela primeira vez obrigatoriamente com tipo 0. Usando a notação de monodromia invariante para o algoritmo de renormalização de Rauzy-Veech nesse caso obtemos

$$(p(1), p(2), \dots, p(s), \dots, p(d)) \xrightarrow{0} (p(2), \dots, p(1), p(s), \dots, p(d)), \quad (4.1)$$

onde s é tal que $p(s) = 1$, e

$$(p(1), \dots, p(r), \dots, p(d)) \xrightarrow{1} (p(1), \dots, p(r), p(d), \dots), \quad (4.2)$$

onde r é tal que $p(r) = d$.

Como por hipótese temos que f tem apenas uma descontinuidade segue que

$p = (k, \dots, d, 1, \dots, k-1)$, onde $\pi_1(\alpha_1) = k$.

Note que ao iterarmos o algoritmo N vezes, com $N = s + r \leq n-1$, onde n é tal que a letra α_* ganha de α_0 pela primeira vez, temos que

$$p^N = (k+s, \dots, d, k-r, \dots, k+s-1, 1, \dots, k-r-1), \quad (4.3)$$

com $0 \leq s \leq d-k$ e $0 \leq r \leq k-1$ são tais que

$$s = \sharp\{\epsilon_m = 0 : 0 \leq m \leq N\} \text{ e } r = \sharp\{\epsilon_m = 1 : 0 \leq m \leq N\}.$$

Para $N = 1$ a afirmação é verdadeira pois ou $s = 0$ e $r = 1$ ou $s = 1$ e $r = 0$. Assumindo que (4.3) é válida para $N-1$ e aplicando as fórmulas expressas em (4.1) e (4.2) garantimos que a fórmula em (4.3) também é válida para N .

Agora, como sabemos que $\epsilon_n = 0$ e que $p^{n-1}(1) = d$, pois estamos trabalhando o caso (A) e portanto $\pi_1^{n-1}(\alpha_0) = d$ e $\pi_0^{n-1}(\alpha_0) = 1$, obtemos

$$p^{n-1}(1) = \pi_1^{n-1} \circ (\pi_0^{n-1})^{-1}(1) = \pi_1^{n-1}(\alpha_0) = d.$$

Então

$$p = p^0 = (k, \dots, d, 1, \dots, k-1) \xrightarrow{\epsilon_0} \dots \xrightarrow{\epsilon_{n-1}^{-1}} p^{n-1} = (d, j, \dots, d-1, 1, \dots, j-1),$$

e portanto $p^n = (j, \dots, d-1, d, 1, \dots, j-1)$ o que completa a prova. ■

O seguinte corolário segue diretamente da Proposição 12 demonstrada acima.

Corolário 6. *Seja f uma t.i.i.g. com genus um e d intervalos em $\mathcal{B}_k$ e com apenas uma descontinuidade. Então existe uma sequência $m_i < m_{i+1}$ tal que $m_{i+1} - m_i < d$ e*

$$R_2^i(f) = R_d^{m_i}(f).$$

Demonstração: O resultado segue diretamente da Proposição 12. ■

Proposição 13. *Seja f uma t.i.i.g. tal que $\gamma(f)$ é k -limitada, onde $\gamma(f) = (\pi^n, \epsilon^n)_{n \in \mathbb{N}}$ com π^n a permutação no nível n e $\epsilon^n \in \{0, 1\}$ o tipo da renormalização no nível n . Então para todo $i \geq 0$*

$$R_{rot}^i(f) = R_2^{k_i}(f) = R^{n_{k_i}}(f).$$

Demonstração: A primeira igualdade segue diretamente da definição de R_{rot} e R_2 . Já a segunda igualdade é consequência da Proposição 12. ■

Obs: Se $f \in \mathcal{B}_k$ temos que existe uma constante $\tilde{C} = \tilde{C}(k)$ tal que a aplicação $i \mapsto k_i$ dada pela Proposição 13 é uniformemente limitada por $\tilde{C}$, ou seja, $|k_{i+1} - k_i| \leq \tilde{C}$ para todo $i \geq 0$.

Um resultado clássico para homeomorfismos do círculo de classe P (homeomorfismos do círculo que são absolutamente contínuos e com variação limitada derivável) é o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

Lema 11. *Seja f uma t.i.i.g. com genus um. Seja n_0 o primeiro valor de n tal que $R_d^{n_0} f$ possui apenas uma descontinuidade e defina n_i tal que $R_d^{n_i} f = R_{rot}^i(R_d^{n_0} f)$. Então para todo $i \geq 0$ e todo $\alpha \in \mathcal{A}$, temos que*

$$e^{-V} \leq DR_d^{n_i} f(x) \leq e^V,$$

para todo $x \in I_\alpha^{n_i}$, onde $V = \text{Var}(\log Df)$.

Lema 12. *Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\mu}$. Existe uma constante $C_{16} > 0$ tal que*

$$e^{-C_{16}V} \leq DR_d^n f(x) \leq e^{C_{16}V},$$

para todo $x \in I_\alpha^n$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pelo Lema 11 temos que

$$\exp(-V) \leq DR^{n_{k_i}}(x) \leq \exp(V)$$

para todo $x \in I_\alpha^{n_{k_i}}$.

Considere $i \geq 0$ de modo que $n_{k_i} \leq n < n_{k_{i+1}}$. Pela observação da Proposição 13 e pelo Corolário 6 obtemos

$$\begin{aligned} |n_{k_{i+1}} - n_{k_i}| &\leq |n_{k_{i+1}} - n_{k_{i+1}-1}| + |n_{k_{i+1}-1} - n_{k_{i+1}-2}| + \dots + |n_{k_{i+1}} - n_{k_i}| \\ &< \underbrace{d + d + \dots + d}_{\tilde{C}\text{-vezes no máximo}} \\ &\leq d \cdot \tilde{C}. \end{aligned}$$

Então $DR^n(f) = DR^{n_{k_i} + a_n}$, onde $a_n \leq d \cdot \tilde{C}$. Tomando

$$\tilde{C}_1 = \sup_{1 \leq i \leq d \cdot \tilde{C}} \{DR^i(f)(x), x \in [0, 1]\}$$

e

$$\tilde{C}_2 = \inf_{1 \leq i \leq d \cdot \tilde{C}} \{DR^i(f)(x), x \in [0, 1]\}$$

teremos

$$\tilde{C}_2 \cdot \exp(-V) \leq DR^n(f) = DR^{a_n} \cdot DR^{n_{k_i}}(f) \leq \tilde{C}_1 \cdot \exp(V).$$

■

Lema 13. (*Domínio não-colapsados*) Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\mu}$. Existe uma constante $C_{17} > 1$ tal que

$$\frac{1}{C_{17}} \leq \frac{|I_\alpha^n|}{|I_\beta^n|} \leq C_{17},$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e todo $n \geq 0$.

Demonstração: Primeiramente note que

$$|I_\alpha^n| \geq |I_\alpha^{n+1}|$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Isso porque

- Se α não perde nem ganha na n -ésima renormalização, então $|I_\alpha^n| = |I_\alpha^{n+1}|$;
- Se α ganha na n -ésima renormalização então $|I_\alpha^n| > |I_\alpha^{n+1}|$;
- Se α perde na n -ésima renormalização com tipo 1, então $|I_\alpha^n| = |I_\alpha^{n+1}|$;
- Se α perde na n -ésima renormalização com tipo 0, então $|R^n f(I_\alpha^n)| = |R^n f(I_\alpha^{n+1})|$, e pelo Lema 12 temos $|I_\alpha^n| \geq \exp(-2C_{16}V)|I_\alpha^{n+1}|$.

Vamos supor que o enunciado deste lema é falso e portanto existe $\alpha \in \mathcal{A}$ cujo comprimento de I_α^n é suficientemente pequeno, ou seja,

$$|I_\alpha^n| \leq \delta < \frac{|I_\alpha^{n+k}|}{2d \cdot \exp((k+2)C_{16}V)}.$$

Por hipótese temos que $f \in \mathcal{B}_k$ e assim para todo $\beta \in \mathcal{A}$ existem sequências $n \leq n_0 < n_1 < \dots < n_{j+1} \leq n+k$ e $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{j+1} = \beta \in \mathcal{A}$ tais que α_i é o

ganhador e α_{i+1} é o perdedor da n_i -ésima renormalização. Assim, pelo Lema 12 segue que

$$\text{se } \epsilon_{n_0} = 0 \Rightarrow |I_{\alpha}^{n_0}| > |R^{n_0} f(I_{\alpha_1}^{n_0})| \geq \exp(-C_{16}V) |I_{\alpha_1}^{n_0}|;$$

$$\text{se } \epsilon_{n_0} = 1 \Rightarrow |I_{\alpha_1}^{n_0}| < |R^{n_0} f(I_{\alpha}^{n_0})| \leq \exp(C_{16}V) |I_{\alpha}^{n_0}|.$$

Nos dois casos temos $|I_{\alpha}^{n_0}| \geq \exp(-C_{16}V) |I_{\alpha_1}^{n_0}|$ e assim

$$|I_{\alpha}^n| \geq |I_{\alpha}^{n_0}| \geq \exp(-C_{16}V) |I_{\alpha_1}^{n_0}| \geq \exp(-C_{16}V) |I_{\alpha_1}^{n_1}|.$$

Repetindo esse mesmo argumento $j+1$ vezes obtemos

$$|I_{\alpha}^n| \geq \exp(-(j+1)C_{16}V) |I_{\alpha_{j+1}}^{n_{j+1}}| \geq \exp(-(k+2)C_{16}V) |I_{\beta}^{n+k}|.$$

Tal desigualdade vale para todo $\beta \in \mathcal{A}$ e portanto temos

$$\sum_{\beta \in \mathcal{A}} |I_{\beta}^{n+k}| \leq d \cdot \exp((k+2)C_{16}V) |I_{\alpha}^n| < \frac{|I_{\alpha}^{n+k}|}{2} < |I_{\alpha}^{n+k}|,$$

que é absurdo pois

$$\sum_{\beta \in \mathcal{A}} |I_{\beta}^{n+1}| = |I_{\alpha}^{n+k}|.$$

■

Lema 14. (*Imagens não-colapsadas*) Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\mu}$. Então existe uma constante $C_{18} > 1$ tal que

$$\frac{1}{C_{18}} \leq \frac{|R^n(f)(I_{\alpha}^n)|}{|R^n(f)(I_{\beta}^n)|} \leq C_{18},$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e todo $n \geq 0$.

Demonstração: Pelo Lema 12 temos

$$|R^n f(I_{\alpha}^n)| \leq \exp(C_{16}V) |I_{\alpha}^n| \text{ e}$$

$$\frac{1}{|R^n f(I_{\beta}^n)|} \leq \frac{1}{\exp(-C_{16}V) |I_{\beta}^n|}.$$

Agora pelo Lema 13 temos

$$\frac{|R^n f(I_{\alpha}^n)|}{|R^n f(I_{\beta}^n)|} \leq \exp(2C_{16}V) \frac{|I_{\alpha}^n|}{|I_{\beta}^n|} \leq \exp(2C_{16}V) \cdot C_{17}.$$

Do Lema 12 obtemos

$$|R^n f(I_\alpha^n)| \geq \exp(-C_{16}V)|I_\alpha^n| \text{ e}$$

$$\frac{1}{|R^n f(I_\beta^n)|} \geq \frac{1}{\exp(C_{16}V)|I_\beta^n|}.$$

Usando o Lema 13 novamente obtemos

$$\frac{|R^n f(I_\alpha^n)|}{|R^n f(I_\beta^n)|} \geq \exp(-2C_{16}V) \frac{|I_\alpha^n|}{|I_\beta^n|} \geq \frac{1}{\exp(2C_{16}V) \cdot C_{17}}.$$

Tomando $C_{18} = \exp(2C_{16}V) \cdot C_{17}$ concluimos o resultado. ■

Proposição 14. *Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\mu}$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ o ganhador e o perdedor de $R^n(f)$, respectivamente. Então existem $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, tais que*

$$\lambda_1 < \frac{|(R^n f)^{1-\epsilon}(I_\beta^n)|}{|(R^n f)^\epsilon(I_\alpha^n)|} < \lambda_2, \quad (4.4)$$

onde $\epsilon \in \{0, 1\}$ é o tipo de $R^n(f)$.

Demonstração: Considerando que o quociente em (4.4) é muito próximo de zero teríamos $|(R^n f)^{1-\epsilon}(I_\beta^n)|$ muito pequeno com relação a $|I_\beta^n|$. Assim

$$|(R^n f)^{1-\epsilon}(I_\beta^n)| = \begin{cases} |R^n(f)(I_\beta^n)|, & \text{se } \epsilon = 0 \\ |I_\beta^n|, & \text{se } \epsilon = 1. \end{cases}$$

O que não é possível em nenhum dos dois casos devido aos Lemas 13 e 14.

Considerando agora que o quociente em (4.4) seja muito próximo de 1 teríamos

$$|(R^{n+1}f)^\epsilon(I_\alpha^{n+1})| = |(R^n f)^\epsilon(I_\alpha^n)| - |(R^n f)^{1-\epsilon}(I_\beta^n)|$$

muito pequeno se comparado com $|I_\alpha^{n+1}|$. Daí

$$|(R^{n+1}f)^\epsilon(I_\alpha^{n+1})| = \begin{cases} |I_\alpha^n| - |R^n(f)(I_\beta^n)|, & \text{se } \epsilon = 0 \\ |R^n(f)(I_\alpha^n)| - |I_\beta^n|, & \text{se } \epsilon = 1. \end{cases}$$

O que também não é possível em nenhum dos dois casos devido aos Lemas 13 e 14.

Isso prova a existência de λ_1 e λ_2 . ■

Agora sim somos capazes de provar a Proposição 11

Demonstração da Proposição 11: Seja $f^{i_{n+k}}(I_{\alpha}^{n+k}) \in \mathcal{P}^{n+k}$. Existem $\alpha_j \in \mathcal{A}$ e $0 \leq i_j \leq q_j^{\alpha_j} - 1$ para $n \leq j \leq n+k$ tais que

$$f^{i_n}(I_{\alpha_n}^n) \supset \dots \supset f^{i_j}(I_{\alpha_j}^j) \supset f^{i_{j+1}}(I_{\alpha_{j+1}}^{j+1}) \supset \dots \supset f^{i_{n+k}}(I_{\alpha_{n+k}}^{n+k}).$$

Afirmamos que existe j_0 tal que α_{j_0} é ganhador no nível j_0 . De fato, se $\alpha = \alpha_0 = \dots = \alpha_{n+k}$, seja α_0 um nível entre n e $n+k$ tal que α vence. A existência desse nível é garantida pelo fato de $f \in \mathcal{B}_k$.

Caso contrário existe j_0 tal que $\alpha_{j_0+1} \neq \alpha_{j_0}$. A única possibilidade é que α_{j_0} ganha e α_{j_0+1} perde no nível j_0 . Supondo que o nível j_0 seja do tipo 0. O outro caso é análogo. Assim

$$|I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}| > |R^{j_0} f(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})| = |f^{q_{j_0}^{\alpha_{j_0+1}}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})|.$$

A Proposição 14 estabelece uma comparação entre o intervalo e o que perde em determinado nível, e portanto temos

$$\lambda_1 < \frac{|R^{j_0} f(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})|}{|I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}|} < \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 < \frac{|f^{q_{j_0}^{\alpha_{j_0+1}}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})|}{|I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}|} < \lambda_2.$$

Podemos estabelecer uma comparação entre $I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}$ e $I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1}$, pois

$$\begin{aligned} |I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1}| + |f^{q_{j_0}^{\alpha_{j_0+1}}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})| &= |I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}| \\ \frac{|I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1}|}{|I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}|} + \frac{|f^{q_{j_0}^{\alpha_{j_0+1}}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})|}{|I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}|} &= 1. \end{aligned}$$

Como a segunda parcela da soma do lado esquerdo da igualdade é comparável pela Proposição 14 segue que a primeira parcela também é comparável. Diremos aqui que $|I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1}| \approx |I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}|$ significando que os valores são comparáveis.

Pelo Lema 12 um intervalo e sua imagem são comparáveis e assim

$$\begin{aligned} |I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1}| \approx |I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}| &\Rightarrow |f^{i_{j_0+1}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1})| \approx |f^{q_{j_0}^{\alpha_{j_0+1}}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0})| \\ &\Rightarrow |I_{\alpha_{j_0}}^{j_0}| \approx |f^{i_{j_0}}(I_{\alpha_{j_0}}^{j_0})|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{|f^{i_{n+k}}(I_{\alpha_{n+k}}^{n+k})|}{|f^{i_n}(I_{\alpha_n}^n)|} \leq \frac{|f^{i_{j_0+1}}(I_{\alpha_{j_0+1}}^{j_0+1})|}{|f^{i_{j_0}}(I_{\alpha_{j_0}}^{j_0})|} \leq \lambda < 1$$

para λ dependendo apenas de $V = \text{Var}(\log Df)$, λ_1 e λ_2 .

■

4.1 Outros Resultados

Para esse fim introduziremos uma certa representação simbólica para a dinâmica, que é na verdade uma generalização para a representação simbólica proposta por Sinai e Khanin em [16]. Considere o seguinte alfabeto

$$[\mathcal{L}] = \{(\alpha, \epsilon, n), \text{ tais que } \alpha \in \mathcal{A}, \epsilon \in \{0, 1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Defina $\pi_3(\alpha, \epsilon, n) = n$ e $\pi_2(\alpha, \epsilon, n) = \epsilon$. Usaremos a notação a_i para $a_i \in \mathcal{L}$ tal que $\pi_n(a_i) = i$.

Nessa seção vamos construir uma representação simbólica para a dinâmica da t.i.i.g. $f \in \mathcal{B}_k$. Para cada n considere a partição de $[0, 1]$ dada por

$$\tilde{\mathcal{P}}^n = \{f^i(I_\alpha^n) \text{ tal que } \alpha \in \mathcal{A} \text{ e } 1 \leq i \leq q_n^\alpha\}.$$

Seja

$$\Delta = [0, 1] \setminus \bigcup_n J \in \tilde{\mathcal{P}}^n \partial J.$$

Definimos a função

$$s : \Delta \rightarrow \mathcal{L}^\mathbb{N}$$

da seguinte maneira. Temos $s(x) = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in \mathcal{L}$. Se $i = 0$ então $x \in f(I_\beta^0)$ para algum β e definimos $a_0 = (\beta, 0, 0)$. Se $i > 0$, seja

$$k_{i-1}(x) := \min\{k \geq 0 \text{ tal que } f^k(x) \in I^{i-1}\}.$$

Então ou $f^{k_{i-1}} \in I^i$, então $f^{k_{i-1}}(x) \in f_i(I_\beta^i)$ para algum β e definimos $a_i = (\beta, 0, i)$; ou $f^{k_{i-1}}(x) \in I^{i-1} \setminus I^i$, então $f_{i-1}(f^{k_{i-1}}(x)) \in f_i(I_\beta^i)$ para algum β e definimos $a_i = (\beta, 1, i)$.

Note que em cada caso $f^{k_i(x)}(x) \in I_\beta^i$ e $\pi_2(a_i) = 0$ se e somente se $k_i(x) = k_{i-1}(x)$.

Denotaremos por $s_i(x)$ a i -ésima entrada de $s(x)$ onde $i \in \mathbb{N}$.

4.1.1 Cilindros e Palavras Admissíveis

Dado um subconjunto finito $S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$, com $\#S = k$ e uma sequência finita $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k} \in \mathcal{L}$, com $\pi_3(a_{n_i}) = n_i$ podemos considerar a palavra

$$\omega = a_{n_k} a_{n_{k-1}} \dots a_{n_1}.$$

Para cada palavra podemos definir o cilindro

$$[\omega] = [a_{n_k} a_{n_{k-1}} \dots a_{n_1}] = \overline{\{x \in \Delta \text{ tal que } s_{n_i}(x) = s_{n_i}, 1 \leq i \leq k\}}.$$

Se o cilindro é não vazio diremos que a palavra ω é admissível. De fato podemos dar uma definição de palavras admissíveis só em termos combinatórios da t.i.i.g. f . Afirmamos que o conjunto cujos elementos são os fechos dos intervalos em $\tilde{\mathcal{P}}^n$ é exatamente o conjunto dos cilindros admissíveis da forma $[a_n a_{n-1} \dots a_0]$. De fato quando temos $n = 0$ segue que $\tilde{\mathcal{P}}^0 = \{f(I_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Então

$$\overline{f(I_\alpha)} = [(\alpha, 0, 0)].$$

Suponha por indução que temos verificado que o conjunto de todos os elementos $\overline{f^i(I_\alpha^n)}$, $1 \leq i \leq q_n^\alpha$, é o conjunto dos cilindros admissíveis da forma $[a_n a_{n-1} \dots a_0]$. Lembrando que $\alpha^n(\epsilon)$ e $\alpha^n(1 - \epsilon)$ são o ganhador e o perdedor, respectivamente, se f_n tem tipo ϵ . Existem três possibilidades:

a) Se $\alpha \neq \alpha^n(1 - \epsilon)$ então $I_\alpha^{n+1} \subset I_\alpha^n$ e $q_{n+1}^\alpha = q_n^\alpha$. Portanto

$$\overline{f^i(I_\alpha^{n+1})} = [a_{n+1} a_n \dots a_0]$$

para todo $1 \leq i \leq q_{n+1}^\alpha = q_n^\alpha$, onde $\alpha_{n+1} = (\alpha, 0, n+1)$ e $\overline{f^i(I_\alpha^n)} = [a_n \dots a_0]$;

b) Se $\alpha = \alpha^n(1 - \epsilon)$ e $1 \leq i \leq q_n^{\alpha^n(\epsilon)}$ temos

$$\overline{f^{i+(1-\epsilon)q_n^{\alpha^n(1-\epsilon)}}(I_{\alpha^n(1-\epsilon)}^{n+1})} = [a_{n+1} a_n \dots a_0]$$

onde $a_{n+1} = (\alpha^n(1 - \epsilon), \epsilon, n+1)$ e $\overline{f^i(I_{\alpha^n(\epsilon)}^n)} = [a_n \dots a_0]$;

c) Se $\alpha \neq \alpha^n(1 - \epsilon)$ e $1 \leq j \leq q_n^{\alpha^n(1-\epsilon)}$ temos

$$\overline{f^{j+\epsilon q_n^{\alpha^n(\epsilon)}}(I_{\alpha^n(1-\epsilon)}^{n+1})} = [a_{n+1} a_n \dots a_0],$$

onde $a_{n+1} = (\alpha^n(1 - \epsilon, 1 - \epsilon, n+1))$ e $\overline{f^j(I_{\alpha^n(1-\epsilon)}^n)} = [a_n \dots a_0]$.

Como consequência, para qualquer palavra admissível da forma $a_n \dots a_0$, com $a_n = (\alpha, \chi, n)$ temos que os primeiros tempos de entradas $k_1, k_2, \dots, k_n$ são funções constantes em $[a_n \dots a_0]$ e $f^{k_n}[a_n \dots a_0] = f_n(I_\alpha^n)$.

Denotaremos por $l(a_n \dots a_0)$ a medida de Lebesgue do cilindro $[a_n \dots a_0]$. A prova do Teorema 2 será baseada nas propriedades ergóticas da sequência de variáveis aleatórias $a_n = (\alpha_n, \chi_n, n)$, $\alpha_n \in \mathcal{A}$ e $\chi_n \in [0, 1]$ em relação à medida de Lebesgue.

Se a palavra $a_{n-1} \dots a_0$ é admissível podemos considerar as probabilidades condicionais

$$l(a_n[a_{n-1} \dots a_0]) = \frac{l(a_n \dots a_0)}{l(a_{n-1} \dots a_0)}.$$

Denotando por $l(\alpha, \Lambda, n)$ a medida de Lebesgue da união $[(\alpha, 0, n)] \cup [(\alpha, 1, n)]$ observamos que

$$l(\alpha, \Lambda, n) = \frac{\sum_{i=1}^{q_\alpha^n} |f^i(I_\alpha^n)|}{|I|}. \quad (4.5)$$

Nosso próximo resultado dá uma estimativa para a comparação entre as não-linearidades médias das transformações de Möbius e das funções do $\mathcal{B}_k^{2+\nu}$.

Teorema 2. *Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\nu}$. Então existem $C = C(f) > 0$ e $0 < \lambda = \lambda(k) < 1$ tais que*

$$\left| N_\alpha^n - \frac{\sum_{i=1}^{q_\alpha^n} |f^i(I_\alpha^n)|}{|I|} \int \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx \right| \leq C \lambda \sqrt{n}. \quad (4.6)$$

No caso em que

$$\int_{[0,1]} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx = 0$$

então $|N_\alpha^n| < C \lambda \sqrt{n}$.

Demonstração do Teorema 2: Seja $r = [\frac{n}{2}]$. Reescrevendo $\int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f_n(s)}{Df_n(s)} ds$ usando o teorema do valor médio para integrais obtemos

$$\begin{aligned} \int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f_n(s)}{Df_n(s)} ds &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} \int_{f^i(I_\alpha^n)} \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} \frac{D^2 f(x_j^\alpha)}{Df(x_j^\alpha)} |f^i(I_\alpha^n)|, \end{aligned}$$

onde $x_j^\alpha \in f^j(I_\alpha^n)$. De maneira análoga podemos escolher $y_j^\beta \in f^j(I_\beta^r)$ tal que

$$\int_I \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} |f^j(I_\beta^r)|.$$

Então temos

$$\begin{aligned}
\int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f_n(s)}{D f_n(s)} ds &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} \left(\frac{D^2 f(x_i)}{D f(x_i)} - \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{D f(y_j^\beta)} \right) |f^i(I_\alpha^n)| + \\
&\quad + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{D f(y_j^\beta)} |f^i(I_\alpha^n)| \\
&= (IV) + (V),
\end{aligned}$$

onde $y_j^\beta \in f^j(I_\beta^r)$ e $x_i \in f^i(I_\alpha^n)$.

Trabalhando com (IV) obtemos

$$\begin{aligned}
(IV) &\leq \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} C_0 \cdot |x_i - y_i^\beta|^\nu \cdot |f^i(I_\alpha^n)| \\
&\leq C_0 \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} |f^j(I_\beta^r)|^\nu \cdot |f^i(I_\alpha^n)| \\
&\leq C_0 \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} |f^j(I_\beta^r)|^\nu \cdot \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} |f^i(I_\alpha^n)| \\
&\leq C_0 \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} |f^j(I_\beta^r)|^{1+\nu} \\
&\leq C_0 \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \left(\max_{0 \leq j \leq q_r^\beta} |f^j(I_\beta^r)| \right)^\nu \cdot \sum_{j=1}^{q_r^\beta} |f^j(I_\beta^r)| \\
&\leq C_0 \cdot \lambda^{\frac{n}{2}\nu}.
\end{aligned}$$

Agora trabalharemos com a expressão (V).

$$\begin{aligned}
(V) &= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)| \cdot \frac{|f^i(I_\alpha^n)|}{|f^j(I_\beta^r)|} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)| \frac{\sum_{f^i(I_\alpha^n) \subset f^j(I_\beta^r)} |f^i(I_\alpha^n)|}{|f^j(I_\beta^r)|} \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)| \cdot [l((\alpha, \Lambda, n)[f^j(I_\beta^r)]) - l((\alpha, \Lambda, n))] + \\
&\quad + l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)| = (VI) + (VII).
\end{aligned}$$

Usaremos agora o seguinte resultado que é na verdade o Teorema Ergódico de Markov e pode ser provado por métodos da teoria de cadeias de Markov como podemos encontrar em [6] e [15].

Proposição 15. *Existem constantes $C_{23} > 0$ e $0 < \lambda_4 < 1$ tais que*

$$|l(a_n | a_{n-r} \dots a_0) - l(a_n)| \leq C_{23} \cdot \lambda_4^{\sqrt{r}},$$

onde $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Pela Proposição 15 temos que $(VI) = O(\lambda_4^{\sqrt{\frac{n}{2}}})$. Note que em (VII) temos uma soma de Riemann para a integral

$$\int_I \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds = \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(z_j^\beta)}{Df(z_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)|$$

para algum $z_j^\beta \in f^j(I_\beta^r)$. Assim

$$\begin{aligned}
(VII) &= l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)| + l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \int_I \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds + \\
&\quad + O(\lambda^{n/k}) - l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \frac{D^2 f(z_j^\beta)}{Df(z_j^\beta)} \cdot |f^j(I_\beta^r)| \\
&= l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \int_I \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds + O(\lambda^{n/k}) + \\
&\quad + l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \sum_{j=1}^{q_r^\beta} \left(\frac{D^2 f(z_j^\beta)}{Df(z_j^\beta)} - \frac{D^2 f(y_j^\beta)}{Df(y_j^\beta)} \right) \cdot |f^j(I_\beta^r)| \\
&\leq l((\alpha, \Lambda, n)) \cdot \int_I \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds + O(\lambda^{n/k}) + C_0 \cdot \lambda^{\frac{n}{2}\nu}.
\end{aligned}$$

Se tivermos

$$\int_I \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx = 0$$

basta tomarmos $\lambda_5 = \max\{\lambda, \lambda_4\}$ e $C_{24} = 2C_0 + C_{23}$ obtemos pela Proposição 15 que

$$\left| \int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx \right| \leq C_{24} \cdot \lambda_5^{\sqrt{\frac{n}{2}}}.$$

Isso com o fato em (4.5) conclui a prova do teorema. ■

Esse último resultado é nada mais que uma junção dos dois anteriores, provando agora a convergência dos ramos da função de renormalização para a função identidade.

Teorema 3. *Seja $f \in \mathcal{B}_k^{2+\nu}$ tal que*

$$\int \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} dx = 0.$$

Então existem $C = C(k) > 0$ e $\lambda = \lambda(k) < 1$ tais que

$$|Z_{I_\alpha^n}(R^n(f)) - Id|_{C^2} \leq C \cdot \lambda^{\sqrt{n}}$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Demonstração do Teorema 3: Por hipótese temos $\int_I \frac{D^2 f(s)}{Df(s)} ds = 0$ então pelo Teorema 2 temos

$$\left| \int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f_n(s)}{Df_n(s)} ds \right| \leq C_{26} \cdot \lambda_4^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Usaremos o seguinte resultado que será provado mais adiante.

Lema 15. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então para todo $C > 0$ existe $C_{25} > 0$ tal que*

$$|M_a - M_b|_{C^2} \leq C_{25} \cdot |a - b|,$$

onde M_a e M_b são funções de Möbius definidas em 3.14.

Assim, pelo Lema15

$$\begin{aligned} |M_{\int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f_n(s)}{Df_n(s)} ds} - Id|_{C^2} &\leq C_{25} \cdot \left| \int_{I_\alpha^n} \frac{D^2 f_n(s)}{Df_n(s)} ds - 0 \right| \\ &\leq C_{25} \cdot C_{26} \cdot \lambda_4^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

O Teorema 1 junto com a desigualdade acima nos dá

$$|Z_{I_\alpha^n}(R^n(f)) - Id|_{C^2} \leq C_{27} \cdot \lambda_4^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

■

Demonstração do Lema 15: Por 3.14 temos

$$M_a(x) = \frac{x e^{-a/2}}{1 + x(e^{-a/2} - 1)} \text{ e } M_b(x) = \frac{x e^{-b/2}}{1 + x(e^{-b/2} - 1)},$$

e derivando obtemos

$$\begin{aligned} DM_a(x) &= \frac{e^{-a/2}}{[1 + x(e^{-a/2} - 1)]^2}, \quad DM_b(x) = \frac{e^{-b/2}}{[1 + x(e^{-b/2} - 1)]^2}, \\ D^2 M_a(x) &= \frac{-2e^{-a/2}(e^{-a/2} - 1)}{[1 + x(e^{-a/2} - 1)]^3}, \text{ e } D^2 M_b(x) = \frac{-2e^{-b/2}(e^{-b/2} - 1)}{[1 + x(e^{-b/2} - 1)]^3}. \end{aligned}$$

Usaremos a série de Taylor para as exponenciais nas funções acima. Desse modo teremos

$$e^{-a/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-a/2)^n \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{a}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-a/2)^n \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{a}{2} + O(a^2) \text{ e}$$

$$e^{-b/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-b/2)^n \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{b}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-b/2)^n \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{b}{2} + O(b^2).$$

Podemos agora comparar as funções e suas derivadas.

$$\begin{aligned} |M_a(x) - M_b(x)| &= \left| \frac{xe^{-a/2}}{1+x(e^{-a/2}-1)} - \frac{xe^{-b/2}}{1+x(e^{-b/2}-1)} \right| \\ &= \left| \frac{x(1-a/2+O(a^2))}{1+x(-a/2+O(a^2))} - \frac{x(1-b/2+O(b^2))}{1+x(-b/2+O(b^2))} \right| \\ &= |x[(1+ax/2)(1-a/2)+O(a^2)] - x[(1+bx/2)(1-b/2)+O(b^2)]| \\ &\leq |(1+ax/2)(1-a/2)+O(a^2) - (1+bx/2)(1-b/2)+O(b^2)| \\ &= \left| 1 - \frac{a}{2} + \frac{ax}{2} + O(a^2) - \left[1 - \frac{b}{2} + \frac{bx}{2} + O(b^2) \right] \right| \\ &= \left| \frac{b}{2} - \frac{a}{2} + x \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right) + O(a^2) - O(b^2) \right| \\ &= \left| (a-b) \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right] + O(a^2) - O(b^2) \right| \\ &\leq |a-b| \left| \frac{x-1}{2} \right| + C^*|b-a| \\ &\leq |b-a| + C^*|b-a| \\ &= (1+C^*) \cdot |b-a|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DM_a(x) - DM_b(x)| &= \left| \frac{e^{-a/2}}{[1+x(e^{-a/2}-1)]^2} - \frac{e^{-b/2}}{[1+x(e^{-b/2}-1)]^2} \right| \\ &= |e^{-a/2}(1+ax/2+O(a^2)) - e^{-b/2}(1+bx/2+O(b^2))| \\ &= |e^{-a/2}(1+ax+O(a^2)) - e^{-b/2}(1+bx+O(b^2))| \\ &= |(1-a/2+O(a^2))(1+ax+O(a^2)) - (1-b/2+O(b^2))(1+bx+O(b^2))| \\ &= |1-a/2+ax+O(a^2) - (1-b/2+bx+O(b^2))| \\ &= |(a-b)(x-1/2) + (O(a^2)-O(b^2))| \\ &\leq |a-b| + C^*|b-a| \\ &= (1+C^*) \cdot |b-a|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D^2M_a(x) - D^2M_b(x)| &= \left| \frac{-2e^{-a/2}(e^{-a/2}-1)}{[1+x(e^{-a/2}-1)]^3} - \frac{-2e^{-b/2}(e^{-b/2}-1)}{[1+x(e^{-b/2}-1)]^3} \right| \\ &= |(a+O(a^2))(1+ax/2+O(a^2))^3 - (b+O(b^2))(1+bx/2+O(b^2))^3| \\ &= |(a+O(a^2)) - (b+O(b^2))| \\ &\leq |a-b| + C^*|b-a| \\ &= (1+C^*) \cdot |b-a|. \end{aligned}$$

Aqui a constante $C^* > 0$ é tal que $|O(a^2) + O(b^2)| \leq C^* \cdot |b-a|$. Tomando $C_{25} = 1 + C^*$ temos o resultado. ■

Referências Bibliográficas

- [1] K. Cunha, D. Smania. Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle, Ann. I.H. Poincaré - AN (2012),
<http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2012.09.004>.
- [2] M.R. Herman. Sur La Conjugaison Différentiable des Difféomorphismes du Cercle à des Rotations. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 49:5-233, 1979.
- [3] M. Keane. Internal Exchange Transformation. Math, Zeit., 141:25-31,1975.
- [4] M. Keane. Non-ergodic Interval Exchange Transformation. Israel J. Math., Zeit., 174:203-212, 1980.
- [5] H. Keynes; D. Newton. A Minimal Non-uniquely Ergodic Interval Exchange Transformation. Math. Zeit., 148:101-105, 1976.
- [6] K.M. Khanin, Ya.G. Sinai. A New Proof of M. Herman's Theorem. Comm. Math. Phys., 112(1):89-101, 1987.
- [7] K.M. Khanin, A. Teplinsky. Herman's Theory Revisited. Invent. Math., 178(2):333-344, 2009.
- [8] K.M. Khanin, E.B. Vul. Circle Homeomorphisms with Weak Discontinuities, in: Dynamical Systems and Statistical Mechanics, Moscow, 1991, in: Adv. Soviet Math., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 57-98, 1991.
- [9] R. Mañé. Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. Springer Verlag, 1987.
- [10] H. Mansur. Interval Exchange Transformations and Measured Foliations. Ann. of Math, 115:169-200, 1982.
- [11] M. Martens. The Periodic Points of Renormalization. Ann. of Math., (2)147(3): 315-328, 1979.

- [12] W. de Melo, S. van Stien. One-dimensional Dynamics. *Ergeb. Math. Grenzgeb.* vol. 25, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [13] A. Nogueira, D. Rudolph. Topological Weak-mixing of Interval Exchange Maps. *Ergodic Theory Dyna., Systems*, 17(5):1183-1209, 1997.
- [14] G. Rauzy. Échanges d'Intervalles et Transformations Induites. *Acta Arith.*, 34(4):315-328, 1979.
- [15] Ya.G. Sinai. Topicx in Ergodic Theory. *Princeton Math. Ser.*, vol. 44, Princeton (1994).
- [16] Ya.G. Sinai, K.M. Khanin. Smoothness of Conjugacies of Diffeomorphisms of the Circle with Rotations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 44(1(265)):57-82, 247, 1989.
- [17] W. Veech. Interval Exchange Transformations. *J Analyse Math.*, 33:222-272, 1978.
- [18] W. Veech. Gauss Measures for Transfomations on the Space of Interval Exchange Maps. *Ann. of Math.*, 115:201-242, 1982.
- [19] M. Viana. Dynamics of Interval Exchange Transformations and Teichmüller Flows, 2008.

Índice Remissivo

- Cilindro Admissível, 81
- Classes de Rauzy, 37
- Combinatória k -limitada, 45
- Condição de Keane, 26
- Genus Um, 45
- Infinitamente Renormlizável, 45
- Involução Canônica, 17
- Irredutibilidade, 25
- Minimalidade, 28
- Monodromia Invariante, 12
- Não Linearidade, 47
- Não Linearidade Média, 51
- Palavra, 81
- Par Redutível, 25
- Par Standard, 39
- Partição $\mathcal{P}$, 72
- Partição $\tilde{\mathcal{P}}^n$, 81
- Renormalização de Rauzy-Veech, 18
- Transformação de Intercâmbio de Intervalos Generalizada, 11
- Transformação de Intercâmbio de Intervalos Standart, 11
- Transformação de Möbius, 53
- Unicidade Ergótica, 30
- Vetor de Translação, 15
- Vetor Racionalmente Independente, 25
- Zoom, 46

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa

São José do Rio Preto, ___/___/___
