74

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT–T.001/96

Dualidade Fourier Generalizada e Quantização

Luiz Augusto Saeger

Orientador

Prof. Dr. Ruben Aldrovandi

Agosto 1996

Resumo

Nesta tese revemos alguns aspectos cinemáticos da quantização, através da dualidade Fourier generalizada do grupo canônico associado a um dado espaço de fase. As álgebras de Kac, em termo das quais a dualidade Fourier (linear) de um grupo é obtida, são revistas e decompostas segundo o dual unitário do grupo canônico, o que nos permite tentar uma generalização do formalismo de Weyl-Wigner para tais espaços de fase. Com a introdução de álgebras de Kac *projetivas*, as quais demonstramos prover uma dualidade Fourier projetiva do grupo abeliano das translações, é possível mostrar como deduzir o formalismo usual de Weyl-Wigner sobre o espaço euclidiano, a partir de sua intrínseca conexão com uma componente irredutível de tal dualidade.

Palavras-chave: Quantização de Weyl, Álgebras de Kac, Correspondência de Weyl-Wigner, Dualidade Fourier (Projetiva) de Grupos, Análise Harmônica Não Comutativa.

Área de conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

In this thesis we review some kinematical aspects of quantization through the generalized Fourier duality of the canonical group associated to a given phase space. Kac algebras, in terms of which the (linear) Fourier duality of a group is obtained, are reviewed and decomposed according to the unitary dual of the canonical group, which enables us to generalize the Weyl-Wigner formalism to such phase spaces. With the introduction of *projective* Kac algebras, which we have proved to provide a projective Fourier duality of the abelian group of translations, it is shown how to deduce the usual Weyl-Wigner formalism over the Euclidean phase space, starting from its intrinsic connection with an irreducible component of such duality.

Keywords: Weyl Quantization, Kac Algebras, Weyl-Wigner Correspondence, Group (Projective) Fourier Duality, Noncommutative Harmonic Analysis.

Agradecimentos

É com grande satisfação que deixo registrado aqui meus sinceros agradecimentos àquelas pessoas que de uma forma ou de outra tornaram possível a realização desta tese, principalmente à minha família e à comunidade do IFT. Dentre estas, gostaria de destacar: o Prof. Ruben Aldrovandi, pela sugestão do tema da tese, pelo constante encorajamento e interesse no meu trabalho, sempre criando as condições ideais para a sua realização; meus pais, cujo apoio não só moral como também financeiro tem sido essencial para a concretização deste trabalho; a Cristina, companheira do dia-a-dia e que me presenteou o Daniel, nossa maior fonte de inspiração.

Ao Daniel

Conteúdo

Introdução

Em seu sentido mais amplo, a palavra "quantização" significa a passagem da descrição clássica para a descrição quântica de um sistema. Como a descrição clássica mais completa que se tem de um sistema é aquela dada pelo formalismo hamiltoniano, o caminho natural é a quantização no espaço de fase. Uma vez escolhido o conjunto de observáveis clássicos a serem quantizados[1], a quantização no espaço de fase euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$ segundo o formalismo de Weyl-Wigner parece ser a proposta mais atraente, conciliando os aspectos geométricos e algébricos da quantização. Estes são os principais atrativos do formalismo, o qual realiza o princípio da correspondência atribuindo um operador quântico a cada observável clássico $\tilde{f}$ sobre o plano $\mathbb{R}^2$, por exemplo, através da fórmula de Weyl [Weyl, IV, §14]

$$\hat{f}_\hbar = \int_{\mathbb{R}^2} dqdp\, f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(p\hat{q}+q\hat{p})}. \tag{1}$$

Nesta, $\hat{q}$ e $\hat{p}$ são os operadores ilimitados e auto-adjuntos coordenada e momentum, e a transformada de Fourier $\tilde{f}$ de f é dada por

$$\tilde{f}(x_1,x_2) \equiv [\mathcal{F}f](x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} dqdp\, f(q,p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(x_1 q+x_2 p)}. \tag{2}$$

Introduzindo os operadores

$$S_\hbar(q,p) = e^{-\frac{i}{\hbar}(p\hat{q}+q\hat{p})}, \tag{3}$$

constata-se que a fórmula de Weyl pode ser vista como sendo oriunda da expressão para a transformada de Fourier (2), pela aparentemente ingênua substituição dos caracteres[2] $\overline{\chi_{(x_1,x_2)}(q,p)} = e^{-\frac{i}{\hbar}(x_1 q+x_2 p)}$ pelos operadores $S_\hbar(q,p)$. Na verdade esta substituição não

[1]Uma proposta recente para o tratamento deste problema pode ser encontrado na ref. [GoGrTu].
[2]Lembramos que esses caracteres são as representações irredutíveis unidimensionais do grupo abeliano $(\mathbb{R}^2,+)$ ou, simplesmente, $\mathbb{R}^2$.

é nada ingênua, pois estes operadores são representações *projetivas irredutíveis* de $\mathbb{R}^2$, ou seja, representam este grupo através da relação

$$S_\hbar(q,p)S_\hbar(q',p') = e^{\frac{i}{2\hbar}(qp'-pq')}S_\hbar(q+q',p+p'), \tag{4}$$

e, portanto, a fórmula (1) deve ter seu significado na análise harmônica de $\mathbb{R}^2$, assim como acontece com a transformada de Fourier. Inversamente, a correspondência de Weyl-Wigner atribui uma função clássica a cada operador $\hat{f}_\hbar$ através da transformada de Fourier da *densidade*

$$f(q,p) = \mathrm{Tr}[S^\dagger_\hbar(q,p)\hat{f}_\hbar], \tag{5}$$

onde o traço Tr desempenha o papel de *integral* na álgebra gerada pelos operadores $S_\hbar$. Note-se que o produto nesta álgebra, pela relação projetiva (4), induz a *convolução torcida*

$$(f \circledast_\hbar g)(q',p') = \int_{\mathbb{R}^2} dq dp\, e^{\frac{i}{2\hbar}(qp'-pq')} f(q,p)g(q'-q,p'-p)$$

entre as respectivas densidades. Pela transformada de Fourier, este produto não abeliano é mapeado no produto de Moyal [Moy] $\tilde{f}\circ^\hbar\tilde{g}$, o que caracteriza uma *deformação* na álgebra de funções pelo produto abeliano usual de multiplicação ponto-a-ponto. Esta deformação é a concretização no espaço de fase da correspondência, segundo Weyl e Wigner, entre as descrições quântica e clássica. A generalização desta deformação para variedades simpléticas quaisquer foi considerada em [BFFLS], o que levou à proposta conhecida por *quantização por deformação.*

Não estamos interessados aqui na deformação propriamente dita, mas nos aspectos que envolvem a análise harmônica, ou a *dualidade Fourier generalizada*, de um grupo associado a um espaço de fase qualquer. De fato, do formalismo de Weyl-Wigner, os pontos que consideramos essenciais e que serão explorados e generalizados neste trabalho são os seguintes: i) tanto o grupo abeliano $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^{2n}$, no caso n-dimensional) como sua extensão central, o grupo de Heisenberg, ambos atuam por simplectomorfismos sobre o plano, isto é, as translações preservam a estrutura simplética deste espaço; ii) a correspondência de Weyl-Wigner envolve a análise harmônica do grupo $\mathbb{R}^2$ em dois níveis, uma *escalar* e outra *operatorial.* A *escalar*, representada pela transformada de Fourier (2), simboliza a *dualidade Pontryagin* para este grupo. A dualidade Pontryagin vale para qualquer grupo abeliano, conectando-o com o grupo também abeliano de seus caracteres, seu *dual unitário*. Por exemplo, o dual Pontryagin de $SO(2)$, cuja variedade é o círculo, é o grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros pois, para representar a ciclicidade do primeiro, seus caracteres são rotulados por inteiros. A dualidade, neste caso, é realizada pela série de Fourier (funções sobre o círculo) e sua inversa, os coeficientes de Fourier (funções sobre os inteiros). De forma análoga, o dual do grupo cíclico $\mathbb{Z}_N$ é o próprio $\mathbb{Z}_N$, e o de $\mathbb{R}^n$ também é o $\mathbb{R}^n$. Grupos que coincidem com seus duais são chamados de autoduais. Nestes, a dualidade Pontryagin mapeia funções sobre o grupo em funções sobre o mesmo, levando a convolução no produto ponto-a-ponto, como é o caso da transformada de Fourier em $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, a análise harmônica *operatorial* de $\mathbb{R}^2$ parece resultar de uma conexão deste com o espaço das (classes de) representações *projetivas* irredutíveis e inequivalentes, conhecido como o *dual unitário projetivo* de $\mathbb{R}^2$. Representações projetivas de um grupo são obtidas, a grosso modo, a partir das representações lineares (multiplicativas) de suas extensões centrais. No caso de $\mathbb{R}^2$, suas extensões centrais são todas isomorfas ao grupo de Heisenberg tridimensional H_3. Entre as representações de grupos não abelianos e não compactos, mas pelo menos localmente compactos, estão sempre presentes as representações em espaços de Hilbert de dimensão infinita, como as representações de H_3 que dão origem aos operadores projetivos $S_\hbar$ sobre $L^2(\mathbb{R})$. A dualidade que conecta $\mathbb{R}^2$ com seu dual projetivo não é uma dualidade muito explorada na literatura, mas pode ser obtida, por projeção, da dualidade para H_3. Em geral, o dual unitário (linear) de um grupo é definido pelas classes de suas representações unitárias e irredutíveis inequivalentes. A generalização da dualidade Pontryagin para grupos localmente compactos separáveis mas não abelianos existe, mas não na mesma categoria destes grupos. Isto é, a conexão de tais grupos com seus duais unitários se dá pela associação destes a álgebras de operadores bem particulares, chamadas *álgebras de Kac*. Especificamente, associa-se ao grupo G em questão duas álgebras de Kac: uma abeliana, sobre a álgebra de von Neumann $L^\infty(G)$ das funções essencialmente limitadas; e outra operatorial, sobre a álgebra de von Neumann gerada pelas representações regulares de G. A essa dualidade generalizada, a qual é implementada por um mapeamento que contém a generalização da transformada de Fourier, chamamos de *dualidade Fourier generalizada* ou, simplesmente, *dualidade Fourier*.

O objetivo desta tese é rever a quantização sob o ponto de vista da análise harmônica de grupos, especificamente, do grupo canônico sobre um espaço de fase qualquer. Por grupo canônico entendemos, segundo Isham [Ish], um grupo de dimensão finita que atua transitivamente e efetivamente sobre o espaço de fase por transformações canônicas e que, além disto, é capaz de implementar um isomorfismo entre sua álgebra de Lie e a álgebra de Poisson do espaço de fase. No caso do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$, esse isomorfismo só existe com a álgebra do grupo de Heisenberg H_{2n+1}, a extensão central do grupo $\mathbb{R}^{2n}$. O fato de termos de considerar a extensão central do grupo identificado com o espaço de fase, o que nos leva a considerar representações projetivas deste, torna o caso euclidiano bastante complexo tecnicamente. Entretanto, a partir do conhecimento desta conexão entre o grupo de Heisenberg e o espaço euclidiano é possível mostrar que a correspondência de Weyl-Wigner pode ser descrita a partir da dualidade Fourier projetiva para o grupo abeliano $\mathbb{R}^{2n}$, estabelecendo, assim, um forte vínculo entre quantização e análise harmônica não comutativa. A partir desse princípio, é possível propôr a generalização do formalismo de Weyl-Wigner para qualquer espaço de fase, através da dualidade Fourier generalizada do grupo canônico associado a este.

Em se tratando de um trabalho fortemente baseado na dualidade Fourier de grupos, é imprescindível que comecemos introduzindo a estrura matemática que estabelece este tipo de correspondência em toda a sua generalidade. Isto é feito no capítulo I, onde começamos pelas álgebras de Banach e de von Neumann, passando pelas álgebras de Hopf-von Neumann, até chegarmos às álgebras de Kac. Em termos destas podemos mostrar como se obtém a dualidade de grupos localmente compactos separáveis. Embora não seja a ordem logicamente correta, antes de mostrarmos a conexão entre dualidade Fourier projetiva e a quantização de Weyl usual, consideramos no capítulo II um caso tecnicamente mais simples, que envolve a aplicação direta da dualidade Fourier linear apresentada no capítulo anterior, isto é, a dualidade que não envolve representações projetivas. Nesse capítulo consideramos a quantização no semi-plano, cujo grupo canônico, o grupo afim bidimensional, apresenta várias peculiariedades como: não ser abeliano e não compacto e, além disto, não ser unimodular. A dualidade para este grupo nos força a considerar álgebras de Kac em toda sua generalidade, mostrando as dificuldades que encontramos ao generalizar a quantização de Weyl sobre um espaço de fase suficientemente geral. Para alcançar esta generalização é necessário considerar a decomposição das álgebras de Kac em álgebras geradas por operadores irredutíveis, segundo o dual unitário do grupo em questão. Este processo delicado, que não se encontra na literatura das álgebras de Kac, é repetido no capítulo seguinte, mas em relação ao dual projetivo. No Apêndice A àquele capítulo mostramos pelo Método das Órbitas que o semi-plano é a única variedade simplética não trivial homogênea pela ação coadjunta do grupo afim bidimensional. No capítulo III voltamos à quantização no plano euclidiano e à dualidade Fourier projetiva para o grupo $\mathbb{R}^2$. Consideramos o caso bidimensional apenas por simplicidade na notação, sendo direta a generalização para dimensões mais altas. As álgebras de Kac foram introduzidas com o objetivo de prover a dualidade (linear) de grupos localmente compactos, mas não sua dualidade *projetiva*. Embora esta última esteja praticamente garantida a partir da dualidade Kac para as extensões centrais de um dado grupo, não se encontra na literatura detalhes explícitos envolvendo dualidade projetiva. Estabelecemos, então, neste capítulo a dualidade Fourier projetiva para $\mathbb{R}^2$ por projeção da dualidade Fourier para o grupo de Heisenberg. Mostramos que a dualidade projetiva não se dá em termos de álgebras de Kac, mas sim em termos de álgebras satisfazendo um conjunto de axiomas um pouco diferente, as quais chamamos de *álgebras de Kac projetivas*. Após decompormos esta dualidade segundo o dual projetivo do grupo, mostràmos que o formalismo de Weyl-Wigner é perfeitamente descrito em termos desta dualidade. Para finalizar, um resumo dos resultados obtidos e das lições que aprendemos ao associar dualidade Fourier com quantização são expostos nos Comentários Finais. Caso o leitor preferir primeiro se certificar da conexão *dualidade Fourier generalizada* $\times$ *formalismo de Weyl-Wigner*, recomenda-se ou considerar o capítulo II como um simples exemplo de aplicação das álgebras de Kac, certificar-se da conexão no capítulo III e então considerar a quantização apresentada no capítulo II como uma generalização daquela, ou, tendo lido o primeiro capítulo, ir direto para o capítulo III e, depois, ler o segundo.

I

Álgebras de Operadores e Dualidade

A estrutura matemática sobre a qual a dualidade de grupos localmente compactos está baseada é a das *álgebras de Kac*, as quais consistem, como veremos na seção I.4, de álgebras de Hopf-von Neumann com um peso de Haar. As álgebras de Hopf-von Neumann surgiram um pouco antes das de Kac, a partir de uma tentativa de conciliar a estrutura algébrico-topológica das álgebras de von Neumann com uma estrutura envolvendo dualidade, como a das álgebras de Hopf, tendo em vista justamente a dualidade de grupos localmente compactos unimodulares. Álgebras de Hopf-von Neumann são tratadas na seção I.3, após uma rápida revisão dos conceitos básicos envolvendo álgebras de Banach, de von Neumann e de suas representações, a qual é feita nas seções I.1 e I.2.

I.1 Álgebras de Banach e de von Neumann

Nesta seção seguiremos basicamente as referências [BrRo, Dix1, Dix2, KadRi]. Uma *Álgebra de Banach* $\mathcal{B}$ é uma álgebra (suposta aqui sobre os números complexos $\mathbb{C}$) associativa, normada e completa em relação à topologia definida pela norma. Em detalhe, isso significa que em $\mathcal{B}$ está definida uma norma, isto é, uma aplicação $\| \ \| : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ que a cada elemento $a \in \mathcal{B}$ associa um número não negativo $\|a\|$ e que satisfaz as seguintes condições:

$$\|a\| = 0 \text{ se e somente se } a = 0; \tag{I.1a}$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|; \tag{I.1b}$$

$$\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|, \qquad \alpha \in \mathbb{C}; \tag{I.1c}$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|. \tag{I.1d}$$

Uma norma define uma topologia em $\mathcal{B}$ chamada *topologia uniforme*, na qual as vizinhanças de um elemento a são dadas por $V(a, \varepsilon) = \{b \in \mathcal{B};\ \|b - a\| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. Uma álgebra de Banach é completa em relação a esta topologia, ou seja, toda sequência de Cauchy é convergente em $\mathcal{B}$. Uma álgebra de Banach é *involutiva* se nela estiver definida uma aplicação $^* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, uma *involução*, satisfazendo

$$(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*; \tag{I.2a}$$

$$(ab)^* = b^* a^*; \tag{I.2b}$$

$$(a^*)^* = a, \tag{I.2c}$$

onde $\overline{\alpha}$ é o complexo conjugado de $\alpha \in \mathbb{C}$. Além destes axiomas, a norma deve ser indiferente à involução, $\|a\| = \|a^*\|$. Quando $\mathcal{B}$ possui uma unidade $\mathbf{1}$, pelo segundo axioma acima obtém-se $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$. Restringindo um pouco mais chegamos ao conceito de *álgebra* C^*, que são álgebras de Banach involutivas nas quais vale $\|a^* a\| = \|a\|^2$ e, como consequência, tém-se $\|\mathbf{1}\| = 1$.

Exemplos: [BrRo]

(i) Considere o conjunto $\mathcal{B}(H)$ de todos os operadores limitados que atuam sobre o espaço de Hilbert H, cuja operação é o produto usual de operadores. A norma

$$\|T\| = \sup\{\|T\psi\|_H; \|\psi\|_H = 1 \text{ em } H\}, \tag{I.3}$$

definida em termos da norma $\| \|_H$ em H e a involução definida pela adjunção usual (dagger) em H, $(T^\dagger \psi | \phi) = (\psi | T\phi)$, fazem de $\mathcal{B}(H)$ uma álgebra C^*.

(ii) Seja X um espaço topológico localmente compacto (l.c. daqui em diante) e $C_o(X)$ o espaço das funções contínuas sobre X que vão a zero no infinito, isto é, para cada $f \in C_o(X)$ existe um compacto K e um $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo x no complemento de K. $C_o(X)$ é uma álgebra abeliana ante o produto de funções ponto-a-ponto, $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Com a involução dada simplesmente por $f^*(x) = \overline{f(x)}$ e a norma por $\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in X\}$, ela se torna uma álgebra C^*. $C_o(X)$ possui unidade se e somente se (daqui em diante *sse*) X for compacto. Se μ for uma medida em X, sobre o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável por esta medida, $L^2(X, \mu)$, $C_o(X)$ atua por multiplicação. Aliás, esta álgebra é uma subálgebra involutiva de $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

Além da topologia uniforme definida pela norma, existem outras topologias sobre uma álgebra C^* que são definidas analogamente, mas por *seminormas*. Para uma seminorma a propriedade (I.1a) das normas não é exigida: se a seminorma de um elemento for nula, isto não implica que este elemento seja identicamente nulo. Como veremos mais tarde (teorema de Gelfand-Naimark), toda álgebra C^* (ou de von Neumann) pode ser vista como uma álgebra de operadores sobre um espaço de Hilbert. Em particular, as álgebras que ocorrem na dualidade de grupos são sempre subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ para algum espaço de Hilbert H relacionado ao grupo. Em $\mathcal{B}(H)$, as seminormas usualmente consideradas e os nomes das respectivas topologias definidas através delas são as seguintes: $(T \in \mathcal{B}(H),\ \psi, \phi \in H)$

- $\|T\|_F = \|T\psi\|$ definem a *topologia forte*;
- $\|T\|_f = |(T\psi, \phi)|$ definem a *topologia fraca*;
- $\|T\|_{\mathbf{F}} = \sqrt{\sum_i \|T\psi_i\|^2}$, onde $\psi_i \in H$ é tal que $\sum_i \|\psi_i\|^2 < \infty$, definem a *topologia ultra- ou σ-forte*;
- $\|T\|_{\mathbf{f}} = \sum_i |(T\psi_i, \phi_i)|$, onde $\psi_i, \phi_i \in H$ são tais que $\sum_i \|\psi_i\|^2 < \infty$ e $\sum_i \|\phi_i\|^2 < \infty$, definem a *topologia ultra- ou σ-fraca.*

A topologia uniforme é a mais fina de todas as citadas acima. A ultra-forte é mais fina que a forte, o mesmo acontecendo entre a ultra-fraca e a fraca. Independentemente, a (ultra-)forte é mais fina que a (ultra-)fraca. Relacionada à topologia uniforme existe a noção de *espaço dual* $\mathcal{B}^*$ de uma álgebra $\mathcal{B}$, o qual consiste dos funcionais lineares e *(uniformemente) contínuos* sobre $\mathcal{B}$. Uma noção mais fraca mas muito útil é a de *espaço predual* e está relacionada a topologia ultra-fraca. O predual de $\mathcal{B}$, denotado $\mathcal{B}_*$, é o espaço dos funcionais lineares *ultra-fracamente contínuos* sobre $\mathcal{B}$. Exemplo: o predual de $\mathcal{B}(H)$ é a álgebra de Banach dos operadores *tipo traço* em $\mathcal{B}(H)$, que satisfazem $\|T\| = \mathrm{Tr}(\sqrt{T^\dagger T}) < \infty$. O pareamento de dualidade entre uma álgebra e seu dual ou predual será denotado por $\langle , \rangle$, e a norma de um funcional linear ω tanto do dual como do predual é dada por $\|\omega\| = \sup\{|\langle\omega, a\rangle|;\ \|a\| = 1\}$.

Essas definições nos permitem finalmente introduzir as álgebras W^*, as quais são álgebras C^* que coincidem com o dual de seu predual, isto é, são álgebras M tal que $(M_*)^* = M$. Uma subálgebra W^* de $\mathcal{B}(H)$ com unidade, para algum espaço de Hilbert

H, é uma *álgebra de von Neumann*. Em outras palavras, uma álgebra de von Neumann é uma subálgebra involutiva de $\mathcal{B}(H)$ com unidade e fechada com respeito à topologia mais forte, a uniforme. Uma definição algébrica também é usada. Esta envolve a noção de *comutante* de uma subálgebra involutiva M de $\mathcal{B}(H)$, o qual está definido por: $M' = \{T \in \mathcal{B}(H);\ Ta = aT,\ \forall a \in M\}$. Uma *álgebra de von Neumann*, segundo a versão algébrica, é uma subálgebra involutiva M de $\mathcal{B}(H)$ tal que $M'' = M$. O teorema do bicomutante [BrRo, p.72], provado já por John von Neumann, mostra que esta versão algébrica é equivalente a versão topológica dada acima. De fato, o teorema afirma que uma álgebra de von Neumann também pode ser definida como sendo uma subálgebra involutiva de $\mathcal{B}(H)$ com unidade e fechada em relação a *todas* as topologias definidas anteriormente em $\mathcal{B}(H)$. Exemplos: a própria $\mathcal{B}(H)$ é von Neumann. Dentre as subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ destacamos as álgebras geradas pelas representações regulares à esquerda de um grupo l.c. G (veja a seção I.5.1), $\mathcal{M}(G)$, e sua comutante $\mathcal{R}(G)$, gerada pelas representações regulares à direita. Ainda relacionada ao grupo G, devemos mencionar também a álgebra abeliana das funções essencialmente limitadas sobre G (veja a seção I.5.2), $L^\infty(G)$, a qual atua por multiplicação ponto-a-ponto.

Através do comutante, o *centro* de uma álgebra de von Neumann M pode ser expresso por $C(M) = M \cap M'$. Se $C(M) = \mathbb{C}\mathbf{1}$, ou seja, se o centro for constituído apenas por escalares, M é chamada de *fator*. Deve-se também a John von Neumann o resultado pelo qual suas álgebras homônimas podem ser decompostas em fatores e, daí, classificadas segundo a natureza dos fatores que as compõem. Por exemplo, álgebras do tipo I são álgebras decompostas exclusivamente em fatores do tipo I. Fatores do tipo I são indexados por inteiros $\{1, 2, ..., n\}$, inclusive o infinito. Para n finito, estes fatores são isomorfos a álgebra de matrizes complexas $n \times n$, $M_n(\mathbb{C})$; quando n é infinito, a $\mathcal{B}(H)$. Existem também fatores do tipo II, III e suas subdivisões[1] mas como nos interessam apenas as álgebras do tipo I, não nos aprofundaremos mais neste aspecto. Daqui em diante nos concentraremos em álgebras de von Neumann, as quais serão denotadas por M, N, etc.

[1]Para um apanhado histórico das álgebras de von Neumann e de sua classificação, assim como sua conexão com a teoria dos *nós*, veja o interessante ensaio na ref. [Exel].

I.2 A Construção GNS e a Teoria de Tomita-Takesaki para Pesos

No que diz respeito às representações de álgebras C^*, temos o teorema de Gelfand e Naimark o qual garante que qualquer álgebra C^* possui uma representação *fiel* como uma álgebra de operadores sobre um espaço de Hilbert. Uma representação de M em H é um *-morfismo $M \to \mathcal{B}(H)$. Um **-morfismo* (*-homomorfismo) F entre as álgebras M e N é uma aplicação que satisfaz

$$F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b); \tag{I.4a}$$

$$F(ab) = F(a)F(b); \tag{I.4b}$$

$$F(a^*) = F(a)^*. \tag{I.4c}$$

Um **-isomorfismo* é um *-morfismo bijetivo que preserva a norma, $\|F(a)\| = \|a\|$. A construção GNS (Gelfand-Naimark-Segal) é uma realização concreta do teorema de Gelfand e Naimark. Ela está baseada na existência de funcionais lineares positivos (ou sua generalização) sobre estas álgebras. A partir da escolha de um tal funcional, que pode ser um *estado* ou um objeto mais geral como um *peso* (ambos são generalizações de *traço*), é possível construir explicitamente um espaço de Hilbert sobre o qual a álgebra é representada. A conexão entre a álgebra e o espaço de Hilbert, mediada por esse funcional, é descrita na teoria de Tomita-Takesaki. Consideramos aqui apenas representações geradas por pesos por serem os únicos suficientemente gerais para fornecer uma teoria de representações para as álgebras com as quais iremos trabalhar. Nesta seção seguiremos basicamente as referências [BrRo, seção 2.7.3] e [EnSc2, seção 2.1]. Para uma introdução rápida aos pesos, aconselhamos também a ref. [TrSh].

Começamos com algumas definições. O *espectro*[2] de um elemento a da álgebra de von Neumann M é definido como o conjunto

$$\sigma(a) = \{z \in \mathbb{C};\ (zI - a) \text{ não possui inverso em } M\}. \tag{I.5}$$

Os elementos *positivos* de M são os elementos *auto-adjuntos* cujo espectro é positivo, $M^+ = \{a \in M;\ a^* = a \text{ e } \sigma(a) \subset [0, \infty)\}$. Sobre tal conjunto introduz-se um mapeamento $\varphi : M^+ \to [0, \infty]$ e algumas condições:

[2] Não confundir com o *espectro de M*, termo usado para denotar o conjunto das classes de representações irredutíveis de M [Dix2].

– $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

– $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a), \ \forall\lambda \geq 0$, onde $0 \cdot \infty \equiv 0$;

– $\varphi(a^*a) = \varphi(aa^*)$.

As primeiras duas condições definem um *peso* sobre M, e as três juntas definem um *traço.* Associado a φ define-se o ideal à esquerda $\mathcal{N}_\varphi \subset M$ por $\{a \in M \mid \varphi(a^*a) < \infty\}$, e a álgebra involutiva $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi^* \cap \mathcal{N}_\varphi$ como sendo a expansão linear de $\{a \in M^+ \mid \varphi(a) < \infty\} \subseteq \mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*$, onde $\mathcal{N}_\varphi^* = \{a^* \mid a \in \mathcal{N}_\varphi\}$. Um peso φ é chamado:

normal se para cada sequência $\{a_i\}$ com limite superior a em M, $\varphi(a)$ for o limite superior da sequência $\{\varphi(a_i)\}$;

fiel se $\varphi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$;

semi-finito se $\mathcal{M}_\varphi$ for ultra-fracamente denso em M.

Dado um peso φ que seja normal, fiel e semi-finito (daqui em diante n.f.s.) sobre uma álgebra de von Neumann M, constrói-se uma representação sua pelo seguinte procedimento [BrRo]: φ define um produto escalar em $\mathcal{N}_\varphi$ através de

$$(a|b)_\varphi \equiv \varphi(b^*a).$$

Na verdade, este é apenas um produto quasi-escalar, pois como $\varphi(a^*a) \geq 0$, $(a|a)_\varphi$ pode ser nulo para $a \neq 0$. Supera-se este problema dividindo $\mathcal{N}_\varphi$ pelo ideal $I_\varphi = \{b \in A \mid (b|b)_\varphi = 0\}$. O quociente é formado por classes de equivalência $[b]$ de elementos b' tais que $b - b'$ está em I_φ. $\mathcal{N}_\varphi/I_\varphi$ tem, então, uma estrutura de espaço pré-Hilbert dada pelo produto escalar $([a],[b]) = (a|b)_\varphi$, o qual é invariante sobre cada classe. Completando $\mathcal{N}_\varphi/I_\varphi$ com respeito a este produto obtém-se o espaço de Hilbert H_φ. A aplicação

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(a) : \mathcal{N}_\varphi/I_\varphi &\rightarrow \mathcal{N}_\varphi/I_\varphi \\ [b] &\mapsto [ab] \end{aligned}$$

é limitada e pode ser extendida a H_φ como um operador limitado. Chama-se (π_φ, H_φ) de *construção GNS* de (M, φ). No que segue, a_φ denotará a imagem de $a \in \mathcal{N}_\varphi$ em H_φ pela injeção canônica $\pi_\varphi : \mathcal{N}_\varphi \rightarrow H_\varphi$, $a \mapsto \pi_\varphi(a) \equiv \psi_a \in H_\varphi$. A imagem $\pi_\varphi(\mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*)$

é uma *álgebra de Hilbert à esquerda* [EnSc2] e é isomorfa a M. A imagem da involução * em $\mathcal{M}_\varphi$ é o operador S_φ, o qual possui uma decomposição polar dada por

$$S_\varphi = J_\varphi \triangle_\varphi^{1/2}. \tag{I.6}$$

Esta decomposição introduz dois novos operadores em H_φ: a *involução modular* $J_\varphi : H_\varphi \to H_\varphi$, que é anti-unitária e tal que $JMJ = M'$, $JaJ = a^*$, $a \in C(M)$, e o *operador modular* $\triangle_\varphi$, que é auto-adjunto e positivo. Este último satisfaz $\triangle_\varphi^{it} M \triangle_\varphi^{-it} = M$, para todo $t \in \mathbb{R}$, o que nos leva à definição do *grupo modular de automorfismos* σ_t^φ sobre M,

$$\sigma_t^\varphi(a) = \triangle_\varphi^{it}\, a\, \triangle_\varphi^{-it}. \tag{I.7}$$

O grupo modular σ_t^φ é tal que o peso φ é invariante, isto é, $\varphi = \varphi \circ \sigma_t^\varphi$. A existência do grupo modular mostra que as álgebras de von Neumann já vêm com uma dinâmica intrínseca, o que as torna bastante atraentes do ponto de vista físico. De fato, o grupo modular é também caracterizado pelo fato de estar univocamente relacionado a φ através da condição KMS (Kubo-Martin-Schwinger). Esta condição tem sua origem em Mecânica Estatística Quântica, onde conecta a informação dinâmica contida na evolução temporal (grupo modular) gerada pela hamiltoniana com os estados de Gibbs. Posteriormente ela foi generalizada para álgebras C^* quaisquer, onde a interpretação física da dinâmica de σ_t^φ em geral se perde. No contexto em que estamos interessados, a dinâmica representada pelo grupo modular não tem uma interpretação física aparente e, por isso, não nos parece necessário apresentar a condição KMS aqui explicitamente.

Antes de introduzirmos as álgebras de Kac e sua dualidade, faz-se necessário aqui uma introdução à dualidade de grupo, a qual será obtida posteriormente em toda sua generalidade através da dualidade Kac. Como o assunto envolve representações de grupos, achamos conveniente apresentá-lo no fim desta seção. Seguiremos as referências [Dix2, Mack1, Mack3]. Uma *representação unitária* de um grupo l.c. e separável G é um morfismo contínuo (na topologia fraca) de G no grupo dos operadores unitários ($\subset \mathcal{B}(H)$) sobre um espaço de Hilbert H. Representações geram álgebras de von Neumann, subálgebras de $\mathcal{B}(H)$. Em particular, as representações *regulares* à esquerda e à direita de G geram as álgebras de von Neumann $\mathcal{M}(G)$, e sua comutante $\mathcal{R}(G)$, respectivamente (veja detalhes na seção I.5.1). Outro tipo de representação que nos interessa são as *irredutíveis*. Estas são definidas usualmente como as representações π tal que $\pi(G)$ só deixa invariante o subespaço trivial $\{0\}$ e o próprio H. Outra definição equivalente: π é irredutível se o comutante de $\pi(G)$ em $\mathcal{B}(H)$ é um fator. Ao conjunto de todas as representações irredutíveis de G denotaremos por $Irr(G)$. Duas representações irredutíveis, π em H, π' em H', dizem-se *equivalentes* se existir um isomorfismo $U : H \to H'$ que transforma π em π', $U\pi U^{-1} = \pi'$. O conjunto das classes de equivalência de representações unitárias e irredutíveis, ou seja, o quociente de $Irr(G)$ pela relação de equivalência acima, é chamado *dual unitário* de G e denotado $\hat{G}$. A Análise Harmônica ocupa-se justamente de conectar G e seu dual através da decomposição de representações unitárias em irredutíveis. Se G for abeliano, $\hat{G}$ também é um grupo abeliano, o grupo dos caracteres (representações unidimensionais) de G. A dualidade de Pontryagin diz essencialmente que $\hat{\hat{G}} \sim G$, e a transformada de Fourier conecta G e seu dual (veja detalhes na seção I.5.3). Se G for compacto, suas representações atuam em espaços de Hilbert de dimensão finita, mas $\hat{G}$ não é mais um grupo. No entanto, foi provada também neste caso uma dualidade, chamada de Tannaka-Krein, que sai do contexto de grupos. A análise harmônica sobre grupos compactos é descrita no teorema de Peter-Weyl [Vil]. Se G for um grupo l.c. não abeliano, algumas representações irredutíveis são de dimensão infinita e podem gerar álgebras de von Neumann não triviais. Da estrutura do dual pouco se sabe e quando se consegue obter a topologia, por exemplo, esta geralmente não é Hausdorff nem satisfaz os axiomas mais básicos de separabilidade, como ser do tipo T_1. O fato relevante é que nos dois últimos casos em que o dual não é um grupo, principalmente no último, a topologia de $\hat{G}$ não é uma estrutura essencial, já que sobre o dual apenas precisamos ter uma estrutura Borel[3] e uma medida, tal que possibilitem a decomposição de representações em irredutíveis. A estrutura Borel no setor de dimensão infinita $\hat{G}_\infty$ de $\hat{G}$ é obtida, como no setor de dimensão finita, a partir da estrutura Borel de $Irr(G)$ pelo quociente, mas neste caso não é nada trivial (veja detalhes de sua obtenção em [Mack3, p.52]). A esse respeito, cabe lembrar a definição de espaço de Borel *standard*, que pode ser tomado aqui como qualificativo de espaço "bem comportado": é um espaço de Borel isomorfo (no sentido de Borel) a um subespaço de Borel de um espaço

[3]Seguimos aqui a nomenclatura de Mackey [Mack1, Dix2], na qual uma estrutura Borel é essencialmente uma estrutura de σ-álgebra e não inclui a estrutura topológica compatível, o que parece ser o usual na literatura [AlPe].

métrico separável e completo [AlPe]. $\hat{G}_\infty$ não é standard em geral e, em consequência, $\hat{G}$ nem sempre é standard. Grupos cujos duais possuem uma estrutura Borel standard são também chamados grupos *de tipo I* ou grupos *bons*, os demais são os grupos *ruins* [Mack3, p.60]. A origem do adjetivo *de tipo I* está no tipo dos fatores $\pi(G)'$ gerados por suas representções irredutíveis π. Para estes grupos a decomposição de representações unitárias em uma soma (integral) direta de irredutíveis não só *é possivel* como *única*, o que não acontece com os demais. Para evitar tais ambigüidades nos limitaremos a grupos de tipo I neste trabalho. Embora não haja um critério definitivo para selecionar os grupos de tipo I, sabe-se que todos os compactos, os l.c. abelianos, os semi-simples, os nilpotentes conexos, entre outros, são de tipo I. Quanto à medida que possibilita a soma (integral) direta de representações, esta é geralmente chamada de *Plancherel*, por possibilitar a generalização da identidade homônima que vale para grupos abelianos.

I.3 Álgebras de Hopf-von Neumann

Após esses preliminares estamos em condições de introduzir as álgebras de Hopf-von Neumann e de Kac. Estas últimas foram introduzidas em 1973, independentemente por G.I. Kac e L.I. Vaĭnermann [KaVa], e por M. Enock e J.-M. Schwartz [EnSc1], com o objetivo de generalizar para grupos l.c. não unimodulares os teoremas de dualidade de Pontryagin e de Tannaka-Krein. Uma dualidade para grupos l.c. não unimodulares, englobando trabalhos prévios de P. Eymard, N. Tatsuuma e J. Ernst no contexto de uma categoria maior que a de tais grupos, já tinha sido parcialmente obtida no início da década de setenta por M. Takesaki [Tak] no contexto das álgebras de Hopf-von Neumann. Infelizmente, devido a inexistência de uma teoria completa para integração não-comutativa, a dualidade de Takesaki não era totalmente simétrica. De fato, somente após o estabelecimento da teoria de pesos sobre álgebras é que foi possível adicioná-los às álgebras de Hopf-von Neumann de uma maneira tal que em termos destas novas álgebras (chamadas Kac) a dualidade fosse possível.

Começamos pela definição de álgebra de Hopf-von Neumann. Uma *álgebra de Hopf-von Neumann coinvolutiva* é uma tripla $\mathbb{H} = (M, \triangle, \kappa)$, onde [EnSc2]

– M é uma álgebra W^*;

– o homomorfismo $\triangle : M \to M \otimes M$, chamado *coproduto*, é normal[4] injetivo e satisfaz

$$\begin{aligned} \triangle \mathbf{1} &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} && \text{(I.8a)} \\ (\triangle \otimes id) \circ \triangle &= (id \otimes \triangle) \circ \triangle. && \text{(I.8b)} \end{aligned}$$

A primeira condição significa que $\triangle$ preserva a unidade, e a segunda que ele é *coassociativo*, ou, que o diagrama I.1 é comutativo.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\triangle"'] \arrow[dr, "\triangle"] & \\ M \otimes M \arrow[dr, "id \otimes \triangle"'] & & M \otimes M \arrow[dl, "\triangle \otimes id"] \\ & M \otimes M \otimes M & \end{tikzcd}$$

Figura I.1: Coassociatividade de $\triangle$.

Além disso, ser um homomorfismo de álgebras W^* significa ser linear e satisfazer

$$\triangle(a \cdot b) = \triangle(a) \cdot \triangle(b). \tag{I.9}$$

– existe uma aplicação $\kappa : M \to M$, chamada *coinvolução*, a qual é um anti-automorfismo involutivo, isto é, é linear e tal que, $\forall a, b \in M$, têm-se

$$\begin{aligned} \kappa(a \cdot b) &= \kappa(b) \cdot \kappa(a); && \text{(I.10a)} \\ \kappa(a^*) &= \kappa(a)^*; && \text{(I.10b)} \\ \kappa(\kappa(a)) &= a. && \text{(I.10c)} \end{aligned}$$

– κ é também um anti-coautomorfismo, o que corresponde a comutatividade do diagrama I.2 ou

$$(\kappa \otimes \kappa) \circ \triangle = \sigma \circ \triangle \circ \kappa, \tag{I.11}$$

onde $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ é o operador de troca.

[4] A definição de *morfismo normal* é muito semelhante a de peso normal (veja a seção anterior), a qual pode ser obtida em [Dix2, A27]. Ser um morfismo normal implica essencialmente em ser ultra-fortemente e ultra-fracamente contínuo.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[d, "\triangle"'] & & M \arrow[d, "\triangle"] \\
M \otimes M \arrow[dr, "\kappa \otimes \kappa"'] & & M \otimes M \arrow[dl, "\sigma"] \\
& M \otimes M &
\end{tikzcd}$$

Figura I.2: κ é um anti-coautomorfismo.

$\mathbb{H}$ é dita ser *abeliana* ou *comutativa* se M for abeliana, e *simétrica* ou *cocomutativa* se $\sigma \circ \triangle = \triangle$. A presença em $\mathbb{H}$ de um coproduto coassociativo que preserva a estrutura algébrica de M evidencia a presença de uma estrutura de coálgebra, embora esta não possua necessariamnte uma counidade. Counidades em álgebras de Kac relacionadas a grupos foram consideradas em [Maj] e podem ser definidas sob certas condições. Não introduziremos aqui mais esta operação, por não ser fundamental para a dualidade de grupos. A presença da coinvolução κ, embora não satisfazendo os mesmos axiomas de uma *antípoda*, reforça a similaridade de $\mathbb{H}$ com as álgebras de Hopf. Note também que de (I.10c) e (I.10b) segue facilmente que $\kappa(\kappa(a^*)^*) = a$, ou, $\kappa \circ * \circ \kappa \circ * = id$, mas o inverso não é verdade. Esta última condição é mais fraca que aqueles axiomas. Uma das diferenças entre as álgebras de Hopf-von Neumann e outra estrutura similar, os "compact matrix pseudo-groups" [Wo1] de Woronowicz, é que nestes últimos, essa condição mais fraca é que é imposta no lugar de (I.10c) e (I.10b).

O predual M_* de uma álgebra de Hopf-von Neumann coinvolutiva $\mathbb{H} = (M, \triangle, \kappa)$ tem um produto $*$ dado por

$$\langle a, \omega * \omega' \rangle = \langle \triangle a, \omega \otimes \omega' \rangle, \tag{I.12}$$

e uma involução ^{o} dada por

$$\langle a, \omega^o \rangle = \overline{\langle \kappa(a)^*, \omega \rangle}, \tag{I.13}$$

de forma que M_* é uma álgebra de Banach involutiva com norma

$$\|\omega\| = \sup\{|\langle \omega, a \rangle|;\ \|a\| = 1\}. \tag{I.14}$$

Dada uma álgebra de Hopf-von Neumann coinvolutiva $(M, \triangle, \kappa)$, onde M é representada no espaço de Hilbert H e o predual M_* é representado (por μ) no espaço de Hilbert H_μ, uma isometria parcial $U \in \mathcal{B}(H_\mu) \otimes M$ tal que a representação μ possa ser escrita como

$$\mu(\omega) = (id \otimes \omega)(U), \qquad \omega \in M_*, \tag{I.15}$$

é dita ser a *geradora* de μ. O fato de μ ser uma representação *multiplicativa (linear)* ou *involutiva* é equivalente ao fato de U satisfazer as respectivas identidades:

$$\begin{aligned} (id \otimes \triangle)(U) &= (U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma)(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma) & \text{(I.16a)} \\ (id \otimes \omega \circ \kappa)(U) &= (id \otimes \omega)(U^*). & \text{(I.16b)} \end{aligned}$$

Para mostrar (I.16a) notamos que, por um lado,

$$\begin{aligned} \mu(\omega * \omega') &= (id \otimes (\omega * \omega'))(U) \\ &= (id \otimes \omega \otimes \omega')(id \otimes \triangle)(U), \end{aligned} \tag{I.17}$$

enquanto que temos também

$$\mu(\omega) \cdot \mu(\omega') = (id \otimes \omega)(U) \cdot (id \otimes \omega')(U). \tag{I.18}$$

Como o produto $\cdot$ do lado direito se dá entre as primeiras componentes de U, temos que os três últimos parênteses à direita são equivalentes a

$$\begin{aligned} (U) \cdot (id \otimes \omega')(U) &= U \cdot ((id \otimes \omega')(U) \otimes \mathbf{1}) \\ &= U \cdot (id \otimes \omega' \otimes id)(U \otimes \mathbf{1}) \\ &= U \cdot (id \otimes id \otimes \omega')(\mathbf{1} \otimes \sigma)(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma) \\ &= (id \otimes id \otimes \omega')(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma)(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma), \end{aligned} \tag{I.19}$$

onde, na última linha, usou-se novamente o fato de o produto $\cdot$ (não mais denotado explicitamente) se dar entre as primeiras componentes de U, para podermos trocar de lugar o primeiro U. Lembrando que ω é pareado com a segunda componente deste mesmo U, por (I.19) podemos reescrever (I.18) como

$$\mu(\omega) \cdot \mu(\omega') = (id \otimes \omega \otimes \omega')(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma)(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma), \tag{I.20}$$

que é equivalente a (I.17). A identidade (I.16b) segue mais diretamente por comparação entre $\mu(\omega^o) = (id \otimes \omega^o)(U)$ e $\mu(\omega)^* = \overline{(id \otimes \omega)(U)}$. Dado $\Omega \in \mu(M_*)_*$, temos, pela definição da involução dual ^{o},

$$\begin{aligned} \langle \Omega, \mu(\omega^o) \rangle &= \langle \Omega \otimes \omega^o, U \rangle \\ &= \overline{\langle \overline{\Omega} \otimes \omega \circ \kappa, U^* \rangle} \\ &= \overline{\langle \overline{\Omega}, (id \otimes \omega \circ \kappa)(U^*) \rangle}. \end{aligned} \tag{I.21}$$

Enquanto que

$$\begin{aligned}\langle \Omega, \mu(\omega)^* \rangle &= \overline{\langle \overline{\Omega}, \mu(\omega) \rangle} \\ &= \overline{\langle \overline{\Omega}, (id \otimes \omega)(U) \rangle}. \end{aligned} \tag{I.22}$$

As duas últimas equações mostram que $\mu(\omega^o) = \mu(\omega)^*$ é equivalente a (I.16b). No que segue, também denotaremos $(U \otimes \mathbf{1})$ e $(\mathbf{1} \otimes \sigma)(U \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \sigma)$ em $\mathcal{B}(H_\mu) \otimes M \otimes M$ por U_{12} e U_{13}, respectivamente.

Se $\xi, \eta \in H$, define-se a forma linear $\omega_{\xi\eta} \in M_*$ por

$$\langle a, \omega_{\xi\eta} \rangle \equiv (a\xi|\eta)_H, \qquad \forall a \in M. \tag{I.23}$$

Calculando o produto escalar $(\beta|\mu(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)$ em H_μ e levando em conta (I.23), obtemos sem dificuldade a seguinte formula:

$$(\hat{U}(\alpha \otimes \beta)|\gamma \otimes \delta)_{H \otimes H_\mu} = (\beta|\mu(\omega_{\gamma,\alpha})\delta)_{H_\mu}, \qquad \alpha, \gamma \in H,\ \beta, \delta \in H_\mu, \tag{I.24}$$

onde $\hat{U} \equiv \sigma \circ U^* \circ \sigma \in M \otimes \mathcal{B}(H_\mu)$. Ela será muito útil nos capítulos seguintes, pois relaciona a representação μ com o operador $\hat{U}$, conhecido como o dual de U.

I.4 Álgebras de Kac

Como mencionado anteriormente, uma álgebra de Kac é uma álgebra de Hopf-von Neumann com um peso n.f.s. , isto é, é uma álgebra de Hopf-von Neumann na qual se sabe integrar. Mas o peso ainda deve satisfazer algumas condições. Segue abaixo a definição completa. Além do livro [EnSc2], se o leitor desejar ter uma noção rápida sobre álgebras de Kac por um de seus fundadores, recomendamos as primeiras seções do artigo da ref. [Vai]. Uma *álgebra de Kac* $\mathbb{K} = (M, \triangle, \kappa, \varphi)$ satisfaz os seguintes axiomas:

– $(M, \triangle, \kappa)$ é uma álgebra de Hopf-von Neumann coinvolutiva;

– $\varphi : M^+ \to [0, \infty]$ é um peso n.f.s. sobre M tal que:

- $\triangle(\mathcal{N}_\varphi) \subset \mathcal{N}_{\mathbf{1}\otimes\varphi}$. Uma versão mais forte, mas mais manuseável deste axioma será usada. Esta exige que φ seja invariante à esquerda com respeito a $\triangle$,

$$(id \otimes \varphi)\triangle(a) = \varphi(a)\mathbf{1} \qquad \forall a \in M^+; \tag{I.25}$$

- φ é simétrico, isto é, $\forall\, a, b \in \mathcal{N}_\varphi$,

$$(id \otimes \varphi)[(\mathbf{1} \otimes b^*) \cdot \triangle(a)] = \kappa \circ (id \otimes \varphi)[\triangle(b^*) \cdot (\mathbf{1} \otimes a)]; \qquad \text{(I.26)}$$

- e a relação do seu grupo modular com a coinvolução é dada por

$$\kappa \circ \sigma_t^\varphi = \sigma_{-t}^\varphi \circ \kappa \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(I.27)}$$

Um peso satisfazendo os axiomas acima é chamado *peso de Haar.* Dada uma álgebra de Hopf-von Neumann $\mathbb{H}$, um peso de Haar que faz de $\mathbb{H}$ uma álgebra de Kac, se existir, é único a menos de um escalar [EnSc2, 2.7.7]. Quando φ for um traço, temos $\triangle_\varphi = 1$ e $\sigma_t^\varphi = id$, como teremos a oportunidade de verificar facilmente nas álgebras de Kac associadas a grupos.

O peso de Haar induz uma representação GNS de M em H_φ de acordo com o exposto na seção I.2. Isto significa que a involução é dada em H_φ por S_φ e que o grupo uniparamétrico σ_t^φ atua em M através de um operador auto-adjunto $\triangle_\varphi$.

Associada à uma álgebra de Kac $(M, \triangle, \kappa, \varphi)$ existe sempre uma isometria W pertencente a $M \otimes \mathcal{B}(H_\varphi)$, chamada *operador fundamental*, tal que

$$W(a_\varphi \otimes b_\varphi) = [\triangle(b) \cdot (a \otimes \mathbf{1})]_\varphi \qquad a, b \in \mathcal{N}_\varphi. \qquad \text{(I.28)}$$

Este operador unitário implementa canonicamente o coproduto da seguinte forma:

$$\triangle(a) = W(\mathbf{1} \otimes a)W^*. \qquad \text{(I.29)}$$

Concentrêmo-nos agora na obtenção do predual e do dual de uma álgebra de Kac $\mathbb{K}$ baseada em M. Como visto anteriormente, seu predual M_* é uma álgebra de Banach cuja estrutura foi dada em (I.12), (I.13) e (I.14). Além da representação GNS de M em H_φ, existe também uma representação multiplicativa e involutiva de M_* no mesmo espaço de Hilbert,

$$\lambda : M_* \to \hat{M} \subset \mathcal{B}(H_\varphi).$$

$\lambda(\omega)$ é um operador limitado em $\pi_\varphi(\mathcal{N}_\varphi)$ dado por

$$\lambda(\omega)(a_\varphi) = [(\omega \circ \kappa \otimes id)\triangle(a)]_\varphi, \qquad \text{(I.30)}$$

e que pode também ser escrito como

$$\lambda(\omega) = (\omega \circ \kappa \otimes id)(W). \qquad \text{(I.31)}$$

λ é chamada de *representação Fourier* de $\mathbb{K}$. Sua imagem $\lambda(M_*) = \hat{M}$ é uma álgebra de von Neumann que atua em H_φ pelo produto (I.12),

$$\lambda(\omega)(\omega'_\varphi) = (\omega * \omega')_\varphi, \tag{I.32}$$

onde $\omega'_\varphi \in H_\varphi$ é o único vetor tal que $(\omega'_\varphi|a_\varphi) = \langle\omega', a^*\rangle$ para todo $a \in \mathcal{N}_\varphi$, e para cada $\omega' \in I_\varphi = \{\omega \in M_* \,|\, sup\{|\langle\omega, a^*\rangle|,\ a \in M,\ \varphi(a^*a) \leq 1\} < \infty\}$. A condição acima, junto com a definição de I_φ, é uma generalização da condição de quadrado-integrável para $\omega' \in M_*$, como veremos nos exemplos da próxima seção.

O dual da álgebra de Kac $\mathbb{K}$ está baseado na imagem $\hat{M}$ da representação Fourier, $\hat{\mathbb{K}} = (\hat{M}, \hat{\Delta}, \hat{\kappa}, \hat{\varphi})$. A involução dual ^{o} é representadada por $\hat{S}_{\hat{\varphi}} = \hat{J}_{\hat{\varphi}}\hat{\Delta}_{\hat{\varphi}}^{1/2}$, analogamente ao seu dual, onde o operador modular dual é dado pela derivada de Radon-Nikodým $\hat{\Delta}_{\hat{\varphi}} = \frac{d\varphi}{d(\varphi o \kappa)}$. O operador W é unitário e seu adjunto é dado por (com $\hat{J}_{\hat{\varphi}} = \hat{J}$ daqui em diante)

$$W^* = (\hat{J} \otimes J) \circ W \circ (\hat{J} \otimes J). \tag{I.33}$$

Seu dual é então escrito

$$\hat{W} = \sigma \circ W^* \circ \sigma, \tag{I.34}$$

e o coproduto dual é dado pelas versões duais de (I.28) ou de (I.29),

$$\hat{\Delta}(\omega) = \hat{W}(\mathbf{1} \otimes \omega)\hat{W}^*. \tag{I.35}$$

Além disto, a coinvolução dual é definida por $\hat{\kappa}(\lambda(\omega)) = \lambda(\omega \circ \kappa)$ ou por $\hat{\kappa}(\omega) = J\omega^o J$, que é sua implementação canônica em H_φ. Dualizando esta última fórmula, obtemos uma nova fórmula para κ em termos de $\hat{J}$,

$$\kappa(a) = \hat{J}a^*\hat{J}. \tag{I.36}$$

O peso dual $\hat{\varphi}$ sobre $\hat{M}$ é o peso n.f.s. canonicamente associado a álgebra de Hilbert à esquerda $(I_\varphi \cap I_\varphi^o)_\varphi$ e é dado, para $X \in \hat{M}^+$, por [EnSc2, 2.1.1 e 3.5.3],[Com]

$$\hat{\varphi}(X) = \begin{cases} \|\omega\|^2 & \text{se existir } \omega \in (I_\varphi \cap I_\varphi^o)_\varphi \text{ tal que } X = \hat{\pi}(\omega) \\ +\infty & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\hat{\pi}$ é a representação canônica (atuando à esquerda pelo produto da álgebra) de $(I_\varphi \cap I_\varphi^o)_\varphi$ em H_φ. Finalmente, o espaço de Hilbert $H_{\hat{\varphi}}$ é identificado com H_φ. Esta álgebra de Kac tem também, obviamente, um predual $\hat{M}_*$ e uma representação Fourier $\hat{\lambda}$. A dualidade Kac fica expressa pelo fato de que a álgebra dual de $\hat{\mathbb{K}}$ ser isomorfa a $\mathbb{K}$.

Da expressão (I.31) e do fato que λ é uma representação involutiva, (I.16b), segue-se, usando (I.34), que

$$\lambda(\omega) = (\omega \otimes id)(W^*) = (id \otimes \omega)(\hat{W}). \tag{I.37}$$

Se compararmos esta fórmula com (I.15), obtemos $\hat{W}$ como o gerador de λ. Operadores associados à geração de representações e a implementação de coprodutos, como W, satisfazem uma importante identidade chamada *pentagonal*. Para obtê-la, primeiro aplicamos a identidade (I.16a) ao adjunto do gerador $\hat{W}$, $\hat{W}^* = \sigma \circ W \circ \sigma$, e multiplicamos à direita por $W \otimes \mathbf{1}$:

$$(\triangle \otimes id)(W)(W \otimes \mathbf{1}) = (\mathbf{1} \otimes W)(\sigma \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes W)(\sigma \otimes \mathbf{1})(W \otimes \mathbf{1}). \tag{I.38}$$

Por outro lado, multiplicando a eq. (I.29) à direita por W, e aplicando esta sobre a primeira componente de W, isto é, fazendo $\triangle(a)W \mapsto (\triangle \otimes id)(W)(W \otimes \mathbf{1}), W(\mathbf{1} \otimes a) \mapsto (W \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes W)$, obtém-se

$$(\triangle \otimes id)(W)(W \otimes \mathbf{1}) = (W \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes W). \tag{I.39}$$

Igualando os lados direitos desta última (conexão $W-\triangle$) e de (I.38) ($\hat{W}$ como gerador) obtemos a *relação pentagonal*

$$(\mathbf{1} \otimes W)(\sigma \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes W)(\sigma \otimes \mathbf{1})(W \otimes \mathbf{1}) = (W \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes W). \tag{I.40}$$

Definindo $(W \otimes \mathbf{1}) = W_{12}$, $(\mathbf{1} \otimes W) = W_{23}$, etc., esta identidade também pode ser escrita como

$$W_{23}W_{13}W_{12} = W_{12}W_{23}. \tag{I.41}$$

A dualidade entre $\mathbb{K}$ e $\hat{\mathbb{K}}$ é explicitamente realizada da seguinte forma: primeiro pela passagem de M ao seu predual M_* e, então, para $\hat{M}$ via representação Fourier λ, a qual é fiel [EnSc2, capítulo 4]. Como λ é gerada por $\hat{W}$ (e, por dualidade, $\hat{\lambda}$ é gerada por W), reconhecemos o papel essencial desempenhado pelo operador W em dualidade Kac. De fato, operadores que satisfazem a relação pentagonal foram identificados em

[BaSk] como característicos de álgebras que apresentam dualidade, incluindo os grupos quânticos compactos [Wo1] e os não compactos [PoWo].

Alguns casos particulares de álgebras de Kac: $\mathbb{K} = (M, \triangle, \kappa, \varphi)$ é uma álgebra dita *unimodular* se o peso de Haar φ for um traço invariante por κ, $\varphi = \varphi \circ \kappa$; $\mathbb{K}$ é dita *compacta* se seu peso de Haar for finito; $\mathbb{K}$ é *discreta* se o seu predual M_* possuir unidade. Estas duas últimas são duais entre si, isto é, o dual de uma álgebra de Kac compacta é uma discreta e vice-versa. Se $\mathbb{K}$ for ao mesmo tempo compacta e discreta, ela é de dimensão finita. Essa nomenclatura vem claramente de grupos, cujas álgebras de Kac associadas (que apresentaremos na próxima seção) são os seus exemplos padrões.

I.5 Dualidade de Grupos

Dado um grupo l.c. e separável G existem duas álgebras de Kac duais entre si que, por estarem associadas a G, permitem generalizar as dualidades de Pontryagin e de Tannaka-Krein. A primeira, simétrica, é construída sobre a álgebra de von Neumann gerada pelas representações regulares de G, enquanto que a segunda, abeliana, sobre a álgebra de von Neumann das funções $L^\infty(G)$. Estas álgebras e sua dualidade serão apresentadas nas subseções seguintes. Para não sermos demasiada e desnecessariamente repetitivos, não apresentamos aqui a verificação de que as álgebras que associaremos a grupos nesta seção são de fato álgebras de Kac. Isto será feito no capítulo III para álgebras de Kac análogas, projetivas, que são bem mais complexas.

I.5.1 A Álgebra de Kac Simétrica de um Grupo

Sobre o espaço de Hilbert $L^2(G)$ das funções de quadrado integrável sobre um grupo separável e l.c. G atuam, entre outras, suas representações regulares à esquerda. Para fixar a notação, lembramos que em $L^2(G)$ o produto escalar está definido por

$$(f|g) = \int_G dx\, f(x)\overline{g(x)}, \tag{I.42}$$

e a norma por $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$, onde dx é a medida de Haar invariante *à esquerda* em G. As representações *regulares à esquerda* $L(x)$, $x \in G$, atuam neste espaço segundo

$$[L(x)f](y) = f(x^{-1}y). \tag{I.43}$$

Estes operadores geram (para cada $x \in G$) uma subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(G))$, que é a álgebra de von Neumann denotada por $\mathcal{M}(G)$. Sua norma provém de $\mathcal{B}(L^2(G))$ e é dada por

$$\|L(x)\| = sup\|L(x)f\|, \ \|f\|_2 = 1, \tag{I.44}$$

enquanto que a involução é a adjunção usual simbolizada por $\dagger$. Como os $L(x)$ são unitários, temos $L^\dagger(x) = L(x^{-1})$. O produto em $\mathcal{M}(G)$ é a representação do produto do grupo, $L(x)L(y) = L(xy)$, cuja unidade é o operador identidade, denotado por $\mathbf{1} = L(e) = I$. Cada elemento (operador) em $\mathcal{M}(G)$ é uma combinação linear de todos os seus geradores, tendo funções $L^1(G)$ como coeficientes,

$$\hat{f} = \int_G dx \ f(x)L(x), \qquad f \in L^1(G). \tag{I.45}$$

Isto se deve ao fato que, na verdade, $\mathcal{M}(G)$ é a imagem da representação regular à esquerda de $L^1(G)$. Lembre-se também que a álgebra $L^1(G)$ está intimamente relacionada a *álgebra de grupo*, na qual combinações lineares semelhantes ocorrem. A definição de $L^1(G)$ juntamente com algumas de suas propriedades será dada logo abaixo. Os operadores (I.45) atuam sobre $L^2(G)$, segundo (I.43), por

$$[\hat{f}g](x) = \int_G dy \ f(y)[L(y)g](x) = \int_G dy \ f(y)g(y^{-1}x). \tag{I.46}$$

Se restringirmos o espaço de atuação destes para $L^2(G) \cap L^1(G)$, (I.46) resulta ser exatamente a convolução $*$ em $L^1(G)$ (veja abaixo). Temos também o produto de dois operadores dado em termos da convolução de seus respectivos coeficientes L^1:

$$\begin{aligned} \hat{f} \cdot \hat{g} &= \int_G dx \int_G dy \ f(x)g(y)L(xy) = \int_G dz \int_G dx \ f(x)g(x^{-1}z)L(z) \\ &= \int_G dz \ (f * g)(z)L(z). \end{aligned} \tag{I.47}$$

Como vimos no parágrafo acima, há uma outra álgebra associada ao grupo G da qual precisamos tomar conhecimento. A álgebra $L^1(G)$ tem de fato um papel importante na dualidade do grupo G, poderíamos até dizer que ela está "por trás" da dualidade. Dada uma medida de Haar invariante à esquerda sobre G, dx, a álgebra das (classes de) funções definidas em quase todo lugar e integráveis sobre G, $L^1(G, dx)$, é a chamada *álgebra de Banach de convolução* de G. Seu produto (convolução) [Re] é dado por

$$(f * g)(x) = \int_G dy \ f(y)g(y^{-1}x), \tag{I.48}$$

a involução por

$$f^*(x) = \triangle_G x^{-1} \overline{f(x^{-1})}, \tag{I.49}$$

e a norma por

$$\|f\|_1 = \int_G dx \; |f(x)|. \tag{I.50}$$

O termo "integráveis sobre G" empregado acima signfica que $\|f\|_1 < \infty$. A função $\triangle_G : G \to \mathbb{R}_+$ é um homomorphismo positivo e contínuo de grupos chamado *função modular*, a qual satifaz

$$\begin{aligned} \triangle_G e &= 1 \\ \triangle_G(xy) &= \triangle_G x \triangle_G y. \end{aligned}$$

Se μ_e e μ_d forem medidas de Haar invariantes à esquerda e à direita, respectivamente, isto é, se $\mu_e(xy) = \mu_e(y)$, $\mu_d(xy) = \mu_d(x)$, a função $\triangle_G$ as relaciona segundo[5] [Re],

$$\mu_e(x) = (\triangle_G x)\, \mu_d(x). \tag{I.51}$$

Quando $\triangle_G \equiv 1$, as duas medidas coincidem e G é chamado *unimodular*. Trocando variáveis em (I.48) e usando a identidade [Re]

$$\mu_e(x^{-1}) = (\triangle_G x^{-1})\, \mu_e(x), \tag{I.52}$$

a convolução pode também ser escrita em termos de μ_d (veja também (I.51)) como $(f * g)(x) = \int_G dy\, \triangle_G y^{-1}\, f(xy^{-1}) g(y)$.

A álgebra $C(G)$ das funções contínuas de suporte compacto sobre G é densa em $L^1(G)$. Ela aparecerá em algumas definições, no lugar de L^1 ou de $L^1 \cap L^2(G)$. Com respeito a unidade em L^1, temos que "$L^1(G)$ tem unidade sse G for discreto" [Dix2]. Caso contrário, ela tem apenas unidades aproximadas à esquerda e à direita (para ver como estas são obtidas, veja em [Re]). A álgebra com unidade que contém $L^1(G)$ como ideal é a seguinte: a cada $f \in L^1(G)$ associa-se uma medida $d\mu(x)$ por $d\mu(x) = f(x)dx$. Esta associação implementa uma isometria involutiva entre as álgebras de Banach $L^1(G)$ e $M^1(G)$, a álgebra de Banach involutiva e com unidade de todas as medidas

[5]Apenas por completude e referência futura, adicionamos também $\mu_d(xy) = \frac{1}{\triangle_G x}\mu_d(y)$, $\mu_e(xy) = \triangle_G y\, \mu_e(x)$.

de Borel complexas e limitadas sobre G. Em $M^1(G)$ o produto de convolução está dado por $(\mu * \nu)(f) = \int_G f(x)d(\mu * \nu)(x) = \int_{G\times G} f(xy)d\mu(x)d\nu(y)$, e a unidade é a medida (distribuição de ordem zero) de Dirac na identidade, δ_e. Introduzindo a notação $\check{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$, a qual será usada daqui em diante, a involução nessa álgebra é dada por $\mu^*(f) = \overline{\mu(\check{f})}$ [Re].

Uma representação U do grupo G sobre o espaço de Hilbert H é também uma representação de $M^1(G)$, e é escrita

$$\mu \mapsto U(\mu) = \int_G d\mu(x)\; U(x).$$

$U(\mu)$ é tal que sua restrição a $L^1(G)$ é não degenerada[6],

$$f \mapsto U(f) = \int_G dx\; f(x)U(x). \tag{I.53}$$

Há, de fato, uma correspondência bijetiva entre representações unitárias de G e representações não degeneradas de $L^1(G)$ [Dix2]. Em particular, à representação regular à esquerda de G corresponde o operador

$$L(f) \equiv \hat{f} = \int_G dx f(x)L(x), \tag{I.54}$$

que é exatamente a expressão geral de um elemento de $\mathcal{M}(G)$. Além disto, quando restrito ao espaço $L^1(G) \cap L^2(G)$, $L(f)$ atua por convolução:

$$L(f)g = f * g, \qquad g \in L^1(G) \cap L^2(G). \tag{I.55}$$

$L(f)$ é de fato uma representação multiplicativa e involutiva, pois satisfaz:

$$\begin{aligned} L(f * g) &= \hat{f} \cdot \hat{g}; && \text{(I.56a)} \\ L(f^*) &= \int_G dx\, \triangle_G x^{-1}\overline{f(x^{-1})}L(x) = \int_G dx\, \overline{f(x)}L^\dagger(x) \\ &= \hat{f}^\dagger, && \text{(I.56b)} \end{aligned}$$

onde usou-se (I.52) em (I.56b).

Por fim, no que concerne a essas álgebras temos ainda o seguinte: a álgebra C^* $C_o(G)$, definida na seção I.1, tem como dual a álgebra $M^1(G)$, sendo que o pareamento de dualidade é explicitamente dado por

$$\mu(f) = \langle \mu, f\rangle = \int_G d\mu(x)f(x) = \int_G dx\; g(x)f(x), \tag{I.57}$$

[6]Uma representação para a qual $U(f)g \neq 0, \forall g \in H,\; f \in L^1(G)$.

se formos nos restringir a $d\mu(x) = g(x)dx$. O mesmo tipo de dualidade vale para o par de álgebras L^∞ (veja definição na seção I.5.2) e L^1, onde a fórmula acima representa um funcional linear sobre a última. De fato, temos $L^1(G)^* = L^\infty(G)$, mas enquanto vale $L^\infty(G)_* = L^1(G)$, o dual de L^∞ não é L^1. Apenas sabemos que esta última está contida nele [KadRi].

Voltando à $\mathcal{M}(G)$, sobre esta fica definida a *álgebra de Kac simétrica* de G, $\mathbb{K}^s(G) = (\mathcal{M}(G), \triangle, \kappa, \varphi_s)$, quando definimos as operações adicionais:

$$\triangle L(x) = L(x) \otimes L(x); \tag{I.58a}$$

$$\kappa(L(x)) = L^\dagger(x); \tag{I.58b}$$

$$\varphi_s(a) = \begin{cases} \|f\|_2^2 & \text{se } a = \hat{f}^\dagger \cdot \hat{f} \\ +\infty & \text{de outro modo.} \end{cases} \qquad a \in \hat{M}^+ \tag{I.58c}$$

Apenas por completude e para melhor visualizar a estrutura, reescrevemos as operações acima em termos das combinações lineares (I.45), cujo produto foi já foi explicitado em (I.47):

$$\hat{f}^\dagger = \int_G dx\, \triangle_G x^{-1}\, \overline{f(x^{-1})}\, L(x); \tag{I.59a}$$

$$\triangle(\hat{f}) = \int_G dx\, f(x)\, L(x) \otimes L(x); \tag{I.59b}$$

$$\kappa(\hat{f}) = \int_G dx\, f(x)\, L(x^{-1}) = \int_G dx\, \triangle_G x^{-1} f(x^{-1})\, L(x); \tag{I.59c}$$

$$\varphi_s(\hat{f}) = f(e), \qquad f \in C(G) * C(G), \tag{I.59d}$$

onde se usou (I.56b) para reescrever a involução sobre $\hat{f}$.

Alguns comentários:

- como o produto em $\mathbb{K}^s(G)$ reflete o produto do grupo, ela só será abeliana se G o for;
- como a condição definitória do ideal $\mathcal{N}_{\varphi_s}$ é satisfeita pelos operadores $\hat{f}$ tais que $\varphi_s(\hat{f}^\dagger \hat{f}) = \int_G dx\ |f(x)|^2 < \infty$, conclui-se que $\mathcal{N}_{\varphi_s}$ contém os operadores $\hat{f}$ cujos coeficientes f estão em $L^1(G) \cap L^2(G)$. A representação GNS é dada, então, pela inclusão de $L^1(G) \cap L^2(G)$ em $L^2(G)$: $\pi_{\varphi_s}(\hat{f}) = f$, cuja atuação em L^2 é $\pi_{\varphi_s}(\hat{f})(g) = f * g$;
- o produto escalar dado pelo peso φ_s através de $\varphi_s(\hat{g}^\dagger \hat{f}) = (g^* * f)(e)$ coincide exatamente com (I.42), o que confirma $L^2(G)$ como resultado da construção GNS de $\mathbb{K}^s(G)$;

– o peso de Haar φ_s não é um traço, como pode ser visto através de

$$\varphi_s(\hat{f}\cdot\hat{f}^\dagger) = (f * f^*)(e) = \int_G dx\, \triangle_G x\, |f(x)|^2 \tag{I.60a}$$
$$\varphi_s(\hat{f}^\dagger\cdot\hat{f}) = (f^* * f)(e) = \int_G dx\, |f(x)|^2, \tag{I.60b}$$

onde se usou a identidade (I.52) para obter (I.60b). Conclui-se de (I.60) que φ_s é traço sse G for unimodular;

– o operador modular neste caso atua por multiplicação pela função modular,

$$\triangle_{\varphi_s} = \triangle_G. \tag{I.61}$$

Consequentemente, o grupo modular atua em $L^2(G)$ por

$$\begin{aligned}
[\sigma_t^{\varphi_s}(L(x))f](y) &= [\triangle_G^{it} L(x) \triangle_G^{-it} f](y) \\
&= (\triangle_G y)^{it} [L(x)\triangle_G^{-it} f](y) \\
&= (\triangle_G y)^{it} (\triangle_G(x^{-1}y))^{-it} f(x^{-1}y) \\
&= (\triangle_G x)^{it} f(x^{-1}y),
\end{aligned} \tag{I.62}$$

no que resulta $\sigma_t^{\varphi_s}(L(x)) = (\triangle_G x)^{it} L(x)$;

– a função-coeficiente L^1 é reobtida de $\hat{f}$ graças ao peso φ_s pois, de (I.59d) obtemos

$$f(x) = \varphi_s[L^\dagger(x)\hat{f}]. \tag{I.63}$$

– a álgebra de Hopf-von Neumann subjacente é denotada $\mathbb{H}^s(G)$.

Restringindo-nos a $F \in C(G\times G)$, $f \in C(G)$, temos também em $\mathbb{K}^s(G)$ os operadores

$$\hat{W}F(x,y) = F(y^{-1}x, y), \qquad \hat{W}^*F(x,y) = F(yx,y), \tag{I.64a}$$
$$Jf(x) = \overline{f(x)}. \tag{I.64b}$$

No que se refere ao predual, $\mathcal{M}(G)_*$ é a álgebra dos funcionais $\hat{\omega}_{fg} : \mathcal{M}(G) \to \mathbb{C}$ definidos por $\hat{\omega}_{fg}(\hat{h}) = (\hat{h}f|g)$. Esta, no entanto, é isomorfa à *álgebra de Fourier* [EnSc2, 3.4.6][Eym] $A(G)$, definida como a álgebra das funções h que podem ser expressas na forma $h = f * \check{g}$, $f, g \in L^2(G)$. Sua identificação com o predual vem de (I.23) e é dada através da função

$$\hat{\omega}_{fg}(x) \equiv \langle L(x^{-1}), \hat{\omega}_{fg} \rangle = (f * \check{g})(x). \tag{I.65}$$

A norma em $A(G)$ é dada por $\|h\|_A = \sup\{|\int_G dx\, h(x) f(x)|;\ \|L(f)\| \leq 1,\ f \in L^2(G)\}$. A representação Fourier deste predual pode então ser obtida de (I.24) e (I.64a),

$$\begin{aligned}(\hat{W}(f \otimes g)|h \otimes l) &= \int_G dy\, g(y)\overline{l(y)} \int_G dx\, \overline{h(x)} f(y^{-1}x) \\ &= \int_G dy\, g(y)\overline{(h * \check{f})(y) l(y)} \\ &= \int_G dy\, g(y)\overline{\hat{\omega}_{hf}(y) l(y)},\end{aligned}$$

de onde sai, por comparação, que $\hat{\lambda}(\hat{\omega}_{hf})l = \hat{\omega}_{hf} l$. Disto resulta que a representação Fourier $\hat{\lambda}$ é a identidade. Aplicando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz na função $\hat{\omega}_{fg}(x) = (L(x^{-1})f|g)$, por ser $L(x)$ unitário, obtemos

$$\begin{aligned}|\hat{\omega}_{fg}(x)| &\leq \|L(x^{-1})f\|_2 \|g\|_2 \\ &= \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty,\end{aligned} \tag{I.66}$$

o que significa que ela tem um limite superior finito. Tais funções serão introduzidas na próxima subseção e compõe a álgebra de von Neumann $L^\infty(G)$. Na verdade, o fecho (na topologia uniforme) de $A(G)$ em $L^\infty(G)$ é a álgebra C^* $C_o(G)$ [DeCEnSc]. Por (I.32) e pelo resultado acima também conclui-se que o produto em $A(G)$ (e em $L^\infty(G)$) é o produto abeliano usual de multiplicação ponto-a-ponto. Estas construções e a identificação da representação Fourier como sendo a identidade nos levam a considerar a seguir a álgebra de von Neumann $L^\infty(G)$ e a álgebra de Kac abeliana de G.

I.5.2 A Álgebra de Kac Abeliana de um Grupo

A álgebra de von Neumann $L^\infty(G)$ [KadRi] é a algebra das (classes de) funções definidas em quase todo lugar sobre G, mensuráveis e essencialmente limitadas, isto é, das funções f sobre G que satisfazem $|f(x)| \leq C$ localmente em quase todo lugar, onde o número C $(0 \leq C < \infty)$ é o *supremo essencial* de f. A norma é definida por

$$\|f\|_\infty = sup.ess.|f(x)|$$

e a involução por $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Esta álgebra atua no espaço de Hilbert $L^2(G)$ por multiplicação ponto-a-ponto e, portanto, é uma subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(G))$. $L^\infty(G)$, com as operações e condições a seguir, é a *álgebra de Kac abeliana* de G, denotada $\mathbb{K}^a(G) = (L^\infty(G), \triangle, \kappa, \varphi_a)$:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x); && \text{(I.67a)} \\ \mathbf{1} &= 1, \text{ tal que } 1(x) = 1 \ \forall\, x \in G; && \text{(I.67b)} \\ \triangle(f)(x,y) &= f(xy); && \text{(I.67c)} \\ \kappa(f)(x) &= f(x^{-1}); && \text{(I.67d)} \\ \varphi_a(f) &= \int_G dx\, f(x) \qquad f \in L^\infty(G)^+. && \text{(I.67e)} \end{aligned}$$

Temos também neste caso, restringindo-nos à álgebra $C(G)$, os seguintes operadores ($F \in C(G \otimes G)$, $f \in C(G)$):

$$WF(x,y) = F(x,xy), \qquad W^*F(x,y) = F(x,x^{-1}y), \tag{I.68a}$$

$$\hat{J}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\triangle_G x}}\overline{f(x^{-1})}. \tag{I.68b}$$

Alguns comentários:

- como o coproduto está definido a partir do produto do grupo, ele só é simétrico se o grupo for abeliano;
- os elementos positivos de $L^\infty(G)$ são as funções positivas;
- o produto escalar definido por φ_a através de $\varphi_a(g^*f) = \int_G dx\, f(x)\overline{g(x)}$ coincide com o produto escalar de $L^2(G)$;
- o peso de Haar se reduz neste caso a um traço, e é dado simplesmente pela medida de Haar invariante à esquerda em G;
- o operador modular é definido através do peso φ_s pela derivada de Radon-Nikodým $\triangle_{\varphi_a} = \frac{d\varphi_s}{d(\varphi_s \circ \kappa)}$. Como $\varphi_s(\hat{f}) = f(e)$, resulta de (I.59c) que φ_s é κ-invariante, $\varphi_s(\kappa\hat{f}) = f(e)$, o que nos dá $\triangle_{\varphi_a} = 1$. Com isto o grupo modular resulta trivial, $\sigma_t^{\varphi_a} = id$;
- a álgebra de Hopf-von Neumann subjacente a $\mathbb{K}^a(G)$ é denotada por $\mathbb{H}^a(G)$.

Como $\mathbb{K}^a(G)$ atua em $L^2(G)$, segue de $\varphi_a(f^*f) = \int_G dx\ |f(x)|^2 < \infty$ que a representação GNS é dada por inclusão, $\pi_{\varphi_a}(f) = f$, onde $\mathcal{N}_{\varphi_a} = L^\infty(G) \cap L^2(G)$ e

$\mathcal{M}_{\varphi_a} = L^\infty(G) \cap L^1(G)$. De (I.68b), vemos claramente que $\hat{J}$ e $\triangle_{\varphi_s} = \triangle_G$ implementam corretamente a conjugação complexa em $L^2(G)$. Elementos típicos do predual são dados pelas formas bilineares definidas em (I.23), neste caso por $(g \in L^\infty(G),\ f, h \in L^2(G))$

$$\begin{aligned} \langle g, \omega_{hf} \rangle &= (gh|f) = \int_G dx\, g(x)\, h(x)\, \overline{f(x)} \\ \therefore\ & \omega_{hf} = h\overline{f}. \end{aligned} \tag{I.69}$$

Pela desigualdade de Hölder [ChMoBl] aplicada a $h, f \in L^2(G)$, obtemos que seu produto $\omega_{hf} = h\overline{f}$ é integrável, ou, pertence a $L^1(G)$. Temos, portanto que o predual é $L^\infty(G)_* = L^1(G)$ e, como antecipado, $I_{\varphi_a} = L^1(G) \cap L^2(G)$ é o conjunto das funções de quadrado integrável neste predual. Usando as relações de dualidade (I.12) e (I.13) para conectar L^∞ e L^1, obtêm-se facilmente a convolução e a involução de L^1 a partir do coproduto, da involução e da coinvolução em L^∞.

De posse de (I.68a) podemos usar a relação (I.24) para determinar a representação Fourier de $\mathbb{K}^a(G)$,

$$\begin{aligned} (W(f \otimes g)|h \otimes l) &= \int_G dx\, f(x)\overline{h(x)} \int_G dy\, g(xy)\overline{l(y)} \\ &= \int_G dz\, g(z) \int_G dx\, \overline{h(x)} f(x) \overline{l(x^{-1}z)}, \\ &= (g|\lambda(\omega_{hf})l), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\lambda(\omega_{hf})l(z) = \int_G dx\, h(x)\overline{f(x)}l(x^{-1}z)$. Lembrando a ação da representação regular à esquerda $L(x)$ e (I.69) temos, finalmente,

$$\lambda(\omega_{hf}) = \int_G dx\, \omega_{hf}(x) L(x), \tag{I.70}$$

cuja imagem é justamente $\mathcal{M}(G)$. Com isto finalizamos a descrição da dualidade Kac $\mathbb{K}^s(G) - \mathbb{K}^a(G)$ e, consequentemente, a dualidade para o grupo G, cujo esquema está esboçado na figura I.3.

Por fim, para mostrar como $\hat{W}$ gera λ, consideramos o espaço $L^2(G, L^2(G))$ das funções sobre G a valores em $L^2(G)$. Este espaço resulta ser isomorfo a $L^2(G) \otimes L^2(G)$ pela associação $\phi(y)(x) = F(x, y)$, onde $\phi(y) \in L^2(G)$. Para $y \in G$ fixo temos

$$\begin{aligned} [L(y)\phi(y)](x) = \phi(y)(y^{-1}x) &= F(y^{-1}x, y) \\ &= [\hat{W}F](x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}^s(G) \arrow[dr, "*"] & \\
L^1(G) \arrow[ur, "\lambda"] & & A(G) \arrow[dl, "\hat{\lambda} = id"] \\
& \mathbb{K}^a(G) \arrow[ul, "*"] &
\end{tikzcd}$$

Figura I.3: Dualidade de grupo em termos de dualidade Kac ($*$ denota predualidade).

onde usou-se (I.64a). Isto mostra que a representação L (que induz λ), se vista como uma função limitada de G em $\mathcal{B}(L^2(G))$, pode também ser vista como o operador $\hat{W} \in \mathcal{B}(L^2(G)) \otimes L^\infty(G)$.

I.5.3 O Grupo Intrínseco

Um invariante importante de uma álgebra de Kac $\mathbb{K}$ é seu *grupo intrínseco* $G(\mathbb{K})$. Na dualidade de grupos, este objeto permite reobter o grupo a partir das álgebras de Kac em termos das quais a dualidade é realizada. O grupo intrínseco de $\mathbb{K}$ está definido como o conjunto dos elementos $a \in \mathbb{K}$ que possuem inverso a^{-1} ($a \cdot a^{-1} = \mathbf{1}$) e que satisfazem

$$\triangle(a) = a \otimes a.$$

O grupo intrínseco de $\mathbb{K}^s(G)$ é justamente G (veja (I.58a)), enquanto que o de $\mathbb{K}^a(G)$ é o grupo dos caracteres do grupo G, o qual coincide com seu dual unitário se G for abeliano. Isso é facilmente verificado quando calculamos o coproduto (I.67c) de um caráter,

$$\triangle(\chi_\alpha)(x \otimes y) = \chi_\alpha(xy) = \chi_\alpha(x)\chi_\alpha(y) = (\chi_\alpha \otimes \chi_\alpha)(x \otimes y).$$

Por outro lado, pela definição de caráter de um grupo, qualquer outra função que satisfizer a igualdade do centro é um caráter. Temos, portanto, $G(\mathbb{K}^a(G)) = \hat{G}$.

No caso de uma álgebra de Kac geral, temos o interessante resultado abaixo, o qual é a generalização para álgebras de Kac de um teorema de Takesaki [EnSc2, 4.2]:

(i) dada uma álgebra de Kac simétrica KS qualquer, ela é necessariamente isomorfa à álgebra de Kac simétrica associada ao seu grupo intrínseco, isto é, $KS \sim \mathbb{K}^s(G(KS))$;

(ii) dada uma álgebra de Kac abeliana KA qualquer, ela é necessariamente isomorfa à álgebra de Kac abeliana do grupo intrínseco de sua álgebra de Kac dual $\widehat{KA}$, ou, $KA \sim \mathbb{K}^a(G(\widehat{KA}))$.

Como caso particular, voltamos a considerar um grupo abeliano e tomemos a álgebra de Kac abeliana de G, $\mathbb{K}^a(G)$. Ela é também simétrica, o que nos habilita a usar o resultado (i). Como seu grupo intrínseco é o dual $\hat{G}$, temos de (i) que $\mathbb{K}^a(G)$ é isomorfa a $\mathbb{K}^s(\hat{G})$. Isto é justamente a dualidade de Pontryagin expressa em linguagem de álgebras de Kac, pois da dualidade Kac $\widehat{\mathbb{K}^a(\hat{G})} = \mathbb{K}^s(\hat{G})$ resulta a dualidade entre as álgebras de funções

$$\widehat{\mathbb{K}^a(\hat{G})} \sim \mathbb{K}^a(G). \tag{I.71}$$

O isomorfismo entre estas álgebras é dado pela transformada de Fourier, a qual pode ser vista como o funcional sobre $L^1(G)$ (predual de $\mathbb{K}^a(G)$) gerado pelos caracteres $\chi_\alpha \in L^\infty(G)$:

$$\tilde{f}(\alpha) \equiv [\mathcal{F}f](\alpha) = \int_G dx\, \overline{\chi_\alpha(x)}\, f(x), \qquad f \in L^1(G), \tag{I.72}$$

e em cuja imagem estão as funções $\tilde{f} \in L^\infty(\hat{G})$ $(\mathbb{K}^a(\hat{G}))$. Quando G for auto-dual, isto é, quando $\hat{G} = G$, a transformada de Fourier acima simplifica-se e pode ser vista em termos do pareamento de dualidade $L^1 - L^\infty$ sobre G, $[\mathcal{F}f](\alpha) \equiv \langle \overline{\chi_\alpha}, f \rangle$, $f \in L^1$ (veja mais detalhes na ref. [DeCa]).

Como comentário final em relação à dualidade de grupos, cabe salientar que existe uma versão C^* e, portanto, um pouco mais geral, das álgebras de Kac, que são as álgebras de C^*-Kac [Val]. Essa versão fornece não só uma dualidade de grupos baseada em álgebras C^*, como também uma versão C^* do resultado acima, conectando álgebras e seus grupos intrínsecos. No entanto, nos trabalhos [BaSk, EnVal] foi mostrado que existe uma correspondência biunívoca entre álgebras de Kac e C^*-Kac, o que nos permite dizer que é *equivalente* descrever dualidade de grupos em termos de álgebras de Kac ou C^*-Kac.

II

Quantização no Semi-Plano

Neste capítulo descrevemos o que podemos chamar de *princípio da dualidade de grupo* na quantização sobre um espaço de fase cujo grupo canônico apresenta a maioria das dificuldades que se pode encontrar ao estabelecer sua dualidade. O espaço de fase em questão é o semi-plano, o fibrado cotangente da semi-reta. O grupo que atua sobre este espaço de forma a preservar a sua estrutura simplética, entre outras propriedades, é um grupo não compacto, não abeliano e não unimodular. Para estabelecermos uma dualidade para este grupo, as álgebras de Kac são, portanto, fundamentais. Como este grupo é um produto semi-direto de grupos com certas particularidades, é possível extender o formalismo para grupos do tipo $S \oslash N^*$, que ocorrem na quantização de outros espaços de fase. Isto é feito paralelamente ao caso do semi-plano. Com essa generalização é possível ter uma medida da generalidade do princípio empregado aqui para descrever a quantização. Começamos o capítulo com uma descrição sumária dos ingredientes básicos para a descrição clássica do semi-plano como espaço de fase, e do grupo que o tem como órbita coadjunta. Após a caracterização de tal grupo, determinamos suas representações irredutíveis inequivalentes, ingredientes básicos na decomposição da dualidade Kac segundo o dual unitário. Essa decomposição, a qual não se encontra na literatura de forma explícita, é mostrada em detalhe na seção II.3, e é fundamental para o estabelecimento de uma quantização a partir de dualidade. Finalmente, tendo decomposto a dualidade Kac (Fourier) para o grupo do semi-plano, estabelecemos uma regra de quantização para esse espaço que generaliza o formalismo de Weyl-Wigner usual, embora sem a simetria que este formalismo apresenta no espaço euclidiano. Este capítulo é uma versão detalhada da ref. [AlSa1].

II.1 O Grupo Canônico do Semi-Plano

O espaço de fase sobre o qual queremos descrever a quantização é o semi-plano $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, o espaço cotangente do espaço de configuração dado pela semi-reta $\mathbb{R}_+$. Nesta variedade simplética usamos as coordenadas x e p, em termos das quais a forma simplética, dada pela derivada exterior da forma canônica de Liouville [Ish, AbMa, Arn], é[1]

$$\omega = d\theta_o = dp \wedge dx, \qquad x \in \mathbb{R}_+,\ p \in \mathbb{R}. \tag{II.1}$$

A forma simplética implementa, através da equação

$$i_{X_f}\omega = -df \tag{II.2}$$

um homomorfismo entre o espaço das funções C^∞ (hamiltonianas) e o dos campos vetoriais hamiltonianos simpléticos, cujo núcleo são as constantes. Como ω é não degenerada, (II.2) pode ser resolvida para os campos e resulta, nas coordenadas acima,

$$X_f = \partial_p f\, \partial_x - \partial_x f\, \partial_p. \tag{II.3}$$

A forma simplética também define uma álgebra de Lie em C^∞ através do colchete de Poisson

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g), \tag{II.4}$$

a qual é isomorfa à álgebra de Lie de campos vetoriais hamiltonianos segundo

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}. \tag{II.5}$$

Seguiremos Isham nas primeiras etapas da quantização. Sua proposta para a quantização em um espaço de fase qualquer nos pareceu a mais apropriada aos nossos objetivos, pois associa um grupo a cada espaço de fase. A referência [Ish] é extensa e rica em detalhes, mas somente apresentamos aqui alguns de seus aspectos básicos, essenciais para a compreensão do papel deste grupo como um objeto algébrico associado ao espaço de fase de nosso interesse. Segundo esta proposta, para quantizar sobre um espaço de fase devemos procurar primeiro um grupo de dimensão finita (por simplicidade) cujos elementos atuem neste espaço por simplectomorfismos (transformações

[1] Veja também o fim do Apêndice A, onde ω é obtida pelo Método das Órbitas.

canônicas), isto é, que preservem a estrutura simplética. A ação deste grupo deve ser transitiva e quase-efetiva[2], para que a descrição quântica seja global, e para que a álgebra de Lie seja isomorficamente realizada em campos vetoriais hamiltonianos sobre o espaço de fase, respectivamente. Resumindo, precisamos achar um grupo de dimensão finita cuja ação no semi-plano torna este um espaço simplético homogêneo. Para esta tarefa Isham dá a receita: tomamos como grupo de partida um grupo S que atue no espaço de configuração Q, de modo que este possa ser visto como o espaço homogêneo $Q = S/H$. No nossso caso, tomamos o grupo abeliano $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, que atua sobre si mesmo, onde $H = \{e\}$. O passo seguinte consiste em encontrar um espaço vetorial N onde este grupo é representado pelo menos quase-fielmente[3]. No presente caso temos a ação de $\mathbb{R}_+$ em $N = \mathbb{R}$ dada por

$$\lambda \in \mathbb{R}_+ \mapsto R_\lambda(a) = a\lambda, \ a \in \mathbb{R}. \tag{II.6}$$

Com os ingredientes acima constrói-se o produto semi-direto do dual de N por S, $G = S \oslash N^*$, sendo N^* um subgrupo normal de G. Com isto obtém-se um grupo cuja ação no espaço de fase T^*Q é simplética (veja detalhes a respeito em [Ish]). Note, no entanto, que a variedade do grupo $S \oslash N^*$ não coincide com o espaço de fase T^*Q em geral. Por exemplo: o grupo canônico sobre o cilindro $T^*S^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ é o grupo euclidiano $E(2) = SO(2) \oslash \mathbb{R}^2$, cuja variedade é $S^1 \times \mathbb{R}^2$. A principal consequência disto é que as funções sobre o grupo canônico não são exatamente os observáveis a serem quantizados sobre o espaço de fase. No semi-plano, porém, temos o grupo $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$, cuja variedade é exatamente o semi-plano. A operação neste grupo é dada por

$$(\lambda, a)(\rho, b) = (\lambda\rho, a + \phi_\lambda(b)), \tag{II.7}$$

onde $\phi_\lambda(b) = R^*_{\lambda^{-1}}(b) = b/\lambda$ é um homomorfismo em $\mathbb{R}$ dado pela representação contragradiente R^* à (II.6). A identidade em $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ é $(1, 0)$ e o elemento inverso de (λ, a) é dado por $(\lambda^{-1}, \phi_\lambda^{-1}(-a))$, com $\phi_{\lambda^{-1}} = \phi_\lambda^{-1}$. O grupo $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ não é unimodular, isto é, a medida invariante à direita pela ação do grupo não coincide com a medida invariante à esquerda. A primeira é dada pelo produto das medidas invariantes em

[2]Uma ação *quase-efetiva* [Ish] é uma na qual os elementos do grupo que deixam invariantes pontos do espaço de fase formam um subgrupo discreto.

[3]Uma representação quasi-fiel é definida em [Ish] como sendo uma representação cujo núcleo é discreto.

cada fator de $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$: $\frac{d\lambda}{\lambda}$ é a medida invariante em $\mathbb{R}_+$, e da é a medida invariante em $\mathbb{R}$, no que resulta

$$d^d(\lambda, a) = \frac{d\lambda}{\lambda}\, da \tag{II.8}$$

como a medida invariante à direita em $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$. Para obter a medida invariante à esquerda, $d^e(\lambda, a)$, podemos usar a relação (I.51) se conhecermos a função modular. Esta, porém, é dada a partir de $d^d(\lambda, a)$ através da identidade $d^d((\lambda, a)(\rho, b)) = \frac{1}{\triangle_{\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}}(\lambda, a)} d^d(\rho, b)$ (veja a nota-de-rodapé na página 24):

$$\begin{aligned} d^d(\lambda\rho, a + b/\lambda) &= \frac{d(\lambda\rho)}{\lambda\rho} \wedge d(a + b/\lambda) = \frac{d\rho}{\rho} \wedge \frac{1}{\lambda} db \\ &= \frac{1}{\lambda} d^d(\rho, b). \end{aligned} \tag{II.9}$$

Isto fornece

$$\triangle_{\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}}(\lambda, a) = \lambda \tag{II.10}$$

e, por (I.51), temos $d^e(\lambda, a) = d\lambda\, da$. Considerando a seguinte ação *à esquerda* de $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ sobre o espaço de fase $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$l_{(\lambda,a)}(x, p) = (\lambda x, p/\lambda - a), \tag{II.11}$$

vemos que $G_{sp} = \mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ é um grupo formado por transformações canônicas lineares especiais no semi-plano. De fato, segundo o Método das Órbitas de Kirillov [Kir], mostra-se no Apêndice A que o semi-plano é a única variedade simplética não trivial canonicamente invariante por G_{sp}. Note que a ação *à direita* de G_{sp} é facilmente verificada não ser canônica. Esta diferença em relação a ação à esquerda se deve ao fato de $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ não ser unimodular, o que privilegia a medida invariante à esquerda, a única a ser utilizada daqui em diante.

A álgebra de Lie $\mathcal{G}_{sp}$ de G_{sp} pode ser obtida do produto em G_{sp} pela fórmula

$$e^{tA} e^{sL} e^{-tA} e^{-sL} = e^{ts[A,L] + \text{ordens superiores em } t,s}, \qquad A, L \in \mathcal{G}_{sp}, \tag{II.12}$$

e é dada sobre $\mathbb{R}^2$ por

$$[(l, a), (r, b)] = (0, ar - lb). \tag{II.13}$$

Obtém-se diretamente a realização desta álgebra de Lie em termos de campos vetoriais hamiltonianos sobre o semi-plano. Pela aplicação exponencial $(l, a) \mapsto (e^l, a) \in \mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$

introduz-se os subgrupos uniparamétricos $t \mapsto (e^{lt}, 0)$, $s \mapsto (1, as)$. Da ação à esquerda em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$l_{l,a}(x,p) = (e^{lt}x, e^{-lt}p - as), \tag{II.14}$$

obtém-se que a álgebra é gerada pelos campos hamiltonianos simpléticos (invariantes à direita)

$$X_{l,a}(x,p) = lx\partial_x - (lp + a)\partial_p, \tag{II.15}$$

aos quais correspondem as hamiltonianas $h_{l,a} = ax + lxp$. Sobre $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ estas hamiltonianas definem uma subálgebra de Poisson por

$$\{h_{l,a}, h_{r,b}\} = h_{0,ar-lb}, \tag{II.16}$$

cuja estrutura é idêntica à de (II.13). Podemos com isso dizer que existe uma aplicação momentum fiel [Ish, AbMa] $J : T^*\mathbb{R}_+ \to \mathcal{G}^*_{sp}$, a qual permite associar ao par $(l, a) \in \mathcal{G}_{sp}$ a função hamiltoniana $h_{l,a}$ através da relação de dualidade $\langle J(x,p), (l,a)\rangle = h_{l,a}(x,p)$. Isto nos garante a existência de uma relação biunívoca entre funções e operadores, a qual é fundamental para a quantização. Por esse isomorfismo de álgebras de Lie privilegiamos as funções $h_{l,a}$ como fazendo parte de uma classe preferencial de observáveis a serem quantizados. Também por causa deste isomorfismo não há necessidade de se fazer uma extensão central de $\mathcal{G}_{sp}$. Como veremos no capítulo seguinte, essa necessidade aparece no caso euclidiano. Em outras palavras, o espaço de cohomologia $H^2(\mathcal{G}_{sp}, \mathbb{R}) \sim H^2(G_{sp}, \mathbb{R})$ é trivial. Dada a existência da aplicação momentum podemos, então, a partir de representações irredutíveis de G_{sp} realizadas como operadores sobre um espaço de Hilbert, fazer corresponder um operador *ilimitado* (representação da álgebra de Lie) a cada observável preferencial sobre o semi-plano. Na subseção seguinte obteremos as representações irredutíveis de G_{sp} necessárias para caracterizar tais operadores mas, diferentemente de Isham, associaremos observáveis a operadores *limitados*, com vistas a uma generalização da fórmula de Weyl [Weyl]. Isto significa que a correspondência será feita através das representações do grupo.

II.2 Representações Irredutíveis e o Dual Unitário

Representações unitárias irredutíveis de grupos que são o produto semidireto de dois outros grupos são facilmente obtidas pelo Método das Representações Induzidas de Mackey [Mack3, BaRa, Gur, Su]. Nesta seção, o objetivo é obter as representações irredutíveis de $G_{sp} = \mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ por este método. Como o que segue neste capítulo é facilmente generalizado para os grupos canônicos provenientes da teoria de Isham, que são do tipo $G = S \oslash N^*$, descreveremos aqui a teoria de Mackey para tais grupos. Note-se que trataremos de um caso especial daquela teoria onde, além de N^* ser um subgrupo abeliano normal, supomos também, por simplicidade, que S é unimodular, embora não necessariamente abeliano. Podemos obter assim, como casos particulares, as representações dos grupos G_{sp}, $E(2)$ e de Heisenberg, entre outros.

Os elementos de G serão denotados por $x = (s, n)$, $y = (r, l)$, etc., a identidade por $(e, 0)$ e o produto por $(s, n)(r, l) = (sr, n + \phi_s(l))$, onde ϕ_s é um homomorfismo para cada $s \in S$, a ação de S em N^*. Se V_y são representações irredutíveis (caracteres) de N^* rotulados por $y \in \hat{N}^*$, o método de Mackey determina que o espaço de Hilbert $H_y(G)$, onde as representações induzidas (por V_y) de G atuarão, é composto pelas funções f_y que satisfazem:

- as funções $f_y : G \to \mathbb{C}$ são mensuráveis;
- $f_y((s, n)(e, l)) = V_y^{-1}(l)\, f_y(s, n)$;
- $\int_{G/N^*} d\mu(s)\, |f_y(s, n)|^2 < \infty$,

onde $d\mu(s)$ é uma medida G-invariante em $G/N^* \sim S$. A ação de $(s, n) \in G$ sobre $r \in S$, denotada, $(s, n) \cdot r$, é definida pela tomada da componente S no produto $(s, n)(r, 0) = (sr, n) = (sr, 0)(e, \phi_{sr}^{-1}(n))$, segundo a decomposição

$$(s, n) = (s, 0)(e, \phi_s^{-1}(n)) \tag{II.17}$$

de G em termos de suas partes S e N^*. Ou seja,

$$(s, n) \cdot r \equiv sr \in S. \tag{II.18}$$

Pela mesma decomposição, a segunda condição acima implica que as funções f_y podem ser escritas como

$$f_y(s, n) = V_y^{-1}(\phi_s^{-1}(n))\xi(s), \qquad f_y(s, 0) \equiv \xi(s) \in L^2(S). \tag{II.19}$$

Na verdade, (II.19) expressa a existência de um isomorfismo entre $H_y(G)$ e $L^2(S)$ para cada rótulo y. Sobre o primeiro espaço, as representações T_y de G, induzidas pelas V_y

de N^*, são definidas para cada y por[4]

$$[T_y(x)\, f_y](z) = f_y(x^{-1}z). \tag{II.20}$$

Usando a decomposição (II.19) em ambos os lados de (II.20), com $z = (s, n)$ obtemos sobre $L^2(S)$,

$$[T_y(x)\xi](s) = V_y(\sigma(x^{-1} \cdot s; x))\xi(x^{-1} \cdot s), \tag{II.21}$$

onde $\sigma(r; x)$ é um cociclo "gaugeficado" sobre G, ou um (S, G)-cociclo relativo à classe de invariância[5] da medida $d\mu(s)$ [Var, Gur], isto é, uma função de Borel $\sigma : S \times G \to N$ que satisfaz

$$\sigma(r; e) = 0; \tag{II.22a}$$

$$\sigma(y \cdot r; x) - \sigma(r; xy) + \sigma(r; y) = 0. \tag{II.22b}$$

Estes cociclos são dados explicitamente através da ação ϕ por $\sigma(r; s, n) = \phi_{sr}^{-1}(n)$. O adjetivo "gaugeficado" vem do fato de que se trata de cociclos dependentes do ponto $s \in S$ de aplicação (do operador T_y). Eles também ocorrem em Mecânica Quântica usual, pois aparecem nas representações irredutíveis do grupo de Heisenberg (veja o capítulo III), mesmo na sua versão discretizada, na qual o espaço de fase euclidiano é substituído por $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_n$ [AlGa]. Paramos por aqui no que diz respeito ao caso geral $G = S \oslash N^*$. No que segue, nos concentraremos no grupo G_{sp} do semi-plano, para o qual mostraremos que a representação (II.21) é unitária e irredutível.

Começamos pelas representações irredutíveis do subgrupo normal $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$, as quais são dadas pelos caracteres $V_y(a) = e^{iya}$, onde y é um rótulo no dual $\hat{\mathbb{R}} \sim \mathbb{R}$. De acordo com o exposto acima, o espaço de Hilbert onde atuam as representações induzidas de G_{sp} é o espaço $H_y(G_{sp})$ das funções mensuráveis $f : G_{sp} \to \mathbb{C}$ tais que podem ser decompostas nas *funções de onda* $\xi \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$f_y(\lambda, a) = e^{-iy\phi_\lambda^{-1}(a)}\xi(\lambda), \qquad \xi \in L^2(\mathbb{R}_+), \tag{II.23}$$

e que satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{d\lambda}{\lambda}\, |f_y(\lambda, a)|^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d\lambda}{\lambda}\, |\xi(\lambda)|^2 < \infty.$$

[4]Caso seja usada uma medida *quase-invariante* em $L^2(S)$, faz-se necessário incluir na representação induzida o fator $\sqrt{\frac{d\mu(x^{-1}\cdot s)}{d\mu(s)}}$, para que se tenha de fato uma representação *unitária* [Su, BaRa].

[5]Duas medidas μ e ν estão na mesma classe quando $\mu(x^{-1} \cdot E) = 0$ sse $\nu(E) = 0$, para todo Borel $E \subset S$.

Como $\mathbb{R}_+$ age sobre $\mathbb{R}$ por $\phi_\lambda(a) = a/\lambda$, temos que o cociclo no caso de G_{sp} é dado por $\sigma(\rho; \lambda, a) = \phi^{-1}_{\lambda\rho}(a) = \rho\lambda a$. As representações induzidas de G_{sp} são dadas, então, em termos de funções de onda na representação de coordenadas (isto é, em $L^2(\mathbb{R}_+)$), por

$$[T_y(\lambda, a)\xi](\rho) = e^{iy\phi_\rho^{-1}(a)}\xi(\lambda^{-1}\rho). \tag{II.24}$$

De fato, (II.24) são representações de G_{sp}, isto é, satisfazem

$$T_y(\lambda, a)T_y(\rho, b) = T_y((\lambda, a)(\rho, b)), \tag{II.25}$$

como será mostrado a seguir: aplicando o lado esquerdo de (II.25) sobre uma $\xi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ obtemos

$$\begin{aligned}[T_y(\lambda, a)T_y(\rho, b)\xi](\eta) &= e^{iy\phi_\eta^{-1}(a)}[T_y(\rho, b)\xi](\lambda^{-1}\eta) \\ &= e^{iy\phi_\eta^{-1}[a+\phi_\lambda(b)]}\xi((\lambda\rho)^{-1}\eta),\end{aligned}$$

enquanto que a aplicação do lado direito da mesma resulta em

$$\begin{aligned}[T_y((\lambda, a)(\rho, b))\xi](\eta) &= [T_y(\lambda\rho, a + \phi_\lambda(b))\xi](\eta) \\ &= e^{iy\phi_\eta^{-1}[a+\phi_\lambda(b)]}\xi((\lambda\rho)^{-1}\eta).\end{aligned}$$

A unitariedade e a irredutibilidade das representações (II.24) serão provadas no que segue. Antes, obtemos algumas relações úteis a partir dos operadores T_y.

Abstraindo-se do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+)$, podemos escrever os operadores T_y como

$$T_y(\lambda, a)|_\rho = e^{iy\phi_{\hat\rho}^{-1}(a)}e^{-i\ln(\lambda)\hat\pi}, \tag{II.26}$$

onde $|_\rho$ significa o ponto de aplicação de T_y, e onde os operadores $\hat\rho$ e $\hat\pi$ são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\hat\rho\xi(\rho) &= \rho\xi(\rho) \\ \hat\pi\xi(\rho) &= -i\rho\partial_\rho\xi(\rho).\end{aligned}$$

As seguintes restrições de T_y aos subgrupos $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, definem os operadores (deixando de lado $|_\rho$)

$$T_y(\lambda, 0) \equiv L(\lambda) = e^{-i\ln(\lambda)\hat\pi}; \tag{II.27a}$$

$$T_y(1, a) \equiv \hat V_y(a) = e^{iy\phi_{\hat\rho}^{-1}(a)}, \tag{II.27b}$$

onde $L(\lambda)$ é identificada como a representação regular à esquerda do grupo $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ sobre $L^2(\mathbb{R}_+)$. Em termos de (II.27) podemos escrever uma versão operatorial da decomposição (II.17), $T_y(\lambda, a) = L(\lambda)\hat{V}_y(\phi_\lambda^{-1}(a))$. Temos também, da decomposição $(\lambda, a) = (1, a)(\lambda, 0)$, $T_y(\lambda, a) = \hat{V}_y(a)L(\lambda)$. Igualando ambas as decomposições, obtemos

$$L(\lambda)\hat{V}_y(a\lambda) = \hat{V}_y(a)L(\lambda). \tag{II.28}$$

Expandindo esta identidade segundo (II.27) e em primeira ordem do produto al, $l = \ln \lambda$, obtemos a relação de comutação

$$[\hat{\rho}, \hat{\pi}] = i\hat{\rho}, \tag{II.29}$$

a qual mostra que $\hat{\rho}$ e $\hat{\pi}$ representam a álgebra de Lie $\mathcal{G}_{sp}$ em $L^2(\mathbb{R}_+)$, de forma análoga à representação de Schrödinger da álgebra de Heisenberg [Foll]. A unitariedade de (II.24) segue facilmente da segunda decomposição acima, da unitariedade de L e de V_y,

$$\begin{aligned} T_y^\dagger(\lambda, a) &= L(\lambda^{-1})\hat{V}_y(-a) \\ &= \hat{V}_y(\phi_\lambda^{-1}(-a))L(\lambda^{-1}) \\ &= T_y((\lambda, a)^{-1}), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade vem de (II.28).

Partimos agora para a classificação das representações T_y de G_{sp}. Note primeiro que a ação de T_y sobre $L^2(\mathbb{R}_+)$ se dá, a menos de um fator de fase, por translação à esquerda, o que é justamente a ação da representação regular à esquerda de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Como o comutante da álgebra gerada por estas últimas é justamente a álgebra gerada pelas representações regulares à direita, $\mathcal{R}(G)$, conclui-se que estas representações implementam uma equivalência entre as T_y. Lembrando que uma representação regular à direita $R(\eta)$ atua sobre $\xi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ por $[R(\eta)\xi](\rho) = \xi(\rho\eta)$, o primeiro passo para determinar a equivalência entre as representações T_y é calcular

$$\begin{aligned} [R(\eta)^{-1}T_y(\lambda, a)R(\eta)\xi](\rho) &= [T_y(\lambda, a)R(\eta)\xi](\rho\eta^{-1}) \\ &= e^{iy\phi^{-1}_{\rho\eta^{-1}}(a)}\xi(\lambda^{-1}\rho). \end{aligned} \tag{II.30}$$

Associada à ação de $\mathbb{R}_+$ sobre $\mathbb{R}$ através de ϕ_η, existe também uma coação $\hat{\phi}_\eta$ do mesmo sobre o dual $\hat{\mathbb{R}} \sim \mathbb{R}$. Esta é definida por

$$[\hat{\phi}_\rho\chi_y](a) \equiv \chi_y(\phi_\rho^{-1}(a)) = e^{iy\phi_\rho^{-1}(a)}. \tag{II.31}$$

Explicitamente, considerando que $\chi_y \in \hat{\mathbb{R}} \sim \mathbb{R} \ni y$, temos que a coação é dada por

$$\hat{\phi}_{\eta^{-1}}(y) = \eta^{-1} y. \tag{II.32}$$

Sabendo disto fica fácil ver que o fator de fase sobre ξ em (II.30) é justamente a seguinte coação:

$$\begin{aligned} e^{iy\phi^{-1}_{\rho\eta^{-1}}(a)} = [\hat{\phi}_{\rho\eta^{-1}}\chi_y](a) = \chi_y(\phi^{-1}_{\rho\eta^{-1}}(a)) &= \chi_y(\phi_\eta \circ \phi_\rho^{-1}(a)) \\ &= \hat{\phi}_{\eta^{-1}}\chi_y(\phi_\rho^{-1}(a)). \end{aligned}$$

Descontando a ação de T na última linha de (II.30), desta coação concluímos que os operadores R são uma equivalência para as representações T_y do seguinte modo:

$$R(\eta)^{-1} T_y(\lambda, a) R(\eta) = T_{\hat{\phi}_{\eta^{-1}}(y)}(\lambda, a). \tag{II.33}$$

Temos, com isso, três classes de representações: uma para $y > 0$, e uma para $y < 0$, ambas isomórficas a $\mathbb{R}_+$; e uma terceira simbolizada pelo ponto $y = 0$. Daqui em diante indicaremos as classes $y > 0$ e $y < 0$ simplesmente por $\pm$ e escreveremos as respectivas representações como

$$T_\pm(\lambda, a) = e^{\pm i a \hat{p}} L(\lambda). \tag{II.34}$$

No caso $y = 0$ temos exatamente $L(\lambda)$, a representação regular à esquerda de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, $T_0(\lambda, a) = L(\lambda)$. Esta representação é redutível, isto é, é possível decompô-la em termos dos caracteres $\chi_y(\lambda) = \lambda^{iy}$, $y \in \widehat{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}$ desse grupo abeliano, e escrever

$$L = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} dy\, \chi_y.$$

Isto significa que na classe $y = 0$ há uma infinidade não enumerável ($\mathbb{R}$) de representações irredutíveis unidimensionais,

$$T_y(\lambda, a) = \lambda^{iy}. \tag{II.35}$$

Do exposto neste parágrafo podemos concluir o seguinte: supondo a irredutibilidade das representações T_y, o que será mostrado logo em seguida, o dual unitário de G_{sp} é dado por

$$\widehat{G_{sp}} = \{+\} \cup \{-\} \cup \mathbb{R}. \tag{II.36}$$

Se compararmos este resultado com as órbitas coadjuntas de G_{sp} em $\mathcal{G}^*_{sp}$ obtidas no Apêndice A, observamos que vale a formula $\widehat{G_{sp}} = \mathcal{G}^*_{sp}/G_{sp}$.

Com respeito ao problema da irredutibilidade das representações induzidas T_y, nos referimos a um importante resultado devido a Mackey. O teorema da imprimitividade para representações de produtos semi-diretos [BaRa, Tay] estabelece que as representações induzidas destes são irredutíveis se e somente se o grupo representado satisfizer a condição de *regularidade*. No caso do semi-plano, esta condição diz essencialmente que as co-órbitas de $\mathbb{R}_+$ em $\hat{\mathbb{R}}$ pela ação $\hat{\phi}$ devem ser enumeravelmente separáveis com respeito à estrutura Borel deste dual. Em primeiro lugar notamos que, como $\mathbb{R}_+$, além de ser de tipo I, é abeliano, isto é, seu dual é difeomorfo ao grupo $\mathbb{R}$, a estrutura Borel é a compatível com a topologia usual da reta. Disto a regularidade de G_{sp} segue trivialmente, pois esse dual é decomposto em co-órbitas segundo $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

A análise acima nos dá também outra importante informação sobre o grupo G_{sp}. De outro teorema devido a Mackey [BaRa, p. 536], um grupo produto semi-direto, como $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$, é um grupo de tipo I se e somente se para cada $y \in \hat{\mathbb{R}}$, seu subgrupo de isotropia I_y for um grupo de tipo I. Bem, as co-órbitas que passam por y são dadas por $\mathcal{O}_y = \mathbb{R}_+/I_y$, as quais sabemos ser isomórficas ou ao grupo $\mathbb{R}_+$ ou ao grupo trivial $\{e\}$. Consequentemente, os grupos de isotropia nos dois casos são necessariamente isomorfos a $\{e\}$ ou a $\mathbb{R}_+$, que são naturalmente de tipo I.

II.3 Decomposição em Irredutíveis

No que concerne à dualidade de G_{sp}, esta é obtida em termos das álgebras de Kac $\mathbb{K}^s(G_{sp})$ e $\mathbb{K}^a(G_{sp})$ de acordo com o exposto no primeiro capítulo. Embora essa dualidade envolva uma correspondência função-operador sobre o semi-plano, ela não é irredutível, isto é, as representações regulares, em termos das quais estes operadores são expressos, são *redutíveis*. Afim de extender o formalismo de Weyl-Wigner para o semi-plano e interpretá-lo em termos de dualidade de grupos, devemos considerar álgebras de operadores irredutíveis. Faremos isso nesta seção para o caso geral do grupo $G = S \oslash N^*$. Seguindo a decomposição da representação regular à esquerda de G em irredutíveis, decomporemos a álgebra de Kac simétrica $\mathbb{K}^s(G)$ em uma família de álgebras geradas pelos respectivos operadores irredutíveis. Para tanto, suporemos que as representações irredutíveis T_y de G já tenham sido classificadas por equivalência, sendo que as classes no dual $\hat{G}$ serão denotadas pelo rótulo α. Decomposições deste tipo também são descritas como *campos de álgebras* sobre o dual unitário $\hat{G}$. A decomposição apresentada aqui, a qual será fundamental para estabelecermos uma conexão entre dualidade e quantização, não se encontra na literatura de forma explícita e suficientemente geral. Tém-se, porém, no caso de G ser *unimodular* e *de tipo I*, uma decomposição análoga para as álgebras de von Neumann geradas pelas representações regulares de G. Este caso particular de decomposição em irredutíveis é apresentada na ref. [Dix2, cap. 18], enquanto que em [Dix1] encontra-se a teoria geral para campos de álgebras de von Neumann, espaços de Hilbert, traços, etc.

Começamos pela decomposição de $\mathcal{M}(G)$. Como G é suposto ser de tipo I, sabemos ser possível a decomposição de suas representações regulares de maneira única em uma soma direta de representações irredutíveis. Supomos, então, a existência de uma medida positiva μ no dual $\hat{G}$ tal que

$$L = \sum_{\alpha\in\hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha)\, T_\alpha, \tag{II.37}$$

onde estamos supondo também (por simplicidade) que o suporte de μ é um conjunto discreto. A medida μ deve ser determinada para cada caso particular. No caso de $G = G_{sp}$ mostraremos que esta é a medida que, associada à medida de Haar à esquerda neste grupo, possibilita estabelecer uma versão da identidade de Plancherel. Supondo válida a decomposição (II.37), podemos escrever a decomposição da álgebra de von Neumann subjacente a $\mathbb{K}^s(G)$ como

$$\mathcal{M}(G) = \sum_{\alpha\in\hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha)\, \mathcal{M}_\alpha(G), \tag{II.38}$$

onde $\mathcal{M}_\alpha(G)$ é a algebra de von Neumann gerada pelos $T_\alpha(x)$. Como os operadores $L(x)$ também fornecem representações de $L^1(G)$, sua decomposição segundo (II.37) deve fornecer uma decomposição análoga da respectiva representação de $L^1(G)$, isto é,

$$L(f) = \sum_{\alpha\in\hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha)\ T_\alpha(f), \tag{II.39}$$

onde cada parcela na soma direta é dada por

$$T_\alpha(f) \equiv \hat{f}_\alpha = \int_G dx\ f(x) T_\alpha(x). \tag{II.40}$$

Podemos, a partir disto, reescrever a fórmula (I.45) como

$$L(f) = \sum_{\alpha \in \hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha) \int_G dx\ f(x) T_\alpha(x). \tag{II.41}$$

A eq. (II.40) é definida [Dix2, Foll] como sendo a transformada de Fourier generalizada de $f \in L^1(G)$. Sua imagem é o campo de operadores $\alpha \mapsto \hat{f}_\alpha$ sobre $\hat{G}$. Note que se G for abeliano, temos $T_\alpha = \chi_\alpha$, e $\hat{f}_\alpha = \tilde{f}(\alpha)$ é realmente a transformada de Fourier sobre G. Para cada $\alpha \in \hat{G}$ fixo, os operadores de (II.40) são elementos da álgebra $\mathcal{M}_\alpha(G)$. Segundo o método de Mackey, para cada α, as representações irredutíveis T_α atuam sobre os espaços de Hilbert $H_\alpha(G)$ definidos na seção II.2. Temos, portanto, que sua soma direta deve ser isomorfa ao espaço de Hilbert onde atuam as representações regulares, ou seja,

$$L^2(G) = \sum_{\alpha \in \hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha)\, H_\alpha(G). \tag{II.42}$$

Neste contexto, os elementos de $L^2(G)$ são decompostos segundo

$$f = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \mu(\alpha)\, f_\alpha, \tag{II.43}$$

onde cada componente é escrita, segundo (II.19), $f_\alpha = V_\alpha^{-1}(\phi_s^{-1}(n))\xi(s), f_\alpha(s,0) \equiv \xi(s) \in L^2(S)$. Conhecendo-se os espaços $H_\alpha(G)$, ao restringirmos o domínio de cada $\hat{f}_\alpha$ para $L^\infty(G) \cap H_\alpha(G)$, o operador

$$\hat{f} = \sum_{\alpha \in \hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha)\, \hat{f}_\alpha \tag{II.44}$$

resulta ser a decomposição da representação Fourier λ.

Em relação ao peso de Haar φ_s, já foi mostrado em (I.60) que ele é um traço se e somente se G for unimodular. Neste caso Dixmier apresenta em [Dix2] a decomposição do traço segundo a medida μ e estabelece uma generalização da identidade de Plancherel. No caso geral que estamos tratando, podemos também supor que o peso φ_s decompõe-se em uma soma direta de pesos segundo

$$\varphi_s = \sum_{\alpha \in \hat{G}}^{\oplus} \mu(\alpha)\, \varphi_\alpha. \tag{II.45}$$

Será mostrado logo abaixo que os pesos φ_α, por essa decomposição, também são normais, fiéis e semifinitos (reveja a seção I.2), pelo menos para quase todo α. No que segue, o termo *para quase todo (p.q.t.)* α compreende o (fecho do) subconjunto de representações cujo complemento em $\hat{G}$ é de medida μ nula, isto é, o suporte da medida μ. Este é geralmente identificado com o conjunto das representações de mais alta dimensionalidade. Por exemplo: no grupo canônico do semi-plano, cujo dual é $\{-\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\}$, "quase todas" significa "as representações de dimensão infinita $T_\pm$".

Pela definição do peso de Haar φ_s, eq. (I.59d), temos, para $f \in C(G)$, $\varphi_s(\hat{f}^\dagger \cdot \hat{f}) = \int_G dx\,|f(x)|^2$, enquanto que pela decomposição (II.45) temos também $\varphi_s(\hat{f}^\dagger \cdot \hat{f}) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \mu(\alpha)\,\varphi_\alpha[\hat{f}_\alpha^\dagger \cdot \hat{f}_\alpha]$. Juntando estas duas expressões, obtemos a fórmula de Plancherel para G,

$$\int_G dx\,|f(x)|^2 = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \mu(\alpha)\,\varphi_\alpha[\hat{f}_\alpha^\dagger \cdot \hat{f}_\alpha], \tag{II.46}$$

onde $\hat{f}_\alpha^\dagger \cdot \hat{f}_\alpha = \int_G dx\,(f^* * f)(x) T_\alpha(x)$. A existência desta fórmula, associando μ à medida de Haar dx, justifica nos referirmos a μ como a *medida de Plancherel associada a* dx. Além disto, como $f \in L^2(G)$, segue de (II.46) que, para quase todo α, $\varphi_\alpha[\hat{f}_\alpha^\dagger \cdot \hat{f}_\alpha] < \infty$, o que nos mostra que $\hat{f}_\alpha \in \mathcal{N}_{\varphi_\alpha}$ p.q.t. α. Isto implica que $\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ é ultra-fracamente denso em $\mathcal{M}_\alpha(G)$ para quase todo α, ou seja, que φ_α é semifinito p.q.t. α. Também temos que, se $\varphi_\alpha(\hat{f}_\alpha) = 0$ p.q.t. α, então, pela decomposição (II.45), $\varphi_s(\hat{f}) = 0$. Como φ_s é fiel, temos que $\hat{f} = 0$, o que, através de (II.44), implica que $\hat{f}_\alpha = 0$ p.q.t. α. Com isto acabamos de mostrar que φ_α é fiel p.q.t. α. Também resulta de (II.44) e de (II.45) que, p.q.t. α, φ_α é normal.

Pela decomposição acima de φ_s é possível obter uma expressão para a inversa da transformada de Fourier generalizada (II.40). Esta segue da respectiva decomposição da fórmula (I.63),

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \mu(\alpha)\,\varphi_\alpha[T_\alpha^\dagger(x)\hat{f}_\alpha]. \tag{II.47}$$

Cada parcela na soma acima é a função

$$f_\alpha(x) \equiv \varphi_\alpha[T_\alpha^\dagger(x)\hat{f}_\alpha], \tag{II.48}$$

isto é, podemos escrever $f(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} \mu(\alpha)\,f_\alpha(x)$. Lembrando que $f \in L^1(G)$, segue da positividade de μ que $\int_G dx\,|f_\alpha(x)| < \infty$ para quase todo α, ou seja, que $f_\alpha \in L^1(G)$ para quase todo α.

Em relação à transformada de Fourier generalizada e sua inversa, é oportuno salientar aqui que, embora elas sejam multiplicativas e involutivas, elas só serão fiéis como mapeamentos entre G e $\hat{G}$ se e somente se G (e seu dual) for tal que o suporte da medida de Plancherel for o próprio dual $\hat{G}$, isto é, se o termo "quase todas" for sinônimo de "todas". Isto se deve ao fato de μ estar concentrada nas representações de mais alta dimensionalidade. Se o dual contiver representações em espaços de dimensões diferentes, como o dual de G_{sp}, de $E(2)$, ou do grupo de Heisenberg [Foll, Tay, Gur], por exemplo, somente as representações de dimensionalidade mais alta aparecerão na fórmula (II.47).

Para o que segue, será útil extender o domínio de φ_s para os geradores $L(x)$, os quais podem ser considerados como as representações regulares à esquerda das medidas de Dirac $\delta_x \in M^1(G)$: $L(x) = \int_G dy\, \delta_x(y) L(y)$. Neste sentido escrevemos

$$\delta_e(x) = \varphi_s(L(x)) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \mu(\alpha)\, \varphi_\alpha(T_\alpha(x)), \tag{II.49}$$

o que é compatível com a definição de φ_s. Uma vez dada a forma explícita dos pesos φ_α, esta fórmula pode ser considerada como uma expressão explicita para a distribuição de Dirac sobre G.

Obtemos até aqui decomposições de $\mathcal{M}(G)$, do peso de Haar φ_s e do espaço de Hilbert $L^2(G)$. A pergunta natural que nos vem à mente é se as componentes irredutíveis da álgebra de Kac $\mathcal{M}(G)$ são também álgebras de Kac. A resposta é negativa pois, como veremos abaixo, as componentes irredutíveis φ_α do peso de Haar não são de Haar nas álgebras $\mathcal{M}(G)_\alpha$. No entanto, para cada α, estas últimas são álgebras de Hopf-von Neumann, cuja estrutura vem diretamente da decomposição da estrutura de $\mathbb{H}^s(G)$, que é dada por

$$T_\alpha(x) T_\alpha(y) = T_\alpha(xy) \tag{II.50a}$$

$$I = T_\alpha(e) \tag{II.50b}$$

$$\triangle_\alpha(T_\alpha(x)) = T_\alpha(x) \otimes T_\alpha(x) \tag{II.50c}$$

$$\kappa_\alpha(T_\alpha(x)) = T_\alpha^\dagger(x). \tag{II.50d}$$

Denotaremos estas álgebras de Hopf-von Neumann por $\mathbb{H}_\alpha(G)$. Com esta estrutura sobre cada $\mathcal{M}_\alpha(G)$, se tentarmos verificar para φ_α os axiomas que definem peso de Haar, os dois lados do axioma (I.26), por exemplo, resultam em

$$\begin{aligned} (id \otimes \varphi_\alpha)[(I \otimes T_\alpha^\dagger(y)) \triangle_\alpha(T_\alpha(x))] &= \varphi_\alpha(T_\alpha(y^{-1}x))\, T_\alpha(x), \\ \kappa_\alpha(id \otimes \varphi_\alpha)[\triangle_\alpha(T_\alpha^\dagger(y))(I \otimes T_\alpha(x))] &= \varphi_\alpha(T_\alpha(y^{-1}x))\, T_\alpha(y), \end{aligned}$$

os quais constituem aquele axioma se e somente se estas duas equações implicarem que $x = y$. Verifica-se também facilmente que o primeiro axioma, (I.25), só é satisfeito sob as mesmas condições. Como não há nenhuma garantia de que $\varphi_\alpha(T_\alpha(y^{-1}x))$ implique em $x = y$, aliás, temos de (II.49) que somente a sua soma direta sobre $\hat{G}$ leva à distribuição $\delta_x(y)$. Concluímos que φ_α não é Haar por não satisfazer os axiomas. Inversamente, a partir dos três axiomas para peso de Haar, prova-se que um peso φ' é um peso de Haar em $\mathbb{H}_\alpha(G)$ se e somente se $\varphi'(T_\alpha(x)) = \delta_e(x)$.

Seguindo na descrição da decomposição, nos deteremos em $\mathbb{H}_\alpha(G)$ e em sua dualidade. Seus elementos são escritos

$$\tau_\alpha(f) \equiv \hat{f}_\alpha = \int_G dx\, f(x)\, T_\alpha(x), \qquad f \in L^1(G). \tag{II.51}$$

Isto significa que eles são a imagem de representações inequivalentes de $L^1(G)$ correspondentes às respectivas representações T_α de G e, por outro lado, podem também ser vistos como componentes α da representação Fourier λ. Deste ponto de vista é natural tentar determinar seus geradores. Para tanto consideramos funções $\psi \in L^2(G, H_\alpha) \sim L^2(G, L^2(S))$ e, colocando $\psi_x(s) = G(s,x)$, $x \in G$, definimos um isomorfismo entre o espaço das funções L^2 sobre G a valores em $L^2(S)$ e o espaço $L^2(S) \otimes L^2(G)$. Para $x \in G$ fixo, as representações induzidas sobre $\psi_x \in L^2(S)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
[T_\alpha(x)\psi_x](s) &= V_\alpha(\sigma(x^{-1}\cdot s; x))\psi_x(x^{-1}\cdot s) \\
&= V_\alpha^{-1}(\sigma(s; x^{-1}))G(x^{-1}\cdot s, x) \equiv [\hat{W}^\alpha G](s,x),
\end{aligned} \tag{II.52}$$

onde usou-se $-\sigma(s; x^{-1}) = \sigma(x^{-1}\cdot s; x)$, propriedade obtida através de (II.22). Isto mostra que as τ_α, como funções limitadas $\tau_\alpha : G \to \mathcal{B}(L^2(S))$, podem ser vistas também como sendo os operadores $\hat{W}^\alpha \in \mathcal{B}(L^2(S)) \otimes L^\infty(G)$, seus geradores. Note que, para cada α, $\hat{W}^\alpha$ é unitário, sendo que seu adjunto é dador por

$$[\hat{W}^{\alpha *}G](s,x) = V_\alpha^{-1}(\sigma(s;x))\, G(x\cdot s; x).$$

$\hat{W}^\alpha$ não é só análogo ao operador fundamental $\hat{W}$ no que diz respeito à geração de representações, mas também na implementação do coproduto (II.50c). Lembrando das definições da representação induzida T_α sobre os espaços $H_\alpha(G_{sp})$ e $L^2(\mathbb{R}_+)$, mostra-se a referida implementação através da igualdade das duas operações abaixo:

$$[\hat{W}^\alpha(I \otimes T_\alpha(z))\hat{W}^{\alpha *}G_\alpha](s,x) =$$

$$V_\alpha^{-1}(-\sigma(x^{-1}\cdot s;x))V_\alpha^{-1}(\sigma(x^{-1}\cdot s;z^{-1}x))\,G(z^{-1}\cdot s,z^{-1}x)$$

$$\triangle_\alpha T_\alpha(z)G_\alpha(s,x)=V_\alpha^{-1}(\sigma(s;x^{-1}))G(z^{-1}\cdot s,z^{-1}x)$$

De fato estas linhas são iguais, pois de (II.22) obtém-se $\sigma(x^{-1}\cdot s;z^{-1}x))=\sigma(s;z^{-1})+\sigma(x^{-1}\cdot s;x)$. Temos, portanto,

$$\triangle_\alpha T_\alpha(z)=\hat{W}^\alpha(I\otimes T_\alpha(z))\hat{W}^{\alpha*}. \tag{II.53}$$

Em consequência, este operador também satisfaz a relação pentagonal, ou seja, W^α é o operador fundamental de $\mathbb{H}_\alpha(G)$. Realmente, pelas propriedades do cociclo σ citadas acima, verifica-se a igualdade das duas operações abaixo:

$$\begin{aligned}&\hat{W}^\alpha_{23}\hat{W}^\alpha_{13}\hat{W}^\alpha_{12}\,G_\alpha(s,y,z)=\\&=V_\alpha^{-1}(\sigma(s;z^{-1}))V_\alpha^{-1}(-\sigma(z^{-1}\cdot s;z))V_\alpha^{-1}(\sigma(z^{-1}\cdot s;y^{-1}z))\,G_\alpha(y^{-1}\cdot s,z^{-1}y,z)\\&\hat{W}^\alpha_{12}\hat{W}^\alpha_{23}\,G_\alpha(s,y,z)=V_\alpha^{-1}(\sigma(s;y^{-1}))V_\alpha^{-1}(\sigma(s;z^{-1}))\,G_\alpha(y^{-1}\cdot s,z^{-1}y,z).\end{aligned}$$

Pelo fato de estarmos trabalhando com um grupo não tão geral, i.e., $G=S\oslash N^*$, será possível explicitar uma fórmula para os pesos φ_α. Voltando aos elementos (II.51), obtemos de (II.21) que os operadores $\hat{f}_\alpha$ atuam em $L^2(S)$ por

$$[\hat{f}_\alpha\xi](r)=\int_G d^l\mu(s,n)\,V_\alpha(\sigma(s^{-1}r;s,n))f(s,n)\xi(s^{-1}r). \tag{II.54}$$

Como a medida invariante à direita sobre G é o produto das medidas de Haar sobre S e N^*, temos $d^l\mu(s,n)=\triangle(s,n)\,d\mu(s)\,d\mu(n)$. Após a troca de variável $s^{-1}r=t$ e pelo teorema de Fubini, (II.54) fica

$$[\hat{f}_\alpha\xi](r)=\int_S d\mu(t)\,K_f^\alpha(r,t)\xi(t), \tag{II.55}$$

onde o núcleo $K_f^\alpha(r,t)$ de $\hat{f}_\alpha$ é dado por

$$K_f^\alpha(r,t)=\int_N d\mu(n)\,\triangle(rt^{-1},n)\,V_\alpha(\sigma(t;rt^{-1},n))f(rt^{-1},n).$$

Antes de explicitarmos φ_α, o seguinte resultado será necessário: *a função modular de um grupo produto semi-direto $G=S\oslash N^*$ é função somente do subgrupo S.* Isto é provado usando-se $d^r\mu(x^{-1}y)=(\triangle_G x)\,d^r\mu(y)$ e a invariância das medidas sobre S e N^*:

$$d^r\mu((s,n)^{-1}(r,l)) \;=\; d^r\mu(s^{-1}r,\phi_s^{-1}(l-n))$$

$$
\begin{aligned}
&= d\mu(s^{-1}r) \wedge d\mu(\phi_s^{-1}(l-n)) \\
&= \left|\frac{\partial\phi_s^{-1}(l)}{\partial l}\right| d\mu(r) \wedge d\mu(l) \\
&= \triangle_G(s,n)\, d^r\mu(r,l),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\triangle_G(s,n) = \left|\frac{\partial\phi_s^{-1}(l)}{\partial l}\right| \equiv \triangle(s). \tag{II.56}$$

Em particular, $\triangle_G(e,n) = \triangle(e) = 1$. Esse fato é corroborado por G_{sp}, onde temos (veja (II.10)) $\triangle_{G_{sp}}(\lambda,a) = \triangle(\lambda) = \lambda$.

Voltando ao caso geral, introduzimos um traço sobre $\mathbb{H}_\alpha(G)$ por

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_\alpha(\hat{f}_\alpha) &= \int_S d\mu(t)\, K_f^\alpha(t,t) &\text{(II.57a)}\\
&= \int_G d\mu(t)\, d\mu(n)\, V_\alpha(\sigma(t;e,n)) f(e,n). &\text{(II.57b)}
\end{aligned}
$$

A eq. (II.57a) de fato define um traço, pois os núcleos satisfazem

$$\int_S d\mu(t)\, K_f^\alpha(r,t) K_g^\alpha(t,s) = K_{f*g}^\alpha(r,s),$$

o que significa que $\mathrm{Tr}_\alpha(\hat{f}_\alpha^* \hat{f}_\alpha) = \mathrm{Tr}_\alpha(\hat{f}_\alpha \hat{f}_\alpha^*)$. Podemos agora expressar cada componente φ_α do peso de Haar através deste traço da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha(\hat{f}_\alpha) &\equiv \mathrm{Tr}_\alpha(\triangle \hat{f}_\alpha) = \int_S d\mu(t)\, \triangle(t) K_f^\alpha(t,t) \\
&= \int_G d\mu(t)\, d\mu(n)\, \triangle(t)\, V_\alpha(\sigma(t;e,n)) f(e,n) \\
&= \int_G d^l\mu(t,n)\, V_\alpha(\sigma(t;e,n)) f(e,n), &\text{(II.58)}
\end{aligned}
$$

onde $\triangle$ é dada em (II.56). Pela definição de φ_α fica claro que não se trata de um outro traço. Por exemplo, sobre o semi-plano temos

$$\varphi_\pm(\hat{f}_\pm) = \frac{1}{2\pi} \int_{G_{sp}} d\lambda da\, e^{\pm ia\lambda} f(1,a),$$

a qual é uma decomposição do peso de Haar φ_s, pois

$$\varphi_s(\hat{f}) = \sum_\pm \varphi_\pm(\hat{f}_\pm) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} d\lambda da\, \cos(a\lambda) f(1,a) = f(1,0). \tag{II.59}$$

Além disto, calculando $\varphi_\alpha(T_\alpha(r,l))$, o que deveria resultar em $\delta_e(r,l)$ se φ_α fosse um peso de Haar, a fórmula acima nos permite mostrar explicitamente porque isto não ocorre:

$$\varphi_\alpha(T_\alpha(r,l)) = \delta_e(r) \int_S d\mu(t) \triangle(t)\, V_\alpha(\sigma(t;e,l)).$$

Para G_{sp} esta fórmula fornece

$$\varphi_\pm(T_\pm(\lambda,a)) = \frac{\delta_1(\lambda)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+} d\rho\, e^{\pm ia\rho} = \frac{\delta_1(\lambda)}{2\pi}\left(\pi\delta(a) \pm \frac{i}{a}\right),$$

enquanto que $\sum_\pm \varphi_\pm(T_\pm(\lambda,a)) = \delta_1(\lambda)\delta(a)$. Para finalizar, pela definição (II.58), as funções (II.48) resultam em

$$f_\alpha(r,l) = \int_G d^l\mu(t,n)\, V_\alpha(\sigma(t;e,n))f((r,l)(e,n)), \qquad f \in L^1(G).$$

Voltamos nossa atenção agora para o predual de $\mathcal{M}_\alpha(G)$. Em analogia à álgebra de Fourier, denotaremos este predual por $A_\alpha(G)$. Como naquele caso, introduzimos as funções representativas desta nova álgebra por

$$\hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}(x) \equiv \langle \hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}, T^\dagger_\alpha(x)\rangle,$$

as quais, pela definição da forma linear $\hat{\omega}^\alpha_{\chi,\xi}$, são dadas pelo produto escalar

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}(s,n) &= (T^\dagger_\alpha(s,n)\chi|\xi)_{L^2(S)} = (\chi|T_\alpha(s,n)\xi)_{L^2(S)} \\ &= \int_S d\mu(t)\, V^{-1}_\alpha(\sigma(s^{-1}t;s,n))\chi(t)\check{\xi}(t^{-1}s), \end{aligned} \qquad \text{(II.60)}$$

onde lembramos que $\check{\xi}(s) = \overline{\xi(s^{-1})}$. Como o coproduto (II.50c) é simétrico e do mesmo tipo do coproduto em $K^s(G)$, o produto em $A_\alpha(G)$, que é obtido do coproduto em $\mathbb{H}_\alpha(G)$ pela dualidade mostrada em (I.12), é o mesmo produto abeliano de multiplicação ponto-a-ponto de $A(G)$. A involução em $A_\alpha(G)$ também é diretamente obtida por dualidade (veja (I.13)), e não é nada mais do que a conjugação complexa. Tudo isso mostra como $A_\alpha(G)$ é similar a $A(G)$, diferindo desta somente no fato de seus elementos serem expressos segundo (II.60) e dependerem dos rótulos $\alpha \in \hat{G}$. Como $A(G)$ está contida em $L^\infty(G)$, isto sugere que $A_\alpha(G)$ esteja contida numa álgebra de mesmo tipo. Para verificar isto, tomamos o módulo de $\hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}(s,n)$ e, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}(s,n)| &= |(\chi|T_\alpha(s,n)\xi)| \\ &\le \|\chi\|_2\|T_\alpha(s,n)\xi\|_2 \\ &= \|\chi\|_2\|\xi\|_2 < \infty, \end{aligned}$$

já que T_α é unitário e $\chi,\xi \in L^2(S)$. Assim, temos que $|\hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}(s,n)|$ é essencialmente limitada e podemos dizer que as álgebras $A_\alpha(G)$ estão contidas em $L^\infty(G)$ para todo $\alpha \in \hat{G}$.

Usando a forma explícita do gerador $\hat{W}^\alpha$ podemos determinar a componente $\hat{\tau}_\alpha$ da representação Fourier $\hat{\lambda}$ através da fórmula (I.24),

$$(\hat{W}^\alpha(\xi,f)|\chi\otimes g)_{L^2(S)\otimes L^2(G)} = (f|\hat{\tau}_\alpha(\hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi})g)_{L^2(G)}, \tag{II.61}$$

onde $\xi,\chi \in L^2(S)$ e $f,g \in L^2(G)$. O lado esquerdo desta fórmula fornece

$$\begin{aligned}(\hat{W}^\alpha(\xi,f)|\chi\otimes g) &= \\ &= \int_G d\mu^l(s,n)\, f(s,n) \int_S d\mu(t)\, V_\alpha(\sigma(s^{-1}t;s,n))\overline{\chi(t)}\xi(s^{-1}t)\,\overline{g(s,n)} \\ &= \int_G d\mu^l(s,n)\, f(s,n)\, \overline{\hat{\omega}^\alpha_{\chi\xi}(s,n)g(s,n)}.\end{aligned} \tag{II.62}$$

Comparando este resultado com o lado direito de (II.61), concluímos que $\hat{\tau}_\alpha = id$. Como $\hat{\lambda}$ representa $A(G)$, é natural pensarmos que $\hat{\tau}_\alpha$ represente $A_\alpha(G)$. Lembrando que a álgebra dual de $K^s(G)$ é construída sobre a álgebra de von Neumann que contém a imagem de $\hat{\lambda}$, de $\hat{\tau}_\alpha(A_\alpha(G)) = A_\alpha(G) \subset L^\infty(G)$ concluímos que a dual de $\mathbb{H}_\alpha(G)$ é construída sobre $L^\infty(G)$, isto é, a álgebra de Hopf-von Neumann dual deve ser exatamente $\mathbb{H}^a(G)$, a álgebra de Hopf-von Neumann abeliana de G. Além disto, obtemos de (II.62) e de (I.32) que $A_\alpha(G)$ também atua sobre $L^2(G)$ por produto ponto-a-ponto. Por outro lado, a versão dual da fórmula (II.61),

$$(W^\alpha(f,\xi)|g\otimes\chi)_{L^2(G)\otimes L^2(S)} = (\xi|\tau_\alpha(\omega_{gf})\chi)_{L^2(S)}, \tag{II.63}$$

envolve a representação (II.51) e o dual do operador $\hat{W}^\alpha$, o qual é obtido pela relação $W^\alpha = \sigma \circ \hat{W}^{\alpha *} \circ \sigma$, e resulta em

$$[W^\alpha(f,\xi)](s,n;r) = V_\alpha^{-1}(\sigma(r;s,n))\, f(s,n)\xi(sr), \;\; f \in L^2(G), \;\; \xi \in L^2(S).$$

O lado esquerdo de (II.63) fornece, então,

$$\begin{aligned}(W^\alpha(f,\xi)|g\otimes\chi) &= \\ &= \int_S d\mu(t)\,\xi(t) \int_G d\mu^l(s,n)\, V_\alpha^{-1}(\sigma(s^{-1}t;s,n))\overline{g(s,n)}f(s,n)\,\overline{\chi(s^{-1}t)} \\ &= \int_S d\mu(t)\,\xi(t)\overline{\int_G d\mu^l(s,n)\,\omega_{gf}(s,n)[T_\alpha(s,n)\chi](t)},\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade já envolve uma troca de variáveis em S e onde identificamos $\omega_{gf} = g\overline{f}$ através de (I.23). Comparando esse resultado com o lado direito de (II.63), vemos que a fórmula (II.51) para a representação τ_α é confirmada. Se, por

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{H}_\alpha(G) \arrow[dr, "*"] & \\
L^1(G) \arrow[ur, "\tau_\alpha"] & & A_\alpha(G) \arrow[dl, "\hat{\tau}_\alpha = id"] \\
& \mathbb{H}^a(G) \arrow[ul, "*"] &
\end{tikzcd}$$

Figura II.1: A decomposição da dualidade Kac em irredutíveis resulta numa família de dualidades Hopf-von Neumann ($*$ denota predualidade).

pareamento de dualidade também introduzirmos em $A_\alpha(G)$ a componente α do co-produto de $\mathbb{K}^s(G)$, este será implementado por W^α, de forma análoga ao caso dual. Consequentemente, este operador também satisfaz a relação pentagonal. A demonstração desses dois últimos fatos é análoga ao caso dual apresentada à página 49. Com isto conclui-se a dualidade Hopf-von Neumann entre as álgebras $\mathbb{H}_\alpha(G)$ e $\mathbb{H}^a(G)$, as quais são conectadas pelas componentes $\hat{\tau}_\alpha$ e τ_α das respectivas representações Fourier $\hat{\lambda}$ e λ, conforme mostra a figura II.1.

II.4 Quantização de Weyl no Semi-Plano

Tendo realizada a decomposição da dualidade de grupo (dualidade Kac) em dualidades entre a família de álgebras $\mathbb{H}_\alpha(G)$ e a álgebra $\mathbb{H}^a(G)$, temos à disposição uma estrutura algébrica poderosa para descrever a quantização nos moldes do formalismo de Weyl-Wigner. Este é o objetivo desta seção onde, a partir dos resultados obtidos na seção anterior, descreveremos em detalhe a generalização da correspondência de Weyl-Wigner para o semi-plano como parte da dualidade de G_{sp}. Especificamente, procuraremos mostrar que $\mathbb{H}_\alpha(G_{sp})$, para um particular valor de α, juntamente com sua dual $\mathbb{H}^a(G_{sp})$, permite descrever a quantização no semi-plano e, com isto, que quantização e dualidade estão intimamente relacionadas.

Antes de prosseguirmos, cabe revisar o que foi feito até aqui. Iniciamos este capítulo associando ao espaço de fase $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ o grupo G_{sp}, como sendo a estrutura algébrica mais simples que atua sobre este espaço e que preserva sua estrutura simplética. Esta é a filosofia do formalismo desenvolvido por Isham para a quantização, o qual, neste sentido, não difere muito de outras propostas [Kir2, BFFLS, Lan]. Tendo identificado G_{sp}, partiu-se para a descrição de sua dualidade em termos das álgebras de Kac $\mathbb{K}^s(G_{sp})$ e $\mathbb{K}^a(G_{sp})$, onde as representações Fourier desempenham um papel fundamental. Afim de obtermos estruturas geradas por operadores irredutíveis, ingredientes básicos em qualquer descrição quântica, decompomos a dualidade Kac associada a G_{sp} em termos de álgebras geradas por representações irredutíveis segundo o dual unitário $\widehat{G_{sp}}$. Obtivemos, então, dualidades entre a família de álgebras de Hopf-von Neumann $\mathbb{H}_\alpha(G_{sp})$ e $\mathbb{H}^a(G_{sp})$. Embora a dualidade para o grupo G_{sp} se perca a nível irredutível, ainda persiste a dualidade Hopf-von Neumann. Nesta, as representações $\hat{\tau}_\alpha$ e τ_α fazem o papel das representações Fourier na dualidade Kac e, portanto, são fundamentais para a conexão entre as álgebras de operadores $\mathbb{H}_\alpha(G_{sp})$ e a de funções $\mathbb{H}^a(G_{sp})$.

Estas últimas serão as álgebras em termos das quais a Mecânica Quântica no semi-plano será descrita, mas para um valor fixo de α. Notemos, em primeiro lugar, que as representações $\alpha \in \{+\} \cup \{-\} \cup \mathbb{R}$ que não estão no suporte da medida de Plancherel são os caracteres $\chi_y(\lambda)$, $y \in \mathbb{R}$, os quais geram as álgebras abelianas $\mathbb{H}_y(\mathbb{R})$, isomorfas a $L^\infty(\mathbb{R})$ para todo y (reveja a seção I.5.3). Estas representações geram, portanto, álgebras de operadores escalares. Por outro lado, como se trata de representações fora do suporte da medida de Plancherel, seria impossível, pela fórmula (II.47), reobter os observáveis a partir dos operadores quânticos correspondentes. Com estes argumentos descartamos as representações α que estejam fora do suporte da medida de Plancherel. A escolha do valor "físico" de α, dentre todas as representações de dimensão infinita $T_\pm$ será baseada na análise dimensional dos parâmetros de G_{sp} que ocorrem, por exemplo, na fórmula (II.51):

$$\hat{f}_\pm = \int_{G_{sp}} d\lambda da\, f(\lambda, a)\, e^{\pm ia\hat{p}} e^{-i\ln(\lambda)\hat{\pi}}. \tag{II.64}$$

Lembrando que os rótulos $\pm$ correspondem a uma infinidade não enumerável de representações equivalentes e, levando em conta as dimensões físicas dos elementos de G_{sp} ($[\lambda]$ = comprimento, $[a]$ = momentum, $[\hbar] = [a\lambda] = [\hat{\pi}]$ = ação), tomamos $\pm\hbar^{-1}$, ao invés de simplemente $\pm$, como sendo os rótulos representativos de cada classe e fixamos seu valor em $\alpha = +\hbar^{-1}$.

Tendo fixado o valor de α, a álgebra de Hopf-von Neumann $\mathbb{H}_\hbar$ sobre $\mathcal{M}(G_{sp})_\hbar$, gerada pelos operadores $T_\hbar(\lambda, a)$, tem sua estrutura dada por[6]

$$T_\hbar(\lambda,a)T_\hbar(\rho,b) = T_\hbar((\lambda,a)(\rho,b)); \tag{II.65a}$$

$$\triangle_\hbar T_\hbar(\lambda,a) = T_\hbar(\lambda,a)\otimes T_\hbar(\lambda,a); \tag{II.65b}$$

$$\kappa_\hbar(T_\hbar(\lambda,a)) = T_\hbar^\dagger(\lambda,a), \tag{II.65c}$$

enquanto que o peso $\varphi_\hbar$ é dado por

$$\varphi_\hbar(\hat{f}_\hbar) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{G_{sp}} d\rho db\, e^{\frac{i}{\hbar}b\rho} f(1,b). \tag{II.66}$$

Os elementos dessa álgebra são escritos

$$\hat{f}_\hbar = \int_{G_{sp}} d\lambda da\, f(\lambda,a)\, e^{\frac{i}{\hbar}a\hat{\rho}} e^{-\frac{i}{\hbar}\ln(\lambda/\lambda_o)\hat{\pi}}, \tag{II.67}$$

onde λ_o é uma constante com dimensão de comprimento. Os operadores auto-adjuntos $\hat{\rho}$ e $\hat{\pi}$ atuam sobre $L^2(\mathbb{R}_+)$ por

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\xi(\rho) &= \rho\xi(\rho) \\ \hat{\pi}\xi(\rho) &= -i\hbar\rho\frac{\partial\xi(\rho)}{\partial\rho}, \end{aligned}$$

e satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{\rho},\hat{\pi}] = i\hbar\hat{\rho}. \tag{II.68}$$

A função $f(\lambda, a)$ é recuperada do operador $\hat{f}_\hbar$ pela fórmula da inversa da transformada de Fourier (II.47),

$$f(\lambda,a) = \sum_{\pm\hbar^{-1}} \varphi_{\pm\hbar}[T_{\pm\hbar}^\dagger(\lambda,a)\hat{f}_{\pm\hbar}] = \sum_{\pm\hbar^{-1}} f_{\pm\hbar}(\lambda,a), \tag{II.69}$$

onde suas "componentes" são dadas através dos pesos $\varphi_{\pm\hbar}$ por

$$f_{\pm\hbar}(\lambda,a) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{G_{sp}} d\rho db\, e^{\pm\frac{i}{\hbar}b\rho} f((\lambda,a)(1,b)), \tag{II.70}$$

as quais explicitam o fato de que o observável clássico (função L^1) f em (II.69) recebe contribuições de *quase todas* as representações irredutíveis, enquanto que a eq. (II.70) é justamente a projeção desta função em uma de suas duas componentes.

[6]Escreveremos simplemente $\hbar$ ao invés $+\hbar^{-1}$ quando o rótulo aparecer apenas como subíndice.

Na álgebra de Hopf-von Neumann dual $\mathbb{H}^a(G_{sp})$, uma função típica pertencente a $A_\hbar(G_{sp})$ apresenta-se como

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{\hbar}_{\chi\xi}(\lambda, a) &= (\chi|T_\hbar(\lambda, a)\xi)_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{d\rho}{\rho}\, e^{-\frac{i}{\hbar}a\rho}\chi(\rho)\overline{\xi(\rho/\lambda)}. \end{aligned} \tag{II.71}$$

Se pusermos $\chi = \xi$, a função $\hat{\omega}^{\hbar}_{\xi,\xi} \equiv W^{\hbar}_{\xi}$ deve ser interpretada como sendo uma generalização da distribuição de Wigner [Wig] para o semi-plano associada ao estado ξ. Isto é justificado pois, se calcularmos o valor esperado do operador $\hat{f}_\hbar$ no estado ξ, este é dado por

$$\langle \hat{f}_\hbar \rangle_\xi = (\xi|\hat{f}_\hbar \xi) = \int_{G_{sp}} d\lambda da\, f(\lambda, a)\, W^{\hbar}_{\xi}(\lambda, a). \tag{II.72}$$

Este cálculo torna claro o papel de $W^{\hbar}_{\xi}$ como uma *densidade de probabilidade quântica*, o mesmo papel desenpenhado pela distribuição de Wigner no espaço de fase euclidiano, embora aquela distribuição seja a transformada de Fourier do valor esperado do operador, e não o próprio valor esperado, como definimos $W^{\hbar}_{\xi}$. Esta diferença é responsável pelo fato de $W^{\hbar}_{\xi}$ não compartilhar a maioria das propriedades que a distribuição de Wigner usual satisfaz como, por exemplo, ser uma função real. Isto se deve a uma falha na conexão entre funções em $A_\hbar(G_{sp})$, como $W^{\hbar}_{\xi}$, e as funções L^1 (II.69) (ou os respectivos operadores em $\mathcal{M}_\hbar(G_{sp})$). Esta falha tem sua origem na dualidade Banach $L^1 - L^\infty(G)$, a qual não é capaz de prover uma correspondência explícita entre estes dois espaços quando o grupo G não for abeliano auto-dual, como G_{sp}, por exemplo (veja o diagrama da figura II.2). No caso do plano euclidiano, o grupo $\mathbb{R}^2$ é auto-dual e a dualidade Banach resulta ser dada exatamente pela transformada de Fourier no plano (veja a seção I.5.3). Além disto, as álgebras L^1 e L^∞ sobre $\mathbb{R}^2$ são isomorfas pela unicidade da transformada de Fourier [Re]. Destas facilidades surgem as bem conhecidas fórmulas da correspondência de Weyl [Foll, Tay, HCSW], da qual a distribuição de Wigner faz parte como um caso particular, correspondendo a um operador densidade puro [Wig]. Ainda comparando com o caso euclidiano, note que por não ter sido necessário extender o grupo G_{sp} e, em consequência, não precisarmos trabalhar com representações projetivas, as álgebras $L^1(G_{sp})$ e $L^\infty(G_{sp})$ não são deformadas. Para mais detalhes sobre as diferenças no formalismo usual e o generalizado aqui, compare esta seção com a seção III.4.

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{f}_\hbar \in \mathbb{H}_\hbar(G) \arrow[dr, "*"] & \\
f, f_\hbar \in L^1(G) \arrow[ur, "\tau_\hbar"] & & A_\hbar(G) \ni \hat{\omega}_{\chi\xi} \arrow[dl, "\hat{\tau}_\hbar = id"] \\
 & \mathbb{H}^a(G) \arrow[ul, "*"] &
\end{tikzcd}$$

Figura II.2: Generalização do formalismo de Weyl-Wigner para o semi-plano como parte irredutível da decomposição da dualidade Fourier para G_{sp} ($*$ denota preduali-dade). O diagrama também tenta mostrar em que sentido esta generalização não tem a mesma simetria do formalismo usual.

III

Dualidade Fourier Projetiva e Quantização de Weyl

Neste capítulo, após termos tido a experiência de aplicar a dualidade de grupos provida pelas álgebras de Kac e, além disso, termos decomposto esta dualidade para descrever a quantização no semi-plano, voltamos ao plano euclidiano e às representações projetivas do grupo $\mathbb{R}^2$. A experiência obtida com dualidade Kac no capítulo anterior será fundamental aqui para estabelecer uma dualidade Fourier projetiva para esse grupo e também para repetirmos o processo de decomposição, agora para descrever o formalismo de Weyl-Wigner. Após uma breve descrição do cenário clássico da Mecânica no plano, revemos rapidamente o grupo de Heisenberg e suas representações irredutíveis, como classificadas pelo teorema de Stone-von Neumann. A partir da álgebra de Kac simétrica do grupo de Heisenberg, a qual faz parte de sua dualidade, por um processo de projeção, introduzimos a álgebra de Kac projetiva simétrica de $\mathbb{R}^2$. Determinando sua predual, e representando-a pela análoga da representação Fourier, obtemos sua álgebra dual, a álgebra de Kac projetiva abeliana de $\mathbb{R}^2$. Decompondo a primeira segundo o dual projetivo deste grupo, obtemos o cenário no qual a quantização de Weyl é finalmente descrita. O conteúdo deste capítulo encontra-se parcialmente em [AlSa2].

III.1 Mecânica Clássica no Espaço de Fase

O espaço de fase mais simples é a variedade simplética $\mathbb{R}^2$, a arena usual para sistemas clássicos com um grau de liberdade. Sobre esta variedade, com sua estrutura simplética dada pela forma $\omega = dp \wedge dq$, atua por simplectomorfismos o grupo abeliano – também denotado $\mathbb{R}^2$ – das translações bidimensionais. Aos sistemas dinâmicos hamiltonianos sobre $\mathbb{R}^2$ correspondem campos vetoriais hamiltonianos simpléticos X_H que satisfazem as equações de Hamilton

$$i_{X_H}\omega = -dH. \tag{III.1}$$

A não degenerescência da forma simplética implica um isomorfismo local entre campos hamiltonianos e 1-formas, e um homomorfismo entre os primeiros e as funções C^∞. Campos vetoriais constituem uma álgebra de Lie pelo parêntese de Lie, cuja imagem isomorfa entre as funções é o parêntese de Poisson

$$\{f,g\} = -\omega(X_f, X_g) = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g. \tag{III.2}$$

De acordo com Dirac [Dir], para quantizar em tal espaço, precisamos estar seguros da existência de uma correspondência fiel entre a álgebra de Poisson e uma álgebra operatorial. A álgebra de operadores que temos mais à mão é a realização da álgebra de Lie do grupo que atua sobre o espaço de fase por transformações canônicas. No caso euclidiano, como o grupo de translações é abeliano, há a necessidade de considerar a sua extensão central para o grupo de Heisenberg, cuja álgebra de Lie é isomorfa à álgebra de Poisson gerada pelas coordenadas de $\mathbb{R}^2$ e a função constante 1,

$$\{q,p\} = 1, \qquad \{q,1\} = 0, \qquad \{p,1\} = 0. \tag{III.3}$$

Note-se que tanto aqui como no formalismo de Weyl-Wigner apresentado na Introdução, o grupo de Heisenberg aparece como o objeto algébrico central da quantização. De fato, ele será nosso ponto de partida para o estabelecimento de uma dualidade projetiva para o plano, e por isso dedicamos a próxima seção a uma descrição sumária desse grupo e de suas representações.

III.2 O grupo de Heisenberg

O grupo de Heisenberg tridimensional H_3 é visto aqui como a extensão central do grupo abeliano bidimensional $\mathbb{R}^2$ (das translações sobre o plano) pelo 1-toro (círculo) $\mathbb{T}$. Usaremos a notação $(x,\alpha) = (x_1, x_2, e^{i\theta})$, $x_1, x_2, \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$, para denotar os elementos e coordenadas de H_3. É bem conhecido o fato de que o segundo espaço de cohomologia $H^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}/2\pi)$, dos cociclos de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ (mod 2π), não é trivial. Aliás, ele é isomorfo à reta $\mathbb{R}$ [TuWi]. Como 2-cociclos classificam extensões centrais, concluímos que existem infinitas extensões centrais não equivalentes do grupo $\mathbb{R}^2$. Assim, feita a escolha de um cociclo $\Omega \in H^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}/2\pi)$, e.g., tomando

$$\Omega(x,y) = \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2), \tag{III.4}$$

o produto em $H_3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ é dado por

$$(x,\alpha)(y,\beta) = (x+y, \alpha\beta\, e^{i\Omega(x,y)}).$$

A associatividade é assegurada por $\delta\Omega = 0$, ou

$$\delta\Omega(x,y,z) = \Omega(y,z) - \Omega(x+y,z) + \Omega(x,y+z) - \Omega(x,y) = 0, \tag{III.5}$$

onde δ é a derivada de cohomologia. A identidade em H_3 é $(0,1)$ e o elemento inverso de (x,α) é $(-x,\alpha^{-1})$. As seguintes propriedades de Ω serão úteis no decorrer deste capítulo: $\Omega(x,0) = 0$, $\Omega(x,y) = -\Omega(y,x)$, $\Omega(-x,y) = -\Omega(x,y)$. Elas seguem facilmente de (III.4).

As representações unitárias e irredutíveis de H_3 podem ser obtidas pelo método das representações induzidas de Mackey [Mack3]. Isto é possível quando se reescreve H_3 como o produto semidireto $\mathbb{R} \oslash (\mathbb{R} \otimes \mathbb{T})$, o que o torna um grupo do tipo $S \oslash N^*$ [Tay, Foll]. Para este tipo de grupos o método de Mackey foi resumido em II.2 e pode, então, ser aplicado na obtenção das representações irredutíveis de H_3. A classificação dessas representações é dada pelo teorema de Stone-von Neumann [Tay], o qual fornece com isto o dual unitário

$$\widehat{H_3} = (\mathbb{Z} - \{0\}) \cup \mathbb{R}^2.$$

Neste dual, as representações ficam divididas entre as de dimensão infinita e os caracteres de dimensão um de acordo com

$$T_\nu(x,\alpha) = e^{i\nu\theta} e^{\frac{i}{2}\nu x_1 x_2} e^{-i\nu x_2 \hat{q}} e^{-ix_1\hat{p}}, \qquad \nu \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{III.6a}$$

$$T_{ab}(x,\alpha) = e^{iax_2} e^{ibx_1}, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2, \tag{III.6b}$$

onde os operadores auto-adjuntos $\hat{q}$, $\hat{p}$ atuam sobre $L^2(\mathbb{R})$ por

$$\hat{q}\psi(q) = q\psi(q)$$
$$\hat{p}\psi(q) = -i\partial_q\psi(q).$$

Lembramos também que a relação de comutação

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i$$

é uma representação da álgebra de Lie de H_3 em $L^2(\mathbb{R})$, a qual é também isomorfa à álgebra de Poisson (III.3).

III.3 Álgebras de Kac Projetivas

Nesta seção descreveremos a projeção das álgebras de Kac simétrica e abeliana de H_3 em álgebras relacionadas às representações projetivas de $\mathbb{R}^2$. Com isto uma dualidade projetiva para $\mathbb{R}^2$ será obtida. Analogamente ao caso apresentado no capítulo anterior, para conectarmos quantização de Weyl e dualidade, decomporemos a dualidade projetiva em uma dualidade envolvendo álgebras de operadores projetivos *irredutíveis*.

Começamos pelo método de Bargmann [Bar] para obter representações projetivas de um grupo a partir das representações lineares de suas extensões centrais. As representações da extensão central que dão origem a representações projetivas são aquelas que se reduzem à identidade quando restritas ao subgrupo central. No nosso caso, temos as representações regulares à esquerda de H_3, que geram a álgebra de Kac $\mathbb{K}^s(H_3)$ e que agem em $L^2(H_3)$ por

$$[L(x,\alpha)f](y,\beta) = f((x,\alpha)^{-1}(y,\beta)). \tag{III.7}$$

Com respeito às extensões centrais de $\mathbb{R}^2$, nos restringimos, como antes, à extensão definida pelo cociclo Ω introduzido em (III.4). De (III.7) fica claro que a restrição de L a $\mathbb{T}$ não é a representação identidade. Temos, portanto, que fazer L agir sobre outro espaço, de acordo com nossos interesses. Pelo método das representações induzidas de Mackey [Mack3], as representações regulares podem ser vistas como sendo induzidas pela representação identidade do subgrupo trivial $\{e\}$. Se, no procedimento de indução, trocarmos $\{e\}$ por um subgrupo qualquer, a respectiva representação induzida é chamada de *quasi-regular* [BaRa]. Como o subgrupo $\mathbb{T}$ de H_3 é central, seu comportamento é equivalente ao de $\{e\}$, o que nos permite identificar as representações induzidas pela representação identidade de $\mathbb{T}$ como sendo as representações regulares $L(x, \alpha)$ atuando em outro espaço. Certamente a restrição destas ao subgrupo $\mathbb{T}$ é a identidade e, portanto, servem ao nosso propósito. Pelo método de Mackey, estas representações regulares atuam em um espaço de Hilbert, aqui denotado $H(H_3)$, cujos elementos são funções de quadrado integrável quando restritas a $\mathbb{R}^2$ e, além disto, satisfazem $f((x,\alpha)(0,\beta)) = \beta^{-1} f(x,\alpha)$. Como $(x,\alpha) = (x,1)(0,\alpha) = (0,\alpha)(x,1)$, temos a decomposição destas funções segundo

$$f(x,\alpha) = \alpha^{-1} f(x,1) \equiv \alpha^{-1} f(x), \tag{III.8}$$

onde usamos a mesma notação f para funções sobre H_3 e sobre $\mathbb{R}^2$, evidenciando o isomorfismo entre $H(H_3)$ e $L^2(\mathbb{R}^2)$. Por esta *projeção* natural de $L^2(H_3)$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, (III.7) pode ser reescrita como

$$[L(x,\alpha)f](y) = \alpha\, e^{-i\Omega(-x,y)} f(y-x),$$

a qual se reduz à identidade quando restrita a $\mathbb{T}$, $[L(0,\alpha)f](y) = \alpha f(y)$. As respectivas representações projetivas de $\mathbb{R}^2$ são, então, definidas sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ por

$$[L_\Omega(x)f](y) \equiv [L(x,1)f](y) = e^{i\Omega(x,y)} f(y-x). \tag{III.9}$$

Pelo que foi dito até aqui, podemos escrever a decomposição de $L(x,\alpha)$ como

$$L(x,\alpha) = \alpha\, L_\Omega(x). \tag{III.10}$$

Como consequência, a operação (soma) de $\mathbb{R}^2$ é agora representada por

$$L_\Omega(x) L_\Omega(y) = e^{i\Omega(x,y)} L_\Omega(x+y), \tag{III.11}$$

o que caracteriza L_Ω como uma representação projetiva.

III.3.1 Dualidade Fourier Projetiva para o Plano

Antes de partirmos para a projeção das álgebras de Kac $\mathbb{K}^s(H_3)$ e $\mathbb{K}^a(H_3)$, é preciso que consideremos a fórmula de decomposição (III.10) sob um outro ponto de vista. Comecemos por observar que, embora Ω seja não trivial (diferencial de um 1-cociclo) em $H^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}/2\pi)$, ela é exata em outra cohomologia associada ao plano. Se considerarmos o complexo de k-cocadeias *gaugeficadas* $C^k : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^{\otimes k} \to \mathbb{R}$ com derivada de cohomologia δ', então existe uma 1-cocadeia Θ tal que $\Omega = \delta'\Theta$, ou

$$\Omega(x,y) = \delta'\Theta(x,y) = \Theta(y\cdot q; x) - \Theta(q; x+y) + \Theta(q; y), \tag{III.12}$$

onde $y \cdot q \equiv q + y_1$ é uma ação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Θ é dada explicitamente por

$$\Theta(q;x) = -\frac{1}{2}[(2q + x_1)x_2], \tag{III.13}$$

e satisfaz $\Theta(q;0) = 0$, $\Theta(q;-x) = -\Theta(x^{-1} \cdot q; x)$, $\Theta(q;x) = -\Theta(x \cdot q; -x)$, $\forall q \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Mostra-se também que esta cocadeia satisfaz a interessante propriedade

$$\Theta(q;x) - \Theta(y \cdot q; x) = \Theta(q;-x) - \Theta(y^{-1} \cdot q; -x) = y_1 x_2. \tag{III.14}$$

Como mencionado no capítulo anterior, este tipo de 1-cocadeia aparece naturalmente em teoria de representações de grupos [Var], inclusive nas representações (III.6a) de H_3 em $L^2(\mathbb{R})$, as quais podem ser expressas em termos de Θ como segue:

$$[T_\nu(x,\alpha)f](q) = e^{i\nu\theta} e^{i\nu\Theta(x^{-1}\cdot q;x)} f(x^{-1} \cdot q), \qquad \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}. \tag{III.15}$$

Com esses comentários em mente, reinterpretamos a fórmula de decomposição (III.10), considerando que o elemento central $\alpha = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ aparece na projeção sob a forma

$$L(x,\alpha) \mapsto e^{i\Theta(q;-x)} L_\Omega(x). \tag{III.16}$$

Isto é, além de fazermos $\theta = \Theta$, consideraremos $\Theta = \Theta(q;-x)$ como uma 1-cocadeia gaugeficada nos moldes do que foi dito acima. Isto significa que a fase Θ depende do ponto projetado $x \in \mathbb{R}^2$, o qual é seu parceiro como coordenada de H_3 e, além disto, que ela é gaugeficada – depende do ponto $q \in \mathbb{R}$ onde as representações irredutíveis (III.15) (componentes irredutíveis de $L(x,\alpha)$) atuam. A despeito do caráter local de Θ em relação às duas primeiras coordenadas (x) de H_3, na fórmula de projeção (III.16), Θ trata a terceira coordenada como um todo, desconsiderando os detalhes de seu conteúdo. Por exemplo, os operadores $L(x,\alpha\beta)$ e $L(x,-\alpha)$ serão também projetados no lado direito de (III.16), mas $L(-x,\alpha)$ será projetado em $e^{i\Theta(q;x)}L_\Omega(-x)$.

A Projeção de $\mathbb{K}^s(H_3)$

No que segue projetaremos a álgebra $\mathbb{K}^s(H_3)$ de acordo com a fórmula (III.16), com o propósito de desvendar a estrutura da álgebra gerada pelos operadores $L_\Omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Isto será feito em duas etapas concomitantes: a projeção das operações como norma, involução, produto, etc.; e a verificação dos axiomas de álgebras de Kac para estas operações projetadas. Estes axiomas servirão apenas como um guia para determinar a estrutura da álgebra resultante da projeção. Como anunciamos anteriormente, a estrutura obtida para a álgebra projetada não é exatamente a de uma álgebra de Kac.

A estrutura de $\mathbb{K}^s(H_3)$ é a apresentada para a álgebra de Kac simétrica de um grupo qualquer G, $\mathbb{K}^s(G)$, com a ressalva de que H_3 é *unimodular*. Este fato simplifica um pouco esta álgebra, pois a função modular é a constante 1 e o peso de Haar é um traço. Esta estrutura sobre $\mathcal{M}(H_3)$ é dada por:

$$L(x,\alpha)L(y,\beta) = L(x+y, \alpha\beta\, e^{i\Omega(x,y)}); \tag{III.17a}$$

$$\triangle L(x,\alpha) = L(x,\alpha) \otimes L(x,\alpha); \tag{III.17b}$$

$$\kappa(L(x,\alpha)) = L^\dagger(x,\alpha) = L(-x,\alpha^{-1}); \tag{III.17c}$$

$$\varphi_s(\hat{f}) = f(0,1), \tag{III.17d}$$

onde

$$\hat{f} = \int_{H_3} dx d\alpha\; f(x,\alpha)L(x,\alpha), \tag{III.18}$$

sendo que $dxd\alpha$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$, invariante à esquerda e à direita sob H_3.

Começamos pela projeção da norma e da involução. Como $e^{i\Theta(q;-x)}$ é um número complexo, de (III.16) temos simplesmente

$$\|L(x,\alpha)\| \mapsto \|L_\Omega(x)\| = sup\{\|L_\Omega(x)\psi\|_2,\ \|\psi\|_2 = 1 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

A conjugação $\dagger$ em $\mathcal{M}(H_3)$ é projetada para

$$L^\dagger(x,\alpha) \mapsto \left(e^{i\Theta(q;-x)}\right)^* L_\Omega^\dagger(x), \tag{III.19}$$

e, como estas representações são unitárias, temos também $L_\Omega^\dagger(x) = L_\Omega(-x)$. Note, no entanto, que a involução * sobre o fator de fase não é a simples conjugação complexa, mas envolve também a ação de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Esta involução fica determinada se lembrarmos que $L^\dagger(x,\alpha) = L(-x,\alpha^{-1}) \mapsto e^{i\Theta(q;x)}L_\Omega(-x)$, do que resulta, comparando com (III.19), em

$$\left(e^{i\Theta(q;-x)}\right)^* = e^{i\Theta(q;x)}. \tag{III.20}$$

Verifica-se diretamente que a norma e a involução projetadas satisfazem todos os axiomas pertinentes apresentados em I.1.

O produto em $\mathbb{K}^s(H_3)$ também será projetado de acordo com (III.16). Precisamos tomar cuidado ao lidar com o produto de tais operadores, pois o operador que segue o primeiro à esquerda[1] *sentirá* a ação deste sobre $\mathbb{R}$, sendo que o fator de fase daquele resulta modificado. Com estas considerações, de (III.17a) e de (III.16) obtemos

$$e^{i\Theta(q;-x)}L_\Omega(x)\,e^{i\Theta(x^{-1}\cdot q;-y)}L_\Omega(y) = e^{i\Theta(q;-x-y)}L_\Omega(x+y). \qquad \text{(III.21)}$$

De (III.12) e por $\Omega(-y,-x) = -\Omega(x,y)$, esta relação somente resulta no produto projetivo (III.11) se $\Omega = \delta'\Theta$. Isto fixa de uma vez por todas a 1-cocadeia Θ como sendo dada por (III.13). O primeiro axioma imposto ao produto é associatividade. Esta é satisfeita devido ao fechamento do cociclo $\Omega = \delta'\Theta$. O segundo axioma, $L_\Omega(x)\mathbf{1} = \mathbf{1}L_\Omega(x)\,\forall x$, onde $\mathbf{1} = L_\Omega(0)$, é verificado pelo produto (III.11), já que $\Omega(x,0) = 0\ \forall x$.

Temos até aqui uma álgebra normada e involutiva com unidade, cujo produto é dado por (III.11). Ela é uma subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$, e certamente também é fechada nas topologias fracas e fortes. Isto pode ser verificado se a compararmos com a álgebra de von Neumann gerada pelas representações regulares $L(x)$ de $\mathbb{R}^2$. A única diferença entre a ação de $L_\Omega(x)$ e a ação de $L(x)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ é o fator de fase (veja (III.9)), o qual não interfere no valor das seminormas que definem aquelas topologias (veja a seção I.1). A conclusão é que a álgebra gerada pelos $L_\Omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, é uma álgebra de von Neumann. Ela será denotada por $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$.

Prosseguindo na projeção, por (III.16) projetamos o coproduto para

$$\triangle L(x,\alpha) \mapsto e^{i\Theta(q;-x)}\triangle^\Omega L_\Omega(x),$$

onde supõe-se que $\triangle$ não atue sobre o elemento central $e^{i\Theta}$. Substituindo esta projeção na expressão (III.17b) para o coproduto de $L(x,\alpha)$, e considerando novamente a fórmula de projeção, obtemos a fórmula

$$\triangle^\Omega L_\Omega(x) = e^{i\Theta(q;-x)}\,L_\Omega(x)\otimes L_\Omega(x). \qquad \text{(III.22)}$$

Observe que o coproduto projetado continua sendo simétrico, i.e., $\sigma\circ\triangle_\Omega = \triangle_\Omega$, como era originalmente $\triangle$. O primeiro axioma imposto a $\triangle^\Omega$ é $\triangle^\Omega\mathbf{1} = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, o qual é trivial,

[1]Note que usamos a convenção da teoria de representações, onde o operador mais à esquerda deve atuar primeiro.

pois $\Theta(q;0) = 0$ para todo $q \in \mathbb{R}$. O próximo é a *coassociatividade*, ou

$$(\triangle^\Omega \otimes id) \circ \triangle^\Omega = (id \otimes \triangle^\Omega) \circ \triangle^\Omega.$$

Este também é trivial, porque o mesmo fator de fase ocorre duas vezes em cada lado desta equação quando ela é aplicada em $L_\Omega(x)$. Finalmente, $\triangle^\Omega$ deve ser também um homomorfismo entre $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ e $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, o que significa que

$$\triangle^\Omega(L_\Omega(x)L_\Omega(y)) \;=\; \triangle^\Omega(L_\Omega(x))\triangle^\Omega(L_\Omega(y)). \tag{III.23}$$

Por (III.11) e (III.22), o lado esquerdo de (III.23) fornece

$$e^{i[\Omega(x,y)+\Theta(q;-x-y)]}\, L_\Omega(x+y) \otimes L_\Omega(x+y),$$

enquanto que seu lado direito resulta em

$$e^{i[\Theta(q;-x)+\Theta(x^{-1}\cdot q;-y)+2\Omega(x,y)]}\, L_\Omega(x+y) \otimes L_\Omega(x+y).$$

Esses fatores de fase resultam ser iguais pela expressão (III.12) para $\Omega(-y,-x)$ e pelas propriedades deste cociclo.

Segundo (III.16), a coinvolução é projetada para

$$\kappa(L(x,\alpha)) \mapsto e^{i\Theta(q;-x)}\, \kappa^\Omega(L_\Omega(x)),$$

onde também κ é suposta não agir sobre o fator de fase. De (III.17c), usando (III.19) e (III.20), obtemos

$$\kappa^\Omega(L_\Omega(x)) = e^{i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]} L^\dagger_\Omega(x). \tag{III.24}$$

De todos os axiomas impostos a uma coinvolução, κ^Ω não satisfaz somente um, o axioma do *anti-automorfismo*

$$\kappa^\Omega(L_\Omega(x)L_\Omega(y)) = \kappa^\Omega(L_\Omega(y))\kappa^\Omega(L_\Omega(x)). \tag{III.25}$$

De fato, a partir de (III.24), tendo o devido cuidado com o argumento dos fatores de fase em relação ao produto de operadores, os lados esquerdo e direito desse axioma fornecem, respectivamente:

$$\kappa^\Omega(L_\Omega(x)L_\Omega(y)) \;=\; e^{i[\Omega(x,y)+\Theta(q;x+y)-\Theta(q;-x-y)]}\, L_\Omega(-x-y), \tag{III.26a}$$

$$\begin{aligned}\kappa^\Omega(L_\Omega(y))\kappa^\Omega(L_\Omega(x)) \;&=\; \\ &=\; e^{i[\Theta(q;y)-\Theta(q;-y)+\Theta(y\cdot q;x)-\Theta(y\cdot q;-x)+\Omega(-y,-x)]}\, L_\Omega(-x-y).\end{aligned} \tag{III.26b}$$

Depois de usar as expressões explícitas de Ω e Θ, é possivel igualar os dois lados do axioma acima a menos de uma fase, isto é, obtém-se

$$\kappa^{\Omega}(L_{\Omega}(x)L_{\Omega}(y)) = e^{i(x_1y_2+y_1x_2)}\,\kappa^{\Omega}(L_{\Omega}(y))\kappa^{\Omega}(L_{\Omega}(x)), \qquad \text{(III.27)}$$

ao invés do axioma (III.25). Voltaremos a esse problema após verificarmos os axiomas restantes. Com respeito a estes, requeremos: $\kappa^{\Omega}(L^{\dagger}_{\Omega}(x)) = \kappa^{\Omega}(L_{\Omega}(x))^{\dagger}$, isto é, κ^{Ω} deve ser involutiva. Isto segue de (III.24) e (III.19); o axioma $\kappa^{\Omega}(\kappa^{\Omega}(L_{\Omega}(x))) = L_{\Omega}(x)$ implica que o fator de fase em (III.24), o qual é antissimétrico em x, deve ser cancelado quando a segunda coinvolução é aplicada a $L_{\Omega}(-x)$. Isto é óbvio; o axioma do *anti-coautomorfismo*, o último,

$$\triangle^{\Omega} \circ \kappa^{\Omega} = \sigma \circ (\kappa^{\Omega} \otimes \kappa^{\Omega}) \circ \triangle^{\Omega}, \qquad \text{(III.28)}$$

é satisfeito como segue. Quando aplicado a $L_{\Omega}(x)$, o lado esquerdo faz surgir o fator de fase $e^{i[(\Theta(q;x)-\Theta(q;-x))+\Theta(q;x)]}$, enquanto que o lado direito dá origem ao fator de fase $e^{i[\Theta(q;-x)+2(\Theta(q;x)-\Theta(q;-x))]}$, que lhe é igual.

De (III.27) fica evidente que a projeção κ^{Ω} da coinvolução κ não é uma coinvolução sobre $\mathcal{M}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$. O papel de uma coinvolução na dualidade Kac é explicitado na fórmula (I.13), a qual define a involução dual ^{o} sobre o predual de $\mathbb{K}$ a partir de sua coinvolução. Como nosso objetivo maior é provar uma dualidade para $\mathcal{M}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$, a ausência de uma coinvolução nesta álgebra nos coloca numa difícil situação. O único aspecto frágil no processo de projeção de κ que poderia ser modificado para resolver esse problema é a suposição de que κ não atue sobre o fator de fase. Mas, se ela atuasse sobre ele, e a única ação plausível seria pela conjugação (III.20) (já que κ atua por $\dagger$ sobre L_{Ω}), a operação κ^{Ω} resultante seria exatamente $\kappa^{\Omega}(L_{\Omega}(x)) = L^{\dagger}_{\Omega}(x)$, a coinvolução usual de uma álgebra de Kac simétrica associada a um grupo. Neste caso, κ^{Ω} não só violaria o axioma (III.25) mas também o axioma do anti-coautomorfismo, o qual envolve o não trivial $\triangle^{\Omega}$. Mais geralmente, se definirmos κ^{Ω} com qualquer outro fator de fase no lugar do que aparece em (III.24), por exemplo, $e^{i\Psi(q;x)}$, a única Ψ tal que os últimos três axiomas para coinvolução sejam satisfeitos é justamente a combinação de Θs dada em (III.24). Isto fica evidente principalmente para o último axioma. De fato, não conhecemos nenhuma boa definição para κ^{Ω} que o faça ser uma coinvolução, i.e., que satisfaça todos os axiomas acima. A solução que encontramos para este problema foi manter a definição (III.24) de κ^Ω assim como ela é fornecida pela projeção, e modificar o axioma do anti-automorfismo, eq. (III.25). A modificação natural, no sentido em que é compatível com a origem de κ^Ω, vem da *projeção* do axioma de anti-automorfismo satisfeito por $L(x,\alpha)$. Esse último apresenta-se como

$$\kappa(L(x,\alpha)L(y,\beta)) = \kappa(L(y,\beta))\kappa(L(x,\alpha)). \qquad \text{(III.29)}$$

Usando a fórmula de projeção (III.16) sobre seu lado esquerdo, obtemos

$$\kappa(L(x,\alpha)L(y,\beta)) \mapsto e^{i[\Theta(q;-x)+\Theta(x^{-1}\cdot q;-y)]}\kappa^\Omega(L_\Omega(x)L_\Omega(y)).$$

Fazendo o mesmo sobre o lado direito, (III.29) resulta ser projetado para

$$\begin{aligned} \kappa^\Omega(L_\Omega(x)L_\Omega(y)) &= \qquad \text{(III.30)} \\ &= e^{i[\Theta(q;-y)-\Theta(q;-x)+\Theta(y\cdot q;-x)-\Theta(x^{-1}\cdot q;-y)]}\kappa^\Omega(L_\Omega(y))\kappa^\Omega(L_\Omega(x)). \end{aligned}$$

Devido a sua natureza, (III.30) deve ser chamado de axioma de *anti-automorfismo projetivo.* A importância de (III.30), e a justificativa de sua existência, vêm do fato que ele é prontamente satisfeito por (III.24). De fato, substituindo (III.26a) e (III.26b) em (III.30), os fatores de fase são facilmente equacionados com a ajuda da expressão (III.12) para Ω e de suas propriedades. Note-se que nenhum novo axioma surge quando projetamos os outros axiomas que definem uma coinvolução. Isto conclui a lista de axiomas satisfeitos por κ^Ω, a qual devemos chamar daqui em diante de *coinvolução projetiva.* Podemos antecipar, no entanto, que a troca do axioma (III.25) para o axioma (III.30) terá suas consequências sobre o predual de $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$. O axioma (III.28), quando aplicado à coinvolução dual a κ^Ω, também deverá ser trocado.

Finalmente, o traço φ_s é projetado para sua restrição a $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi_s(\hat{f}) = f(0,1) \mapsto \varphi^\Omega(\hat{f}) = f(0), \qquad \text{(III.31)}$$

onde um elemento genérico $\hat{f}$ de $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ é escrito

$$\hat{f} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\ f(x)L_\Omega(x). \qquad \text{(III.32)}$$

Por sua origem, este traço é também n.f.s. Além disto, ele satisfaz os três axiomas específicos que definem um peso de Haar. Neste caso eles apresentam-se como:

$$\begin{aligned} (id\otimes\varphi^\Omega)\Delta^\Omega(\hat{f}) &= \varphi^\Omega(\hat{f})\mathbf{1} \qquad \forall \hat{f}\in\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)^+; && \text{(III.33a)} \\ (id\otimes\varphi^\Omega)[(\mathbf{1}\otimes\hat{g}^\dagger)\Delta^\Omega(\hat{f})] &= \kappa^\Omega\circ(id\otimes\varphi^\Omega)[\Delta^\Omega(\hat{g}^\dagger)(\mathbf{1}\otimes\hat{f})]; && \text{(III.33b)} \\ \kappa^\Omega\circ\sigma_t^{\varphi^\Omega} &= \sigma_{-t}^{\varphi^\Omega}\circ\kappa^\Omega \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}. && \text{(III.33c)} \end{aligned}$$

O último é trivial, pois, sendo φ^Ω um traço, o grupo modular σ^{φ^Ω} fica reduzido à identidade. Para verificar como φ^Ω satisfaz os axiomas restantes, observamos primeiro que

$$\triangle^\Omega \hat{f} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, e^{i\Theta(q;-x)}\, f(x)\, L_\Omega(x) \otimes L_\Omega(x). \tag{III.34}$$

Extendendo o domínio de φ^Ω de forma tal que possamos ter $\varphi^\Omega(L_\Omega(x)) = \delta(x)$, o axioma (III.33a) segue de (III.34) e de (III.31), sendo que seu lado esquerdo resulta em $(id \otimes \varphi^\Omega)\triangle^\Omega \hat{f} = f(0)L_\Omega(0) = \varphi^\Omega(\hat{f})\mathbf{1}$. Da mesma maneira, o segundo segue de (III.24) e de

$$\hat{f}^\dagger = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, \overline{f(x)}\, L_\Omega^\dagger(x). \tag{III.35}$$

A álgebra resultante, a projeção da álgebra simétrica $\mathbb{K}^s(H_3)$ do grupo de Heisenberg, será denotada por $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ e chamada *álgebra de Kac projetiva simétrica* de $\mathbb{R}^2$. Como sabemos, ela está edificada sobre a álgebra de von Neumann $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, cuja norma e involução são as operações usuais de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^2))$. A estrutura restante, obtida acima, é aqui agrupada em

$$L_\Omega(x)L_\Omega(y) = e^{i\Omega(x,y)}\, L_\Omega(x+y); \tag{III.36a}$$

$$\mathbf{1} = L_\Omega(e); \tag{III.36b}$$

$$\triangle^\Omega L_\Omega(x) = e^{i\Theta(q;-x)}\, L_\Omega(x) \otimes L_\Omega(x); \tag{III.36c}$$

$$\kappa^\Omega(L_\Omega(x)) = e^{i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\, L_\Omega^\dagger(x); \tag{III.36d}$$

$$\varphi^\Omega(a) = \begin{cases} \|f\|_2^2 & \text{se } a = \hat{f}^\dagger \cdot \hat{f} \\ +\infty & \text{de outro modo} \end{cases} \qquad a \in \mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)^+, \tag{III.36e}$$

Comentários:

– O produto de dois elementos $\hat{f}$ e $\hat{g}$ é

$$\begin{aligned} \hat{f} \cdot \hat{g} &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} dxdy\; f(x)g(y)e^{i\Omega(x,y)} L_\Omega(x+y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dz \int_{\mathbb{R}^2} dx\; e^{i\Omega(x,z)} f(x)g(z-x)L_\Omega(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dz\; (f \circledast g)(z)L_\Omega(z), \end{aligned} \tag{III.37}$$

onde usamos o fato de Ω ser antissimétrica para identificar a convolução torcida

$$(f \circledast g)(z) = \int_{\mathbb{R}^2} dx\; e^{i\Omega(x,z)} f(x)g(z-x). \tag{III.38}$$

Como o produto de operadores projetivos é mapeado na convolução torcida de funções L^1, a expressão (III.32) pode ser considerada como uma representação regular à esquerda *linear* (multiplicativa) de $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$, induzida por L_Ω. $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$ é uma álgebra de Banach análoga a $L^1(\mathbb{R}^2)$, mas tendo a convolução torcida por Ω como produto. A involução permanece a de L^1 e sua imagem por L_Ω é a conjugação $\dagger$ de $\hat{f}$ (veja (III.35)): $\hat{f}^\dagger = L_\Omega(f^*)$;

– embora o grupo $\mathbb{R}^2$ seja abeliano, pela não comutatividade do produto projetivo, $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ não o é. Esta não comutatividade pode ser medida, graças à antissimetria de Ω, pela introdução de uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, através do comutador

$$[L_\Omega(x), L_\Omega(y)] = 2\mathrm{i}\ \mathrm{sen}[\Omega(x,y)]\, L_\Omega(x+y). \tag{III.39}$$

Note que, tanto a associatividade do produto (III.36a), como a identidade de Jacobi para o comutador (III.39), ambas dependem do fechamento de Ω ($\delta\Omega = 0$) para serem satisfeitas.

– analogamente ao que ocorre nas álgebras de Kac simétricas de grupos, o ideal de elementos tais que $\varphi^\Omega(\hat{f}^\dagger \hat{f}) < \infty$ é justamente $\mathcal{N}_{\varphi^\Omega} = L^1_\Omega \cap L^2(\mathbb{R}^2)$. A representação GNS se dá, então, em $L^2(\mathbb{R}^2)$, onde $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ atua por $\pi_{\varphi^\Omega}(\hat{f})g = f \circledast g$. A imagem GNS de $\hat{f}$ em L^2 será denotada por $\hat{f}_{\varphi^\Omega}$;

– a função $f \in L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$ pode ser recuperada da combinação linear (III.32) através do peso φ^Ω e é dada por

$$f(x) = \varphi^\Omega[L^\dagger_\Omega(x)\hat{f}]. \tag{III.40}$$

Escrita em termos de distribuições M^1_Ω, as operações da álgebra de Kac projetiva, além da convolução torcida e do traço, apresentam-se como

$$\triangle^\Omega(f)(x,y) \ = \ e^{i\Theta(q;-x)} f(x)\,\delta(x-y); \tag{III.41a}$$

$$\kappa^\Omega(f)(x) \ = \ e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\, f(-x). \tag{III.41b}$$

A Álgebra dual de $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$

Partimos agora para determinar o predual de $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ e, por uma representação sua que também podemos chamar de Fourier, o dual de $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$. Embora esta última não seja uma álgebra de Kac, as mesmas técnicas para o estabelecimento da dualidade Kac serão usadas aqui. Nesta seção, L^p denotará $L^p(\mathbb{R}^2)$, para $p = 1, 2, \infty$.

Analogamente ao caso não projetivo, os elementos de $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)_*$ serão escritos como formas lineares ω^Ω_{fg} sobre $\mathcal{B}(L^2)$, cujo pareamento de dualidade com $L^\dagger_\Omega(x)$ resulta nas funções

$$\langle L^\dagger_\Omega(x), \omega^\Omega_{fg}\rangle = (L_\Omega(-x)f|g)_{L^2} = (f \circledast \check{g})(x), \qquad f, g \in L^2. \tag{III.42}$$

As funções $\omega^\Omega_{fg}(x) \equiv (f \circledast \check{g})(x)$ são então definidas como representativas deste predual. Desta definição também obtemos que essas funções são L^∞: $|\omega^\Omega_{fg}(x)| \leq \|f\|_2\|g\|_2 < \infty$. Quando não houver perigo de confusão, elas serão denotadas simplesmente por f, g, h, etc.

O produto em $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)_*$ segue da relação de dualidade (I.12),

$$\begin{aligned}
(\omega^\Omega_{fg} \star \omega^\Omega_{hl})(x) &= \langle \triangle^\Omega L_\Omega(-x), \omega^\Omega_{fg} \otimes \omega^\Omega_{hl}\rangle \\
&= e^{i\Theta(q;x)}\,(L^\dagger_\Omega(x) \otimes L^\dagger_\Omega(x)(f \otimes h)|g \otimes l)_{L^2 \otimes L^2} \\
&= e^{i\Theta(q;x)}\,\omega^\Omega_{fg}(x)\omega^\Omega_{hl}(x),
\end{aligned} \tag{III.43}$$

e, como $\triangle^\Omega$ é simétrico, o produto $\star$ é abeliano. Sua associatividade segue da coassociatividade de $\triangle^\Omega$. A unidade é uma consequência de (III.43), e é dada univocamente por

$$\mathbf{1}(x) = e^{-i\Theta(q;x)}.$$

As funções em $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)_*$ que não se anulam possuem elemento inverso ante $\star$ dado por

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{-2i\Theta(q;x)}}{f(x)}. \tag{III.44}$$

Para finalizar a caracterização deste predual, a involução dual $^\circ$ é determinada através de

$$\begin{aligned}
(\omega^\Omega_{fg})^\circ(x) &= \langle L_\Omega(-x), \omega^{\Omega\,\circ}_{fg}\rangle = \overline{\langle \kappa^\Omega(L^\dagger_\Omega(-x)), \omega^\Omega_{fg}\rangle} \\
&= e^{-i[\Theta(q;x) - \Theta(q;-x)]}\overline{\omega^\Omega_{fg}(x)}.
\end{aligned} \tag{III.45}$$

Esta operação é de fato uma involução, pois é antilinear, satisfaz $^\circ \circ {}^\circ = id.$, $\mathbf{1}^\circ(x) = \mathbf{1}(x)\ \forall x$, e é um anti-automorfismo, ou seja, invocando (III.20), as duas linhas abaixo resultam ser iguais:

$$\begin{aligned}(f \star g)^o(x) &= e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]} \left(e^{i\Theta(q;x)}\right)^* \overline{f(x)g(x)} \\ (g^o \star f^o)(x) &= e^{i\Theta(q;x)-2[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\overline{g(x)f(x)}.\end{aligned}$$

Em analogia com o que é de costume fazer-se nas álgebras Kac de grupos, nos referimos ao predual $\mathcal{M}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)_*$ como a *álgebra de Fourier projetiva* de $\mathbb{R}^2$, e a denotamos por $A^{\Theta}(\mathbb{R}^2)$. Como seus elementos estão em L^{∞}, denotamos a respectiva álgebra de von Neumann por $L^{\infty}_{\Theta}(\mathbb{R}^2)$. Como comentário final a respeito de $A^{\Theta}(\mathbb{R}^2)$, observamos que a projeção do produto $(f \cdot g)(x, \alpha) = f(x, \alpha)g(x, \alpha)$, a qual resulta no produto projetado (III.43), vem da projeção de cada $f \in L^{\infty}(H_3)$ para $L^{\infty}_{\Theta}(\mathbb{R}^2)$ da seguinte maneira:

$$f(x, \alpha) \mapsto e^{-i\Theta(q;-x)} f(x). \tag{III.46}$$

Realmente, esta projeção leva ao produto $\star$ se lembrarmos que a fase Θ *sente* a ação de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ como segue: $f(x, \alpha)g(y, \beta) = (f \otimes g)(x, \alpha \otimes y, \beta)$ é projetado, segundo (III.46), considerando que y age sobre a fase do ponto x, em $e^{-i[\Theta(y \cdot q;-x)+\Theta(q;-y)]} f(x)g(y)$, enquanto que $(f \cdot g)(x, \alpha)$ vai para $e^{-i\Theta(q;-x)}(f \star g)(x)$ pela mesma projeção. Fazendo $(y, \beta) = (x, \alpha)$ e lembrando que $-\Theta(x \cdot q; -x) = \Theta(q; x)$, as exponenciais que não envolvem uma ação de $\mathbb{R}^2$ cancelam-se e o correto produto $\star$ é obtido. Do mesmo modo a ação de $L^{\infty}(H_3)$ sobre o espaço de Hilbert $H(H_3)$, por produto ponto-a-ponto, é projetada na ação de $L^{\infty}_{\Theta}(\mathbb{R}^2)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ pelo produto $\star$. A fórmula (III.46) também é útil na projeção de funções L^1. De (III.46) e (III.16) obtemos a correta projeção dos elementos (III.18) de $\mathbb{K}^s(H_3)$ nos operadores (III.32).

A representação Fourier λ^{Ω} de $A^{\Theta}(\mathbb{R}^2)$ é definida, em analogia com (I.30), por

$$[\lambda^{\Omega}(\omega^{\Omega})f](x) = [(\omega^{\Omega} \circ \kappa^{\Omega} \otimes id)\Delta^{\Omega}\hat{f}]_{\varphi^{\Omega}}(x), \qquad f = \hat{f}_{\varphi^{\Omega}} \in L^2 \cap L^1_{\Omega}. \tag{III.47}$$

De (III.34), (III.36d) e (III.42), prontamente obtemos

$$\begin{aligned}(\omega^{\Omega} \circ \kappa^{\Omega} \otimes id)\Delta^{\Omega}\hat{f} &= (\omega^{\Omega} \otimes id) \int_{\mathbb{R}^2} dx\, e^{i\Theta(q;x)} f(x)\, L_{\Omega}(-x) \otimes L_{\Omega}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx\, e^{i\Theta(q;x)} f(x) \omega^{\Omega}(x)\, L_{\Omega}(x),\end{aligned}$$

do que resulta

$$\lambda^{\Omega}(\omega^{\Omega})f(x) = (\omega^{\Omega} \star f)(x). \tag{III.48}$$

Como a ação de $A^\Theta(\mathbb{R}^2)$ (ou $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$) é dada pelo produto $\star$, segue-se que $\lambda^\Omega = id$. Isto significa, como no caso Kac, que a álgebra dual de $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ é construída sobre a álgebra von Neumann $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$, a álgebra de Banach L^∞ com o produto $\star$ e a involução ^{o} de $A^\Theta(\mathbb{R}^2)$. Sua norma permanece a mesma de L^∞ e satisfaz $\|f^o\| = \|f\|$, $\|f^o \star f\| = \|f\|^2$.

O gerador de λ^Ω, isto é, o operador W^Θ em $L^\infty_\Theta \otimes \mathcal{B}(L^2)$ que satisfaz $\lambda^\Omega(\omega^\Omega) = (id \otimes \omega^\Omega)(W^\Theta)$, é obtido de (I.24) e resulta em

$$[W^\Theta F](x,y) = e^{i\Theta(q;x)} e^{-i\Omega(x,y)}\, F(x, y+x). \tag{III.49}$$

Desta ação notamos que este gerador atua em $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ como se fosse $W^\Theta \sim 1 \otimes L^\dagger_\Omega(x)$, onde 1 é a função contante 1 para todo x, que atua pelo produto $\star$. Este tipo de identificação é útil para justificar os argumentos dos fatores de fase que surgem nos cálculos envolvendo os geradores de representações.

Fixando-nos agora na álgebra dual $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$, por dualidade também obtemos um coproduto sobre ela:

$$\begin{aligned} \triangle^\Theta(\omega^\Omega_{fg})(x,y) &= \langle [L_\Omega(x) L_\Omega(y)]^\dagger, \omega^\Omega_{fg}\rangle \\ &= e^{-i\Omega(x,y)} (L^\dagger_\Omega(x+y) f | g) \\ &= e^{-i\Omega(x,y)} \omega^\Omega_{fg}(x+y). \end{aligned} \tag{III.50}$$

Como este está definido através do produto dual associativo, $\triangle^\Theta$ é coassociativo. Ele também preserva a unidade: $\triangle^\Theta \mathbf{1}(x,y) = e^{-i\Omega(x,y)}\, e^{-i\Theta(q;x+y)}$, enquanto que $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})(x,y) = e^{-i\Theta(y\cdot q;x)}\, e^{-i\Theta(q;y)}$. Nesta última expressão, além de (III.12), é necessário lembrar que o fator de fase $e^{i\Theta}$, como comentado anteriormente, é um tipo especial de função complexa que é *sensível* a ação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, mesmo quando um simples produto em $\mathbb{C}$ é realizado. O axioma do homomorfismo já foi provado indiretamente para $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, mas será instrutivo verificá-lo aqui novamente para confirmar o estranho comportamento dos produtos de $e^{i\Theta}$ em $\mathbb{C}$. Ele segue de:

$$\begin{aligned} \triangle^\Theta(f \star g)(x,y) &= e^{-i\Omega(x,y)}\, (f \star g)(x+y) \\ &= e^{-i\Omega(x,y)}\, e^{i\Theta(q;x+y)}\, f(x+y) g(x+y); \\ (\triangle^\Theta f \star \triangle^\Theta g)(x,y) &= (\triangle^\Theta f^{(1)} \star \triangle^\Theta g^{(1)})(x) (\triangle^\Theta f^{(2)} \star \triangle^\Theta g^{(2)})(y) \\ &= e^{i\Theta(y\cdot q;x)}\, e^{i\Theta(q;y)}\, \triangle^\Theta f(x,y) \triangle^\Theta g(x,y) \\ &= e^{i\Theta(y\cdot q;x)}\, e^{i\Theta(q;y)}\, e^{-2i\Omega(x,y)}\, f(x+y) g(x+y), \end{aligned}$$

onde escrevemos $\triangle^\Theta f = \triangle^\Theta f^{(1)} \otimes \triangle^\Theta f^{(2)}$. O homomorfismo é estabelecido depois de recorrermos à expressão (III.12) para $-\Omega(x,y)$ em termos de Θ. Observe que, se não permitirmos a interpretação de que Θ *sente* a ação de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, os dois axiomas acima (pelo menos) não seriam satisfeitos.

A candidata para a coinvolução em L^∞_Θ vem da relação de dualidade

$$\kappa^\Theta(\omega^\Omega_{fg})(x) = \langle \kappa^\Omega(L_\Omega(-x)), \omega^\Omega_{fg}\rangle = e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\omega^\Omega_{fg}(-x). \qquad \text{(III.51)}$$

Ela satisfaz os primeiros três axiomas de coinvolução sem problemas, incluindo a condição de ser um anti-isomorfismo, a qual κ^Ω não satisfaz. O problema está justamente no axioma do anti-coautomorfismo. Este é exatamente o problema dual àquele encontrado em $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, e sua solução será dada dualizando-se a solução daquele problema, isto é, dualizando o axioma (III.30). Lembramos que (III.25) pode ser escrito como $\kappa^\Omega \circ m = m \circ (\kappa^\Omega \otimes \kappa^\Omega) \circ \sigma$, onde m denota o produto em $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$. Adaptando esta expressão para o axioma (III.30) e dualizando-o, isto é, transpondo a ordem das operações e trocando estas por suas duais, levando em conta o efeito (III.20) da dualidade[2] sobre Θ, e transpondo $x \leftrightarrow y$, obtemos

$$\begin{aligned}[\triangle^\Theta \circ \kappa^\Theta f](x,y) &= \qquad \text{(III.52)}\\ &= e^{-i[\Theta(q;y)-\Theta(q;x)+\Theta(y\cdot q;x)-\Theta(x^{-1}\cdot q;y)]}[\sigma \circ (\kappa^\Theta \otimes \kappa^\Theta) \circ \triangle^\Theta f](x,y)\end{aligned}$$

como um novo axioma no lugar de anti-coautomorfismo. Ele será chamado axioma de *anti-coautomorfismo projetivo*. Se tomarmos o devido cuidado com o produto das funções complexas $e^{i\Theta}$ no seu lado direito, a operação dada em (III.51) é prontamente verificada satisfazer esse novo axioma. Após esta mudança, κ^Θ deve ser chamada de *coinvolução coprojectiva.*

Finalmente, o traço φ_a de $\mathbb{K}^a(H_3)$ é projetado no traço n.f.s.

$$\varphi_a(f) = \int_{H_3} dx d\alpha\, f(x,\alpha) \mapsto \varphi^\Theta(f) = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, e^{-i\Theta(q;-x)} f(x), \qquad \text{(III.53)}$$

onde $f \in L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)^+$. Se esta projeção for interpretada como sendo proveniente da projeção (III.46) de $f \in L^\infty(H_3)$ para $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$, fica evidente que a projeção de φ_a em φ^Θ só é possível pela compaticidade do grupo central $\mathbb{T}$. Salientamos que este fato também é observado em prequantização [TuWi].

[2]Observe que pelas propriedades de Θ também segue que $(e^{i\Theta(x^{-1}\cdot q;y)})^* = e^{i\Theta(x\cdot q;-y)}$.

O traço (III.53) é Haar, já que ele satisfaz o axioma (I.26), por exemplo, como segue: o lado esquerdo desse axioma, pelas expressões para φ^Θ, ^{o} e $\star$, resulta em

$$\begin{aligned}(id\otimes\varphi^\Theta)[(\mathbf{1}\otimes g^o)\star\triangle^\Theta f](x) &= \int_{\mathbb{R}^2} dy\, e^{-i\Theta(q;-y)}\, e^{i\Theta(q;y)} g^o(y)\triangle^\Theta f(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dy\,\triangle^\Theta f(x,y)\overline{g(y)},\end{aligned}$$

enquanto que o lado direito do mesmo fica

$$\begin{aligned}\kappa^\Theta\{(id\otimes\varphi^\Theta)[\triangle^\Theta g^o\star(\mathbf{1}\otimes f)]\}(x) &= e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\triangle^\Theta g^{o(1)}(-x)\varphi^\Theta[\triangle^\Theta g^{o(2)}\star f]\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dz\,\overline{\triangle^\Theta g(-x,z)}f(z).\end{aligned}$$

Verificamos que os dois lados são iguais quando substituímos a expressão para o coproduto $\triangle^\Theta$ e fazemos a troca de variável $y=z-x$ na última integral. O axioma (I.25) segue similarmente, enquanto que o (I.27) é trivial, pois σ^{φ^Ω} reduz-se à identidade.

A álgebra obtida até aqui será chamada de *álgebra de Kac projetiva abeliana* de $\mathbb{R}^2$ e será denotada por $\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$. Ela está construída sobre $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$ e sua estrutura, além da norma L^∞ usual, é resumida nas seguintes propriedades:

$$f^o(x) = e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\,\overline{f(x)}; \tag{III.54a}$$

$$(f\star g)(x) = e^{i\Theta(q;x)}\, f(x)g(x); \tag{III.54b}$$

$$\mathbf{1}(x) = e^{-i\Theta(q;x)}; \tag{III.54c}$$

$$\triangle^\Theta f(x,y) = e^{-i\Omega(x,y)}\, f(x+y); \tag{III.54d}$$

$$\kappa^\Theta f(x) = e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\, f(-x); \tag{III.54e}$$

$$\varphi^\Theta(f) = \int_{R^2} dx\, e^{-i\Theta(q;-x)}\, f(x). \tag{III.54f}$$

Comentários:

- Observamos que o nome *projetiva* não torna $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ e $\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$ objetos da mesma categoria, pois a coinvolução *projetiva* κ^Ω e a coinvolução *coprojetiva* κ^Θ satisfazem conjuntos distintos de axiomas;
- por dualidade, $\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$ não é simétrica, mas abeliana;
- podemos nos certificar se $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$ atua mesmo sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ pela construção GNS induzida pelo traço φ^Θ. Este traço define o produto escalar $(f|g)\equiv\varphi^\Theta(g^o\star f)$ sobre o ideal dos elementos f tais que $\varphi^\Theta(f^o\star f)<\infty$. Um cálculo

direto mostra que este produto é o usual $(f|g) = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, f(x)\overline{g(x)}$ em L^2. A inclusão de $f \in L^\infty_\Theta$ em L^2 por esta representação é denotada f_{φ^Θ}.

Esse produto escalar definido por φ^Θ também mostra que a involução ^{o} é representada pela simples conjugação complexa em L^2. Com isto, os operadores anti-unitários que implementam as involuções ^{o} e * em L^2 são os mesmos das álgebras de Kac de um grupo unimodular:

$$J^\Theta f(x) = \overline{f(x)} \tag{III.55a}$$

$$J^\Omega f(x) = \overline{f(-x)}. \tag{III.55b}$$

A partir deles escrevemos os adjuntos dos geradores das representações Fourier como, por exemplo,

$$W^{\Theta *} = (J^\Omega \otimes J^\Theta)W^\Theta(J^\Omega \otimes J^\Theta), \tag{III.56}$$

cuja ação em $L^2 \otimes L^2$ é

$$\begin{aligned}
[W^{\Theta *}F](x,y) &= (J^\Omega \otimes J^\Theta)W^\Theta(J^\Omega \otimes J^\Theta)F(x,y)\\
&= W^\Theta(J^\Omega \otimes J^\Theta)\overline{F(-x,y)}\\
&= e^{i\Theta(q;-x)}e^{-i\Omega(-x,y)}\,(J^\Omega \otimes J^\Theta)\overline{F(-x,y-x)}\\
&= e^{i\Theta(q;-x)}e^{i\Omega(x,y)}\,F(x,y-x).
\end{aligned}$$

Aproveitemos a oportunidade para mostrar que W^Θ é unitário:

$$\begin{aligned}
W^\Theta W^{\Theta *}F(x,y) &= e^{i\Theta(q;x)}e^{-i\Omega(x,y)}\,W^{\Theta *}F(x,y+x)\\
&= e^{i\Theta(q;x)}e^{i\Theta(x\cdot q;-x)}\,F(x,y)\\
&= F(x,y),
\end{aligned} \tag{III.57}$$

onde a ação de x sobre q na fase Θ da segunda linha se deve à ação anterior de x sobre y pela atuação de W^Θ, e a identidade resulta de uma das propriedades de Θ.

O operador J^Ω é a projeção correta de $\hat{J}$, mas J^Θ é somente a implementação de ^{o} como conjugação complexa, não coincidindo com a projeção de $[Jf](x,\alpha) = \overline{f(x,\alpha)}$. Este último é projetado, a partir de (III.46), no operador anti-unitário

$$J'^\Theta f(x) = e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\overline{f(x)}.$$

Em termos desta projeção, temos as implementações canônicas de κ^Ω e de κ^Θ em L^2 dadas por

$$\begin{aligned}\kappa^\Omega(L_\Omega(x)) &= J'^\Theta\, L_\Omega^\dagger(x)\, J'^\Theta \\ \kappa^\Theta(f) &= J^\Omega\, f^o\, J^\Omega.\end{aligned}$$

A primeira segue da comparação entre as duas aplicações abaixo:

$$\begin{aligned}[J'^\Theta L_\Omega(-z) J'^\Theta g](x) &= e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]} L_\Omega(-z) J'^\Theta \overline{g(x)} \\ &= e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\, e^{i\Omega(-z,x)}\, J'^\Theta \overline{g(x+z)} \\ &= e^{-i[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\, e^{i\Omega(-z,x)}\, e^{i[\Theta(q;x+z)-\Theta(q;-x-z)]}\, g(x+z); \\ \kappa^\Omega(L_\Omega(z))g(x) &= e^{i[\Theta(q;z)-\Theta(q;-z)]}\, [L_\Omega(-z)g](x) \\ &= e^{i[\Theta(q;z)-\Theta(q;-z)]}\, e^{i\Omega(-z,x)}\, g(x+z).\end{aligned}$$

Igualando estas duas aplicações obtemos a relação

$$e^{i[\Theta(q;x)-\Theta(q;x+z)+\Theta(q;z)]} = e^{i[\Theta(q;-x)-\Theta(q;-x-z)+\Theta(q;-z)]},$$

a qual resulta ser uma identidade ao abrirmos $0 = \Omega(x,z) - \Omega(-x,-z)$ em termos das cocadeias Θ, usando (III.12) e (III.14). O fato de κ^Ω ser implementada por $J^{\Theta'}$, e não por J^Θ, pode ser explicado se lembrarmos que: 1) diferentemente de κ^Θ, κ^Ω não é um anti-automorfismo linear, mas um projetivo; 2) as involuções, contidas nos operadores J, estão intimamente relacionadas ao produto e não ao coproduto da álgebra (veja (I.2b)). A implementação de κ^Θ segue analogamente, pela estrutura de $\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$.

Com respeito à implementação canônica de $\triangle^\Theta$ e de $\triangle^\Omega$, verifica-se facilmente que W^Θ e W^Ω, respectivamente, dão conta do recado. Lembrando a ação de L^∞_Θ sobre L^2 pelo produto $\star$, com as expressões de W^Θ e de seu adjunto, após alguns cancelamentos obtemos, de (I.29),

$$[W^\Theta(\mathbf{1}\otimes f)W^{\Theta *}F](x,y) = e^{i\Theta(q;x+y)} f(x+y)F(x,y).$$

Por outro lado, o coproduto (III.54d) fornece

$$[\triangle^\Theta(f)F](x,y) = e^{-i[\Omega(x,y)+\Theta(y\cdot q;x)+\Theta(q;y)]} f(x+y)F(x,y).$$

Pela expressão de Ω como a derivada de cohomologia de Θ, chegamos à igualdade dos lados esquerdos, ou seja,

$$\triangle^\Theta(f) = W^\Theta(\mathbf{1}\otimes f)W^{\Theta *}. \tag{III.58}$$

Esta implementação não é única, pois se tomarmos uma parte de W^Θ através de $W^\Theta F(x,y) = e^{i\Theta(q;x)} V^\Theta F(x,y)$, a qual atua por $V^\Theta F(x,y) = e^{-i\Omega(x,y)} F(x, y+x)$, (III.58) será também satisfeita por V^Θ. A despeito disto, W^Θ é o único operador que gera a representação Fourier λ^Ω e, na terminologia das álgebras de Kac, ele é o operador fundamental da álgebra de Kac projetiva $\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$. Isto significa que só W^Θ satisfaz a relação pentagonal, o que é facilmente verificado por cálculo direto. Usando a notação $id \otimes W^\Theta = W^\Theta_{23}$, etc., de (III.49) temos

$$\begin{aligned} W^\Theta_{12} F(x,y,z) &= e^{i[\Theta(q;x) - \Omega(x,y)]} F(x, y+x, z) \\ W^\Theta_{13} F(x,y,z) &= e^{i[\Theta(q;x) - \Omega(x,z)]} F(x, y, z+x) \\ W^\Theta_{23} F(x,y,z) &= e^{i[\Theta(q;y) - \Omega(y,z)]} F(x, y, z+y). \end{aligned}$$

O lado esquerdo da relação pentagonal resulta, então, em

$$\begin{aligned} &W^\Theta_{23} W^\Theta_{13} W^\Theta_{12} F(x,y,z) = \\ &e^{i[\Theta(q;y) - \Omega(y,z) + \Theta(y \cdot q;x) - \Omega(x,z+y) + \Theta(q;x) - \Omega(x,y)]} F(x, y+x, z+y+x), \end{aligned} \tag{III.59}$$

onde a ação de y na fase Θ de W^Θ_{13} se deve ao fato deste gerador atuar sobre z logo após W^Θ_{23}. O lado direito, por outro lado, fornece

$$W^\Theta_{12} W^\Theta_{23} F(x,y,z) = e^{i[\Theta(q;x) - \Omega(x,y) + \Theta(q;x+y) - \Omega(x+y,z)]} F(x, y+x, z+y+x), \tag{III.60}$$

cuja ação em F é igual à do lado esquerdo, resultando assim a relação pentagonal.

Para mostrar a implementação de $\triangle^\Omega$ por W^Ω, determinamos primeiro $W^\Omega = \widehat{W^\Theta} = \sigma \circ W^{\Theta *} \circ \sigma$ e $W^{\Omega *} = \sigma \circ W^\Theta \circ \sigma$,

$$W^\Omega F(x,y) = e^{i\Omega(y,x)} e^{i\Theta(q;-y)} F(x-y, y) \tag{III.61a}$$

$$W^{\Omega *} F(x,y) = e^{-i\Omega(y,x)} e^{i\Theta(q;y)} F(x+y, y). \tag{III.61b}$$

Tendo em mente que a atuação de W^Ω sobre (x,y) se dá como se este fosse $W^\Omega \sim L_\Omega(y) \otimes 1^o$, enquanto que $W^{\Omega *} \sim L^\dagger_\Omega(y) \otimes 1$, após alguns cancelamentos na primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned} [W^\Omega (I \otimes L_\Omega(z)) W^{\Omega *} F](x,y) &= e^{i[\Omega(z,x) + \Theta(q;-y) + \Theta(y^{-1} \cdot q; y-z)]} F(x-z, y-z), \\ \triangle^\Omega L_\Omega(z) F(x,y) &= e^{i[\Theta(q;-z) + \Omega(z,x) + \Omega(z,y)]} F(x-z, y-z), \end{aligned}$$

as quais reconhecemos serem iguais se recordarmos que $\Omega(z,y) = \Omega(y-z,-y)$. Diferentemente do que acontece com o caso dual anterior, a parte de W^Ω definida pela expressão $V^\Omega F(x,y) = e^{-i\Omega(x,y)}F(x-y,y)$ não implementa $\triangle^\Omega$.

Para finalmente estabelecer uma dualidade projetiva, partimos agora para a caracterização do predual de L^∞_Θ e de sua representação. Antes, porém, é necessário chamar a atenção para um fato que ocorre exclusivamente nas álgebras projetivas. O pareamento de dualidade $\langle , \rangle$, usado até aqui para conectar $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ e seu predual $A^\Theta(\mathbb{R}^2)$, envolve implicitamente a conjugação complexa (III.20) sobre os fatores de fase, pois as funções da álgebra de Fourier projetiva são definidas em (III.42) pelo pareamento com $L^\dagger_\Omega(x)$ e não com $L_\Omega(x)$. O resultado disto é que os fatores de fase $e^{i\Theta(q;x)}$ na estrutura de $A^\Theta(\mathbb{R}^2)$ aparecem conjugados. Este fato é corroborado pelo processo de dualização que leva o axioma (III.30) no axioma (III.52), o qual envolve não só a transposição das operações e argumentos, mas também a conjugação complexa dos fatores de fase. Diferentemente deste pareamento de dualidade envolvendo $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, a impossibilidade de se explicitar os geradores de $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$ nos obriga a colocar funções genéricas g desta álgebra no pareamento de dualidade entre L^∞_Θ e seu predual, pareamento este que é dado usualmente por $\langle g, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, g(x)f(x)$. Para obtermos de fato uma dualidade, que nos leve de volta à estrutura de partida $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, devemos considerar, além desse pareamento, a conjugação dos fatores de fase. Feitas essas considerações, lembrando sempre que os fatores de fase envolvendo Θ são conjugados de acordo com (III.20), enquanto que os que envolvem Ω são conjugados normalmente, começamos a caracterização do predual $L^\infty_{\Theta *}$ pela introdução de suas funções representativas,

$$\begin{aligned}
\langle g, \omega^\Theta_{hf}\rangle &= (g\star h|f) = \int dx\, g(x)\, e^{i\Theta(q;-x)}h(x)\overline{f(x)}, \qquad \forall g\in L^\infty_\Theta,\ h,f\in L^2 \\
\therefore\ \ \omega^\Theta_{hf}(x) &= e^{i\Theta(q;-x)}h(x)\overline{f(x)} = (h\star f^\circ)(x). \qquad \text{(III.62)}
\end{aligned}$$

Quando não houver perigo de confundir a notação, estas funções também serão denotadas por f, g, h, etc. O produto $\circledast$ neste predual é dado, como usualmente, pelo coproduto $\triangle^\Theta$ através de

$$\langle g, f\circledast h\rangle = \langle \triangle^\Theta g, f\otimes h\rangle = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} dx\, dy\, e^{i\Omega(x,y)}\, g(x+y)f(x)h(y),$$

de onde constatamos que se trata da convolução torcida (III.38). Analogamente, a involução * vem de

$$\langle g, f^* \rangle = \overline{\langle \kappa^\Theta(g^o), f \rangle} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, g(x) \overline{f(-x)},$$

e coincide com a involução de L^1. A essa altura já podemos inferir que o predual que estamos procurando é a álgebra $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$. Isto é confirmado quando lembramos da desigualdade de Hölder [ChMoBl] para espaços L^p, $p = 1, 2$, a qual implica que, se $h, f \in L^2$, então o módulo do seu produto é uma função integrável, ou seja, está em L^1. Aplicando este resultado para as funções ω^Θ_{hf} dadas em (III.62), concluímos que elas são L^1. Além disso, o seu produto e involução as caracterizam como sendo funções $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$.

Supondo válida a dualidade entre as álgebras que estamos considerando, a representação dual da representação Fourier λ^Ω deve ser gerada, então, por W^Ω, o dual de W^Θ. Este operador já foi explicitado em (III.61a). A correspondente representação de $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$ que ele gera é denotada por λ^Θ e segue de

$$(g|\lambda^\Theta(\omega^\Theta_{hf}) \star l) = (g \otimes f | W^\Omega(l \otimes h)).$$

Lembrando que $\omega^\Theta_{hf} = h \circledast \check{f} \in L^1_\Omega$, obtemos da identidade acima que λ^Θ é dada por

$$\lambda^\Theta(\omega^\Theta) = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, \omega^\Theta(x)\, L_\Omega(x). \tag{III.63}$$

Seu domínio, como operador sobre um espaço de Hilbert, fica restrito a $L^\infty_\Theta \cap L^2(\mathbb{R}^2)$, por herança do domínio da representação λ de $L^1(H_3)$. Observe que λ^Θ não é dada por $\lambda^\Theta(\omega^\Theta) f_{\varphi^\Theta} = [(\omega^\Theta \circ \kappa^\Theta \otimes id)(\triangle^\Theta)(f)]_{\varphi^\Theta}$, provavelmente porque κ^Θ não é um anti-coautomorfismo.

A fórmula (III.63) é exatamente a expressão (III.32) para um elemento genérico de $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, o que nos habilita a concluir, de (III.37) e (III.35), que essa fórmula é realmente uma representação linear e involutiva de $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$ na álgebra de von Neumann $\mathcal{M}^\Omega(\mathbb{R}^2)$. Após essas identificações do predual e de sua representação Fourier, é desnecessário mostrar que o produto $\star$ e a involução coprojetiva κ^Θ são mapeados por dualidade, respectivamente, no coproduto $\triangle^\Omega$ e na coinvolução projetiva κ^Ω. Além de tudo isso, pelo fato de ser o único operador que implementa o coproduto $\triangle^\Omega$ e gera λ^Θ, o operador fundamental W^Ω também satisfaz a relação pentagonal. Este último fato confirma a existência de uma dualidade entre as álgebras de Kac projetivas $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ e

$\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$. Pela associação das álgebras de Kac projetivas simétrica e abeliana ao grupo abeliano $\mathbb{R}^2$, podemos dizer que a dualidade Kac projetiva fornece uma *dualidade Fourier projetiva* para este grupo, conforme o diagrama da figura III.1.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2) \arrow[dr, "*"] & \\
L^1_\Omega(\mathbb{R}^2) \arrow[ur, "\lambda^\Theta"] & & A^\Theta(\mathbb{R}^2) \arrow[dl, "\lambda^\Omega = id"] \\
 & \mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2) \arrow[ul, "*"] &
\end{tikzcd}$$

Figura III.1: Dualidade Fourier projetiva para $\mathbb{R}^2$ em termos da respectiva dualidade Kac projetiva ($*$ denota predualidade).

Como subproduto do fato de que a relação pentagonal, a qual pode ser considerada como *símbolo de dualidade* [BaSk], ser satifeita tanto por W^Θ como por W^Ω, obtemos dela que os operadores V^Θ e V^Ω, oriundos de

$$W^\Theta F(x,y) = e^{i\Theta(q;x)}\, V^\Theta F(x,y), \tag{III.64a}$$

$$W^\Omega F(x,y) = e^{i\Theta(q;-y)}\, V^\Omega F(x,y), \tag{III.64b}$$

satisfazem, respectivamente, as seguintes versões *projetivas* da relação pentagonal:

$$[V^\Theta_{23} V^\Theta_{13} V^\Theta_{12} F](x,y,z) = e^{-i\Omega(x,y)}\, [V^\Theta_{12} V^\Theta_{23} F](x,y,z), \tag{III.65a}$$

$$[V^\Omega_{23} V^\Omega_{13} V^\Omega_{12} F](x,y,z) = e^{-i\Omega(y,z)}\, [V^\Omega_{12} V^\Omega_{23} F](x,y,z). \tag{III.65b}$$

Por exemplo, a projeção (III.65a) resulta da relação pentagonal através de (III.64a) da seguinte forma:

$$W^\Theta_{23} W^\Theta_{13} W^\Theta_{12} F(x,y,z) = e^{i[2\Theta(q;-z)+\Theta(z^{-1}\cdot q;z-y)]}\, V^\Theta_{23} V^\Theta_{13} V^\Theta_{12} F(x,y,z)$$

$$W^\Theta_{12} W^\Theta_{23} F(x,y,z) = e^{i[\Theta(q;-y)+\Theta(q;-z)]}\, V^\Theta_{12} V^\Theta_{23} F(x,y,z).$$

As fases resultam em $\Omega(z,y)$ se usarmos (III.12) para abrir $-\Omega(z-y,-z)$ em termos das Θs.

Com respeito à dualidade Kac projetiva, é necessário ter sempre em mente que as álgebras projetivas envolvidas não são objetos de uma mesma categoria, se a categoria em questão for definida pela simples adaptação da definição de categoria Kac dada na ref. [EnSc2]. Isto se dá porque as coinvoluções nas álgebras de Kac projetivas satisfazem conjuntos diferentes de axiomas. Estas álgebras seriam objetos de uma mesma categoria se fosse possível definir uma categoria mais ampla, cujos objetos fossem similares às álgebras de Kac, diferindo destas apenas pelo fato de as operações análogas às coinvoluções serem mapeamentos lineares κ' mais gerais, satisfazendo apenas os axiomas

$$\begin{aligned} \kappa' \circ * &= * \circ \kappa' \\ \kappa' \circ \kappa' &= id. \end{aligned}$$

Infelizmente, uma tal categoria não estaria bem definida, pois as propriedades de κ^{Ω} ser um anti-coautomorfismo e de κ^{Θ} ser um anti-automorfismo parece ter sua importância na dualidade Kac projetiva e, portanto, não podem ser excluídas. Por exemplo, a citada propriedade de κ^{Ω} parece ser a responsável pela expressão (III.47) para λ^{Ω}, o que não acontece com κ^{Θ} e $\triangle^{\Theta}$.

III.3.2 Decomposição Segundo o Dual Projetivo

Esta subseção é dedicada à decomposição da dualidade projetiva obtida na seção anterior em álgebras irredutíveis segundo o dual projetivo de $\mathbb{R}^2$. Na seção seguinte aplicaremos os resultados obtidos aqui no estabelecimento de uma relação entre o formalismo de Weyl-Wigner e a dualidade projetiva deste mesmo grupo. Começamos pela decomposição da álgebra de Kac projetiva $\mathbb{K}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$, de acordo com a decomposição das representações regulares projetivas à esquerda L_{Ω} em termos de representações projetivas irredutíveis. Estas últimas podem ser obtidas restringindo-se a $\mathbb{R}^2$ as representações irredutíveis lineares de H_3 apresentadas em (III.6). O resultado é

$$[S_\nu(x)\xi](q) = e^{-i\nu\Theta(q;-x)}\xi(q - x_1), \qquad \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}. \tag{III.66}$$

Por cálculo direto, usando a relação entre as cocadeias Θ e Ω, verifica-se facilmente que estes operadores são representações projetivas, pois satisfazem

$$S_\nu(x)S_\nu(y) = e^{i\nu\Omega(x,y)}\, S_\nu(x+y), \tag{III.67}$$

enquanto que os membros da outra série de representações irredutíveis de H_3, (III.6b), não se multiplicam projetivamente. Pelo teorema de Stone-von Neumann e pelo método de Bargmann, concluímos que S_ν são as únicas representações irredutíveis projetivas do grupo do plano. Como (III.66) são também inequivalentes por construção, o dual Ω-projetivo de $\mathbb{R}^2$, ou seja, o espaço das classes de representações Ω-*projetivas* irredutíveis, aqui denotado $\widehat{\mathbb{R}^2_\Omega}$, é exatamente o suporte da medida de Plancherel de H_3, ou seja,

$$\widehat{\mathbb{R}^2_\Omega} = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

A álgebra de von Neumann gerada por esses operadores limitados em $L^2(\mathbb{R})$ será denotada $\mathcal{M}_\nu^\Omega(\mathbb{R}^2)$. Sendo os operadores (III.66) provenientes de representações do grupo de Heisenberg, que é de tipo I, a álgebra $\mathcal{M}_\nu^\Omega(\mathbb{R}^2)$ também é de tipo I. No que segue, procederemos segundo a linha adotada na decomposição da álgebra de Kac $\mathbb{K}^s(G)$ realizada na seção II.3. A tarefa neste caso é mais simples, pois o peso de Haar envolvido é um traço. Como mencionado naquela seção, a decomposição de álgebras de von Neumann geradas por representações de grupos unimodulares e de tipo I está estabelecida na ref. [Dix2]. O único aspecto novo aqui é que as representações envolvidas são projetivas.

Dando prosseguimento, supomos a existência de uma medida positiva $\mu(\nu)$ em $\widehat{\mathbb{R}^2_\Omega}$ tal que valha a seguinte igualdade:

$$L_\Omega = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}}^{\oplus} \mu(\nu)\, S_\nu. \tag{III.68}$$

Note que esta medida não é a medida de Plancherel associada à medida de Haar em $\mathbb{R}^2$, nem à medida de Haar em H_3, como veremos logo abaixo. A validade da decomposição de L_Ω em termos de S_ν está baseada, além de ambas serem operadores projetivos e S_ν ser irredutível, no fato de que a representação (III.66) acima poder ser definida, em analogia com (II.20), por

$$[S_\nu(x) f_\nu](y) = e^{i\nu\Omega(x,y)}\, f_\nu(y-x), \tag{III.69}$$

onde as funções $f_\nu \in H_\nu(\mathbb{R}^2) \sim L^2(\mathbb{R})$ são as constituintes projetivas das funções $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ segundo $f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}} \mu(\nu)\, f_\nu$, e são dadas por

$$f_\nu(x) = e^{\frac{i\nu}{2}x_1 x_2} \xi(x_1).$$

Substituindo em (III.69) esta decomposição do espaço de Hilbert, obtemos diretamente (III.66), com $q = y_1$. A decomposição (III.68) pode ser vista, então, como a soma de

(III.69) sobre o dual projetivo. Já que (III.68) faz sentido, podemos decompor também a respectiva representação de $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$ escrevendo

$$L_\Omega(f) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}}^{\oplus} \mu(\nu)\, S_\nu(f),$$

onde

$$S_\nu(f) \equiv \hat{f}_\nu = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, f(x)\, S_\nu(x). \tag{III.70}$$

Esta última fórmula deve ser encarada como a *transformada de Fourier projetiva* em $\mathbb{R}^2$, isto é, um mapeamento que associa o campo de operadores $\nu \mapsto \hat{f}_\nu$ sobre $\widehat{\mathbb{R}^2_\Omega}$ a cada função L^1_Ω sobre $\mathbb{R}^2$.

Os operadores (III.70) atuam sobre $L^2(\mathbb{R})$, de acordo com (III.66), através de

$$[\hat{f}_\nu \xi](q) = \int_{\mathbb{R}} du\, K^\nu_f(q,u)\, \xi(u),$$

onde o núcleo K^ν_f é dado por

$$K^\nu_f(q,u) = \int_{\mathbb{R}} dv\, e^{-i\nu\Theta(q;(u-q,-v))}\, f(q-u,v).$$

Isto nos habilita a introduzir um traço sobre os operadores (III.70) a partir de [Gur]

$$\mathrm{Tr}_\nu(\hat{f}_\nu) \equiv \frac{1}{2\pi\nu}\int_{\mathbb{R}} dq\, K^\nu_f(q,q).$$

Depois de reconhecer a distribuição delta de Dirac sobre $\mathbb{R}$, a qual é dada por $\delta(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{iqv}$, o traço acima resulta ser

$$\mathrm{Tr}_\nu(\hat{f}_\nu) = f(0), \qquad \forall \nu \in \mathbb{Z}-\{0\}. \tag{III.71}$$

Por outro lado, segundo a ref. [Dix2], a decomposição do traço φ^Ω sobre $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ deve ser dada em termos de traços normais, fiéis e semifinitos φ^Ω_ν de acordo com

$$\varphi^\Omega(\hat{f}) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}} \mu(\nu)\, \varphi^\Omega_\nu(\hat{f}_\nu). \tag{III.72}$$

Se tomarmos $\varphi^\Omega_\nu = \mathrm{Tr}_\nu$, e lembrarmos que $\varphi^\Omega(\hat{f}) = f(0)$, concluímos de (III.71) que a medida μ precisa ser tal que $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}}\mu(\nu) = 1$. Como primeira aplicação da decomposição do traço φ^Ω, podemos estabelecer uma versão projetiva da fórmula de Plancherel. Esta é consequência de $\varphi^\Omega(\hat{f}^\dagger\hat{f}) = (f^* \circledast f)(0)$ e da decomposição (III.72),

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx\, |f(x)|^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}} \mu(\nu)\, \mathrm{Tr}_\nu[\hat{f}^\dagger_\nu \hat{f}_\nu], \tag{III.73}$$

a qual nos permite chamar μ de *medida de Plancherel projetiva* associada a medida de Haar em $\mathbb{R}^2$.

A recuperação da função L^1_Ω em (III.70), ou a transformada de Fourier projetiva inversa, é obtida pela decomposição de $f(x) = \varphi^\Omega[L^\dagger_\Omega(x)\hat{f}]$, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}} \mu(\nu)\,\mathrm{Tr}_\nu[S^\dagger_\nu(x)\hat{f}_\nu] \\ &\equiv \sum_{\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}} \mu(\nu)\, f_\nu(x). \end{aligned} \tag{III.74}$$

Mas, como $f_\nu(x) = \mathrm{Tr}_\nu[S^\dagger_\nu(x)\hat{f}_\nu] = f(x)$ para todo ν (veja (III.71)), a soma no dual é desnecessária, o que simplifica a expressão da transformada inversa para

$$f(x) = \mathrm{Tr}_\nu[S^\dagger_\nu(x)\hat{f}_\nu], \qquad \forall\nu\in\mathbb{Z}-\{0\}. \tag{III.75}$$

As álgebras de von Neumann $\mathcal{M}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2)$, com o produto projetivo de seus geradores $S_\nu(x)$, $x\in\mathbb{R}^2$, juntamente com os traços Tr_ν e a estrutura Kac projetiva herdada de $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, tornam-se álgebras de Kac projetivas. De fato, pela propriedade (III.71), os traços Tr_ν possuem as mesmas características do traço φ^Ω e, portanto, são também traços de Haar. Essas álgebras serão denotadas $\mathbb{K}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2)$, e sua estrutura comum é resumida aqui em:

$$S_\nu(x)S_\nu(y) = e^{i\nu\Omega(x,y)}\,S_\nu(x+y); \tag{III.76a}$$

$$\mathbf{1} = S_\nu(0); \tag{III.76b}$$

$$\triangle^\nu S_\nu(x) = e^{i\nu\Theta(q;-x)}\,S_\nu(x)\otimes S_\nu(x); \tag{III.76c}$$

$$\kappa^\nu S_\nu(x) = e^{i\nu[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\,S^\dagger_\nu(x); \tag{III.76d}$$

$$\mathrm{Tr}_\nu(a_\nu) = \begin{cases} \|f\|_2^2 & \text{se } a_\nu = \hat{f}^\dagger_\nu\cdot\hat{f}_\nu \\ +\infty & \text{de outro modo} \end{cases} \qquad a_\nu\in\mathcal{M}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2)^+. \tag{III.76e}$$

Como vemos, a estrutura desta álgebra é exatamente a mesma de $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, o que torna desnecessário verificar os axiomas novamente. Observe que sua representação GNS, induzida por Tr_ν, resulta no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$, enquanto que seus elementos atuam sobre $L^2(\mathbb{R})$. Isto é devido ao fato de os operadores

$$\hat{f}_\nu = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, f(x)\,S_\nu(x) \tag{III.77}$$

serem escritos em termos de funções $f\in L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$, enquanto que os geradores S_ν atuam sobre funções de onda no espaço de configuração $\mathbb{R}$.

A forma operatorial dos geradores dessa álgebra é obtida de (III.6a), e pode ser reescrita em termos dos operadores limitados (de Weyl) $S_\nu(x_1,0) \equiv V(x_1) = e^{-i\nu x_1 \hat{p}}$, $S_\nu(0,x_2) \equiv U(x_2) = e^{-i\nu x_2 \hat{q}}$ como

$$S_\nu(x) = e^{i\frac{\nu}{2}x_1 x_2}\, U(x_2)V(x_1). \tag{III.78}$$

Em termos destes, o produto (III.76a) se traduz na relação de comutação de Weyl

$$U(x_2)V(x_1) = e^{-i\nu x_1 x_2}\, V(x_1)U(x_2), \tag{III.79}$$

cuja versão infinitesimal é a relação de comutação de Heisenberg

$$[\hat{q},\hat{p}] = i/\nu. \tag{III.80}$$

Destas relações bem familiares na Física, podemos desde já inferir que a Mecânica Quântica está relacionada a um valor fixo de ν, mais precisamente, a $\nu = \hbar^{-1}$.

Comparando a decomposição feita aqui com a do capítulo anterior, constata-se que há uma diferença crucial entre as duas, devida principalmente às decomposições do peso de Haar φ_s, no caso linear, e do traço φ^Ω, no caso projetivo. No primeiro caso, o peso de Haar, que pode inclusive ser um traço se o grupo for unimodular, não satisfaz (III.71) e, consequentemente, não é decomposto em pesos de Haar, como acontece com φ^Ω. Isto implica, naquele caso, que a álgebra de Kac se decompõe em álgebras de *Hopf-von Neumann* irredutíveis, e não em álgebras de *Kac projetivas* irredutíveis, como se decompõe $\mathbb{K}^\Omega(\mathbb{R}^2)$.

O predual de $\mathcal{M}_\nu^\Omega(\mathbb{R}^2)$ também será obtido por pareamentos de dualidade. Começamos pelos elementos desse predual, que são as funções $\hat{\omega}^\nu_{\xi\chi}$ obtidas a partir de

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^\nu_{\xi\chi}(x) &\equiv \langle S^\dagger_\nu(x), \hat{\omega}^\nu_{\xi\chi}\rangle = (S^\dagger_\nu(x)\xi|\chi)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-i\nu\Theta(q;x)}\, \xi(q+x_1)\overline{\chi(q)}. \end{aligned} \tag{III.81}$$

Também por pareamentos de dualidade obtém-se que, estruturalmente, a involução é a conjugação ^{o} e o produto, o produto $\star$, operações já introduzidas em (III.45) e (III.43), respectivamente. A única diferença entre as operações desse predual e aquelas apresentadas anteriormente é a presença do rótulo ν nos fatores de fase. Explicitamente, as referidas operações são dadas por

$$\begin{aligned} f^o_\nu(x) &= e^{-i\nu[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]}\, \overline{f_\nu(x)}, \\ (f_\nu \star g_\nu)(x) &= e^{i\nu\Theta(q;x)}\, f_\nu(x)g_\nu(x), \end{aligned}$$

onde escrevemos as funções (III.81) como f_ν, g_ν, etc., para enfatizar sua dependência em ν. De sua definição, e pelo mesmo procedimento utilizado anteriormente, segue que estas funções também são essencialmente limitadas, isto é, pertencem a $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2)$ para cada ν. Para ν fixo, o predual $\mathcal{M}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2)_*$ será denotado $A^\Theta_\nu(\mathbb{R}^2)$, e pode ser interpretado como uma componente da álgebra de Fourier projetiva $A^\Theta(\mathbb{R}^2)$. No que diz respeito à representação Fourier desta álgebra, esta deve ser dada pela componente ν da representação Fourier λ^Ω, a qual será denotada $\hat{\sigma}_\nu$,

$$[\hat{\sigma}_\nu(\hat{\omega}^\nu)f](q) = [(\hat{\omega}^\nu \circ \kappa^\nu \otimes id)\Delta^\nu \hat{f}_\nu]_{\mathrm{Tr}_\nu}, \; f = (\hat{f}_\nu)_{\mathrm{Tr}_\nu} \in L^1_\Omega \cap L^2(\mathbb{R}^2). \tag{III.82}$$

Pelos mesmos procedimentos que nos levaram de (III.47) à (III.48), e lembrando sempre que $A^\Theta(\mathbb{R}^2)$ atua sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ por $\star$, o resultado que se obtém é $\hat{\sigma}_\nu = id$. Isto deve ser interpretado como a inclusão de cada $A^\Theta_\nu(\mathbb{R}^2)$ dentro da álgebra de von Neumann L^∞_Θ. O gerador desta representação pode ser obtido de

$$(g|\hat{\sigma}_\nu(\hat{\omega}^\nu_{\xi\chi}) \star f)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (g \otimes \chi | W^\Theta_\nu (f \otimes \xi))_{L^2(\mathbb{R}^2)\otimes L^2(\mathbb{R})}, \tag{III.83}$$

e resulta ser o operador em $A^\Theta_\nu(\mathbb{R}^2) \otimes \mathcal{M}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$W^\Theta_\nu(f,\xi)(x,q) = e^{i\nu[\Theta(q';x)-\Theta(q;x)]} f(x)\xi(q+x_1), \qquad q \neq q'.$$

Os fatores de fase nesta ação de W^Θ_ν provém, respectivamente, da ação por $\star$ sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ (q' vem do produto (III.54b)), e da ação de $S^\dagger_\nu(x)$ sobre $L^2(\mathbb{R})$. Pela expressão do operador fundamental W^Θ em (III.49), e considerando que a ação $L^\dagger_\Omega(x)$ em y é decomposta irredutivelmente em ações por $S^\dagger_\nu(x)$ em q, verificamos que W^Θ_ν se comporta como $W^\Theta_\nu \sim 1 \otimes S^\dagger_\nu(x)$ e, portanto, é a genuína decomposição de W^Θ como gerador da representação Fourier. Note-se que, se mantivermos a interpretação das ações sobre os argumentos das fases Θ, obtemos que W^Θ_ν é unitário, sendo seu adjunto dado por

$$U^{\nu *}(f,\xi)(x,q) = e^{i\nu[\Theta(q';-x)-\Theta(q;-x)]} f(x)\xi(q-x_1), \qquad q \neq q'. \tag{III.84}$$

Por pareamentos de dualidade é possível incrementar A^Θ_ν com um coproduto e uma coinvolução coprojetiva, ambos decomposições das operações de $\mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2)$, e que devem ser dados por

$$\Delta_\nu f_\nu(x,y) = e^{-i\nu\Omega(x,y)} f_\nu(x+y), \tag{III.85}$$

$$\kappa_\nu f_\nu(x) = e^{-i\nu[\Theta(q;x)-\Theta(q;-x)]} f_\nu(-x). \tag{III.86}$$

Da mesma forma que W^Θ, o gerador W_ν^Θ implementa o coproduto acima e, com isso, satisfaz a relação pentagonal.

O predual de L^∞_Θ já foi determinado na seção III.3.1, é a álgebra não abeliana $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$. Nos concentramos agora na decomposição de sua representação Fourier λ^Θ. Como esta representação, exceto por uma restrição em seu domínio, é a representação regular à esquerda linear de $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$, sua componente irredutível σ_ν deve ser dada por (III.70), com a restrição em seu domínio para $L^\infty_\Theta(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R})$, ou seja, deve ser dada por

$$\sigma_\nu(f) = \hat{f}_\nu = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, f(x)\, S_\nu(x). \tag{III.87}$$

É desnecessário dizer que, para cada $\nu \in \widehat{\mathbb{R}^2_\Omega}$, esta representação é fiel e involutiva, e que mapeia a convolução torcida no produto projetivo de operadores em $\mathbb{K}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2)$. O gerador de (III.87) é facilmente obtido pela fórmula análoga a (III.83), e resulta ser dado por

$$W_\nu^\Omega(\xi, f)(q, y) = e^{-i\nu[\Theta(q;-y)-\Theta(q';-y)]}\,\xi(q - y_1)f(y), \qquad q' \neq q.$$

Os mesmos argumentos que nos levaram a reconhecer W_ν^Θ como a decomposição de W^Θ, também nos levam a identificar W_ν^Ω como a decomposição irredutível do operador dual W^Ω, pois ele se comporta como $W_\nu^\Omega \sim S_\nu(y) \otimes 1^o$. Além disto, ele implementa o coproduto (III.76c) e, consequentemente, satisfaz a relação pentagonal. Estes fatos provam que as representações σ_ν são as legítimas componentes irredutíveis da representação Fourier λ^Θ.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}^\Omega_\nu(\mathbb{R}^2) \arrow[dr, "*"] & \\
L^1_\Omega(\mathbb{R}^2) \arrow[ur, "\sigma_\nu"] & & A^\Theta_\nu(\mathbb{R}^2) \arrow[dl, "\hat{\sigma}_\nu = id"] \\
& \mathbb{K}^\Theta(\mathbb{R}^2) \arrow[ul, "*"] &
\end{tikzcd}$$

Figura III.2: A decomposição da dualidade projetiva de $\mathbb{R}^2$ em irredutíveis resulta numa família de dualidades projetivas ($*$ denota predualidade).

Terminamos por aqui nossa descrição da decomposição da dualidade projetiva em irredutíveis, a qual está resumida na figura III.2. Partimos na próxima seção para a descrição da conexão desta decomposição com o formalismo de Weyl-Wigner.

III.4 Quantização de Weyl e Dualidade

De posse da decomposição da dualidade Fourier projetiva para o grupo $\mathbb{R}^2$, podemos agora descrever a correspondência de Weyl e o formalismo de Weyl-Wigner neste contexto. Isto se dá essencialmente pela identificação das fórmulas envolvidas naquele formalismo com as apresentadas na seção anterior. Começamos com a correspondência de Weyl. A expressão para a transformada de Fourier projetiva (III.70), a qual é formalmente igual à expressão (III.77) para os elementos das álgebras $\mathbb{K}^{\Omega}_{\nu}(\mathbb{R}^2)$, que por sua vez são dados também pelas componentes σ_ν da representação Fourier λ^{Θ}, lembra muito a fórmula de Weyl, que associa uma função no espaço de fase a um operador no espaço de configuração. Antes, porém, de realizarmos essa identificação, devemos observar que, no lugar do rótulo ν que aparece nessas fórmulas, a fórmula de Weyl [Weyl, IV, §14] apresenta a constante de Planck $\hbar$. Isto nos força a considerar, em primeiro lugar, uma mudança de escala no dual $\mathbb{Z}-\{0\}$ para $\hbar^{-1}\mathbb{Z}-\{0\}$, e depois, a escolha do valor fixo $\nu = 1$ para o rótulo. Com isto estamos selecionando *exatamente uma representação irredutível projetiva* de $\mathbb{R}^2$ e uma álgebra de Kac projetiva, a álgebra $\mathbb{K}^{\Omega}_{\hbar}(\mathbb{R}^2)$. Concluímos disto que a Mecânica Quântica se restringe a exatamente uma representação inequivalente, ou setor de superseleção [Lan], e toma parte na dualidade projetiva como uma componente irredutível (de medida nula). Neste contexto, a fórmula de Weyl

$$\hat{f}_\hbar = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, f(x)\, S_\hbar(x) \tag{III.88}$$

é uma representação irredutível particular de L^1_Ω na álgebra de operadores $\mathbb{K}^{\Omega}_{\hbar}(\mathbb{R}^2)$. A correspondência fica completa ao escrevermos f em termos desse operador. Isto é possível graças à fórmula (III.75), que recupera f a partir de (III.88) através de

$$f(x) = \mathrm{Tr}_\hbar[S^\dagger_\hbar(x)\hat{f}_\hbar]. \tag{III.89}$$

Além disso, é possível reescrever a fórmula de Weyl como uma combinação de operadores auto-adjuntos, ao invés de $S_\hbar(x)$, que são apenas unitários. Isto se concretiza ao introduzirmos operadores $\tilde{S}_\hbar(y)$ tais que os operadores projetivos $S_\hbar(x)$ sejam suas transformadas de Fourier:

$$S_\hbar(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} dy\, \overline{\chi_x(y)}\tilde{S}_\hbar(y), \tag{III.90}$$

onde $\chi_x(y) = e^{\frac{i}{\hbar}xy}$. Comparando $S_\hbar^\dagger(x)$ com $S_\hbar(-x)$, concluímos que $\tilde{S}_\hbar^\dagger = \tilde{S}_\hbar$. Ao substituirmos (III.90) em (III.88), devemos também substituir $f = f_\hbar \in L^1_\Omega$ por sua transformada $\tilde{f}_\hbar$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} dz\, \chi_x(z)\, \tilde{f}_\hbar(z),$$

de modo que as duas integrais adicionais sejam eliminadas pela relação de completeza

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx\, \chi_x(z)\overline{\chi_x(z')} = (2\pi\hbar)^2\delta(z-z')$$

para os caracteres χ_x. Com isto a fórmula de Weyl em termos de operadores auto-adjuntos resulta

$$\hat{f}_\hbar = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, \tilde{f}_\hbar(x)\, \tilde{S}_\hbar(x), \tag{III.91}$$

enquanto que a transformada de Fourier de (III.89) fornece de volta a função

$$\tilde{f}_\hbar(x) = \mathrm{Tr}_\hbar[\tilde{S}_\hbar(x)\hat{f}_\hbar]. \tag{III.92}$$

Pelo fato de $\tilde{S}_\hbar$ ser auto-adjunto, esta função é real. Ela é a *função distribuição* de Wigner associada ao operador $\hat{f}_\hbar$.

Uma função distribuição particular é a transformada de Fourier da função em $A_\hbar^\circleddash(\mathbb{R}^2)$ associada à função de onda ξ, a qual é dada por (III.81) com $\chi = \xi$ e $\nu = \hbar^{-1}$. Trocando variáveis na integral, aquela fórmula pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\omega^\hbar_{\xi\xi}(x) &= (\xi|S_\hbar(x)\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{\frac{i}{\hbar}qx_2}\, \xi(q+x_1/2)\overline{\xi(q-x_1/2)}.\end{aligned} \tag{III.93}$$

Sua transformada de Fourier resulta ser justamente a distribuição de Wigner associada ao operador densidade $|\xi\rangle\langle\xi|$ [HCSW],

$$W^\hbar_\xi(x) = [\mathcal{F}\omega^\hbar_{\xi\xi}](x) = \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-\frac{i}{\hbar}qx_1}\xi(x_2+q/2)\overline{\xi(x_2-q/2)}.$$

Note que a função em (III.93) coincide[3] com a função L^1_Ω correspondente ao operador $|\xi\rangle\langle\xi|$ que, segundo (III.89), é dada por

$$f^\xi(x) = \langle\xi|S_\hbar^\dagger(x)|\xi\rangle.$$

[3]Segundo a notação empregada aqui para o produto escalar L^2, sua relação com a notação de Dirac é $(\chi|S\xi) = \overline{\langle\chi|S|\xi\rangle}$.

As funções $\tilde{f}$ de Wigner, por dependerem de $\hbar$, são também chamadas de "quânticas". Por serem as transformadas de Fourier das $f \in L^1_\Omega$, elas multiplicam-se pelo produto torcido não-comutativo $\circ^\hbar$, a imagem Fourier da convolução torcida

$$(f \circledast_\hbar g)(x) = \mathrm{Tr}_\hbar[S^\dagger_\hbar(x)\hat{f}_\hbar \cdot \hat{g}_\hbar], \tag{III.94}$$

o qual é dado por

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}(f \circledast_\hbar g)](z) &= \langle \overline{\chi_z}, f \circledast_\hbar g\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} dx\, dy\, e^{\frac{i}{\hbar}\Omega(x,y)}\, \overline{\chi_z(x+y)} f(x) g(y) \\
&\equiv ([\mathcal{F}f] \circ^\hbar [\mathcal{F}g])(z).
\end{aligned} \tag{III.95}$$

A álgebra dessas funções essencialmente limitadas que satisfazem o produto torcido $\circ^\hbar$ pode ser chamada de *álgebra de Moyal* e será denotada aqui por $A^\Omega_\hbar(\mathbb{R}^2)$. A transformada de Fourier, a qual é um isomorfismo bem conhecido para as álgebras abelianas L^1 e L^∞ sobre o plano, por (III.95) torna-se também um isomorfismo entre $L^1_\Omega(\mathbb{R}^2)$ e $A^\Omega_\hbar(\mathbb{R}^2)$ [Foll, GrVa], o que permite identificar (e confundir) as álgebras não abelianas de funções integráveis e de funções essencialmente limitadas. Este isomorfismo se extende para $\mathbb{K}^\Omega_\hbar$ através de M^1_Ω, pois os geradores $S_\hbar(x)$ são mapeados (por (III.89)) nas densidades $\delta_x \in M^1_\Omega$ e, pela transformada de Fourier, nos caracteres $\phi_x \equiv \frac{1}{2\pi\hbar}\overline{\chi_x}$, os geradores da álgebra $A^\Omega_\hbar$. Os caracteres ϕ_x geram, de fato, esta álgebra, pois seus elementos são as transformadas de Fourier

$$\tilde{f}_\hbar(y) = \int_{\mathbb{R}^2} dx\; \phi_x(y)\, f(x) = [\mathcal{F}f](y). \tag{III.96}$$

O produto destes geradores, segundo (III.95), é dado por

$$(\phi_x \circ^\hbar \phi_y)(z) = e^{\frac{i}{\hbar}\Omega(x,y)}\, \phi_{x+y}(z), \tag{III.97}$$

o que confirma a existência de um isomorfismo entre as álgebras $\mathbb{K}^\Omega_\hbar$ e $A^\Omega_\hbar$. Extendendo este para a estrutura Kac, pela transformada de Fourier transpõe-se para $A^\Omega_\hbar$ o coproduto e a coinvolução de M^1_Ω (segundo (III.41)) através de

$$\begin{aligned}
[(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\Delta^\Omega(f)](x,y) &= \langle \overline{\chi_x}\otimes\overline{\chi_y}, \Delta^\Omega f\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^2} dz\, e^{\frac{i}{\hbar}\Theta(q;-z)}\, \overline{\chi_z(x+y)} f(z) \\
&\equiv [\Delta^\hbar \mathcal{F} f](x,y),
\end{aligned} \tag{III.98a}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\kappa^{\Omega}(f)(x) &= \langle \overline{\chi_x}, \kappa^{\Omega}(f)\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} dy\, e^{\frac{i}{\hbar}[\Theta(q;y)-\Theta(q;-y)]}\,\chi_x(y)f(y) \\
&\equiv \kappa^{\hbar}(\mathcal{F}f)(x). \qquad \text{(III.98b)}
\end{aligned}
$$

Além disto, a involução é mapeada na simples conjugação complexa e a unidade na função constante $\phi_0 = \frac{1}{2\pi\hbar}$. Por fim, o traço de Haar compatível com esta estrutura é dado por $\mathrm{Tr}^{\hbar}(\tilde{f}) = \tilde{f}(0)$. Resumindo, a estrutura Kac de $A^{\Omega}_{\hbar}(\mathbb{R}^2)$ em termos de seus geradores resulta em

$$
\begin{aligned}
\phi_x \circ^{\hbar} \phi_y &= e^{\frac{i}{\hbar}\Omega(x,y)}\,\phi_{x+y}; \qquad \text{(III.99a)} \\
\mathbf{1} = \phi_0 &= \frac{1}{2\pi\hbar}; \qquad \text{(III.99b)} \\
\triangle^{\hbar}\phi_x &= e^{\frac{i}{\hbar}\Theta(q;-x)}\,\phi_x \otimes \phi_x; \qquad \text{(III.99c)} \\
\kappa^{\hbar}\phi_x &= e^{\frac{i}{\hbar}[\Theta(q;-x)-\Theta(q;x)]}\,\overline{\phi_x}; \qquad \text{(III.99d)} \\
\mathrm{Tr}^{\hbar}(\phi_x) &= \delta_x. \qquad \text{(III.99e)}
\end{aligned}
$$

Do que foi mostrado nesta seção, constata-se que os operadores de Weyl $\hat{f}_{\hbar} \in \mathbb{K}^{\Omega}_{\hbar}$ e as distribuições de Wigner $\tilde{f}_{\hbar} \in A^{\Omega}_{\hbar}$ fazem parte da dualidade Fourier projetiva conforme mostra o diagrama da fig. III.3.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{K}^{\Omega}_{\hbar}(\mathbb{R}^2) \arrow[dr, "*"] & \\
A^{\Omega}_{\hbar}(\mathbb{R}^2) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{F}"] & L^1_{\Omega}(\mathbb{R}^2) \arrow[ur, "\sigma_{\hbar}"] & & A^{\Theta}_{\hbar}(\mathbb{R}^2) \arrow[dl, "\hat{\sigma}_{\hbar} = id"] \\
 & & \mathbb{K}^{\Theta}(\mathbb{R}^2) \arrow[ul, "*"] &
\end{tikzcd}
$$

Figura III.3: A correspondência de Weyl como parte de uma componente irredutível da dualidade projetiva para $\mathbb{R}^2$ ($*$ denota predualidade).

Comentários Finais

Com o objetivo de entender o papel da Análise Harmônica na quantização, exploramos a dualidade Fourier generalizada de grupos canônicos associados à alguns espaços de fases típicos. Para descrever aspectos cinemáticos da quantização em um espaço de fase qualquer, partimos da proposta de Isham, associando um grupo canônico à este espaço. Com isso é possível reobter o bem conhecido grupo de Heisenberg como o grupo canônico do espaço de fase euclidiano $\mathbb{R}^2$, e associar grupos do tipo $S \oslash N^*$ à espaços de fase do tipo $T^*(S/H)$. A dualidade Fourier mais simples, que envolve a conexão do grupo com seu dual unitário, é implementada em toda sua generalidade pelas álgebras de Kac, assim como foi apresentado no capítulo I. A dualidade Fourier projetiva, que conecta um grupo com seu dual unitário projetivo, mostramos ser implementada no caso do grupo $\mathbb{R}^2$ pelas álgebras de Kac projetivas, as quais foram introduzidas no capítulo III através da projeção das álgebras de Kac do grupo de Heisenberg, e pela definição de novas coinvoluções. Como ingredientes fundamentais em ambos os tipos de dualidade, destacamos as representações Fourier, que são os mapeamentos responsáveis pela conexão entre álgebras duais. Como marca registrada de dualidade, os geradores dessas representações satisfazem a relação pentagonal. Iniciamos a investigação sobre a existência de uma conexão *dualidade Fourier* $\times$ *quantização* pela associação das álgebras de Kac abeliana e simétrica ao grupo canônico, ou das respectivas álgebras de Kac projetivas ao grupo cuja extensão central é o grupo canônico, como é necessário no caso excepcional do espaço euclidiano. Pela subsequente decomposição da dualidade obtida segundo o respectivo dual unitário do grupo, foi possível descrever o que então seria a quantização nos moldes do formalismo de Weyl-Wigner em um espaço de fase suficientemente geral.

A decomposição da dualidade Fourier de grupo se deu pela decomposição da álgebra de Kac simétrica associada a este, segundo o dual unitário do mesmo. Desta decomposição resultaram uma família de álgebras de Hopf-von Neumann irredutíveis mais um campo de pesos normais, fiéis e semifinitos que, embora decomponham irredutivelmente o peso de Haar da álgebra de Kac simétrica, não são de Haar. Em contraste, da decomposição da dualidade Fourier projetiva de $\mathbb{R}^2$, a qual se obteve por decomposição da álgebra de Kac projetiva simétrica deste grupo segundo seu dual unitário projetivo, resultou uma família de álgebras de Kac projetivas irredutíveis.

No caso do plano euclidiano considerado na seção III.4, foi possível justificar a origem do formalismo de Weyl-Wigner como parte integrante de uma particular componente irredutível da dualidade Fourier projetiva para o grupo $\mathbb{R}^2$. A excepcionalidade deste caso fica caracterizada por dois aspectos deste formalismo que consideramos cruciais:

- por se tratar de um grupo abeliano autodual, a transformada de Fourier (escalar) sobre $\mathbb{R}^2$ é um isomorfismo não só das álgebras abelianas de convolução L^1 e daquela do produto ponto-a-ponto L^∞, mas também das respectivas álgebras deformadas L^1_Ω e $A^\Omega_\hbar$ (torcidas pelo cociclo Ω). A conseqüência direta disto é que é possível conectar (através de "densidades") operadores quânticos e funções "quânticas" essencialmente limitadas, ou seja, realizar de fato a correspondência de Weyl-Wigner.

- pelo fato de termos que considerar a extensão central de $\mathbb{R}^2$ para o grupo de Heisenberg, ou seja, termos que considerar representações *projetivas* do primeiro e, conseqüentemente, sua dualidade projetiva, a álgebra de funções essencialmente limitadas sobre o plano é deformada, deformação esta proporcional ao cociclo que define a extensão central.

No capítulo II considerou-se em detalhe a quantização sobre o semi-plano e também o esboço de uma possível generalização desta para espaços de fase do tipo $T^*(S/H)$. A ausência das propriedades de compacidade, comutatividade e unimodularidade do grupo afim $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$ trouxeram à tona as limitações de uma generalização do formalismo de Weyl-Wigner. Dentre as diferenças com o formalismo usual destacamos:

- quando o grupo canônico, ou o grupo cuja extensão central é o grupo canônico, não for abeliano, a transformada de Fourier de suas funções L^1 são funções *operatoriais* sobre seu *dual unitário*. Isto é, comparando com $\mathbb{R}^2$, tais transformadas de Fourier não são nem funções escalares nem funções sobre o mesmo conjunto. As conseqüências disto são drásticas: não se tem mais o isomorfismo $L^1 - L^\infty$ sobre o mesmo espaço, como no caso do $\mathbb{R}^2$. Isto rompe a conexão entre "densidades" e funções "quânticas" sobre o espaço de fase, amplamente utilizada no formalismo usual de Weyl-Wigner. A inexistência desta correspondência explícita é a responsável pela impossibilidade de generalizarmos o formalismo de Weyl-Wigner em toda sua simetria. Se o grupo for pelo menos abeliano mas não autodual, o que é raro, ainda se tem um isomorfismo de álgebras, do tipo $L^1(G) \sim L^\infty(\hat{G})$, mas entre álgebras definidas *sobre conjuntos diferentes*. Isto é, se grupos abelianos ocorressem como grupos canônicos, associaríamos "densidades" sobre G à funções "quânticas" sobre $\hat{G}$;

- no caso geral, o fato de o espaço de fase $T^*(S/H)$ não coincidir com a variedade do grupo $S \oslash N^*$, juntamente com o fato de a dualidade deste grupo envolver álgebras (de Kac) de funções e de operadores sobre o grupo, e não sobre o espaço de fase, faz com que a generalização do formalismo de Weyl-Wigner para este tipo de espaço relacione operadores irredutíveis sobre S (e não sobre S/H) a "densidades" *sobre o grupo*, e não sobre o espaço de fase.

- quando o grupo canônico não for unimodular, as "densidades" são obtidas dos operadores quânticos através do uso de *pesos de Haar*, e não de simples traços. O fato de associarmos álgebras de operadores bem definidas ao formalismo de Weyl-Wigner generalizado nos permite interpretar os pesos ou traços que aparecem nas fórmulas do formalismo como "integrais" sobre espaços não comutativos. Outro aspecto importante da não unimodularidade do grupo canônico é a aparente liberdade de escolha entre as medidas invariantes à esquerda e à direita. Pelo exemplo do semi-plano, concluímos que a medida a ser usada é fixada pela ação canônica;

- nem sempre é preciso considerar a extenção central de um grupo para se obter um grupo canônico, como já deixou claro Isham. Em conseqüência, não há uma real deformação nas álgebras de funções, simplesmente porque qualquer 2-cociclo que eventualmente seja utilizado para definir uma extensão central será trivial, ou seja, qualquer eventual deformação nas álgebras pode ser absorvida por uma redefinição de seu elementos.

As duas primeiras observações deixam claro que é impossível uma completa generalização do formalismo de Weyl-Wigner, com todas as suas propriedades e simetrias na correspondência entre as descrições quântica e clássica. No entanto, o fato de conseguirmos associar, através da dualidade Fourier projetiva, a Análise Harmônica não comutativa e o formalismo de Weyl-Wigner sobre o espaço euclidiano, mostra que a dualidade de álgebras tem um papel fundamental na quantização. Isto pode ser o sinal da existência de uma estrutura mais geral, que venha a ser responsável por uma descrição puramente quântica e que também apresente dualidade como, por exemplo, os grupos quânticos.

A

Órbitas Coadjuntas de $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$

Mostramos neste apêndice que o semi-plano $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ é a única variedade simplética não trivial homogênea pela ação coadjunta do grupo $\mathbb{R}_+ \oslash \mathbb{R}$. Para tanto, realizamos esse grupo como o grupo de matrizes 2×2 pela correspondência

$$(\lambda, a) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} & a\lambda^{1/2} \\ 0 & \lambda^{1/2} \end{pmatrix}.$$

A álgebra de Lie $\mathcal{G}_{sp}$ é também realizada como uma álgebra de matrizes se definirmos seus geradores por

$$L = \frac{d}{dt}(e^t, 0)|_{t=0} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{d}{dt}(1, t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas matrizes satisfazem a relação de comutação

$$[A, L] = A,$$

e, portanto, realizam de fato $\mathcal{G}_{sp}$.

Para obter a ação adjunta de G_{sp} sobre $\mathcal{G}_{sp}$, escrevemos um elemento arbitrário $X \in \mathcal{G}_{sp}$ como $X = X^A A + X^L L$ e calculamos

$$Ad_{(\lambda,a)}X = (\lambda, a)X(\lambda, a)^{-1} = (aX^L + \lambda^{-1}X^A)A + X^L L. \tag{A.1}$$

Para calcular a ação coadjunta de G_{sp} sobre o dual $\mathcal{G}^*_{sp}$ da álgebra, precisamos primeiro de uma base dual à base $X_\nu = \{A, L\}$ de $\mathcal{G}_{sp}$. Essa é dada através do pareamento de dualidade $\langle \theta^\mu, X_\nu \rangle = \mathrm{Tr}(\theta^\mu X_\nu) = \delta^\mu_\nu$, e resulta em

$$\theta^L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \theta^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando a ação coadjunta sobre um elemento $\eta = \eta_L\theta^L + \eta_A\theta^A \in \mathcal{G}^*_{sp}, \eta_\nu \in \mathbb{R}$, por (A.1) temos

$$\begin{aligned}
[Ad^*_{(\lambda,a)}\eta](X) &\equiv \langle \eta, Ad^{-1}_{(\lambda,a)}X\rangle \\
&= \langle \eta, X^L L + \lambda(X^A - aX^L)A\rangle \\
&= X^L\eta_L + \lambda(X^A - aX^L)\eta_A.
\end{aligned}$$

Para obtê-lo para todo $X \in \mathcal{G}_{sp}$, comparamos o resultado acima com

$$[Ad^*_{(\lambda,a)}\eta](X) = (Ad^*_{(\lambda,a)}\eta)_L X^L + (Ad^*_{(\lambda,a)}\eta)_A X^A,$$

que resulta, finalmente, em

$$Ad^*_{(\lambda,a)}\eta = \lambda\eta_A\theta^A + (\eta_L - a\lambda\eta_A)\theta^L. \tag{A.2}$$

As órbitas desta ação sobre $\mathcal{G}^*_{sp}$ são dadas para todo $(\lambda, a) \in G_{sp}$. Analisando os coeficientes de θ^A e θ^L em (A.2), concluímos que existem basicamente dois tipos de órbitas, de acordo com o valor de η_A: temos as órbitas nas quais $\eta_A \neq 0$, e aquelas em que $\eta_A = 0$. No primeiro caso o coeficiente de θ^A nunca é zero, mas o de θ^L pode assumir qualquer valor real. Isto caracteriza dois semi-planos, um para $\eta_A > 0$ e outro para $\eta_A < 0$. No segundo caso, $(\eta_A = 0)$, temos $Ad^*_{(\lambda,a)}\eta = \eta_L\theta^L$, o que significa que as órbitas consistem de uma infinidade de pontos na reta caracterizada por $\eta_A = 0$. Isso conclui a análise, mostrando que G_{sp} tem duas órbitas coadjuntas bidimensionais difeomórficas ao semi-plano $(\mathcal{G}^*_{sp\pm})$, e uma infinidade não enumerável de órbitas de dimensão 0 (triviais) $(\mathcal{G}^*_{sp_0})$.

Para concluir, podemos também calcular a forma simplética de Kirillov sobre as órbitas bidimensionais. A 2-forma em η é dada pela fórmula $\omega_\eta = \frac{1}{2}C^\sigma_{\mu\nu}\eta_\sigma\theta^\mu \wedge \theta^\nu$. Como $C^A_{AL} = 1$, temos sobre $\mathcal{G}^*_{sp\pm} \sim \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$\omega_\pm = \eta_A\theta^A \wedge \theta^L.$$

A forma simplética ω que aparece na seção II.1 é obtida de ω_- acima através da realização

$$\begin{aligned}
A &\mapsto \partial_p & L &\mapsto p\partial_p - x\partial_x \\
\theta^A &\mapsto dp + pd\ln x & \theta^L &\mapsto -d\ln x,
\end{aligned}$$

e com $\eta_A = -x,\ x \in \mathbb{R}_+$.

Bibliografia

[AbMa] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics* (Benjamin / Cummings, Reading, MA, 1980), 2ª edição.

[Al] R. Aldrovandi, *Quantum Hamiltonian Differential Geometry*, preprint IFT-P.004/93, jan/93.

[AlGa] R. Aldrovandi, D. Galetti, *On the Structure of Quantum Phase Space*, J. Math. Phys. **31**(12), 2987-2995 (1990).

[AlPe] R. Aldrovandi, J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapore, 1995).

[AlSa1] R. Aldrovandi, L.A. Saeger, *Fourier Duality as a Quantization Principle*, em preparo.

[AlSa2] R. Aldrovandi, L.A. Saeger, *Projective Fourier Duality and Weyl Quantization*, em preparo.

[Arn] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, 1978).

[BaSk] S. Baaj, G. Skandalis, *Unitaires Multiplicatifs et Dualité pour les Produits Croisés de C^*-Algèbres*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **26**, 425-488 (1993).

[Bar] V. Bargmann, *On Unitary Ray Representations of Continuous Groups*, Ann. of Math. **59**, 1-46 (1954).

[BaRa] A.O. Barut, R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications* (Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977).

[BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization, I e II*, Ann. Physics **111**, 61-110 e 111-151 (1978).

[BrRo] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1* (Springer, New York, 1987), 2ª ed.

[ChMoBl] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analisys, Manifolds and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[Com] F. Combes, *Poids Associé à une Algèbre Hilbertienne à Gauche*, Compositio Math. **23**(1), 49-77 (1971).

[DeCa] J. De Cannière, *An Illustration of the Non-Commutative Duality Theory for Locally Compact Groups*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **31**, 57-66 (1979).

[DeCEnSc] J. De Cannière, M. Enock, J.-M. Schwartz, *Algèbres de Fourier Associées à une Algèbre de Kac*, Math. Ann. **245**, 1-22 (1979).

[Dir] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford U.P., London, 1958).

[Dix1] J. Dixmier, *Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien* (Gauthier-Villars, Paris, 1969), 2ª ed.

[Dix2] J. Dixmier, *C^*-Algebras* (North-Holland, Amsterdam, 1977).

[EnSc1] M. Enock, J.-M. Schwartz, *Une Dualité dans les Algèbres de von Neumann*, Bull. Soc. Math. France (mémoire) **44**, (1975). Veja também os breves anúncios destes autores em C. R. Acad. Sci. Paris **277A**, 683-685 (1973) e **279A**, 643-645 (1974).

[EnSc2] M. Enock, J.-M. Schwartz, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups* (Springer, Berlin, 1992).

[EnVal] M. Enock, J.-M. Vallin, *C^*-Algèbres de Kac et Algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. (3) **66**, 619-650 (1993).

[Eym] Eymard, *L'Algèbre de Fourier d'un Groupe Localement Compact*, Bull. Soc. Mat. France **92**, 181-236 (1964).

[Exel] R. Exel, *Von Neumann e a Teoria de Álgebras de Operadores*, Revista do Instituto de Estudos Avançados da USP v. **26** (1996). Também disponível no fromato TEX em "http://www.ime.usp.br/~exel/publications.html".

[Foll] G.B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space* (Princeton U.P., Princeton, NJ, 1989).

[GoGrTu] M.J. Gotay, H.B. Grundling, G.M. Tuynman, *Obstruction Results in Quantization Theory*, a ser publicado em J. Nonlinear Sci. Preprint dg-ga/9605001, May 1996.

[GrVa] J.M. Gracia-Bondía, J.C. Várilly, *Algebras of Distributions Suitable for Phase-space Quantum Mechanics. I e II*, J. Math. Phys. **29**(4), 869-887 (1988).

[Gur] D. Gurarie, *Symmetries and Laplacians* (North-Holland, Amsterdam, 1992).

[HCSW] Para uma resenha sobre o assunto veja, por exemplo: M. Hillery, R.F. O'Connel, M.O. Scully and E.P. Wigner, *Distribution Functions in Physics: Fundamentals*, Phys. Rep. **106**, 121-167 (1984); H.-W. Lee, *Theory and Application of the Quantum Phase-Space Distribution Functions*, Phys. Rep. **259**, 147-211 (1995).

[Ish] C.J. Isham, Topological and Global Aspects of Quantum Theory, in Les Houches Summer School, session XL (1983), *Relativity, Groups and Topology II*, B.S. DeWitt, R. Stora (eds.) (North-Holland, Amsterdam, 1984).

[KaVa] G.I. Kac, L.I. Vaĭnermann, *Nonunimodular Ring-Groups and Hopf-von Neumann Algebras*, Soviet Math. Dokl. **14**, 1144-1148 (1974), e Math. USSR-Sb. **23**, 185-214 (1974). L.I. Vaĭnermann, *Characterization of Objects Dual to Locally Compact Groups*, Functional Anal. Appl. **8**, 66-67 (1974).

[KadRi] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras* (Academic Press, Boston, 1986).

[Kir] A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer-Verlag, Berlin, 1976).

[Kir2] A.A. Kirillov, *Geometric Quantization, Encyclopaedia of Mathematical Sciences – Dynamical Systems IV* (Springer, 1990).

[Lan] N.P. Landsman, *C^*-Algebraic Quantization and the Origin of Topological Quantum Effects*, Lett. Math. Phys. **20**, 11-18 (1990), e *Deformations of Algebras of Observables and the Classical Limit of Quantum Mechanics*, Rev. Math. Phys. **5**(4), 775-806 (1993).

[Mack1] G.W. Mackey, *Borel Structure in Groups and their Duals*, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 134-165 (1957).

[Mack2] G.W. Mackey, *Unitary Representations of Group Extensions, I*, Acta Math. **99**, 265-311 (1958).

[Mack3] G.W. Mackey, *Unitary Group Representations in Physics, Probability and Number Theory* (Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1987).

[Maj] S. Majid, *Hopf-von Neumann Algebra Bicrossproducts, Kac Algebra Bicrossproducts, and the Classical Yang-Baxter Equations*, J. Funct. Anal. **95**, 291-319 (1991).

[Moy] J.E. Moyal, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45**, 99-124 (1949).

[PoWo] P. Podles, S.L. Woronowicz, *Quantum Deformation of Lorentz Group* Comm. Math. Phys. **130**, 381-431 (1990).

[Re] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups* (Oxford U.P., London, 1968).

[Su] M. Sugiura, *Unitary Representations and Harmonic Analysis* (North-Holland / Kodansha, Amsterdam, 1990).

[Tak] M. Takesaki, *Duality and von Neumann Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **77**(4), 553-557 (1971), e *Lecture Notes in Mathematics* (Springer, Berlin, 1972) vol. 247, pp. 665-785.

[Tay] M.E. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis* (American Mathematical Society, Providence, 1986).

[TrSh] N.V. Trunov, A.N. Sherstnev, *Introduction to the Theory of Noncommutative Integration*, J. Soviet Math. **37**(6), 1504-1523 (1987).

[TuWi] G.M. Tuynman, W.A.J.J. Wiegerinck, *Central Extensions and Physics*, J. Geom. Phys. **4**(2), 207-258 (1987).

[Vai] L.I. Vaĭnermann, *Duality of Algebras with an Involution and Generalized Shift Operators*, J. Soviet Math. **42**(6), 2113-2138 (1988).

[Val] J.-M. Vallin, *C^*-Algèbres de Hopf et C^*-Algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. **50**(3), 131-174 (1985).

[Var] V.S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory* (van Nostrand Reinhold, New York, 1970), vol. II.

[Vil] N.J. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations* (American Mathematical Society, Providence, 1968).

[Weyl] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, 1931).

[Wig] E.P. Wigner, *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749-759 (1932).

[Wol] S.L. Woronowicz, *Compact Matrix Pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111**, 613-665 (1987).