

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**VITOR BENTES MENDROT**

**Formulação Feynman–Gell-Mann  
para o movimento fermiônico planar**

Guaratinguetá

2020

**Vitor Bentes Mendrot**

**Formulação Feynman–Gell-Mann  
para o movimento fermiônico planar**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá  
2020

M539f Mendrot, Vitor Bentes  
Formulação Feynman--Gel-Mann para o movimento fermiônico planar  
/ Vitor Bentes Mendrot – Guaratinguetá, 2020.  
98 f.: il.  
Bibliografia: f. 72-73

Trabalho de Graduação - Bacharelado em Física – Universidade  
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2020.  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

1. Dirac, equações de. 2. Feynman, Diagramas de. 3. Teoria quântica  
de campos. I. Título.

CDU 530.145

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

VITOR BENTES MENDROT

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO  
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUADO EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA

Profº Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



---

Profº Dr. Antonio Soares de Castro  
Orientador/UNESP-FEG



---

Profº Dr. Pedro Almeida Vieira Alberto  
Universidade de Coimbra



---

Profª Dra. Tatiana Cardoso e Bufalo  
Universidade Federal de Lavras

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à minha família, em especial aos meus pais por me proporcionarem irrestrita liberdade e incondicional apoio para perseguir os meus sonhos.

Aos amigos do grupo ‘Rocks’n Roses’ pelo companheirismo e camaradagem em todos os momentos, em especial à Thaynara Americano pelas sugestões e discussões levantadas e Jorge Lucas Migoto pelas correções ortográficas.

Aos amigos da van, por tornarem as idas e voltas da Universidade uma experiência inesquecível.

Em especial aos amigos Mathias, Douglas, Jhonata “Yudog” e Bruno “Cachoeira”, por estarem ao meu lado durante o curso.

A todos os funcionários e colaboradores da Universidade por proporcionarem a infraestrutura e conforto.

A todos os professores com quem tive o prazer de estudar, por todo o conhecimento transmitido.

Aos membros da banca avaliadora Profa. Dra. Tatiana Cardoso e Bufalo e Prof. Dr. Pedro Vieira Alberto sou grato pelas considerações e sugestões sobre o trabalho. Agradeço em especial ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Soares de Castro, por sua dedicação ímpar e inestimável mentoria.

Agradeço especialmente à FAPESP pelo suporte financeiro para a realização não apenas deste trabalho, mas do projeto de pesquisa que o engloba.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo nº 2019/06734-2.

*“A great deal of my work is just playing with equations and seeing what they give.”*  
*(P.A.M. Dirac)*

## RESUMO

Realizamos um estudo minucioso de uma formulação alternativa de segunda ordem da equação de Dirac, a formulação Feynman–Gell-Mann. Discutimos as condições que devem ser satisfeitas para se obter uma corrente de probabilidade conservada, e a partir disso construímos a matriz potencial de interação mais geral possível em 3+1 dimensões. Apresentamos a motivação, seguida da discussão e derivação completa da formulação Feynman–Gell-Mann, generalizando-a para incluir interações além das abordadas por Feynman e Gell-Mann, resultado que expande o horizonte de possibilidades de emprego deste ferramental. Por mérito de completeza do estudo, a partícula livre foi estudada. O limite não-relativístico e algumas considerações sobre a exequibilidade do emprego da formulação em um mundo com 2+1 dimensões também foram tratados. Neste trabalho focamos no estudo das interações vetoriais, da qual faz parte a interação eletromagnética minimamente acoplada. Empregando o sistema de coordenadas cilíndricas no estudo do movimento planar, obtivemos soluções analíticas para um férmion imerso em duas configurações de campos circularmente simétricos, a saber, um campo magnético uniforme e um campo elétrico radial inversamente quadrático. Verificamos que dada a natureza da formulação, é possível mapear soluções de problemas da teoria não-relativística no nosso problema em ambos os casos, estratégia que certamente pode ser usada para outros sistemas. Conjecturas sobre futuras investigações foram feitas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equação de Dirac. Formulação Feynman–Gell-Mann. Movimento relativístico planar

## ABSTRACT

A meticulous study about a second order alternative version of the Dirac equation, the Feynman–Gell-Mann formulation, was carried out. The necessary conditions to obtain a conserved probability current were discussed, and the most general interaction potential matrix in 3+1 dimensions was built based on it. It was presented a motivation, followed by a complete discussion and derivation of the Feynman–Gell-Mann formulation, generalizing it to include interactions beyond those covered by Feynman and Gell-Mann, a result which expands the horizon of possibilities of work with such a tool. For the sake of completeness of the discussion, the free particle was covered. The non-relativistic limit, and some considerations about the feasibility of the formulation in a (2+1)-dimensional world were also treated. In the present work, we focused on the study of vector interactions, which contains the minimally coupled electromagnetic interaction. Using the cylindrical coordinate system to describe the planar motion, we obtained analytical solutions for a fermion embedded in two circularly symmetric field configurations, namely, a uniform magnetic field and an inversely quadratic electric field. It was verified that due to the nature of the formulation, it is possible to map solutions of the non-relativistic theory to our problem in both cases, strategy which can certainly be used in other configurations. Conjectures about possible future investigations were made.

**KEYWORDS:** Dirac equation. Feynman–Gell-Mann formulation. Relativistic planar motion.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Espectro de energia em termos do autovalor do momento angular total para projeção positiva do spin. . . . .	58
Figura 2	Espectro de energia em termos do autovalor do momento angular total para projeção negativa do spin. . . . .	59

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Elementos da base do espaço das matrizes $4 \times 4$ . . . . .	23
Tabela 2 – Constantes de normalização dos casos particulares de autofunções radiais. .	73

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>A EQUAÇÃO DE DIRAC E SUAS PROPRIEDADES GERAIS</b>	<b>15</b>
2.1	A EQUAÇÃO DE DIRAC E AS MATRIZES $\gamma$	15
<b>2.1.1</b>	<b>A equação de Dirac conjugada hermitiana</b>	<b>16</b>
<b>2.1.2</b>	<b>A equação da continuidade na teoria de Dirac</b>	<b>17</b>
2.2	BASE DO ESPAÇO DAS MATRIZES $4 \times 4$ E FORMAS COVARIANTES BILINEARES	19
<b>2.2.1</b>	<b>A matriz <math>\gamma^5</math></b>	<b>19</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Formas covariantes bilineares</b>	<b>22</b>
2.3	A EQUAÇÃO DE DIRAC COM INTERAÇÕES	23
<b>2.3.1</b>	<b>A conservação da probabilidade com uma interação mais geral possível</b>	<b>23</b>
2.4	A REPRESENTAÇÃO DE DIRAC	24
<b>3</b>	<b>A FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN DA EQUAÇÃO DE DIRAC</b>	<b>26</b>
3.1	AUTOESTADOS DO OPERADOR QUIRALIDADE	28
3.2	PROJETORES QUIRAIS	29
3.3	A FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN	30
3.4	A INTERAÇÃO ANTICOMUTANTE COM $\gamma^5$ NA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN	33
<b>3.4.1</b>	<b>O potencial eletromagnético na formulação Feynman-Gell-Mann</b>	<b>34</b>
3.5	O LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO NA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN	40
3.6	REVISITANDO A PARTÍCULA LIVRE COM A FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN	41
3.7	COMENTÁRIO SOBRE O ARTIGO “ <i>THEORY OF THE FERMI INTERACTION</i> ”	42
3.8	CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN EM UM MUNDO COM $2+1$ DIMENSÕES	43
<b>4</b>	<b>SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE DIRAC VIA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN</b>	<b>46</b>
4.1	SISTEMAS CILINDRICAMENTE SIMÉTRICOS	46
<b>4.1.1</b>	<b>Momento linear conservado na direção <math>z</math></b>	<b>47</b>
<b>4.1.2</b>	<b>Potenciais axialmente simétricos</b>	<b>48</b>

4.1.3	<b>Autoestados da componente <math>z</math> do momento angular total . . . . .</b>	<b>49</b>
4.2	CONFIGURAÇÕES ESPECIAIS DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO . .	54
4.2.1	<b>Um férmion imerso em um campo magnético uniforme . . . . .</b>	<b>55</b>
4.2.2	<b>Um férmion imerso em um campo elétrico radial inversamente quadrático</b>	<b>62</b>
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES . . . . .</b>	<b>74</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>76</b>
	<b>APÊNDICE A – AS MATRIZES DE PAULI . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE B – O SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS .</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE C – OS POLINÔMIOS DE LAGUERRE GENERALIZADOS . . . . .</b>	<b>85</b>
	<b>APÊNDICE D – A TEORIA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA . .</b>	<b>87</b>
D.1	A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER . . . . .	87
D.2	O USO DAS MATRIZES DE PAULI PARA INCORPORAR O SPIN NA TEORIA NÃO-RELATIVÍSTICA . . . . .	90
	<b>APÊNDICE E – A TEORIA QUÂNTICA COVARIANTE DE LORENTZ</b>	<b>92</b>
E.1	EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON . . . . .	92
E.2	A EQUAÇÃO DE DIRAC . . . . .	95
E.2.1	<b>O espinor de Dirac . . . . .</b>	<b>95</b>
E.2.2	<b>O spin como grau de liberdade na equação de Dirac . . . . .</b>	<b>96</b>
E.2.3	<b>Limite não-relativístico da equação de Dirac . . . . .</b>	<b>101</b>
E.2.4	<b>O comportamento das formas bilineares covariantes sob transformações de Lorentz . . . . .</b>	<b>102</b>
E.2.5	<b>A conjugação de carga . . . . .</b>	<b>103</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No começo do século XX, a Física passou por duas grandes quebras de paradigma que culminaram no surgimento da mecânica relativística e da mecânica quântica. Essas duas novas formas de compreensão da Natureza, entretanto, manifestaram-se de forma parcialmente independente, contestando a Física em diferentes pontos ao demonstrar a insuficiência das teorias vigentes em explicar certos fenômenos.

No contexto relativístico, as leis clássicas deixam de ser apropriadas para a descrição de corpos em velocidades comparáveis à da luz. Ainda, há uma necessidade autoevidente de entendimento em nível mais fundamental da estrutura desses corpos, o que é logrado pela teoria quântica.

No domínio da mecânica quântica, a equação de Schrödinger e sua subsequente interpretação estatística se apresentaram como uma formulação teórica adequada para a descrição de sistemas nas escalas atômica e subatômica. Contudo, quando aplicada ao problema de maior interesse na época do seu surgimento, o do elétron no átomo de hidrogênio, a equação falha em prever os dados experimentais. A origem dessa discrepância entre teoria e experimento reside na ausência da consideração do ainda a ser descoberto momento angular de spin do elétron, cuja proposição é geralmente creditada a Goudsmit e Uhlenbeck (UHLENBECK; GOUDSMIT, 1926). A adequação da equação de Schrödinger para um modelo em que o elétron possui spin  $1/2$  foi feita por Pauli adicionando artificialmente um novo termo na equação que representa a interação deste momento angular intrínseco com o campo magnético devido ao núcleo eletricamente carregado (vide Apêndice D.2). Além de não contemplar o spin, a equação de Schrödinger apresenta outro problema: ela não é covariante sob transformações de Lorentz. Isso é facilmente resolvido pela sua generalização relativística, a equação de Klein-Gordon, que descreve partículas de spin 0 (vide Apêndice E.1).

Em 1928, Dirac propôs uma equação relativística (DIRAC, 1928), que naturalmente se reduz à equação de Pauli no limite não-relativístico (vide Apêndice E.2.3), sem a necessidade de uma modificação com base fenomenológica para contemplar os efeitos do spin. Por ser de primeira ordem tanto no tempo quanto nas coordenadas espaciais, a equação de Dirac admite uma densidade de probabilidade positiva definida, o que permite empregar interpretação estatística idêntica à da teoria não-relativística. Ademais, a função de onda da equação de Dirac é um espinor de quatro componentes, em contraste com a equação de Klein-Gordon, que é um função escalar de apenas uma componente.

Surge então uma questão muito pertinente: por que o espinor de Dirac deve ter quatro componentes? Em primeiro lugar, uma característica notória das teorias quânticas relativísticas é a possibilidade (ou melhor, a inevitabilidade) de soluções com energia negativa, cuja interpretação física está ligada às antipartículas. Logo, é justificada a necessidade de quatro componentes pois, para descrever a partícula são necessárias duas componentes para as duas possíveis projeções de

spin, e mais duas para representar a antipartícula. Entretanto, Feynman e Gell-Mann apontam que este argumento é insatisfatório (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958), pois na equação de Klein-Gordon, há apenas uma componente na função de onda, de forma que ambos os sinais da energia são abrigados em uma equação de segunda ordem (vide Apêndice E.1). Isso os levou a sugerir que a partícula de spin  $1/2$  possa ser descrita em termos de espinores de duas componentes obedecendo equações de segunda ordem, de forma que ambos os sinais de energia e ambas as projeções de spin são abrangidas, sem perder a positividade da densidade de probabilidade. Feynman declarou explicitamente uma predisposição por essa formulação da equação de Dirac (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958), que hoje é conhecida como formulação Feynman–Gell-Mann (BARUT; MULLEN, 1962; BIEDENHARN, 1961; DEPAQUIT; GUÉRET; VIGIER, 1971; GALLONE, 1970; GRANDY, 2012; MERZBACHER, 1998; PETRONI et al., 1985; STRANGE, 1998).

O propósito deste trabalho é fazer uma investigação das propriedades da equação de Feynman–Gell-Mann, generalizando-a para formas possíveis de interação além das consideradas por Feynman e Gell-Mann, com a condição de manter a densidade de probabilidade conservada, e verificando em quais condições a formulação se torna útil e conveniente de ser usada. Serão abordados então alguns sistemas passíveis de solução analítica, focando em interações vetoriais acopladas minimamente, onde temos o interesse particular no movimento planar, de maneira que o uso do sistema de coordenadas cilíndricas se mostra apropriado. Será mostrado também que a adequação da formulação Feynman–Gell-Mann para um mundo com  $2+1$  dimensões tem sido abordada de forma equivocada na literatura recente (OLIVEIRA; BORGES; SOUSA, 2019; OLIVEIRA et al., 2020), o que constitui mais uma motivação para o estudo da formulação, visto que é um assunto corrente na comunidade científica.

Este trabalho será organizado da seguinte forma: No capítulo 2, será feita uma breve revisão de propriedades que serão necessárias da equação de Dirac. Na subseção 2.1 é discutida a álgebra e propriedades úteis das matrizes  $\gamma$ , e as condições para a conservação da probabilidade da teoria. Na seção 2.2 será proposta uma base para o espaço das matrizes  $4 \times 4$ , que será útil para a seção 2.3, onde será construída a matriz potencial de interação mais geral possível, e em seguida estudada as condições em que a probabilidade se mantém conservada. No capítulo 3 é feito todo o desenvolvimento da formulação Feynman–Gell-Mann. Na seção 3.1 é feito o estudo dos autoestados do operador quiralidade  $\gamma^5$ , necessário para o desenvolvimento da formulação. Em seguida, na seção 3.2, são construídos os projetores quirais — que envolvem a matriz quiralidade —, fundamentais na formulação Feynman–Gell-Mann. É apresentada finalmente na seção 3.3 — trecho fundamental deste trabalho —, a formulação Feynman–Gell-Mann, onde são discutidas as restrições necessárias aos potenciais para a exequibilidade da formulação. Na seção 3.4.1, nossas atenções se voltam especificamente para as interações vetoriais, que modelam o acoplamento mínimo de um campo eletromagnético. As seções 3.5 e 3.6 apresentam, por mérito de completeza da discussão, a avaliação do limite não-relativístico da formulação Feynman–Gell-Mann e o estudo da partícula livre de interações. Em seguida, é discutido brevemente

na seção 3.7 diferenças na abordagem tomada neste projeto em comparação com o trabalho que o motiva (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958). Para finalizar o capítulo, na seção 3.8 são apresentadas considerações sobre o uso da formulação Feynman–Gell-Mann em um mundo com 2+1 dimensões, pautadas em algumas críticas sobre dois trabalhos recentemente publicados cuja discussão é instrutiva (OLIVEIRA; BORGES; SOUSA, 2019; OLIVEIRA et al., 2020). Por último, no capítulo 4 são avaliados sistemas planares envolvendo campos eletromagnéticos circularmente simétricos, de tal sorte que o uso do sistema de coordenadas cilíndricas é o mais adequado. São obtidas soluções analíticas para um férmion imerso em um campo magnético uniforme, e para um férmion imerso em um campo elétrico radial inversamente quadrático. Para concluir o trabalho, são apresentadas as considerações finais, e conjecturas sobre próximos passos na investigação da formulação.

Parte deste trabalho foi apresentado na primeira fase do XXXI Congresso de Iniciação Científica da Unesp, em 30 de setembro de 2019, com o título “*Frustração na inclusão de interações escalar e tensorial no formulação Feynman–Gell-Mann da equação de Dirac*”, embora posteriormente este resultado tenha sido reavaliado e descartado, haja vista que foi encontrada uma forma de incluir não apenas as interações escalar e tensorial, mas também a pseudoescalar. Eis uma novidade que será discutida na seção 3.3. Tal resultado foi apresentado no XXXII Congresso de Iniciação Científica da Unesp, nos dias 20 de outubro e 24 de novembro de 2020, com o título “*Inclusão de interações não-vetoriais no formalismo de Feynman–Gell-Mann: satisfação e felicidade*”. Outra parte deste trabalho foi aceito para ser apresentado no XV International Workshop on Hadron Physics sob o título “*Relativistic Landau levels via Feynman-Gell-Mann formulation*”.

Este Trabalho de Graduação é fruto de um projeto de Iniciação Científica financiado pela FAPESP (Processo nº: 2019/06734-2).

## 2 A EQUAÇÃO DE DIRAC E SUAS PROPRIEDADES GERAIS

A equação de Dirac é uma equação diferencial parcial de primeira ordem no tempo, assim como a equação de Schrödinger. Além disso, é também de primeira ordem nas coordenadas espaciais, como era o objetivo de Dirac (DIRAC, 1928), pois as equações relativísticas devem tratar todas as coordenadas de forma simétrica. A equação permite uma interpretação probabilística igual àquela da teoria não-relativística (vide Apêndice D.1). Ademais, em 3+1 dimensões a função de onda é um espinor de quatro componentes sendo que todas essas componentes, no caso livre, obedecem à equação de Klein-Gordon, estando de acordo com a relação energia-momento relativística (E.4). Neste capítulo, será feita uma revisão da equação de Dirac e suas propriedades, com o fim de estabelecer a notação que será usada durante todo o trabalho e obter algumas propriedades que serão fundamentais para o desenvolvimento do capítulo seguinte.

### 2.1 A EQUAÇÃO DE DIRAC E AS MATRIZES $\gamma$

Em 3+1 dimensões, a equação de Dirac para um férmion de spin 1/2 livre na forma manifestamente covariante<sup>1</sup>, em notação indicial<sup>2</sup>, é dada por (em unidades naturais, *i.e.*,  $\hbar = c = 1$ )

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0 \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

onde  $p_\mu = i\partial_\mu = i(\partial/\partial t, \nabla)$ ,  $m$  é a massa da partícula<sup>3</sup>, e o espinor  $\Psi$  possui quatro componentes, sendo que cada componente obedece à equação de Klein-Gordon. Os fatores  $\gamma^\mu$  são matrizes  $4 \times 4$  e obedecem à álgebra de Clifford

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

que em termos do anticomutador é

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> Uma demonstração da covariância pode ser encontrada na literatura, vide por exemplo (WACHTER, 2010).

<sup>2</sup> Uma discussão sobre a notação indicial pode ser encontrada em diversos livros, vide por exemplo (LEMOS, 2007).

<sup>3</sup> É deixado implícito durante todo o trabalho que a massa  $m$  é multiplicada pela matriz identidade  $\mathbb{1}$  de ordem apropriada para a equação.

onde  $g^{\mu\nu}$ <sup>4</sup> representam os elementos do tensor métrico de Minkowski tal que

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & , \quad \mu = \nu = 0 \\ -1 & , \quad \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & , \quad \mu \neq \nu, \end{cases} \quad (2.4)$$

que possui as seguintes propriedades

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}, \quad (2.5)$$

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (2.6)$$

em que  $\delta^{\mu}_{\nu}$  é o delta de Kronecker relativístico, cujo valor é 1 se  $\mu = \nu$ , e 0 para os demais casos. Outra relação aproveitável é obtida ao se fazer  $\mu = \nu$  em (2.2)

$$(\gamma^{\mu})^2 = g^{\mu\mu}. \quad (2.7)$$

Uma terceira relação conveniente é expressar o produto  $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$  em termos do tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ , e da quantidade antissimétrica

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv i \frac{[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]}{2}, \quad (2.8)$$

produzindo

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} &= \frac{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}}{2} + \frac{\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}}{2} \\ &= \frac{\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\}}{2} + \frac{[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]}{2} \\ &= g^{\mu\nu} - i^2 \frac{[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]}{2} \\ &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.1.1 A equação de Dirac conjugada hermitiana

Aplicando o conjugado hermitiano na equação (2.1), temos

<sup>4</sup> Durante todo o trabalho, ficará implícito que o termo  $g^{\mu\nu}$  é acompanhado da matriz identidade  $\mathbb{1}_4$ .

$$\begin{aligned}
& [(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi]^\dagger = 0 \\
& -p_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\Psi^\dagger = 0 \\
& p_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} + m\Psi^\dagger = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Multiplicando (2.10) por  $\gamma^0$  à direita

$$p_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 + m\Psi^\dagger \gamma^0 = 0, \tag{2.11}$$

tal que definindo o espinor adjunto

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \tag{2.12}$$

e usando a propriedade (2.7) para  $\gamma^0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& p_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 + m\Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \\
& p_\mu \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 + m\bar{\Psi} = 0,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

que é a equação de Dirac conjugada hermitiana.

### 2.1.2 A equação da continuidade na teoria de Dirac

Uma das razões pela qual Dirac buscou uma generalização relativística da equação de Schrödinger diferente da equação de Klein-Gordon foi a possibilidade de adotar uma interpretação probabilística da teoria da mesma forma que a teoria não-relativística (DIRAC, 1928), o que não é possível no caso de Klein-Gordon. Busquemos então as grandezas envolvidas na equação de continuidade da equação de Dirac (2.1). Tal equação é obtida por meio do seguinte procedimento: multiplicaremos a equação (2.1) por  $\bar{\Psi}$  pela esquerda

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu p_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi = 0, \tag{2.14}$$

e multiplicaremos a equação de Dirac conjugada (2.13) por  $\Psi$  pela direita

$$(p_\mu \bar{\Psi}) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \Psi + m \bar{\Psi} \Psi = 0 \quad (2.15)$$

Somando (2.14) e (2.15), explicitando o operador  $p_\mu$ , obtemos

$$i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) + i (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \Psi = 0. \quad (2.16)$$

Para permitir uma quadricorrente conservada, surge a necessidade de impor uma propriedade sobre a hermiticidade das matrizes  $\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^\mu, \\ (\gamma^0 \gamma^\mu)^\dagger &= \gamma^0 \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou seja, as matrizes  $\gamma$  são hermitianas com respeito a  $\gamma^0$ . Isso nos permite escrever a equação (2.16) na forma de uma equação de continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.18)$$

com

$$J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) define uma quadricorrente conservada de acordo com a equação (2.18), com uma possível densidade de probabilidade  $\rho$  e uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$

$$\begin{aligned} J^0 &= \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi = \Psi^\dagger \Psi \equiv \rho, \\ \mathbf{J} &= \bar{\Psi} \boldsymbol{\gamma} \Psi = \Psi^\dagger \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} \Psi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

tal que  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ . Pela definição, temos que  $\rho$  é de fato positivo definido, pois

$$\rho = \Psi^\dagger \Psi = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2, \quad (2.21)$$

onde  $\Psi_i$  são as componentes do espinor. É permitido portanto associar à equação (2.1) uma interpretação estatística muito semelhante àquela usada na teoria de Schrödinger (vide Apêndice D.1).

## 2.2 BASE DO ESPAÇO DAS MATRIZES $4 \times 4$ E FORMAS COVARIANTES BILINEARES

As matrizes  $\gamma^\mu$  são linearmente independentes, mas elas não formam uma base do espaço vetorial das matrizes  $4 \times 4$ , pois são necessários dezesseis elementos matriciais linearmente independentes para que qualquer matriz  $4 \times 4$  possa ser escrita como uma combinação linear dessas dezesseis matrizes. Com as matrizes  $\gamma^\mu$ , e a matriz identidade  $\mathbb{1}_4$ <sup>5</sup>, já dispomos de cinco elementos. Outra matriz linearmente independente às citadas é a matriz  $\gamma^5$ , definida por

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (2.22)$$

Com essas seis matrizes é possível fazer combinações para compor os dez elementos que faltam necessários para constituir uma base do espaço. Mas antes, esmiucemos as propriedades da matriz  $\gamma^5$ , pois ela será indispensável para o desenvolvimento do próximo capítulo.

### 2.2.1 A matriz $\gamma^5$

Das equações (2.3), (2.7) e (2.17) podemos deduzir a sua hermiticidade:

<sup>5</sup> A partir daqui, será suprimido o subscrito “4” para indicar a ordem da matriz. Será mantido o índice excepcionalmente para matrizes de ordem 2, para distingui-las.

$$\begin{aligned}
(\gamma^5)^\dagger &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \\
&= -i(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger \\
&= -i(\gamma^0\gamma^3\gamma^0)(\gamma^0\gamma^2\gamma^0)(\gamma^0\gamma^1\gamma^0)\gamma^0 \\
&= -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 \\
&= -i\gamma^0\gamma^3(-\gamma^1\gamma^2) \\
&= i\gamma^0(-\gamma^1\gamma^3)\gamma^2 \\
&= -i\gamma^0\gamma^1(-\gamma^2\gamma^3) \\
&= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

ou seja,

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \tag{2.24}$$

Da equação (2.7), podemos deduzir que o seu quadrado é a identidade

$$\begin{aligned}
(\gamma^5)^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^2 \\
&= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Como  $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$  e  $\{\gamma^i, \gamma^j\} = -2\delta_{ij}$  para  $i, j = 1, 2, 3$ , é fácil perceber que <sup>6</sup>

<sup>6</sup> Durante todo o trabalho será usada a convenção de que letras latinas representam apenas componentes espaciais, enquanto letras gregas representam todas as componentes do espaço-tempo.

$$\begin{aligned}
(\gamma^5)^2 &= -\gamma^0(\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= (\gamma^0)^2(\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= (\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= (\gamma^1)^2\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 \\
&= -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 \\
&= (\gamma^2)^2(\gamma^3)^2,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

ou seja,

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}. \tag{2.27}$$

Vejamos agora que  $\gamma^5$  anticomuta com as matrizes  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^5 &= \gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \\
&= i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Como há um número ímpar de matrizes  $\gamma^i$ , é trivial observar que

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^5 &= -(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^0 \\
&= -\gamma^5\gamma^0,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ou, em termos do anticomutador

$$\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0. \tag{2.30}$$

Analogamente,  $\gamma^i$  anticomuta com todas as matrizes de índice espacial, exceto consigo mesmo. É de imediata conclusão então que  $\gamma^i$  irá anticomutar com  $\gamma^0$ , e com mais duas matrizes espaciais, cujos índices diferem de  $i$

$$\begin{aligned}
\gamma^i \gamma^5 &= \gamma^i (i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\
&= -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^i,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

relação que, expressa na forma de anticomutador, será

$$\{\gamma^i, \gamma^5\} = 0. \tag{2.32}$$

Podemos então escrever (2.30) e (2.32) como uma única expressão

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \tag{2.33}$$

### 2.2.2 Formas covariantes bilineares

Para os dez elementos que faltam, basta fazer as seis combinações  $\gamma^\mu \gamma^\nu$ ,  $\mu < \nu$  que por motivação de conveniência, serão representadas pela grandeza supracitada  $\sigma^{\mu\nu}$ , definida por (2.8) (não há perda de generalidade do elemento, pois  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu$ , *i.e.*, uma combinação linear de  $\gamma^\mu \gamma^\nu$ ) e as quatro combinações  $\gamma^\mu \gamma^5$ , totalizando dezesseis elementos, que serão rotulados por  $\Gamma^{(m)}$ . Todos os elementos formam a chamada forma covariante bilinear

$$\bar{\Psi} \Gamma^{(m)} \Psi, \tag{2.34}$$

cujo comportamento sob transformações de Lorentz é bem definido (veja por exemplo a referência (WACHTER, 2010)), permitindo classificar  $\Gamma^{(m)}$  com respeito a esse comportamento (vide Apêndice E.2.4). Isso leva então a um elemento escalar  $\Gamma^{(S)}$ , quatro elementos vetoriais  $\Gamma^{(V)}$ , seis elementos tensoriais  $\Gamma^{(T)}$ , quatro elementos pseudovetoriais  $\Gamma^{(A)}$ , e um elemento pseudoescalar  $\Gamma^{(P)}$ , dispostos na Tabela 1.

Tabela 1 – Elementos da base do espaço das matrizes  $4 \times 4$ .

Notação	n°	Forma explícita
$\Gamma^{(S)} = \mathbb{1}$	1	$\mathbb{1}$
$\Gamma^{(V)} = \gamma^\mu$	4	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$
$\Gamma^{(T)} = \sigma^{\mu\nu}$	6	$\gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^2, \gamma^0\gamma^3, \gamma^1\gamma^2, \gamma^1\gamma^3, \gamma^2\gamma^3$
$\Gamma^{(A)} = \gamma^\mu\gamma^5$	4	$i\gamma^0\gamma^2\gamma^3, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1, i\gamma^0\gamma^1\gamma^2, i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
$\Gamma^{(P)} = \gamma^5$	1	$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Fonte: Wachter, A. Relativistic Quantum Mechanics

### 2.3 A EQUAÇÃO DE DIRAC COM INTERAÇÕES

A equação de Dirac expressa por (2.1) governa a evolução de um férmion livre, *i.e.*, na ausência de qualquer forma de interação. É possível incluir um termo de interação na equação via uma matriz potencial de interação  $\mathcal{V}$ , representando uma interação genérica

$$(\gamma^\mu p_\mu - m - \mathcal{V})\Psi = 0. \quad (2.35)$$

#### 2.3.1 A conservação da probabilidade com uma interação mais geral possível

Assim como na seção 2.1.2, é necessário que a equação (2.35) possa ser associada a uma quadricorrente conservada, *i.e.*, que obedeça equação semelhante à (2.18). Devemos então verificar quais condições devem ser impostas sobre  $\mathcal{V}$  para que ocorra a conservação da probabilidade. As condições podem ser verificadas realizando o mesmo procedimento feito na seção 2.1.2: multiplicando a equação (2.35) por  $\bar{\Psi}$  pela esquerda, obtemos

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu p_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \bar{\Psi}\mathcal{V}\Psi = 0. \quad (2.36)$$

Analogamente à equação (2.13), mas já usando a relação imposta (2.17), temos a equação de Dirac conjugada hermitiana com interação

$$p_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} + \bar{\Psi}\gamma^0\mathcal{V}^\dagger\gamma^0 = 0. \quad (2.37)$$

Multiplicando (2.37) por  $\bar{\Psi}$  pela direita

$$(p_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + m \bar{\Psi} \Psi + \bar{\Psi} \gamma^0 \mathcal{V}^\dagger \gamma^0 \Psi = 0. \quad (2.38)$$

Somando (2.36) e (2.38), já explicitando o operador  $p_\mu$ , teremos

$$i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) + i (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + \bar{\Psi} (\gamma^0 \mathcal{V}^\dagger \gamma^0 - \mathcal{V}) \Psi = 0, \quad (2.39)$$

ou seja,

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = \partial_\mu J^\mu = i \bar{\Psi} (\gamma^0 \mathcal{V}^\dagger \gamma^0 - \mathcal{V}) \Psi. \quad (2.40)$$

Logo, surge a necessidade de impor que  $\mathcal{V}$  seja hermitiana com respeito à  $\gamma^0$  (CASTRO, 2011)

$$\begin{aligned} \gamma^0 \mathcal{V}^\dagger \gamma^0 - \mathcal{V} &= 0 \\ (\gamma^0 \mathcal{V})^\dagger &= \gamma^0 \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Conhecendo a base exposta na Tabela 1 e a restrição (2.41), podemos construir a matriz potencial de interação mais geral possível

$$\mathcal{V} = S + \gamma^\mu A_\mu + \sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + \gamma^\mu \gamma^5 A_\mu^{(P)} + i \gamma^5 S^{(P)}, \quad (2.42)$$

em que  $S$  é um potencial escalar,  $A_\mu$  é um potencial vetorial,  $T_{\mu\nu}$  é um potencial tensorial,  $A_\mu^{(P)}$  é um potencial pseudovetorial, e  $S^{(P)}$  é um potencial pseudoescalar. Todos os potenciais são reais, surgindo no caso do potencial pseudoescalar a necessidade da unidade imaginária  $i$  em (2.42) para não violar a condição (2.41).

## 2.4 A REPRESENTAÇÃO DE DIRAC

Existem diversos conjuntos de matrizes relacionadas por transformações unitárias, as chamadas representações, que satisfazem tanto a álgebra de Clifford quanto a propriedade (2.17). Ao

longo deste trabalho, será utilizada a representação de Dirac, também chamada de representação padrão

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

em que  $\mathbb{1}_2$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  e  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  (vide Apêndice A). Nesta representação, as componentes inferiores do espinor são suprimidas em relação às componentes superiores no limite não-relativístico, e a matriz  $\gamma^5$  possui a forma

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

### 3 A FORMULAÇÃO FEYNMAN-GELL-MANN DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Segundo Feynman e Gell-Mann, de fato são necessárias duas componentes para abrigar os dois possíveis estados de spin de uma partícula de spin 1/2, e mais duas para os dois possíveis sinais de energia (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958). Porém, a equação de Klein-Gordon tem apenas uma componente, embora também precise abrigar os dois possíveis sinais de energia. Em vez de ter duas componentes, esses possíveis sinais da energia são abrigados em uma equação diferencial de segunda ordem no tempo (veja Apêndice E.1 para a demonstração).

É possível transformar a equação de Klein-Gordon, entretanto, em uma equação de primeira ordem no tempo, ao custo de a função de onda se tornar um objeto de duas componentes em que cada uma abrange um dos dois sinais de energia possíveis. Isso pode ser feito para a equação com uma interação vetorial minimamente acoplada

$$[(p^\mu - qA^\mu)(p_\mu - qA_\mu) - m^2]\phi = 0, \quad (3.1)$$

definindo duas novas funções  $\varphi$  e  $\chi$ , tal que (WACHTER, 2010)

$$\phi = \varphi + \chi \quad (3.2)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qA^0\right)\phi = m(\varphi - \chi). \quad (3.3)$$

Expandindo a primeira parcela de (3.1) e separando a parte temporal do restante, obtemos

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qA^0\right)^2\phi = [(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m^2]\phi = 0. \quad (3.4)$$

Recorrendo à (3.3), construímos

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - qA^0\right)m(\varphi - \chi) &= [(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m^2]\phi \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - qA^0\right)(\varphi - \chi) &= \left[\frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m\right]\phi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.2) em (3.3) obtemos a seguinte expressão

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - qA^0\right)(\varphi + \chi) = m(\varphi - \chi) \quad (3.6)$$

A soma e a subtração das equações (3.5) e (3.6) produzirá duas equações de primeira ordem no tempo acopladas

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2(\varphi + \chi) + (m + qA^0)\varphi \quad (3.7)$$

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2(\varphi + \chi) - (m - qA^0)\chi. \quad (3.8)$$

Definindo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

obtemos a equação matricial

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + (m + qA^0) & \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 \\ -\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 & -\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - (m - qA^0) \end{pmatrix} \Psi. \quad (3.10)$$

Esta intrincada matriz pode ser escrita de forma mais elegante dispondo das matrizes de Pauli (A.1) e da matriz identidade  $2 \times 2$ , visto que estas formam uma base do espaço das matrizes  $2 \times 2$ . Teremos finalmente<sup>1</sup>

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[ \frac{i\sigma_2 + \sigma_3}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + \sigma_3 m + eA^0 \right] \Psi. \quad (3.11)$$

Dessa observação podemos inferir a possibilidade de se realizar o processo inverso para a equação de Dirac, *i.e.*, reduzir o número de componentes necessárias para duas ao dispêndio de aumentar o grau de equação a que elas obedecem. E ainda temos que garantir que a positividade da densidade de probabilidade seja mantida, diferentemente da equação de Klein-Gordon. Feynman declarou explicitamente uma predisposição por tal formulação da equação de Dirac (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958), que hoje é conhecida como formulação Feynman–Gell-Mann. Veremos que, por ser de segunda ordem nas coordenadas espaciais, esta formulação

<sup>1</sup> Para uma discussão pormenorizada desse procedimento, vide (FESHBACH; VILLARS, 1958)

também apresentará a vantagem de permitir o mapeamento das equações diferenciais parciais no espaço em sistemas descritos pela teoria de Schrödinger. Neste capítulo, exploraremos então a possibilidade de se obter o espinor de Dirac  $\Psi$  em termos de um espinor de duas componentes que obedece uma equação de segunda ordem, mas o faremos de forma nada semelhante ao feito acima para a equação de Klein-Gordon, pois disporemos do operador quiralidade e suas convenientes propriedades.

### 3.1 AUTOESTADOS DO OPERADOR QUIRALIDADE

Para obtenção da formulação de segunda ordem, nossa protagonista será a matriz  $\gamma^5$ , cujas propriedades foram estudadas na seção 2.2.1. Em primeiro lugar, analisemos os autoestados de  $\gamma^5$ . Para tanto, escrevemos a equação de autovalor com o par característico  $(\lambda, \Psi^{(\lambda)})$

$$\gamma^5 \Psi^{(\lambda)} = \lambda \Psi^{(\lambda)}, \quad (3.12)$$

tal que os autovalores  $\lambda$  podem facilmente ser obtidos explorando a propriedade (2.27). Multiplicando a equação (3.12) por  $\gamma^5$ , obtemos

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^2 \Psi^{(\lambda)} &= \lambda \gamma^5 \Psi^{(\lambda)} \\ \Psi^{(\lambda)} &= \lambda (\lambda \Psi^{(\lambda)}) \\ \Psi^{(\lambda)} &= \lambda^2 \Psi^{(\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

logo

$$\lambda^2 = 1 \quad \therefore \quad \lambda = \pm 1. \quad (3.14)$$

Agora busquemos os autoestados correspondentes, escrevendo  $\Psi^{(\lambda)}$  na forma

$$\Psi^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \Phi^{(\lambda)} \\ \Pi^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde as componentes superior e inferior  $\Phi^{(\lambda)}$  e  $\Pi^{(\lambda)}$ , respectivamente, são espinores de duas componentes. Explicitando a equação (3.12) na representação de Dirac [vide (2.44)], obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(\lambda)} \\ \Pi^{(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\Phi^{(\lambda)} \\ \lambda\Pi^{(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi^{(\lambda)} \\ \Phi^{(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\Phi^{(\lambda)} \\ \lambda\Pi^{(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Concluimos então que  $\Pi^{(\lambda)} = \lambda\Phi^{(\lambda)}$ , ou seja

$$\Psi^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \Phi^{(\lambda)} \\ \lambda\Phi^{(\lambda)} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

### 3.2 PROJETORES QUIRAIS

A partir do operador quiralidade  $\gamma^5$ , podemos definir os chamados projetores quirais (GRANDY, 2012)

$$P_\lambda = \frac{\mathbb{1} + \lambda\gamma^5}{2}, \quad \lambda = \pm 1, \quad (3.18)$$

onde  $\lambda$  corresponde justamente aos autovalores de  $\gamma^5$ . Os projetores quirais possuem as propriedades comuns a todos os projetores

$$P_\lambda^2 = P_\lambda, \quad (3.19)$$

$$P_\lambda P_{-\lambda} = 0, \quad (3.20)$$

$$\sum_\lambda P_\lambda = \mathbb{1}, \quad (3.21)$$

e de (2.33), deduzimos a propriedade particular

$$P_\lambda \gamma^\mu = \gamma^\mu P_{-\lambda}. \quad (3.22)$$

As projeções quirais de  $\Psi$ , definidas como

$$P_\lambda \Psi \equiv \Psi^{(\lambda)} \quad (3.23)$$

são justamente autoestados de  $\gamma^5$ , já que

$$\gamma^5 P_\lambda = \lambda P_\lambda, \quad (3.24)$$

e logo

$$\gamma^5 (P_\lambda \Psi) = \lambda (P_\lambda \Psi). \quad (3.25)$$

### 3.3 A FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN

Aplicando  $P_{-\lambda}$  na equação de Dirac com interação

$$P_{-\lambda} (\gamma^\mu p_\mu - m - \mathcal{V}) \Psi = 0, \quad (3.26)$$

nos atentaremos para a matriz potencial de interação (2.42), de onde observaremos que ela pode ser decomposta em duas partes: uma que anticomuta com  $\gamma^5$  e uma que comuta com  $\gamma^5$ ,  $\mathcal{V}_{\{\}} e \mathcal{V}_{[\]}$ , respectivamente. Explicitamente

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\{\}} + \mathcal{V}_{[\]}, \quad (3.27)$$

tal que

$$\mathcal{V}_{\{\}} = \gamma^\mu A_\mu + \gamma^\mu \gamma^5 A_\mu^{(P)}, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{V}_{[\ ]} = S + i\gamma^5 S^{(P)} + \sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (3.29)$$

Da propriedade (3.22), vemos que os termos  $\mathcal{V}_{\{\}}$  e  $\mathcal{V}_{[\ ]}$  herdam das relações (3.28) e (3.29) as seguintes propriedades com respeito aos projetores quirais  $P_\lambda$ ,

$$P_\lambda \mathcal{V}_{\{\}} = \mathcal{V}_{\{\}} P_{-\lambda}, \quad (3.30)$$

$$P_\lambda \mathcal{V}_{[\ ]} = \mathcal{V}_{[\ ]} P_\lambda. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.27) em (3.26), e utilizando as propriedades (3.30) e (3.31), obtemos

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}}) P_\lambda \Psi &= (m + \mathcal{V}_{[\ ]}) P_{-\lambda} \Psi \\ (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}}) \Psi^{(\lambda)} &= (m + \mathcal{V}_{[\ ]}) \Psi^{(-\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora vamos escrever  $\Psi^{(-\lambda)}$  em termos de  $\Psi^{(\lambda)}$ , o que nos permitirá usar a propriedade (3.21) para obter uma relação entre  $\Psi^{(\lambda)}$  e  $\Psi$ . Para tanto, é necessário impor uma nova restrição:  $(m + \mathcal{V}_{[\ ]})$  deve admitir uma inversa. Com essa restrição, podemos isolar  $\Psi^{(-\lambda)}$  em (3.32) multiplicando a equação por  $(m + \mathcal{V}_{[\ ]})^{-1}$  pela esquerda

$$\Psi^{(-\lambda)} = (m + \mathcal{V}_{[\ ]})^{-1} (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}}) \Psi^{(\lambda)}. \quad (3.33)$$

Logo

$$\sum_\lambda \Psi^{(\lambda)} = \Psi \therefore \Psi^{(\lambda)} + (m + \mathcal{V}_{[\ ]})^{-1} (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}}) \Psi^{(\lambda)} = \Psi. \quad (3.34)$$

Rearranjando a equação, teremos

$$\Psi = (m + \mathcal{V}_{[\ ]})^{-1} (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}} + m + \mathcal{V}_{[\ ]}) \Psi^{(\lambda)}. \quad (3.35)$$

Substituímos (3.35) na equação (2.35) para obter uma equação de segunda ordem para  $\Psi^{(\lambda)}$ . Concluimos então que as projeções quirais de  $\Psi$ , autoestados de  $\gamma^5$ , são justamente os espinores

que obedecem à equação de segunda ordem

$$\mathcal{O}\Psi^{(\lambda)} = 0, \quad (3.36)$$

onde

$$\mathcal{O} = (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}} - m - \mathcal{V}_{[\ ]})(m + \mathcal{V}_{[\ ]})^{-1}(\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}} + m + \mathcal{V}_{[\ ]}). \quad (3.37)$$

A equação (3.36) é a equação de Feynman–Gell-Mann para uma interação mais geral possível. Essa equação é uma generalização da equação obtida por Feynman e Gell-Mann, que exploraram apenas uma interação vetorial minimamente acoplada (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958), e por Brown, que além dessa também incluiu interações pseudovetoriais (BROWN, 1958). Além disso, a dedução apresentada aqui também constitui uma justificação, visto que Feynman e Gell-Mann não demonstram e não motivam a origem da relação (3.35), que é o ponto de partida deles, tomando-a apenas como um pressuposto dispositivo para aumentar a ordem da equação de Dirac. Deve-se observar que, exceto pelas parcelas que envolvem  $\mathcal{V}$ , a equação de Feynman–Gell-Mann se reduz à equação de Klein-Gordon. De fato, na ausência de interações, a dinâmica do férmion de spin 1/2 será idêntica àquela do bóson de spin 0, em virtude de ambos obedecerem à relação energia-momento relativística (E.4).

A nova equação é de segunda ordem, implicando na duplicidade do número de soluções. Porém, os autoestados de  $\gamma^5$  possuem apenas duas componentes independentes, de forma que ainda possuímos no total quatro componentes independentes. Contudo, será mostrado que  $\Phi^{(\lambda)}$  e  $\Phi^{(-\lambda)}$  obedecem uma mesma equação que possui  $\lambda$  como parâmetro, de maneira que basta resolvê-la para algum deles, e pela troca do sinal  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , é imediatamente obtido o outro.

Por meio da relação (3.21), podemos escrever  $\Psi$  em termos de  $\Phi^{(\lambda)}$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi^{(\lambda)} + \Phi^{(-\lambda)} \\ \lambda(\Phi^{(\lambda)} - \Phi^{(-\lambda)}) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

e de (2.20) podemos deduzir a densidade de probabilidade e a densidade de corrente de probabilidade em termos de  $\Phi^{(\lambda)}$

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \sum_{\lambda} \Phi^{(\lambda)\dagger} \Phi^{(\lambda)}, \\ \mathbf{J} &= 2 \sum_{\lambda} \lambda \Phi^{(\lambda)\dagger} \boldsymbol{\sigma} \Phi^{(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.4 A INTERAÇÃO ANTICOMUTANTE COM $\gamma^5$ NA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN

O foco principal deste trabalho será a forma de interação vetorial acoplada minimamente, em virtude desta possuir um mais amplo emprego na Física. Antes de nos restringirmos especificamente a esse grupo de interações, é instrutivo desenvolvermos o operador  $\mathcal{O}$  além da forma exposta em (3.37) para o conjunto maior de interações que anticomutam com  $\gamma^5$ , (3.28), visto que o que será desenvolvido a seguir pode, até certo ponto, ser adaptado para a interação pseudovetorial.

Fazendo  $\mathcal{V}_{\square} = 0$  em (3.37), temos

$$\mathcal{O} = (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}} - m) \frac{1}{m} (\gamma^\mu p_\mu - \mathcal{V}_{\{\}} + m). \quad (3.40)$$

Logo, rearranjando e expandindo o operador

$$\begin{aligned} m\mathcal{O} &= \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu + \gamma^\mu p_\mu m - \gamma^\mu p_\mu \mathcal{V}_{\{\}} - m\gamma^\mu p_\mu - m^2 + m\mathcal{V}_{\{\}} - \mathcal{V}_{\{\}} \gamma^\mu p_\mu + \mathcal{V}_{\{\}}^2 \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - \gamma^\mu p_\mu \mathcal{V}_{\{\}} - m^2 - \mathcal{V}_{\{\}} \gamma^\mu p_\mu + \mathcal{V}_{\{\}}^2 \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - m^2 + \mathcal{V}_{\{\}}^2 - (\gamma^\mu p_\mu \mathcal{V}_{\{\}} + \mathcal{V}_{\{\}} \gamma^\mu p_\mu). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Reescrevendo a primeira parcela de (3.41) usando a relação (2.8), conseguimos

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu &= g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - i\sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \\ &= p^\mu p_\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Explorando a troca de índices e a antissimetria de  $\sigma^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \mu \rightarrow \nu \quad \text{e} \quad \nu \rightarrow \mu, \\ \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu &= \sigma^{\nu\mu} p_\nu p_\mu \\
&= \sigma^{\nu\mu} p_\mu p_\nu \\
&= -\sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad \therefore \quad \sigma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Logo

$$m\mathcal{O} = p^\mu p_\mu - m^2 + \mathcal{V}_{\{\}}^2 - (\gamma^\mu p_\mu \mathcal{V}_{\{\}} + \mathcal{V}_{\{\}} \gamma^\mu p_\mu) \tag{3.45}$$

e a equação (3.36) torna-se

$$[p^\mu p_\mu - m^2 + \mathcal{V}_{\{\}}^2 - (\gamma^\mu p_\mu \mathcal{V}_{\{\}} + \mathcal{V}_{\{\}} \gamma^\mu p_\mu)] \Psi^{(\lambda)} = 0. \tag{3.46}$$

Essa equação é válida para uma combinação linear arbitrária das interações vetoriais e pseudovetoriais.

### 3.4.1 O potencial eletromagnético na formulação Feynman-Gell-Mann

A partir de agora, nos debruçaremos especificamente na interação vetorial, tal que  $\mathcal{V}_{\{\}} = q\gamma^\mu A_\mu$ , onde  $q$  é a carga elétrica da partícula, e o quadripotencial  $A^\mu$  é constituído de uma componente temporal  $A^0$  e de três componentes espaciais  $\mathbf{A}$ , *i.e.*,  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ , que são definidas por intermédio das relações

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{3.47}$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  representam os campos elétrico e magnético, respectivamente. Existe uma liberdade de escolha sobre  $A^0$  e  $\mathbf{A}$  que mantém a forma dos campos elétrico e magnético intactas, chamada liberdade de *gauge*. Convém fixar uma das escolhas possíveis, e escolheremos o *gauge* de Lorenz<sup>2</sup>

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{3.48}$$

Logo, desenvolvendo (3.46) e dispendo da relação (2.9)

<sup>2</sup> Costuma-se chamar erroneamente essa fixação de *gauge* de Lorentz (JACKSON; OKUN, 2001).

$$\begin{aligned}
& [p^\mu p_\mu - m^2 + q^2 \gamma^\mu \gamma^\nu A_\mu A_\nu - (\gamma^\mu \gamma^\nu q p_\mu A_\nu + q \gamma^\mu \gamma^\nu A_\mu p_\nu)] \Psi^{(\lambda)} = 0 \\
& [p^\mu p_\mu - m^2 + \gamma^\mu \gamma^\nu (q^2 A_\mu A_\nu - q p_\mu A_\nu - q A_\mu p_\nu)] \Psi^{(\lambda)} = 0 \\
& [p^\mu p_\mu - m^2 + (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})(q^2 A_\mu A_\nu - q p_\mu A_\nu - q A_\mu p_\nu)] \Psi^{(\lambda)} = 0 \\
& [p^\mu p_\mu - m^2 + g^{\mu\nu}(q^2 A_\mu A_\nu - q p_\mu A_\nu - q A_\mu p_\nu) \\
& \quad + i q \sigma^{\mu\nu}(p_\mu A_\nu + A_\mu p_\nu) - i q^2 \sigma^{\mu\nu} A_\mu A_\nu] \Psi^{(\lambda)} = 0. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

A primeira e a terceira parcelas de (3.49) podem ser compactadas na forma

$$(p^\mu - q A^\mu)(p_\mu - q A_\mu) = p^\mu p_\mu + g^{\mu\nu}(q^2 A_\mu A_\nu - q p_\mu A_\nu - q A_\mu p_\nu). \tag{3.50}$$

Busquemos agora simplificar a quarta parcela, explicitando o operador  $p_\mu$

$$\begin{aligned}
i q \sigma^{\mu\nu}(p_\mu A_\nu + A_\mu p_\nu) \Psi^{(\lambda)} &= -q \sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu + A_\mu \partial_\nu) \Psi^{(\lambda)} \\
&= -q \sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu) \Psi^{(\lambda)} - q \sigma^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \Psi^{(\lambda)} - q \sigma^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \Psi^{(\lambda)}. \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Manipulando (3.51) com (3.43), obtemos

$$\begin{aligned}
i q \sigma^{\mu\nu}(p_\mu A_\nu + A_\mu p_\nu) \Psi^{(\lambda)} &= -q \sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu) \Psi^{(\lambda)} - q \sigma^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \Psi^{(\lambda)} + q \sigma^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \Psi^{(\lambda)} \\
&= -q \sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu) \Psi^{(\lambda)}. \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Empregando mais uma vez (3.43), podemos escrever (3.52) em termos do tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B & -B_y \\ -E_y & B & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

tal que

$$\begin{aligned}
iq\sigma^{\mu\nu}(p_\mu A_\nu + A_\mu p_\nu) &= -\frac{q}{2}(\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + \sigma^{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu) \\
&= -\frac{q}{2}(\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu - \sigma^{\mu\nu}\partial_\nu A_\mu) \\
&= -\frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= -\frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Assim como (3.44), a última parcela de (3.49) será nula. Finalmente, a equação (3.49) se reduzirá à

$$\left[ (p^\mu - qA^\mu)(p_\mu - qA_\mu) - m^2 - \frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right] \Psi^{(\lambda)} = 0, \tag{3.55}$$

que é a equação de Feynman–Gell-Mann original. Desenvolvendo a última parcela, entendemos que esta representa o acoplamento do campo eletromagnético com o spin (vide Apêndice E.2.2), visto que

$$\begin{aligned}
-\frac{q}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{iq}{2} \{ \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} + \gamma^1 [\gamma^0(-E_x) + \gamma^2(-B) + \gamma^3(B_y)] \\
&\quad + \gamma^2 [\gamma^0(E_y) + \gamma^1(B) + \gamma^3(-B_x)] + 2\gamma^3 [\gamma^0(E_z) + \gamma^1(-B_y) + \gamma^2(B_x)] \} \\
&= -\frac{iq}{2} (2\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} + 2\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} - 2i\gamma^2\gamma^3 B_x - 2i\gamma^3\gamma^1 B_y - 2i\gamma^1\gamma^2 B) \\
&= -iq\boldsymbol{\Sigma} \cdot \gamma^5 \mathbf{E} + q\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \\
&= q\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\gamma^5 \mathbf{E}) \\
&= 2q\mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} - i\gamma^5 \mathbf{E}).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}$  está relacionado com o operador spin de Dirac pela relação (E.28). Desenvolvamos (3.55) em termos de  $\Phi^{(\lambda)}$ . com uso de (3.56). Basta observar que todas as parcelas envolvem matrizes diagonais, exceto  $-iq\boldsymbol{\Sigma} \cdot \gamma^5 \mathbf{E}$ . Para esta, teremos, conforme (E.30)

$$\begin{aligned}
\Sigma \cdot \gamma^5 \mathbf{E} &= \gamma^5 \Sigma \cdot \mathbf{E} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Logo, é de imediata conclusão que

$$[(p^\mu - qA^\mu)(p_\mu - qA_\mu) - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})]\Phi^{(\lambda)} = 0. \tag{3.58}$$

Restringindo-nos aos casos em que tanto  $\mathbf{B}$  quanto  $\mathbf{E}$  independem do tempo, é possível separar a equação nas variáveis temporal e espaciais empregando o mesmo *Ansatz* comumente usado na teoria de Schrödinger (D.10). Explicitando as partes temporal e espacial da primeira parcela de (3.58)

$$\left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - qA^0 \right)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}) \right] \Phi^{(\lambda)} = 0, \tag{3.59}$$

a separação de variáveis será feita ao observar que o espinor de Dirac pode ser fatorado na forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\varepsilon t}, \tag{3.60}$$

onde  $\varepsilon$  é a energia do férmion, se os campos elétrico e magnético  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  independerem do tempo, *i.e.*, se as expressões (3.47) forem

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{3.61}$$

tal que  $A^0 = A^0(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Logo, se o espinor de Dirac pode ser fatorado na forma (3.60), é evidente de (3.17) que  $\Phi^{(\lambda)}$  também pode

$$\Phi^{(\lambda)} = \tilde{\varphi}^{(\lambda)}(\mathbf{r})e^{-i\varepsilon t}. \tag{3.62}$$

A princípio, poderia se esperar que  $\varepsilon$  também dependesse de  $\lambda$ , visto que há dependência em  $\Phi^{(\lambda)}$ . Para confirmar a independência em  $\lambda$  de  $\varepsilon$ , basta perceber que as projeções quirais  $\Psi^{(\lambda)}$  possuem a mesma autoenergia que  $\Psi$ . Observe que (3.60) dita que

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \varepsilon\Psi \\ iP_\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \varepsilon P_\lambda\Psi \\ i\frac{\partial\Psi^{(\lambda)}}{\partial t} &= \varepsilon\Psi^{(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Vamos expandir a equação (3.59)

$$\begin{aligned} &\left[ \left( i\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - 2qA^0 i\frac{\partial}{\partial t} + (qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}) \right] \Phi^{(\lambda)} = 0 \\ &[\varepsilon^2 - 2qA^0\varepsilon + (qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})] \tilde{\varphi}^{(\lambda)} e^{-i\varepsilon t} = 0 \\ &[(\varepsilon - qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})] \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Assim, o espinor de Dirac é

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} + \tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \\ \lambda(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} - \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}) \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t}, \quad (3.65)$$

tal que a densidade de probabilidade e de corrente de probabilidade são independentes do tempo e dadas por

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \sum_{\lambda} \tilde{\varphi}^{(\lambda)\dagger} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}, \\ \mathbf{J} &= 2 \sum_{\lambda} \lambda \tilde{\varphi}^{(\lambda)\dagger} \boldsymbol{\sigma} \tilde{\varphi}^{(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Embora (3.65) não esteja escrito explicitamente em termos de um único espinor de duas componentes, é evidente de (3.64) que basta resolver a equação para  $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}$ , e por uma simples troca de sinal  $\lambda \rightarrow -\lambda$  obtemos de imediato o outro espinor, de maneira que, em última instância, a determinação do espinor de Dirac depende de resolver apenas uma equação de segunda ordem para um espinor de duas componentes, como desejado.

Observando a equação (3.32), podemos extrair uma relação que será de grande utilidade nas páginas a seguir. Basta perceber que esta constitui um vínculo entre as duas projeções quirais. Desenvolvendo-a em termos de  $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
m \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \\ -\lambda\tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \end{pmatrix} e^{-i\epsilon t} &= \gamma^\mu (p_\mu - qA_\mu) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} \\ \lambda\tilde{\varphi}^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{-i\epsilon t} \\
m \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \\ -\lambda\tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \end{pmatrix} e^{-i\epsilon t} &= \left[ \gamma^0 \left( i \frac{\partial}{\partial t} - qA^0 \right) - \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \right] \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} \\ \lambda\tilde{\varphi}^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{-i\epsilon t} \\
m \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \\ -\lambda\tilde{\varphi}^{(-\lambda)} \end{pmatrix} &= [\gamma^0 (\epsilon - qA^0) - \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})] \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} \\ \lambda\tilde{\varphi}^{(\lambda)} \end{pmatrix}. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Logo, extraímos que

$$m\tilde{\varphi}^{(-\lambda)} = [\epsilon - qA^0 - \lambda\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})]\tilde{\varphi}^{(\lambda)}. \tag{3.68}$$

Somando em  $\lambda$

$$m(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} - \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}) = -(\epsilon - qA^0)(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} - \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}) + \lambda\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} + \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}), \tag{3.69}$$

logo

$$(\epsilon - qA^0 + m)(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} - \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}) = \lambda\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} + \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}). \tag{3.70}$$

Concluimos que

$$\lambda(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} - \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}) = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{\epsilon - qA^0 + m}(\tilde{\varphi}^{(\lambda)} + \tilde{\varphi}^{(-\lambda)}). \tag{3.71}$$

### 3.5 O LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO NA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN

Um dos primeiros triunfos da equação de Dirac foi que no limite não-relativístico, obtém-se naturalmente a equação de Pauli (vide Apêndice E.2.3). Presumivelmente, a formulação Feynman–Gell-Mann deve fornecer resultado análogo. Tomemos o limite não-relativístico

$$\varepsilon \approx m \quad , \quad |qA^0| \ll m \quad , \quad |q\mathbf{A}| \ll m \quad , \quad |\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})| \ll m. \quad (3.72)$$

na equação (3.64)

$$\begin{aligned} & [\varepsilon^2 - m^2 - 2\varepsilon qA^0 + (qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})] \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = 0 \\ & [(\varepsilon + m)(\varepsilon - m) - 2\varepsilon qA^0 + (qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})] \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = 0 \\ & [2m(\varepsilon - m) - 2mqA^0 + (qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})] \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dispondo da definição de energia não relativística (E.57), temos

$$[2m\varepsilon^{NR} - 2mqA^0 + (qA^0)^2 - (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E})] \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = 0. \quad (3.74)$$

Rearranjando a equação para uma forma mais familiar

$$\varepsilon^{NR} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 + \frac{(qA^0)^2}{2m} - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + i\lambda \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \right] \tilde{\varphi}^{(\lambda)}. \quad (3.75)$$

De (3.65), se espera que  $\tilde{\varphi}^{(\lambda)}$  obedeça à equação de Pauli no limite não-relativístico (vide Apêndice E). Matematicamente, o limite não-relativístico é descrito pelo limite  $c \rightarrow \infty$ . Porém, podemos escolher como nos convir até qual ordem da potência de  $1/c$  iremos considerar como não nula. A equação de Pauli é uma aproximação de primeira ordem, ou seja, termos cuja potência de  $1/c$  são maiores que 1 são desprezadas. Momentaneamente, iremos deixar de utilizar as unidades naturais, de maneira que  $\hbar$  e  $c$  serão explicitados. Logo, a equação (3.75) será

$$\varepsilon^{NR} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A})^2 + qA^0 + \frac{(qA^0)^2}{2mc^2} - \frac{\hbar q}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + i\lambda \frac{\hbar q}{2mc^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \right] \tilde{\varphi}^{(\lambda)}. \quad (3.76)$$

É evidente que podemos desprezar as terceira e última parcelas do segundo membro em uma aproximação não-relativística mantendo apenas termos de primeira ordem. Logo, retornando

para as unidades naturais, o limite não-relativístico de primeira ordem da equação de Feynman–Gell-Mann será

$$\varepsilon^{NR} \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = \left[ \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \tilde{\varphi}^{(\lambda)}. \quad (3.77)$$

### 3.6 REVISITANDO A PARTÍCULA LIVRE COM A FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN

É instrutivo abordar pela formulação de Feynman–Gell-Mann a partícula livre de qualquer interação. Para esta, a equação (3.64) se reduz, como esperado, para a equação de Pauli

$$(\varepsilon^2 - m^2 - \mathbf{p}^2) \tilde{\varphi}^{(\lambda)} = 0, \quad (3.78)$$

cuja solução é  $\tilde{\varphi}^{(\lambda)} = \phi^{(\lambda)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ , onde  $\phi^{(\lambda)}$  é um espinor de duas componentes constantes indeterminadas. Como ambos os espinores são iguais, não é necessário explicitar o sobrescrito  $\lambda$ . Vejamos como ficará a densidade de probabilidade dada por (3.66)

$$\rho = 4\phi^\dagger \phi. \quad (3.79)$$

Para classificar os estados da partícula livre e determinar  $\phi$ , podemos observar que um número quântico útil é a helicidade, definida como autovalor da projeção do operador helicidade (E.47). Vamos supor que o elétron se propaga no sentido positivo do eixo  $z$ , tal que  $\mathbf{p} = (0, 0, |\mathbf{p}|)$ . Logo

$$\Lambda_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

cujos autovalores são  $s = \pm 1$ . Portanto, os autoestados  $\phi_s$  serão

$$\phi_s = \chi_s \quad (3.81)$$

Obviamente, a partícula também será autoestado do operador momento

$$\hat{\mathbf{p}}\phi_{|\mathbf{p}|s} = |\mathbf{p}|\phi_{|\mathbf{p}|s} \quad (3.82)$$

Por fim, normalizando  $\tilde{\varphi}_{|\mathbf{p}|s}^{(\lambda)}$ , temos que

$$\tilde{\varphi}_{|\mathbf{p}|s}^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\chi_s e^{i|\mathbf{p}|z}. \quad (3.83)$$

Logo, dispendo de (3.71), as autosoluções (3.65) serão

$$\Psi_{\varepsilon,|\mathbf{p}|,s} = \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{s|\mathbf{p}|}{\varepsilon + m}\chi_s \end{pmatrix} e^{-i(\varepsilon t - |\mathbf{p}|z)}. \quad (3.84)$$

### 3.7 COMENTÁRIO SOBRE O ARTIGO “*THEORY OF THE FERMION INTERACTION*”

É válido comentar algumas diferenças importantes na abordagem que foi tomada neste trabalho em relação ao artigo de Feynman e Gell-Mann que o motiva, intitulado “*Theory of the Fermion Interaction*” (FEYNMAN; GELL-MANN, 1958).

Não é discutido pelos autores supracitados a origem da relação que permite obter uma equação de segunda ordem, *i.e.*, a equação (3.35), onde  $\mathcal{V} = \gamma^\mu A_\mu$  (os autores tratam  $A_\mu$  como a energia potencial, enquanto neste trabalho a energia potencial é dada por  $qA_\mu$ ). Ela é apenas inserida como um dispositivo capaz de gerar uma equação de segunda ordem. Para lidar com a duplicidade no número de soluções, eles também exploram a matriz  $\gamma^5$  ao observar que esta comuta com o operador de segunda ordem, e possui uma redundância<sup>3</sup> nas componentes dos autoestados (vide (3.17)).

Ademais, é dito pelos autores mencionados nos parágrafos precedentes: “*We may select, say, the first set*”, *i.e.*, que pode-se pegar um dos dois possíveis autoestados de  $\gamma^5$ , e em seguida, é afirmado: “*Then we can put the solutions ...into one-to-one correspondence with the Dirac equation*”<sup>4</sup>. De fato isso é possível, bastando resolver a equação (3.58) para a componente do autoestado escolhido<sup>5</sup>, e colocando a solução na relação (3.35) para obter o espinor original

<sup>3</sup> É usada pelos autores uma definição diferente de  $\gamma^5$ , embora os autoestados possuam a mesma redundância.

<sup>4</sup> O que eles chamam de soluções correspondem neste trabalho a  $\Psi^{(\lambda)}$ .

<sup>5</sup> É escolhido o autoestado de  $\gamma^5$  cuja forma equivale ao autoestado com autovalor -1 na nossa definição.

$$\Psi = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} [\varepsilon - qA^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + m]\Phi \\ [\varepsilon - qA^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) - m]\Phi \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

onde  $\Phi$  é o espinor de duas componentes que compõe o autoestado escolhido de  $\gamma^5$ .

Não é discutido a normalização de  $\Psi$  em termos de  $\Phi$ , mas é de fácil observação que isso poderia levar a um cálculo muito difícil, dada a forma da densidade de probabilidade

$$\Psi^\dagger \Psi = \frac{2}{m^2} \Phi^\dagger \left\{ [\varepsilon - qA^0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})]^2 + m^2 \right\} \Phi. \quad (3.86)$$

Neste trabalho, assim como em Brown (BROWN, 1958) — embora nossos métodos não sejam os mesmos —, são usados ambos os autoestados de  $\gamma^5$ , que são as projeções quirais de  $\Psi$ , de forma que o espinor de Dirac (3.65) possui uma forma muito mais conveniente. Finalmente, outra vantagem da forma usada neste trabalho é que a aproximação não-relativística do espinor pode ser obtido de forma muito mais simples, como demonstrado na seção (3.5), dado que a componente superior, que prevalece no limite não-relativístico, é expressa de forma direta, diferente de (3.85), em que ainda há derivadas a serem tomadas.

### 3.8 CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN EM UM MUNDO COM 2+1 DIMENSÕES

Em 3+1 dimensões, o espinor de Dirac possui quatro componentes e a matriz potencial de interação mais geral possível é dada por (2.42). Já o mundo com 2+1 dimensões é muito diferente: o espinor de Dirac possui duas componentes e há apenas quatro matrizes  $2 \times 2$  linearmente independentes, que formam estruturas escalares e vetoriais, de maneira que a interação mais geral possível será

$$\mathcal{V} = S + q\gamma^\mu A_\mu, \quad (3.87)$$

tal que as matrizes  $\gamma^\mu$  podem ser representadas por matrizes  $2 \times 2$ , e a matriz identidade junto das três matrizes de Pauli constituem uma base para este espaço vetorial. Ademais, elas satisfazem à álgebra  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}_2$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ .

Adequar os conhecimentos no mundo em 3+1 dimensões para o mundo em 2+1 dimensões pode ser perigoso. Em 1978, de Vega salientou que o spin de um férmion em um espaço-tempo

com 2+1 dimensões não é um grau de liberdade independente e que o estado quântico pode ser completamente especificado pelo momento linear e sinal da energia (VEGA, 1978). Ademais, as matrizes  $\gamma^\mu$  possuem duas representações não-equivalentes

$$\gamma^0 = \sigma_3 \quad , \quad \gamma^1 = \sigma_3 \sigma_1 \quad , \quad \gamma^2 = s \sigma_3 \sigma_2, \quad (3.88)$$

em que  $s = \pm 1$ .

Em três recentes trabalhos (OLIVEIRA; BORGES; SOUSA, 2019; OLIVEIRA; MALUF; ALMEIDA, 2019; OLIVEIRA et al., 2020), em que os autores se propõem a estudar sistemas envolvendo massas dependentes da posição, são construídos dois projetores, “left-handed” e “right-handed”,  $P_L$  e  $P_R$ , respectivamente, definidos como

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad , \quad P_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (3.89)$$

que claramente são o que neste trabalho chamamos de projetores quirais (3.18). Contudo, eles definem  $\gamma^5 = \sigma_1$ , o que leva a um problema fatal: a propriedade (3.22) não é mais válida, e ela é fulcral para a obtenção da equação de segunda ordem. Este fato não foi percebido pelos autores, que prosseguiram o desenvolvimento tomando-a como verdadeira. Eles em seguida incorrem em um segundo erro ao obter a equação para a projeção  $P_R \Psi = \Psi_R$  (equivalente a  $\Psi^{(+)}$  neste trabalho)

$$[\gamma^\mu p_\mu - m(\mathbf{r})][\gamma^\mu p_\mu + m(\mathbf{r})]\Psi_R = 0, \quad (3.90)$$

em vez de

$$[\gamma^\mu p_\mu - m(\mathbf{r})] \frac{1}{m(\mathbf{r})} [\gamma^\mu p_\mu + m(\mathbf{r})] \Psi_R = 0. \quad (3.91)$$

A incorreção em (3.90) consiste em os autores não terem considerado a atuação do operador momento — que é derivativa — em  $1/m(\mathbf{r})$ . Isso está em flagrante contradição com o que os próprios autores afirmam no início de um destes trabalhos, *ipsis litteris*: “...the mass  $m(\mathbf{r})$  is an operator; it does not commute more with the moment operator...” (OLIVEIRA; BORGES; SOUSA, 2019).

Ademais, a equação quadrática leva a uma duplicidade no número de soluções, mas os autores não discutem como se livrar das componentes espúrias. Também não são discutidas as duas representações não-equivalentes, e os autores escolhem uma delas sem justificativas. Deve-se ressaltar também que os autores não se sustentam no trabalho de Feynman e Gell-Mann

— ou ao menos não o citam.

A crítica aqui exposta está publicada sob os títulos *Comment on 'Energy Spectrum of a Dirac Particle with Position-Dependent Mass Under the Influence of the Aharonov-Casher Effect'* (MENDROT; CASTRO, 2021) e *Comment on 'The relativistic Aharonov-Bohm-Coulomb system with position-dependent mass'* (MENDROT; CASTRO, 2020), ambas nas respectivas revistas de publicação dos trabalhos criticados.

## 4 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE DIRAC VIA FORMULAÇÃO FEYNMAN–GELL-MANN

A busca por soluções analíticas da equação de Dirac possui uma importância teórica auto-evidente, uma vez que elas fornecem a descrição mais elementar que nossos conhecimentos permitem obter acerca de férmions de spin 1/2. Além disso, elas também são de vital importância para obter as correções relativísticas de maior ordem para a teoria não-relativística.

Neste capítulo será mostrado como a formulação Feynman–Gell-Mann desenvolvida no capítulo precedente permite obter equações que podem ser mapeadas em equações já conhecidas da teoria de Schrödinger (vide referências (AUVIL; BROWN, 1978; LAM, 1970; ITZYKSON; ZUBER, 1980) para exemplos disso), fornecendo soluções analíticas que permitem construir completamente o espinor de Dirac original. Isso será realizado para sistemas cujas simetrias tornam conveniente usar sistemas de coordenadas curvilíneas.

### 4.1 SISTEMAS CILINDRICAMENTE SIMÉTRICOS

O nosso caso de interesse será o de sistemas cuja expressão das equações no sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  é mais vantajoso, devido às simetrias (veja Apêndice B). Imporemos então algumas restrições às formas dos potenciais  $A^\mu$  de forma a obter equações radiais passíveis de solução analítica.

Chamando o operador da equação (3.64) de  $Q^{(\lambda)}$ , vamos em primeiro lugar convertê-lo para coordenadas cilíndricas, e expandir os operadores diferenciais, lembrando que da independência da forma dos campos no tempo, o *gauge* de Lorenz (3.48) se reduz ao *gauge* de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$Q^{(\lambda)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2iq \left( A_r \frac{\partial}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + (\varepsilon - qA^0)^2 - (q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}), \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{E} = \hat{r}E_r + \hat{\theta}E_\theta + \hat{k}E_z$  e  $\mathbf{B} = \hat{r}B_r + \hat{\theta}B_\theta + \hat{k}B_z$  possuem a forma

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial A^0}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial A^0}{\partial \theta} - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial A^0}{\partial z} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right].$$

#### 4.1.1 Momento linear conservado na direção $z$

A primeira restrição será que o movimento da partícula deve ser livre na direção  $z$ . Fisicamente, isso significa que não há qualquer aceleração nessa direção, ou seja, a componente na direção  $z$  do momento linear é conservada. Em termos do espinor de Dirac, isso reflete em que ele deva ser autoestado simultâneo de  $\mathcal{Q}^{(\lambda)}$  e da componente  $z$  do operador momento linear  $\hat{\mathbf{p}}$ , o que em última instância permite realizar uma separação de variáveis da equação. Para o espinor ser autoestado de  $\hat{p}_z$ , é necessário que

$$[\hat{p}_z, \mathcal{Q}^{(\lambda)}] = 0. \quad (4.3)$$

Basta observar (4.1) para perceber que isto só é satisfeito se os potenciais  $A^0$  e  $\mathbf{A}$  independem de  $z$ . Isto reduz  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  para

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial A^0}{\partial r} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial A^0}{\partial \theta}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right],$$

e o *gauge* de Coulomb se reduz para

$$\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (4.5)$$

Com essas condições, a equação (3.64) pode ser separada usando o *Ansatz*

$$\tilde{\varphi}^{(\lambda)}(r, \theta, z) = \hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)}(r, \theta) e^{ik_z z}, \quad (4.6)$$

em que  $\tilde{\varphi}$  é autoestado da componente  $z$  do operador momento linear  $\hat{\mathbf{p}}$ , assim como procedemos para separar o tempo em (3.62). Isso transforma a equação (3.64) para

$$\mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)} \hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)} = 0, \quad (4.7)$$

onde o operador (4.1), se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)} = & \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2iq \left( A_r \frac{\partial}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + iA_z k_z \right) - k_z^2 \\ & + (\varepsilon - qA^0)^2 - (q\mathbf{A})^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

e as densidades de probabilidade e de corrente de probabilidade serão, respectivamente

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \sum_{\lambda} \hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)\dagger} \hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)}, \\ \mathbf{J} &= 2 \sum_{\lambda} \lambda \hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)\dagger} \boldsymbol{\sigma} \hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Potenciais axialmente simétricos

Uma outra restrição que poderia simplificar significativamente a equação é supor que o potencial seja axialmente simétrico, *i.e.*,  $A^0 = A^0(r)$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r)$ , que reduz os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  para

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{dA^0}{dr}, \quad \mathbf{B} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{dA_z}{dr} + \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr}, \quad (4.10)$$

onde vemos que  $A_r$  não contribui mais para a forma dos campos, e o *gauge* fixado o define de forma unívoca, a menos de uma constante

$$\frac{d(rA_r)}{dr} = 0 \quad \therefore \quad A_r = \frac{C}{r}. \quad (4.11)$$

Como  $A_r$  não possui significado físico, todos os termos de (4.8) que o envolvem podem ser eliminados da equação. Isto poderia ser feito simplesmente fazendo  $C = 0$  em (4.11), mas há uma forma mais elegante de mostrar que se os campos independem de  $A_r$ , a equação para  $\hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)}$  também independerá, tornando evidente que este termo não interfere no valor das observáveis. Isso pode ser mostrado com a seguinte transformação

$$\hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)}(r, \theta) = \varphi_{k_z}^{(\lambda)}(r, \theta)e^{iqC \ln r}. \quad (4.12)$$

Substituindo em (4.8), obtemos que o espinor  $\varphi_{k_z}^{(\lambda)}$  obedece à equação que  $\hat{\varphi}_{k_z}^{(\lambda)}$  obedeceria se  $A_r = 0$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)} = & \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2iq \left( A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + iA_z k_z \right) - k_z^2 \\ & + (\varepsilon - qA^0)^2 - (qA_\theta)^2 - (qA_z)^2 - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Desta forma, as densidades de probabilidade e de corrente de probabilidade serão, respectivamente

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \sum_{\lambda} \varphi_{k_z}^{(\lambda)\dagger} \varphi_{k_z}^{(\lambda)}, \\ \mathbf{J} &= 2 \sum_{\lambda} \lambda \varphi_{k_z}^{(\lambda)\dagger} \boldsymbol{\sigma} \varphi_{k_z}^{(\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

### 4.1.3 Autoestados da componente $z$ do momento angular total

É conveniente representar as parcelas que envolvem derivadas com respeito à  $\theta$  em termos da componente na direção  $z$  do momento angular  $L_z$  (B.15). Podemos também unir parte das parcelas que envolvem  $k_z$  e  $A_z$  em um quadrado perfeito. Logo, (4.13) se converte em

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)} = & \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} L_z^2 + 2qA_\theta \frac{1}{r} L_z + (\varepsilon - qA^0)^2 - (qA_\theta)^2 - (k_z - qA_z)^2 \\ & - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Analisemos as relações de comutação entre  $\mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)}$  e as componentes na direção  $z$  dos operadores momento angular  $L_z$  e momento angular de spin  $s_z$ . Começemos por  $L_z$ . Como os potenciais são radiais, basta avaliar se este comuta ou não com a última parcela de (4.15). Nos atentando para a forma dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dadas por (4.10), dispondo da propriedade (A.6) das matrizes de Pauli e do operador spin (A.10), obtemos (vide Apêndice B)

$$\begin{aligned}
[L_z, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - i\lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}] &= [L_z, \sigma_\theta B_\theta + \sigma_z B_z - i\lambda \sigma_r E_r] \\
&= [L_z, \sigma_\theta] B_\theta + [L_z, \sigma_z] B_z - i\lambda [L_z, \sigma_r] E_r.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Utilizando (B.19), (B.20) e (B.21) concluímos que

$$[L_z, \mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)}] = iq (\sigma_r B_\theta + i\lambda \sigma_\theta E_r) \tag{4.17}$$

Analisemos agora o operador  $s_z$ . Das mesmas considerações feitas para  $L_z$ , obtemos

$$\begin{aligned}
[s_z, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - i\lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}] &= [s_z, \sigma_\theta B_\theta + \sigma_z B_z - i\lambda \sigma_r E_r] \\
&= [s_z, \sigma_\theta] B_\theta + [s_z, \sigma_z] B_z - i\lambda [s_z, \sigma_r] E_r
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Empregando (A.5), concluímos que

$$[s_z, \mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)}] = -iq (\sigma_r B_\theta + i\lambda \sigma_\theta E_r). \tag{4.19}$$

Assim como em (4.17), a relação (4.19) nos permite avaliar diretamente qual configuração dos campos nos permite obter soluções que são autoestados de  $s_z$ . Finalmente, logramos um resultado importante: comparando (4.17) e (4.19), imediatamente observamos que um compensa o outro, de sorte que para as restrições até aqui impostas, a componente na direção  $z$  do momento angular total  $j_z$  será uma constante de movimento independente da configuração dos campos, *i.e.*

$$j_z = L_z + s_z \quad , \quad [j_z, \mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)}] = 0, \tag{4.20}$$

então podemos buscar soluções que são autoestados do operador  $j_z$

$$j_z \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)} = \kappa \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)} \quad , \quad \kappa = l + \frac{s}{2} = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \tag{4.21}$$

em que  $l$  é autovalor de  $L_z$  (vide Apêndice B) e  $s$  é autovalor de  $s_z$  (vide Apêndice A), e

$$\mathcal{Q}_{k_z}^{(\lambda)} \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)} = 0. \tag{4.22}$$

As densidades de probabilidade e de corrente de probabilidade, em termos deste espinor, serão, respectivamente

$$\begin{aligned}\rho &= 2 \sum_{\lambda} \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda) \dagger} \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}, \\ \mathbf{J} &= 2 \sum_{\lambda} \lambda \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda) \dagger} \boldsymbol{\sigma} \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

A forma de  $j_z$  em (4.20) nos permite propor que  $\varphi_{k_z \kappa}$  pode ser construído a partir dos autoestados de  $s_z$  (vide Apêndice A) e  $L_z$  (vide Apêndice B). O operador  $s_z$  é hermitiano, logo possui a propriedade de que seus autoestados  $\chi_s$ , dados por (A.12), compõem uma base para os espinores de duas componentes (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 2005). Como  $\Theta_l$ , dado por (B.18), é uma função apenas de  $\theta$ , o processo de construir o espinor a partir dos autoestados de  $s_z$  e  $L_z$  constitui, em última instância, uma separação de variáveis. Proporemos então que  $\varphi_{k_z \kappa}$  seja da forma

$$\varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}(r, \theta) = \chi_+ F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)}(r) \Theta_l(\theta) + \chi_- F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)}(r) \Theta_{\bar{l}}(\theta) = \begin{pmatrix} F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)}(r) \Theta_l(\theta) \\ F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)}(r) \Theta_{\bar{l}}(\theta) \end{pmatrix}.\tag{4.24}$$

Aplicando  $j_z$  no espinor, temos

$$\begin{aligned}j_z \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}(r, \theta) &= (L_z + s_z)(\chi_+ F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \Theta_l + \chi_- F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \Theta_{\bar{l}}) \\ &= \left(l + \frac{1}{2}\right) \chi_+ F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \Theta_l + \left(\bar{l} - \frac{1}{2}\right) \chi_- F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \Theta_{\bar{l}} \\ &= \begin{pmatrix} \left(l + \frac{1}{2}\right) F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)}(r) \Theta_l(\theta) \\ \left(\bar{l} - \frac{1}{2}\right) F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)}(r) \Theta_{\bar{l}}(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \kappa \begin{pmatrix} F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)}(r) \Theta_l(\theta) \\ F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)}(r) \Theta_{\bar{l}}(\theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Concluimos que

$$\begin{cases} l + \frac{1}{2} = \kappa & \therefore l = \kappa - \frac{1}{2}; \\ \bar{l} - \frac{1}{2} = \kappa & \therefore \bar{l} = \kappa + \frac{1}{2}.\end{cases}\tag{4.26}$$

É conveniente definir o harmônico circular espinorial

$$h_{\kappa}^{(s)}(\theta) \equiv \chi_s \Theta_{\kappa - \frac{s}{2}}(\theta), \quad (4.27)$$

que possui as propriedades

$$j_z h_{\kappa}^{(s)} = \kappa h_{\kappa}^{(s)}, \quad (4.28)$$

$$\sigma_r h_{\kappa}^{(s)} = h_{\kappa}^{(-s)}, \quad (4.29)$$

$$\int_0^{2\pi} h_{\bar{\kappa}}^{(\bar{s})\dagger} h_{\kappa}^{(s)} = \delta_{\bar{s}s} \delta_{\bar{\kappa}\kappa}. \quad (4.30)$$

Logo, o espinor será

$$\varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}(r, \theta) = \sum_s F_{k_z \kappa}^{(\lambda, s)}(r) h_{\kappa}^{(s)}(\theta) = \begin{pmatrix} F_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)}(r) \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}}(\theta) \\ F_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)}(r) \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

e a densidade de probabilidade radial, em termos de  $F_{k_z \kappa}^{(\lambda, s)}$ , será<sup>1</sup>

$$\rho = 2 \sum_{\lambda} \sum_s \left| F_{k_z \kappa}^{(\lambda, s)} \right|^2. \quad (4.32)$$

Por conveniência, façamos a redefinição

$$\varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} h_{\kappa}^{(+)} + i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} h_{\kappa}^{(-)} \right) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)}(r) \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}}(\theta) \\ i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)}(r) \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

e a densidade de probabilidade radial correspondente é

$$\rho = \frac{1}{2r} \sum_{\lambda} \sum_s \left| f_{k_z \kappa}^{(\lambda, s)} \right|^2. \quad (4.34)$$

Recapitulando, temos que  $\varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)}$  obedece à equação

<sup>1</sup> A partir daqui, não será explicitada a densidade de corrente de probabilidade, por não apresentar uma forma compacta e simples de se escrever, embora não seja difícil obtê-la.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} L_z^2 + 2qA_\theta \frac{1}{r} L_z + (\varepsilon - qA^0)^2 - (qA_\theta)^2 - (k_z - qA_z)^2 \right. \\ \left. - m^2 + q\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{B} - i\lambda\mathbf{E}) \right] \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)} = 0 \quad (4.35)$$

Explicitando (4.33) na equação, obteremos as equações radiais para  $f_{k_z \kappa}^{(\lambda, s)}$ . Fazendo uso de (B.9), obteremos

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2} + (\varepsilon - qA^0)^2 - (qA_\theta)^2 - (k_z - qA_z)^2 - m^2 \right] \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}} \\ i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} (\kappa - \frac{1}{2})^2 f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}} \\ (\kappa + \frac{1}{2})^2 i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} + 2qA_\theta \frac{1}{r} \begin{pmatrix} (\kappa - \frac{1}{2}) f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}} \\ (\kappa + \frac{1}{2}) i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ + qB_\theta \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} e^{-i\theta} \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}} \\ i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} e^{i\theta} \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}} \end{pmatrix} + qB_z \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}} \\ -i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} + q\lambda E_r \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} e^{-i\theta} \Theta_{\kappa + \frac{1}{2}} \\ -i f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} e^{i\theta} \Theta_{\kappa - \frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.36)$$

Percebamos que  $e^{\pm i\theta} \Theta_{\kappa \mp \frac{1}{2}} = \Theta_{\kappa \pm \frac{1}{2}}$ . Logo, como todas as parcelas possuem  $\Theta_{\kappa - \frac{1}{2}}$  na componente superior e  $\Theta_{\kappa + \frac{1}{2}}$  na componente inferior, estes termos podem ser fatorados da equação (4.36). Além disso, todas as parcelas possuem um fator  $i$  na componente inferior, que também pode ser fatorado<sup>2</sup>. Obtemos finalmente uma equação radial

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4r^2} + (\varepsilon - qA^0)^2 - (qA_\theta)^2 - (k_z - qA_z)^2 - m^2 \right] \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \\ f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} (\kappa - \frac{1}{2})^2 f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \\ (\kappa + \frac{1}{2})^2 f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \end{pmatrix} + 2qA_\theta \frac{1}{r} \begin{pmatrix} (\kappa - \frac{1}{2}) f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \\ (\kappa + \frac{1}{2}) f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \end{pmatrix} + qB_\theta \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \\ f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \end{pmatrix} \\ + qB_z \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \\ -f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \end{pmatrix} + q\lambda E_r \begin{pmatrix} f_{k_z \kappa}^{(\lambda, -)} \\ -f_{k_z \kappa}^{(\lambda, +)} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.37)$$

Podemos agora separar a equação de duas componentes em duas equações de uma componente,

<sup>2</sup> Por isso o espinor (4.33) foi definido com um fator  $i$  na componente inferior, permitindo a eliminação total deste da equação.

e observar que  $f_{k_z \kappa}^{(\lambda,+)}$  e  $f_{k_z \kappa}^{(\lambda,-)}$  obedecem equações acopladas. Reorganizando os termos de forma mais conveniente, e observando que eles estão relacionados com os autovalores de  $s_z$ , temos

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa - s)}{r^2} + 2qA_\theta \frac{1}{r} \left( \kappa - \frac{s}{2} \right) + (\varepsilon - qA^0)^2 - (qA_\theta)^2 \right. \\ \left. - (k_z - qA_z)^2 + qB_z s - m^2 \right] f_{k_z \kappa}^{(\lambda,s)} + q(B_\theta + \lambda s E_r) f_{k_z \kappa}^{(\lambda,-s)} = 0. \quad (4.38)$$

Unindo todo o desenvolvimento aqui até aqui mostrado, o espinor de Dirac (3.65) será, dispondo de (4.6), (4.12), (4.21) e (4.33),

$$\Psi_{k_z \kappa} = \begin{pmatrix} \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)} + \varphi_{k_z \kappa}^{(-\lambda)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{\varepsilon - qA^0 + m} \left( \varphi_{k_z \kappa}^{(\lambda)} + \varphi_{k_z \kappa}^{(-\lambda)} \right) \end{pmatrix} e^{-i(\varepsilon_{k_z \kappa} t - k_z z - qC \ln r)}. \quad (4.39)$$

Enfim estamos prontos para lidar com sistemas envolvendo campos restritos à configuração (4.10), em que os potenciais possuem dependência apenas radial.

## 4.2 CONFIGURAÇÕES ESPECIAIS DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Iremos abordar especificamente uma configuração de grande interesse em aplicações fenomenológicas, e analisaremos dois casos possíveis, buscando soluções analíticas. Essa configuração será a dos potenciais

$$A^0 = -\frac{\alpha}{r} \quad , \quad A_\theta = \frac{Br}{2} \quad (4.40)$$

em que  $\alpha$  e  $B$  são constantes não-negativas. Os demais potenciais são nulos. Essa configuração gera os campos

$$\mathbf{E} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.41)$$

Como estamos interessados apenas no movimento planar, tomaremos  $k_z = 0$ . Logo, a equação (4.35) será

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \varepsilon^2 - m^2 + qB(L_z + \sigma_3) - \left( \frac{qBr}{2} \right)^2 + \frac{2\varepsilon q\alpha}{r} - \frac{L_z^2 - (q\alpha)^2 - i\lambda q\alpha\sigma_r}{r^2} \right] \varphi_\kappa^{(\lambda)} = 0, \quad (4.42)$$

enquanto a equação (4.38) será

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa - s) - (q\alpha)^2}{r^2} + \frac{2\varepsilon q\alpha}{r} - \left( \frac{qBr}{2} \right)^2 + qB \left( \kappa + \frac{s}{2} \right) + \varepsilon^2 - m^2 \right] f_\kappa^{(\lambda, s)} - \frac{\lambda s q\alpha}{r^2} f_\kappa^{(\lambda, -s)} = 0. \quad (4.43)$$

Analisaremos dois casos particulares: aquele em que há apenas interação magnética, ou seja, fazendo  $\alpha = 0$  e  $B \neq 0$  e aquele em que há interação puramente elétrica, fazendo  $B = 0$  e  $\alpha \neq 0$ .

#### 4.2.1 Um férmion imerso em um campo magnético uniforme

O caso do campo magnético  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$  já foi explorado na literatura com o uso da formulação Feynman-Gell-Mann como um caso particular de campos elétricos e magnéticos uniformes cruzados (LAM, 1970; STRANGE, 1998) em coordenadas cartesianas utilizando o potencial  $A^\mu = (-yE_2, -yB, 0, 0)$ . Iremos revisitar tal sistema empregando o sistema de coordenadas cilíndricas, fazendo  $\alpha = 0$  em (4.43). Usamos o *gauge* axialmente simétrico porque ele permite se explorar de forma mais conveniente as simetrias do problema. Também será assumido que a carga da partícula é  $q > 0$ , sendo que para se obter o caso  $q < 0$ , basta realizar a operação conjugação de carga (vide Apêndice E.2.5).

De (4.43) vemos que o termo que envolve  $\lambda$  será nulo, de forma que  $f_\kappa^{(\lambda, s)}$  e  $f_\kappa^{(-\lambda, s)}$  obedecerão à mesma equação. Portanto, podemos suprimir o sobrescrito  $\lambda$ , visto que a solução servirá para ambos. Temos então que

$$\frac{d^2 f_\kappa^{(s)}}{dr^2} + \left[ -\frac{\kappa(\kappa - s)}{r^2} - \left( \frac{qB}{2} \right)^2 r^2 + \varepsilon_\kappa^{(s)^2} - m^2 + qB \left( \kappa + \frac{s}{2} \right) \right] f_\kappa^{(s)} = 0. \quad (4.44)$$

De (4.17) e (4.19) vemos que não apenas  $j_z$  é constante de movimento, mas  $L_z$  e  $s_z$  individualmente também são — o que da mesma forma ocorre na equação de Pauli para o mesmo sistema (THALLER, 2005). De (4.20) observamos que basta escolher dois dos três operadores para rotular o espinor, visto que assim o outro é automaticamente contemplado. Por conveniência,

escolhamos  $j_z$  e  $s_z$ . Como (4.33) é uma superposição destes dois estados, temos que

$$s_z \varphi_\kappa^{(s)} = \frac{s}{2} \varphi_\kappa^{(s)} \quad , \quad s = \pm 1, \quad (4.45)$$

cujas soluções são

$$\varphi_\kappa^{(+)} = \frac{1}{2\sqrt{r}} f_\kappa^{(+)} h_\kappa^{(+)} \quad , \quad \varphi_\kappa^{(-)} = \frac{1}{2\sqrt{r}} i f_\kappa^{(-)} h_\kappa^{(-)}. \quad (4.46)$$

Em outras palavras, o operador  $s_z$  “filtra” do espinor (4.33) a projeção do spin rotulada por  $s$ . Isto posto, o autoespinor de  $s_z$  é dado por

$$\varphi_\kappa^{(s)}(r, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \begin{pmatrix} \frac{1+s}{2} f_\kappa^{(+)}(r) \Theta_{\kappa-\frac{1}{2}}(\theta) \\ i \frac{1-s}{2} f_\kappa^{(-)}(r) \Theta_{\kappa+\frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

o que nos permite normalizar  $f_\kappa^{(+)}$  e  $f_\kappa^{(-)}$  individualmente, pois a densidade de probabilidade radial (4.34) será dada por

$$\rho = \frac{1}{r} |f_\kappa^{(s)}|^2. \quad (4.48)$$

Se quisermos normalizar  $\Psi$  tal que

$$\int d\tau \Psi^\dagger \Psi = 1, \quad (4.49)$$

concluiremos que  $f_\kappa^{(s)}$  deve ser quadrado integrável, pois considerando o elemento de volume do sistema de coordenadas cilíndricas (B.3), a integral de  $\Psi_\kappa^{(s)\dagger} \Psi_\kappa^{(s)}$  será

$$\int_0^\infty dr |f_\kappa^{(s)}|^2 = 1. \quad (4.50)$$

Agora voltemos nossas atenções mais uma vez para a equação radial (4.44). Como mencionado no início deste capítulo, uma das virtudes da formulação Feynman–Gell-Mann é gerar equações radiais de segunda ordem, o que nos permite resgatar os conhecimentos obtidos da teoria não-relativística. Particularmente para (4.44), esta equação possui uma forma muito semelhante à equação radial para um potencial harmônico singular em coordenadas hipersféricas da equação de Schrödinger (NOGUEIRA; CASTRO, 2016)

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left[ - \left( \frac{M\omega}{\hbar} \right)^2 r^2 - \frac{S^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2ME}{\hbar^2} \right] U = 0, \quad (4.51)$$

em que  $M, \omega$  são parâmetros positivos e  $S \geq 0$ . As autofunções e suas respectivas autoenergias, considerando a normalização  $\int_0^\infty dr |U|^2 < \infty$ , são

$$U_{n_r, S} = A_{n_r, S} r^{\frac{1}{2}+S} \exp\left(-\frac{M\omega}{2\hbar} r^2\right) L_{n_r}^{(S)}\left(\frac{M\omega}{\hbar} r^2\right), \quad (4.52)$$

$$E_{n_r, S} = \hbar\omega (2n_r + 1 + S), \quad (4.53)$$

em que  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Logo, como  $U$  é quadrado integrável, podemos mapear diretamente as suas autosoluções para o nosso problema. Teremos

$$S^2 - \frac{1}{4} = \kappa(\kappa - s) \quad (4.54)$$

$$\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{qB}{2}\right)^2 \quad (4.55)$$

$$\frac{2ME}{\hbar^2} = \varepsilon_\kappa^2 - m^2 + qB \left(\kappa + \frac{s}{2}\right), \quad (4.56)$$

logo, obtemos as soluções

$$f_{n_r, \kappa}^{(s)} = A_{n_r, \kappa}^{(s)} r^{\frac{1}{2} + |\kappa - \frac{s}{2}|} \exp\left(-\frac{qB r^2}{4}\right) L_{n_r}^{(|\kappa - \frac{s}{2}|)}\left(\frac{qB}{2} r^2\right) \quad (4.57)$$

$$\varepsilon_{n_r, \kappa}^{(s)2} = m^2 + qB \left(2n_r + 1 - \kappa - \frac{s}{2} + \left|\kappa - \frac{s}{2}\right|\right), \quad (4.58)$$

e observamos de imediato que, das propriedades dos polinômios de Laguerre (vide Apêndice C),  $n_r$  é o número de nós de  $f^{(s)}$ . As soluções obtidas admitem valores positivos e negativos de energia dados por

$$\varepsilon_{n_r, \kappa}^{(s)} = \pm \sqrt{m^2 + qB \left(2n_r + 1 - \kappa - \frac{s}{2} + \left|\kappa - \frac{s}{2}\right|\right)}, \quad (4.59)$$

que são simétricas em relação à  $\varepsilon = 0$ .

De (4.58), podemos distinguir quatro casos:

$$\frac{\varepsilon_{n_r \kappa}^{(s)^2} - m^2}{2qB} = \begin{cases} n_r & , \quad \kappa \geq \frac{1}{2} & , \quad s = +1 \\ n_r + \frac{1}{2} - \kappa & , \quad \kappa \leq -\frac{1}{2} & , \quad s = +1 \\ n_r + 1 & , \quad \kappa \geq \frac{1}{2} & , \quad s = -1 \\ n_r + \frac{1}{2} - \kappa & , \quad \kappa \leq -\frac{1}{2} & , \quad s = -1 \end{cases} , \quad (4.60)$$

de onde concluímos que há infinitos estados que possuem as mesmas energias. Em outras palavras, há uma degenerescência infinita das autoenergias, tal que

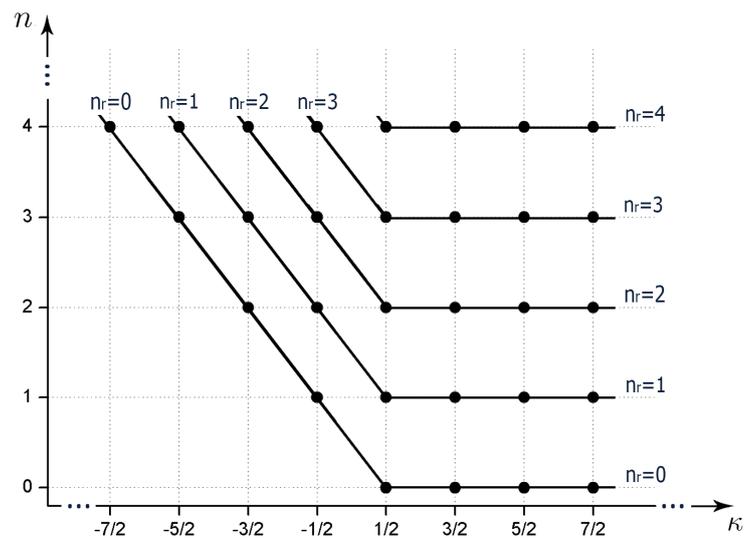
$$\frac{\varepsilon_{n_r \kappa}^{(s)^2} - m^2}{2qB} = n = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots & , \quad s = +1 \\ 1, 2, 3, \dots & , \quad s = -1 \end{cases} \quad (4.61)$$

e

$$\kappa \geq \frac{1}{2} - n. \quad (4.62)$$

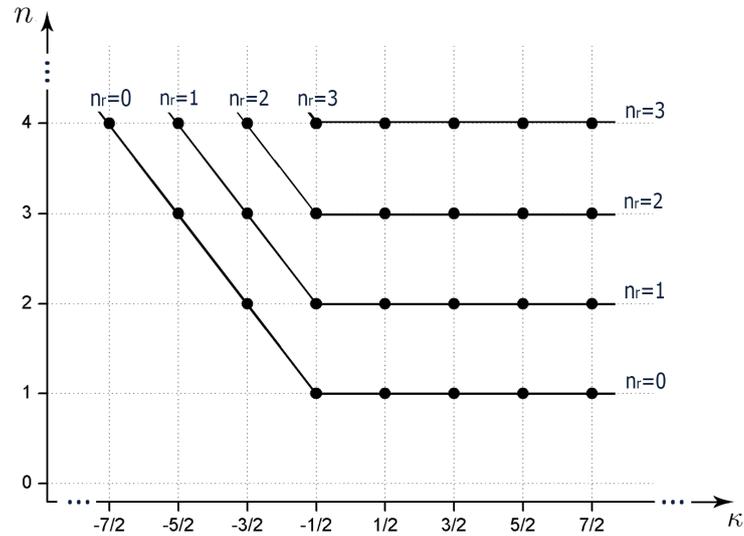
Essa análise pode ser melhor visualizada na Figura 1 e na Figura 2.

Figura 1 – Espectro de energia em termos do autovalor do momento angular total para projeção positiva do spin.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 2 – Espectro de energia em termos do autovalor do momento angular total para projeção negativa do spin.



fonte: Produção do próprio autor.

Há um fato curioso sobre o espectro (4.58): para a projeção positiva do spin, os níveis de energia com  $\kappa \geq 1/2$  estão mais próximos de  $\varepsilon = 0$  do que para a outra projeção — avaliando as figuras acima, podemos dizer que há uma “translação” dos pontos de uma projeção relativa à outra. Para esclarecer esta questão, devemos analisar a energia relacionada ao momento de dipolo magnético, o que fica mais claro se tomarmos o limite não-relativístico do espectro. Teremos (vide Apêndice E)

$$\varepsilon_{n_r}^{NR^{(s)}} \approx \frac{qB}{2m}(2n_r + 1 - s) \quad , \quad \kappa \geq \frac{1}{2} \quad (4.63)$$

e

$$\varepsilon_{n_r \kappa}^{NR^{(s)}} \approx \frac{qB}{m} \left[ n_r - \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) \right] \quad , \quad \kappa \leq -\frac{1}{2}. \quad (4.64)$$

Uma partícula de spin 1/2 imersa em um campo magnético sofre um torque  $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ , que tende a alinhar o momento de dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}$  (vide Apêndice D.2) ao campo. A energia relacionada a esse torque é dada pelo autovalor do operador (GRIFFITHS, 2005)

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\frac{qB}{m}\sigma_3. \quad (4.65)$$

Portanto, a energia orientacional de spin  $\varepsilon_s^{ori}$  será

$$\varepsilon_s^{ori} = -\frac{qB}{m}s. \quad (4.66)$$

As energias fundamentais serão dadas pela soma da contribuição da energia orientacional  $\varepsilon_s^{ori}$  e da energia orbital  $\varepsilon^{orb}$

$$\varepsilon^{NR(s)} = \varepsilon_s^{ori} + \varepsilon^{orb}. \quad (4.67)$$

Teremos então que as energias fundamentais para as duas projeções de spin com  $\kappa \geq 1/2$  serão, respectivamente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{00\kappa}^{NR(+)} &= 0 \\ \varepsilon_{00\kappa}^{NR(-)} &= 2\frac{qB}{m}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Comparando (4.66), (4.67) e (4.68), concluímos que a energia orbital fundamental é

$$\varepsilon^{orb} = +\frac{qB}{m}, \quad (4.69)$$

de maneira que, para a projeção positiva de spin, a energia orientacional compensa a energia orbital totalizando 0, ao passo que para a projeção negativa, as quantidades se somam, fazendo com que a mais baixa energia para essa projeção seja não-nula e portanto, mais alta.

Dois fatos notórios do limite não-relativístico que devem ser mencionados são que o spin ainda é uma quantidade conservada de maneira que o seu autovalor constitui um bom número quântico. Além disso, as características expostas na Figura 1 para  $\kappa \leq -1/2$  também ocorrem para o limite não-relativístico<sup>3</sup>.

Ainda tratando do limite não-relativístico, podemos tomar a média nas duas projeções de spin, para  $\kappa \geq 1/2$ , e obtemos os já esperados níveis de Landau (STRANGE, 1998)

$$\varepsilon_{n_r}^{NR} = \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \frac{qB}{m}, \quad (4.70)$$

reproduzindo então o comportamento clássico.

<sup>3</sup> Na referência (GOTTFRIED; YAN, 2003) há um diagrama semelhante ao exposto aqui, evidenciando essa característica.

Agora busquemos normalizar as autofunções para obter  $A_{n_r\kappa}^{(s)}$  via (4.50). Para resolver as integrais, faremos a substituição

$$x = \frac{qBr^2}{2}, \quad (4.71)$$

e usaremos as propriedades dos polinômios de Laguerre generalizados (vide Apêndice C), para obter

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr |f_{n_r\kappa}^{(s)}|^2 &= |A_{n_r\kappa}^{(s)}|^2 \int_0^\infty dr r^{1+2|\kappa-\frac{s}{2}|} \exp\left(-\frac{qBr^2}{2}\right) \left[ L_{n_r}^{(|\kappa-\frac{s}{2}|)}\left(\frac{qBr^2}{2}\right) \right]^2 \\ &= |A_{n_r\kappa}^{(s)}|^2 \frac{2^{|\kappa-\frac{s}{2}|}}{(qB)^{1+|\kappa-\frac{s}{2}|}} \int_0^\infty dx x^{|\kappa-\frac{s}{2}|} e^{-x} \left[ L_{n_r}^{(|\kappa-\frac{s}{2}|)}(x) \right]^2 \\ &= |A_{n_r\kappa}^{(s)}|^2 \frac{2^{|\kappa-\frac{s}{2}|}}{(qB)^{1+|\kappa-\frac{s}{2}|}} \frac{(n_r + |\kappa - \frac{s}{2}|)!}{n_r!}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Logo

$$A_{n_r\kappa}^{(s)} = \frac{n_r!(qB)^{1+|\kappa-\frac{s}{2}|}}{\left(n_r + \left|\kappa - \frac{s}{2}\right|\right)! 2^{|\kappa-\frac{s}{2}|}}. \quad (4.73)$$

Por fim

$$f_{n_r\kappa}^{(s)} = \frac{n_r!(qB)^{1+|\kappa-\frac{s}{2}|}}{\left(n_r + \left|\kappa - \frac{s}{2}\right|\right)! 2^{|\kappa-\frac{s}{2}|}} r^{\frac{1}{2}+|\kappa-\frac{s}{2}|} \exp\left(-\frac{qBr^2}{4}\right) L_{n_r}^{(|\kappa-\frac{s}{2}|)}\left(\frac{qB}{2}r^2\right). \quad (4.74)$$

Dispondo de (3.71), podemos finalmente escrever o espinor de Dirac (4.39), tomando  $C = 0$

$$\Psi_{n_r\kappa}^{(s)} = \begin{pmatrix} \varphi_{n_r\kappa}^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{\varepsilon + m} \varphi_{n_r\kappa}^{(s)} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon_{n_r\kappa}^{(s)}t}, \quad (4.75)$$

em que, de (4.33),

$$\varphi_{n_r \kappa}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{r}} f_{n_r \kappa}^{(s)} h_{\kappa}^{(s)}. \quad (4.76)$$

Ademais, os números quânticos podem ter os seguintes valores

$$\begin{aligned} n_r &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ \kappa &= \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \\ s &= \pm 1. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Como objetivado, fomos capazes de obter o espinor de Dirac apenas calculando um único espinor de duas componentes, o que em última instância constituiu a busca por uma única função radial, que como mencionado no início deste capítulo, pôde ser obtida resgatando conhecimentos da teoria não-relativística.

O espectro obtido está de acordo com resultados disponíveis na literatura, como pode ser visto por exemplo na referência (STRANGE, 1998) — embora nela se encontre apenas os valores para  $\kappa \geq 1/2$ . Ademais, é válido comentar também que o espectro é o mesmo para o sistema análogo em 2+1 dimensões, como pode ser visto na referência (THALLER, 1992). A forma das funções radiais é corroborada por outro trabalho (CASTRO; ALBERTO, 2020), ainda a ser publicado. O resultado obtido para o espectro, contudo, está em conflito com outros resultados difundidos na literatura, como o disponível na referência (GRANDY, 2012). Certamente, o nosso resultado é favorável, pois o espectro de energia obtido na referência supracitada permite  $\varepsilon^2 < 0$ , o que é claramente um absurdo.

#### 4.2.2 Um férmion imerso em um campo elétrico radial inversamente quadrático

Analisemos agora o caso particular em que  $B = 0$  e  $\alpha \neq 0$ , e novamente tomemos  $q > 0$ . De (4.17) e (4.19) observamos que nossa solução não será autoestado de  $L_z$  e  $s_z$ , de maneira que não há mais uma conveniência especial em escrever o espinor (4.33) em uma base que seja autoestado destes operadores. Portanto propomos uma nova base para o espinor  $\varphi_{\kappa}^{(\lambda)}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa}^{(\lambda)}(r, \theta) &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,+)} \tilde{h}_{\kappa}^{(+)} + i \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,-)} \tilde{h}_{\kappa}^{(-)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,+)} + i \tau^{(\lambda,-)} \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,-)} \right) \begin{pmatrix} \Theta_{\kappa-\frac{1}{2}}(\theta) \\ \tau^{(\lambda,+)} \Theta_{\kappa+\frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

em que  $\tilde{h}_{\kappa}^{(s)}$  é uma combinação linear dos harmônicos circulares espinoriais

$$\tilde{h}_\kappa^{(s)} = h_\kappa^{(s)} + i\tau^{(\lambda,s)}h_\kappa^{(-s)}, \quad (4.79)$$

e  $\tau^{(\lambda,s)}$  é um parâmetro ainda a ser determinado. A vantagem de se utilizar esta base reside em, ao avaliarmos a última parcela de (4.42), e convenientemente definirmos o operador

$$\Omega^{(\lambda)} \equiv L_z^2 - (q\alpha)^2 - i\lambda q\alpha\sigma_r, \quad (4.80)$$

observarmos que existe um valor para o parâmetro  $\tau^{(\lambda,s)}$  que torna  $\tilde{h}_\kappa^{(s)}$  autoestado de  $\Omega^{(\lambda)}$ , o que em última instância constitui a diagonalização de (4.42).

Mas antes, precisamos garantir que nossa solução seja autoestado simultâneo de  $\Omega^{(\lambda)}$  e  $j_z$ . Dispondo de (A.6) e (B.19), descobrimos que

$$\begin{aligned} [\Omega^{(\lambda)}, j_z] &= [\Omega^{(\lambda)}, L_z] + [\Omega^{(\lambda)}, s_3] \\ &= -i\lambda q\alpha \left( [\sigma_r, L_z] + \frac{1}{2}[\sigma_r, \sigma_3] \right) \\ &= -i\lambda q\alpha (i\sigma_\theta - i\sigma_\theta) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para descobrirmos o valor adequado para  $\tau^{(\lambda,s)}$ , devemos avaliar a equação de autovalor

$$\Omega^{(\lambda)}\tilde{h}_\kappa^{(s)} = \omega\tilde{h}_\kappa^{(s)}. \quad (4.82)$$

Logo, aplicando o operador no espinor (4.79), obtemos

$$\begin{aligned} \Omega^{(\lambda)}\tilde{h}_\kappa^{(s)} &= \left\{ \left[ \left( \kappa - \frac{s}{2} \right)^2 - (q\alpha)^2 \right] - i\lambda q\alpha\tau^{(\lambda,s)} \right\} h_\kappa^{(s)} \\ &\quad + \tau^{(\lambda,s)} \left\{ \left[ \left( \kappa + \frac{s}{2} \right)^2 - (q\alpha)^2 \right] - \frac{i\lambda q\alpha}{\tau^{(\lambda,s)}} \right\} h_\kappa^{(-s)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Comparando (4.82) e (4.83), devemos igualar ambos os termos entre colchetes com  $\omega$ , gerando um sistema de equações para as variáveis  $\omega$  e  $\tau^{(\lambda,s)}$ . Resolvendo-a, obtemos, em termos da definição auxiliar

$$\bar{\kappa} \equiv \sqrt{\kappa^2 - (q\alpha)^2}, \quad (4.84)$$

que as soluções são dadas por

$$\begin{cases} \omega = \left( \bar{\kappa} + \frac{\lambda w}{2} \right)^2 \\ \tau^{(\lambda,s)} = i \frac{\lambda s \kappa + w \bar{\kappa}}{q\alpha} \end{cases}, \quad w = \pm 1. \quad (4.85)$$

É válido ressaltar que o parâmetro  $\tau^{(\lambda,s)}$  satisfaz as convenientes identidades

$$\tau^{(\lambda,s)} \tau^{(\lambda,-s)} = \tau^{(\lambda,s)} \tau^{(-\lambda,s)} = 1 \quad (4.86)$$

$$\tau^{(+,+)} = \tau^{(-,-)}. \quad (4.87)$$

Poderíamos usar  $\omega$  como número quântico, porém isso não é muito conveniente, já que ele depende de  $\kappa$ . É mais apropriado utilizar  $w$ .

Comparando as componentes do espinor na nova base (4.78) com a antiga base (4.33), podemos aproveitar os cálculos já desenvolvidos em (4.43). Teremos

$$f_{\kappa}^{(\lambda,s)} = \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,s)} + i s \tau^{(\lambda,-s)} \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,-s)}, \quad (4.88)$$

de maneira que — considerando que a última parcela foi diagonalizada em termos de  $\omega$  — obtemos, definindo

$$\tilde{F}_{\kappa}^{(\lambda)} \equiv \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,+)} + i \tau^{(\lambda,-)} \tilde{f}_{\kappa}^{(\lambda,-)}, \quad (4.89)$$

a seguinte equação

$$\frac{d^2 \tilde{F}_{\kappa w}^{(\lambda)}}{dr^2} + \left[ \frac{2\varepsilon_{\kappa w} q\alpha}{r} - \frac{\bar{\kappa}(\bar{\kappa} + \lambda w)}{r^2} + \varepsilon_{\kappa w}^2 - m^2 \right] \tilde{F}_{\kappa w}^{(\lambda)} = 0, \quad (4.90)$$

tal que  $\varphi_{\kappa}^{(\lambda)}$  será

$$\varphi_{\kappa}^{(\lambda)}(r, \theta) = \frac{\tilde{F}_{\kappa w}^{(\lambda)}}{2\sqrt{r}} \begin{pmatrix} \Theta_{\kappa-\frac{1}{2}}(\theta) \\ \tau^{(\lambda,+)} \Theta_{\kappa+\frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

e a densidade de probabilidade radial (4.23) tomará a forma

$$\rho = \frac{1}{r} \left[ \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}{(q\alpha)^2} \right] \sum_{\lambda} \left| \tilde{F}_{\kappa w}^{(\lambda)} \right|^2, \quad (4.92)$$

em que observamos que  $\tilde{F}^{(\lambda)}$  deve ser quadrado integrável para permitir a normalização do autoestado. De (4.92), surge uma restrição para os valores possíveis de  $q\alpha$ , dado que a densidade deve ser real

$$q\alpha < |\kappa| \quad \Rightarrow \quad q\alpha < \frac{1}{2}. \quad (4.93)$$

Nos atendo novamente à equação radial (4.90), observamos que podemos mais uma vez mapear resultados da teoria não-relativística no nosso problema. Especificamente, a equação (4.90) possui a mesma forma que a equação radial para um potencial de Coulomb singular em coordenadas hiperesféricas da teoria de Schrödinger (NOGUEIRA; CASTRO, 2016)

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \left( -\frac{2MZ}{\hbar^2 r} - \frac{S^2 - 1/4}{r^2} + \frac{2ME}{\hbar^2} \right) U = 0, \quad (4.94)$$

em que  $M$  é um parâmetro positivo,  $Z < 0$  e  $S \geq 0$ . As autofunções e suas respectivas autoenergias, considerando a normalização  $\int_0^\infty dr |U|^2 < \infty$ , são

$$U_{n_r S} = B_{n_r S} r^{\frac{1}{2}+S} \exp \left[ -\frac{r}{a (n_r + \frac{1}{2} + S)} \right] L_{n_r}^{(2S)} \left[ \frac{2r}{a (n_r + \frac{1}{2} + S)} \right], \quad (4.95)$$

$$E_{n_r S} = -\frac{\hbar^2}{2Ma^2 (n_r + \frac{1}{2} + S)^2}, \quad (4.96)$$

em que  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  e

$$a = -\frac{\hbar^2}{MZ}. \quad (4.97)$$

Logo, como  $U$  é quadrado integrável, podemos mapeá-la diretamente para o nosso problema.

Teremos então

$$S^2 - \frac{1}{4} = \bar{\kappa}(\bar{\kappa} + \lambda w), \quad (4.98)$$

$$-\frac{2MZ}{\hbar^2} = 2\varepsilon_{\kappa w} q\alpha, \quad (4.99)$$

$$\frac{2ME}{\hbar^2} = \varepsilon_{\kappa w}^2 - m^2. \quad (4.100)$$

Pelas condições acima, as energias negativas devem ser excluídas. Por conveniência, definamos

$$N_{\lambda w} \equiv n_r^{(\lambda w)} + \frac{1}{2} + \left| \bar{\kappa} + \frac{\lambda w}{2} \right|, \quad (4.101)$$

logo, obtemos as soluções

$$\tilde{F}_{n_r^{(\lambda w)} \kappa}^{(\lambda w)} = B_{n_r^{(\lambda w)} \kappa w}^{(\lambda w)} r^{\frac{1}{2} + |\bar{\kappa} + \frac{\lambda w}{2}|} \exp\left(-\frac{q\alpha \varepsilon_{n_r \kappa \lambda w} r}{N_{\lambda w}}\right) L_{n_r^{(\lambda w)}}^{(2|\bar{\kappa} + \frac{\lambda w}{2}|)}\left(\frac{2q\alpha \varepsilon_{n_r \kappa \lambda w} r}{N_{\lambda w}}\right), \quad (4.102)$$

$$\varepsilon_{n_r \kappa \lambda w}^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{(q\alpha)^2}{N_{\lambda w}^2}}. \quad (4.103)$$

De (4.101), distinguimos três casos

$$N_+ = n_r^{(+)} + 1 + \bar{\kappa}$$

$$N_- = \begin{cases} n_r^{(-)} + 1 - \bar{\kappa} & , \quad \bar{\kappa} \leq \frac{1}{2} \\ n_r^{(-)} + \bar{\kappa} & , \quad \bar{\kappa} \geq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.104)$$

De (4.84) e (4.93), concluimos que  $\bar{\kappa} \leq \frac{1}{2}$  só é possível para  $|\kappa| = 1/2$ , pois

$$\kappa^2 - (q\alpha)^2 \leq \frac{1}{4} \quad (4.105)$$

$$\kappa^2 \leq \frac{1}{4} + (q\alpha)^2 < \frac{1}{2} \quad (4.106)$$

$$|\kappa| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad |\kappa| = \frac{1}{2}. \quad (4.107)$$

Analogamente,  $\bar{\kappa} \geq \frac{1}{2}$  só é possível para  $|\kappa| > 1/2$

$$\kappa^2 - (q\alpha)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (4.108)$$

$$\kappa^2 \geq \frac{1}{4} + (q\alpha)^2 > \frac{1}{4} \quad (4.109)$$

$$\therefore |\kappa| > \frac{1}{2}. \quad (4.110)$$

Logo, as relações (4.104) serão

$$N_+ = n_r^{(+)} + 1 + \sqrt{\kappa^2 - (q\alpha)^2}$$

$$N_- = \begin{cases} n_r^{(-)} + 1 - \sqrt{\frac{1}{4} - (q\alpha)^2} & , \quad |\kappa| = \frac{1}{2} \\ n_r^{(-)} + \sqrt{\kappa^2 - (q\alpha)^2} & , \quad |\kappa| > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.111)$$

Contudo, sabemos de (3.63) que a energia deve independer de  $\lambda$ , e portanto

$$N_{\lambda w} = N_{-\lambda w}. \quad (4.112)$$

Desta relação, podemos fazer uma análise para os estados com  $|\kappa| = 1/2$  e  $|\kappa| > 1/2$ . Nos debruçaremos primeiro sobre o segundo caso, pois o primeiro apresenta alguns problemas que devem ser discutidos. Igualando a primeira e terceira expressões de (4.111), obtemos a igualdade que permite definir  $n_r$ .

$$n_r^{(+)} + 1 = n_r^{(-)} \equiv n_r \quad , \quad n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.113)$$

e desta forma teremos (readequando o rótulo de  $B$  para se igualar ao de  $\tilde{F}$ )

$$\tilde{F}_{n_r \kappa}^{(\lambda w)} = B_{n_r \kappa}^{(\lambda w)} r^{\frac{1+\lambda w}{2} + \bar{\kappa}} \exp\left(-\frac{q\alpha \varepsilon_{n_r \kappa} r}{n_r + \bar{\kappa}}\right) L_{n_r - (\frac{1+\lambda w}{2})}^{(2\bar{\kappa} + \lambda w)}\left(\frac{2q\alpha \varepsilon_{n_r \kappa} r}{n_r + \bar{\kappa}}\right) \quad , \quad |\kappa| > 1/2 \quad (4.114)$$

$$\varepsilon_{n_r \kappa}^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{(q\alpha)^2}{N^2}} \quad , \quad N = n_r + \bar{\kappa} \quad , \quad |\kappa| > 1/2 \quad (4.115)$$

Para o caso particular  $|\kappa| = 1/2$ , não é possível satisfazer à relação (4.112), e portanto ou o

estado com  $\lambda w = +1$ , ou com  $\lambda w = -1$ , deve ser nulo. As autofunções serão

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n_r^{(\lambda w)} \kappa}^{(\lambda w)} &= B_{n_r^{(\lambda w)} \kappa}^{(\lambda w)} r^{1+\lambda w \bar{\kappa}} \exp\left(-\frac{q\alpha \varepsilon_{n_r^{(\lambda w)} \kappa} r}{n_r^{(\lambda w)} + 1 + \lambda w \bar{\kappa}}\right) \\ &\times L_{n_r^{(\lambda w)} \kappa}^{(1+2\lambda w \bar{\kappa})}\left(\frac{2q\alpha \varepsilon_{n_r^{(\lambda w)} \kappa} r}{n_r^{(\lambda w)} + 1 + \lambda w \bar{\kappa}}\right), \quad |\kappa| = 1/2 \end{aligned} \quad (4.116)$$

Para determinar qual estado será nulo, recorreremos ao vínculo entre as projeções quirais (3.68). Recapitulando (3.62), (4.6) — fizemos  $k_z = 0$  —, (4.12) — tomemos  $C = 0$  — e (4.91), obtemos

$$m \tilde{F}_{n_r \kappa}^{(-\lambda w)} = \left[ \varepsilon_{n_r \kappa} - \frac{\bar{\kappa}(\bar{\kappa} + \lambda w \kappa)}{q\alpha r} - \left( \frac{\kappa + \lambda w \bar{\kappa}}{q\alpha} \right) \frac{d}{dr} \right] \tilde{F}_{n_r \kappa}^{(\lambda w)}. \quad (4.117)$$

Substituindo (4.116) na expressão acima e tomando o limite  $r \rightarrow 0$  obtemos

$$B_{n_r^{(-)} \kappa}^{(-)} = -\frac{(2\bar{\kappa} + 1)(\bar{\kappa} + \kappa) n_r^{(-)}! (1 - 2\bar{\kappa})! (n_r^{(+)} + 2\bar{\kappa} + 1)!}{mq\alpha n_r^{(+)}! (1 + 2\bar{\kappa})! (n_r^{(-)} - 2\bar{\kappa} + 1)!} r^{2\bar{\kappa}-1} B_{n_r^{(+)} \kappa}^{(+)} \quad (4.118)$$

e portanto devemos fazer

$$B_{n_r^{(+)} \kappa}^{(+)} = 0 \quad (4.119)$$

As autofunções e o espectro serão — chamemos  $n_r^{(+)}$  de  $n_r - 1$ , conforme (4.113) — dados por

$$\tilde{F}_{n_r \kappa}^{(+)} = B_{n_r \kappa}^{(+)} r^{1+\bar{\kappa}} \exp\left(-\frac{q\alpha \varepsilon_{n_r \kappa} r}{n_r + \bar{\kappa}}\right) L_{n_r-1}^{(1+2\bar{\kappa})}\left(\frac{2q\alpha \varepsilon_{n_r \kappa} r}{n_r + \bar{\kappa}}\right), \quad |\kappa| = 1/2 \quad (4.120)$$

$$\varepsilon_{n_r \kappa}^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{(q\alpha)^2}{N^2}}, \quad N = n_r + \bar{\kappa}, \quad |\kappa| = 1/2 \quad (4.121)$$

Observamos que não é possível um estado com  $\lambda w = +1$  e  $n_r = 0$ , pois desta maneira o índice inferior do polinômio generalizado de Laguerre seria  $-1$ , o que não é aceitável (vide Apêndice C). Desta maneira, devemos impor para ambos os casos tratados

$$B_{0\kappa}^{(+)} = 0. \quad (4.122)$$

Unindo a análise de ambos os casos, temos

$$\tilde{F}_{n_r\kappa}^{(\lambda w)} = B_{n_r\kappa}^{(\lambda w)} r^{\frac{1+\lambda w}{2} + \bar{\kappa}} \exp\left(-\frac{q\alpha\varepsilon_{n_r\kappa} r}{n_r + \bar{\kappa}}\right) L_{n_r - (\frac{1+\lambda w}{2})}^{(2\bar{\kappa} + \lambda w)}\left(\frac{2q\alpha\varepsilon_{n_r\kappa} r}{n_r + \bar{\kappa}}\right), \quad (4.123)$$

$$\varepsilon_{n_r\kappa}^2 = \frac{m^2}{1 + \frac{(q\alpha)^2}{N^2}}, \quad N = n_r + \bar{\kappa}, \quad (4.124)$$

tal que

$$B_{0\kappa}^{(+)} = B_{n_r, \pm 1/2}^{(+)} = 0. \quad (4.125)$$

É conveniente definir um número quântico principal  $n$

$$n \equiv n_r + |\kappa| + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad |\kappa| \leq n - \frac{1}{2}, \quad (4.126)$$

que permite escrever  $N$  para ambos os casos discutidos como uma única expressão

$$N = n - \frac{1}{2} + \bar{\kappa} - |\kappa|. \quad (4.127)$$

É claro então que o espectro de energia possui uma degenerescência quádrupla, haja vista que ele depende do  $|\kappa|$ , independente do seu sinal, e é insensível ao sinal ao valor de  $w$ .

O limite não-relativístico com correções relativísticas pode então ser obtido de forma semelhante ao do espectro do potencial de Coulomb, *i.e.*, considerando o limite para campos fracos  $(q\alpha) \ll 1/2$ . Primeiro, devemos tomar a raiz quadrada da expressão (4.115) — lembrando que os valores negativos de  $\varepsilon$  estão excluídos. Obtemos

$$\varepsilon_{n\kappa} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{(q\alpha)^2}{N^2}}}. \quad (4.128)$$

Em seguida devemos observar que no limite para campos fracos, podemos expandir (4.84), desprezando termos de ordem maior que  $(q\alpha)^4$ , obtendo

$$\bar{\kappa} \approx |\kappa| \left[ 1 - \frac{(q\alpha)^2}{2\kappa^2} - \frac{(q\alpha)^4}{8\kappa^4} \right], \quad (4.129)$$

o que permite transformar a relação (4.127) para

$$N \approx n - \frac{1}{2} - \frac{(q\alpha)^2}{2|\kappa|} \left[ 1 + \frac{(q\alpha)^2}{4\kappa^2} \right] \quad (4.130)$$

Podemos então realizar a seguinte expansão para o radicando do denominador da expressão (4.128)

$$\frac{\varepsilon_{n\kappa}}{m} \approx \left\{ 1 + \frac{(q\alpha)^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \left[ 1 + \frac{(q\alpha)^2}{|\kappa| \left(n - \frac{1}{2}\right)} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.131)$$

Como  $(q\alpha) \ll 1/2$ , também é verdade que  $(q\alpha) \ll |\kappa|$ , logo, podemos realizar as expansões dos termo entre chaves de (4.131). Rearranjando a equação, temos

$$\frac{\varepsilon_{n\kappa}}{m} \approx 1 - \frac{(q\alpha)^2}{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \left[ 1 + \frac{(q\alpha)^2}{|\kappa| \left(n - \frac{1}{2}\right)} \right] + \frac{3(q\alpha)^4}{8 \left(n - \frac{1}{2}\right)^4}. \quad (4.132)$$

Por fim, reorganizando os termos e dispoindo da definição de energia não-relativística (E.57), obtemos as energias não-relativísticas e as primeiras correções relativísticas

$$\frac{\varepsilon_{n\kappa}^{NR}}{m} \approx -\frac{(q\alpha)^2}{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{(q\alpha)^4}{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^4} \left[ \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)}{|\kappa|} - \frac{3}{4} \right], \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ |\kappa| \leq n - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.133)$$

Comparando nossos resultados com a literatura disponível, o espectro (4.124) está em acordo com o espectro de um potencial  $1/r$  restrito ao plano encontrado na referência (GUO et al., 1991), embora as autofunções encontradas sejam diferentes. Os autoestados aqui obtidos são certamente favoráveis, pois após uma minuciosa inspeção dos resultados encontrados na referência supracitada, testando-os na equação de Dirac, vemos que as autofunções obtidas não a satisfazem. Como contra-exemplo, basta verificar o autoestado — na notação adotada nesta referência — com  $n = 2$ ,  $n' = 0$ ,  $|k| = 3/2$ ,  $l = 1$  e  $s = 1/2$ .

O espectro não-relativístico também corrobora resultados encontrados na literatura (THALLER, 2005). Uma característica do espectro obtido é que ele é muito semelhante ao do problema de Coulomb em 3+1 dimensões, bastando substituir  $n - 1/2$  por  $n$  e  $|\kappa|$  por  $j + 1/2$  para obtê-lo (GREINER, 2000).

Agora busquemos normalizar as autofunções via (4.92). Para o caso  $n_r = 0$  e  $|\kappa| \neq 1/2$ , (4.125) nos permite normalizar a autofunção diretamente. Teremos

$$\rho = \frac{1}{r} \left[ \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}{(q\alpha)^2} \right] \left| \tilde{F}_{0,\kappa}^{(-)} \right|^2. \quad (4.134)$$

Portanto, recorrendo às propriedades dos polinômios generalizados de Laguerre expostos no Apêndice C, podemos normalizar a função de onda à unidade. Definindo

$$\Gamma = \frac{2q\alpha\varepsilon_{n_r,\kappa}}{N}, \quad (4.135)$$

teremos

$$\int_0^\infty r dr \rho = \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}{\Gamma^{1+2\bar{\kappa}} (q\alpha)^2} (2\bar{\kappa})! \left| B_{0,\kappa}^{(-)} \right|^2 = 1. \quad (4.136)$$

Finalmente

$$\left| B_{0,\kappa}^{(-)} \right| = \left( \frac{2q\alpha}{|\kappa|} \right)^{\frac{1}{2} + \bar{\kappa}} \frac{q\alpha}{\sqrt{(2\bar{\kappa})! |\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}}. \quad (4.137)$$

Para o caso  $|\kappa| = 1/2$  e  $n_r \neq 0$ , (4.125) também torna possível a autofunção ser diretamente normalizada. Dispondo de (4.135), calculamos

$$\int_0^\infty r dr \rho = \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa}) (n_r + 2\bar{\kappa})!}{\Gamma^{2+2\bar{\kappa}} (q\alpha)^2 (n_r - 1)!} (2n_r + 2\bar{\kappa}) \left| B_{n_r \pm 1/2}^{(-)} \right|^2 = 1. \quad (4.138)$$

Logo

$$\left| B_{n_r, \pm 1/2}^{(-)} \right| = \left( \frac{2q\alpha\varepsilon_{n_r,\kappa}}{n_r + \bar{\kappa}} \right)^{1+\bar{\kappa}} \frac{q\alpha}{\sqrt{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}} \sqrt{\frac{(n_r - 1)!}{(n_r + 2\bar{\kappa})! (2n_r + 2\bar{\kappa})}}. \quad (4.139)$$

Para os demais casos,  $\tilde{F}_{n_r,\kappa}^{(+)}$  e  $\tilde{F}_{n_r,\kappa}^{(-)}$  não podem ser normalizadas individualmente. Novamente podemos recorrer ao vínculo entre as projeções quirais (3.68) para relacionar as constantes de normalização  $B_{n_r,\kappa}^{(+)}$  e  $B_{n_r,\kappa}^{(-)}$ . Substituindo a expressão (4.114) em (4.117) e tomando o limite  $r \rightarrow 0$  na equação resultante, obtemos então

$$B_{n_r\kappa}^{(-)} = -\frac{(\bar{\kappa} + \kappa)}{2\bar{\kappa}q\alpha} n_r (n_r + 2\bar{\kappa}) B_{n_r\kappa}^{(+)}, \quad (4.140)$$

o que nos permite obter a normalização de ambas as autofunções. Utilizando (4.135), teremos

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{r} \left[ \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}{(q\alpha)^2} \right] & \left\{ \frac{1}{\Gamma^{2+2\bar{\kappa}}} (\Gamma r)^{2+2\bar{\kappa}} e^{-\Gamma r} \left[ L_{n_r-1}^{(2\bar{\kappa}+1)} (\Gamma r) \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{(\bar{\kappa} + \kappa)^2 n_r^2 (n_r + 2\bar{\kappa})^2}{4\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^2 \Gamma^{2\bar{\kappa}}} (\Gamma r)^{2\bar{\kappa}} e^{-\Gamma r} \left[ L_{n_r}^{(2\bar{\kappa}-1)} (\Gamma r) \right]^2 \right\} |B_{n_r\kappa}^{(+)}|^2. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Portanto, recorrendo às propriedades dos polinômios generalizados de Laguerre expostos no Apêndice C, podemos normalizar a função de onda à unidade, *i.e.*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r dr \rho = 1 & = \left[ \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})}{(q\alpha)^2} \right] \left\{ \frac{1}{\Gamma^{3+2\bar{\kappa}}} \int_0^\infty \Gamma dr (\Gamma r)^{2+2\bar{\kappa}} e^{-\Gamma r} \left[ L_{n_r-1}^{(2\bar{\kappa}+1)} (\Gamma r) \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{(\bar{\kappa} + \kappa)^2 n_r^2 (n_r + 2\bar{\kappa})^2}{4\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^2 \Gamma^{1+2\bar{\kappa}}} \int_0^\infty \Gamma dr (\Gamma r)^{2\bar{\kappa}} e^{-\Gamma r} \left[ L_{n_r}^{(2\bar{\kappa}-1)} (\Gamma r) \right]^2 \right\} |B_{n_r\kappa}^{(+)}|^2 \\ & = \frac{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa}) (n_r + \bar{\kappa}) (n_r + 2\bar{\kappa}) (n_r + 2\bar{\kappa} - 1)!}{2\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^4 \Gamma^{3+2\bar{\kappa}} (n_r - 1)!} \\ & \quad \times \left\{ 4\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^2 + \Gamma^2 (\bar{\kappa} + \kappa)^2 n_r (n_r + 2\bar{\kappa}) \right\} |B_{n_r\kappa}^{(+)}|^2. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Logo

$$\begin{aligned} |B_{n_r\kappa}^{(+)}|^2 & = \frac{2\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^4}{|\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa}) (n_r + \bar{\kappa}) (n_r + 2\bar{\kappa}) (n_r + 2\bar{\kappa} - 1)!} \frac{\Gamma^{3+2\bar{\kappa}}}{(n_r - 1)!} \\ & \quad \times \frac{1}{4\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^2 + \Gamma^2 (\bar{\kappa} + \kappa)^2 n_r (n_r + 2\bar{\kappa})} \end{aligned} \quad (4.143)$$

e

$$\begin{aligned} |B_{n_r\kappa}^{(-)}|^2 & = \frac{(q\alpha)^2 (\kappa + \bar{\kappa})}{2 |\kappa| (|\kappa| + \bar{\kappa})} \frac{n_r + 2\bar{\kappa}}{n_r + \bar{\kappa}} n_r^2 \Gamma^{3+2\bar{\kappa}} \frac{(n_r - 1)!}{(n_r + 2\bar{\kappa} - 1)!} \\ & \quad \times \frac{1}{4\bar{\kappa}^2 (q\alpha)^2 + \Gamma^2 (\bar{\kappa} + \kappa)^2 n_r (n_r + 2\bar{\kappa})}. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Os cálculos de normalização para os casos particulares efetuados acima estão dispostos na Tabela 2

Tabela 2 – Constantes de normalização dos casos particulares de autofunções radiais.

$n_r$	$ \kappa $	$ B_{n_r\kappa}^{(+)} $	$ B_{n_r\kappa}^{(-)} $
$\geq 0$	$\pm \frac{1}{2}$	0	$\left(\frac{2q\alpha\varepsilon_{n_r\kappa}}{n_r + \bar{\kappa}}\right)^{1+\bar{\kappa}} \frac{q\alpha}{\sqrt{ \kappa ( \kappa  + \bar{\kappa})}} \sqrt{\frac{(n_r - 1)!}{(n_r + 2\bar{\kappa})!(2n_r + 2\bar{\kappa})}}$
0	$> \frac{1}{2}$	0	$\left(\frac{2q\alpha}{ \kappa }\right)^{\frac{1}{2}+\bar{\kappa}} \frac{q\alpha}{\sqrt{(2\bar{\kappa})! \kappa ( \kappa  + \bar{\kappa})}}$

Fonte: Produção do próprio autor

Dispondo de (3.71), podemos finalmente escrever o espinor de Dirac (4.39)

$$\Psi_{n_r\kappa}^{(w)} = \begin{pmatrix} \varphi_{n_r\kappa}^{(w)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon - qA^0 + m} \varphi_{n_r\kappa}^{(w)} \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon_{n_r\kappa}t}, \quad (4.145)$$

em que, de (4.91)

$$\varphi_{n_r\kappa}^{(w)}(r, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \begin{pmatrix} \left(\tilde{F}_{n_r\kappa}^{(w)} + \tilde{F}_{n_r\kappa}^{(-w)}\right) \Theta_{\kappa-\frac{1}{2}}(\theta) \\ \left(\tau^{(+,+)} \tilde{F}_{n_r\kappa}^{(w)} + \tau^{(-,+)} \tilde{F}_{n_r\kappa}^{(-w)}\right) \Theta_{\kappa+\frac{1}{2}}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.146)$$

Recapitulando, os números quânticos são

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\kappa = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots \quad (4.147)$$

$$w = \pm 1.$$

Novamente fomos capazes de calcular o espinor de Dirac calculando um único espinor de duas componentes, o que na prática significou calcular uma função radial, mapeando um sistema da teoria não-relativística no nosso problema.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

Neste trabalho, propugnamos analisar minuciosamente a formulação Feynman–Gell-Mann da equação de Dirac para toda a gama de interações possíveis. Do estudo da conservação da corrente de probabilidade, surgiram restrições sobre as estruturas possíveis para compor uma matriz potencial de interação mais geral.

Ao fazer considerações sobre o fato de a teoria de Klein-Gordon ser de segunda ordem, percebemos um precedente para a proposição de uma formulação alternativa de segunda ordem também para a equação de Dirac. Em particular, exploramos o caminho em que se faz uso do operador quiralidade, representado pela matriz  $\gamma^5$ , que possui a conveniente propriedade de que seus autoestados possuem uma redundância nas componentes superior e inferior, o que é essencial para compensar a duplicidade do número de soluções de uma equação de segunda ordem. Construimos então os chamados projetores quirais, cujas projeções são justamente os autoestados do operador quiralidade. Mostrou-se conveniente então separar as interações possíveis em dois grupos: os potenciais que comutam e os que anticomutam com  $\gamma^5$ , de maneira que obtivemos a equação lograda por Feynman e Gell-Mann como um caso particular de uma equação muito mais geral, que permite o tratamento de sistemas além dos que envolvem as interações vetoriais minimamente acopladas. Este belo e *sui generis* resultado abre um vastíssimo leque de novas possibilidades de investigação.

Voltamos então nossas atenções às interações anticomutantes, visto que essa forma contempla campos eletromagnéticos minimamente acoplados, com mais amplo emprego na Física. Por mérito de completeza do estudo da formulação, analisamos a partícula livre e o limite não-relativístico de primeira ordem, demonstrando que eles estão de total acordo com a literatura estabelecida, não apresentando nenhuma anomalia.

Foi avaliada também a exequibilidade da formulação em um mundo com 2+1 dimensões, tendo em vista que foi difundido na literatura recente trabalhos que envolvem procedimentos semelhantes aos da formulação Feynman–Gell-Mann, mas em um mundo com 2+1 dimensões, onde uma série de equívocos são cometidos, tal que os desenvolvimentos expostos neste trabalho podem ajudar a esclarecer. Este é certamente um ponto positivo para o estudo da formulação, já que constitui uma ferramenta de interesse na comunidade científica, e ainda é fonte de equívocos, exigindo um estudo aprofundado. Atualmente, dois comentários esclarecendo essas incorreções estão sob julgo para possível publicação nas revistas em que se encontram os trabalhos originais, sob os títulos *Comment on ‘Energy Spectrum of a Dirac Particle with Position-Dependent Mass Under the Influence of the Aharonov-Casher Effect’* e *Comment on ‘The relativistic Aharonov-Bohm-Coulomb system with position-dependent mass’*.

A partir da imposição de certas restrições às formas dos potenciais vetoriais, derivou-se a condição para que o momento angular total seja conservado, e foram obtidas equações radiais

em coordenadas cilíndricas que permitem o mapeamento direto em problemas da teoria não-relativística que possuem solução analítica, a saber: um campo magnético uniforme e um campo elétrico radial inversamente quadrático. A estratégia utilizada neste trabalho certamente pode ser estendida para o estudo outros de estados ligados de férmions de spin-1/2.

A possibilidade de inclusões não previstas, das quais destacamos as interações escalar e tensorial, são de muito interesse em diversas aplicações, constituindo um horizonte profícuo de possibilidades de investigação. Atualmente, buscamos utilizar este instrumento na abordagem do comportamento planar dos sistemas quânticos relativísticos circularmente simétricos.

## REFERÊNCIAS

- ARFKEN, G. **Mathematical methods for physicists**. 3rd. ed. San Diego: Academic Press, Inc, 1985.
- AUVIL, P. R.; BROWN, L. M. The relativistic hydrogen atom: a simple solution. **American Journal of Physics**, New York, v. 46, n. 6, p. 679–681, 1978.
- BARUT, A.; MULLEN, G. Quantization of two-component higher order spinor equations. **Annals of Physics**, New York, v. 20, n. 2, p. 184 – 202, 1962.
- BIEDENHARN, L. C. Some remarks on the Feynman-Gell-Mann formulation of the Fermi interaction. **Nuovo Cimento**, Durham, v. 10, n. 22, p. 4797–4798, 1961.
- BROWN, L. M. Two-component fermion theory. **Physical Review**, New York, v. 111, n. 3, p. 957 – 964, 1958.
- CASTRO, A. S.; ALBERTO, P. Spin in a planar relativistic fermion problem [mensagem pessoal]. mensagem recebida por <antonio.castro@unesp.br> em 25 set. 2020.
- CASTRO, L. B. On the Dirac equation with PT-symmetric potentials in the presence of position-dependent mass. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 375, n. 25, p. 2510 – 2512, 2011.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. Paris: Wiley-VCH, 2005. v.1.
- DEPAQUIT, S.; GUÉRET, P.; VIGIER, J. P. Classical spin variables and classical counterpart of the Dirac-Feynman-Gell-Mann equation. **International Journal of Theoretical Physics**, New York, v. 4, n. 25, p. 19 – 32, 1971.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society A**, London, v. 117, n. 778, p. 610 – 624, 1928.
- FESHBACH, H.; VILLARS, F. Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin 1/2 particles. **Reviews of Modern Physics**, Minneapolis, v. 30, n. 1, p. 24–45, 1958.
- FEYNMAN, R. P.; GELL-MANN, M. Theory of the Fermi interaction. **Physical Review**, New York, v. 109, n. 1, p. 193 – 198, 1958.
- GALLONE, F. On the Feynman–Gell-Mann equation. **Annals of Physics**, New York, v. 57, n. 1, p. 65 – 78, 1970.
- GOTTFRIED, K.; YAN, T.-M. **Quantum mechanics: fundamentals**. 2nd. ed. New York: Springer, 2003.
- GRANDY, J. W. T. **Relativistic quantum mechanics of leptons and fields**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2012.
- GREINER, W. **Relativistic quantum mechanics, wave equations**. 3rd. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- GUO, S. H. *et al.* Analytic solution of a two-dimensional hydrogen atom. ii. Relativistic theory. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 43, p. 1197–1205, 1991.

- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. **Quantum field theory**. New York: McGraw-Hill Inc., 1980.
- JACKSON, J. D.; OKUN, L. B. Historical roots of gauge invariance. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 73, n. 3, p. 663–680, 2001.
- LAM, L. New exact solutions of the Dirac equation. **Canadian Journal of Physics**, Canadian Science Publishing, v. 48, n. 16, p. 1935–1937, 1970.
- LEMONS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- MENDROT, V.; CASTRO, A. de. Comment on ‘The relativistic Aharonov–Bohm–Coulomb system with position-dependent mass’. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, Bristol, v. 54, n. 2, p. 028001, 2020.
- MENDROT, V.; CASTRO, A. de. Comment on “Energy spectrum of a Dirac particle with position-dependent mass under the influence of the Aharonov–Casher effect”. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 51, n. 1, p. 19–21, 2021.
- MERZBACHER, E. **Quantum mechanics**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1998.
- NOGUEIRA, P. H. F.; CASTRO, A. S. de. From the generalized Morse potential to a unified treatment of the D-dimensional singular harmonic oscillator and singular Coulomb potentials. **Journal of Mathematical Chemistry**, Springer International Publishing Switzerland, v. 54, n. 9, p. 1783–1791, 2016.
- OLIVEIRA, R. R. S.; BORGES, V. F. S.; SOUSA, M. F. Energy spectrum of a Dirac particle with position-dependent mass under the influence of the Aharonov–Casher effect. **Brazilian Journal of Physics**, SpringerLink, v. 49, p. 801 – 807, 2019.
- OLIVEIRA, R. R. S. *et al.* The relativistic Aharonov–Bohm–Coulomb system with position-dependent mass. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, Bristol, v. 53, n. 4, p. 045304, 2020.
- OLIVEIRA, R. R. S.; MALUF, R. V.; ALMEIDA, C. A. S. Bound-state solutions of the Dirac oscillator in an Aharonov–Bohm–Coulomb system. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 400, p. 1–8, 2019.
- PETRONI, N. C. *et al.* Second-order wave equation for spin-(1/2) fields. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 31, p. 3157–3161, 1985.
- ROMAN, P. **Advanced quantum theory: an outline of the fundamental ideas**. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- STRANGE, P. **Relativistic quantum mechanics with applications in condensed matter and atomic physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- THALLER, B. **The Dirac equation**. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- THALLER, B. **Advanced visual quantum mechanics**. New York: Springer, 2005.
- UHLENBECK, G. E.; GOUDSMIT, S. Spinning electrons and the structure of spectra. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 117, n. 2938, p. 264–265, 1926.
- VEGA, H. J. de. Fermions and vortex solutions in abelian and non-abelian gauge theories. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 18, p. 2932–2944, 1978.
- WACHTER, A. **Relativistic quantum mechanics**. Berlin: Springer, 2010.

## APÊNDICE A – AS MATRIZES DE PAULI

As matrizes de Pauli são as matrizes  $2 \times 2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

que possuem as propriedades

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2. \quad (\text{A.3})$$

Elas satisfazem à seguinte álgebra (veja por exemplo (WACHTER, 2010))

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.4})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.6})$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, cujo valor é 1 se  $i = j$ , e zero para os demais casos, e  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita, cujos valores são

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & , \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), \\ -1 & , \quad (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3), \\ 0 & , \quad i = j, j = k, k = i. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

As matrizes de Pauli formam, junto da matriz identidade  $\mathbb{1}$ , uma base do espaço das matrizes  $2 \times 2$ . Das matrizes de Pauli podemos definir o vetor matrizes de Pauli

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (\text{A.8})$$

que satisfaz à identidade vetorial

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (\text{A.9})$$

e nos permite definir o operador spin

$$\mathbf{s} \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Para a componente 3 do operador spin, os autoestados e autovalores são dados pela equação de autovalor

$$\frac{\sigma_3}{2}\chi_s = \frac{s}{2}\chi_s, \quad (\text{A.11})$$

cujas soluções são  $\chi_s$ , relacionados aos autovalores  $s = \pm 1$

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

## APÊNDICE B – O SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

O sistema de coordenadas curvilíneas cilíndricas é definido por meio das relações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}, \\ \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \end{cases}, \quad (\text{B.1})$$

de onde deduzimos o vetor posição

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ &= r \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ &= r(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) + z \hat{\mathbf{k}} \\ &= r \hat{\mathbf{r}} + z \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O elemento de volume diferencial é

$$d\tau = r dr d\theta dz \quad (\text{B.3})$$

Os operadores diferenciais vetoriais são

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}; \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{k}}; \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{B.7})$$

O vetor matrizes de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}$  em coordenadas cilíndricas pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \sigma_r \hat{\mathbf{r}} + \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_3 \hat{\mathbf{k}} \\
&= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Expandindo as componentes usando (B.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \sigma_r = \sigma_1 \cos\theta + \sigma_2 \sin\theta \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}; \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \sigma_\theta = -\sigma_1 \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \sigma_3.$$

É de fácil averiguação que

$$\sigma_r^2 = \sigma_\theta^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1}_2. \tag{B.10}$$

Há duas relações convenientes e simples entre  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  que nos serão úteis adiante

$$\frac{d\sigma_r}{d\theta} = \sigma_\theta. \tag{B.11}$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -\sigma_r. \tag{B.12}$$

Ademais, as componentes (B.9) também obedecem as relações (A.4), (A.5) e (A.6), que definem a álgebra das matrizes de Pauli, com índices cíclicos ordenados como  $r, \theta, z$ .

O operador momento em coordenadas cilíndricas é

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \hat{\mathbf{r}}p_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}p_\theta + \hat{\mathbf{k}}p_3 \\
&= \hat{\mathbf{r}} \left( -i \frac{\partial}{\partial r} \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left( -\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left( -i \frac{\partial}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{B.13}$$

De (B.2) e (B.13), podemos determinar o operador momento angular  $\mathbf{L}$  em coordenadas cilíndricas. O operador é definido, (vide por exemplo (STRANGE, 1998))

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{B.14}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \hat{\mathbf{r}}L_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}L_\theta + \hat{\mathbf{k}}L_z \\
&= (r\hat{\mathbf{r}} + z\hat{\mathbf{k}}) \times (p_r\hat{\mathbf{r}} + p_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + p_3\hat{\mathbf{k}}) \\
&= (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})rp_\theta + (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{k}})rp_3 + (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{r}})zp_r + (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})zp_\theta \\
&= \hat{\mathbf{r}} \left( i \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}}i \left( r \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Voltemos nossa atenção para a componente  $L_z$ . Os autoestados de  $L_z$  obedecem a equação diferencial  $L_z\Theta_l(\theta) = l\Theta_l(\theta)$ , em que  $l$  são os autovalores relacionados ao autoestado  $\Theta_l$ , ou seja,

$$-i \frac{d\Theta_l(\theta)}{d\theta} = l\Theta_l(\theta), \tag{B.16}$$

que tem as soluções, ortonormalizadas, *i.e.*, soluções tal que

$$\int_0^{2\pi} \Theta_l^* \Theta_{\bar{l}} = \delta_{l\bar{l}}, \tag{B.17}$$

dadas por

$$\Theta_l(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\theta}. \tag{B.18}$$

Analisando a condição de contorno  $\Theta_l(\theta + 2\pi) = \Theta_l(\theta)$ , deduz-se que  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Vejamos também as relações de comutação entre  $L_z$  e as componentes do vetor  $\sigma$ . Analisemos componente a componente<sup>1</sup>, dispendo de (B.11) e (B.12).

$$\begin{aligned}
[L_z, \sigma_r]f &= L_z \sigma_r f - \sigma_r L_z f \\
&= -i \frac{\partial \sigma_r f}{\partial \theta} + i \sigma_r \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&= -i \sigma_\theta f - i \sigma_r \frac{\partial f}{\partial \theta} + i \sigma_r \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&= -i \sigma_\theta f \\
\therefore [L_z, \sigma_r] &= -i \sigma_\theta; \tag{B.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_z, \sigma_\theta]f &= L_z \sigma_\theta f - \sigma_\theta L_z f \\
&= -i \frac{\partial \sigma_\theta f}{\partial \theta} + i \sigma_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&= +i \sigma_r f - i \sigma_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + i \sigma_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&= i \sigma_r f \\
\therefore [L_z, \sigma_\theta] &= i \sigma_r; \tag{B.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_z, \sigma_3]f &= L_z \sigma_3 f - \sigma_3 L_z f \\
&= -i \sigma_3 \frac{\partial f}{\partial \theta} + i \sigma_3 \frac{\partial f}{\partial \theta} \\
&= 0 \\
\therefore [L_z, \sigma_3] &= 0. \tag{B.21}
\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Iremos usar uma função teste diferenciável  $f$ .

## APÊNDICE C – OS POLINÔMIOS DE LAGUERRE GENERALIZADOS

Os polinômios de Laguerre generalizados  $L_{n_r}^{(k)}(x)$ , com  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > -1$ , e o domínio se restringe ao semieixo positivo  $[0, +\infty[$  são soluções da equação de Laguerre associada (ARFKEN, 1985)

$$x \frac{d^2 L_{n_r}^{(k)}(x)}{dx^2} + (k + 1 - x) \frac{dL_{n_r}^{(k)}(x)}{dx} + n_r L_{n_r}^{(k)}(x) = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.1})$$

A fórmula de Rodrigues para esses polinômios é

$$L_{n_r}^{(k)}(x) = \frac{e^{-x} x^{-k}}{n_r!} \frac{d^{n_r}}{dx^{n_r}} (e^{-x} x^{n_r+k}). \quad (\text{C.2})$$

Em forma de série, os polinômios podem ser escritos como<sup>1</sup>

$$L_{n_r}^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{n_r} (-1)^m \frac{(n_r + k)!}{(n_r - m)! (k + m)! m!} x^m, \quad (\text{C.3})$$

onde vemos que  $L_{n_r}^{(k)}(x)$  é um polinômio de coeficientes reais e grau  $n_r$ . A ortogonalidade dos polinômios depende da função peso  $e^{-x} x^k$ , de tal forma que

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^k L_{n_r}^{(k)}(x) L_m^{(k)}(x) = \frac{(n_r + k)!}{n_r!} \delta_{n_r m}. \quad (\text{C.4})$$

Ademais, a integral de normalização correspondente é

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{k+1} (L_{n_r}^{(k)}(x))^2 = \frac{(n_r + k)!}{n_r!} (2n_r + k + 1). \quad (\text{C.5})$$

A derivada dos polinômios é dada por, para  $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{d^m}{dx^m} L_{n_r}^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m L_{n_r-m}^{(k+m)}(x) & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

<sup>1</sup> Assumiremos que a notação  $n!$  se estende para números não-naturais, tal que  $z! = \Gamma(z + 1)$ , em que  $z$  é um número real e  $\Gamma$  é a função gama.

O comportamento dos polinômios na origem é dado por

$$L_{n_r}^{(k)}(0) = \frac{(n_r + k)!}{n_r! k!}. \quad (\text{C.7})$$

## APÊNDICE D – A TEORIA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA

### D.1 A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A teoria quântica não-relativística é formulada pela ideia de que o movimento de uma partícula não é mais representado por uma trajetória definida, mas um estado dependente do tempo representado por uma função de onda  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  que contém todas as informações possíveis de serem obtidas sobre a partícula. Ademais, usando as relações de Einstein e de Broglie, podemos motivar a equação que determina a evolução dessa função de onda a partir da equação de energia clássica

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (\text{D.1})$$

fazendo a correspondência entre as variáveis envolvidas com operadores diferenciais

$$\varepsilon \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}. \quad (\text{D.2})$$

É então obtida uma relação envolvendo operadores, que aplicada na função de onda, leva à equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi, \quad (\text{D.3})$$

tal que  $V$  representa a influência de um potencial sobre a partícula. O comportamento de uma partícula descrito pela equação de Schrödinger é unicamente estatístico, de maneira que todas as informações possíveis de se obter sobre a partícula estão contidas na função de onda que representa o seu estado e a teoria permite obter apenas as probabilidades de um dado evento, que chamamos de valor esperado de um observável, ocorrer. Especialmente, à função de onda  $\Psi$  podemos associar uma densidade de probabilidade de posição da partícula  $\rho$

$$\rho \equiv \Psi^* \Psi = |\Psi|^2, \quad (\text{D.4})$$

que está associada a uma equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{D.5})$$

em que  $\mathbf{J}$  representa uma densidade de corrente de probabilidade dada por

$$\mathbf{J} = -\frac{i}{2m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*). \quad (\text{D.6})$$

O valor esperado de um observável  $\mathcal{A}$  pode ser definido convenientemente com a notação de produto interno. Define-se o produto interno de duas funções como (veja por exemplo (??))

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d\tau \psi^*(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{D.7})$$

de maneira que o valor esperado do observável  $\mathcal{A}$  pode ser expresso na forma

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \langle \Psi | \mathcal{A} | \Psi \rangle = \int d\tau \Psi^* \mathcal{A} \Psi. \quad (\text{D.8})$$

Evidentemente,  $\langle \mathcal{A} \rangle$  deve ser real, e isto deve ser válido para qualquer função de onda. Deduz-se então que operadores representando observáveis devem ser hermitianos, *i.e.*, possuem a propriedade

$$\langle \mathcal{A}^\dagger \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \mathcal{A} \Psi \rangle \implies \mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}. \quad (\text{D.9})$$

Para sistemas em que o potencial  $V$  em (D.3) é independente do tempo, uma solução particular da equação de Schrödinger pode ser encontrada fazendo uso do método da separação de variáveis, por intermédio do *Ansatz*

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\varepsilon t}, \quad (\text{D.10})$$

em que  $\varepsilon$  é a energia total do estado estacionário  $\psi$ , que obedece a equação de Schrödinger independente do tempo

$$\left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi = \varepsilon \psi. \quad (\text{D.11})$$

As soluções  $\psi_n$ , relacionadas às energias  $\varepsilon_n$  formam uma base para o espaço de Hilbert, tal que se elas satisfizerem a relação

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (\text{D.12})$$

elas serão ditas uma base ortonormal. Escrevemos então  $\Psi$  como uma combinação linear dessas soluções

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1} C_n \psi_n e^{-i\varepsilon_n t}, \quad (\text{D.13})$$

tal que  $C_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$  (uma discussão pormenorizada pode ser encontrada em (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOË, 2005)).

De (D.11), definindo-se

$$H \equiv -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V, \quad (\text{D.14})$$

nota-se que  $\varepsilon_n$  e  $\psi_n$  formam um par característico do operador  $H$ , *i.e.*, eles constituem um autovalor e autovetor, respectivamente.

Além disso, se encontramos outro operador hermitiano tal que este comute com  $H$ , estes possuirão autovetores comuns, de forma que os estados estacionários  $\psi_n$  podem ser rotulados pelos autovalores destes dois observáveis. Em outras palavras, os autoestados destes operadores podem formar uma base ortonormal do espaço dos estados.

Podemos obter a equação de Schrödinger para uma partícula de carga  $q$  sujeita a uma interação vetorial em termos dos potenciais eletromagnéticos  $A^0$  e  $\mathbf{A}$  — em que todo o desenvolvimento precedente neste Apêndice pode ser aproveitado —, cuja relação com os campos elétrico e magnético é dada por (GRANDY, 2012)

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{D.15})$$

Para tal, deve-se utilizar a prescrição análoga àquela da mecânica clássica (ROMAN, 1965)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - qA^0; \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}.$$

Temos então

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 \right] \Psi. \quad (\text{D.17})$$

## D.2 O USO DAS MATRIZES DE PAULI PARA INCORPORAR O SPIN NA TEORIA NÃO-RELATIVÍSTICA

Um fato notório acerca da equação de Schrödinger é a sua discordância com o espectro do átomo de hidrogênio devido ao fato de o spin não ser levado em conta. Embora esta característica seja naturalmente contemplada pela teoria quântica relativística, ele pode ser incluído com a hipótese *ad hoc* feita por Pauli, produzindo a equação que leva o seu nome. Façamos uso da identidade (A.9) para o caso em que  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ , e obtemos (WACHTER, 2010)

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{D.18})$$

Então, substituindo (D.18) no lugar da primeira parcela do segundo membro da equação original (D.17), e substituindo a função de onda  $\Psi$  pelo espinor de duas componentes  $\varphi$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

obtemos a equação de Pauli

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi, \quad (\text{D.20})$$

em que o último termo do primeiro membro representa a interação do momento angular de spin com o campo magnético. Usando o operador spin (A.10), a equação de Pauli se torna

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 - \frac{q}{m}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi \quad (\text{D.21})$$

em que a projeção do spin na direção do campo magnético se torna evidente. Ainda mais interessante é explicitar o momento de dipolo magnético definido como (??)

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{m}\boldsymbol{\sigma} = g_s \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{D.22})$$

em que  $g_s = 2$  é o chamado fator giromagnético e  $q/m$  é a razão giromagnética. Classicamente,

esse valor é 1, mas se verifica experimentalmente que para o elétron o seu valor é aproximadamente 2, o que naturalmente surge na teoria de Dirac, constituindo um dos seus primeiros triunfos.

## APÊNDICE E – A TEORIA QUÂNTICA COVARIANTE DE LORENTZ

A teoria da relatividade especial tem como um de seus axiomas a invariância das leis físicas em diferentes referenciais inerciais. Isso significa que a estrutura matemática dessas leis deve ser manifestamente covariante de Lorentz, ou seja, deve-se manter invariante em diferentes referenciais inerciais do espaço-tempo de Minkowski após uma transformação de Lorentz, que em notação indicial, é definida pela transformação linear do quadrivetor (??)

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (\text{E.1})$$

onde  $\Lambda^\mu{}_\nu$  representam os elementos da matriz transformação de Lorentz, e estão condicionados pela restrição que mantém o elemento de espaço-tempo  $ds^2$  invariante

$$\Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}, \quad (\text{E.2})$$

em que  $g_{\alpha\beta}$  é o tensor de Minkowski definido como

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 0; \\ -1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3; \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

### E.1 EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A equação de Schrödinger não é covariante, logo não é compatível com a teoria da relatividade. É indispensável então que haja uma generalização relativística desta equação. O passo natural a se tomar é considerar a expressão relativística de energia

$$\varepsilon^2 = m^2 + \mathbf{p}^2, \quad (\text{E.4})$$

e utilizar as relações entre as grandezas e os operadores diferenciais dadas por (D.2) para obter uma equação de operadores, que aplicadas em uma função de onda, nos forneça uma equação covariante. Deste processo surge a equação de Klein-Gordon, cuja forma manifestamente covariante

$$(p^\mu p_\mu - m^2)\phi = 0 \quad , \quad \phi = \phi(x) \quad (\text{E.5})$$

expressa uma equação de segunda ordem, com uma função de onda de uma componente. Essa equação foi sugerida pelo próprio Schrödinger em 1926, e estudada mais a fundo por Klein e Gordon (WACHTER, 2010), que a propuseram como a descrição relativística do elétron. Embora a covariância da equação seja autoevidente, ela apresenta dois problemas relacionados à sua interpretação como equação de estado de uma partícula (livre) por ser uma equação de segunda ordem.

Em primeiro lugar, as soluções de Klein-Gordon só são univocamente determinadas se houver uma condição inicial tanto em  $\phi$  quanto em  $\partial\phi/\partial t$ . Contudo, não há uma interpretação física para a derivada temporal de  $\phi$ .

Além disso, a equação admite soluções com energia negativa. Esse fato está intimamente relacionado com a ordem da equação no tempo, o que pode ser observado ao realizar a separação das variáveis temporal e espaciais assim como feito em (D.10) na equação (E.5), de forma que a equação independente do tempo será

$$(\nabla^2 + \varepsilon^2 - m^2)\phi = 0, \quad (\text{E.6})$$

em que  $\varepsilon$  é a constante de separação e corresponde à energia total do sistema. A solução de onda plana é

$$\phi = Ae^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{E.7})$$

onde  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{r}$  representaram os vetores momento e posição, respectivamente. Substituindo o *Ansatz* na equação (E.6), obtetmos

$$-\mathbf{p}^2 + \varepsilon^2 - m^2 = 0 \quad \therefore \quad \varepsilon = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (\text{E.8})$$

em que fica evidente a inevitabilidade de soluções negativas. Essa possibilidade acarreta em mais um problema: não é possível definir uma densidade de probabilidade positivo definida. A equação de continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{E.9})$$

só é satisfeita se  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  forem definidos como

$$\rho = -\frac{i}{2m} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad (\text{E.10})$$

e

$$\mathbf{J} = -\frac{i}{2m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*). \quad (\text{E.11})$$

Já que  $\phi$  e  $\partial\phi/\partial t$  podem assumir valores arbitrários em algum tempo, a expressão para  $\rho$  não é necessariamente positiva. Isso já se torna aparente para o caso livre, em que  $\rho$  assume a forma

$$\rho = \frac{\varepsilon}{m} \phi^* \phi. \quad (\text{E.12})$$

Aliado a tudo isso, a discordância da equação com o espectro do hidrogênio foi o golpe final para que ela fosse descartada como candidata à contraparte relativística da equação de Schrödinger para o elétron. Efetivamente, nem a equação de Klein-Gordon e nem a equação de Schrödinger modelam o elétron, visto que elas não contemplam o spin da partícula. Elas na verdade fornecem a descrição relativística e a aproximação não-relativística, respectivamente, de bósons de spin 0.

É possível por meio de uma simples mudança estender a equação de Klein-Gordon para o caso em que a partícula não é mais livre, mas sujeita a um campo eletromagnético externo descrito por um potencial vetorial  $\mathbf{A}$  e um potencial escalar (não no sentido de Lorentz)  $A^0$ . Para isso, deve-se transmutar o operador quadrimomento de forma análoga ao que se transforma o momento na mecânica quântica não relativística (D.16), *i.e.*, (ROMAN, 1965)

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu, \quad (\text{E.13})$$

em que  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ , e  $q$  é a carga da partícula. Desta forma, a equação de Klein-Gordon para uma interação eletromagnética minimamente acoplada será

$$[(p^\mu - qA^\mu)(p_\mu - qA_\mu) - m^2]\phi = 0. \quad (\text{E.14})$$

## E.2 A EQUAÇÃO DE DIRAC

### E.2.1 O espinor de Dirac

Diferentemente da equação de Klein-Gordon, a equação de Dirac exige um objeto de quatro componentes, o espinor, para descrever o estado de um férmion de spin 1/2. Mas qual é a natureza deste objeto? Para determinar isso, podemos analisar a condição que permite a covariância da equação. Será reproduzida aqui parcialmente uma discussão que pode ser encontrada de forma pormenorizada na referência (WACHTER, 2010).

A equação de Dirac de primeira ordem com uma interação vetorial minimamente acoplada é dada por

$$[\gamma^\mu(p_\mu - qA_\mu(x)) - m] \Psi(x) = 0. \quad (\text{E.15})$$

A demonstração da covariância consiste em provar que em outro referencial inercial, que denotaremos com o uso do símbolo "'", a equação de Dirac possui a mesma forma, *i.e.*,

$$[\gamma'^\mu(p'_\mu - qA'_\mu(x')) - m] \Psi'(x') = 0. \quad (\text{E.16})$$

Porém, como  $\gamma'^\mu$  também obedece à álgebra de Clifford, ela constitui nada menos que outra representação das matrizes, de maneira que podemos assumir que elas possuem a mesma forma que  $\gamma^\mu$ . Logo

$$[\gamma'^\mu(p'_\mu - qA'_\mu(x')) - m] \Psi'(x') = 0. \quad (\text{E.17})$$

Como a transformação de coordenadas é linear — vide equação (E.1) —, a transformação de  $\Psi(x)$ ,  $D(\Lambda)$ , também deve ser, pois

$$\Psi'(x') = \Psi'(\Lambda x) = D(\Lambda)\Psi(x). \quad (\text{E.18})$$

Substituindo na equação (E.17), e também exprimindo as grandezas no referencial transformado em termos do referencial original, descobrimos que a covariância da equação é possível se, e apenas se, para cada transformação de Lorentz  $\Lambda$ , existir a matriz  $D(\Lambda)$  tal que

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \quad (\text{E.19})$$

Fazendo considerações acerca de transformações de Lorentz ortócronas infinitesimais —

que não serão reproduzidas aqui, pois são um tanto complicadas —, a repetida aplicação dessas transformações nos permite construir explicitamente a transformação do espinor, que é dada por

$$D(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}(I_n)^{\mu\nu}\right), \quad (\text{E.20})$$

em que  $\omega$  corresponde ao ângulo de rotação em torno eixo  $n$ ,  $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ , e  $I_n$  corresponde à unidade de rotação de Lorentz em torno do eixo  $n$ . O espinor é definido então como o objeto que, sob uma transformação de Lorentz, se transforma de acordo com (E.18), em que  $D(\Lambda)$  é dado explicitamente por (E.20).

### E.2.2 O spin como grau de liberdade na equação de Dirac

Buscando encontrar uma forma natural de incluir o spin na teoria quântica, Dirac formulou a equação que leva seu nome. A dinâmica da partícula, interagindo minimamente com o campo eletromagnético, considerando a mesma prescrição dada para a teoria de Klein-Gordon (E.13) — que por sua vez é inspirada na teoria não-relativística —, é

$$[\gamma^\mu(p_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0. \quad (\text{E.21})$$

Consideremos o movimento da partícula em um campo de força central independente do tempo, em que teremos  $qA^0$  como uma função de dependência apenas radial e  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Expandindo a primeira parcela, isolando o operador derivada temporal, e multiplicando a equação por  $\gamma^0$  pela esquerda, obtemos o operador hamiltoniano de Dirac

$$H\Psi = \varepsilon\Psi = [\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + qA^0 + m\gamma^0]\Psi. \quad (\text{E.22})$$

Definindo o operador momento angular  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (\text{E.23})$$

vejamos o comutador de  $\mathbf{L}$  com  $H$ .

$$\begin{aligned} [H, \mathbf{L}] &= [\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] + [qA^0, \mathbf{L}] + m[\gamma^0, \mathbf{L}] \\ &= [\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}]. \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Como o potencial  $A^0$  possui gradiente na direção radial,  $[qA^0, \mathbf{L}] = 0$ , pois  $\mathbf{L}$  não possui derivadas em  $r$ . E evidentemente  $[\gamma^0, \mathbf{L}] = 0$ . Resta determinar a primeira parcela. Analisemos a componente na direção  $x$ . Em coordenadas cartesianas,  $\mathbf{L}$  possui a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{p} &= -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} - i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} - i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{k}} \\ &= L_x \hat{\mathbf{i}} + L_y \hat{\mathbf{j}} + L_z \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Vamos calcular o comutador  $[\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, L_x]$

$$\begin{aligned} [\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, L_x] &= -i(\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) (\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) \\ &= -\gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \\ &= -\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \left[ \left( \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \boldsymbol{\nabla} \right] + \gamma^0 \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \\ &= -\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \left( \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= -i\gamma^0 (\gamma^2 p_3 - \gamma^3 p_2) \\ &= -i\gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Analogamente, para as demais componentes de  $\mathbf{L}$ , obtemos a correspondente componente de  $\gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p})$ . Assim, obtemos

$$[\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] = -i\gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p}) \therefore [H, \mathbf{L}] = -i\gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p}). \quad (\text{E.27})$$

Concluimos então que o momento angular orbital não é uma constante de movimento, embora a partícula esteja sujeita a um campo central. Buscaremos um termo adicional que, somado à  $\mathbf{L}$ , seja uma constante de movimento. Nos inspiraremos no operador spin da equação de Pauli (A.10), generalizando-o para matrizes  $4 \times 4$ . Definamos o operador spin de Dirac

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.28})$$

que possui as seguintes propriedades (vide por exemplo (GREINER, 2000))

$$[\gamma^0, \boldsymbol{\Sigma}] = 0, \quad (\text{E.29})$$

$$[\gamma^5, \boldsymbol{\Sigma}] = 0, \quad (\text{E.30})$$

$$\gamma^5 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (\text{E.31})$$

Verifiquemos a relação de comutação com  $H$ . Analogamente à (E.24), o único termo que não comuta será  $\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}$ . Logo

$$[H, \mathbf{S}] = \frac{1}{2}[\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\Sigma}]. \quad (\text{E.32})$$

Procederemos da mesma forma que para  $\mathbf{L}$ , analisando a componente na direção  $x$  de  $\mathbf{S}$

$$\begin{aligned} [H, S_x] &= \frac{1}{2}[\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \Sigma_x] \\ &= \frac{1}{2}\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})\gamma^5\gamma^0\gamma^1 - \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Usando as propriedades das matrizes  $\gamma$  (vide por exemplo (STRANGE, 1998))

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{E.34})$$

$$(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}, \quad (\text{E.35})$$

$$\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0, \quad (\text{E.36})$$

simplificamos a expressão

$$\begin{aligned}
[H, S_x] &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})\gamma^5\gamma^1 + \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^1(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2}\gamma^5[-(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})\gamma^1 + \gamma^1(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})].
\end{aligned} \tag{E.37}$$

Expandindo o produto escalar e reorganizando os termos, obtemos dois comutadores

$$[H, S_x] = \frac{1}{2}\gamma^5([\gamma^1, \gamma^2]p_2 + [\gamma^1, \gamma^3]p_3). \tag{E.38}$$

Da álgebra de Clifford podemos obter uma relação de comutação, mas restrito às matrizes  $\gamma$  com índices espaciais. Dispondo de (2.3), sejam duas matrizes de índices espaciais  $i$  e  $j$ , teremos

$$[\gamma^i, \gamma^j] = 2(\gamma^i\gamma^j + \delta_{ij}), \tag{E.39}$$

o que permite simplificarmos ainda mais os comutadores

$$[H, S_x] = \gamma^5(\gamma^1\gamma^2p_2 + \gamma^1\gamma^3p_3), \tag{E.40}$$

e dispoendo da propriedade (A.6), podemos simplificar os produtos  $\gamma^i\gamma^j$  e finalmente obter

$$\begin{aligned}
[H, S_x] &= i\gamma^0(\gamma^2p_3 - \gamma^3p_2) \\
&= i\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{i}}.
\end{aligned} \tag{E.41}$$

Analogamente para as outras componentes, temos

$$[H, \mathbf{S}] = i\gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{p}), \tag{E.42}$$

que é exatamente o valor que buscamos para compensar  $\mathbf{L}$  em (E.27). Desta forma, o momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{E.43}$$

comuta com  $H$  e é portanto uma constante de movimento do problema.

Para a partícula livre, *i.e.*, em que  $A^0 = 0$  em (E.22), o operador momento  $\hat{\mathbf{p}}$  comuta com a

hamiltoniana. Podemos construir outro operador conveniente (veja por exemplo (GREINER, 2000)), ao observar que o operador  $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$  também comutará com a hamiltoniana

$$\begin{aligned} [H, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] &= [\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m\gamma^0, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] \\ &= [\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] + [m\gamma^0, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}]. \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

De (E.29), a segunda parcela é nula. Da propriedade

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{E.45})$$

e (E.31),  $\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \gamma^5 \Sigma \cdot \mathbf{p}$ . E dispendo da propriedade (E.30), temos finalmente

$$\begin{aligned} [H, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] &= [\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] \\ &= [\gamma^5 \Sigma \cdot \mathbf{p}, \Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}] \\ &= \gamma^5 (\Sigma \cdot \mathbf{p})^2 - \Sigma \cdot \mathbf{p} \gamma^5 \Sigma \cdot \mathbf{p} \\ &= \gamma^5 (\Sigma \cdot \mathbf{p})^2 - \gamma^5 (\Sigma \cdot \mathbf{p})^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

Logo,  $\Sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$  é constante de movimento. O mesmo vale para o operador helicidade

$$\Lambda_S \equiv \Sigma \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|}, \quad (\text{E.47})$$

que para o caso em que  $\mathbf{p} = (0, 0, |\mathbf{p}|)$ , possui autovalores  $\pm 1$  relacionados aos autoestados<sup>1</sup>

$$\begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_+ \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \chi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad (\text{E.48})$$

em que  $\chi_{\pm}$  são autoestados de  $\sigma_3$  (A.12).

<sup>1</sup> os autovalores tomam estes valores apenas se a equação de autovalor para  $\Sigma$  for da mesma forma que (A.11).

### E.2.3 Limite não-relativístico da equação de Dirac

Uma das primeiras vitórias da equação de Dirac foi que o seu limite não-relativístico, ao restringir-se às soluções com energia positiva, é exatamente a equação de Pauli (D.20). Nesta seção, obteremos esse limite via formulação de primeira ordem.

Partimos da equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético minimamente acoplado (E.22). Procedemos em multiplicar a equação por  $\gamma^0$  (idêntico ao procedimento realizado na seção E.2.2). Obtemos então

$$\varepsilon\Psi = [\gamma^0\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + qA^0 + m\gamma^0]\Psi. \quad (\text{E.49})$$

Tratemos das componentes superior e inferior de  $\Psi$  separadamente. Definamos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{E.50})$$

e substituamos na equação (E.49). Organizando os termos, obteremos as duas equações acopladas

$$\varepsilon\varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\chi + (qA^0 + m)\varphi \quad (\text{E.51})$$

$$\varepsilon\chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\varphi + (qA^0 - m)\chi \quad (\text{E.52})$$

Aplicamos agora o limite não-relativístico, *i.e.*, o limite de campos fracos e energias baixas

$$\varepsilon \approx m \quad , \quad |qA^0| \ll m \quad , \quad |q\mathbf{A}| \ll m. \quad (\text{E.53})$$

Empregando o limite em (E.52), arranjamos uma relação direta entre  $\chi$  e  $\varphi$

$$\chi \approx \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\varphi. \quad (\text{E.54})$$

Essa equação nos permite saber a relação entre as grandezas de  $\chi$  e  $\varphi$ . Como no limite não-relativístico a energia de repouso tem a maior contribuição para a energia total,  $|\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})| \ll m$ , e compreendemos portanto que no limite não-relativístico, a componente inferior do espinor de Dirac é muito menor que a componente superior<sup>2</sup>, *i.e.*,

<sup>2</sup> Isso é uma particularidade da representação de Dirac, justificando a sua escolha.

$$|\chi| \ll |\varphi|. \quad (\text{E.55})$$

Substituindo (E.54) em (E.51), obtemos a equação para a componente superior

$$\varepsilon\varphi = H\varphi = \left[ \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + m \right] \varphi. \quad (\text{E.56})$$

Devemos agora, para obter a equação de Pauli, definir a energia não relativística, dada por

$$\varepsilon^{NR} \equiv \varepsilon - m, \quad (\text{E.57})$$

de maneira que (E.56) se torna

$$\varepsilon^{NR}\varphi = H^{NR}\varphi = \left[ \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA^0 - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \varphi. \quad (\text{E.58})$$

que é exatamente a equação de Pauli (D.20) com o autovalor de energia explícito, onde  $H^{NR}$  é o operador hamiltoniano não-relativístico.

#### E.2.4 O comportamento das formas bilineares covariantes sob transformações de Lorentz

Dada a transformação (E.18) do espinor ao se mudar de referencial, teremos para o espinor adjunto, definido como

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (\text{E.59})$$

que

$$\bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x) D^{-1}(\Lambda). \quad (\text{E.60})$$

Desta maneira, as formas covariantes bilineares  $\bar{\Psi}\Gamma^{(m)}\Psi$  possuem um comportamento transformacional definido. Para méritos de esclarecimento, iremos demonstrar aqui o caso da forma covariante bilinear do elemento vetorial  $\Gamma^{(V)}$ , cuja forma explícita  $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  se transformará de seguinte modo

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi &\longrightarrow\bar{\Psi}(x)D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\Psi(x) \\
&= \bar{\Psi}\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\Psi(x) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi(x).
\end{aligned}
\tag{E.61}$$

Portanto,  $\bar{\Psi}\Gamma^{(V)}\Psi$  possui comportamento de vetor sob transformações de Lorentz.

### E.2.5 A conjugação de carga

A operação conjugação de carga nos permite obter o estado com energia positiva de uma partícula com carga  $-q$  a partir do estado de energia negativa com carga  $q$  sujeito ao mesmo potencial  $A^\mu$ . A transformação do espinor de Dirac é dada por

$$\Psi \longrightarrow \Psi_C = i\gamma^2\Psi^*.\tag{E.62}$$

Esta operação não é uma transformação de simetria, mas ela pode ser estendida para uma transformando também os potenciais. Temos

$$qA^\mu \rightarrow -qA^\mu.\tag{E.63}$$

A transformação leva do estado de um férmion a de um antiférmion com os mesmos números quânticos. Em outras palavras, o férmion de carga  $+q$  sob o potencial  $A^\mu$  possui o mesmo comportamento que o antiférmion de carga  $-q$  sob o potencial  $-A^\mu$  (WACHTER, 2010).