

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO

Marcus Vinícius Camillo Gália

**TERMODINÂMICA DE UM CONJUNTO DE PARTÍCULAS EM UM BILHAR
BIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO: UM GÁS BIDIMENSIONAL
SIMPLIFICADO**

Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita filho, campus de Rio Claro,
como parte dos requisitos para obtenção
do título de Mestre em Física.

Orientador: Edson Denis Leonel

Co-orientador: Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro - SP
2016

530.15 Galia, Marcus Vinícius Camillo.

G156t Termodinâmica de um conjunto de partículas em um bilhar bidimensional dependente do tempo: um gás bidimensional simplificado. /

Marcus Vinícius Camillo Gália - Rio Claro, 2016

52 f.:il. figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientador: Edson Denis Leonel

Coorientador: Luiz Antonio Barreiro

1.Física matemática 2. Bilhares. 3. Termodinâmica. 4. Escala.

Título.

Marcus Vinícius Camillo Gália

**TERMODINÂMICA DE UM CONJUNTO DE PARTÍCULAS EM UM BILHAR
BIDIMENSIONAL DEPENDENTE DO TEMPO: UM GÁS BIDIMENSIONAL
SIMPLIFICADO**

Dissertação de mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita filho, campus de Rio Claro,
como parte dos requisitos para obtenção
do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
Prof. Dr. Giovani Gozzi

Rio Claro, 26 de janeiro de 2016

Resultado: APROVADO

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe Norma Sueli Perrotta Camillo Gália e ao meu pai Marcus Fernando Camillo Gália, que me deram apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. Eles acreditam em mim desde o início da minha vida.

Agradeço a minha noiva Caroline Amaral Santana, que sempre me apoiou e acreditou na minha capacidade de vencer os desafios.

Agradeço ao meu orientador Dr. Edson Denis Leonel, por me proporcionar a conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicou a mim, não somente por ter me ensinado, mas por ter me feito aprender.

Ao meu Co-orientador Luiz Antônio Barreiro, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Aos Profs. Dr. Juliano Antônio de Oliveira e Dr. Giovani Gozzi, pela participação da banca de defesa e pelas sugestões e correções.

A Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela oportunidade de fazer o curso de mestrado.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho de pesquisa foi motivado por um modelo de bilhar unidimensional denominado de *Bouncer*. O modelo consiste em uma partícula movendo-se sob ação de um campo gravitacional e que colide com uma plataforma móvel. Apresentaremos suas características e propriedades que motivaram a pesquisa para um bilhar bidimensional com geometria da fronteira do tipo ovóide. Os objetivos desta dissertação são de estudar as propriedades estatísticas e termodinâmicas de um bilhar ovóide com dependência temporal na fronteira em um regime dissipativo em relação as colisões entre a partícula e a fronteira. Para o bilhar bidimensional, apresentaremos as propriedades desenvolvidas inspiradas no modelo unidimensional. Desenvolveremos as expressões para determinar os expoentes críticos do sistema em relação a velocidade quadrática média, o número de colisões em função do tempo e a conexão com a termodinâmica através do teorema de equipartição de energia. Nesta dissertação apresentamos uma forma alternativa de fazer a conexão com a termodinâmica através da lei de Fourier para a condução do calor, para bilhares bidimensionais e de determinar o número de colisões em função do tempo.

Palavras Chaves: Termodinâmica, Bilhares, Escala.

Abstract

This work was motivated by a one-dimensional model called as bouncer. The model consists of a particle moving under the action of a gravitational field and experiences collisions with a periodic moving platform. We describe shortly its dynamical properties and move forward to a two-dimensional billiard problem of the oval-like shape. The objective of this dissertation is to study some statistical and thermodynamical properties of an oval-like shaped billiard whose boundary moves in time. Upon collision with the boundary, the particle has a fractional loss of energy produced by inelastic collisions. We then obtain equations that describe the dynamics at both short and large time. By the use of equipartition theorem, we make a connection of the dynamical results with the thermodynamics approach. In this dissertation we present an alternative way of making the connection with thermodynamics via the Fourier's law for heat conduction.

Key Words: Thermodynamics, Billiards, Scaling.

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	Modelo Motivador: <i>Bouncer</i> 1D	11
2.1	O Modelo	11
2.2	Velocidade Quadrática Média	12
2.2.1	Regime estacionário	12
2.2.2	Regime dinâmico	12
2.3	Expoentes críticos	14
2.4	Relação entre número de colisões e tempo	16
2.5	Conexão com a Termodinâmica	18
3	Estatística para o modelo do bilhar ovóide dependente do tempo e dissipativo	21
3.1	O Modelo e o Mapeamento	21
3.2	Velocidade quadrática média	26
3.2.1	Regime estacionário	27
3.2.2	Regime dinâmico	27
3.3	Expoentes críticos	29
3.4	Relação entre o número de colisões e o tempo	33
3.4.1	Deslocamento quadrático médio	33
3.4.2	Relação entre número de colisões e o tempo	35
3.5	Conexão com a termodinâmica	37
4	Termodinâmica de Bilhares	39
4.1	Equilíbrio térmico	39
4.2	Troca de Calor	40
4.3	Comparação entre a abordagem termodinâmica e a abordagem bilhar	42
5	Conclusões	44

Lista de Figuras

1.1	Esboço da temperatura em função do tempo. Previsão teórica discutida em [11].	10
2.1	Esquema do modelo <i>Bouncer</i> .	11
3.1	Bilhar rotacionando no tempo para $\epsilon = 0, 3$, $p = 2$ e $\omega = 1$. Cada curva identifica um instante de tempo diferente.	22
3.2	Bilhar oscilante com forma <i>breathing</i> no tempo para $\epsilon = 0, 3$, $p = 2$ e $\eta_1 = \eta_2 = 1$. Cada curva identifica um instante de tempo diferente.	23
3.3	Bilhar oscilante no tempo para $\epsilon = 0, 3$, $p = 2$ e $a = 0, 5$. Cada curva identifica um instante de tempo diferente.	23
3.4	Esboço de V_{rms} em função de n para diferentes parâmetros de controle γ e $\epsilon = 0.3$.	29
3.5	a) esboço de V_{rms} vs n . b) sobreposição das curvas mostradas em a) um uma única curva universal.	32
3.6	a) esboço de V_{rms} vs n para diferentes $a\epsilon$ e γ . b) sobreposição das curvas mostradas em a) um uma única curva universal.	33

Lista de Símbolos

t_n	tempo da n -ésima colisão
V_n	velocidade da partícula da n -ésima colisão
γ	coeficiente de restituição
g	aceleração da gravidade
ω	frequência angular
β	expoente de aceleração
α_1, α_2	expoentes de saturação
z_1, z_2	expoentes de <i>crossover</i>
n	número de colisões
T	temperatura
K_b	constante de Boltzmann
m	massa da partícula
S	entropia
U	energia interna
R_b	raio do bilhar
θ_n	ângulo que descreve a fronteira
α_n	ângulo entre a trajetória e a linha tangente ao ponto de colisão com a fronteira
$\vec{T}_n$	vetor unitário tangente
$\vec{N}_n$	vetor unitário normal
a	amplitude da perturbação temporal
ϵ	parâmetro geométrico do bilhar
d_{rms}	deslocamento quadrático médio

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmico são aqueles caracterizados por grandezas que variam no tempo, de modo que se expressam essas variações em termos de equações diferenciais ou mapas discretos. Considerando que esse campo de conhecimento teve início com o matemático Henri Poincaré ao estudar a dinâmica de um sistema de três corpos, na qual objetivava determinar o movimento dos corpos celestes. Este cientista contribuiu com um conceito denominado de seção de Poincaré [1]. A seção de Poincaré consiste em uma seção corte num fluxo contínuo no espaço de fases com redução de uma dimensão [2].

Os sistemas dinâmicos foram impulsionados pelo estudo do meteorologista Edward Norton Lorenz que tinha como objetivo estudar o problema da previsão do tempo. Seu trabalho gerou o conceito do efeito borboleta, o qual produzia uma alusão de que pequenas perturbações causadas pelo bater de asas de um borboleta no Brasil pode provocar o surgimento de um tornado no Texas. Lorenz contribuiu com o conceito de atrator. Atrator consiste em uma região do espaço de configurações ou espaço de fases que fica invariante, enquanto o tempo passa e que atrai muitas configurações próximas [3, 4]. Diversos cientistas contribuíram para o desenvolvimento deste campo de conhecimento que nos dias de hoje faz conexão com as mais variadas áreas do saber humano, por exemplo, Física, Biologia, Economia e etc.

Os bilhares são de fundamental importância no estudo de sistemas dinâmicos. O motivo desta afirmação é em função de seu caráter não-linear e suas propriedades físicas e matemáticas. Geralmente, os bilhares consistem de um conjunto de partículas contidas no interior de uma região fechada, na qual sofrem colisões com a fronteira. Estas colisões podem ser tratadas como elásticas (não dissipativa) ou inelásticas (dissipativa).

Os bilhares de fronteira estática podem ser classificados em três classes:

- a) integráveis, por exemplo, bilhar circular e bilhar elíptico [5].
- b) ergódico, por exemplo, bilhar *stadium* de Bunimovich [6] e bilhar de Sinai [7].
- c) misto, cujo espaço de fase apresenta regiões de periodicidade, curvas invariantes *spanning* e mares de caos [5].

Quando uma dependência temporal [8] é introduzida na fronteira, o cenário muda bastante. Dependendo da fase da fronteira no instante do choque e da velocidade da partícula, pode ser que ocorra ganho ou perda de energia da partícula após o choque. Em bilhares dessa natureza, pode ocorrer um fenômeno dinâmico conhecido como aceleração de Fermi [9]. O fenômeno consiste no crescimento ilimitado da velocidade da partícula após sofrer colisões elásticas com a fronteira dependente do tempo. Esse fenômeno produz a difusão ilimitada de energia. Associado ao fenômeno de difusão de energia em bilhares dependentes do tempo, existe uma conjectura com implicações relevantes. Proposta por três cientistas russos, Loskutov, Ryabov e Akinshin [10], a conjectura Loskutov, Ryabov e Akinshin (LRA) diz que: *a dinâmica caótica de um bilhar com uma fronteira fixa é uma condição suficiente para ocorrer aceleração de Fermi no sistema quando uma perturbação de fronteira é introduzida.*

O modelo de bilhar ovóide correspondente à versão de fronteira estática apresenta espaço de fase misto. De acordo com a conjectura LRA, a introdução de uma dependência temporal na fronteira deve produzir difusão ilimitada de energia para as partículas. Esse resultado está em bom acordo com o que é conhecido na literatura. Entretanto, está em total desacordo quando comparado com um modelo físico real, como por exemplo, um gás de partículas não interagentes confinados em volume finito V a uma temperatura T . A figura 1.1 ilustra o comportamento da temperatura do gás em função do tempo, segundo a previsão teórica que foi discutida em [11].

De fato, em um gás real, onde as fronteiras sofrem agitações térmicas, é esperado que em nível microscópico, se movam aleatoriamente. Esse movimento produz uma troca de energia aleatória com a partícula (ou um ensemble delas). De acordo com a conjectura LRA, a energia do gás deveria crescer indefinidamente. Entretanto, com o decorrer do tempo, a energia do gás, medida a partir de sua temperatura, mostra um crescimento exponencial, partindo de baixa energia, até uma saturação, marcada pela condição de equilíbrio termodinâmico.

Nosso trabalho tem como hipótese que a saturação no comportamento da velocidade média do ensemble é causado pela presença de colisões inelásticas. Portanto, devido a presença de perdas fracionais de energia a cada colisão das partículas com a fronteira. É conhecido na literatura, que a introdução de choques inelásticos é uma condição suficiente para supressão de aceleração de Fermi. Sendo assim, de acordo com os trabalhos [12, 13], aceleração de Fermi não é um fenômeno robusto.

Os objetivos desta dissertação são: explorar as propriedades dinâmicas do modelo de bilhar ovóide no que tange à termodinâmica tanto analítica quanto numéricas; estudar o comportamento da velocidade média do sistema para tempos curtos e longos; investigar as propriedades termodinâmicas e de escala do modelo.

Essa dissertação está estruturada em quatro capítulos, no qual cada um tem seus respectivos tópicos.

No Capítulo 2 é feita a apresentação do modelo motivador denominado *Bouncer*. Os resultados obtidos são com um enfoque na termodinâmica estatística, ou seja, os aspectos como

expoentes críticos, teorema de equipartição de energia e outros elementos. O uso dos elementos conceituais para a aplicação deste modelo motivador foram apresentados nos Apêndices I e II.

No Capítulo 3 abordaremos o modelo de bilhar bidimensional do tipo ovóide com dependência temporal na fronteira. Neste modelo iremos obter a velocidade média do sistema no regime estacionário e no regime dinâmico. A velocidade média fornece a informação dos expoentes críticos do modelo. O sistema tem grandezas termodinâmicas que são obtidas pelo teorema de equipartição de energia e com o uso dos expoentes críticos, podemos encontrar uma relação entre número de colisões e o tempo.

No Capítulo 4 apresentaremos uma forma de determinar a termodinâmica de bilhares bidimensionais de fronteira estática e para bilhares bidimensionais dependentes do tempo.

No Capítulo 5 faremos a conclusão deste trabalho e apresentaremos as perspectivas para trabalho futuros sobre o modelo estudado.

No Apêndice I apresentaremos os postulados da termodinâmica de equilíbrio que são fundamentais na verificação das expressões obtidos pelo uso do teorema de equipartição de energia.

No Apêndice II apresentamos os conceitos e propriedades de valores médios em funções trigonométricas utilizadas para a obtenção dos valores quadráticos médios dos observáveis físicos.

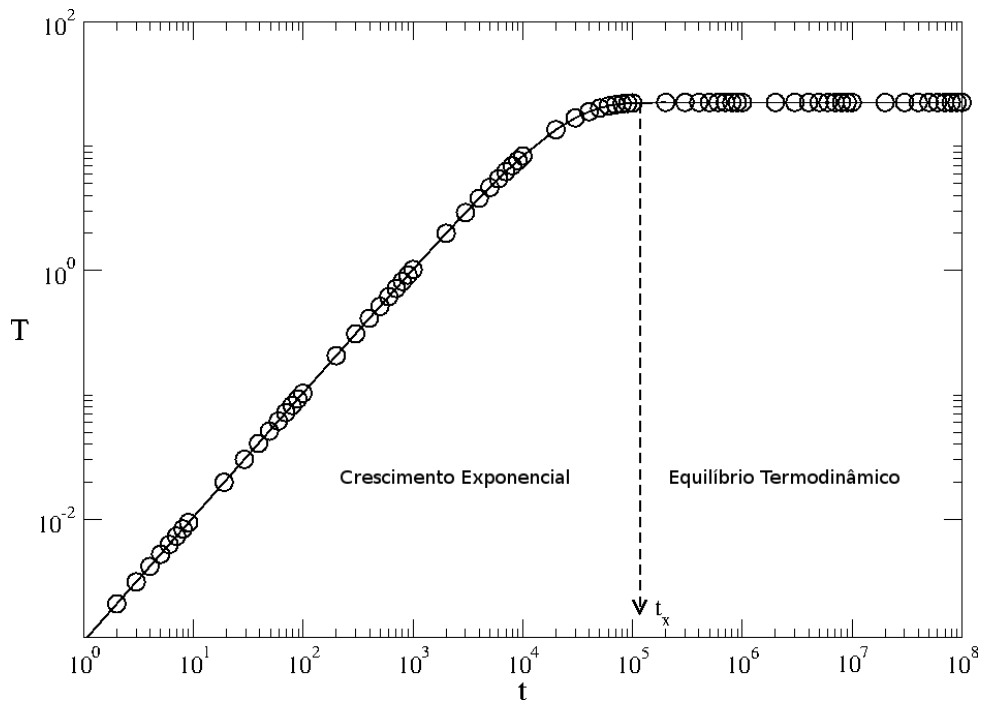


Figura 1.1: Esboço da temperatura em função do tempo. Previsão teórica discutida em [11].

Capítulo 2

Modelo Motivador: *Bouncer* 1D

Neste capítulo discutiremos o modelo motivador para o desenvolvimento desta dissertação. A apresentação do modelo *Bouncer* em sua versão simplificada se dará em seus aspectos analíticos e seus resultados computacionais publicados recentemente [14, 15].

2.1 O Modelo

O modelo *bouncer* consiste de uma partícula clássica de massa m (ou um ensemble não interagente delas) que se move na vertical, sofrendo ação de um campo gravitacional constante e colidindo com uma plataforma móvel cuja equação é dada por

$$y_\omega = \epsilon \cos(\omega t),$$

onde ϵ fornece a amplitude de oscilação e ω é a frequência angular [14].

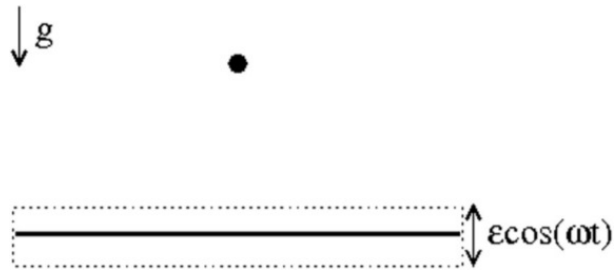


Figura 2.1: Esquema do modelo *Bouncer*.

A dinâmica do modelo é dada por um mapeamento discreto, não linear, bidimensional nas variáveis velocidade da partícula e tempo avaliados no instante da colisão. O mapeamento é dado por

$$\begin{cases} t_{n+1} = \left[t_n + \frac{2V_n}{g} \right] \bmod \left(\frac{2\pi}{\omega} \right), \\ V_{n+1} = |\gamma V_n - (1 + \gamma)\epsilon\omega \sin(\omega t_{n+1})|. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

As variáveis V_{n+1} e t_{n+1} são, respectivamente, velocidade da partícula e o instante da colisão, onde o módulo na equação (2.2) do mapeamento é usado para evitar que a partícula atravessasse a parede oscilante. O parâmetro γ é o coeficiente de restituição, $\gamma \in [0, 1]$. Se $\gamma = 1$ as colisões são elásticas ao passo que $\gamma < 1$ corresponde a perda fracional de energia a cada colisão. O termo $\frac{2V_n}{g}$ é o tempo de vôo da partícula.

2.2 Velocidade Quadrática Média

O caso dissipativo é considerado quando $\gamma < 1$. Como a não linearidade na equação (2.2) é seno, a velocidade média não é o melhor observável a ser considerado. Ao invés dela foi considerada a velocidade quadrática média. Para isso a equação da velocidade foi elevada ao quadrado e depois uma média no ensemble na variável $t \in [0, 2\pi/\omega]$ foi realizada, o que conduz a

$$V_{n+1}^2 = \gamma^2 V_n^2 - 2\gamma V_n(1 + \gamma)\epsilon\omega \sin(\omega t_{n+1}) + (1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2 \sin^2(\omega t_{n+1}), \quad (2.3)$$

$$\overline{V_{n+1}^2} = \gamma^2 \overline{V_n^2} + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2}. \quad (2.4)$$

2.2.1 Regime estacionário

Agora que se tem a equação da velocidade quadrática média pode-se analisar o sistema no regime estacionário e obter o observável $V_{rms} = \sqrt{\overline{V^2}}$. Admitindo que $\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} = \overline{V^2}$, tem

$$\overline{V^2} = \gamma^2 \overline{V^2} + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2}, \quad (2.5)$$

logo isolando $\overline{V^2}$ encontrou-se

$$\overline{V^2} = \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2(1 - \gamma)}. \quad (2.6)$$

Finalmente tem-se

$$V_{rms} = \epsilon\omega \sqrt{\frac{(1 + \gamma)}{2(1 - \gamma)}}. \quad (2.7)$$

Esta é a velocidade do sistema no regime estacionário. Este observável é relevante para o desenvolvimento dos expoentes críticos do sistema, como será visto adiante no trabalho.

2.2.2 Regime dinâmico

Para o regime dinâmico, temos que $\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = \Delta \overline{V^2}$. Esta variação pode ser utilizada para o emprego da definição de derivada, e assim fez

$$\frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{(n + 1) - n} \cong \frac{d\overline{V^2}}{dn}. \quad (2.8)$$

A partir da equação da velocidade quadrática média, obtém-se os elementos V_{rms} e os expoentes críticos do sistema, desse modo fazendo as devidas manipulações algébricas, obteve-se

$$\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = \gamma^2 \overline{V_n^2} - \overline{V_n^2} + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\overline{V^2}}{dn} = \overline{V^2}(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2}. \quad (2.10)$$

Fazendo-se uma substituição de variáveis onde $\overline{V^2} = E$ e integrando a equação

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2}} = \int_0^n dn, \quad (2.11)$$

utilizando uma nova substituição de variáveis $u = E(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2}$ e $du = dE(\gamma^2 - 1)$, obteve-se

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{u} = (\gamma^2 - 1) \int_0^n dn, \quad (2.12)$$

$$\ln \left(\frac{u}{u_0} \right) = (\gamma^2 - 1)n. \quad (2.13)$$

Aplicando a definição de exponencial, teve

$$u = u_0 \exp((\gamma^2 - 1)n). \quad (2.14)$$

Alterando as variáveis encontra-se

$$E(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2} = \left[E_0(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 \epsilon^2 \omega^2}{2} \right] \exp(\gamma^2 - 1), \quad (2.15)$$

o que leva a

$$E = \frac{(1 + \gamma)\epsilon^2 \omega^2}{2(1 - \gamma)} [1 - \exp((\gamma^2 - 1)n)] + E_0 \exp((\gamma^2 - 1)n). \quad (2.16)$$

Voltando nas variáveis originais do sistema, tem-se uma relação $\overline{V^2}$ e V_{rms}

$$\overline{V^2} = \frac{(1 + \gamma)\epsilon^2 \omega^2}{2(1 - \gamma)} [1 - \exp((\gamma^2 - 1)n)] + \overline{V_0^2} \exp((\gamma^2 - 1)n). \quad (2.17)$$

Aplicando a raiz quadrada em toda a equação, tem-se

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(1 + \gamma)\epsilon^2 \omega^2}{2(1 - \gamma)} [1 - \exp((\gamma^2 - 1)n)] + \overline{V_0^2} \exp((\gamma^2 - 1)n)}. \quad (2.18)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, tem-se

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2}} \epsilon \omega (1-\gamma)^{-1/2}. \quad (2.19)$$

Esse resultado é o mesmo obtido a partir da equação (2.6).

2.3 Expoentes críticos

Os expoentes críticos são elementos que descrevem mudanças no regime dos observáveis de um determinado sistema. A criticalidade do sistema em estudo nesta dissertação está na mudança do crescimento para a saturação da velocidade quadrática média.

Para obter os expoentes críticos do sistema realizou-se uma alteração de variáveis no mapeamento do modelo *Bouncer* [11]. Sejam as seguintes manipulações algébricas: $\nu = \frac{\omega V_n}{g}$, $\phi = \omega t$ e $\varepsilon = \frac{\epsilon \omega^2}{g}$. Aplicando-se estas relações nas equações do mapeamento, reescrevendo-se (2.1) e (2.2)

$$\begin{cases} \omega t_{n+1} = \left[\omega t_n + 2 \frac{\omega V_n}{g} \right] \mod (2\pi), \\ \frac{2\omega V_{n+1}}{g} = \left| \frac{2\omega V_n \gamma}{g} - \frac{2(1+\gamma)\epsilon \omega^2}{g} \text{sen}(\omega t_{n+1}) \right|, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\quad (2.21)$$

aplicando as relações

$$\phi_{n+1} = [\phi_n + 2\nu_n] \mod (2\pi). \quad (2.22)$$

A equação (2.14) simplificada por 2 resulta em

$$\frac{\omega V_{n+1}}{g} = \left| \frac{\omega V_n \gamma}{g} - \frac{\epsilon \omega^2}{g} \text{sen}(\omega t_{n+1})(1+\gamma) \right|, \quad (2.23)$$

finalmente encontra-se

$$\nu_{n+1} = |\gamma \nu_n - (1+\gamma)\varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1})|. \quad (2.24)$$

Então o mapeamento nas novas variáveis será

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = [\phi_n + 2\nu_n] \mod (2\pi), \\ \nu_{n+1} = |\gamma \nu_n - (1+\gamma)\varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1})|. \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\quad (2.26)$$

Utilizando o resultado obtido na seção anterior $V_{rms} = \sqrt{2\epsilon^2 \omega^2 n}$, pode-se obter as escalas do sistema nas novas variáveis ν e ϕ . Tomando $\overline{\nu_{n+1}^2}$, encontra-se

$$\overline{\nu_{n+1}^2} = \gamma \overline{\nu_n^2} + \frac{(1+\gamma)^2 \varepsilon^2}{2}. \quad (2.27)$$

Fazendo $\gamma = 1$, obtém-se

$$\overline{\nu_{n+1}^2} = \overline{\nu_n^2} + 2\varepsilon^2. \quad (2.28)$$

Fazendo a aproximação de derivada

$$\overline{\nu_{n+1}^2} - \overline{\nu_n^2} \simeq \frac{d\overline{\nu^2}}{dn}, \quad (2.29)$$

$$\frac{d\overline{\nu^2}}{dn} = 2\varepsilon^2. \quad (2.30)$$

Integrando a equação acima, tem-se

$$\overline{\nu^2} = \int_0^n 2\varepsilon^2 dn, \quad (2.31)$$

$$\overline{\nu^2} = 2\varepsilon^2 n. \quad (2.32)$$

Realizando $\nu_{rms} = \sqrt{\overline{\nu^2}}$, encontra-se

$$\nu_{rms} = \sqrt{2\varepsilon^2 n}, \quad (2.33)$$

portanto tem-se a relação para obter o primeiro expoente, ou seja

$$\nu_{rms} \propto (n\varepsilon^2)^\beta, \quad (2.34)$$

e o expoente $\beta = 1/2$.

O elemento de saturação será obtido tomando-se $\overline{\nu_{n+1}^2}$ e com $\gamma < 1$,

$$\nu_{n+1}^2 = \gamma^2 \nu_n^2 - 2(1 + \gamma)\nu_n \gamma \sin(\phi_{n+1}) + (1 + \gamma)^2 \varepsilon^2 \sin^2(\phi_{n+1}).$$

Tomando-se o valor médio com $\phi_{n+1} \in [0, 2\pi]$ obtém-se

$$\overline{\nu_{n+1}^2} = \gamma^2 \overline{\nu_n^2} + \frac{(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2}{2}. \quad (2.35)$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas e integrações devidas encontra-se

$$\nu_{rms} = \sqrt{\frac{(1 + \gamma)\varepsilon^2}{2(1 - \gamma)}} [1 - \exp((\gamma^2 - 1)n)]^{1/2}. \quad (2.36)$$

Aplicando o limite em que $n \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\nu_{rms} = \sqrt{\frac{(1 + \gamma)}{2}} \varepsilon (1 - \gamma)^{-1/2}. \quad (2.37)$$

Conforme discutido em [11], a velocidade de saturação é dada por

$$\overline{\nu_{sat}} \propto \varepsilon^{\alpha_1} (1 - \gamma)^{\alpha_2}. \quad (2.38)$$

Dessa forma concluí-se que os expoentes críticos são $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1/2$.

Para n pequeno, a velocidade média cresce com $\sqrt{n}$. Para n suficientemente grande, a velocidade média aproximada de um regime de saturação. O número de colisões características onde ocorre a mudança de crescimento para saturação, conforme discutido em [11] é

$$n_x \propto \varepsilon^{z_1} (1 - \gamma)^{z_2}. \quad (2.39)$$

Para obter as expressões dos expoentes críticos z_1 e z_2 , basta igualar as equações $\nu = \sqrt{2\varepsilon^2 n}$ com $\nu = \sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2}} \varepsilon (1 - \gamma)^{-1/2}$. Fazendo-se as devidas simplificações, encontra-se

$$n_x = \frac{1+\gamma}{4} (1 - \gamma)^{-1}. \quad (2.40)$$

Com isso conclui-se que $z_1 = 0$ e $z_2 = -1$.

2.4 Relação entre número de colisões e tempo

Na impossibilidade de medir o número de colisões em experimentos é necessário encontrar uma forma alternativa para mensurar o tempo. A solução para esta questão é determinar uma relação entre o número de colisões e o tempo. Para encontrarmos uma relação entre número de colisões e o tempo utiliza-se a definição de aceleração [11], ou seja $a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, portanto tem-se que

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{a}.$$

No nosso caso é possível escrever,

$$t = \frac{2V}{g},$$

que identifica o tempo gasto entre duas colisões. Quando soma-se sobre todas as colisões tem-se que

$$t = \frac{2}{g} \sum_{i=0}^{n-1} V_i. \quad (2.41)$$

Pode-se relacionar o conceito de soma discreta para soma contínua, pelo uso da integral definida,

$$t = \frac{2}{g} \int_0^n V(n) dn. \quad (2.42)$$

Usaremos o conjunto de variáveis utilizadas na obtenção dos expoentes críticos ν e aplicaremos uma função empírica proposta em [16]

$$f(x) = \left[\frac{x}{1+x} \right]^\beta, \quad (2.43)$$

na qual o expoente β é um expoente crítico.

Fazendo-se $f(x) \rightarrow \frac{\nu}{\varepsilon^{\alpha_1}(1-\gamma)^{\alpha_2}}$ e $x \rightarrow \frac{n}{(1-\gamma)^{z_2}}$, encontra-se

$$\frac{\nu}{\varepsilon^{\alpha_1}(1-\gamma)^{\alpha_2}} = \left[\frac{\frac{n}{(1-\gamma)^{z_2}}}{1 + \left(\frac{n}{(1-\gamma)^{z_2}} \right)} \right]^{\beta}.$$

Tendo os valores dos expoentes $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1/2$, $z_2 = -1$ e $\beta = 1/2$, aplica-se na expressão acima, obtendo-se

$$\frac{\nu}{\varepsilon(1-\gamma)^{-1/2}} = \left[\frac{\frac{n}{(1-\gamma)^{-1}}}{1 + \left(\frac{n}{(1-\gamma)^{-1}} \right)} \right]^{1/2}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\nu(1-\gamma)^{1/2}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}}, \quad (2.45)$$

$$\nu = \frac{\varepsilon}{(1-\gamma)^{1/2}} \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}}. \quad (2.46)$$

Fazendo a substituição nas variáveis originais do modelo $\nu = \frac{\omega V}{g}$ e $\varepsilon = \frac{\epsilon \omega^2}{g}$, tem-se

$$\frac{\omega V}{g} = \frac{\epsilon \omega^2}{g} \frac{1}{(1-\gamma)^{1/2}} \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}}, \quad (2.47)$$

$$V = \frac{g \epsilon \omega^2}{\omega g (1-\gamma)^{1/2}} \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}}, \quad (2.48)$$

$$V = \frac{\epsilon \omega}{(1-\gamma)^{1/2}} \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}}. \quad (2.49)$$

Retornando na integral, encontra-se

$$t = \frac{2}{g} \int_0^n V(n) dn = \frac{2}{g} \int_0^n \frac{\epsilon \omega}{(1-\gamma)^{1/2}} \sqrt{\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)}} dn.$$

Chamando $n' = n(1 - \gamma)$ e $dn = \frac{dn'}{(1 - \gamma)}$, tem-se

$$t = \frac{2}{g} \frac{\epsilon\omega}{(1 - \gamma)^{1/2}(1 - \gamma)} \int_0^{n(1-\gamma)} \sqrt{\frac{n'}{1 + n'}} dn'.$$

Realizando a integração,

$$\int_0^{n(1-\gamma)} \left(\frac{n'}{1 + n'} \right)^{1/2} dn' = n(1 - \gamma) - \ln(n(1 - \gamma)),$$

o termo em logaritmo natural cresce muito lentamente em relação a termo linear para argumentos muito maior do que 1 e por este motivo descarta-se o termo transcendente,

$$t = \frac{2\epsilon\omega}{g(1 - \gamma)^{1/2}(1 - \gamma)} n(1 - \gamma),$$

então

$$t = \frac{2\epsilon\omega}{g(1 - \gamma)^{1/2}} n. \quad (2.50)$$

Isolando n da expressão, tem-se

$$n = \frac{g\sqrt{1 - \gamma}}{2\epsilon\omega} t. \quad (2.51)$$

Essa equação fornece uma relação explícita entre o tempo e o número de colisões.

2.5 Conexão com a Termodinâmica

Partindo do teorema de equipartição de energia [17, 18], tiveram

$$\frac{m\overline{V^2}}{2} = \frac{K_B T}{2},$$

logo

$$\overline{V^2} = \frac{K_B T}{m}. \quad (2.52)$$

Sabendo que

$$\overline{V^2} = \overline{V_0^2} \exp((\gamma^2 - 1)n) + \frac{(1 + \gamma)\epsilon^2\omega^2}{2(1 - \gamma)} [1 - \exp((\gamma^2 - 1)n)], \quad (2.53)$$

assim tem-se $T(n)$ como

$$T(n) = T_0 \exp((\gamma^2 - 1)n) + \frac{(1 + \gamma)m\epsilon^2\omega^2}{2K_B(1 - \gamma)} [1 - \exp((\gamma^2 - 1)n)]. \quad (2.54)$$

Usando a relação $n = \frac{g\sqrt{1-\gamma}}{2\epsilon\omega}t$, encontra-se a velocidade e a temperatura em função do tempo,

$$\overline{V^2} = \overline{V_0^2} \exp\left((\gamma^2 - 1)\frac{g(1-\gamma)^{1/2}}{2\epsilon\omega}t\right) + \frac{(1+\gamma)\epsilon^2\omega^2}{2(1-\gamma)}\left[1 - \exp\left((\gamma^2 - 1)\frac{g(1-\gamma)^{1/2}}{2\epsilon\omega}t\right)\right], \quad (2.55)$$

$$T(t) = T_0 \exp\left((\gamma^2 - 1)\frac{g(1-\gamma)^{1/2}}{2\epsilon\omega}t\right) + \frac{(1+\gamma)m\epsilon^2\omega^2}{2K_B(1-\gamma)}\left[1 - \exp\left((\gamma^2 - 1)\frac{g(1-\gamma)^{1/2}}{2\epsilon\omega}t\right)\right]. \quad (2.56)$$

A figura 1.1 ilustra um esboço típico da temperatura em função do tempo, para $T_0 \rightarrow 0$. Agora que tem-se as expressões da velocidade e temperatura pode-se obter a energia e a entropia do sistema, ou seja

$$U(t) = \frac{K_B}{2}T(t),$$

$$T(t) = \frac{2}{K_B}U(t). \quad (2.57)$$

Utilizando a relação

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad (2.58)$$

encontra-se

$$dS = \int \frac{1}{T}dU.$$

Como já se conhece a expressão de $T(t)$, aplica-se a integração em toda a equação,

$$\int_{S_0}^S dS = \int_{U_0}^U \left(\frac{2}{K_B}U(t)\right)^{-1} dU,$$

o que conduz a

$$S = S_0 + \frac{K_B}{2} \ln\left(\frac{U(t)}{U_0(t)}\right).$$

Sabe-se que $\ln\left(\frac{U(t)}{U_0(t)}\right) = \ln(U(t)) - \ln(U_0(t))$, então

$$S = S_0 + \left[\frac{K_B}{2} \ln(U(t)) - \frac{K_B}{2} \ln(U_0(t))\right]. \quad (2.59)$$

Agrupam-se os termos,

$$S = S_0 - \frac{K_B}{2} \ln(U_0(t)) + \frac{K_B}{2} \ln(U(t)). \quad (2.60)$$

Chama-se $\tilde{S} = S_0 - \frac{K_B}{2} \ln(U_0(t))$, tem-se uma relação mais simples de ser visualizada,

$$S = \tilde{S} + \frac{K_B}{2} \ln(U(t)), \quad (2.61)$$

sendo $U(t) = \frac{K_B}{2} T(t)$, tem-se a expressão da entropia em relação a temperatura.

$$S = \tilde{S} + \frac{K_B}{2} \ln\left(\frac{K_B}{2} T(t)\right). \quad (2.62)$$

Esse resultado confirmou o terceiro postuldo da termodinâmica, ou seja, que a entropia é uma função monotonicamente crescente da energia [18, 19].

Capítulo 3

Estatística para o modelo do bilhar ovóide dependente do tempo e dissipativo

Neste Capítulo apresentaremos a dinâmica e as características do bilhar ovóide bidimensional dissipativo. Para nosso estudo, consideraremos um ensemble de partículas não interagentes. Obteremos as equações que descrevem o comportamento da velocidade quadrática média como função dos parâmetros de controle assim como do número de colisões.

3.1 O Modelo e o Mapeamento

A dependência temporal em bilhares bidimensionais pode ser feita de diferentes formas. Apresentaremos três tipos de dependências para o bilhar Ovóide.

1. Dependência temporal por rotação [20] é feita com a fronteira do bilhar rotacionando no tempo. A forma que podemos visualizar esta dependência é pela equação que descreve o raio do bilhar, na qual para este caso temos,

$$R_b = (\theta, p, \epsilon, t) = 1 + \epsilon \cos(p\theta'(t)),$$

na qual $\theta'(t) = \theta + \omega t$. O gráfico de fronteira no tempo apresentado abaixo.

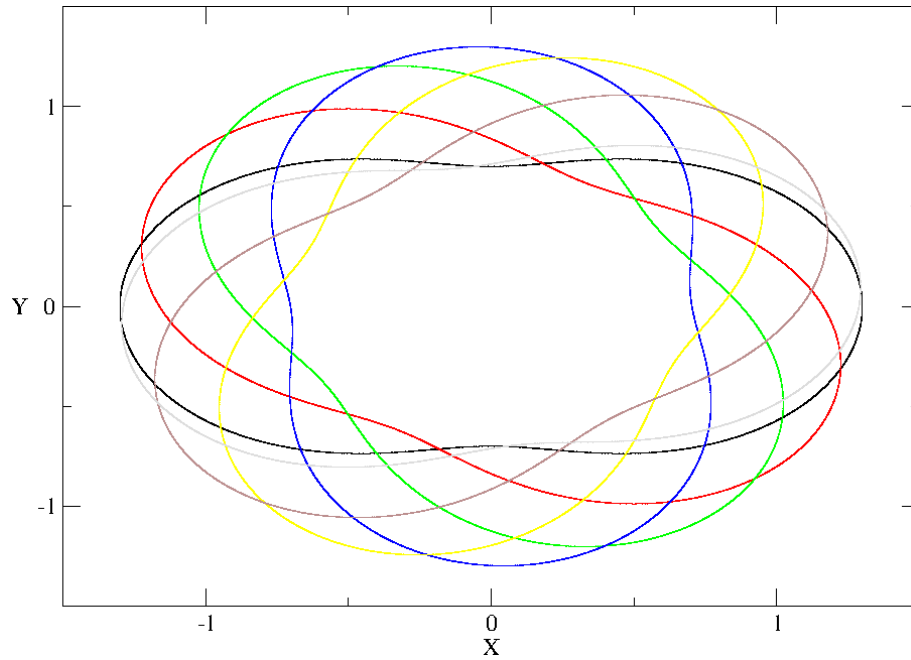


Figura 3.1: Bilhar rotacionando no tempo para $\epsilon = 0, 3$, $p = 2$ e $\omega = 1$. Cada curva identifica um instante de tempo diferente.

2. Dependência temporal por oscilação do tipo *breathing* [21] é feita com a fronteira do bilhar oscilando no tempo, na qual a forma da fronteira é preservada e sua área não é preservada. A forma é de maneira análoga ao item anterior e a equação que descreve o raio do bilhar é

$$R_b(\theta, p, \epsilon, \eta_1, \eta_2, t) = 1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon[1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta)$$

O gráfico de fronteira no tempo apresentado abaixo.

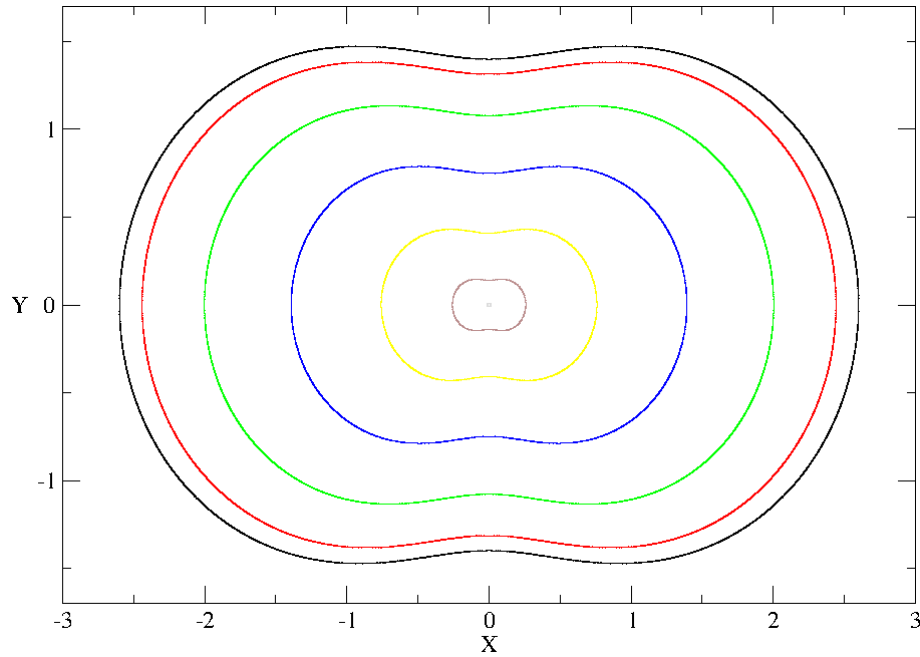


Figura 3.2: Bilhar oscilante com forma *breathing* no tempo para $\epsilon = 0,3$, $p = 2$ e $\eta_1 = \eta_2 = 1$. Cada curva identifica um instante de tempo diferente.

3. Dependência temporal por oscilação é feita com a fronteira do bilhar pulsando no tempo, na qual a forma da fronteira não preservada e sua área é preservada. A forma é de maneira análoga ao item anterior e a equação que descreve o raio do bilhar é $R(\theta, \epsilon, t) = 1 + \epsilon(1 + a \cos(\omega t)) \cos(p\theta)$, na qual ω será igual a 1 rad/s . A figura 3.3 ilustra a fronteira do bilhar para diversos instantes de tempo.

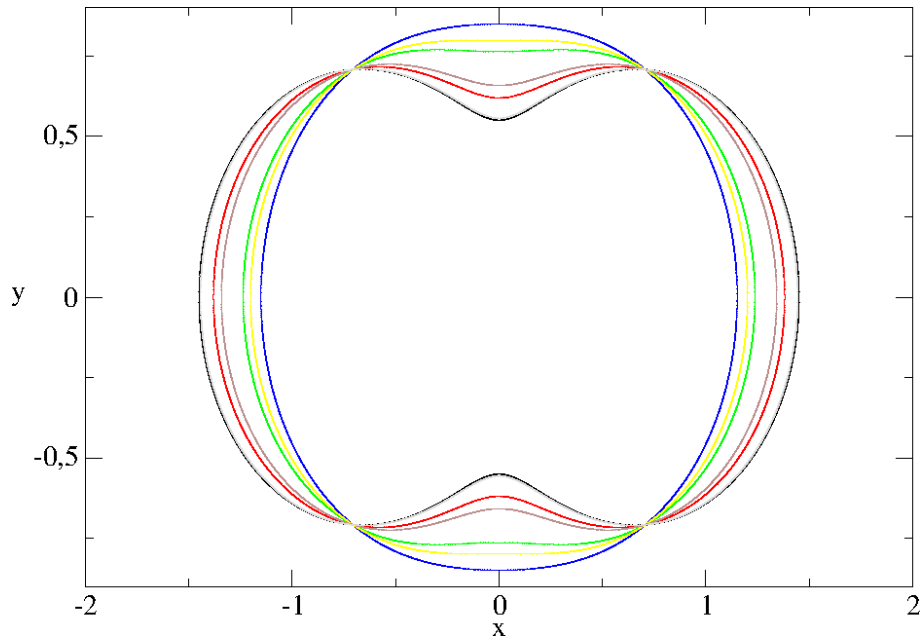


Figura 3.3: Bilhar oscilante no tempo para $\epsilon = 0,3$, $p = 2$ e $a = 0,5$. Cada curva identifica um instante de tempo diferente.

O nosso trabalho é desenvolvido para a dependência temporal oscilante da fronteira com os parâmetros fixos de $\epsilon = 0, 3$, $p = 2$ e $a = 0, 5$.

O bilhar Ovóide é um sistema dinâmico discreto e descrito por um mapeamento discreto quadridimensional nas variáveis $(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$. θ_n é o ângulo que descreve a fronteira; α_n é o ângulo entre a trajetória da partícula e a linha tangente ao ponto de colisão com a fronteira em θ_n ; V_n é a velocidade da partícula; t_n é o instante da n -ésima colisão da partícula com a fronteira.

Agora iremos apresentar as equações da dinâmica do Bilhar. As equações desenvolvidas nesta seção serão utilizadas durante todo o Capítulo para a obtenção analítica de observáveis físicos.

Dada uma condição inicial, $(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$ a dinâmica da partícula é regida pela relação,

$$X(t) = X(\theta_n, t_n) + |V_n| \cos(\alpha_n + \phi_n)(t - t_n), \quad (3.1)$$

$$Y(t) = Y(\theta_n, t_n) + |V_n| \sin(\alpha_n + \phi_n)(t - t_n). \quad (3.2)$$

Aqui $\phi_n = \arctan(Y'(\theta_n, t_n)/X'(\theta_n, t_n))$, sendo que $X'(\theta_n, t_n) = dX/d\theta$ e $Y'(\theta_n, t_n) = dY/d\theta$.

O termo θ_{n+1} é obtido seguindo a trajetória da partícula até o momento $t = t_n + \Delta t$, onde Δt satisfaz a equação

$$R(\Delta t) = \sqrt{X^2(\Delta t) + Y^2(\Delta t)}. \quad (3.3)$$

O instante da próxima colisão t_{n+1} é obtido por

$$t_{n+1} = t_n + \sqrt{\frac{[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] + [Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n)]}{|\vec{V}_n|}}. \quad (3.4)$$

A regra de reflexão é dada por

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1}, \quad (3.5)$$

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}'_n \cdot \vec{N}'_{n+1}, \quad (3.6)$$

onde $\vec{T}$ e $\vec{N}$ são vetores unitários tangente e normal respectivamente, dados pelas relações

$$\vec{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \sin(\phi_{n+1})\hat{j}, \quad (3.7)$$

$$\vec{N}_{n+1} = -\sin(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}, \quad (3.8)$$

e $\vec{V}'_n$ é dado por

$$\vec{V}'_n = [\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{i} + \sin(\phi_n + \alpha_n)\hat{j}] \vec{V}_n, \quad (3.9)$$

onde $\hat{i}$ e $\hat{j}$ definem os versores ao longo dos eixos x e y respectivamente. O termo $\vec{V}'$ corresponde a velocidade da partícula no referencial não inercial, devido ao referencial não inercial da fronteira. Assim temos

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1} + (1 + \gamma) \vec{V}_b(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1} \quad (3.10)$$

o termo $\vec{V}_b(t_{n+1})$ é a velocidade da fronteira e é descrita pela equação,

$$\vec{V}_b(t_{n+1}) = \frac{dR(t)}{dt} [\cos(\theta_{n+1})\hat{i} + \sin(\theta_{n+1})\hat{j}]. \quad (3.11)$$

Para encontrar as componentes da velocidade da partícula após o choque, iremos desenvolver cada termo das equações (3.5) e (3.10). Começaremos com o comportamento normal, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} &= |V_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{i} + \sin(\phi_n + \alpha_n)\hat{j}] \cdot [-\sin(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}], \\ \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} &= |V_n| [-\sin(\phi_{n+1})\cos(\phi_n + \alpha_n) + \cos(\phi_{n+1})\sin(\phi_n + \alpha_n)], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_b(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1} &= \frac{dR(t)}{dt} [\cos(\theta_{n+1})\hat{i} + \sin(\theta_{n+1})\hat{j}] \cdot [-\sin(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}], \\ \vec{V}_b(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1} &= \frac{dR(t)}{dt} [-\sin(\phi_{n+1})\cos(\theta_{n+1}) + \cos(\phi_{n+1})\sin(\theta_{n+1})]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Então finalmente temos

$$\begin{aligned} \vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} &= -\gamma |V_n| [-\sin(\phi_{n+1})\cos(\phi_n + \alpha_n) + \cos(\phi_{n+1})\sin(\phi_n + \alpha_n)] + \\ &+ (1 + \gamma) \frac{dR(t)}{dt} [-\sin(\phi_{n+1})\cos(\theta_{n+1}) + \cos(\phi_{n+1})\sin(\theta_{n+1})]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A equação (3.5) apresenta um único termo a ser calculado.

$$\begin{aligned} \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1} &= |V_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{i} + \sin(\phi_n + \alpha_n)\hat{j}] \cdot [\cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \sin(\phi_{n+1})\hat{j}], \\ \vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} &= |V_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n)\sin(\phi_{n+1})]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A velocidade da partícula após a colisão é dada por

$$V_{n+1} = \sqrt{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2}, \quad (3.16)$$

na qual a coordenada angular α_{n+1} é

$$\alpha_{n+1} = \arctan\left(\frac{[\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}]}{[\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}]}\right). \quad (3.17)$$

A dinâmica da partícula é então descrita a partir das equações (3.3), (3.4), (3.16) e (3.17).

3.2 Velocidade quadrática média

Para obter a velocidade quadrática média, $\overline{V^2}$, e por fim estabelecer a relação com a temperatura e, consequentemente com a termodinâmica, devemos utilizar a equação do mapeamento da velocidade da partícula após a colisão, A equação é dada por

$$V_{n+1} = \sqrt{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2}. \text{ Elevando ao quadrado, temos}$$

$$V_{n+1}^2 = (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2.$$

Agora temos dois termos para realizar o valor quadrático médio. Fazendo a média no ensemble com $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ e $t \in [0, 2\pi]$ e assumindo que a distribuição de probabilidade das variáveis α e θ sejam constante e uniforme, eliminando os termos lineares, então $\overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2}$ é dado pela equação

$$\overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2} = \overline{V_n^2 \cos^2(\alpha_n + \phi_n) \cos^2(\phi_{n+1})} + \overline{V_n^2 \sin^2(\alpha_n + \phi_n) \sin^2(\phi_{n+1})},$$

como cada termo quadrático das funções periódicas contribui com 1/2, temos

$$\overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2} = \frac{\overline{V_n^2}}{2}. \quad (3.18)$$

Para o termo $\overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2}$, utilizamos as mesmas ideias do termo anterior e temos

$$\begin{aligned} \overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2} &= \gamma^2 \overline{V_n^2 \sin^2(\alpha_n + \phi_n) \cos^2(\phi_{n+1})} \gamma^2 \overline{V_n^2 \sin^2(\phi_{n+1}) \cos^2(\alpha + \phi_n)} + \\ &+ (1 + \gamma)^2 \overline{\left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2 \sin^2(\theta_{n+1}) \cos^2(\phi_{n+1})} + \\ &+ (1 + \gamma)^2 \overline{\left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2 \cos^2(\theta_{n+1}) \sin^2(\phi_{n+1})}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se $R(\theta, t) = 1 + \epsilon \cos(p\theta) + a\epsilon \cos(t) \cos(p\theta)$, sua derivada em t será

$$\frac{dR}{dt} = -a\epsilon \sin(t) \cos(p\theta),$$

logo

$$\overline{\left(\frac{dR}{dt} \right)^2} = a^2 \epsilon^2 \overline{\sin^2(t) \cos^2(p\theta)}. \quad (3.20)$$

Voltando a equação $\overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2}$ e utilizando as ideias discutidas no apêndice II, temos

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2 \overline{V_n^2}}{4} + \frac{\gamma^2 \overline{V_n^2}}{4} + \frac{(1 + \gamma)^2}{4} (a^2 \epsilon^2 \overline{\sin^2(t) \cos^2(p\theta)}) + \frac{(1 + \gamma)^2}{4} (a^2 \epsilon^2 \overline{\sin^2(t) \cos^2(p\theta)}), \\ \overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2} = \frac{\gamma^2 \overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2}{2} (a^2 \epsilon^2 \overline{\sin^2(t) \cos^2(p\theta)}). \end{aligned}$$

Então temos que o segundo termo é dado por

$$\overline{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2} = \frac{\gamma^2 \overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}. \quad (3.21)$$

Finalmente temos o $\overline{V_{n+1}^2}$ é dado por

$$\overline{V_{n+1}^2} = \frac{\overline{V_n^2}}{2} + \frac{\gamma^2 \overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}. \quad (3.22)$$

De posse da velocidade quadrática média, podemos estudar a velocidade do sistema em dois regimes: (i) estacionário; (ii) dinâmico. Apresentaremos como é obtida a equação que caracteriza o regime estacionário e depois a equação que caracteriza o regime dinâmico.

3.2.1 Regime estacionário

Para obter a equação da velocidade quadrática média no regime estacionário faremos seguinte abordagem, $\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} = \overline{V^2}$, logo

$$\begin{aligned} \overline{V^2} &= \frac{\overline{V^2}}{2} + \frac{\gamma^2 \overline{V^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}, \\ \overline{V^2} &= \frac{(1 + \gamma) a^2 \epsilon^2}{4(1 - \gamma)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora podemos obter a velocidade V_{rms} no regime estacionário, ou seja $V_{rms} = \sqrt{\overline{V^2}}$, assim

$$V_{rms} = \frac{a\epsilon}{2} \sqrt{(1 + \gamma)(1 - \gamma)^{-1/2}}. \quad (3.24)$$

3.2.2 Regime dinâmico

Para o regime dinâmico, temos

$$\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} \left(\frac{1 + \gamma^2}{2} \right) + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}.$$

Subtraindo $\overline{V_n^2}$ de ambos os lados, temos

$$\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = \gamma^2 \frac{\overline{V_n^2}}{2} - \frac{\overline{V_n^2}}{2} + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}.$$

Podemos realizar a aproximação do termo $\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}$ pelo conceito de derivada,

$$\frac{\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2}}{(n + 1) - n} \simeq \frac{d\overline{V^2}}{dn},$$

$$\frac{d\overline{V^2}}{dn} = \frac{\overline{V^2}}{2}(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}. \quad (3.25)$$

Integrando a equação acima obtemos

$$\int_{V_0}^V \frac{d\overline{V^2}}{\frac{\overline{V^2}}{2}(\gamma^2 - 1) + \frac{(1 + \gamma)^2 a^2 \epsilon^2}{8}} = \int_0^n dn, \quad (3.26)$$

que conduz a

$$\overline{V^2} = \overline{V_0^2} \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}\right) + \frac{(1 + \gamma)}{4(\gamma - 1)} a^2 \epsilon^2 \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}\right)\right]. \quad (3.27)$$

Considerando $\overline{V_0^2} \rightarrow 0$, temos

$$\overline{V^2} = \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} a^2 \epsilon^2 \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)}{2} n\right)\right].$$

Agora temos a velocidade V_{rms} no regime dinâmico que é a equação abaixo

$$V_{rms} = \frac{(1 + \gamma)^{1/2}}{2} (1 - \gamma)^{-1/2} a \epsilon \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)}{2} n\right)\right]^{1/2}. \quad (3.28)$$

Para investigar o comportamento de V_{rms} para tempos curtos podemos expandir a exponencial em série de Taylor, o que conduz a

$$\exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}\right) = 1 + \frac{(\gamma^2 - 1)n}{4} + \quad (3.29)$$

Desse modo, a velocidade é dada por

$$V_{rms} = \frac{(1 + \gamma)^{1/2}}{2} (1 - \gamma)^{-1/2} a \epsilon \left[1 - 1 - \frac{(\gamma^2 - 1)n}{4}\right]^{1/2}, \quad (3.30)$$

$$V_{rms} = \frac{(1 + \gamma)^{1/2}}{2} (1 - \gamma)^{-1/2} a \epsilon \left[\frac{(1 - \gamma^2)n}{4}\right]^{1/2}, \quad (3.31)$$

$$V_{rms} = \frac{(1 + \gamma)^{1/2}}{2} (1 - \gamma)^{-1/2} a \epsilon \left[\frac{(1 - \gamma)(1 + \gamma)n}{4}\right]^{1/2}, \quad (3.32)$$

$$V_{rms} \sim (a \epsilon) n^{1/2}. \quad (3.33)$$

Podemos então concluir que o expoente crítico $\beta = 1/2$. Um esboço típico do comportamento de V_{rms} vs n , dada pela equação (3.28) é mostrando na figura 3.4 para diferentes valores de γ . Vemos que para tempos curtos, ocorre um crescimento em lei de potência, conforme previsto pela equação (3.33). Para tempos suficientemente longos o crescimento dá lugar a saturação, como previsto pela equação (3.24).

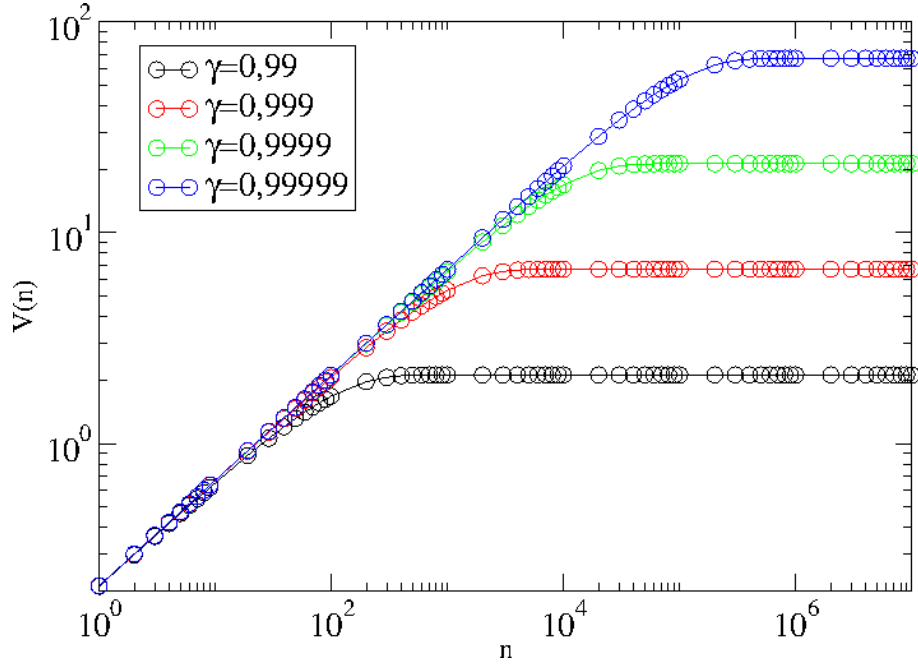


Figura 3.4: Esboço de V_{rms} em função de n para diferentes parâmetros de controle γ e $\epsilon = 0.3$.

3.3 Expoentes críticos

A partir dos resultados discutidos na seção anterior, podemos propor três hipóteses de escala que conduzirão uma lei de escala [22, 23]. As hipóteses são:

1. Crescimento para $n \ll n_x$

$$\bar{V} \propto [(a\epsilon)^2 n]^\beta, \quad (3.34)$$

onde β é o expoente que fornece a lei de aceleração da velocidade quadrática média;

2. Saturação para $n \gg n_x$

$$V_{sat} \propto (1 - \gamma)^{\alpha_1} (a\epsilon)^{\alpha_2}, \quad (3.35)$$

onde α_1 e α_2 são os expoentes que definem a saturação da velocidade quadrática média;

3. *Crossover* n_x

$$n_x \propto (1 - \gamma)^{z_1} (a\epsilon)^{z_2}, \quad (3.36)$$

onde z_1 e z_2 são expoentes críticos.

Para descobrir o valor de cada expoente faremos uso de uma ferramenta da física estatística denominada de função homogênea generalizada, que é escrita como

$$\bar{V} = l\bar{V}(l^b(a\epsilon)^2 n, l^c a\epsilon, l^d(1 - \gamma)), \quad (3.37)$$

onde l é um fator de escala. Escolhendo $l^b(a\epsilon)^2 n = 1$, então $l = ((a\epsilon)^2 n)^{-1/b}$ e substituindo na função homogênea generalizada, temos

$$\bar{V} = ((a\epsilon)^2 n)^{-1/b} \bar{V}_1(a\epsilon((a\epsilon)^2 n)^{-c/b}, (1 - \gamma)((a\epsilon)^2 n)^{-d/b}),$$

onde $\overline{V}_1$ é assumido constante para $n \ll n_x$.

Escolhendo $l^c a\epsilon = 1$, então $l = a\epsilon^{-1/c}$ e substituindo na função homogênea generalizada, temos

$$\overline{V} = a\epsilon^{-1/c} \overline{V}_2 \left(((a\epsilon)^2 n) (a\epsilon)^{-b/c}, (1 - \gamma) (a\epsilon)^{-d/c} \right), \quad (3.38)$$

onde $\overline{V}_2$ é constante para $n \gg n_x$.

Finalmente escolhendo $l^d (1 - \gamma) = 1$, então $l = (1 - \gamma)^{-1/d}$ e substituindo na função homogênea generalizada, temos

$$\overline{V} = (1 - \gamma)^{-1/d} \overline{V}_3 \left(((a\epsilon)^2 n) (1 - \gamma)^{-b/d}, a\epsilon (1 - \gamma)^{-c/d} \right), \quad (3.39)$$

onde $\overline{V}_3$ é constante para $n \gg n_x$.

Comparando $l = ((a\epsilon)^2 n)^{-1/b}$ e $l = a\epsilon^{-1/c}$, obtemos

$$\begin{aligned} ((a\epsilon)^2 n)^{-1/b} &= a\epsilon^{-1/c}, \\ n &= (a\epsilon)^{b/c-1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Comparando agora $l = ((a\epsilon)^2 n)^{-1/b}$ com $l = (1 - \gamma)^{-1/d}$, obtemos

$$\begin{aligned} ((a\epsilon)^2 n)^{-1/b} &= (1 - \gamma)^{-1/d}, \\ n &= a\epsilon^{-2} (1 - \gamma)^{b/d}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Agora vamos utilizar as equações das velocidades no regimes estacionário e dinâmico para encontrar o *crossover* do sistema

$$\frac{a\epsilon}{2} (1 + \gamma)^{1/2} (1 - \gamma)^{-1/2} = \frac{(1 + \gamma)^{1/2}}{2} (1 - \gamma)^{-1/2} a\epsilon \left[\frac{(1 - \gamma)(1 + \gamma)n}{4} \right]^{1/2},$$

então,

$$n_x = \frac{4}{(1 + \gamma)(1 - \gamma)} = 4(1 + \gamma)^{-1} (1 - \gamma)^{-1}. \quad (3.42)$$

Verificando a primeira hipótese $\overline{V} \propto (a\epsilon)n^\beta$, temos que $\beta = -1/b$, logo podemos afirmar que $b = -2$. Assim obtemos o expoente de aceleração do sistema

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (3.43)$$

O valor do expoente de aceleração, de acordo com a teoria do *random walk* [18], caracteriza um comportamento difusivo. A importância do comportamento difusivo é que a velocidade da partícula tem a mesma ordem de grandeza da velocidade da oscilação da fronteira faz com que as probabilidades de ganhar ou perder energia sejam iguais, em virtude da existência de dissipação a velocidade do sistema não cresce ilimitadamente, ou seja, o fenômeno de aceleração de Fermi é suprimido.

Para a segunda hipótese $V_{sat} \propto (1 - \gamma)^{\alpha_1} (a\epsilon)^{\alpha_2}$, com $\alpha_1 = -1/d$ e $\alpha_2 = -1/c$ podemos afirmar $d = 2$ e $c = -1$ que os expoentes de saturação do sistema são

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad (3.44)$$

$$\alpha_2 = 1. \quad (3.45)$$

Para a terceira hipótese usaremos as comparações realizadas anteriormente $n = a\epsilon^{b/c-1}$ e $n = (a\epsilon)^{-2}(1 - \gamma)^{b/d}$ para obter os expoentes z_1 e z_2 , temos

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta} = \frac{b}{d} = -1, \quad (3.46)$$

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2 = \frac{b}{c} - 2 = 0. \quad (3.47)$$

Esses expoentes estão em total acordo com a expressão de n_x ,

$$n_x = 4(1 + \gamma)^{-1}(1 - \gamma)^{-1}.$$

De posse destes expoentes podemos reescalar os gráficos da velocidade em função do número de colisões. A figura 3.5 mostra um esboço de: (a) V vs n para diferentes valores de γ ao passo que em (b) mostra a sobreposição de todas as curvas de V mostradas em (a) em uma única curva universal usando uma escala apropriada nos eixos coordenados.

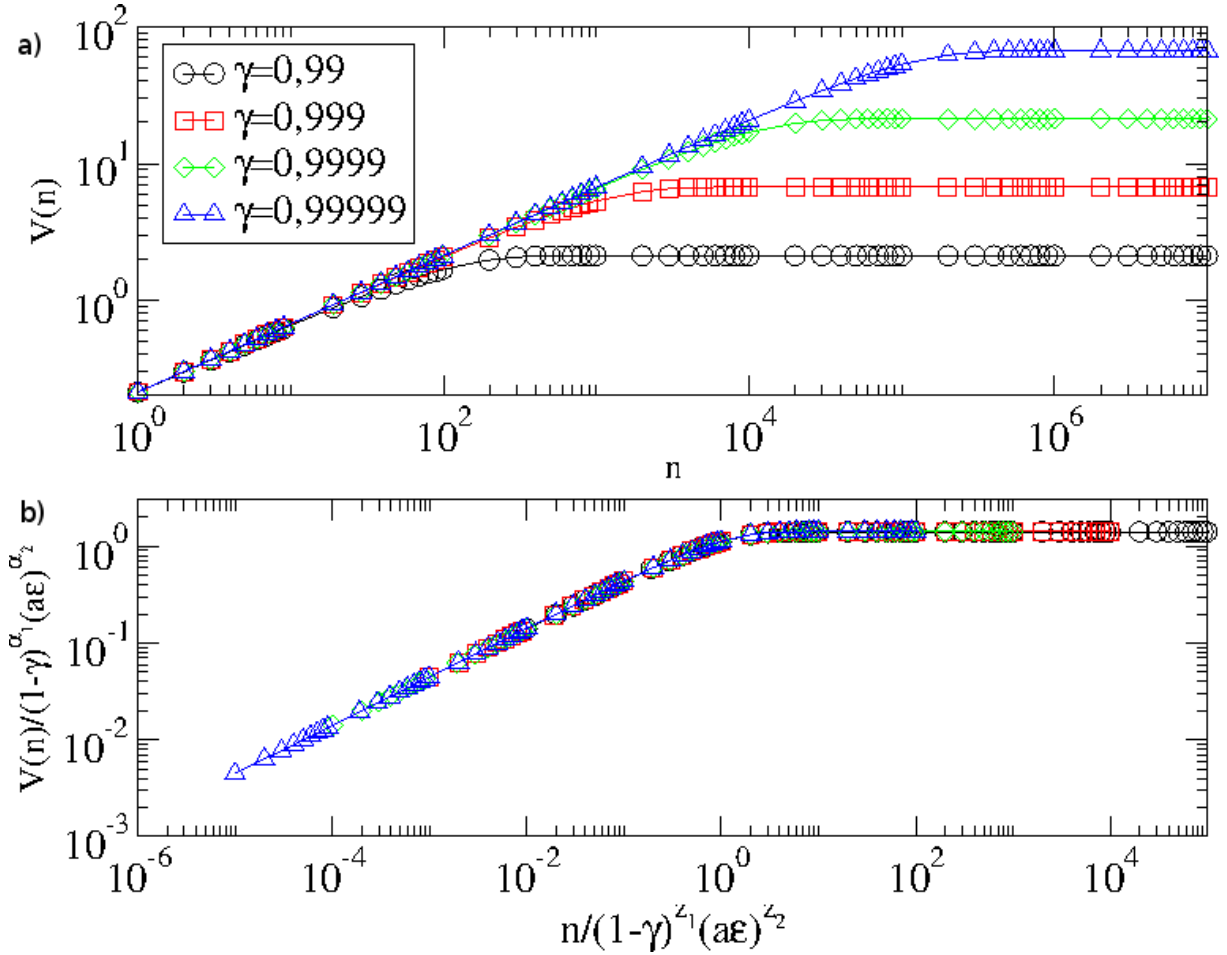


Figura 3.5: a) esboço de V_{rms} vs n . b) sobreposição das curvas mostradas em a) em uma única curva universal.

A figura 3.6 mostra um esboço de: (a) V vs n para diferentes valores de $a\epsilon$ e γ ao passo que em (b) mostra a sobreposição de todas as curvas de V mostradas em (a) em uma única curva universal.

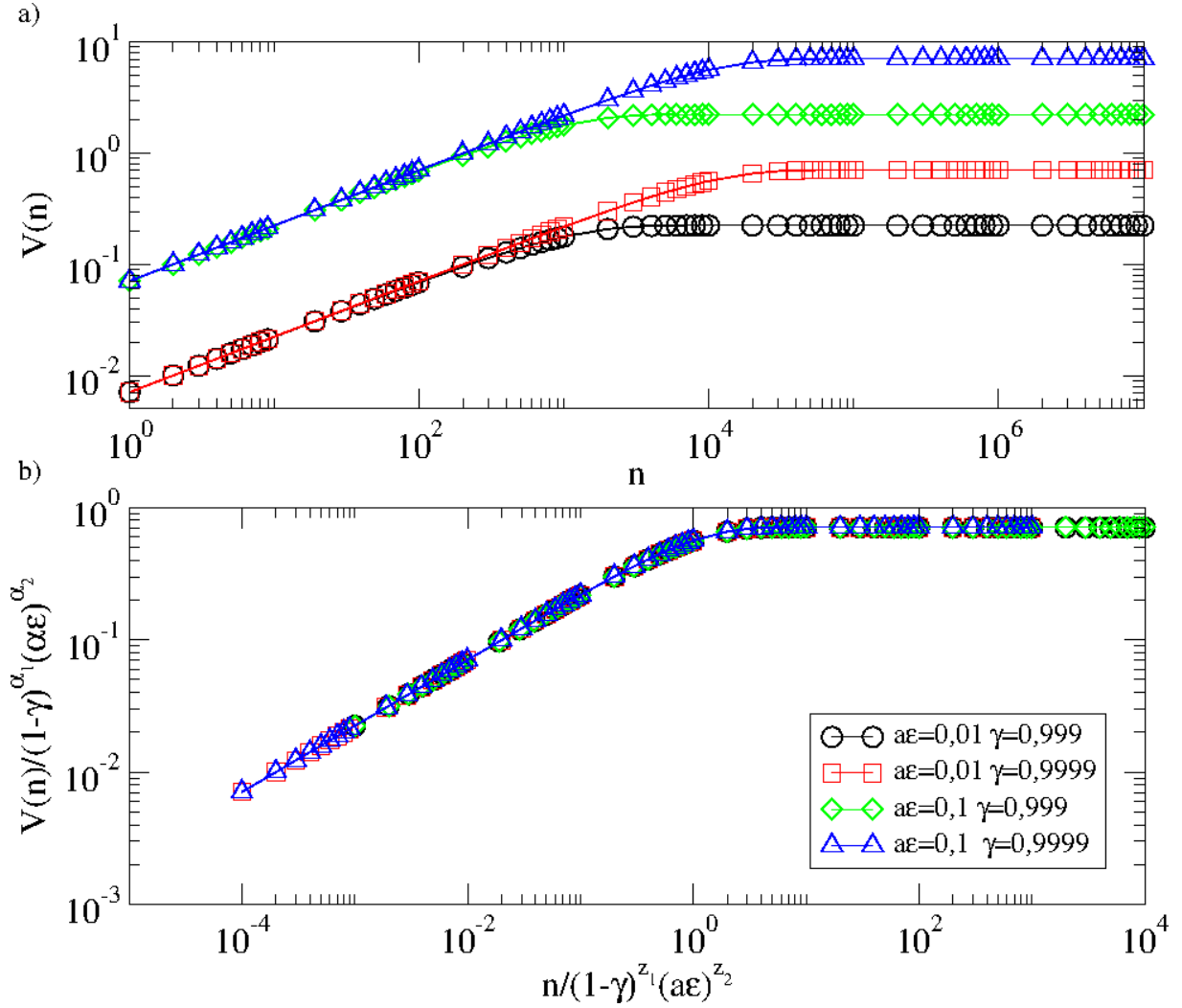


Figura 3.6: a) esboço de V_{rms} vs n para diferentes $a\epsilon$ e γ . b) sobreposição das curvas mostradas em a) em uma única curva universal.

3.4 Relação entre o número de colisões e o tempo

Nesta seção discutiremos o caminho para obter uma relação entre o número de colisões e o tempo. Para fazermos isso é preciso calcular o livre caminho médio do sistema e utilizar os expoentes críticos para determinar a relação desejada.

3.4.1 Deslocamento quadrático médio

Seja $R(\theta_n, t_n) = [1 + \epsilon(1 + a \cos(t_n)) \cos(p\theta)]$, assim as coordenadas da posição da partícula são $X(\theta_n, t_n)$ e $Y(\theta_n, t_n)$ expressas na forma

$$X(\theta_n, t_n) = R(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n),$$

$$Y(\theta_n, t_n) = R(\theta_n, t_n) \sin(\theta_n).$$

Para determinar o livre caminho médio faremos $d^2 = [X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)]^2 + [Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n)]^2$, logo

$$\begin{aligned} d^2 &= X^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) - 2X(\theta_{n+1}, t_n + 1)X(\theta_n, t_n) + \\ &+ X^2(\theta_n, t_n) + Y^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) - \\ &- 2Y(\theta_{n+1}, t_{n+1})Y(\theta_n, t_n) + Y^2(\theta_n, t_n). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para cada elemento da equação acima, temos

$$X^2(\theta_n, t_n) = R^2(\theta_n, t_n) \cos^2(\theta_n), \quad (3.49)$$

$$Y^2(\theta_n, t_n) = R^2(\theta_n, t_n) \sin^2(\theta_n), \quad (3.50)$$

$$X^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) \cos^2(\theta_{n+1}), \quad (3.51)$$

$$Y^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) \sin^2(\theta_{n+1}). \quad (3.52)$$

Reagrupando os termos e utilizando a identidade trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, temos

$$d^2 = R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1}) + R^2(\theta_n, t_n) - 2[X(\theta_{n+1}, t_{n+1})X(\theta_n, t_n) + Y(\theta_{n+1}, t_{n+1})Y(\theta_n, t_n)]. \quad (3.53)$$

Determinando o valor médio no ensemble $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in [0, 2\pi]$ para os termos $R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1})$ e $R^2(\theta_n, t_n)$, temos

$$\begin{aligned} R^2(\theta_n, t_n) &= [1 + \epsilon(1 + a \cos(t_n)) \cos(p\theta)]^2, \\ \overline{R^2(\theta_n, t_n)} &= 1 + 2\epsilon \overline{(1 + a \cos(t)) \cos(p\theta_n)} + \epsilon^2 \overline{(1 + a \cos(t))^2 \cos^2(p\theta_n)}. \end{aligned}$$

Como a média dos termos lineares é nula, então restam somente os seguintes termos

$$\overline{R^2(\theta_n, t_n)} = 1 + \epsilon^2 \left(\frac{2 + a^2}{4} \right). \quad (3.54)$$

Resultado igual para o termo $\overline{R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1})}$, logo

$$\overline{R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1})} = 1 + \epsilon^2 \left(\frac{2 + a^2}{4} \right). \quad (3.55)$$

O termo $-2[X(\theta_{n+1}, t_{n+1})X(\theta_n, t_n) + Y(\theta_{n+1}, t_{n+1})Y(\theta_n, t_n)]$ será nulo devido as propriedades discutidas no apêndice II. Então $\overline{d^2} = \overline{R^2(\theta_{n+1}, t_{n+1})} + \overline{R^2(\theta_n, t_n)}$ é dado por

$$\overline{d^2} = 2 + 2\epsilon^2 \left(\frac{2 + a^2}{4} \right) = 2 + \epsilon^2 \left(\frac{4 + 2a^2}{4} \right).$$

A expressão de d_{rms} é dada por

$$d_{rms} = \sqrt{2 + \epsilon^2 \left(1 + \frac{a^2}{2} \right)}. \quad (3.56)$$

A quantidade tem grande utilidade para a obtenção da relação entre número de colisões e o tempo.

3.4.2 Relação entre número de colisões e o tempo

Para encontrar a relação entre número de colisões e o tempo precisamos determinar $V(n)$ através dos expoentes críticos obtidos na seção anterior. Utilizaremos uma função empírica [16] que relaciona os expoentes críticos com os elementos V e n .

Seja a função empírica $f(x)$

$$f(x) = \left[\frac{x}{1+x} \right]^\beta. \quad (3.57)$$

Agora faremos as manipulações algébricas dos termos $f(x)$ e x . Para o termo $f(x)$, temos

$$f(V_n) = \frac{V_n}{(1-\gamma)^{\alpha_1}(a\epsilon)^{\alpha_2}},$$

e para o termo x , temos

$$x = \frac{n}{(1-\gamma)^{z_1}}.$$

Então a função empírica, será

$$\frac{V_n}{(1-\gamma)^{\alpha_1}(a\epsilon)^{\alpha_2}} = \left[\frac{\frac{n}{(1-\gamma)^{z_1}}}{1 + \frac{n}{(1-\gamma)^{z_1}}} \right]^\beta, \quad (3.58)$$

sendo que os expoentes são $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $z_1 = -1$. Desse modo

$$\begin{aligned} \frac{V_n(1-\gamma)^{1/2}}{a\epsilon} &= \left[\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)} \right]^{1/2}, \\ V_n &= \frac{a\epsilon}{(1-\gamma)^{1/2}} \left[\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agora que temos $V(n)$, usaremos a relação abaixo para determinar número de colisões pelo tempo, ou seja

$$t(n) = d_{rms} \sum_{i=1}^n \frac{1}{V(n)}. \quad (3.60)$$

Podemos aproximar o somatório por uma integral definida e obtermos a equação

$$t(n) = d_{rms} \int_0^n \frac{1}{V(n)} dn. \quad (3.61)$$

Substituindo a expressão de $V(n)$ na equação acima, obtemos a integral a ser resolvida por substituição de variáveis e frações parciais

$$t(n) = d_{rms} \int_0^n \frac{1}{\frac{a\epsilon}{(1-\gamma)^{1/2}} \left[\frac{n(1-\gamma)}{1+n(1-\gamma)} \right]^{1/2}} dn, \quad (3.62)$$

$$t(n) = d_{rms} \frac{(1-\gamma)^{1/2}}{a\epsilon} \int_0^n \left[\frac{1+n(1-\gamma)}{n(1-\gamma)} \right]^{1/2} dn. \quad (3.63)$$

Fazendo a substituição do termo $u = n(1-\gamma)$, $dn = \frac{du}{(1-\gamma)}$, encontramos

$$t(n) = d_{rms} \frac{(1-\gamma)^{1/2}}{a\epsilon} \frac{1}{(1-\gamma)} \int_0^{n(1-\gamma)} \sqrt{\frac{1+u}{u}} du \quad (3.64)$$

Para resolver a integral faremos uma nova substituição de variáveis, $w = \frac{u+1}{u} = 1 + \frac{1}{u}$, $w-1 = \frac{1}{u}$ e fazendo $\frac{dw}{du} = \frac{1}{u} - \frac{u+1}{u^2}$, então $dw = \left(\frac{1}{u} - \frac{u+1}{u^2} \right) du$. Com dw já definido podemos fazer outra manipulação algébrica e obteremos o elemento infinitesimal dw final para realizar a integral, ou seja

$$dw = -(w-1)^2 du.$$

Voltando na integral (3.64), agora podemos reescrever de forma apropriada e realizar uma integração por partes, ou seja

$$- \int \frac{\sqrt{w}}{(w-1)^2} dw = - \left[\frac{\sqrt{w}}{w-1} - \int \frac{-1}{(w-1)} \frac{1}{2\sqrt{w}} dw \right]. \quad (3.65)$$

A segunda integral é obtida por frações parciais e será igual a $\frac{\ln(\sqrt{w}-1) - \ln(\sqrt{w}+1)}{2}$. O resultado final da integração é

$$- \int \frac{\sqrt{w}}{(w-1)^2} dw = \frac{\sqrt{w}}{w-1} - \frac{\ln(\sqrt{w}-1) + \ln(\sqrt{w}+1)}{2}, \quad (3.66)$$

sendo $w = \frac{u+1}{u} = 1 + \frac{1}{u}$ e $w-1 = \frac{1}{u}$, temos

$$\int_0^{n(1-\gamma)} \sqrt{\frac{1+u}{u}} du = \sqrt{\frac{u+1}{u}} u - \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{u+1}{u}} - 1\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{u+1}{u}} + 1\right)}{2} \Bigg|_0^{n(1-\gamma)}, \quad (3.67)$$

os termos expressos em logaritmos são descartados devido ao crescimento lento em relação a expressão da raiz quadrada e finalmente obteremos a relação $t(n)$ dada pela equação,

$$t(n) = d_{rms} \frac{(1-\gamma)^{1/2}}{a\epsilon} \frac{1}{(1-\gamma)} \sqrt{\left[\frac{n(1-\gamma)+1}{n(1-\gamma)} \right]} n(1-\gamma).$$

Fazendo uma manipulação algébrica dos elementos dentro da raiz quadrada temos uma relação mais simples e eficiente para uma análise do número de colisões n , ou seja

$$t(n) = d_{rms} \frac{(1-\gamma)^{1/2}}{a\epsilon} \frac{1}{(1-\gamma)} \sqrt{\left[\frac{1}{n(1-\gamma)} + 1 \right]} (n(1-\gamma)). \quad (3.68)$$

Para uma análise simples sobre o crescimento ilimitado de colisões faremos o limite do termo dentro da raiz quadrada tendendo ao infinito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1-\gamma)} = 0$$

este resultado mostra que para podemos reduzir a equação $t(n)$ de forma mais simples.

$$t(n) = \frac{d_{rms}}{a\epsilon} n(1-\gamma)^{1/2} \quad (3.69)$$

Agora utilizaremos o resultado do deslocamento quadrático médio (3.56) para obter uma relação final, logo

$$t(n) = \frac{1}{a\epsilon} \sqrt{2 + \epsilon^2 \left(\frac{2 + a^2}{2} \right)} (1-\gamma)^{1/2} n.$$

A relação de número de colisões e o tempo é finalmente dada pela manipulação dos elementos onde esta no número de colisões

$$n = a\epsilon \left(\frac{1}{\left(2 + \epsilon^2 \left(\frac{2 + a^2}{2} \right) \right)^{1/2}} \right) \frac{t}{(1-\gamma)^{1/2}}. \quad (3.70)$$

$$n = \frac{a\epsilon t}{d_{rms}(1-\gamma)^{1/2}} \quad (3.71)$$

3.5 Conexão com a termodinâmica

A conexão com a termodinâmica é feita pelo teorema de equipartição de energia. Levando em consideração que o sistema tem dois graus de liberdade, expressão fica da seguinte forma,

$$\frac{m}{2} \overline{V^2(t)} = K_b T(t) = U(t). \quad (3.72)$$

Por outro lado, pela equação (3.27),

$$\overline{V^2} = \overline{V_0^2} \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}\right) + \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} a^2 \epsilon^2 \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)n}{2}\right)\right], \quad (3.73)$$

e como já temos a expressão da relação de número de colisões e o tempo (3.71), podemos escrever

$$\overline{V^2} = \overline{V_0^2} \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}\right) + \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} a^2 \epsilon^2 \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}\right)\right]. \quad (3.74)$$

Esta relação utiliza o elemento d_{rms} por questão de simplicidade em apresentar a discussão sobre a conexão da termodinâmica. Então da equação (3.72) obtém-se

$$T(t) = \frac{m}{2K_b} \overline{V^2(t)},$$

$$T(t) = T_0 \frac{m}{2K_b} \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}\right) + \frac{m}{2K_b} \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} a^2 \epsilon^2 \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}\right)\right]. \quad (3.75)$$

Ao utilizarmos as relações termodinâmicas

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad (3.76)$$

$$dS = \frac{1}{T} dU, \quad (3.77)$$

com $T(t) = \frac{1}{K_b} U(t)$, temos

$$dS = K_b \frac{1}{U(t)} dU,$$

$$\int_{S_0}^S dS = \int_{U_0}^U K_b \frac{1}{U(t)} dU, \quad (3.78)$$

$$S = S_0 - K_b \ln(U_0) + K_b \ln(U). \quad (3.79)$$

Chamando $\tilde{S} = S_0 - K_b \ln(U_0)$, ficamos com

$$S = \tilde{S} + K_b \ln(U). \quad (3.80)$$

Podemos reescrever a equação acima de modo que obtemos uma equação envolvendo todos os parâmetros discutidos neste capítulo, ou seja,

$$S = \tilde{S} + K_b \ln\left(U_0 \frac{m}{2} \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}\right) + \frac{m}{2} \frac{(1 + \gamma)}{4(1 - \gamma)} a^2 \epsilon^2 \left[1 - \exp\left(\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}\right)\right]\right). \quad (3.81)$$

Esse resultado confirma o 3º postulado da termodinâmica[18, 19].

Capítulo 4

Termodinâmica de Bilhares

Neste capítulo discutiremos a abordagem termodinâmica para bilhares bidimensionais gerais e depois apresentaremos a abordagem para o bilhar apresentado no Capítulo 3. A descrição nesse Capítulo segue a ideia básica apresentada nos trabalhos [24, 25].

4.1 Equilíbrio térmico

Consideraremos um bilhar bidimensional com fronteira dependente do tempo descrita por $R(\theta, t)$. A fronteira consiste de N átomos. Então a área A' de interação deve ser definida como perímetro interno da fronteira dividido por N . O Hamiltoniano da partícula no bilhar é

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + E_p(q_x, q_y), \quad (4.1)$$

e a energia potencial $E_p(q_x, q_y)$ é dada por:

1. se q_x, q_y não pertencerem à fronteira $E_p(q_x, q_y) = 0$;
2. se q_x, q_y pertencerem à fronteira $E_p(q_x, q_y) = \infty$.

Para o movimento bidimensional, o teorema de equipartição de energia aplicado para a partícula, pode ser escrito como

$$\frac{\overline{p^2}}{2m} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = K_b T, \quad (4.2)$$

uma vez que o sistema tem dois graus de liberdade.

De mesmo modo uma partícula na fronteira tem a energia na forma

$$\frac{\overline{P^2}}{2M} = \frac{M\overline{V_f^2}}{2} = K_b T_f, \quad (4.3)$$

na qual P , M , V_f, T_f são respectivamente o momentum, a massa, velocidade e temperatura da partícula na fronteira.

Para a fronteira, teremos

$$\frac{\overline{\mathcal{P}^2}}{2M} = \frac{NM}{2}\overline{V^2} = NK_bT_f = R_{gas}T_f, \quad (4.4)$$

na qual $R_{gas} = NK_b$ é a constante universal dos gases perfeitos e $\overline{\mathcal{P}^2}$ é o momentum da fronteira. Quando o sistema atinge o equilíbrio termodinâmico, encontraremos $T = T_f$.

4.2 Troca de Calor

O equilíbrio termodinâmico será atingido através da troca de calor. Começaremos com a equação da condutividade térmica ou Lei de Fourier [24, 26].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\bar{\kappa}A'\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.5)$$

na qual $\bar{\kappa}$ é o coeficiente de condutividade térmica bidimensional e definido por $\bar{\kappa} = \kappa\Delta h$. A' é a área de colisão, que pode ser escrita como

$$A' = \frac{\mathcal{L}}{N}, \quad (4.6)$$

o termo $\mathcal{L} = \int R(\theta, t)d\theta$ é o comprimento da fronteira. O elemento diferencial dQ pode ser expresso na forma $dQ = CdT$, na qual C é a capacidade térmica do gás. Para um sistema bidimensional, C tem a seguinte forma [24],

$$C = \frac{q}{2}K_bN_{gas}, \quad (4.7)$$

sendo que q é o número de graus de liberdade do sistema, K_b é constante de Boltzmann, N_{gas} é o número de partículas do gás.

Lembrando que o sistema tem dois graus de liberdade, temos a Lei de Fourier na forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = K_bN_{gas}\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.8)$$

usando o teorema de equipartição de energia, teremos

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{m}{2}N_{gas}\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t}, \quad (4.9)$$

para a relação $\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{\Delta T}{\Delta x}$, na qual ΔT é a diferencial de temperatura entre a fronteira e o gás; Δx é a distância ou caminho médio livre, logo

$$\Delta x = \frac{\pi}{2}\lambda,$$

na qual $\lambda = \frac{A}{\mathcal{L}}$, para $\mathcal{A} = \int R(\theta, t)^2 d\theta$ sendo a área do bilhar. Fazendo as devidas manipulações algébricas teremos

$$\frac{m}{2} N_{gas} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = -\bar{\kappa} A' \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4.10)$$

$$\frac{m}{2} N_{gas} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = -\bar{\kappa} \frac{\mathcal{L}}{N} \frac{\Delta T}{\lambda \pi},$$

logo

$$\frac{m}{2} N_{gas} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = \frac{-2\bar{\kappa} \mathcal{L}^2}{\pi N \mathcal{A}} (T - T_f). \quad (4.11)$$

Para os termos T_f e T temos as relações derivadas do teorema de equipartição

$$\frac{M}{2} \overline{V^2} = K_b T_f,$$

$$\frac{NM}{2} \overline{V^2} = R_{gas} T_f,$$

logo

$$T_f = \frac{NM}{2R_{gas}} \overline{V^2}. \quad (4.12)$$

Para o gás de partículas, temos

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = K_b T,$$

logo

$$T = \frac{m}{2K_b} \overline{v^2}. \quad (4.13)$$

Resolvendo a equação (4.11) e considerando que a fronteira é um reservatório térmico $\overline{V^2} = \text{constante}$

$$\frac{m}{2} N_{gas} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = -\frac{2\bar{\kappa} \mathcal{L}^2}{\pi N_{gas} \mathcal{A}} \left[\frac{m \overline{v^2}}{2K_b} - \frac{NM \overline{V^2}}{2R_{gas}} \right],$$

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = \frac{2\bar{\kappa} \mathcal{L}^2}{\pi N_{gas} R_{gas} \mathcal{A}} \left[\frac{M}{m} \overline{V^2} - \overline{v^2} \right],$$

logo

$$\overline{v^2} = \frac{M}{m} \overline{V^2} + \left[\overline{v_0^2} - \frac{M}{m} \overline{V^2} \right] \exp \left(\frac{-2\bar{\kappa} \mathcal{L}^2 t}{\pi N_{gas} R_{gas} \mathcal{A}} \right). \quad (4.14)$$

Para o termo $\frac{M}{m}\overline{V^2} = \frac{2K_bT_f}{m}$, teremos

$$\overline{v^2} = \frac{2K_bT_f}{m} + \left[\overline{v_0^2} - \frac{2K_bT_f}{m} \right] \exp\left(\frac{-2\bar{\kappa}\mathcal{L}^2t}{\pi N_{gas}R_{gas}\mathcal{A}}\right), \quad (4.15)$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, temos

$$\overline{v^2} = \frac{2K_bT_f}{m}. \quad (4.16)$$

Usando o teorema de equipartição, teremos

$$\frac{2K_bT}{m} = \frac{2K_bT_f}{m}. \quad (4.17)$$

Assim, podemos concluir que $T \rightarrow T_f$, ou seja, o sistema atingiu o equilíbrio térmico.

Se consideramos que a massa da fronteira é muito maior do que a massa do gás de partículas, ou se a temperatura da fronteira é muito maior do que a temperatura do gás, então podemos escrever

$$\frac{M}{m}\overline{V^2} \gg \overline{v^2}, \quad (4.18)$$

e portanto,

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = \frac{2\bar{\kappa}\mathcal{L}^2M}{\pi N_{gas}R_{gas}\mathcal{A}m}\overline{V^2} = \text{constante}. \quad (4.19)$$

Esta equação indica um crescimento ilimitado da velocidade da partícula, levando para a aceleração de Fermi de acordo com [25].

4.3 Comparação entre a abordagem termodinâmica e a abordagem bilhar

Apresentamos nesta seção a comparação das abordagens feitas nos Capítulos 3 e 4 desta dissertação. Partiremos das equações (3.74) e (4.15) e faremos uma manipulação algébrica da equação (3.74) para mostrar a semelhança entre as duas abordagens da aproximação termodinâmica, temos

$$\overline{v^2} = \frac{2K_bT_f}{m} + \left[\overline{v_0^2} - \frac{2K_bT_f}{m} \right] \exp\left(\frac{-2\bar{\kappa}\mathcal{L}^2t}{\pi N_{gas}R_{gas}\mathcal{A}}\right).$$

Por outro lado, do formalismo de bilhares encontramos

$$\overline{V^2} = \frac{(1+\gamma)a^2\epsilon^2}{4(1-\gamma)} + \left[\overline{V_0^2} - \frac{(1+\gamma)a^2\epsilon^2}{4(1-\gamma)} \right] \exp\left(\frac{(\gamma^2-1)a\epsilon t}{2d_{rms}(1-\gamma)^{1/2}}\right).$$

As equações apresentam termos de transientes e elementos que conduzem a saturação. A tabela 4.1 de comparações entre os procedimentos é apresentada a seguir. Admitimos que para esta comparação a velocidade inicial é desprezível.

Tabela 4.1: Expressões do coeficiente de transiente e coeficiente do termo de saturação para os dois procedimentos usados nessa dissertação.

Abordagens	Transiente	Termo de saturação
Bilhar	$\frac{(\gamma^2 - 1)a\epsilon}{2d_{rms}(1 - \gamma)^{1/2}}$	$\frac{(1 + \gamma)a^2\epsilon^2}{4(1 - \gamma)}$
Termodinâmica	$\frac{-2\kappa\mathcal{L}^2}{\pi N_{gas}R_{gas}\mathcal{A}}$	$\frac{2K_bT_f}{m}$

Podemos manipular os elementos de saturação das duas abordagens para obter uma relação entre o coeficiente de restituição e a temperatura da fronteira, ou seja

$$\frac{(1 + \gamma)a^2\epsilon^2}{4(1 - \gamma)} = \frac{2K_bT_f}{m},$$

$$T_f = \frac{(1 + \gamma)a^2\epsilon^2}{4(1 - \gamma)} \frac{m}{2K_b}. \quad (4.20)$$

A energia interna do sistema no estado estacionário pode ser obtida a partir da equação (4.20), logo temos que a $U = K_bT$

$$U = \frac{(1 + \gamma)a^2\epsilon^2m}{8(1 - \gamma)}. \quad (4.21)$$

Capítulo 5

Conclusões

O presente estudo mostrou que podemos obter uma relação da velocidade média semelhante ao modelo motivador e obter relações termodinâmicas para o modelo do bilhar. Os expoentes críticos do bilhar ovóide, usando a descrição analítica são os mesmos do modelo *Bouncer*. A Velocidade das partículas apresenta saturação.

Neste estudo foi possível fazer a conexão com a termodinâmica por dois métodos distintos. O primeiro método foi o teorema de equipartição de energia, na qual cada termo quadrático da expressão do Hamiltoniano contribui com meio da constante de Boltzmann vezes a temperatura. O segundo método foi a utilização do teorema de equipartição com elementos geométricos e aplicação da lei Fourier.

Os expoentes críticos obtidos neste trabalho mostram que o perfil do espaço de fases das variáveis angulares tem forte impacto na determinação dos valores médios, na qual utilizamos a hipótese de probabilidade uniformemente distribuída no espaço de fases entre 0 e 2π . Os expoentes deste sistema são $\beta = \frac{1}{2}$ para a aceleração do sistema; para a saturação temos $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = 1$ e para o *crossover* temos $z_1 = -1$ e $z_2 = 0$. Neste sistema obtivemos as seguintes leis de escala $z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}$ e $z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2$.

Para pesquisas futuras temos interesse em verificar o comportamento das variáveis angulares para a integração dos valores médios no sentido da teoria de integração a Lebesgue, analisar a possibilidade de utilizar a abordagem da termodinâmica generalizada e a mecânica estatística de não equilíbrio para estudar bilhares bidimensionais.

Apêndice I: Conceitos Fundamentais

Abordaremos neste apêndice os conceitos fundamentais da Física Estatística que norteiam o desenvolvimento desta dissertação. Física Estatística é uma área da Física Teórica e tem como função estudar o caráter estatístico de sistemas com uma imensa quantidade de elementos. As grandezas físicas nessa área de estudo são dadas em valores médios e probabilidades de ocorrência no sistema, o que permite inferir que os resultados mais prováveis de serem encontrados possuam uma determinada probabilidade. O objetivo principal da Física Estatística consiste em desenvolver as propriedades macroscópicas dos sistemas, a partir das propriedades microscópicas dos seus constituintes, sendo a base dessa área de estudo a termodinâmica, pois esta descreve os comportamentos macroscópicos dos sistemas sem o auxílio de outra teoria física.

Postulado da Termodinâmica

Existem quatro postulados que fundamentam a termodinâmica de equilíbrio e servem de base para a física estatística de equilíbrio [18, 19]. Apresentaremos os quatro postulados a seguir:

- 1 O estado de equilíbrio de um sistema termodinâmico macroscópico simples é caracterizado pela energia interna U , pelo volume V e pelo número de partícula N .
- 2 Existe uma função $S(U_i, V_i, N_i), i = 1, 2, \dots, n$ que é chamada de entropia escrita em termos dos parâmetros extensivos (U, V, N) , definida para todos os estados de equilíbrio. Obedece ainda a propriedade de que removendo-se o vínculos internos de um sistema composto, a entropia é maximizada no condição de equilíbrio.
- 3 A entropia de um sistema composto é uma função aditiva sobre seus componentes. É também uma função contínua, diferenciável e monotonicamente crescente da energia.

4 A entropia se anula para o caso em que:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = 0. \quad (5.1)$$

Apêndice II: Valores médios

Normalmente em física estatística podemos nos deparar com uma função ou variável aleatória [28] que assume valores contínuos ou valores discretos e para nosso estudo utilizaremos conceitos de variável contínua, valor médio e valor quadrático médio. Podemos entender como variável contínua, toda variável aleatória compreendida no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). A condição da normalização da probabilidade é dada pela relação,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \wp(x) dx = 1. \quad (5.2)$$

Então o valor médio de x é na forma

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \wp(x) dx. \quad (5.3)$$

De maneira análoga, o valor quadrático médio apresenta a seguinte forma

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \wp(x) dx. \quad (5.4)$$

Estes conceitos podem ser aplicados em funções aleatórias de forma análoga as expressões acima

$$\overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \wp(x) dx \quad (5.5)$$

$$\overline{f(x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \wp(x) dx \quad (5.6)$$

Uma propriedade importante é independência de variáveis aleatórias, que com esta é possível calcular o valor médio ou valor quadrático médio do produto de variáveis aleatórias. Dessa forma, o valor médio do produto xy é dado por

$$\overline{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x \wp(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y \wp(y) dy, \quad (5.7)$$

portanto

$$\overline{xy} = \bar{x} \bar{y}.$$

O mesmo resultado das equações anteriores é válido para funções aleatórias.

As funções que utilizamos nesta dissertação são funções trigonométricas elementares[28], do tipo seno e cosseno. Para estas funções o valor médio não contribui para a análise dos observáveis físicos, então o valor quadrático médio tem uma grande importância para realizar a análise dos observáveis. Vamos mostrar que o valor médio em funções senoidais e cossenoidais é nulo. Seja $f(x) = \text{sen}(x)$ fazendo o valor médio da variável $x \in [0, 2\pi]$ obtemos o valor nulo para $\overline{\text{sen}(x)}$,

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\cos(x) \right]_0^{2\pi} = 0. \quad (5.8)$$

Fazendo para a função cosseno obteremos o mesmo valor, ou seja,

$$\overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\text{sen}(x) \right]_0^{2\pi} = 0. \quad (5.9)$$

Para os valores quadráticos médio tanto a função seno quanto a função cosseno obtemos o valor, que é $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Seja $f(x) = \text{sen}(x)$ e fazendo $f(x)^2 = \text{sen}^2(x)$, a integral que corresponde a $\overline{\text{sen}^2(x)}$ será

$$\overline{f(x)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (5.10)$$

No caso da função cosseno temos

$$\overline{g(x)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (5.11)$$

O mesmo resultado aparece para funções trigonométricas com duas variáveis aleatórias na mesma função desde que as variáveis sejam independentes.

Seja $f(\alpha, \phi) = \text{sen}(\alpha + \phi) = \text{sen}(\alpha) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \cos(\alpha)$ elevando ao quadrado a função $f(x)^2$, temos

$$f(\alpha, \phi)^2 = (\text{sen}(\alpha) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \cos(\alpha))^2,$$

$$f(\alpha, \phi)^2 = \text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi) + 2\text{sen}(\alpha) \cos(\phi) \text{sen}(\phi) \cos(\alpha) + \text{sen}^2(\phi) \cos^2(\alpha).$$

Realizando a média em $\alpha \in [0, 2\pi]$ e em $\phi \in [0, 2\pi]$, os elementos lineares serão nulos como já foi discutido nesta seção e só restarão os elementos quadráticos. Então podemos concluir que

$$\overline{\text{sen}^2(\alpha + \phi)} = \overline{\text{sen}^2(\alpha) \cos^2(\phi)} + \overline{\text{sen}^2(\phi) \cos^2(\alpha)}.$$

Sendo que cada termo quadrático vale meio $\left(\frac{1}{2}\right)$, temos o resultado final

$$\overline{f(\alpha, \phi)^2} = \overline{\text{sen}^2(\alpha + \phi)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (5.12)$$

Para o caso da função cosseno, dada por

$$g(\alpha, \phi) = \cos(\alpha + \phi) = \cos(\alpha) \cos(\phi) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\phi),$$

e fazendo procedimento semelhante mostramos que

$$\overline{[g(\alpha, \phi)]^2} = \frac{1}{2}. \quad (5.13)$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, Gauthier-Vilars, (1899).
- [2] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Livraria da Física, (2011).
- [3] N. F. Ferrara e C. P. C. do Prado, *Caos: uma introdução*, editora Blücher, (1995).
- [4] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Applied Mathematical Sciences Vol. 38, (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [5] N. Chernov, R. Markarian , *Chaotic Billiard*, American Mathematical Society, Rhode Island (2006).
- [6] L. A. Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* 65, 295 (1979).
- [7] Y. G. Sinai, *Russian Math. Surveys* 25, 137, (1970).
- [8] A. Loskutov and E. D. Leonel, *Math. Prob. in eng.* 2009, ID 848619 (2009).
- [9] E. Fermi, *Phys. Rev.* 75, 1169 (1949).
- [10] A. Loskutov, A. B. Ryabov and L. G. Akinshin, *J Phys. A: Math. Gen.* 33, 7973 (2000).
- [11] E. D. Leonel, A. L. P. Livorati, *Commun Non. Sci. Numer. Simulat.*, 20, 159173 (2015).
- [12] E. D. Leonel, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40, F1077-F1083, (2007)
- [13] E. D. Leonel, L. A. Bunimovich, *Phys. Rev. Lett.* 104, 224101 (2010).
- [14] E. D. Leonel and A. L. P. Livorati, *Physica A*, 387, 1155-1160 (2008).
- [15] A. L. P. Livorati, D. G. Ladeira and E. D. Leonel, *Phys. Rev. E*, 78, 056205 (2008).
- [16] D. F. M. Oliveira, M. Robnik, E. D. Leonel, *Physics Letters A*, 376, 723-728, (2012).
- [17] D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanic*, Oxford university press, (1987).
- [18] E. D. Leonel, *Fundamentos da Física Estatística*, editora Blücher, (2015).

- [19] S. R. A. Salinas, Introdução à Física Estatística, edusp, (2008) .
- [20] D. R. da Costa, D.F.M. Oliveira, E.D. Leonel, Comm Nonlinear Sci Numer Simulat. Vol. 19 1926-1934, (2014).
- [21] E. D. Leonel, C. P. Dettmann, Physics Letters A, 376, 1669-1674 (2012).
- [22] E. D. Leonel, D. F. M. Oliveira, A. Loskutov, Chaos, 19, 033142 (2009).
- [23] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, Physica A, 389, 1009-1020, (2010).
- [24] A. Loskutov, O. Chichigina, A. Ryabov, Inter. Jour. of Bif. and Chaos, 18, 28632869, (2008).
- [25] A. Y. Loskutov, A. B. Ryabov, and L. G. Akinshin, J. Exp. Theor. Phys. 89, 966 (1999).
- [26] W. F. Wreszinski, Termodinâmica , edusp, (2003).
- [27] E. L. Lima, Curso de Análise vol.2, IMPA, (2014).
- [28] T. M. Apostol, Calculus vol.2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability, wiley, (1969).