

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/04

Fenomenologia de Modelos Cosmológicos com Campos Escalares
Exponenciais

Urbano Lopes França Junior

Orientador

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld



Março de 2004

“Se nunca tivéssemos visto as estrelas, o Sol e o céu, nenhuma das palavras que pronunciamos teria sido dita. Mas a visão do dia e da noite, e dos meses, e as revoluções dos anos, criaram um número e nos deram uma concepção de tempo, e o poder de indagar sobre a natureza do universo. A partir daí, deduzimos a filosofia, e nenhum bem maior que esse foi, nem será, jamais dado pelos deuses ao homem mortal.”

Platão, século IV a.C.

Agrostoides

1. O primeiro grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1841 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius.

2. O segundo grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1895 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

3. O terceiro grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1901 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

4. O quarto grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1902 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

5. O quinto grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1903 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

6. O sexto grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1904 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

7. O sétimo grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1905 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

À memória do meu pai, o "seu Urbano" (1923-2003), que sempre viverá comigo nas músicas de viola e nos chorinhos.

8. O oitavo grupo de abelhas com o nome de "agrostoides" foi descrito em 1906 por Johann Christoph Fabricius, que deu o nome a este gênero em homenagem ao seu filho, o entomólogo Johann Christian Fabricius. Este grupo de abelhas é muito comum em áreas abertas e é conhecido por sua habilidade de construir ninhos em solo.

Agradecimentos

A realização de um trabalho como esse obviamente só é possível por causa da existência e presença de pessoas que nos apoiam e que tornam o caminhar mais fácil e agradável.

Dessa forma, gostaria de agradecer à “Dona Nina”, minha mãe, ao meu pai, e à toda a família França, por tudo o que me ensinaram, especialmente durante nossas longas conversas até 2 da manhã na mesa da cozinha... Agradeço pelo apoio constante nas minhas decisões, quaisquer que elas fossem, e por sempre estarem presentes, ainda que distantes. Obrigado pela excelente família que vocês são.

Um agradecimento especial tem que ser feito à Branca, minha irmã, que me “acolheu” e fez com que me sentisse em casa na “Teixeira da Silva”. Agradeço ainda a Branca, ao Rodrigo, à Flávia, e mais recentemente aos visitantes esporádicos Christiano e Aldine pelos “sagrados” bate papos noturnos, em que os assuntos do dia são colocados em pauta.

Agradeço também à Thaís, que sendo simplesmente a “Isi”, está ao meu lado em absolutamente todos os momentos, sejam eles bons ou ruins. Sou realmente grato pela sua paciência em entender minha freqüente ausência, e por ter aprendido com ela a encarar mesmo os piores momentos com bom humor. Agradeço ainda pela alegria constante que é viver ao seu lado, e por me mostrar os lados legais da vida que às vezes passam despercebidos. É realmente um privilégio ter alguém tão especial ao meu lado.

Sou profundamente grato ao professor Rogério Rosenfeld pelos projetos interessantíssimos nos quais tive a oportunidade de trabalhar, pela orientação nos 4 anos de discussões “cosmológicas”, pelo apoio aos projetos futuros e por entender minhas ausências nos momentos difíceis do final de 2002. Uma parte fundamental da minha formação foi moldada pelo seu jeito sempre empolgado de encarar a física. Agradeço também ao amigo Rogério pelas longas conversas sobre o meio acadêmico, sobre o futuro e sobre a vida em geral, e pela companhia no triste café da manhã do dia 13 de janeiro de 2003, na Swieca.

Agradeço ainda aos professores Adriano Natale, do IFT, e Renata Funchal, do IFUSP, pela solicitude quando precisei de suas ajudas.

Agradeço também aos meus grandes amigos do IFUSP, Daniel, Eduardo, Gabriel, Gustavo, Igor Z., Priscila, Regina e RVêncio: tenho realmente muita sorte em ter “trombado” com essas pessoas quando me mudei para o IFUSP. Apesar de ser um grupo tão heterôgeneo, impressionantemente foi um sistema que entrou em equilíbrio e passou a funcionar de maneira excelente. Não tenho a menor dúvida que grande parte da minha formação pessoal e em física deve-se à companhia e à amizade deles (e aos seminários S⁴, é claro...).

Não posso deixar de agradecer ao povo da sala 5 do galpão do IFT: André, Boris, Juan

Pablo (Montoya), Matheus (SCB), Marco e Ricardo, pelas inúmeras bobagens e poucas coisas sérias discutidas na sala e nos almoços. Também não poderia deixar de agradecer aos Ricardos, o “Bá” e o da minha sala, pela companhia e discussões nas matérias, e ao “Bá” especialmente pelos inúmeros volumes da coleção “Hidden Physics” (sempre com capinha marrom e velha...) que ele apresentou para mim e para o Ricardo nas matérias que fizemos juntos (e nas que só ele fez também...). Gostaria também de agradecer aos demais colegas do IFT, cujos nomes não citarei para evitar (inevitáveis) esquecimentos: obrigado pelo ambiente alegre e, em muitas ocasiões, descontraído que tornam o IFT um lugar tão agradável.

Gostaria também de agradecer à Ana Helena pela amizade. Embora não tenhamos tido a oportunidade de trabalharmos juntos (a menos da ocasião em que nosso grupo fez uma maratona de revezamento...), pudemos discutir um pouco sobre cosmologia e muito sobre a vida.

Obviamente não poderia deixar de agradecer os infinitos anos de apoio financeiro dos meus pais, que tornaram possível que eu pudesse me dedicar quase que integralmente aos estudos. Por fim, agradeço à FAPESP pelo seu imprescindível apoio financeiro neste projeto, processo 01/11392-0.

Resumo

Nos últimos anos diversas evidências acumularam-se indicando que o universo é plano e dominado por alguma forma de energia escura, cuja pressão negativa está atualmente fazendo com que ele esteja em expansão acelerada. Vários modelos têm sido propostos para a energia escura, entre os quais destacam-se os modelos de quintessência, nos quais essa energia é modelada por um campo escalar. Neste trabalho analisamos alguns vínculos observacionais nos modelos de quintessência com potenciais exponenciais, e obtivemos limites para o espaço de parâmetros desses modelos no caso em que a quintessência está desacoplada dos demais componentes do universo e no caso em que ela está acoplada à partícula de matéria escura. No caso desacoplado, estudamos as soluções do tipo *scaling*, e mostramos que nesse regime, o único em que a quintessência exponencial desacoplada apresenta soluções cosmológicamente realísticas, esses modelos não podem ser considerados menos naturais que os demais potenciais de quintessência. Obtivemos ainda que o caso acoplado, assim como o desacoplado, também não resolve o problema da coincidência cósmica, e que a idade do universo nestes modelos é consideravelmente maior que no caso desacoplado, de modo que os limites na idade podem ser úteis para distinguir observacionalmente entre as quintessências acoplada e desacoplada.

Palavras Chaves: energia escura; quintessência; partículas com massa variável.

Áreas do conhecimento: cosmologia

Abstract

During the last years many evidences are indicating that the universe is flat and dominated by some form of dark energy, whose negative pressure is currently driving its accelerated expansion. A plenty of models have been proposed, with special attention to the quintessence models, in which the dark energy is modelled by a scalar field. In this work we have analysed some observational constraints in the quintessence models with exponential potentials, and we have put limits on the parameter space in both coupled and uncoupled cases. In the uncoupled case, we have studied the scaling solutions, and we have showed that in this regime, that is the only one in which the exponential uncoupled quintessence presents realistic solutions, such models can not be considered less natural than others quintessence potentials. We have also obtained that in the case in which the quintessence is coupled to dark matter the cosmic coincidence problem can not be solved, and that the age for coupled models is considerably higher than the age for non-coupled models, in such a way that limits on the age can be useful in distinguishing between coupled and non-coupled models.

Índice

1	Introdução	1
2	Modelo Cosmológico Padrão	4
2.1	Princípio cosmológico	4
2.2	As equações de Friedmann	6
2.3	Fase dominada pela radiação	9
2.3.1	Termodinâmica do universo primordial	9
2.3.2	O desacoplamento dos neutrinos	11
2.3.3	Nucleossíntese	13
2.4	Fase dominada pela matéria	16
2.4.1	A radiação cósmica de fundo	16
2.5	A idade do universo	18
3	Inflação	21
3.1	Problemas com o modelo do Big Bang	21
3.2	A idéia da inflação	22
3.3	O potencial do campo escalar	23
3.4	Aproximação de Rolagem Lenta (Slow-Roll Approximation)	25
3.4.1	Potencial Quadrático	26
3.4.2	Potencial Quártico	27
3.5	Potencial Exponencial	29
4	Energia Escura	31
4.1	O novo cenário cosmológico	31
4.2	Constante cosmológica	33
4.3	Quintessência	34
4.4	Classificação dos potenciais de campos escalares	35

4.4.1	Soluções do tipo scaling	37
4.4.2	Soluções do tipo tracker	38
4.5	Estabilidade dos pontos fixos	39
5	Quintessência com Potenciais Exponenciais	44
5.1	Novas variáveis	45
5.2	Resultados numéricos	48
5.2.1	Parâmetros do potencial	48
5.2.2	Condições iniciais	49
5.2.3	Vínculos	50
5.3	Resultados e discussão	51
6	Quintessência Exponencial Acoplada à Matéria Escura	57
6.1	O modelo de VAMP	58
6.2	Pontos fixos	60
6.3	Ajuste fino	64
6.4	Idade do universo	65
7	Conclusões	71
A	Sistema de Unidades Naturais	73
B	Obtenção das Equações de Friedmann	75
C	Parâmetros Cosmológicos	76
	Referências	77

Relação das Figuras

- 2.1 Abundâncias primordiais em função do parâmetro $\Omega_{b0}h^2$. A faixa vertical mostra a região que satisfaz a todas as medidas de abundâncias dos 4 núcleos. Note que para $h \approx 0,7$, temos que $\Omega_{b0} \approx 0,04$. Figura extraída de [Burles *et al.* (1998)]. 15
- 2.2 Espectro da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) medida pelo instrumento FIRAS a bordo do satélite COBE. As barras de erro foram aumentadas por um fator de 400. Quaisquer distorções na curva de Planck são menores que 0,005%. Figura extraída de [Turner e Tyson (1999)]. 18
- 2.3 Idade do universo em unidades de $h^{-1} \times 10^9$ anos para um universo plano com matéria e constante cosmológica em função do valor de $\Omega_{\Lambda 0}$. A linha pontilhada mostra o valor $t_0 = \frac{2}{3}H_0$, apenas para comparação. Note que quanto mais a constante cosmológica contribui para a energia atual do universo, maior a sua idade. 20
- 4.1 Espectro de potências da radiação cósmica de fundo, medido pelo WMAP, CBI e ACBAR. Esta figura basicamente mostra o tamanho da variação de temperatura entre dois pontos no céu separados por um ângulo θ versus o número de multipolo $l = 200^\circ/\theta$. A posição do primeiro pico em $l \approx 200$ indica que a densidade do universo é muito próximo à densidade crítica. Figura: NASA/WMAP Science Team. 32
- 4.2 Diagrama de Hubble diferencial para supernovas do tipo Ia. As medidas de mais de 200 supernovas estão reunidas nos nove pontos mostrados na figura. A curva tracejada separa as curvas de universos acelerados (acima) e desacelerados (abaixo). As curvas cheias representam modelos de universo com matéria e constante cosmológica em diferentes proporções: de cima para baixo, $(\Omega_{M0} = 0,3; \Omega_{\Lambda 0} = 0,7)$, $(\Omega_{M0} = 0,3; \Omega_{\Lambda 0} = 0)$ e $(\Omega_{M0} = 1; \Omega_{\Lambda 0} = 0)$. Figura extraída de [Freedman e Turner (2003)]. 33

- 5.1 Valor do campo $\hat{\phi}$ como função de u . Para as condições iniciais mostradas, vemos que o campo apresenta as mesmas características. O campo fica quase constante até atingir o regime de ponto fixo, quando começa a rolar o potencial. As condições iniciais que usaremos no texto são mostradas pela linha cheia. Estas curvas foram feitas com $\hat{V}_0 = 1$ e $\lambda = 1.3$ 49
- 5.2 Região do espaço de parâmetros que satisfaz todos os vínculos observacionais discutidos na subseção 5.2.3. Há uma grande região do espaço de parâmetros do potencial exponencial que explica todas as observações. Todos os valores de λ que produzem as soluções do tipo *tracker* satisfazem os vínculos. 51
- 5.3 *Figura superior*: Densidade de energia como função de u para quintessência, matéria e radiação em uma solução típica. Inicialmente a densidade de energia da quintessência decresce muito mais rápido que matéria e radiação. Quando o termo do potencial torna-se importante, $\hat{\rho}_\phi$ é congelado, pois o potencial é aproximadamente constante até que o sistema entre no regime de ponto fixo. Quando isso acontece, o campo muda novamente seu comportamento e cai com $a^{-\lambda^2}$, mais lentamente que a matéria. *Figura inferior*: Equação de estado da quintessência como função de u para vários parâmetros. Inicialmente, todas as curvas têm o mesmo comportamento. Quando a quintessência atinge o ponto fixo, cada solução é congelada em um valor, dependendo de λ . Para um valor de λ baixo, a quintessência comporta-se como a constante cosmológica. Para $\lambda > \sqrt{2}$, o universo não acelera no regime de ponto fixo. 52
- 5.4 Parâmetros de densidade da quintessência, matéria e radiação para uma solução típica. O universo passa atualmente por uma fase de transição, em que Ω_ϕ vai de um valor muito baixo para o seu valor no regime de ponto fixo ($\Omega_\phi^{fp} = 1$). Note que $\Omega_{\phi 0} \approx 0,7$ 53
- 5.5 Região do espaço $(\lambda, \omega_{\phi 0})$ que gera soluções realistas. Este gráfico independe dos valores de \hat{V}_0 e $\hat{\phi}_i$, e muda apenas para valores altos de $\hat{\phi}'_i$ ($\hat{\phi}'_i \gtrsim 1.25$). Diferentes valores de λ dão o mesmo valor de $\omega_{\phi 0}$ porque o ponto fixo ainda não foi atingido. 53
- 5.6 Região do espaço de parâmetros que satisfaz todos os vínculos observacionais quando usa-se como condições iniciais $\hat{\phi}_i = 1$ e $\hat{\phi}'_i = 0.05$. Note que o uso de $\hat{\phi}_i \neq 0$ apenas corresponde a uma mudança de escala no espaço de parâmetros permitidos de \hat{V}_0 por um fator $e^{\sqrt{3}\lambda\hat{\phi}_i}$ 54
- 5.7 Regiões do espaço de parâmetros para vários $\hat{\phi}'_i$ diferentes daquele da equipartição de energia inflacionária. Como o universo é plano, $|\hat{\phi}'_i| < \sqrt{2}$. Para quase todos os possíveis valores de $|\hat{\phi}'_i|$ uma região significativa no espaço de parâmetros continua existindo. Ela desaparece apenas para $\Omega_{\phi i} \gtrsim 0.75$ 55

6.1 *Figura superior*: Parâmetros de densidade dos componentes do universo como função de $u = -\ln(1+z)$ para $\lambda = 3$, $\beta = 2$ e $V_0 = 0,1\tilde{\rho}_c$. Após um período transiente de dominação de matéria bariônica (linha pontilhada-tracejada), a quintessência domina a energia do universo e a razão entre as densidades de energia da matéria escura (linha pontilhada) e da quintessência (linha cheia) permanece constante. *Figura inferior*: Equações de estado efetivas para quintessência (linha cheia) e matéria escura (linha tracejada) para os mesmos parâmetros utilizados na figura superior. No regime *tracker* ambas são negativas. 62

6.2 Vínculos no espaço de parâmetros (λ, β) dados pela equação de estado e parâmetro de densidade da quintessência. O limite superior (inferior) $\omega_{obs} = -0,4$ ($-0,8$) na equação de estado faz com que a região abaixo (acima) da curva pontilhada-tracejada (pontilhada) seja permitida. Por outro lado, o limite superior (inferior) na densidade de energia da quintessência $\Omega_{obs}^{(Q)} = 0,8$ ($0,6$), requer que os parâmetros estejam acima (abaixo) da linha cheia (tracejada). 63

6.3 Número normalizado de modelos que satisfazem os vínculos observacionais discutidos no texto. 64

6.4 Parâmetros de densidade dos componentes do universo como função de $u = \ln(1+z)$ para $\lambda = 3$, $\beta = 2$. Na figura superior, temos que $V_0 = 10^{-4}\tilde{\rho}_c$, e na inferior, $V_0 = 10^3\tilde{\rho}_c$ 65

6.5 Vínculos no espaço de parâmetros (λ, β) impostos pela idade do universo para $V_0 = 0,1\tilde{\rho}_c$, $V_0 = 0,3\tilde{\rho}_c$ e $V_0 = 0,5\tilde{\rho}_c$. As linhas correspondem aos limites da figura 6.2. 67

6.6 Idade do universo versus a equação de estado atual do universo para modelos que satisfazem o parâmetro de Hubble. 68

6.7 Distribuição dos modelos que satisfazem os vínculos na constante de Hubble e no parâmetro de densidade da quintessência atual, como função da idade do universo. O ajuste dos pontos indica que $t_0 = (15, 3_{-0,7}^{+1,3}) \times 10^9$ anos com 68% de nível de confiança. 69

6.8 Vínculos impostos no espaço de parâmetros (λ, β) por $t_0 = (12, 5_{-1,9}^{+2,5}) \times 10^9$ anos, para $V_0 = 0,1\tilde{\rho}_c$, $V_0 = 0,3\tilde{\rho}_c$ e $V_0 = 0,5\tilde{\rho}_c$. As linhas correspondem aos limites da figura 6.2. 69

Capítulo 1

Introdução

“Durante os últimos 5 anos os cosmólogos têm testado se o modelo confuso e não-intuitivo de um universo feito de matéria escura e inflado pela energia escura poderia estar correto. Este ano, graças ao WMAP, aos dados do SSDS e às novas observações de supernovas, eles sabem que a resposta é sim - e estão começando a perguntar novas questões. Isto é, talvez, um sinal que os cientistas finalmente começarão a entender o início”. Assim Charles Seife concluiu seu artigo publicado na edição de 19 de dezembro de 2003 da revista Science [Seife (2003)], que elegeu a *comprovação observacional do novo cenário cosmológico* (um universo plano, dominado por alguma forma de energia escura homogeneamente distribuída que atualmente faz com que sua expansão seja acelerada e cuja maior parte da matéria está na forma de matéria escura) como o *grande avanço científico de 2003*.

Uma vez que a aceleração do universo e a existência da energia escura, assim como a presença da matéria escura nas galáxias, parecem ser fatos comprovados, é necessário que modelos para o setor escuro do universo sejam criados, e que suas previsões sejam comparadas às observações, a fim de que possamos entender a natureza dos componentes que dominam a energia do universo.

Nesta dissertação apresentamos alguns resultados baseados em nossos estudos sobre a *quintessência*, um modelo para a energia escura baseado em um campo escalar cuja energia potencial domina a energia do universo no presente. Em especial, analisamos os modelos baseados no potencial exponencial, que apresentam uma característica especial em relação aos demais modelos de quintessência por possuírem soluções do tipo *tracker*, nas quais a razão entre a densidade de quintessência e da matéria fica constante.

É importante notar que esse novo cenário cosmológico é baseado no modelo cosmológico padrão, o chamado modelo do Big Bang quente [Weinberg (1972), Kolb e Turner (1990), Peebles *et al.* (1991), Ross (2003)]. Tal modelo, baseado nas equações de Einstein da Relatividade Geral e na métrica de Robertson-Walker, que leva as equações de Einstein às equações de Friedmann*, admite que o universo está em expansão há cerca de 14 bilhões

*Razão pela qual o modelo padrão também é chamado de modelo de Friedmann-Robertson-Walker, ou simplesmente modelo FRW.

de anos, e que vem resfriando-se de uma fase muito quente para uma situação atual em que a temperatura é cerca de 2,7 K. O capítulo 2 apresenta uma breve revisão do modelo FRW e de algumas de suas propriedades, assim como das evidências observacionais que o tornaram o modelo padrão da cosmologia.

No capítulo 3 introduzimos o cenário inflacionário, que resolve alguns dos problemas do modelo padrão e que tornou corrente o uso de campos escalares em cosmologia. Nesse capítulo aproveitamos para introduzir as equações do campo escalar e o potencial exponencial, que iremos utilizar freqüentemente nos demais capítulos. O capítulo seguinte apresenta o novo cenário cosmológico. Em particular, introduzimos o campo de quintessência, as soluções atratoras em que a equação de estado da quintessência fica constante, a estabilidade dessas soluções e o seu potencial em resolver o que ficou conhecido como *problema da coincidência cósmica*: por quê as densidades de energia da quintessência e da matéria são da mesma ordem de grandeza justamente na época atual.

Os dois capítulos seguintes são baseados em nossos trabalhos. No capítulo 5 discutimos a possibilidade do potencial exponencial simples explicar os limites impostos pelas observações. Nos regimes atratores, os parâmetros cosmológicos discordam dos valores observacionais, o que fez com que esse potencial fosse geralmente descartado. Entretanto o regime atrator não precisa ter sido atingido na época atual. Nessa situação, conforme mostramos em [França e Rosenfeld (2002)], o potencial é capaz de explicar todos os vínculos observacionais com um ajuste fino parecido ao dos demais modelos de quintessência, de modo que não há razão para considerar este modelo menos natural que qualquer outro. Uma outra característica que observamos é que em algumas situações o universo deixa de acelerar no futuro e entra novamente numa época de expansão desacelerada.

Já no capítulo 6 discutimos os modelos em que a quintessência é acoplada às partículas de matéria escura, de modo que a massa destas tornam-se variáveis, razão pela qual estes modelos ficaram conhecidos como modelos de VAMPs (VARIABLE-MASS PARTICLES). Estes modelos são particularmente interessantes porque poderiam em princípio solucionar o problema da coincidência cósmica, uma vez que existem regimes atratores nos quais a razão entre as densidades de matéria escura e quintessência fica constante e ao mesmo tempo o universo tem sua expansão acelerada. Entretanto, o ajuste fino necessário para que tais modelos expliquem o valor da constante de Hubble e da densidade de energia atual da quintessência é bastante grande, o que exclui a possibilidade de tal modelo resolver a coincidência, como verificamos em [França e Rosenfeld (2004)]. Além disso, discutimos a idade do universo nesses modelos, e verificamos que ela é bem superior a dos modelos de quintessência desacoplada, o que torna esse vínculo potencialmente importante para distinguir observacionalmente entre esses dois cenários. Por fim, no capítulo final apresentamos as conclusões da dissertação.

Para concluir, apenas alguns comentários com relação às notações e unidades. Como é de uso corrente, nesta dissertação o índice 0 subscrito denota o valor atual de uma dada

grandeza, a menos do caso da constante do potencial, denotada por V_0 . O sistema natural de unidades, em que $\hbar = c = k_B = 1$, foi utilizado em praticamente toda a dissertação, e está discutido no apêndice A.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão

2.1 Princípio cosmológico

Uma hipótese central no modelo cosmológico padrão, que ficou conhecida como *princípio cosmológico*, é a que o universo é homogêneo e isotrópico em alguma escala, em qualquer época.

O princípio cosmológico desempenha um papel fundamental no modelo de FRW, uma vez que a homogeneidade e isotropia tornam possível o uso da métrica de Robertson-Walker, cuja simetria faz com que as equações de Einstein dependam de apenas uma variável, o fator de escala $a(t)$.

Apesar de ter sido inicialmente utilizado por Einstein sem nenhuma evidência observacional, com o objetivo de simplificar suas equações, atualmente diversas observações, especialmente o alto grau de homogeneidade e isotropia da radiação cósmica de fundo, indicam que de fato o princípio cosmológico é uma boa aproximação da realidade.

Além de ser homogêneo e isotrópico, o universo está em expansão, conforme Edwin Hubble descobriu na década de 20. Hubble observou [Hubble (1929)] que havia uma relação linear* entre a distância $l(t)$ de uma galáxia até nós e sua velocidade $v(t)$ de afastamento, ou seja

$$v(t) = H_0 l(t), \quad (2.1)$$

onde o parâmetro de proporcionalidade H_0 é a *chamada constante de Hubble*, usualmente escrita na forma

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.2)$$

As medidas obtidas pelo Hubble Space Telescope Key Project [Freedman *et al.* (2001)] utilizando variáveis cefeidas indicam que, dentro de um intervalo de confiança de 1σ ,

$$h = 0,72 \pm 0,08. \quad (2.3)$$

*A relação linear, na verdade, só é válida para distâncias cosmológicamente pequenas. Para galáxias mais distantes são necessárias correções que dependem do chamado parâmetro de desaceleração, que discutiremos posteriormente.

Note que para que a homogeneidade e isotropia sejam preservadas mesmo com o universo em expansão, é necessário que haja um fator de expansão comum para as distâncias $l(t)$ entre pares de galáxias, de modo que

$$l(t) = ra(t) . \quad (2.4)$$

Dessa forma, uma galáxia *qualquer* observa uma outra galáxia localizada a uma distância $l(t)$ afastar-se com velocidade

$$v = \frac{dl(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}l(t) = H(t)l(t) , \quad (2.5)$$

que coincide com a relação obtida por Hubble. Ponto denota derivada em relação ao tempo universal t . Note ainda que

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} , \quad (2.6)$$

é o chamado *parâmetro de Hubble*, cujo valor atual é a constante de Hubble comentada nas equações (2.2) e (2.3).

A constante de Hubble, por ter dimensão de tempo⁻¹, fornece uma escala de tempo natural para a idade do universo,

$$H_0^{-1} = 9,778 h^{-1} \times 10^9 \text{ anos} . \quad (2.7)$$

O espectro da maioria das galáxias observadas por Hubble tinham as linhas de absorção deslocadas para comprimentos de onda maiores que os das linhas observadas em laboratórios terrestres (o chamado desvio para o vermelho ou *redshift*), um fenômeno *análogo* ao desvio Doppler.[†] O *redshift* z de uma fonte pode ser quantificado utilizando-se a relação

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emi}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{emi})} , \quad (2.8)$$

onde λ_{obs} corresponde ao comprimento de onda observado e λ_{emi} corresponde ao comprimento de onda que a radiação tinha ao ser emitida.

Para analisar a expansão do universo, podemos utilizar um sistema de *coordenadas comóveis*, no qual, por definição, o sistema de coordenadas acompanha a expansão do universo, de modo que uma galáxia *sem movimento peculiar* vai manter suas coordenadas constantes. Nesse sistema de coordenadas as galáxias são objetos em repouso, sujeitas apenas à expansão cosmológica, algumas vezes chamada de “fluxo de Hubble”.

Um outro ponto importante é que para medirmos a distância comóvel $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, precisamos de uma métrica. Uma métrica adequada, que incorpora as simetrias impostas pelo princípio cosmológico, é a métrica encontrada por Howard Robertson e Arthur Walker em 1934, a chamada *métrica de Robertson-Walker*,

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) , \quad (2.9)$$

[†]O *redshift* cosmológico não é na verdade devido a um efeito Doppler, mas sim ao fato que o comprimento de onda luminoso cresce proporcionalmente ao fator de escala.

onde (t, r, θ, ϕ) correspondem às coordenadas comóveis e k pode ser $+1, 0$ ou -1 para descrever espaços com curvatura positiva, nula ou negativa.

2.2 As equações de Friedmann

As equações de Einstein da gravitação são dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de Ricci, \mathcal{R} é o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dos componentes do universo. Usando a métrica de Robertson-Walker e o tensor energia-momento de um fluido perfeito, obtemos as chamadas equações de Friedmann (ver apêndice B),

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (2.11)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p. \quad (2.12)$$

Podemos ainda definir duas grandezas: a chamada *densidade crítica*

$$\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.13)$$

e o chamado *parâmetro de densidade*

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho. \quad (2.14)$$

Em especial, temos que

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,879 h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} = 8,099 h^2 \times 10^{-11} \text{ eV}^4. \quad (2.15)$$

Com isso, a equação de Friedmann pode ser escrita como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \implies \frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1, \quad (2.16)$$

de onde podemos classificar o universo em três tipos[†]:

[†]Os nomes, além de estarem relacionados à geometria, também fazem referência ao destino do universo caso sua energia seja dominada pela matéria e radiação. Nesta situação, um universo aberto expande-se para sempre, um universo plano tem sua velocidade de expansão reduzida a zero em um tempo infinito (mas sem colapsar) e um universo fechado pararia de se expandir em alguma época e começaria a se contrair. Entretanto, caso o universo possua de fato uma constante cosmológica, a relação entre geometria e destino final do universo deixa de ser direta. Além disso, se a energia do universo for dominada por algum tipo de campo escalar ou matéria exótica (como as observações atualmente indicam), perde-se completamente a relação entre geometria e destino final do universo, como pode ser visto em [Krauss e Turner (1999)]. Por fim, uma especulação interessante é que as observações não excluem a possibilidade de que haja algum outro tipo de componente cuja densidade de energia ainda não se tornou relevante, e que poderia alterar sensivelmente o destino do universo.

a) *universo aberto*: $k = -1 \implies \rho < \rho_c \implies \Omega < 1$;

b) *universo plano*: $k = 0 \implies \rho = \rho_c \implies \Omega = 1$;

c) *universo fechado*: $k = +1 \implies \rho > \rho_c \implies \Omega > 1$.

Podemos ainda usar a equação (2.11) em (2.12) e obter

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) = -\frac{4\pi G}{3} \rho (1 + 3\omega) , \quad (2.17)$$

onde $\omega = p/\rho$ é a chamada *equação de estado* do fluido. Da mecânica estatística sabemos que a equação de estado da radiação (matéria relativística ou “quente”) é $\omega_R = 1/3$. Para a matéria (matéria não-relativística ou “fria”) temos que $\omega_M = 0$.

Podemos ainda derivar a equação de Friedmann com relação ao tempo,

$$\frac{d}{dt} (\dot{a}^2 + k) = \frac{d}{dt} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \right) \implies 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho} a^2 + 2\rho a\dot{a}) ,$$

ou ainda, usando (2.17) e a equação de estado

$$-(\rho + 3p)a\dot{a} = \dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a} \implies \dot{\rho} = -3H(\rho + p) . \quad (2.18)$$

A equação acima é chamada *equação do fluido* ou *equação da continuidade*. Podemos ainda obter como a densidade de um componente com a equação de estado *constante* varia com o fator de escala

$$\dot{\rho}a = -3\rho(1 + \omega)\dot{a} , \quad \implies \quad \frac{1}{3(1 + \omega)} \int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{da}{a} ,$$

de modo que a densidade de energia de um componente do universo com equação de estado[§] ω varia com o fator de escala na forma,

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} , \quad (2.19)$$

Dessa forma, temos que para a radiação

$$\rho_R \propto a^{-4} , \quad (2.20)$$

e para a matéria

$$\rho_M \propto a^{-3} , \quad (2.21)$$

Esses expoentes podem também ser entendidos de uma outra forma. No caso da matéria, à medida que o universo expande-se e aumenta seu volume, a densidade diminui de maneira inversamente proporcional ao volume. No caso da radiação, além da diminuição devido ao aumento do volume do universo, há um fator de a^{-1} devido ao fato do comprimento de onda da radiação ser proporcional ao fator de escala.

[§]Para sermos precisos, deveríamos chamar ω de parâmetro da equação de estado, e não apenas de equação de estado. Entretanto, como o uso deste último termo tornou-se corrente na literatura, vez por outra utilizaremos a denominação de equação de estado para ω .

Podemos também considerar um outro tipo de componente para o universo, como a chamada *constante cosmológica*, denotada por Λ . Einstein introduziu a constante cosmológica em suas equações de campo da Relatividade Geral para tornar o universo estático, de acordo com as idéias vigentes na década de 1910. A constante cosmológica teria uma ação essencialmente *repulsiva*, de modo a contrabalançar a atração gravitacional. Uma de suas principais características é justamente o fato da sua densidade de energia ρ_Λ constante, ou seja, o que implica em uma equação de estado $\omega_\Lambda = -1$. Voltaremos à constante cosmológica no capítulo 4.

Podemos ainda obter como o fator de escala varia com o tempo de acordo com o fluido dominante. De (2.11) e (2.19), temos que

$$\frac{\dot{a}}{a} \propto a^{-3(1+\omega)/2} \Rightarrow \int a^{3(1+\omega)/2} a^{-1} \propto \int dt, \quad (2.22)$$

de modo que

$$a(t) \propto t^{2/3(1+\omega)}. \quad (2.23)$$

Com isso, temos que para a matéria $a(t) \propto t^{2/3}$ e para a radiação $a(t) \propto t^{1/2}$. Note ainda que a equação acima não vale para a constante cosmológica, caso em que a equação (2.22) resulta em $a(t) \propto \exp(Ht)$.

As densidades[¶] de matéria bariônica, de matéria (escura e bariônica) e radiação atualmente observadas são

$$\rho_{b0} = 1,879 \times 10^{-29} \Omega_{b0} h^2 \text{g cm}^{-3} = 1,620 \times 10^{-12} \text{eV}^4, \quad (2.24)$$

$$\rho_{M0} = 1,879 \times 10^{-29} \Omega_{M0} h^2 \text{g cm}^{-3} = 1,215 \times 10^{-11} \text{eV}^4, \quad (2.25)$$

$$\rho_{R0} = 3,37 \times 10^{-15} \text{eV}^4, \quad (2.26)$$

ou seja, a densidade de matéria é muito maior do que a densidade de radiação atualmente. Entretanto, como a densidade de radiação diminui mais rapidamente do que a densidade de matéria, o universo primordial era dominado pela densidade de energia da radiação. Como veremos, há de fato vários dados observacionais que concordam com uma juventude quente para o universo, na qual a radiação e a matéria estavam em equilíbrio termodinâmico^{||}.

[¶]O valor para a densidade bariônica atual vem dos limites de nucleossíntese, que exigem que $\Omega_{b0} h^2 \approx 0.02$ (ver subseção 2.3.3). A estimativa da densidade total de matéria, $\Omega_{M0} \approx 0,3$, vem de medidas gravitacionais, como as curvas de rotação de galáxias e distribuição das galáxias em grande escala [Olive (2003)]. A estimativa para a densidade atual de radiação vem das medidas da temperatura da radiação cósmica de fundo (ver subseção 2.3.2).

^{||}Note que, embora o universo primordial não pudesse estar em equilíbrio termodinâmico, uma vez que ele estava em expansão, a aproximação é válida quando estamos considerando interações cuja taxa de reação Γ é maior do que a taxa de expansão do universo, dada pelo parâmetro de Hubble H .

2.3 Fase dominada pela radiação

2.3.1 Termodinâmica do universo primordial

Para analisarmos o universo primordial, precisamos conhecer as espécies de partículas que estão presentes em uma dada época no universo, assim como suas funções de distribuição, pois delas dependem, por exemplo, a densidade em número e a densidade de energia da espécie. Enquanto as partículas não relativísticas, ou seja, aquelas com uma massa muito maior que a energia média do universo ($m \gg T$) seguem uma distribuição de Maxwell-Boltzmann, as partículas relativísticas ($T \gg m$) seguem distribuições do tipo Fermi-Dirac ou Bose-Einstein, dependendo de seu spin.

Assim, no equilíbrio termodinâmico, a densidade de número, a densidade de energia e a pressão das partículas relativísticas são dadas por

$$n = b_n \frac{\zeta(3)}{\pi^2} gT^3, \quad (2.27)$$

$$\rho = b_\rho \frac{\pi^2}{30} gT^4, \quad (2.28)$$

$$p = \frac{\rho}{3}, \quad (2.29)$$

onde g corresponde ao número de graus de liberdade da espécie, $b_n = 1$ (3/4) e $b_\rho = 1$ (7/8) para bósons (férmions) e $\zeta(3) = 1.202$ é a função zeta de Riemann de 3. No caso das partículas não relativísticas, o valor dessas grandezas é dado por

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp(-m/T), \quad (2.30)$$

$$\rho = mn, \quad (2.31)$$

$$p = nT \ll \rho, \quad (2.32)$$

de onde vemos que a densidade de energia e a pressão das espécies não relativísticas é exponencialmente menor que a das espécies relativísticas. Por esta razão, uma aproximação que facilita as contas é incluímos apenas estas últimas no cálculo da densidade de energia e pressão totais do universo primordial, de modo que

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (2.33)$$

$$p_R = \frac{\rho_R}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4, \quad (2.34)$$

onde

$$g_* := \sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4, \quad (2.35)$$

refere-se ao número total de graus de liberdade dos férmions e bósons relativísticos i (ou seja, cuja massa $m_i \ll T$), onde T é a temperatura dos fótons. Note que, uma vez que

g_* está relacionado com o número de espécies relativísticas presentes, o número total de graus de liberdade é uma função da temperatura, como discutiremos em seguida.

Durante a época dominada pela radiação (suficientemente distante da época em que $\rho_M \approx \rho_R$), temos de (2.11) que

$$H = \sqrt{\frac{8\pi^3}{90}} g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_P} = 1,66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_P}, \quad (2.36)$$

e como para a época dominada pela radiação $a(t) \propto t^{1/2}$, temos que

$$\frac{t}{1 \text{ s}} = \frac{1}{2H} = 0,162 g_*^{-1/2} \times 10^{-44} \left(\frac{M_P}{T}\right)^2 = 0,241 g_*^{-1/2} \left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^{-2}. \quad (2.37)$$

Além disso, de (2.18) e do fato que $3da = V^{-2/3}dV$, onde V é um volume comóvel unitário, podemos ver que a expansão é adiabática

$$Vd\rho = (\rho + p)dV \quad \Rightarrow \quad d(\rho V) = -pdV, \quad (2.38)$$

o que implica que a entropia é conservada em um volume comóvel. Podemos obter a entropia usando as leis da termodinâmica aplicadas a um volume V ,

$$TdS = d(\rho V) + pdV = Vd\rho + (\rho + p)dV = d[(\rho + p)V] - Vdp. \quad (2.39)$$

Como

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right) \left(\frac{d\rho}{dT}\right) dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV, \quad (2.40)$$

teremos que

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right) \left(\frac{d\rho}{dT}\right) = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\rho + p}{T}. \quad (2.42)$$

Da igualdade das segundas derivadas,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}, \quad (2.43)$$

temos que

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho + p}{T}\right) = -\frac{1}{T^2} (\rho + p) + \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT} + \frac{1}{T} \frac{dp}{dT} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}\right) = \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT}, \quad (2.44)$$

ou seja,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\rho + p}{T}. \quad (2.45)$$

Assim, em (2.39),

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{(\rho + p)V}{T^2} dT \quad \Rightarrow \quad dS = d\left[\frac{(\rho + p)V}{T} + \text{constante}\right], \quad (2.46)$$

ou seja, a menos de uma constante, a entropia em um volume comóvel é dada por

$$S = \frac{(\rho + p)V}{T} \quad (2.47)$$

Uma vez que a densidade de entropia é dominada pela contribuição das partículas relativísticas, de (2.33) e (2.34) temos que a densidade de entropia s fica

$$s := \frac{S}{V} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3, \quad (2.48)$$

onde

$$g_{*S} := \sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3. \quad (2.49)$$

Note que $g_* = g_{*S}$ apenas enquanto as espécies relativísticas têm a mesma temperatura. Além disso, como a entropia é conservada, temos que $sV \propto g_{*S} a^3 T^3$ é constante, e portanto a temperatura do universo primordial varia da forma

$$T \propto g_{*S}^{-1/3} a^{-1}, \quad (2.50)$$

de onde é possível ver que para épocas em que g_{*S} é constante, temos que $T \propto a^{-1}$.

Note que g_{*S} e g_* deixa de ser constante, por exemplo, quando uma espécie torna-se não-relativística, ou quando uma espécie de partículas aniquila-se com suas antipartículas, transferindo sua entropia às demais partículas relativísticas, fazendo com que a temperatura do plasma primordial *diminua mais lentamente*.

A densidade de entropia é proporcional à densidade em número de fótons n_γ (ambas são proporcionais à T^3), de modo que usando (2.27) e $g_\gamma = 2$, temos

$$s = \frac{2\pi^4}{90\zeta(3)} g_{*S} n_\gamma = 1,80 g_{*S} n_\gamma, \quad (2.51)$$

de onde vemos que a entropia pode ser medida pelo número de fótons. A razão entre a densidade de número bariônico n_B e a densidade em número de fótons é dada por

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_\gamma} = 1,80 g_{*S} \frac{n_b}{s}, \quad (2.52)$$

onde n_b e $n_{\bar{b}}$ são respectivamente as densidades em número de bárions e de antibárions. Como as observações indicam que $n_{\bar{b}} \approx 0$, utilizaremos ao longo desta dissertação $\eta = n_b/n_\gamma$ e chamaremos η como a razão entre o número de bárions e fótons.

Como o número bariônico é conservado, assim como a entropia em um volume comóvel, temos que a razão η varia apenas quando g_{*S} varia, ou seja, quando uma espécie aniquila-se, criando pares de fótons que inevitavelmente distribuem a entropia das partículas aniquiladas entre as espécies que continuam em equilíbrio.

2.3.2 O desacoplamento dos neutrinos

Para analisarmos o universo primordial, é essencial que saibamos quais são as espécies de partículas em equilíbrio termodinâmico com a radiação, para que possamos calcular os fatores g_* e g_{*S} , e conseqüentemente calcular os parâmetros cosmológicos, como a taxa de expansão e a razão entre bárions e fótons, por exemplo.

Como comentado anteriormente, para que o equilíbrio seja mantido, é necessário que a taxa Γ de interação por partícula das reações responsáveis pela interação entre os fótons e a espécie seja maior do que a taxa de expansão do universo H , ou seja, que o número de interações entre os fótons e as partículas de uma dada espécie seja suficientemente grande para que a expansão do universo possa ser ignorada*.

Um bom exemplo desse tipo de processo ocorre no caso do desacoplamento dos neutrinos, que são mantidos em equilíbrio pela interação fraca. A seção de choque dos processos que ocorrem via interação fraca é dada por $\sigma \approx G_F^2 T^2$, onde $G_F = (292,80 \text{ GeV})^{-2}$ é a constante de Fermi. Como a densidade em número de neutrinos é proporcional à T^3 , temos que a taxa de interação por neutrino das interações fracas fica dada por

$$\Gamma_{if} = n_\nu \sigma |v| \approx G_F^2 T^5, \quad (2.53)$$

onde $|v| \approx 1$ é a média da velocidade relativa entre as partículas que estão interagindo. Comparando a equação acima com (2.36), teremos

$$\frac{\Gamma_{if}}{H} \approx \frac{M_P G_F^2 T^5}{T^2} \approx \left(\frac{T}{0,8 \text{ MeV}} \right)^3, \quad (2.54)$$

ou seja, a temperaturas abaixo de 0,8 MeV, a taxa de interação é insuficiente para manter os neutrinos em equilíbrio termodinâmico, e eles desacoplam do plasma primordial. Um pouco após o desacoplamento dos neutrinos, a temperatura cai abaixo da massa dos elétrons e pósitrons, e a entropia dos pares elétron-pósitron é transferida aos fótons, mas não aos neutrinos. Com isso, a temperatura entre as duas espécies deixa de ser a mesma, embora depois da aniquilação dos pares e^\pm tanto a temperatura dos fótons quanto a dos neutrinos varie com o inverso do fator de escala.

Para analisar esta diferença de temperatura, podemos utilizar a expressão (2.50). Com a aniquilação dos pares e^\pm , temos que o número de graus de liberdade do plasma primordial $g_* = 2 + (7/2) = 11/2$, torna-se $g_* = 2$, pois após a aniquilação apenas os graus de liberdade dos fótons contribuem. Dessa forma, temos que o produto aT_γ em (2.50) aumenta por um fator de $(11/4)^{1/3}$, enquanto o produto aT_ν permanece constante. Assim, temos que

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} = 1,40. \quad (2.55)$$

Como após este evento tanto aT_γ quanto aT_ν permanecem constantes, temos que a razão entre as temperaturas dos fótons (a temperatura do universo) e a temperatura dos neutrinos também permanecerá constante. Em especial hoje, como $T = 2,725 \text{ K}$, temos que $T_\nu = 1,947 \text{ K}$.

*A maneira precisa de calcular as distribuições das espécies ao longo da vida do universo é usando a equação de Boltzmann [Kolb e Turner (1990)]. Entretanto, como aqui queremos apenas apresentar uma idéia qualitativa dos processos que ocorreram no universo primordial, a condição $\Gamma \gtrsim H$ é uma boa aproximação para a época em que uma espécie desacopla do plasma primordial.

Assim sendo, os números de graus de liberdade que contribuem para a densidade total de radiação após a aniquilação dos pares e^\pm ficam

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 3,36, \quad (2.56)$$

$$g_{*S} = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \frac{4}{11} = 3,91. \quad (2.57)$$

A partir desses valores podemos calcular a densidade em número de fótons e de cada espécie de neutrinos (2.27) e a densidade de energia da radiação (2.33) no universo atual. Usando $T = 2,725$ K, temos que

$$n_{\gamma 0} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 = 3,153 \times 10^{-12} \text{ eV}^3 \approx 410 \text{ cm}^{-3}, \quad (2.58)$$

$$n_{\nu 0} = \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} T_\nu^3 = \frac{3}{11} n_{\gamma 0} = 8,599 \times 10^{-13} \text{ eV}^3 \approx 111 \text{ cm}^{-3}, \quad (2.59)$$

$$\rho_{R0} = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 = (2,408 \times 10^{-4} \text{ eV})^4 = 7,795 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}, \quad (2.60)$$

$$\Omega_{R0} h^2 = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{c0}} = 4,148 \times 10^{-5}, \quad (2.61)$$

Podemos ainda estimar a entropia do universo, assim como a relação entre bárions e fótons. De (2.51) temos que

$$\eta = 7,04 \frac{n_b}{s} = 7,04 \frac{\rho_b}{m_p s} \approx 2,75 \times 10^{-8} \Omega_{b0} h^2, \quad (2.62)$$

onde usamos $m_b \approx m_p = 938,272$ MeV e a densidade de entropia (2.48). Note que se o número bariônico e a entropia são conservados em um volume comóvel, a razão n_b/s é constante, fato que usamos na expressão acima.

Como a entropia do universo é alta, uma vez que há cerca de 10^9 fótons para cada bárion, os processos em que são formados estados ligados ocorrem a energias mais baixas do que seria esperado (quando são energeticamente favorecidos), pois mesmo a energias relativamente baixas ainda há um grande número de fótons na distribuição de corpo negro com energia suficiente para evitar o processo. Isso ocorre, por exemplo, com a recombinação, que discutiremos mais tarde, e com a nucleossíntese, que discutiremos a seguir.

2.3.3 Nucleossíntese

Cálculos detalhados [Kolb e Turner (1990)] mostram que a nucleossíntese deve ter ocorrido em $T \approx 0,1$ MeV. Essencialmente há dois fatores que são responsáveis pelo fato da nucleossíntese ocorrer somente a essas energias: a grande entropia do universo, que comentamos anteriormente, e o chamado “gargalo do deutério”.

O núcleo de deutério D possui uma energia de ligação de 2,22 MeV, o que faz com que uma quantidade significativa desse núcleo seja formada apenas quando o universo atinge

uma temperatura inferior a cerca de 0,1 MeV. Como esse núcleo é fundamental para que os núcleos maiores sejam formados, o processo de nucleossíntese só ocorre abaixo dessa energia.

Quando a taxa de interações fracas fica menor do que a taxa de expansão do universo e os neutrinos desacoplam do plasma primordial, as reações fracas,

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e ,$$

$$\nu_e + n \rightleftharpoons p + e^- ,$$

$$e^+ + n \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e ,$$

que convertem nêutrons em prótons e vice-versa cessam. Desse modo, a razão entre prótons e nêutrons fica “congelada” no valor dado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann, equação (2.30), no momento em que $\Gamma_{if} < H$, o que ocorre a uma temperatura de cerca de $T = 0,8$ MeV. Assim, a essa temperatura,

$$\frac{n_n}{n_p} \approx e^{-(m_n - m_p)/T} \approx \frac{1}{5} . \quad (2.63)$$

onde $m_n = 939,565$ MeV e $m_p = 938,272$ MeV. Essa fração não fica exatamente constante, mas diminui lentamente, pois alguns nêutrons ainda convertem-se em prótons pelo decaimento β

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e .$$

Assim, à temperatura de aproximadamente 0,1 MeV, a fração atinge seu valor final, $n_n/n_p \approx 1/7$, uma vez que as reações que convertem nêutrons e prótons em dêuterons, ${}^3\text{He}^{++}$ e principalmente em ${}^4\text{He}^{++}$ tornam-se eficientes. Em especial, o núcleo de ${}^4\text{He}$, que possui uma energia de ligação alta (28,3 MeV, muito maior que a temperatura do universo à época), permanece estável.

Note que o fato de não haver núcleos estáveis com números de massa $A = 5$ e $A = 8$, associado ao fato da nucleossíntese ocorrer a uma temperatura muito baixa, faz com que a nucleossíntese primordial essencialmente pare no núcleo de ${}^4\text{He}$, produzindo apenas uma pequena fração de ${}^7\text{Li}$ (${}^7\text{Li}/\text{H} \approx 10^{-10} - 10^{-9}$). Além disso, resta também uma pequena fração de D ($\text{D}/\text{H} \approx 10^{-3} - 10^{-4}$) e ${}^3\text{He}$ (${}^3\text{He}/\text{H} \approx 10^{-4} - 10^{-5}$) que não foi utilizada para a produção de núcleos de ${}^4\text{He}$.

Podemos estimar a fração X_P de núcleos de ${}^4\text{He}$ para núcleos de H lembrando que o núcleo de hélio é composto de 2 nêutrons e 2 prótons e que o núcleo de hidrogênio consiste em um próton. Além disso, para esta estimativa, podemos supor que apenas os dois núcleos restaram da nucleossíntese, o que é uma boa aproximação, como vimos. Nesta situação, todos os nêutrons (e o mesmo número de prótons) foram usados para formar os núcleos de hélio. Os prótons restantes formaram os núcleos de hidrogênio, de modo que

$$X_P = \frac{n_{\text{He}}}{n_{\text{H}}} = \frac{n_n/2}{7n_n - n_n} \approx \frac{1}{12} . \quad (2.64)$$

A fração em massa Y_P de ^4He para a massa total (usando $m_p \approx m_n$) é

$$Y_P = \frac{4n_{\text{He}}}{n_{\text{H}} + 4n_{\text{He}}} = \frac{4X_P}{1 + 4X_P} = 0,25 . \quad (2.65)$$

Essas abundâncias nucleares primordiais dependem de alguns parâmetros físicos, como a vida média do nêutron $\tau_{1/2}(n)$, o número de graus de liberdade presentes na época da nucleossíntese g_* e da razão entre bárions e fótons η . Neste último caso, segue de (2.62) que a partir das abundâncias de elementos leves é possível colocar limites no valor da densidade de matéria bariônica atual.

A figura 2.1 mostra as abundâncias previstas como função da densidade bariônica. A curva do ^4He corresponde à sua fração em massa Y_P , enquanto as demais abundâncias são mostradas relativamente ao hidrogênio. A faixa vertical mostra a região de concordância das observações das abundâncias dos 4 núcleos. Note que, além das observações localizarem-se numa mesma faixa para os 4 núcleos, implicando que $\Omega_{b0}h^2 \approx 0,02$, os valores concordam com as previsões teóricas [Schramm e Turner (1998)].

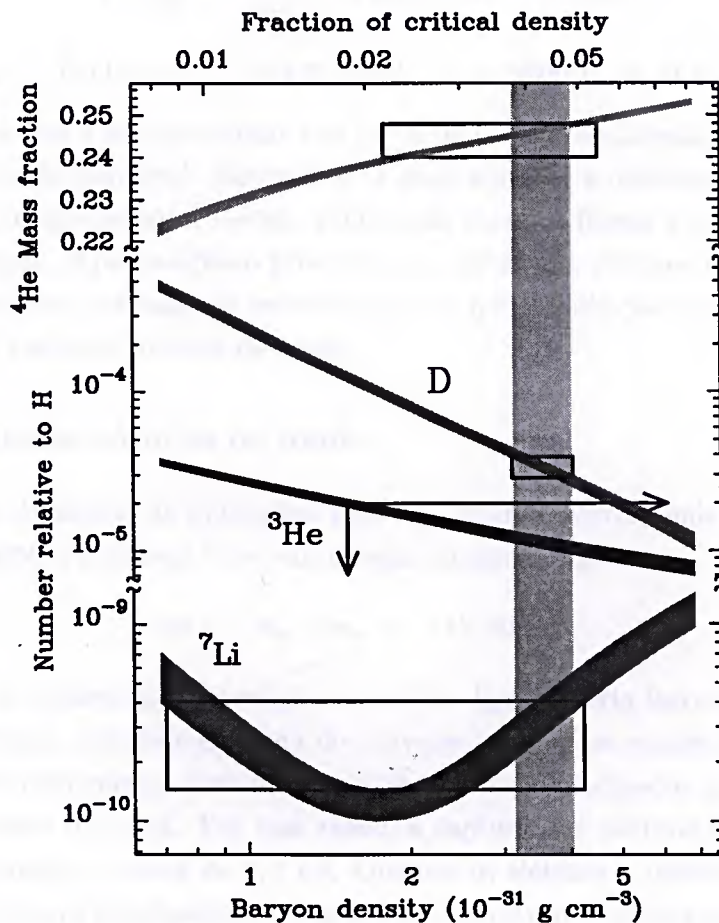


Figura 2.1: Abundâncias primordiais em função do parâmetro $\Omega_{b0}h^2$. A faixa vertical mostra a região que satisfaz a todas as medidas de abundâncias dos 4 núcleos. Note que para $h \approx 0,7$, temos que $\Omega_{b0} \approx 0,04$. Figura extraída de [Burles *et al.* (1998)].

A concordância entre teoria e observação no caso das abundâncias dos elementos leves

é, juntamente com a previsão da radiação cósmica de fundo e com a expansão do universo, um dos principais suportes observacionais ao modelo do Big Bang quente, e demonstra que ele é uma boa aproximação para o universo até cerca de 10^{-2} s depois do Big Bang.

2.4 Fase dominada pela matéria

Como discutimos anteriormente, as densidades de energia da radiação e da matéria variam de forma diferente com o passar do tempo, de modo que

$$\frac{\rho_R}{\rho_M} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} \left(\frac{a_0}{a} \right) = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} (1+z). \quad (2.66)$$

Assim, as densidades de matéria e radiação contribuem igualmente para a densidade de energia do universo em

$$1 + z_{ig} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{R0}} = 24000 \Omega_{M0} h^2 \approx 3600, \quad (2.67)$$

$$T_{ig} = T_0 (1 + z_{ig}) = 65425 \Omega_{M0} h^2 \text{ K} \approx 9800 \text{ K} \approx 0,85 \text{ eV}. \quad (2.68)$$

Com isso, vemos que a energias abaixo de cerca de 0,8 eV a matéria passa a ser o principal componente do universo[†]. Entretanto, a essas energias a matéria e a radiação ainda continuam em contato térmico, devido à interação entre os fótons e os elétrons via espalhamento Thomson. Apenas após o processo de captura dos elétrons livres pelos núcleos ionizados, o processo chamado de recombinação, é que a radiação separa-se da matéria, dando origem à radiação cósmica de fundo.

2.4.1 A radiação cósmica de fundo

O estado ligado do átomo de hidrogênio tem uma energia correspondente à diferença de massa entre o próton e elétron livres em relação ao estado ligado,

$$m_H - m_p - m_e = -13,59 \text{ eV},$$

de modo que, em princípio, a formação de estados ligados seria favorecida abaixo dessa energia. Entretanto, a grande entropia do universo implica na existência de um número grande de fótons com energia para ionizar os átomos recém-formados mesmo a temperaturas muito menores que essa. Por essa razão, a captura dos elétrons ocorre bem abaixo da energia de ligação, a cerca de 0,3 eV. Quando os elétrons e núcleos recombina-se, os fótons não são mais espalhados, e desacoplam definitivamente da matéria. Esse último espalhamento aconteceu em $z \approx 1100$ (superfície de último espalhamento, SUE), quando o universo estava a uma temperatura de cerca de 3000 K, com uma idade de cerca de 300.000 anos.

[†]Apesar da densidade de energia da matéria ser dominante a partir de então, a densidade de energia da radiação continua sendo da mesma ordem de grandeza da contribuição da densidade de energia da matéria até cerca de $z \approx 350$, ou $T \approx 0,08$ eV.

Como os fótons estavam em equilíbrio térmico com a matéria na época dominada pela radiação, sua distribuição deve ser a de um corpo negro. Além disso, como esses fótons essencialmente não interagiram com nada desde então, sua distribuição deve continuar sendo uma distribuição de Planck, com a temperatura variando inversamente com o fator de escala, conforme a equação (2.50).

Em 1948, Gamow, Alpher e Herman [Alpher e Herman (1948), Gamow (1948b)] puderam estimar pela primeira vez a temperatura do universo atual em $T \approx 5$ K, a partir de um modelo [Alpher, Bethe e Gamow (1948), Gamow (1948a), Alpher e Herman (1950)] de origem quente para o universo[‡].

Podemos fazer uma estimativa grosseira da temperatura atual da radiação cósmica de fundo (RCF). Supondo que desde a recombinação o universo foi dominado pela matéria, e que $t_0 = 13,5 \times 10^9$ anos, a temperatura atual da RCF ficaria

$$\frac{T_0}{T_{SUE}} = \left(\frac{t_{SUE}}{t_0} \right)^{2/3} \implies T_0 \approx 2,5 \text{ K} . \quad (2.69)$$

Ninguém deu muita atenção à previsão de Gamow, Alpher e Herman, possivelmente porque a teoria do Big Bang ainda era nessa época considerada bastante especulativa e a detecção dessa radiação era tecnologicamente inviável.

A radiação foi descoberta em 1964 por dois engenheiros elétricos, Penzias e Wilson [Penzias e Wilson (1965)]. Eles obtiveram que o universo tinha uma temperatura homogênea e isotrópica de cerca de 3,5 K. Na mesma época, um grupo na Universidade de Princeton, liderado por Robert Dicke estava se preparando para buscar a radiação de fundo, de maneira que quando souberam dos resultados de Penzias e Wilson a interpretação foi imediata [Dicke *et al.* (1965)].

Apesar do resultado estar correto, ele foi medido apenas para algumas frequências. A confirmação de que a radiação de fundo correspondia de fato a uma distribuição de corpo negro veio do instrumento FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer - Espectrofotômetro Absoluto de Infravermelho Próximo), a bordo do satélite COBE (Cosmic Background Explorer - Explorador do Fundo Cósmico), lançado em 1989.

A curva obtida pelo COBE em 1993 (figura 2.2) tem uma extraordinária concordância com o modelo do Big Bang quente. Os erros nas posições dos 34 comprimentos de onda são tão pequenos que mal podem ser distinguidos da curva teórica do corpo negro.

As estimativas atuais [Freedman e Turner (2003)] para a temperatura do universo indicam que

$$T_0 = (2,725 \pm 0,001) \text{ K} \quad (2.70)$$

As observações mostram que a radiação cósmica de fundo é homogênea, com flutuações de temperatura da ordem de 10^{-5} , o que mostra que o universo primordial era extremamente homogêneo (e que o princípio cosmológico é uma boa suposição). Além disso, essas

[‡]Para detalhes históricos, veja [Penzias (1978), Alpher e Herman (1988), Brush (1992)].

pequenas anisotropias na radiação cósmica de fundo estão relacionadas com as flutuações de densidade que mais tarde vão importantes para a formação de estruturas no universo.

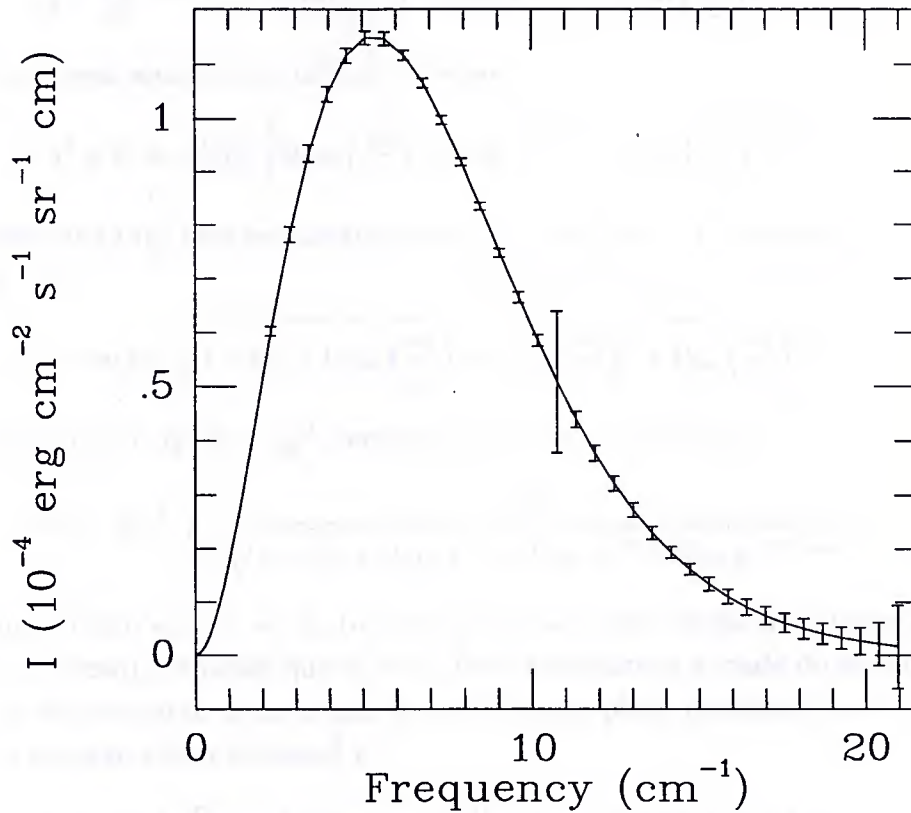


Figura 2.2: Espectro da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) medida pelo instrumento FIRAS a bordo do satélite COBE. As barras de erro foram aumentadas por um fator de 400. Quaisquer distorções na curva de Planck são menores que 0,005%. Figura extraída de [Turner e Tyson (1999)].

2.5 A idade do universo

Um outro vínculo importante para os modelos cosmológicos é a idade do universo. Embora as medidas independentes de modelo, como as obtidas a partir da idade de aglomerados globulares, ainda tenham um erro grande, maiores que 10%, essas medidas são capazes de colocar vínculos nos parâmetros cosmológicos e inclusive excluir modelos, como veremos mais tarde.

A idade do universo pode ser estimada a partir das equações de Friedmann. Supondo que além da matéria e radiação haja um outro componente ϕ no universo,

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_\phi \implies \Omega = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\phi .$$

com equação de estado ω_ϕ , a equação de Friedmann fica

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_R + \rho_\phi) ,$$

Usando (2.19) temos que

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{M0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_{\phi 0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega_\phi)} \right].$$

Multiplicando essa equação por (a^2/a_0^2) , teremos

$$\dot{a}^2 + k = a_0^2 H_0^2 \left[\Omega_{M0} \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\phi 0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega_\phi} \right].$$

Note também de (2.16) para os dias atuais que $k = a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1)$, de modo que a equação acima fica

$$\dot{a} = a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_{M0} \left(\frac{a_0}{a}\right) + \Omega_{R0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\phi 0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega_\phi}},$$

e fazendo $y = a/a_0$ e $dy/da = a_0^{-1}$, teremos que $da/dt = a_0(dy/dt)$, e

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_{M0} y^{-1} + \Omega_{R0} y^{-2} + \Omega_{\phi 0} y^{-(1+3\omega_\phi)}}}, \quad (2.71)$$

onde usamos o fato que $a_i \ll a_0$ (a corresponde ao valor inicial da integração, ou ao “início” do universo), de modo que $a_i \approx 0$. Para calcularmos a idade do universo, basta resolvermos esta integral. Para o caso de um universo *plano dominado por matéria*, por exemplo, a equação acima reduz-se[§] a

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 dy y^{1/2} \implies t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 6,52 h^{-1} \times 10^9 \text{ anos}. \quad (2.72)$$

Para um universo *plano com matéria e constante cosmológica* (ou seja, $\Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda 0} = 1$), a idade do universo fica

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - \Omega_{\Lambda 0}) y^{-1} + \Omega_{\Lambda 0} y^2}} \implies t_0 = -\frac{2}{3} H_0^{-1} \int_\infty^1 \frac{du}{u^{5/3} \sqrt{(1 - \Omega_{\Lambda 0}) u^{2/3} + \Omega_{\Lambda 0} u^{-4/3}}},$$

onde fizemos $y = u^{-2/3}$ e $dy/du = -2/3 u^{-5/3}$. Sabemos no entanto (ver apêndice E de [Marion e Thornton (1995)]) que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c}}{x} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2c}{x} + b \right), \quad c > 0$$

de modo que no nosso caso, em que $a = 1 - \Omega_\Lambda$, $b = 0$, $c = \Omega_\Lambda$, teremos

$$t_0 = -\frac{2}{3} H_0^{-1} \int_\infty^1 \frac{du}{u\sqrt{(1 - \Omega_{\Lambda 0})u^2 + \Omega_{\Lambda 0}}} \implies t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{\Lambda 0}^{-1/2} \ln \left[\frac{1 + \Omega_{\Lambda 0}^{1/2}}{(1 - \Omega_{\Lambda 0})^{1/2}} \right]. \quad (2.73)$$

A idade do universo depende do valor de $\Omega_{\Lambda 0}$. Além disso, como pode ser visto na figura 2.3, um universo plano no qual a contribuição da constante cosmológica atualmente não é

[§]Note que desprezamos a fase dominada pela radiação para os exemplos. De qualquer forma, essa é uma boa aproximação, pois a fase dominada pela matéria iniciou-se cerca de 300.000 anos após o Big Bang, tempo suficientemente inferior à idade do universo.

desprezível tem uma idade sempre maior do que um universo plano apenas com matéria. No caso em que $\Omega_{\Lambda 0} = 0,7$, por exemplo, temos que

$$t_0 \approx 1,45 \times \frac{2}{3} H_0^{-1} \approx 9,45 h^{-1} \times 10^9 \text{ anos} \approx 13,5 \times 10^9. \quad (2.74)$$

A figura 2.3 mostra a idade do universo como função de $\Omega_{\Lambda 0}$ para um universo plano com matéria. Note que a idade de um universo com constante cosmológica é sempre superior a idade de um universo com matéria.

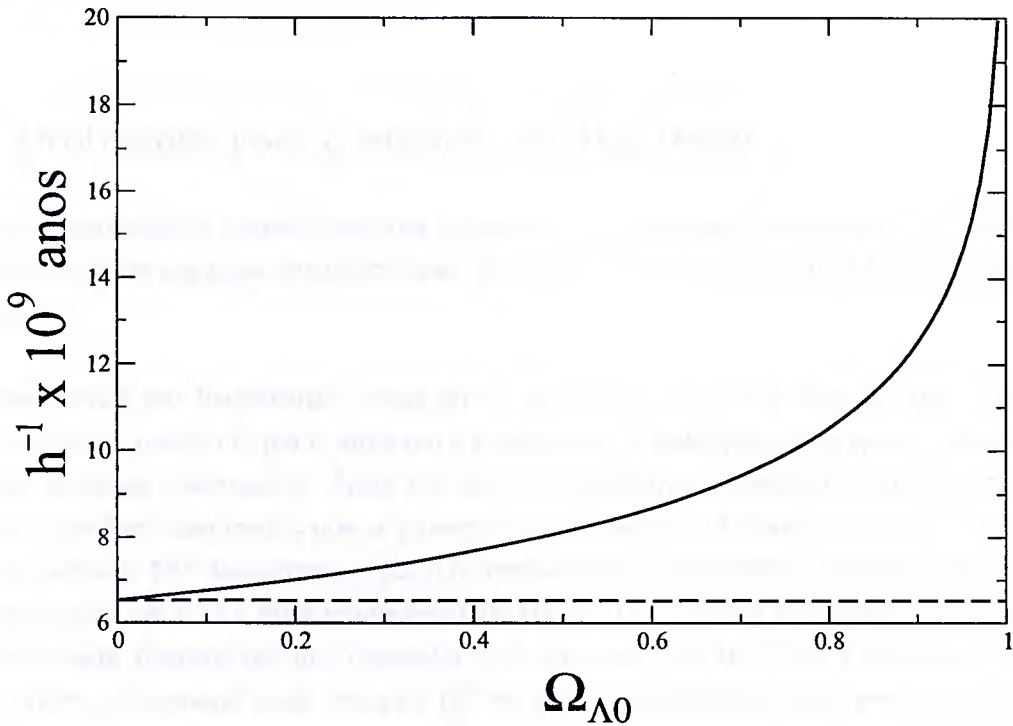


Figura 2.3: Idade do universo em unidades de $h^{-1} \times 10^9$ anos para um universo plano com matéria e constante cosmológica em função do valor de $\Omega_{\Lambda 0}$. A linha pontilhada mostra o valor $t_0 = \frac{2}{3} H_0$, apenas para comparação. Note que quanto mais a constante cosmológica contribui para a energia atual do universo, maior a sua idade.

Neste capítulo discutimos alguns aspectos do modelo do Big Bang quente e alguns resultados que o tornaram o modelo cosmológico padrão. No entanto, apesar do grande sucesso do Big Bang quente em explicar as observações astronômicas, o modelo deixa algumas questões em aberto, como o fato do universo ser tão homogêneo e ter uma densidade tão próxima à crítica, a origem da assimetria entre matéria e antimatéria, a natureza da energia e matéria escuras que dominam o universo atual, entre outras.

Nos próximos capítulos discutiremos alguns tópicos que ajudam a explicar e resolver certos problemas do modelo do Big Bang: a idéia da *inflação*, surgida no início da década de 1980, e a de *energia escura* ou *quintessência*, que foi criada no final da década de 1990 a partir da necessidade de explicar novas observações.

Capítulo 3

Inflação

3.1 Problemas com o modelo do Big Bang

O modelo cosmológico padrão, embora concorde com diversas observações, tem dificuldades em explicar algumas características do universo. Entre esses problemas, podemos destacar:

- a) **Problema do horizonte:** como vimos no capítulo anterior, um dos pressupostos do modelo padrão é que o universo é homogêneo e isotrópico, fato que é confirmado por diversas observações. Uma vez que a nucleossíntese ocorreu da forma prevista pelo modelo, isso indica que o universo era homogêneo à época, quando o universo era cerca de 10^{10} vezes menor que o universo atual. Entretanto, a região causalmente conectada em $T \approx 1$ MeV era de cerca de 10^9 m, de modo que essa região causalmente conectada deveria ter um tamanho hoje de cerca de 10^{19} m. Entretanto, nosso universo observável mede cerca de 10^{25} m, sendo muito maior que a região de contato causal.

Além disso, o tamanho do horizonte na época do desacoplamento corresponde a uma separação angular de cerca de 1° [Padmanabhan (1996)]. Apesar disso, como discutimos no capítulo anterior, a radiação cósmica de fundo é extremamente homogênea e isotrópica em todo o céu.

- b) **Problema dos monopólos:** no contexto das teorias de grande unificação, várias partículas supermassivas (como os monopólos magnéticos) são produzidas, com uma densidade muito alta [Zeldovich e Khlopov (1978)], muito maiores do que os limites observacionais. O modelo cosmológico padrão não tem nenhum mecanismo para se livrar dessas relíquias supermassivas.
- c) **Problema do universo plano:** a equação (2.16) mostra que

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2},$$

onde $a(t) \propto t^{1/2}$ no caso da radiação e $a(t) \propto t^{2/3}$ no caso da matéria, de modo que

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3},$$

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{t}{t_0},$$

para as épocas dominadas pela matéria e radiação, respectivamente*. Assim, na época da nucleossíntese, por exemplo, teríamos que

$$\Omega(1 \text{ s}) - 1 \lesssim 10^{-11},$$

supondo que o universo foi apenas dominado pela matéria, ou

$$\Omega(1 \text{ s}) - 1 \lesssim 10^{-17},$$

supondo um universo sempre dominado pela radiação, de modo que o valor real é algo entre esses dois números. Assim, é preciso que o valor de Ω tenha sido extremamente próximo da unidade no início do universo para que ele tenha o valor atual† de $\Omega_0 \approx 1$.

3.2 A idéia da inflação

Vamos analisar novamente a equação de Friedmann,

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}.$$

Temos que tanto para a matéria como para a radiação, $H \propto t^{-1}$, ou seja, H sempre decresce, o que afasta Ω de 1. Podemos supôr, no entanto, que em algum momento primordial do universo $d(Ha)/dt > 0$, ou seja, que Ω se aproximava de 1.

A condição para que isso ocorra é que

$$\frac{d(Ha)}{dt} > 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0.$$

Assim, para o Ω se aproxime de 1, é preciso que em algum momento o universo esteja *acelerando*. Além disso, essa aceleração deve ocorrer nos instantes iniciais do universo e deve durar pouco, para não atrapalhar as previsões do modelo padrão.

Assim, podemos definir a inflação como uma época em que o universo está acelerando, ou seja, em que

$$\frac{d(Ha)}{dt} > 0 \iff \ddot{a} > 0 \iff \omega < -\frac{1}{3},$$

*Note que estes valores são aproximados, uma vez que as relações $a(t)$ utilizadas são as obtidas para um universo plano.

†Se na época da nucleossíntese $\Omega = 1,01$, seu valor atual seria maior que 10^9 !

onde usamos as equações (2.16) e (2.17). Um componente como a constante cosmológica é uma candidata a causar a inflação do universo, uma vez que $\omega_\Lambda = -1$. Se a constante cosmológica domina a energia do universo, temos que a equação de Friedmann fica[‡]

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a(t_i) \exp [H(t - t_i)] , \quad (3.1)$$

onde t_i é o tempo em que a constante cosmológica começou a dominar a energia do universo. H , neste caso, é constante. Entretanto, a constante cosmológica não pode ser responsável pela inflação primordial pois, como sua densidade é constante, ela dominaria para sempre a energia do universo, e a inflação nunca acabaria.

A inflação tornou-se importante porque resolve os três problemas citados anteriormente. O problema do universo plano é resolvido (uma vez que foi dele que partimos para definir fase inflacionária). A única coisa que precisamos garantir para resolver este problema é que haja inflação suficiente para deixar Ω suficientemente próximo de 1, pois uma vez que a inflação termina, Ω começa a afastar-se de 1 novamente. De fato, na maioria dos modelos a expansão é muito rápida, de modo que uma das principais previsões da inflação é que $\Omega_0 = 1$.

O problema do horizonte e dos monopólos é resolvido pelo crescimento (na maioria dos modelos) exponencial do fator de escala. Devido ao crescimento do fator de escala, o nosso universo visível hoje (aproximadamente $3000h^{-1}$ Mpc) corresponde a uma região muito pequena do universo pré-inflacionário, suficientemente pequena para que tivesse tido tempo de entrar em contato causal antes de se tornar o nosso universo visível. Além disso, com um crescimento exponencial, a densidade de relíquias seria diluída, de modo que no nosso universo visível o número dessas relíquias supermassivas é praticamente desprezível.

3.3 O potencial do campo escalar

A idéia da inflação foi proposta por A. Guth [Guth (1981)], no contexto de transições de uma fase de grande unificação para uma fase eletrofraca. Entretanto, no modelo de Guth a inflação não tem fim (a chamada *saída elegante*), pois a transição de fase não ocorre de fato, uma vez que a taxa de expansão do universo é maior que a taxa de percolação das bolhas da fase eletrofraca.

A idéia de Guth foi no entanto melhorada por Linde [Linde (1982)] e por Albrecht e Steinhardt [Albrecht e Steinhardt (1982)], nos cenários conhecidos como nova inflação. Além disso, uma outra versão surgiu com Linde, a chamada inflação caótica [Linde (1983)]. Desde então, inúmeros cenários inflacionários surgiram. Em praticamente todos eles, supõe-se que o universo primordial era preenchido por um (ou mais de um) campo escalar ϕ homogêneo com um dado potencial $V(\phi)$, que domina a energia do universo. Os

[‡]Como em um universo inflacionário Ω tende rapidamente a 1, vamos desprezar o termo de curvatura da equação de Friedmann.

cenários inflacionários que surgiram desde então diferem entre si basicamente pelo número de campos escalares e pela escolha do potencial.

O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ para um campo escalar é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.2)$$

onde \mathcal{L} é a densidade de lagrangiana de um campo escalar minimamente acoplado

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (3.3)$$

Assim, o tensor energia-momento fica

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right). \quad (3.4)$$

Como ϕ é espacialmente homogêneo, só resta a componente 0-0 da última soma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.5)$$

Assim, usando a equação acima e baixando alguns índices, teremos

$$g^{\nu\sigma} T_{\mu\sigma} = g^{\nu\sigma} (\partial_\sigma \phi \partial_\mu \phi) - g^{\nu\sigma} g_{\mu\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right).$$

O tensor energia-momento de um fluido perfeito (ver apêndice B) é dado por

$$g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu} = (p + \rho) g^{\sigma\nu} v_\mu v_\nu - g^{\sigma\nu} g_{\mu\nu} p. \quad (3.6)$$

Com isso, das componentes 0-0 e 1-1[§] temos que

$$T_0^0 = \rho_\phi = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad \Rightarrow \quad \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.7)$$

$$(-1)(-T_1^1) = p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad \Rightarrow \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.8)$$

Assim, a equação de estado de um campo escalar ω_ϕ é dada por

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \Rightarrow -1 \leq \omega_\phi \leq 1. \quad (3.9)$$

Um campo escalar homogeneamente distribuído pode acelerar o universo se $-1 \leq \omega_\phi \leq -1/3$, ou seja, se $V(\phi) \geq \dot{\phi}^2$, e por essa razão campos escalares são utilizados para modelar cenários inflacionários.

Podemos ainda obter a equação de movimento de um campo escalar num espaço-tempo que se expande e que tem a métrica de Robertson-Walker. A conservação da energia implica que

$$dE = -pdV \quad \Rightarrow \quad d(\rho a^3) = -pd(a^3) \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\rho a^3)}{dt} = -p \frac{d(a^3)}{dt}. \quad (3.10)$$

[§]Usaremos somente essas componentes porque as componentes 2-2 e 3-3 apenas repetem os resultados da componente 1-1.

Usando a densidade de energia ρ_ϕ e a pressão p_ϕ obtidas em (3.7) e (3.8), podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 a^3 \right) + \frac{d[V(\phi)a^3]}{dt} = \left[-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \frac{d(a^3)}{dt}. \quad (3.11)$$

Temos ainda que

$$\frac{d(a^3)}{dt} = 3a^2 \dot{a},$$

de modo que

$$\frac{1}{2} \left[2\ddot{\phi}\dot{\phi}a^3 + 3\dot{\phi}^2 a^2 \dot{a} \right] + \left[\frac{dV(\phi)}{dt} a^3 + V(\phi) \frac{d(a^3)}{dt} \right] = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 3a^2 \dot{a} + V(\phi) \frac{d(a^3)}{dt},$$

ou seja,

$$\ddot{\phi}\dot{\phi}a^3 + \frac{3}{2} \dot{\phi}^2 a^2 \dot{a} = -\frac{dV(\phi)}{dt} a^3 - \frac{3}{2} \dot{\phi}^2 a^2 \dot{a}. \quad (3.12)$$

Reescrevendo então dt na forma $dt = d\phi/\dot{\phi}$ e dividindo-se a equação acima por $\dot{\phi}a^3$, obteremos

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi} \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3.13)$$

onde linha denota derivada em relação ao campo. Essa é a chamada *equação de movimento do campo escalar*.

3.4 Aproximação de Rolagem Lenta (Slow-Roll Approximation)

Para encontrar a dinâmica do universo na presença de um campo escalar homogêneo cuja energia domina o universo, precisamos resolver um sistema composto pelas seguintes equações:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3M_P^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (3.14)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'. \quad (3.15)$$

Resolvê-las para um dado potencial em geral é uma tarefa que só pode ser feita numericamente. Note, no entanto, que o sistema de equações só gera soluções inflacionárias quando a densidade de energia potencial domina sobre a densidade de energia cinética. Nesta situação, podemos utilizar uma aproximação para resolver as equações acima, a chamada *aproximação de rolagem lenta*.

Esta aproximação é feita desprezando-se o termo cinético na equação de Friedmann e o termo de aceleração da equação de movimento do campo. Com isso, as equações ficam

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \approx \frac{8\pi}{3M_P^2} V(\phi), \quad (3.16)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V'. \quad (3.17)$$

Também podemos definir o *parâmetro de rolagem lenta*

$$\epsilon(\phi) := \frac{M_P^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (3.18)$$

Este parâmetro está diretamente relacionado à duração da inflação. Note que para que a inflação ocorra é necessário que

$$\frac{\ddot{a}}{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H} + H^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\dot{H}}{H} < 1. \quad (3.19)$$

Usando então as equações (3.16) e (3.17), temos que

$$-\frac{\dot{H}}{H} \approx \frac{4\pi}{9M_P^2} \frac{V'^2}{H^4} = \frac{M_P^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 =: \epsilon(\phi). \quad (3.20)$$

Dessa forma, uma condição para que haja inflação é que

$$\epsilon(\phi) < 1. \quad (3.21)$$

Podemos calcular a quantidade de inflação que se inicia em $t_i = 0$ e termina em t_{fim} calculando o chamado *número de e-foldings*, dado por

$$N := \ln \frac{a(t_{fim})}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_{fim}} H dt \approx -\frac{8\pi}{M_P^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{fim}} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (3.22)$$

pois note que, usando a aproximação de rolagem lenta, temos que

$$H dt = H \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \approx -\frac{3H^2}{V'} d\phi = -\frac{8\pi}{M_P^2} \frac{V}{V'}.$$

Vamos exemplificar o uso da aproximação de rolagem lenta no caso de dois diferentes potenciais: o potencial quadrático $V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$ e o potencial quártico $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$.

3.4.1 Potencial Quadrático

Considere o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad (3.23)$$

onde m_ϕ é a massa do campo. Este potencial é um dos que gera a chamada *inflação caótica*. As equações de aproximação de rolagem lenta ficam, neste caso

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi m_\phi^2}{3M_P^2} \phi^2, \quad (3.24)$$

$$3H\dot{\phi} = -m_\phi^2 \phi. \quad (3.25)$$

Reescrevendo a equação acima, usando a equação de Friedmann, teremos

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{1}{12\pi}} M_P m_\phi \Rightarrow \phi(t) = \phi_i - \sqrt{\frac{1}{12\pi}} M_P m_\phi t. \quad (3.26)$$

onde escolhemos o campo que rola o potencial (sinal negativo). A equação acima fica

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{m_\phi M_P}{\sqrt{12\pi}} t \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \phi_i \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad (3.27)$$

onde τ é a escala de tempo característica da expansão. Quando $t \ll \tau$ o campo escalar permanece quase constante, variando lentamente de ϕ_i para o valor final ϕ_{fim} . Da equação de Friedmann temos que

$$\int_{a(t)}^{a_i} \frac{da}{a} = \pm \int_0^t \sqrt{\frac{4\pi}{3M_P^2}} m_\phi \phi_i \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{a(t)}{a_i} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m_\phi}{M_P} \int_0^t \phi_i \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt. \quad (3.28)$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{a(t)}{a_i} = \exp \left[2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m_\phi}{M_P} \phi_i t - \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{m_\phi}{M_P} \phi_i \underbrace{\left(\frac{m_\phi M_P}{2\sqrt{3\pi} \phi_i}\right)}_{=: \tau} t^2 \right],$$

onde usamos a definição de τ . Finalmente temos que

$$a(t) = a_i \exp \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m_\phi}{M_P} \phi_i t - \frac{1}{6} m_\phi^2 t^2 \right) \quad (3.29)$$

Vemos que nessa situação o fator de escala cresce *quase-exponencialmente*.

O parâmetro ϵ de rolagem lenta fica

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{16\pi} \frac{4}{\phi^2}, \quad (3.30)$$

de modo que a inflação termina quando

$$\epsilon(\phi_{fim}) = 1 \Rightarrow \phi_{fim} = \frac{M_P}{\sqrt{4\pi}}, \quad (3.31)$$

o que ocorre no tempo

$$t_{fim} = \frac{\sqrt{12\pi} \phi_i}{M_P m_\phi} - \frac{\sqrt{3}}{m_\phi}. \quad (3.32)$$

O número de *e-foldings* produzidos é

$$N = -\frac{8\pi}{M_P^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{fim}} \frac{V}{V'} d\phi = -\frac{8\pi}{M_P^2} [\phi_{fim}^2 - \phi_i^2] = \frac{2\pi\phi_i^2}{M_P^2} - \frac{1}{2}. \quad (3.33)$$

3.4.2 Potencial Quártico

Um outro modelo caótico é o potencial quártico,

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda \phi^4, \quad (3.34)$$

onde λ é uma constante. Neste caso, as equações da aproximação de rolagem lenta ficam

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{2\pi\lambda}{3M_P^2} \phi^4, \quad (3.35)$$

$$3H\dot{\phi} = -\lambda\phi^3. \quad (3.36)$$

Das duas equações temos que

$$\dot{\phi} = -M_P \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} \phi, \quad (3.37)$$

onde novamente usamos o sinal negativo. Integrando a equação acima teremos

$$\int_{\phi_i}^{\phi(t)} \frac{d\phi}{\phi} = - \int_0^t M_P \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} dt \Rightarrow \ln \frac{\phi(t)}{\phi_i} = M_P \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} t,$$

ou seja,

$$\phi(t) = \phi_i \exp \left(-M_P \sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} t \right). \quad (3.38)$$

Usando a equação acima e integrando a equação de Friedmann, temos que

$$\int_{a_i}^{a(t)} \frac{da}{a} = \int_0^t \frac{1}{M_P} \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{3}} \phi_i^2 \exp \left(-M_P \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}} t \right) dt,$$

ou ainda

$$\ln \frac{a(t)}{a_i} = \frac{1}{M_P} \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{3}} \phi_i^2 \frac{\exp \left(-M_P \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}} t \right) - 1}{-M_P \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}}} = \frac{\pi}{M_P^2} \phi_i^2 \left[1 - \exp \left(-M_P \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}} t \right) \right].$$

Dessa forma, o fator de escala varia com o tempo na forma

$$a(t) = a_i \exp \left[\frac{\pi}{M_P^2} \phi_i^2 \left[1 - \exp \left(-M_P \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi}} t \right) \right] \right] = a_i \exp \left[\frac{\pi}{M_P^2} [\phi_i^2 - \phi(t)^2] \right]. \quad (3.39)$$

Note que neste caso a expansão é muito mais rápida que no caso anterior.

O parâmetro ϵ de rolagem lenta é dado por

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_P^2}{16\pi} \frac{16}{\phi^2}. \quad (3.40)$$

Assim, a inflação termina quando

$$\epsilon(\phi_{fim}) = 1 \Rightarrow \phi_{fim} = \frac{M_P}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.41)$$

o que ocorre no tempo

$$t_{fim} = \frac{1}{M_P} \sqrt{\frac{6\pi}{\lambda}} \ln \left(\frac{\sqrt{\pi}\phi_i}{M_P} \right). \quad (3.42)$$

O número de *e-foldings* produzidos é

$$N = - \frac{8\pi}{M_P^2} \int_{\phi_i}^{\phi_{fim}} \frac{\phi}{4} d\phi = - \frac{\pi}{M_P^2} [\phi_{fim}^2 - \phi_i^2] = \frac{\pi\phi_i^2}{M_P^2} - 1. \quad (3.43)$$

3.5 Potencial Exponencial

Um outro potencial bastante interessante é o potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\lambda \frac{\phi}{m_P}\right), \quad (3.44)$$

onde V_0 e λ são constantes (o índice 0 aqui não indica o valor atual do potencial). O sistema de equações para este potencial pode ser resolvido analiticamente sem a aproximação de rolagem lenta. Esta é a chamada *inflação de lei de potências* (ILP) [Lucchin e Matarrese (1985), Burd e Barrow (1988), Liddle (1989)], pois neste caso uma solução particular para o fator de escala é dada por

$$a(t) = a_i t^{2/\lambda^2}, \quad (3.45)$$

onde a_i denota o fator de escala em t_i . Derivando a equação de Friedmann (3.14) em relação ao tempo, teremos

$$\frac{dH^2}{dt} = 2H\dot{H} = \frac{1}{3m_P^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) = \frac{1}{3m_P^2} \left(\ddot{\phi}\dot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi} \right). \quad (3.46)$$

Usando então a equação de movimento do campo (3.15), a equação acima fica

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3m_P^2} \left[\ddot{\phi}\dot{\phi} - \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) \dot{\phi} \right] = -\frac{H\dot{\phi}^2}{m_P^2},$$

de modo que

$$\dot{\phi}^2 = -2m_P^2 \dot{H}, \quad (3.47)$$

Mas, usando a solução para o fator de escala, temos que

$$H = \frac{2}{\lambda^2} \frac{1}{t} \Rightarrow \dot{H} = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{1}{t^2}, \quad (3.48)$$

de modo que a equação para o campo fica

$$\dot{\phi} = \frac{2m_P}{\lambda} \frac{1}{t} \Rightarrow \phi(t) = \phi(t_i) + \frac{2m_P}{\lambda} \ln\left(\frac{t}{t_i}\right). \quad (3.49)$$

O parâmetro ϵ de rolagem lenta neste caso é dado por

$$\epsilon(\phi) = \frac{m_P^2}{2} \frac{V'}{V} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2}. \quad (3.50)$$

Assim, para que o potencial exponencial[¶] seja capaz de gerar inflação, é necessário que

$$\lambda > \sqrt{2}. \quad (3.51)$$

Neste caso, a inflação nunca termina (a menos que ϕ decaia em outros campos), pois λ é constante.

[¶]Isso é estritamente verdade quando despezamos a matéria e a radiação. Veremos no capítulo 5 que quando a matéria e/ou a radiação são importantes, valores de $\lambda \leq 2$ também são capazes de fazer com que o universo acelere, ainda que temporariamente.

Entretanto, mesmo se for possível criar um mecanismo que consiga parar a aceleração, este potencial terá dificuldades em resolver os problemas do modelo padrão. Como sua expansão não é exponencial, o número de *e-foldings* produzido em um período inflacionário não é grande o suficiente para explicar a homogeneidade e planura do universo. Para verificar isso, podemos calcular quanto tempo levaria para que o número de *e-foldings* atingisse um dado valor N . De (3.22) temos que

$$N = - \frac{1}{m_P^2} \int_{\phi_i}^{\phi(t)} \frac{V}{V'} d\phi = - \frac{1}{m_P^2} \int_{\phi_i}^{\phi(t)} \frac{m_P}{\lambda} d\phi = \frac{[\phi(t) - \phi_i]}{\lambda m_P}. \quad (3.52)$$

Assim, em um dado tempo t , o número de *e-foldings* é

$$N = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{t}{t_i} \quad (3.53)$$

Assim, supondo que a inflação teve início em $t_i \approx 10^{-35}$ s, para que o universo tenha se expandido cerca de 80 *e-foldings*, o universo teria que estar acelerando até a época da nucleossíntese. Por essa razão, esse não parece ser um bom potencial para a inflação primordial.

Discutimos neste capítulo como uma época de expansão acelerada no universo primordial pode resolver alguns problemas do modelo padrão. Nesse sentido, o cenário inflacionário completa o modelo cosmológico padrão, embora para que haja essa época de aceleração seja necessário supor a existência algum componente exótico no universo primordial, com uma equação de estado negativa.

Medidas recentes indicam que o universo está novamente passando por um período de expansão acelerada, de modo que novamente somos levados a invocar um constituinte com pressão negativa, a chamada *energia escura* ou *quintessência*, que discutiremos nos próximos capítulos.

Capítulo 4

Energia Escura

4.1 O novo cenário cosmológico

Nos últimos anos, um novo cenário cosmológico [Bahcall *et al.* (1999)] emergiu, graças às observações mais precisas da radiação cósmica de fundo, em especial das suas anisotropias, e à obtenção de dados utilizando supernovas distantes, da época em que o universo tinha metade da sua idade atual.

Como discutimos anteriormente, a radiação cósmica de fundo é homogênea e isotrópica, com flutuações de cerca de $\delta T/T \approx 10^{-5}$. Essas flutuações de temperatura, apesar de pequenas, podem colocar vínculos em alguns dos parâmetros cosmológicos, em especial no parâmetro de densidade total do universo e no parâmetro de densidade bariônica [Steinhardt *et al.* (1995), Hu *et al.* (1997)].

Diversas observações dessas anisotropias da radiação cósmica de fundo têm sido realizadas utilizando experimentos em solo, balões e satélites, e todas elas indicam que o parâmetro de densidade do universo é muito próximo da unidade. Em especial, os recentes resultados do satélite WMAP [Spergel *et al.* (2003)] indicam que

$$\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02 , \quad (4.1)$$

em um intervalo de 1σ de confiança.

Entretanto, como também vimos, limites observacionais indicam que a densidade bariônica possui um valor muito abaixo da unidade

$$\Omega_{b0}h^2 \approx 0,02 . \quad (4.2)$$

É interessante notar que os dados da radiação cósmica de fundo indicam que [Spergel *et al.* (2003)],

$$\Omega_{b0}h^2 = 0,0224 \pm 0,0009 , \quad (4.3)$$

ou seja, o valor também concorda com o previsto pela nucleossíntese [Schramm e Turner (1998)].

Além do baixo valor da densidade bariônica, mesmo se contabilizarmos a matéria escura observada via interação gravitacional nas galáxias e aglomerados de galáxias [Olive (2003)],

teremos que [Freedman e Turner (2003)]

$$\Omega_M = 0,29 \pm 0,04 . \tag{4.4}$$

Dessa forma, para que as observações de anisotropias e as observações de densidade de matéria no universo não estejam em conflito, é necessário que haja algum tipo de *energia escura* que domine atualmente a dinâmica do universo.

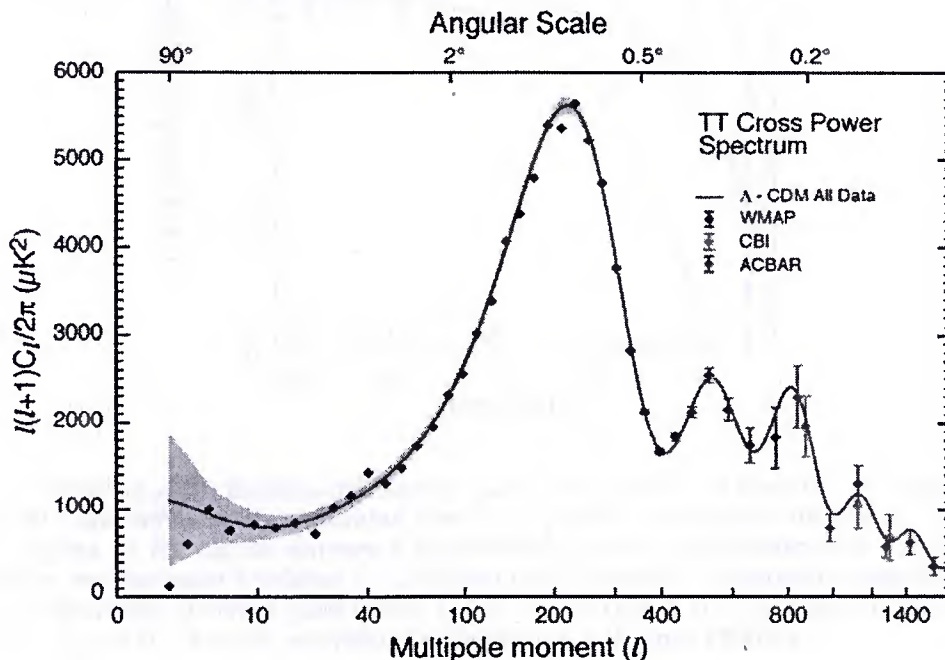


Figura 4.1: Espectro de potências da radiação cósmica de fundo, medido pelo WMAP, CBI e AÇBAR. Esta figura basicamente mostra o tamanho da variação de temperatura entre dois pontos no céu separados por um ângulo θ versus o número de multipolo $l = 200^\circ/\theta$. A posição do primeiro pico em $l \approx 200$ indica que a densidade do universo é muito próximo à densidade crítica. Figura: NASA/WMAP Science Team.

Além disso, observações utilizando supernovas do tipo Ia feitas por dois grupos distintos [Perlmutter *et al.* (1998), Riess *et al.* (1998)] indicam que o universo atualmente tem cerca de 70% de sua energia na forma de um componente que atua como uma constante cosmológica, de modo que a expansão atual do universo é acelerada, e o parâmetro de desaceleração

$$q_0 := -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = \frac{4\pi G}{3H_0^2} \sum_i \rho_i (1 + 3\omega_i) = \frac{\Omega_0}{2} + \sum_i \frac{3}{2} \Omega_i \omega_i , \tag{4.5}$$

onde i refere-se aos diversos componentes do universo, é negativo.

Dessa forma, baseado nos resultados acima, surge um cenário cosmológico em que a energia do universo é dominada por um componente com pressão negativa, componente esse que ficou conhecido como *energia escura* [Turner (2000), Carroll (2001b), Sahni (2002), Padmanabhan (2003), Peebles e Ratra (2003), Sahni (2002)].

Desde então, inúmeros candidatos à energia escura foram trazidos à tona, entre eles a constante cosmológica e os modelos de campo escalar, que ficaram conhecidos como modelos de quintessência.

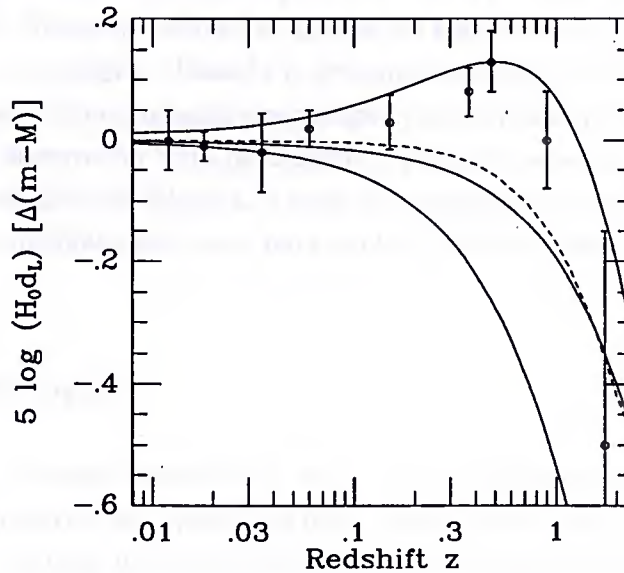


Figura 4.2: Diagrama de Hubble diferencial para supernovas do tipo Ia. As medidas de mais de 200 supernovas estão reunidas nos nove pontos mostrados na figura. A curva tracejada separa as curvas de universos acelerados (acima) e desacelerados (abaixo). As curvas cheias representam modelos de universo com matéria e constante cosmológica em diferentes proporções: de cima para baixo, $(\Omega_{M0} = 0,3; \Omega_{\Lambda0} = 0,7)$, $(\Omega_{M0} = 0,3; \Omega_{\Lambda0} = 0)$ e $(\Omega_{M0} = 1; \Omega_{\Lambda0} = 0)$. Figura extraída de [Freedman e Turner (2003)].

4.2 Constante cosmológica

Uma candidata natural à energia escura é a constante cosmológica [Carroll (2001a)]. Como havíamos visto, a constante cosmológica possui uma equação de estado constante, $\omega_{\Lambda} = -1$. Diferentemente do que acontece na inflação, a constante cosmológica pode ser responsável pela atual aceleração do universo, desde que $\rho_{\Lambda} \approx \rho_{c0}$.

É interessante notar que a constante cosmológica já vinha sendo sugerida antes das observações de supernovas e das observações das anisotropias na radiação cósmica de fundo [Turner *et al.* (1984), Ostriker e Steinhardt (1995), Krauss e Turner (1995)], pois uma expansão atualmente acelerada ajuda a resolver outros problemas, como a idade do universo (ver figura 2.3).

No entanto, há várias razões não entendidas caso a energia escura seja de fato devida a constante cosmológica [Weinberg (1989)]. A principal delas é saber porque a constante estaria dominando a energia do universo justamente agora, ou seja, porque a densidade de energia da constante cosmológica tem hoje a mesma ordem de grandeza que a densidade de energia da matéria. Como a constante cosmológica não varia no tempo, é necessário que haja um enorme ajuste fino para que ela comece a dominar a energia do universo

justamente na época atual. Esse problema é conhecido como *problema da coincidência cósmica*.

Uma solução para isso foi proposta por S. Weinberg [Weinberg (2000)], utilizando o princípio antrópico. Nosso universo seria apenas um entre vários, cada um tendo um valor para a constante cosmológica. Usando o princípio antrópico, ele afirma que apenas os universos que tivessem uma constante cosmológica com um valor próximo ao do valor nosso seriam capazes de desenvolver vida inteligente, e portanto seres capazes de se perguntar sobre o valor da constante cosmológica. Apesar de aparentemente “solucionar” o problema, o fato do princípio antrópico ser usado para explicar algo de forma científica é no mínimo discutível.

4.3 Quintessência

Uma alternativa à constante cosmológica seria um campo escalar cósmico ϕ muito fracamente acoplado à matéria. Se o potencial deste campo escalar diminui vagarosamente de um grande valor de ϕ para um valor próximo de zero, o campo escalar pode admitir um comportamento muito parecido com o da constante cosmológica [Peebles e Ratra (1988), Ratra e Peebles (1988), Wetterich (1988), Frieman *et al.* (1995), Ferreira e Joyce (1997), Ferreira e Joyce (1998)], como no caso inflacionário.

Caldwell, Dave e Steinhardt [Caldwell *et al.* (1998)] propuseram um componente do fluido cósmico que possui uma dinâmica, que depende do tempo e é espacialmente inhomogêneo*. A equação de estado desse componente é diferente da equação de bárions, neutrinos, matéria escura e radiação. Esse componente, que seria o quinto componente do fluido cósmico, foi chamado por eles de *quintessência*.

Dessa forma, a quintessência surge como uma possível solução ao problema da energia escura, podendo explicar a curvatura nula e a aceleração do universo. As equações que descrevem a dinâmica do campo da quintessência são as mesmas discutidas na seção 3.3.

Neste cenário, o universo se desenvolveu de uma fase dominada pela radiação para uma fase dominada pela matéria, e está atualmente numa fase dominada pela quintessência.

Além disso, uma classe de modelos de quintessência, chamados de modelos *tracker*† [Steinhardt *et al.* (1999), Zlatev *et al.* (1999)], surgiu para tentar resolver o problema da coincidência cósmica. Nestes modelos, o sistema de equações que descreve a dinâmica do universo,

$$H^2 = \frac{1}{3m_P^2} \left[\rho_M + \rho_R + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (4.6)$$

*Essas inhomogeneidades podem ser importantes para a formação de estruturas. Entretanto, como não trataremos desse tópico nesta dissertação, sempre utilizaremos a quintessência como um campo escalar homogêneo.

†Utilizarei o termo em inglês neste caso e no caso das soluções *scaling* por falta de uma tradução adequada.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (4.7)$$

$$\dot{\rho}_i + nH\rho_i = 0, \quad (4.8)$$

onde i indica matéria (radiação) e $n = 3$ (4), possui pontos fixos, ou seja, diversas condições iniciais convergem para uma mesma solução. Na última equação, i indica matéria (radiação) e $n = 3$ (4).

4.4 Classificação dos potenciais de campos escalares

Como comentamos anteriormente, a presença da energia escura gera, entre várias outras questões, o chamado *problema da coincidência cósmica*: por que as densidades de energia da quintessência e da matéria são tão próximas hoje? Essas densidades devem ter sido bem diferentes no passado, e o modelo cosmológico padrão requer que o universo não esteja acelerando desde a época da nucleossíntese até recentemente. Visto de outra forma, supondo que a quintessência tenha uma equação de estado constante $\omega_\phi \neq \omega_M$, vemos da equação (2.19) que os dois componentes têm suas densidades variando de forma diferente na história do universo. Neste caso, como o universo acelera quando $\Omega_\phi \omega_\phi < -1/3$ (ver equação (4.5)), temos que a aceleração tem início em

$$\frac{\Omega_\phi}{\Omega_M} = (1+z)^{3\omega_\phi} \frac{\Omega_{\phi 0}}{\Omega_{M 0}} \Rightarrow z = \left[-\frac{\Omega_{M 0}}{\Omega_{\phi 0}} \frac{1}{(3\omega_\phi + 1)} \right]^{1/3\omega_\phi} - 1, \quad (4.9)$$

ou seja, para $\omega_\phi = -1$ a aceleração tem início em $z \approx 0,7$, e para $\omega_\phi = -2/3$, $z \approx 0,5$. De qualquer modo, vemos que a aceleração do universo começou apenas recentemente.

Uma possível solução para esse problema da coincidência surge da quintessência *tracker*, pois no regime de ponto fixo (*pf*) dessas soluções as densidades de quintessência e matéria variam da mesma forma. Nesse caso, vemos que a razão entre as densidades fica

$$\frac{\rho_m^{pf}}{\rho_\phi^{pf}} = \frac{\Omega_m^{pf}}{\Omega_\phi^{pf}} = \text{constante}. \quad (4.10)$$

Isto resolveria o problema da coincidência cósmica, se fosse possível mostrar que o regime de ponto fixo já tenha sido atingido na época atual. Dessa forma, é interessante classificarmos as soluções de ponto fixo e verificar quais potenciais geram cada tipo de solução [Liddle e Scherrer (1998)].

Uma solução do tipo *scaling* é aquela em que a densidade de energia da quintessência varia da forma $\rho_\phi \propto a^{-n}$, e a densidade de energia do fluido de fundo como $\rho_f \propto a^{-m}$, m e n sendo constantes positivas e $n \neq m$. As soluções do tipo *tracker* correspondem aos casos em que $n = m$. Note que $0 \leq n \leq 6$, correspondendo aos limites $-1 \leq \omega_\phi < 1$. Como veremos, as soluções do tipo *scaling* são geradas por potenciais do tipo lei de potências e as soluções do tipo *tracker* por potenciais exponenciais[‡].

[‡]Note que a definição de uma solução *tracker* nesse caso é ligeiramente diferente da definição

Para simplificar as contas, vamos também definir um parâmetro

$$\gamma := \omega + 1 . \quad (4.11)$$

Nessa notação, temos que $n = 3\gamma_\phi$ e $m = 3\gamma_f$. Se o fluido de fundo corresponder a matéria (radiação) temos $m = 3$ (4).

Derivando a densidade de energia da quintessência (3.7) em relação ao tempo, temos que

$$\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi} \left(\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \right) = -3H\dot{\phi}^2 , \quad (4.12)$$

onde na última igualdade usamos a equação de movimento do campo (4.7). Com isso, temos da equação de fluido para a quintessência que

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\gamma_\phi\rho_\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}_\phi/2}{\rho_\phi} = -\frac{3}{2}H\gamma_\phi = -\frac{nH}{2} , \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\frac{\dot{\phi}^2/2}{\rho_\phi} = \frac{n}{6} . \quad (4.14)$$

Vamos supôr também que a densidade de energia da quintessência é inicialmente desprezível em relação ao fluido de fundo, ou seja, $\rho_\phi \ll \rho_f$, o que é uma suposição razoável, pois o universo tem que ser dominado pela matéria durante um longo tempo. Nessas condições, usando a equação (2.23) temos que $a(t) \propto t^{2/m}$, e assim

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{m} \frac{t^{(2-m)/m}}{t^{2/m}} = \frac{2}{m} t^{-1} . \quad (4.15)$$

Com isso a equação de movimento do campo fica

$$\ddot{\phi} = -\frac{6}{m} \frac{\dot{\phi}}{t} - \frac{dV}{d\phi} . \quad (4.16)$$

Além disso, temos que

$$\rho_\phi \propto a^{-n} \propto t^{-2n/m} , \quad (4.17)$$

e de (4.14)

$$\dot{\phi} \propto \sqrt{\rho_\phi} \propto t^{-n/m} . \quad (4.18)$$

de Steinhardt e colaboradores [Steinhardt *et al.* (1999), Zlatev *et al.* (1999)]. Para eles, a solução *tracker* é definida como uma em que $\Gamma > 1$ e aproximadamente constante, onde

$$\omega_\phi \approx \frac{\omega_f - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)} , \quad \Gamma := \frac{V''V}{(V')^2} ,$$

e ω_f é a equação de estado do fundo, de modo que para eles uma solução *tracker* corresponde à que Liddle e Scherrer classificam de tipo *scaling*. No caso do potencial exponencial, que Liddle e Scherrer chamam de *tracker*, temos que $\Gamma = 1$, e $\omega_\phi = \omega_f$, o que na definição de Steinhardt não é uma solução do tipo *tracker*. Nesta dissertação estamos usando os termos *tracker* e *scaling* no sentido de Liddle e Scherrer.

4.4.1 Soluções do tipo scaling

Para o caso $n \neq m$, temos de (4.18) que

$$\int d\phi \propto \int t^{-n/m} dt \Rightarrow \phi(t) = A t^{1-n/m}, \quad (4.19)$$

onde A é uma constante. Dessa forma, temos que a equação de movimento do campo fica dada por

$$-A \frac{n}{m} \left(1 - \frac{n}{m}\right) t^{-1-n/m} = -\frac{6}{m} A \left(1 - \frac{n}{m}\right) t^{-1-n/m} - \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.20)$$

ou ainda

$$\frac{A}{m} \left(1 - \frac{n}{m}\right) t^{-(n+m)/m} (6-n) = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (4.21)$$

Usando (4.19) obteremos então

$$\frac{A}{m} \left(1 - \frac{n}{m}\right) (6-n) \left(\frac{\phi}{A}\right)^{(n+m)/(n-m)} = -\frac{dV}{d\phi}, \quad (4.22)$$

e integrando em ϕ ,

$$V(\phi) = -\int_0^\phi \frac{A}{m} \left(1 - \frac{n}{m}\right) (6-n) \left(\frac{\phi}{A}\right)^{(n+m)/(n-m)} d\phi, \quad (4.23)$$

teremos

$$V(\phi) = A^2 \left(1 - \frac{n}{m}\right)^2 \frac{(6-n)}{2n} \left(\frac{\phi}{A}\right)^\alpha := V_0 \phi^\alpha, \quad (4.24)$$

onde

$$\alpha = \frac{2n}{n-m} \Rightarrow n = \frac{\alpha}{\alpha-2} m. \quad (4.25)$$

Dessa forma, vemos que soluções do tipo *scaling* ocorrem para modelos de quintessência com potenciais do tipo leis de potência, como já havia sido notado por Peebles e Ratra [Peebles e Ratra (1988), Ratra e Peebles (1988)]. Como n e m são constantes positivas, temos 2 situações de interesse: $\alpha > 2$ e $\alpha < 0$. As equações com $0 < \alpha \leq 2$ não fazem sentido, pois admitimos inicialmente que n e m são positivos, e para $\alpha = 0$ o campo escalar comporta-se como uma constante cosmológica.

Podemos obter uma relação entre a equação de estado da quintessência e do componente de fundo quando o regime atrator é atingido,

$$\gamma_\phi = \frac{\alpha}{\alpha-2} \gamma_f \Rightarrow \omega_\phi = \frac{2}{\alpha-2} + \frac{\alpha}{\alpha-2} \omega_f. \quad (4.26)$$

Para a época atual, em que o componente do fundo é a matéria escura fria, a equação de estado da quintessência fica então

$$\omega_\phi = \frac{2}{\alpha-2}, \quad (4.27)$$

que é negativa no caso em que $\alpha < 0$.

Com isso, vemos que potenciais cujo potencial é dado por uma lei de potências consegue obter valores negativos para a equação de estado, podendo explicar no regime atrator a aceleração do universo. Entretanto, como a razão entre as densidades varia da forma

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_f} \propto a^{-n/m}, \quad (4.28)$$

a quintessência vai dominar completamente a energia do universo, uma vez que $n/m = \alpha/(\alpha - 2) < 0$ para $\alpha < 0$. Assim, para que estes modelos consigam explicar o valor do parâmetro de densidade da quintessência hoje, é necessário um ajuste fino, uma vez que a transição para o regime de atrator tem que estar acontecendo justamente na época atual, como no caso que estudamos para o potencial exponencial em [França e Rosenfeld (2002)], que discutiremos no próximo capítulo.

4.4.2 Soluções do tipo tracker

De (4.18), vemos que para $n = m$

$$\int d\phi \propto \int \frac{dt}{t} \propto \ln t \Rightarrow \phi(t) = A \ln(t/t_\star), \quad (4.29)$$

onde A novamente é uma constante, e o campo é dado em unidades de m_P . A equação de movimento do campo fica

$$\frac{A}{t^2} \left(\frac{6}{m} - 1 \right) = - \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.30)$$

Usando então a equação (4.30), temos que

$$\frac{dV}{d\phi} = -A \left(\frac{6}{m} - 1 \right) t_\star e^{-2\phi/A} \Rightarrow V(\phi) = \frac{A^2}{2} \left(\frac{6}{m} - 1 \right) t_\star e^{-2\phi/A}, \quad (4.31)$$

ou ainda, fazendo $A/2 = 1/\lambda$,

$$V(\phi) = \frac{2t_\star}{\lambda^2} \left(\frac{6}{m} - 1 \right) e^{-\lambda\phi} := V_0 e^{-\lambda\phi}, \quad (4.32)$$

que é o bastante estudado potencial exponencial [Ratra e Peebles (1988), Wetterich (1988), Wetterich (1995), Ferreira e Joyce (1997), Ferreira e Joyce (1998), Copeland *et al.* (1998), Barreiro *et al.* (2000), Cline (2001), Kolda e Lahneman (2001), Rubano e Scudellaro (2001), Rubano e Scudellaro (2002)]. Essa solução tracker é um atrator estável para $\lambda^2 > m$, com parâmetro de densidade

$$\Omega_\phi^{pf} = \frac{m}{\lambda^2}. \quad (4.33)$$

Como $n = m$, temos que a equação de estado $\omega_\phi^{pf} = \omega_f$. Vemos então que o potencial exponencial é o único em que existem soluções tipo *tracker* para a quintessência minimamente acoplada.

Entretanto, as soluções do tipo *tracker* apresentam um problema para a quintessência minimamente acoplada: o valor da equação de estado da quintessência fica igual à da matéria (fluido de fundo na época atual), o que impossibilita obter um universo que esteja

atualmente acelerando. Por essa razão, usualmente considera-se que o potencial exponencial no regime tracker não pode ser o responsável pela energia escura, embora o regime *scaling* deste potencial possa explicar os dados observacionais com o mesmo ajuste fino requerido em outros modelos de quintessência [França e Rosenfeld (2002)]. Voltaremos a esse assunto no próximo capítulo.

4.5 Estabilidade dos pontos fixos

Uma vez que existem os pontos fixos que geram soluções do tipo *scaling* e *tracker*, é interessante estudar a estabilidade destes regimes atratores. Em especial, vamos exemplificar aqui o método para obter as equações que analisam a estabilidade dos modelos cosmológicos, de acordo com o procedimento feito em [Ratra e Peebles (1988), Liddle e Scherrer (1998)]. O exemplo que vamos estudar aqui é para o potencial de lei de potências, mas um procedimento análogo possibilita a classificação dos pontos críticos no caso do potencial exponencial [Copeland *et al.* (1998)].

Vamos considerar inicialmente um potencial da forma (4.24)

$$V(\phi) = V_0 \phi^\alpha ,$$

e utilizá-lo na equação (4.16). Fazendo isso, obteremos

$$\ddot{\phi} = -\frac{6}{m} \frac{\dot{\phi}}{t} - \alpha V_0 \phi^{\alpha-1} . \quad (4.34)$$

Podemos absorver a contante αV_0 na definição de t , fazendo $t_* := t\sqrt{\alpha V_0}$, de modo que

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{6}{mt} \frac{d\phi}{dt} - \phi^{\alpha-1} , \quad (4.35)$$

onde por simplicidade denotarei t_* por t . Note que esta mudança de escala implica uma mudança no valor da constante A em (4.19),

$$\phi(t) = A \left(\frac{t}{\sqrt{\alpha V_0}} \right)^{1-n/m} = A_* t^{1-n/m} \Rightarrow A_* := \frac{A}{(\sqrt{\alpha V_0})^{1-\alpha/(\alpha-2)}} = \frac{A}{(\alpha V_0)^{-1/(\alpha-2)}} , \quad (4.36)$$

onde usamos o fato que $n - m = 2m/(\alpha - 2)$. O valor de V_0 pode ser obtido de (4.24),

$$V_0 = \frac{A^2}{A^\alpha} \left(\frac{n-m}{m} \right)^2 \frac{(6-n)}{2n} = A^{2-\alpha} \left(\frac{n-m}{m} \right)^2 \frac{(6-n)}{(n-m)\alpha} , \quad (4.37)$$

onde usamos o resultado (4.25). Temos então que

$$V_0 = A^{2-\alpha} \left(\frac{n-m}{\alpha} \right) \left(\frac{6-n}{m^2} \right) = \frac{A^{2-\alpha}}{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha-2} \right) \left(\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right) , \quad (4.38)$$

e portanto, de (4.36)

$$A_* = (\alpha V_0)^{1/(\alpha-2)} A = \left[\left(\frac{2}{\alpha-2} \right) \left(\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right) \right]^{1/(\alpha-2)} . \quad (4.39)$$

Para simplificar a notação, denotarei A_* por A daqui em diante. Vamos então definir uma mudança de variável,

$$t := e^\tau, \quad u(\tau) := \frac{\phi(\tau)}{\phi_e(\tau)}, \quad (4.40)$$

onde $\phi_e(\tau)$ é a solução exata dada por $\phi_e(t) = At^{1-n/m} = At^{-2/(\alpha-2)}$. Com isso, temos que

$$\phi_e(\tau) = A(e^\tau)^{-2/(\alpha-2)} = Ae^{-2\tau/(\alpha-2)}. \quad (4.41)$$

Além disso, temos que

$$d\tau = d(\ln t) = \frac{1}{t} dt = e^{-\tau} dt \Rightarrow dt = e^\tau d\tau, \quad (4.42)$$

de modo que

$$\ddot{\phi} = e^{-\tau} \frac{d}{d\tau} \left(e^{-\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \right) = e^{-\tau} [-e^{-\tau} \phi'(\tau) + e^{-\tau} \phi''(\tau)] = e^{-2\tau} [\phi''(\tau) - \phi'(\tau)], \quad (4.43)$$

onde linha denota derivada em relação a τ . A equação de movimento do campo (4.35) fica nessas novas variáveis,

$$[\phi''(\tau) - \phi'(\tau)] e^{-2\tau} = -\frac{6}{m} e^{-2\tau} \phi'(\tau) - \phi(\tau)^{\alpha-1}. \quad (4.44)$$

Vamos então reescrever a equação acima em termos de u , definido em (4.40). Sabendo que

$$\phi(\tau) = \phi_e(\tau)u(\tau), \quad (4.45)$$

$$\phi'(\tau) = \phi'_e(\tau)u(\tau) + \phi_e(\tau)u'(\tau), \quad (4.46)$$

$$\phi''(\tau) = \phi''_e(\tau)u(\tau) + 2\phi'_e(\tau)u'(\tau) + \phi_e(\tau)u''(\tau), \quad (4.47)$$

a equação de movimento fica

$$\begin{aligned} \phi''_e(\tau)u(\tau) + 2\phi'_e(\tau)u'(\tau) + \phi_e(\tau)u''(\tau) - \phi'_e(\tau)u(\tau) - \phi_e(\tau)u'(\tau) \\ = -\frac{6}{m} [\phi'_e(\tau)u(\tau) + \phi_e(\tau)u'(\tau)] - e^{2\tau} [\phi_e(\tau)u(\tau)]^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Note que

$$\phi'_e(\tau) = -\frac{2}{\alpha-2} \phi_e(\tau), \quad (4.49)$$

$$\phi''_e(\tau) = \left(\frac{2}{\alpha-2} \right)^2 \phi_e(\tau), \quad (4.50)$$

de modo que a equação acima fica,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\alpha-2} \right)^2 u - \frac{4}{\alpha-2} u' + u'' + \frac{2}{\alpha-2} u - u' = -\frac{6}{m} \left[-\frac{2}{\alpha-2} u + u' \right] \\ - e^{2\tau} \phi_e(\tau)^{\alpha-2} u^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Usando (4.39) e (4.41), podemos ver que

$$\phi_e(\tau)^{\alpha-2} e^{2\tau} = A^{\alpha-2} = \left[\left(\frac{2}{\alpha-2} \right) \left(\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right) \right]. \quad (4.52)$$

Usando então o resultado acima e agrupando os termos na equação de movimento, obteremos

$$u'' + \left[\frac{4}{2-\alpha} + \frac{6}{m} - 1 \right] u' + \frac{2}{\alpha-2} \left[\frac{\alpha}{\alpha-2} - \frac{6}{m} \right] (u - u^{\alpha-1}) = 0, \quad (4.53)$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} u' &= p, \\ p' &= \left[1 - \frac{4}{2-\alpha} - \frac{6}{m} \right] p + \frac{2}{\alpha-2} \left[\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right] (u - u^{\alpha-1}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para α par, há três pontos críticos, que podem ser obtidos de

$$\begin{aligned} u' = 0 &\Rightarrow p = 0, \\ p' = 0 &\Rightarrow u = u^{\alpha-1} \Rightarrow u = -1, 0, +1. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Como estamos apenas apresentando o método, vamos discutir apenas um dos pontos críticos ($u = 1, p = 0$) para entender como a análise de estabilidade é feita. Note que este ponto é crítico para qualquer valor de α .

Vamos perturbar as soluções u e p , e analisar como as soluções perturbadas comportam-se. Assim, temos que

$$\begin{aligned} u &= u_c + x \Rightarrow u' = x', \\ p &= p_c + y \Rightarrow p' = y' \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde $(u_c, p_c) = (1, 0)$ correspondem aos pontos críticos que estamos analisando e (x, y) às perturbações. As equações (4.54) ficam então dadas por

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \left[1 - \frac{4}{2-\alpha} - \frac{6}{m} \right] y + \frac{2}{\alpha-2} \left[\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right] [1 + x - (1+x)^{\alpha-1}]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Pegando apenas os termos de primeira ordem em x e y , as equações acima ficam dadas por

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \left[1 - \frac{4}{2-\alpha} - \frac{6}{m} \right] y - 2 \left[\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right] x, \end{aligned} \quad (4.58)$$

pois usamos o fato que o termo $(1+x)^{\alpha-1}$ tem $(\alpha-1)$ termos do tipo $1^{\alpha-2}x = x$, de modo que $1+x - (1+x)^{\alpha-1} = 1+x - \alpha x + x = 1+(2-\alpha)x$, e linearizamos o sistema.

Podemos então encontrar os autovalores deste sistema, para analisar a estabilidade do ponto crítico. Temos então que o determinante dos autovalores λ fica

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 \left(\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right) & \left(1 - \frac{4}{2-\alpha} - \frac{6}{m} \right) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

cujas soluções são

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{2-\alpha} - \frac{6}{m} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{2-\alpha} - \frac{6}{m} \right)^2 - 2 \left(\frac{6}{m} - \frac{\alpha}{\alpha-2} \right)}. \quad (4.59)$$

Usando (4.25), podemos escrever as soluções acima na forma

$$\lambda_{\pm} = \frac{2n - m - 6 \pm \sqrt{(2n - m - 6)^2 + 8m(n - 6)}}{2m}. \quad (4.60)$$

A condição necessária e suficiente para que o ponto crítico seja estável é que a parte real de ambas as soluções seja negativa, ou seja, que $\lambda_{\pm} < 0$. Como $n < 6$, vemos que $8m(n - 6) < 0$. Note que se o termo dentro da raiz quadrada for negativo, a raiz quadrada é imaginária, e portanto a condição de estabilidade exige que $2n - m - 6 < 0$ (a parte real das soluções). No caso em que a raiz é real, λ_{\pm} são reais, e exigindo que $2n - m - 6 < 0$, temos que automaticamente ambas as soluções serão negativas, uma vez que $|2n - m - 6| > \sqrt{(2n - m - 6)^2 + 8m(n - 6)}$. Com isso, vemos que para que o ponto crítico seja um atrator estável, é preciso que

$$2n - m - 6 < 0. \quad (4.61)$$

Para $\alpha < 0$, vamos definir $\alpha^* = -\alpha$, de modo que a equação (4.25) fica

$$\alpha^* = \frac{2n}{m-n} \Rightarrow n = \frac{\alpha^*}{\alpha^* + 2} m. \quad (4.62)$$

Com isso, a condição de estabilidade fica

$$\alpha^*(m-6) < 2(m+6) \Rightarrow \alpha < 2 \left(\frac{6+m}{6-m} \right), \quad \text{para } \alpha < 0. \quad (4.63)$$

Para $\alpha > 2$, usando (4.25), a condição de estabilidade fica

$$2\alpha m - (m+6)\alpha < -2(m+6) \Rightarrow \alpha > 2 \left(\frac{6+m}{6-m} \right), \quad \text{para } \alpha > 2. \quad (4.64)$$

Note que a condição para $\alpha < 0$ é sempre satisfeita, uma vez que $m < 6$. Dessa forma, vemos que para potenciais do tipo

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\phi^\beta}, \quad (4.65)$$

a solução do tipo scaling é um atrator estável para todos os valores positivos de β , como já havia sido notado por Peebles e Ratra [Ratra e Peebles (1988)].

Já a condição para $\alpha > 2$ nem sempre é satisfeita. Em particular, se o atrator é atingido na época da radiação ($m = 4$), é necessário que $\alpha > 10$, e no caso em que o atrator é atingido na época da matéria, é necessário que $\alpha > 6$. De qualquer forma, como vimos, o regime atrator para $\alpha > 2$ não é fenomenologicamente interessante, uma vez que gera uma equação de estado positiva para a quintessência no regime atrator (equação (4.27)).

Os modelos *tracker*, apesar de exibirem soluções interessantes, não resolvem o problema da coincidência cósmica. Em **todos** os modelos de quintessência, a escala de energia do potencial (como V_0 , no exemplo acima) é obtida usando-se o fato que

$$\rho_{\phi 0} \approx V(\phi) \approx \rho_{c0} .$$

Como veremos no próximo capítulo, isso faz com que o campo entre no ponto fixo por volta da época atual, de modo que a quintessência domina a energia do universo (e o acelera) apenas recentemente. Dessa forma, podemos entender a constante do potencial (e portanto a escala de energia da quintessência) como um parâmetro livre que se ajusta às observações, e não como um valor que surge naturalmente.

No próximo capítulo, vamos estudar em detalhe os modelos de quintessência com potencial exponencial. Mostramos [França e Rosenfeld (2002)] que, ao contrário do que era afirmado, esses modelos podem explicar todas as observações, e que o ajuste fino necessário para essas soluções realistas não é maior do que o necessário para qualquer outro modelo de energia escura.

Capítulo 5

Quintessência com Potenciais Exponenciais

A dinâmica do campo de quintessência é obtida resolvendo o sistema de equações acoplada (4.6), (4.7) e (4.8), que apresenta comportamentos distintos para cada potencial. No capítulo anterior, apresentamos dois tipos de soluções bastante particulares, as do tipo *tracker* e as do tipo *scaling*, em que a equação de estado da quintessência fica constante após o sistema atingir os pontos críticos.

Para o potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\lambda \frac{\phi}{m_P}\right), \quad (5.1)$$

uma análise similar à que fizemos no capítulo anterior para o potencial de leis de potências mostra que as equações de movimento podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} x' &= -3x + \lambda \sqrt{\frac{3}{2}} y^2 + \frac{3}{2} x [2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \\ y' &= -\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} xy + \frac{3}{2} y [2x^2 + \gamma(1 - x^2 - y^2)], \end{aligned}$$

onde

$$x := \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H m_P}, \quad y := \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H m_P}, \quad \gamma := \omega + 1.$$

Podemos então encontrar os pontos críticos, linearizar o sistema em torno deles e analisar sua estabilidade, como fizemos anteriormente. Em especial, este sistema apresenta 2 pontos fixos (*pf*) estáveis [Copeland *et al.* (1998)] para

$$\lambda < \sqrt{n} \implies \Omega_\phi^{fp} = 1 \implies \omega_\phi^{fp} = \frac{\lambda^2 - 3}{3}, \quad (5.2)$$

e para

$$\lambda > \sqrt{n} \implies \Omega_\phi^{fp} = \frac{n}{\lambda^2} \implies \omega_\phi^{fp} = \omega_f. \quad (5.3)$$

onde $n = 3(\omega_f + 1)$ depende da equação de estado do fluido de fundo. O primeiro ponto fixo corresponde a um regime do tipo *scaling*, enquanto o segundo a um do tipo *tracker*.

O regime do tipo *tracker* não apresenta soluções observacionalmente viáveis, pois como vimos, ele não é capaz de acelerar o universo atual. Além disso, no caso do ponto fixo

do tipo *scaling*, o regime atrator não pode ter sido atingido, pois como vimos, $\Omega_{\phi_0} \approx 0,7$. Assim, como os pontos fixos discordam das observações, a quintessência com potencial exponencial deixou de ser pensado com uma possível alternativa à energia escura.

Entretanto, há a possibilidade do campo ainda não ter atingido o regime tracker na época atual. Em especial, uma possibilidade interessante é a que o campo esteja atualmente numa transição de uma fase dominada pela matéria para uma época dominada pelo regime *scaling* (ou seja, com $\lambda < \sqrt{3}$) da quintessência exponencial, como fizemos em [França e Rosenfeld (2002)]. *Outros regimes não podem explicar as observações quando usa-se o potencial exponencial.*

Note que certamente esse modelo não resolve o problema da coincidência cósmica, pois a constante V_0 do potencial é escolhida de modo que $V(\phi_0) \approx \rho_{c0}$. Entretanto, o mesmo procedimento é utilizado nos demais modelos de quintessência (veja, por exemplo, [Steinhardt *et al.* (1999)]). Nosso objetivo era verificar o ajuste fino necessário para que este potencial, no regime *scaling*, explicasse as observações. Como veremos, os resultados mostram que potencial exponencial tem um espaço de parâmetros permitido satisfatório, o que faz com ele não possa ser considerado menos natural que os demais modelos de quintessência.

5.1 Novas variáveis

Para resolver numericamente o sistema de equações acima, fizemos algumas mudanças de variáveis, seguindo de perto as mudanças feitas por Cline [Cline (2001)]. Ao invés de integramos as equações no tempo, é mais conveniente utilizarmos o *redshift*,

$$\frac{1}{a(t)} = 1 + z ,$$

onde fizemos $a_0 = 1$. Definimos então uma nova variável que é função de z ,

$$u := \ln(1 + z) = -\ln(a) . \quad (5.4)$$

Podemos também fazer uma mudança de escala em alguns parâmetros, deixando-os adimensionais,

$$\hat{\phi} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}m_P} \phi \quad , \quad \hat{\rho}_i \equiv \frac{1}{3m_P^2(H_0^m)^2} \rho_i , \quad (5.5)$$

$$\hat{V} \equiv \frac{1}{3m_P^2(H_0^m)^2} V \quad , \quad \hat{H} \equiv \frac{H}{H_0^m} , \quad (5.6)$$

Utilizaremos para os cálculos numéricos $H_0^m = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ($h = 0,7$) como o valor atualmente medido do parâmetro de Hubble, de modo que

$$3m_P^2(H_0^m)^2 := \rho_{c0}^m = 0.921 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} . \quad (5.7)$$

As variáveis adimensionais $\hat{\rho}_i$ e \hat{V} são dadas em termos da densidade crítica, de modo que para os cálculos utilizamos os valores

$$\hat{\rho}_{M0} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{c0}^m} = 0,3 \quad \text{e} \quad \hat{\rho}_{R0} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{c0}^m} = 4,2 \times 10^{-5} h^{-2} = 8,6 \times 10^{-5} . \quad (5.8)$$

A variável \hat{H} é determinada pela solução numérica de H dividida por H_0^m , que nada mais é do que uma constante. Dessa forma, não é necessário que $\hat{H}_0 = H_0/H_0^m = 1$.

O potencial nessas novas variáveis fica dado por

$$\hat{V}(\hat{\phi}) = \hat{V}_0 \exp\left(-\sqrt{3} \lambda \hat{\phi}\right), \quad (5.9)$$

Vamos agora obter $\hat{\phi}'$ e $\hat{\phi}''$, onde a vírgula a partir de agora denota derivação com relação a u . Temos que

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{d\phi}{da} = \dot{a} \frac{d\phi}{da}.$$

Além disso,

$$\frac{du}{da} = -\frac{d(\ln a)}{da} = -\frac{1}{a} \implies da = -adu. \quad (5.10)$$

Assim, podemos escrever

$$\dot{\phi} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{d\phi}{du} = -H\phi'. \quad (5.11)$$

Usando (5.5) e (5.6) na equação de Friedmann, temos que

$$\hat{H}^2 = \hat{\rho}_M + \hat{\rho}_R + \frac{1}{H_0^2} \frac{1}{2} \hat{\phi}^2 + \hat{V},$$

e de (5.11)

$$\hat{H}^2 = \hat{\rho}_M + \hat{\rho}_R + \frac{1}{2} \hat{H}^2 \hat{\phi}'^2 + \hat{V}, \quad (5.12)$$

ou seja

$$\hat{H}^2 = \frac{\hat{\rho}_M + \hat{\rho}_R + \hat{V}}{1 - \frac{1}{2} \hat{\phi}'^2}, \quad (5.13)$$

que é a equação de Friedmann em termos de u que utilizamos para os cálculos.

Usando (5.5) e (5.6) na equação de movimento do campo, teremos que

$$\hat{\phi} + 3H\hat{\phi} + (H_0^m)^2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0$$

Usando (5.10), note que

$$\hat{\phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\hat{\phi}}{dt} \right) = \dot{a} \frac{d}{da} \left(\dot{a} \frac{d\hat{\phi}}{da} \right) = \frac{\dot{a}}{a} \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{a}}{a} \frac{d\hat{\phi}}{du} \right) = H \left(\frac{dH}{du} \hat{\phi}' + H\hat{\phi}'' \right),$$

onde, usando novamente (5.10), temos

$$\frac{dH}{du} = \frac{d(\dot{a}/a)}{du} = -a \frac{d(\dot{a}/a)}{da} = -\frac{1}{a} \left(a \frac{d\dot{a}}{da} - \dot{a} \right) = -\frac{1}{a} \left(\frac{\ddot{a}}{H} - \dot{a} \right). \quad (5.14)$$

Com isso, a equação de movimento fica

$$H \left[\left(-\frac{1}{H} \frac{\ddot{a}}{a} + H \right) \hat{\phi}' + H\hat{\phi}'' \right] + 3H\hat{\phi} + (H_0^m)^2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0.$$

Usando (5.11), teremos

$$H^2 \hat{\phi}'' - \left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \right) \hat{\phi}' - 3H^2 \hat{\phi}' + H_0^2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0,$$

de modo que

$$\hat{H}^2 \hat{\phi}'' - \left(\frac{1}{(H_0^m)^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \hat{H}^2 \right) \hat{\phi}' - 3\hat{H}^2 \hat{\phi}' + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0. \quad (5.15)$$

Simplificando a expressão acima, teremos

$$\hat{H}^2 \hat{\phi}'' - \left(\frac{1}{(H_0^m)^2} \frac{\ddot{a}}{a} + 2\hat{H}^2 \right) \hat{\phi}' + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0. \quad (5.16)$$

Da subtração das equações de Friedmann, temos que

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3m_P^2} (\rho + 3p) \implies 2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3m_P^2} (\rho_R + 3p_R + \rho_M + 3p_M + \rho_\phi + 3p_\phi).$$

Usando as equações de estado da radiação e da matéria e usando a densidade de energia (3.7) e pressão (3.8) de um campo escalar, teremos que

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3m_P^2} \left(\rho_R + \rho_M + \rho_\phi + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 - 3V \right),$$

ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \frac{1}{3m_P^2} (2\rho_R + \rho_M + 2\dot{\phi}^2 - 2V) \implies \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(H_0^m)^2}{2} \left(2\hat{\rho}_R + \hat{\rho}_M + 2\frac{1}{3m_P^2(H_0^m)^2} \dot{\phi}^2 - 2\hat{V} \right). \quad (5.17)$$

Desse modo, usando (5.12) e (5.17) em (5.16), teremos

$$\hat{H}^2 \hat{\phi}'' - \left[-\frac{1}{2} \left(2\hat{\rho}_R + \hat{\rho}_M + 2\frac{1}{(H_0^m)^2} \dot{\phi}^2 - 2\hat{V} \right) + 2 \left(\hat{\rho}_M + \hat{\rho}_R + \frac{1}{(H_0^m)^2} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \hat{V} \right) \right] \hat{\phi}' + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0.$$

A equação acima fica então igual a

$$\hat{H}^2 \hat{\phi}'' - \left(\hat{\rho}_R + \frac{3}{2}\hat{\rho}_M + 3\hat{V} \right) \hat{\phi}' + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0, \quad (5.18)$$

que é a equação de movimento do campo que utilizamos para os cálculos. Essa equação corrige um erro em [Cline (2001)], no termo que multiplica $\hat{\phi}'$: Cline usa \hat{V} , ao invés de $3\hat{V}$, que é o correto.

Nessa notação, vemos que o parâmetro de densidade de energia da matéria e da radiação, usando (5.5) e (5.6) ficam da forma

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{\rho_i}{3m_P^2 H^2} = \frac{\hat{\rho}_i}{\hat{H}^2}. \quad (5.19)$$

Note que hoje temos $\Omega_i = \hat{\rho}_i$ somente se $\hat{H}_0 = 1$. Para o parâmetro de densidade da quintessência, temos que

$$\Omega_\phi = \frac{1}{3m_P^2 H^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) = \frac{1}{2} \frac{(H\dot{\phi}')^2}{H^2} + \frac{\hat{V}}{\hat{H}^2} = \frac{1}{2} \hat{\phi}'^2 + \frac{\hat{V}}{\hat{H}^2}. \quad (5.20)$$

Os três parâmetros de densidade satisfazem sempre

$$\Omega_R + \Omega_M + \Omega_\phi = 1, \quad (5.21)$$

pois o universo é plano. A equação de estado da quintessência pode ser escrita como

$$\omega_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V} = \frac{[(H\phi')^2 - 2V] 3m_P^2 (H_0^m)^2}{[(H\phi')^2 + 2V] 3m_P^2 (H_0^m)^2} = \frac{\hat{H}^2 \hat{\phi}'^2 - 2\hat{V}}{\hat{H}^2 \hat{\phi}'^2 + 2\hat{V}}. \quad (5.22)$$

As densidades de matéria, radiação e quintessência também podem ser escritas nessa nova notação, Temos que

$$\rho_M \propto a^{-3} \implies \rho_M = \rho_{M0} \left(\frac{1}{a}\right)^3.$$

Como $u = -\ln a$, temos que

$$\rho_M = \rho_{M0} e^{3u}. \quad (5.23)$$

Um raciocínio análogo para a radiação leva a

$$\rho_R = \rho_{R0} e^{4u}, \quad (5.24)$$

enquanto a densidade de energia da quintessência fica dada por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \hat{H}^2 \hat{\phi}'^2 + \hat{V}. \quad (5.25)$$

5.2 Resultados numéricos

Resolvemos numericamente o sistema de equações

$$\hat{H}^2 = \frac{\hat{\rho}_M + \hat{\rho}_R + \hat{V}}{1 - \frac{1}{2} \hat{\phi}'^2},$$

$$\hat{H}^2 \hat{\phi}'' - \left(\hat{\rho}_R + \frac{3}{2} \hat{\rho}_M + 3\hat{V} \right) \hat{\phi}' + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{\phi}} = 0,$$

com \hat{V} , $\hat{\rho}_M$ e $\hat{\rho}_R$ dados por (5.9), (5.23) e (5.24).

Além disso, precisamos dos parâmetros do potencial (\hat{V}_0 e λ), de condições iniciais e dos vínculos que as observações colocam nas grandezas físicas.

5.2.1 Parâmetros do potencial

Como já afirmamos anteriormente, *todos* os modelos de quintessência têm uma constante (\hat{V}_0 no nosso caso) que dá a escala de energia do potencial. Como a quintessência deve acelerar o universo hoje, a maior parte de sua energia deve vir do termo potencial. Além disso, como podemos ver na figura 5.1, o campo permanece praticamente constante desde o início do universo até atingir o ponto fixo, de modo que $\hat{\phi}_0$ é aproximadamente $\hat{\phi}_i$ (o valor inicial do campo). Com isso, e do fato observacional que $\rho_{\phi 0} \approx \rho_{c0}$, temos que

$$V_0 \exp\left(-\sqrt{3} \lambda \hat{\phi}_0\right) \approx V_0 \exp\left(-\sqrt{3} \lambda \hat{\phi}_i\right) \approx \rho_{c0}, \quad (5.26)$$

de onde podemos relacionar os valores de V_0 e $\hat{\phi}_i$. Neste sentido, o único parâmetro livre do modelo é λ , que tomaremos como $0 \leq \lambda < 3$, pois as soluções são do tipo scaling.

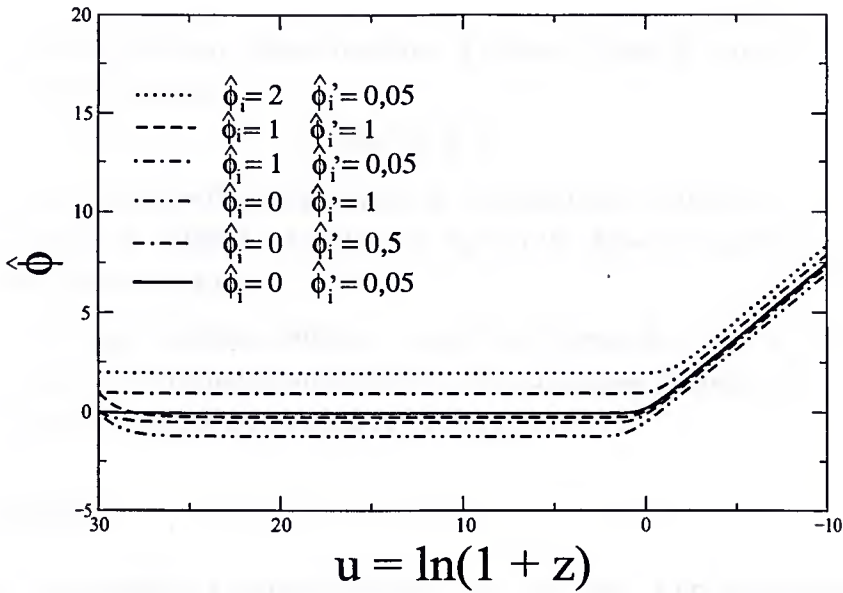


Figura 5.1: Valor do campo $\hat{\phi}$ como função de u . Para as condições iniciais mostradas, vemos que o campo apresenta as mesmas características. O campo fica quase constante até atingir o regime de ponto fixo, quando começa a rolar o potencial. As condições iniciais que usaremos no texto são mostradas pela linha cheia. Estas curvas foram feitas com $\hat{V}_0 = 1$ e $\lambda = 1.3$.

5.2.2 Condições iniciais

Precisamos ainda do valor inicial do campo $\hat{\phi}_i$ e de sua derivada $\hat{\phi}'_i$ para podermos resolver o sistema de equações. Tomamos nossas condições iniciais em $u = 30$, o que equivale a $z \approx 10^{13}$. Como vimos, no caso em que estamos interessados (*scaling* em que o ponto fixo ainda não foi alcançado), o campo tem hoje aproximadamente o mesmo valor que tinha inicialmente. Dessa forma, como vamos encontrar regiões no espaço de parâmetros (\hat{V}_0, λ) que satisfazem os vínculos observacionais, podemos sempre absorver o valor inicial do campo em \hat{V}_0 usando (5.26). Assim, sem perda de generalidade, usaremos $\hat{\phi}_i = 0$ para resolver as equações. Como veremos mais adiante, mudar o valor de $\hat{\phi}_i$ apenas corresponde a uma mudança de escala no espaço de parâmetros.

A outra condição inicial é $\hat{\phi}'_i$. Podemos ver da equação de Friedmann modificada que, do fato que o universo é plano, temos necessariamente que $|\hat{\phi}_i| < \sqrt{2}$. Além disso, temos que densidade de energia potencial é aproximadamente *constante* desde o início do universo. Como o valor da densidade de energia potencial é aproximadamente igual à densidade crítica hoje, vemos que V_0 é pelo menos 39 ordens de grandeza menor que a densidade crítica em $z = 10^{13}$, pois

$$\rho_c \propto H^{-2} \propto a^{-3},$$

durante a época da matéria e

$$\rho_c \propto H^{-2} \propto a^{-4},$$

durante a época da radiação. Dessa maneira, a energia inicial do campo estava na forma de energia cinética, ou seja,

$$\Omega_{\phi i} \approx \frac{1}{2} \hat{\phi}'_i{}^2 . \quad (5.27)$$

Condições iniciais naturais da equipartição de energia após a inflação sugerem que $\Omega_{\phi, i} \approx 10^{-3}$ [Steinhardt *et al.* (1999)], de modo que $\hat{\phi}'_i \approx 0,05$. Esse é o valor que iremos utilizar para a derivada inicial do campo.

Apesar das nossas condições iniciais “preferidas” serem $\hat{\phi}_i = 0$ e $\hat{\phi}'_i = 0,05$, vamos considerar o que acontece quando utilizamos outras condições iniciais. Conforme veremos, não há nenhuma razão para elas serem “preferidas”.

5.2.3 Vínculos

As soluções devem satisfazer alguns vínculos observacionais. O primeiro deles é dado pela nucleossíntese. Como vimos, a fração de elementos leves é uma das grandes previsões do modelo do Big Bang quente. Dessa forma, a quintessência não pode ter um papel importante na época da nucleossíntese. Cálculos detalhados [Bean *et al.* (2001)] mostram que

$$\Omega_{\phi}(1 \text{ MeV} \approx z = 10^{10}) \leq 0,045 . \quad (5.28)$$

Outro vínculo observacional é dado pelo valor atual do parâmetro de densidade da quintessência. Utilizamos para nossa análise limites conservadores para o parâmetro de densidade da energia escura,

$$\Omega_{\phi 0} = 0,7 \pm 0,1 . \quad (5.29)$$

Note que a incerteza em Ω_{M0} implica que há uma incerteza em \hat{V}_0 . Esta é a razão pela qual, pode-se estudar a região do espaço de parâmetros (\hat{V}_0, λ) apesar de \hat{V}_0 não ser um parâmetro livre.

O último vínculo observacional que consideramos foi o valor atual da equação de estado da quintessência* [Wang *et al.* (2000)]:

$$-1 \leq \omega_{\phi 0} \leq -0,6 . \quad (5.30)$$

O fato que o universo está acelerando hoje não implica que ele acelerará para sempre como veremos na figura 5.3 (ver também [Kolda e Lahnaman (2001)]). O valor atual da equação de estado da quintessência é temporário, uma vez que o regime de ponto fixo ainda não foi atingido.

*Embora os vínculos atuais para a equação de estado indiquem que $\omega_{\phi 0} < -0,8$ (ver apêndice C), utilizamos os limites de [Wang *et al.* (2000)] porque eram os melhores na época em que o trabalho foi feito.

5.3 Resultados e discussão

Nós resolvemos o sistema de equações diferenciais com o potencial exponencial, exigindo que a solução satisfizesse os vínculos que discutimos. Os resultados para as condições iniciais “preferidas” podem ser vistos na figura 5.2. A região do espaço de parâmetros que satisfazem os vínculos observacionais é grande, variando em λ de $\lambda = 0$ a $\lambda \approx 1,7$ e em \hat{V}_0 de $\hat{V}_0 \approx 0,5$ a $\hat{V}_0 \approx 3,0$. Em outras palavras, *todos* os valores de λ que produzem o tipo de solução que estamos interessados são capazes de explicar as observações atuais.

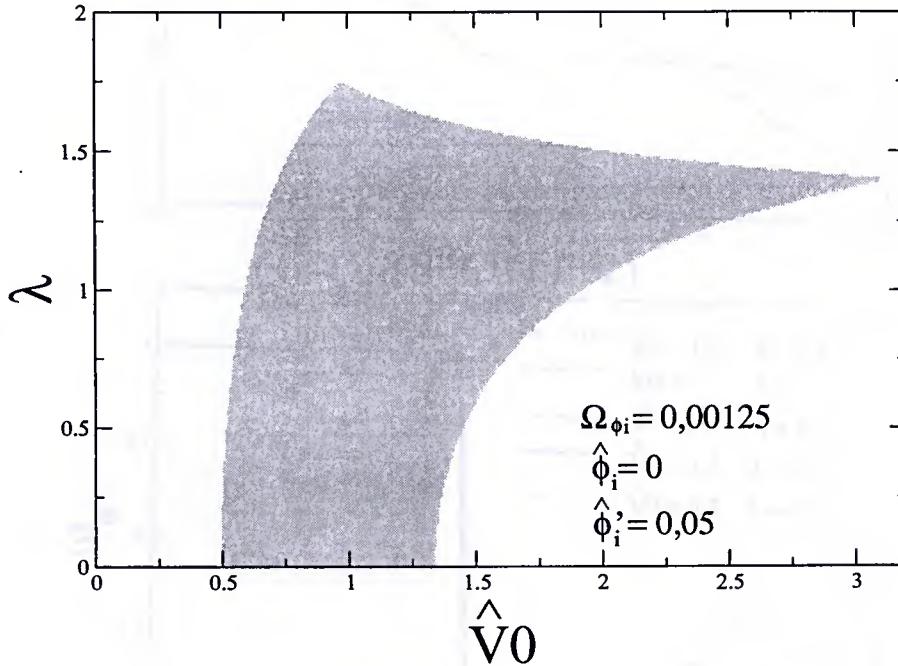


Figura 5.2: Região do espaço de parâmetros que satisfaz todos os vínculos observacionais discutidos na subseção 5.2.3. Há uma grande região do espaço de parâmetros do potencial exponencial que explica todas as observações. *Todos* os valores de λ que produzem as soluções do tipo *tracker* satisfazem os vínculos.

Nas figuras 5.3 e 5.4 vemos como as densidades de energia, a equação de estado da quintessência e os parâmetros de densidade, respectivamente, variam com u . Inicialmente, a quintessência contribui com uma pequena parte da energia do universo, caindo[†] com a^{-6} , dominada pelo termo cinético, mais rápido que matéria e radiação. Quando o termo do potencial torna-se importante, há uma brusca mudança na equação de estado da quintessência, que vai de $\omega_\phi = 1$ para $\omega_\phi = -1$, o que faz com que a densidade da quintessência fique constante. Quando a quintessência atinge o ponto fixo (caracterizado pela rápida mudança em Ω_ϕ), o campo começa a rolar, de modo que o termo da energia cinética novamente ganha importância, e a densidade da quintessência novamente começa a cair, com

[†]Estritamente falando, não podemos utilizar o resultado da equação (2.19) para a quintessência, uma vez que para obtê-lo partimos de uma equação de estado constante. Entretanto, esta equação é uma boa aproximação nas regiões em que $\omega_\phi \approx$ constante (ver figura 5.3).

$$a^{-3(1+\omega_\phi^{fp})} = a^{-\lambda^2}.$$

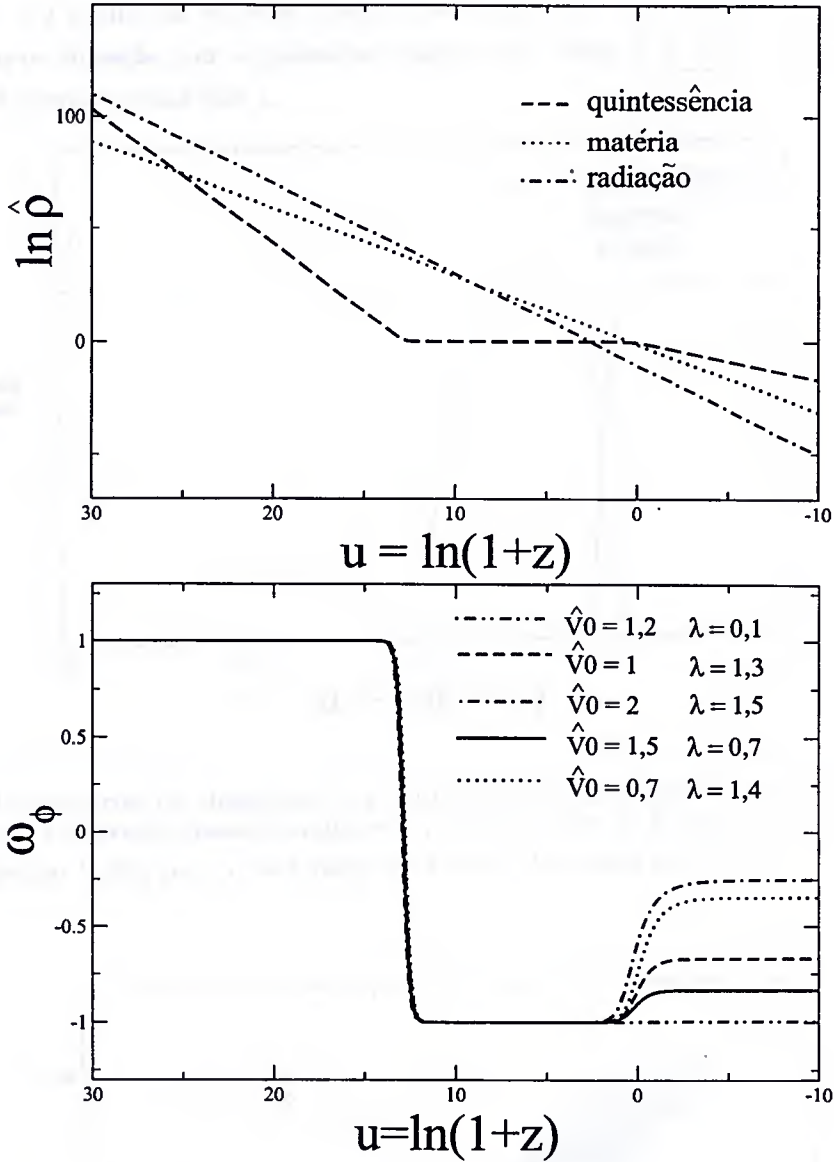


Figura 5.3: *Figura superior:* Densidade de energia como função de u para quintessência, matéria e radiação em uma solução típica. Inicialmente a densidade de energia da quintessência decresce muito mais rápido que matéria e radiação. Quando o termo do potencial torna-se importante, $\hat{\rho}_\phi$ é congelado, pois o potencial é aproximadamente constante até que o sistema entre no regime de ponto fixo. Quando isso acontece, o campo muda novamente seu comportamento e cai com $a^{-\lambda^2}$, mais lentamente que a matéria. *Figura inferior:* Equação de estado da quintessência como função de u para vários parâmetros. Inicialmente, todas as curvas têm o mesmo comportamento. Quando a quintessência atinge o ponto fixo, cada solução é congelada em um valor, dependendo de λ . Para um valor de λ baixo, a quintessência comporta-se como a constante cosmológica. Para $\lambda > \sqrt{2}$, o universo não acelera no regime de ponto fixo.

Note que inicialmente a equação de estado da quintessência comporta-se da mesma forma para todos os parâmetros. Depois que o sistema atinge o regime de ponto fixo, cada valor de λ leva a um valor diferente de ω_ϕ , de acordo com a equação (5.2). Pequenos

valores de λ fazem com que a quintessência comporte-se como a constante cosmológica. Valores de $\lambda > \sqrt{2}$ param de acelerar o universo no regime de ponto fixo. A situação é análoga ao caso da inflação com o potencial exponencial: para $\lambda > \sqrt{2}$, o parâmetro ϵ de rolagem lenta é sempre maior que 1.

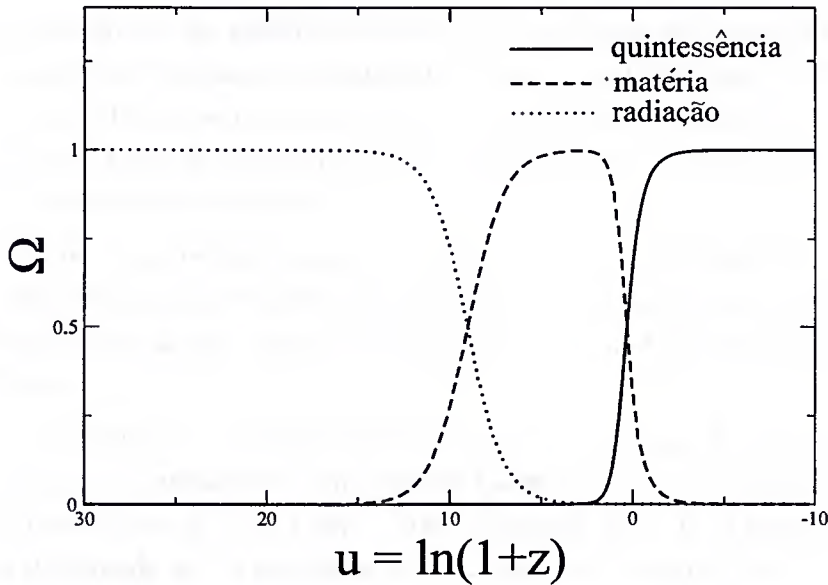


Figura 5.4: Parâmetros de densidade da quintessência, matéria e radiação para uma solução típica. O universo passa atualmente por uma fase de transição, em que Ω_ϕ vai de um valor muito baixo para o seu valor no regime de ponto fixo ($\Omega_\phi^{fp} = 1$). Note que $\Omega_{\phi 0} \approx 0,7$.

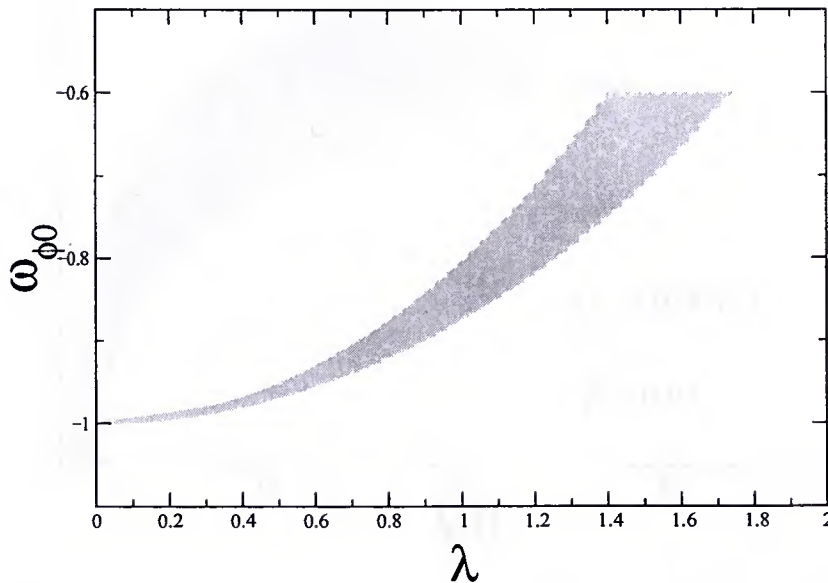


Figura 5.5: Região do espaço $(\lambda, \omega_{\phi 0})$ que gera soluções realistas. Este gráfico independe dos valores de \hat{V}_0 e $\hat{\phi}_i$, e muda apenas para valores altos de $\hat{\phi}'_i$ ($\hat{\phi}'_i \gtrsim 1.25$). Diferentes valores de λ dão o mesmo valor de $\omega_{\phi 0}$ porque o ponto fixo ainda não foi atingido.

A correlação entre o parâmetro livre λ e a equação de estado atual é mostrada na figura 5.5. Note que há uma degenerescência para $\lambda \gtrsim 0.6$, ou seja, diferentes valores de λ geram o mesmo $\omega_{\phi 0}$. Esta degenerescência deve-se ao fato que o valor atual da equação de estado é apenas temporário, uma vez que o regime de ponto fixo ainda não foi atingido.

Vínculos mais fortes no potencial exponencial poderiam ser colocados se melhores medidas de $\omega_{\phi 0}$ forem obtidas, especialmente se $\omega_{\phi 0} \lesssim -0.85$. Esta é a região em que a quintessência comporta-se como a constante cosmológica. A figura 5.5 permanece a mesma para quase todos os conjuntos de valores de \hat{V}_0 , $\hat{\phi}_i$ e $\hat{\phi}'_i$ que produzem a solução *tracker* em que estamos interessados.

Na verdade, para que esta figura não se altere, é suficiente que exista uma considerável região em λ no espaço de parâmetros (\hat{V}_0, λ) . Como veremos a seguir, a existência dessa região depende apenas de $\hat{\phi}'_i$. Apenas para valores de $\hat{\phi}'_i \gtrsim 1.25$ este gráfico se altera de forma significativa.

Um aspecto importante é a dependência destes resultados em $\hat{\phi}_i$. A figura 5.6 mostra a região do espaço de parâmetros que satisfaz todos os vínculos observacionais quando as condições iniciais são $\hat{\phi}_i = 1$ e $\hat{\phi}'_i = 0.05$. Quando $\hat{\phi}_i \neq 0$, a região do espaço de parâmetros é deformada em \hat{V}_0 pelo fator $e^{\sqrt{3}\lambda\hat{\phi}_i}$. Isso ocorre porque, como havíamos visto antes, nestes modelos \hat{V}_0 sempre pode ser entendido como $\hat{v}_0 = \hat{V}_0 e^{-\sqrt{3}\lambda\hat{\phi}_i}$, uma vez que $\hat{\phi}_0 \approx \hat{\phi}_i$. Neste sentido, escolher outro valor para $\hat{\phi}_i$ corresponde a apenas mudar a escala do problema.

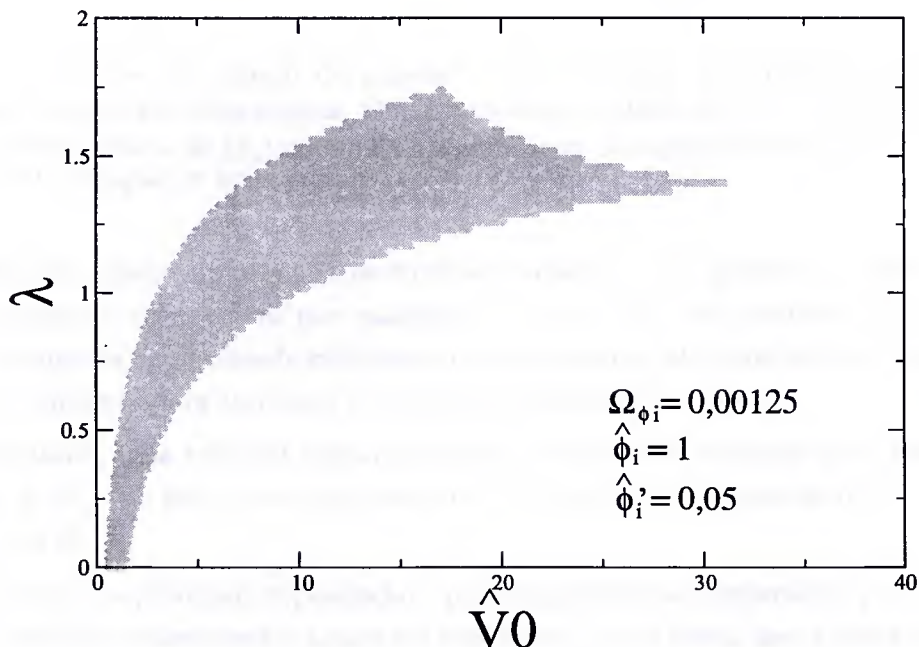


Figura 5.6: Região do espaço de parâmetros que satisfaz todos os vínculos observacionais quando usa-se como condições iniciais $\hat{\phi}_i = 1$ e $\hat{\phi}'_i = 0.05$. Note que o uso de $\hat{\phi}_i \neq 0$ apenas corresponde a uma mudança de escala no espaço de parâmetros permitidos de \hat{V}_0 por um fator $e^{\sqrt{3}\lambda\hat{\phi}_i}$.

Como vimos na equação (5.27), a condição inicial $\hat{\phi}'_i$ corresponde ao valor inicial do parâmetro de densidade da quintessência. Estudamos o que acontece quando escolhemos como valor inicial para a densidade de quintessência o valor indicado pela equipartição de energia após a inflação. Entretanto, é importante explorar o que acontece com a região permitida do espaço de parâmetros se usamos um valor diferente para $\hat{\phi}'_i$, lembrando que $0 \leq |\hat{\phi}'_i| < \sqrt{2}$. Os resultados estão na figura 5.7.

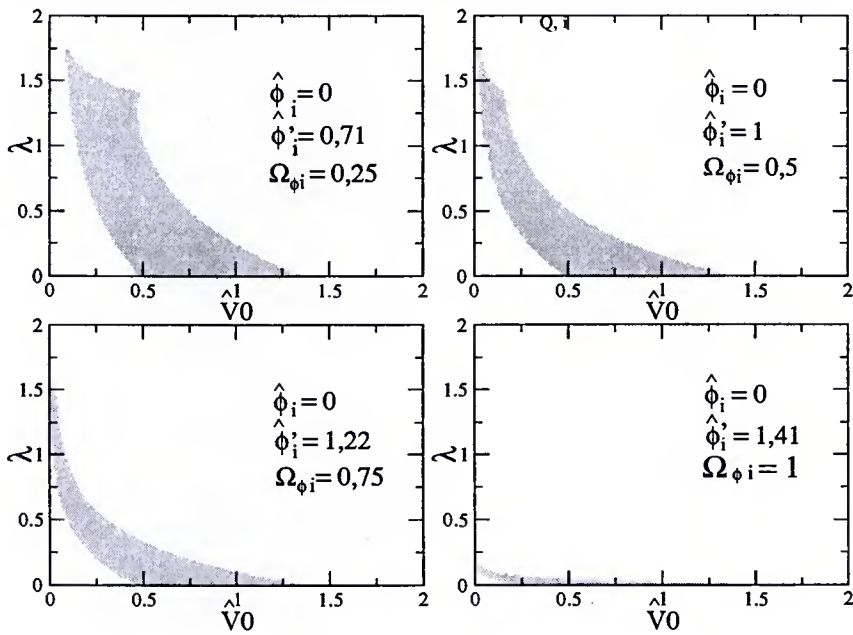


Figura 5.7: Regiões do espaço de parâmetros para vários $\hat{\phi}'_i$ diferentes daquele da equipartição de energia inflacionária. Como o universo é plano, $|\hat{\phi}'_i| < \sqrt{2}$. Para quase todos os possíveis valores de $|\hat{\phi}'_i|$ uma região significativa no espaço de parâmetros continua existindo. Ela desaparece apenas para $\Omega_{\phi_i} \gtrsim 0.75$.

A região do espaço de parâmetros torna-se menor em \hat{V}_0 quando $\hat{\phi}'_i$ é maior. Isto acontece porque o campo tem que satisfazer o vínculo da nucleossíntese: se o campo tem um parâmetro de densidade inicialmente muito grande, ele pode não ter tempo para diminuir o suficiente para satisfazer o vínculo da nucleossíntese.

Mesmo assim, uma razoável região do espaço de parâmetros existe para quase todos os valores de $\hat{\phi}'_i$. De fato, como podemos ver na figura, a região apenas deixa de existir para $\Omega_{\phi_i} \gtrsim 0.75$.

Dessa forma, o potencial exponencial, que era geralmente descartado, pode explicar *todos* os vínculos observacionais atuais no regime em que o ponto fixo *scaling* ainda não foi atingido.

Mostramos também que os parâmetros e as condições iniciais são tão naturais quanto em qualquer outro modelo de quintessência. Este modelo tem, no sentido discutido no texto, apenas um parâmetro livre, λ , e todos os valores que produzem soluções *scaling* são capazes de explicar os resultados observacionais. Além disso, para $\lambda > \sqrt{2}$ a aceleração

atual do universo pára, e o universo de novo entra numa fase desacelerada.

Também mostramos que o potencial exponencial não pode ser descartado por nenhum dos vínculos que usamos, mesmo que melhores medidas sejam feitas. Por estas razões, os modelos de quintessência exponencial não podem ser considerados menos naturais do que os demais modelos de quintessência.

Capítulo 6

Quintessência Exponencial Acoplada à Matéria Escura

Como vimos no capítulo anterior, o regime tipo *tracker* para a quintessência minimamente acoplada não resolve o problema da coincidência cósmica, uma vez que neste regime a equação de estado da quintessência imita a equação de estado da matéria escura fria, e portanto não consegue explicar o atual período de aceleração do universo.

De fato, nenhum dos atuais modelos de quintessência consegue explicar de modo natural a razão entre as densidades de quintessência e matéria, restando verificar qual o ajuste fino necessário para que um dado modelo consiga explicar as atuais observações, como fizemos em [França e Rosenfeld (2002)].

Uma possível solução para este problema surge quando supomos que a massa da partícula de matéria escura (que denotarei por χ daqui em diante) é uma função do campo de quintessência (ou alternativamente, quando colocamos um acoplamento entre a quintessência e a matéria escura), no cenário que ficou conhecido como *VAMP* (Variable Mass Particle)* [Anderson e Carrol (1997)]. Tal idéia é antiga[†], mas recentemente vem recebendo atenção devido a algumas propriedades interessantes que este sistema apresenta.

Em geral são estudados dois tipos de dependência da massa com o campo da quintessência ϕ : matéria escura cuja massa tem uma dependência linear, do tipo

$$M_\chi = \lambda \frac{\phi}{m_P}, \quad (6.1)$$

acoplada à quintessência com potencial de lei de potências (4.65), como estudado em [Anderson e Carrol (1997), Farrar e Peebles (2003), Hoffman (2003)], e a matéria escura cuja massa tem uma dependência exponencial

$$M_\chi = M_{\chi 0} e^{-\lambda(\phi - \phi_0)/m_P}, \quad (6.2)$$

acoplada à quintessência com o potencial exponencial dado pela equação (5.1) [Amendola (1999), Amendola (2000), Amendola e Tocchini-Valentini (2001), Pietroni (2003), Comelli *et al.* (2003)].

*Novamente utilizarei o termo em inglês.

[†]Ver uma discussão histórica no artigo de Farrar e Peebles [Farrar e Peebles (2003)].

Amendola [Amendola (1999), Amendola (2000)] analisou os pontos críticos do acoplamento exponencial, e mostrou que para a quintessência exponencial acoplada à matéria escura, existe uma solução do tipo *tracker* estável[†]. Além disso, em determinadas condições, a equação de estado do regime atrator é negativa. Sendo assim, tal modelo poderia ser então uma solução para a coincidência cósmica. No entanto, como mostramos em nosso trabalho [França e Rosenfeld (2004)] que será discutido neste capítulo, tais modelos exigem um grande ajuste fino, e portanto não resolvem o problema da coincidência cósmica.

6.1 O modelo de VAMP

Vamos adotar o modelo de VAMP com a massa dada por (6.2), onde λ é uma constante positiva e $M_{\chi 0}$ é o valor da massa da partícula de matéria escura fria hoje. A quintessência é modelada por um campo escalar com potencial

$$V(\phi) = V_0 e^{\beta\phi/m_P}, \quad (6.3)$$

onde V_0 é a escala de energia do potencial (aqui o índice 0 não denota valor atual) e β é uma constante positiva. Como veremos, será útil expressar V_0 em unidades de

$$\tilde{\rho}_c = 4,2 \times 10^{-11} \text{ eV}^4, \quad (6.4)$$

que é o valor da densidade crítica (2.15) para $h = 0,72$.

Neste modelo, o universo é composto por radiação, cujo parâmetro de densidade hoje é

$$\Omega_{R0} h^2 \approx 4,148 \times 10^{-5}, \quad (6.5)$$

matéria bariônica, com parâmetro de densidade

$$\Omega_{b0} h^2 \approx 0,02, \quad (6.6)$$

matéria escura fria com massa variável, que está aglomerada nos halos das galáxias, com

$$\Omega_{\chi 0} h^2 \approx 0,12, \quad (6.7)$$

e quintessência, que está homogeneamente distribuída pelo universo e cujo parâmetro de densidade é

$$\Omega_{\phi 0} = 1 - \Omega_{\chi 0} - \Omega_{b0} - \Omega_{R0}. \quad (6.8)$$

[†]Apesar de aparentemente não existirem soluções do tipo *tracker* para o acoplamento de lei de potências, é possível obter um regime em que a razão entre as densidades de matéria escura e quintessência fique constante por um longo tempo, até que finalmente a quintessência domine completamente [Hoffman (2003)]. Entretanto, como nos casos dos modelos de quintessência não acoplada, isso também deve exigir um ajuste fino grande. Além disso, Farrar e Peebles afirmam que tais modelos não podem ter atingido o regime atrator, pois isso acarretaria a existência de uma “quinta-força”, com um acoplamento que violaria os limites experimentais atuais, e trabalham num regime *fora do atrator*, como fizemos em [França e Rosenfeld (2002)].

Como o número de partículas de matéria escura é conservado, temos que a a densidade em número de partículas n_χ satisfaz

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = 0. \quad (6.9)$$

Como a densidade de energia é dada por $\rho_\chi = M_\chi n_\chi$, temos que

$$\dot{\rho}_\chi = \dot{M}_\chi n_\chi + M_\chi \dot{n}_\chi = -\frac{\lambda\dot{\phi}}{m_P}\rho_\chi - 3H\rho_\chi \Rightarrow \dot{\rho}_\chi + 3H\rho_\chi = -\frac{\lambda\dot{\phi}}{m_P}\rho_\chi, \quad (6.10)$$

Para que o tensor energia-momento total seja conservado, a equação de fluido para a quintessência fica

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1 + \omega_\phi)\rho_\phi = \frac{\lambda\dot{\phi}}{m_P}\rho_\chi, \quad (6.11)$$

onde a equação de estado ω_ϕ é dada por (3.9). Podemos reescrever as equações acima na forma

$$\dot{\rho}_\chi + 3H\rho_\chi(1 + \omega_\chi^{(e)}) = 0, \quad (6.12)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi(1 + \omega_\phi^{(e)}) = 0, \quad (6.13)$$

onde

$$\omega_\chi^{(e)} = \frac{\lambda\dot{\phi}}{3Hm_P} = \frac{\lambda\phi'}{3m_P}, \quad (6.14)$$

$$\omega_\phi^{(e)} = \omega_\phi - \frac{\lambda\dot{\phi}}{3Hm_P} \frac{\rho_\chi}{\rho_\phi} = \omega_\phi - \frac{\lambda\phi'}{3m_P} \frac{\rho_\chi}{\rho_\phi}, \quad (6.15)$$

são as equações de estado efetivas da matéria escura e da quintessência, respectivamente. As linhas denotam derivadas com relação a $u = -\ln(1+z) = \ln a$ [§]. Note que

$$dt = \frac{da}{\dot{a}} = \frac{du}{H} \Rightarrow \dot{\phi} = H\phi', \quad (6.16)$$

e

$$\ddot{\phi} = \dot{H}\phi' + H^2\phi'' = \left[-\frac{1}{3m_P^2} \left[\frac{\rho_b}{2} + \rho_R + \frac{\rho_\chi}{2}(1 + 3\omega_\chi^{(e)}) + \frac{\rho_\phi}{2}(1 + 3\omega_\phi^{(e)}) \right] - H^2 \right] \phi' + H^2\phi'', \quad (6.17)$$

onde usamos a equação (2.17) para escrever \dot{H} . Note, no entanto, que $\rho_\chi\omega_\chi^{(e)} + \rho_\phi\omega_\phi^{(e)} = \rho_\phi\omega_\phi = p_\phi$. Como $(\rho_\phi + 3p_\phi)/2 = \dot{\phi}^2 - V$, a equação acima fica

$$\ddot{\phi} = \left[-\frac{1}{3m_P^2} \left(\frac{\rho_b}{2} + \rho_R + \frac{\rho_\chi}{2} + \dot{\phi}^2 - V \right) - H^2 \right] \phi' + H^2\phi'', \quad (6.18)$$

A equação de movimento da quintessência pode ser obtida a partir da equação de fluido. Usando a densidade de energia do campo, temos que

$$\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi}, \quad (6.19)$$

e então

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi(1 + \omega_\phi) = \frac{\lambda\dot{\phi}}{m_P}\rho_\chi \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{\lambda}{m_P}\rho_\chi - \frac{\beta}{m_P}V. \quad (6.20)$$

[§]Note que a definição de u tem o sinal trocado em relação ao capítulo anterior.

Em termos de u , esta equação fica então

$$H^2 \phi'' + \left[-\frac{1}{3m_P^2} \left(\frac{\rho_b}{2} + \rho_R + \frac{\rho_\chi}{2} + \dot{\phi}^2 - V \right) \right] \phi' + 2H^2 \phi' = \frac{\lambda}{m_P} \rho_\chi - \frac{\beta}{m_P} V, \quad (6.21)$$

e como a equação de Friedmann é dada por

$$H^2 = \frac{1}{3m_P^2} \left[\rho_b + \rho_R + \rho_\chi + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right], \quad (6.22)$$

temos que a equação de movimento do campo em termos de u fica

$$H^2 \phi'' + \frac{1}{3m_P^2} \left[\frac{3}{2} \rho_b + \rho_R + \frac{3}{2} \rho_\chi + 3V \right] \phi' = \frac{\lambda}{m_P} \rho_\chi - \frac{\beta}{m_P} V. \quad (6.23)$$

A equação para o parâmetro de Hubble pode então ser escrita na forma

$$H^2 = \frac{1}{3m_P^2} \left[\rho_b + \rho_R + \rho_\chi + \frac{1}{2} H^2 \phi'^2 + V \right] \Rightarrow H^2 = \frac{\frac{1}{3m_P^2} [\rho_b + \rho_R + \rho_\chi + V]}{1 - \frac{1}{6m_P^2} \phi'^2}. \quad (6.24)$$

Note que em termos de u , as densidades ficam da forma

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} = \rho_0 e^{-3u(1+\omega)}. \quad (6.25)$$

6.2 Pontos fixos

A equação de movimento de um campo escalar é dada pela equação (3.13), que pode ser comparada com a equação (6.20). Note que podemos obter a mesma equação de movimento (6.20) admitindo que temos um potencial efetivo dado por

$$V_{ef}(\phi) = V(\phi) + \rho_\chi(\phi). \quad (6.26)$$

A equivalência das duas abordagens é estudada em [Hoffman (2003)]. Podemos então procurar soluções para o valor de equilíbrio do campo, dado por

$$\frac{dV_{ef}(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow \lambda \rho_\chi = \beta V \Rightarrow \lambda \rho_{\chi 0} e^{\lambda \phi_0 / m_P} e^{3u - \lambda \phi / m_P} = \beta V_0 e^{\beta \phi / m_P}, \quad (6.27)$$

de modo que o valor de equilíbrio é dado por

$$\frac{\phi}{m_P} = -\frac{3}{\lambda + \beta} u + \frac{1}{\lambda + \beta} \ln \left(\frac{\beta V_0}{\lambda \rho_{\chi 0} e^{\lambda \phi_0 / m_P}} \right). \quad (6.28)$$

Como atualmente a energia do universo está praticamente toda distribuída entre a matéria escura e a quintessência, podemos estudar o que acontece no caso em que o valor de equilíbrio já tenha sido atingido. A equação de movimento do campo fica neste limite

$$\frac{1}{m_P^2} \left[\frac{1}{2} \rho_\chi + V \right] \left(-\frac{3m_P}{\lambda + \beta} \right) = \frac{\lambda}{m_P} \rho_\chi - \frac{\beta}{m_P} V. \quad (6.29)$$

Podemos então dividir a equação pela densidade crítica $\rho_c = 3m_P^2 H^2$ e usar a equivalência

$$\frac{V}{\rho_c} = \frac{\rho_\phi}{\rho_c} - \frac{1}{2} \frac{\phi'}{\rho_c} = \Omega_\phi - \frac{1}{2} \frac{3}{(\lambda + \beta)^2}, \quad (6.30)$$

obtendo então

$$-\frac{3}{\lambda + \beta} \left[\frac{1 - \Omega_\phi}{2} + \Omega_\phi - \frac{1}{2} \frac{3}{(\lambda + \beta)^2} \right] = \lambda(1 - \Omega_\phi) - \beta \left[\Omega_\phi - \frac{1}{2} \frac{3}{(\lambda + \beta)^2} \right]. \quad (6.31)$$

Como o universo é plano, temos que $\Omega_\chi = 1 - \Omega_\phi$. Isolando os termos com Ω_ϕ na equação acima temos que

$$(\lambda + \beta)^2 \Omega_\phi \left[\lambda + \beta - \frac{3}{2(\lambda + \beta)} \right] = [3 + \lambda(\lambda + \beta)] \left[\lambda + \beta - \frac{3}{2(\lambda + \beta)} \right], \quad (6.32)$$

que nos dá finalmente

$$\Omega_\phi = \frac{3 + \lambda(\lambda + \beta)}{(\lambda + \beta)^2}. \quad (6.33)$$

Esta solução é portanto do tipo *tracker*, em que o parâmetro de densidade da quintessência “congela” em um valor diferente de $\Omega_\phi = 1$. Uma análise de estabilidade semelhante às anteriores mostra que este atrator é estável para $\beta > -\lambda/2 + (\sqrt{\lambda^2 + 12})/2$ [Amendola (1999), Pietroni (2003), Comelli *et al.* (2003)].

Uma solução deste tipo implica que as equações de estado efetivas da quintessência e da matéria escura fria são iguais no regime atrator, pois suas densidades devem cair da mesma forma. De fato, temos que para a solução (6.28) que

$$\omega_\chi^{(e)} = \omega_\phi^{(e)} = \frac{\lambda\phi'}{3m_P} = -\frac{\lambda}{\lambda + \beta}. \quad (6.34)$$

Um regime como o descrito acima pode, em princípio, ser uma solução para a coincidência cósmica. Trata-se de um regime atrator do tipo *tracker*, como no caso do potencial exponencial discutido anteriormente, porém com a equação de estado efetiva da quintessência *negativa* no regime atrator. Dessa forma, nesta idéia aproveitam-se as características boas do potencial exponencial e contorna-se o problema da quintessência não poder explicar a aceleração do universo, uma vez que *o fluido de fundo também tem equação de estado negativa*.

A figura 6.1 mostra os parâmetros de densidade para os componentes do universo e as equações de estado efetivas para a energia e matéria escuras para uma típica solução. Note que a transição para o regime *tracker* está ocorrendo na época atual.

Suponha ainda que seja possível derivar um limite observacional superior à equação de estado da quintessência $\omega_\phi^{(e)} \leq \omega_{obs}$ a partir das observações de supernovas, por exemplo. Da equação (6.34) temos um vínculo para o espaço de parâmetros (λ, β) , dado por

$$\beta \leq \frac{1 - |\omega_{obs}|}{|\omega_{obs}|} \lambda, \quad (6.35)$$

que é válido no caso em que o campo atingiu a solução atratora. Considerando ω_{obs} como um limite inferior, teríamos

$$\beta \geq \frac{1 - |\omega_{obs}|}{|\omega_{obs}|} \lambda. \quad (6.36)$$

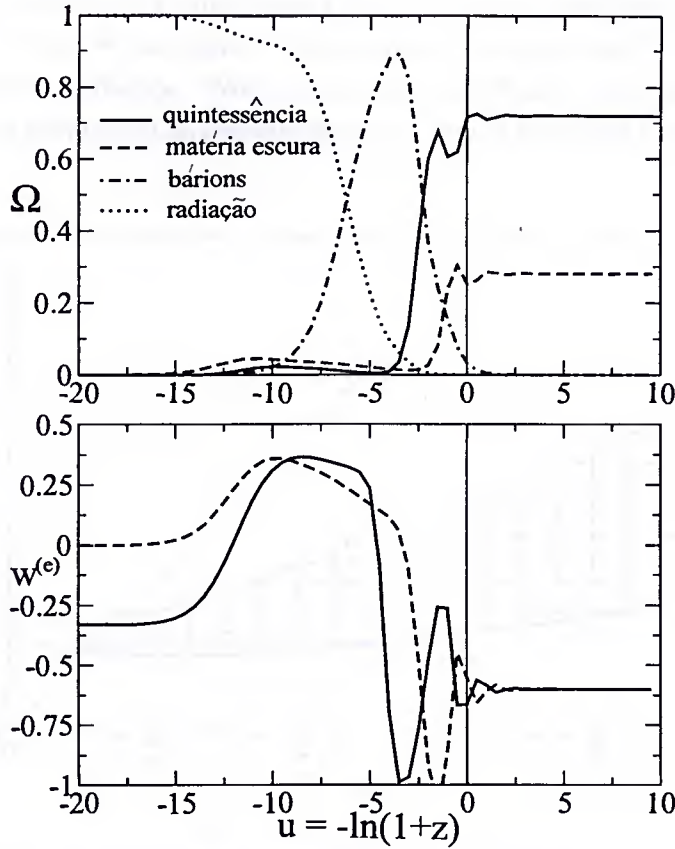


Figura 6.1: *Figura superior:* Parâmetros de densidade dos componentes do universo como função de $u = -\ln(1+z)$ para $\lambda = 3$, $\beta = 2$ e $V_0 = 0.1\tilde{\rho}_c$. Após um período transitente de dominação de matéria bariônica (linha pontilhada-tracejada), a quintessência domina a energia do universo e a razão entre as densidades de energia da matéria escura (linha pontilhada) e da quintessência (linha cheia) permanece constante. *Figura inferior:* Equações de estado efetivas para quintessência (linha cheia) e matéria escura (linha tracejada) para os mesmos parâmetros utilizados na figura superior. No regime *tracker* ambas são negativas.

Na solução atratora o parâmetro de densidade $\Omega_{\phi 0}$ também impõe vínculos no espaço de parâmetros, uma vez que da equação (6.33) segue

$$\beta \geq \frac{(1 - 2 \Omega_{obs}^{(Q)})}{2 \Omega_{obs}^{(Q)}} \lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 [(2 \Omega_{obs}^{(Q)} - 1)^2 - 4(\Omega_{obs}^{(Q)} - 1)] + 12}}{2 \Omega_{obs}^{(Q)}}, \tag{6.37}$$

onde $\Omega_{obs}^{(Q)}$ é o limite superior para o valor atual do parâmetro de densidade da quintessência. Para o caso em que $\Omega_{obs}^{(Q)}$ é o limite inferior, apenas o sinal \geq é mudado para \leq .

Amendola [Amendola (2003)] estudou em detalhe os vínculos observacionais impostos nesse cenário pela equação de estado da quintessência, obtida a partir da distância de

luminosidade consistente com a supernovas a altos *redshifts*, e pelo parâmetro de densidade quando o regime atrator foi atingido. Seus resultados indicam que $-0,8 \leq \omega_{\phi_0}^{(e)} \leq -0,4$ com 95% de nível de confiança. Nós usamos este resultado e os limites conservadores $0,6 \leq \Omega_{\phi_0} \leq 0,8$ no parâmetro de densidade para mostrar na figura 6.2 a região permitida no plano (λ, β) .

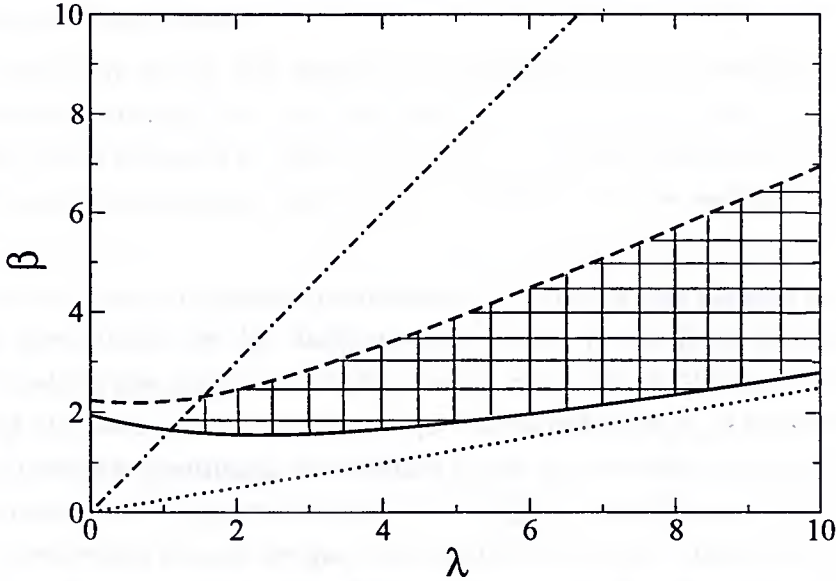


Figura 6.2: Vínculos no espaço de parâmetros (λ, β) dados pela equação de estado e parâmetro de densidade da quintessência. O limite superior (inferior) $\omega_{obs} = -0,4$ ($-0,8$) na equação de estado faz com que a região abaixo (acima) da curva pontilhada-tracejada (pontilhada) seja permitida. Por outro lado, o limite superior (inferior) na densidade de energia da quintessência $\Omega_{obs}^{(Q)} = 0,8$ ($0,6$), requer que os parâmetros estejam acima (abaixo) da linha cheia (tracejada).

Combinando (6.33) e (6.34), temos que na solução atratora

$$\Omega_{\phi} - |\omega_{\phi}^{(e)}| = \frac{3}{(\lambda + \beta)^2}, \tag{6.38}$$

o que implica que para que tenhamos alguma região permitida no espaço de parâmetros que satisfaça a equação de estado e o parâmetro de densidade da quintessência, é preciso que

$$\Omega_{\phi} > |\omega_{\phi}^{(e)}|. \tag{6.39}$$

Portanto, uma vez que o limite superior no parâmetro de densidade (linha cheia) vincula o espaço de parâmetros mais que o limite inferior na equação de estado (linha pontilhada), não utilizamos este último vínculo nas análises em que o parâmetro de densidade está incluído.

6.3 Ajuste fino

Uma das principais motivações para o estudo da quintessência acoplada é o fato que, em princípio, ela poderia solucionar (ou pelo menos amenizar) o problema da coincidência. Dessa forma, é necessário verificar o ajuste fino que tal modelo requer para explicar os parâmetros cosmológicos atuais.

Para quantificar o ajuste fino, resolvemos numericamente as equações acopladas para o campo escalar, variando V_0 , λ e β na região $\lambda = [0,01;20]$, $\beta = [0,01;20]$ e $V_0 = [0,01\tilde{\rho}_c; 1,5\tilde{\rho}_c]$, com passos $\Delta\lambda = \Delta\beta = 0,25$ e $\Delta V_0 = 0,05\tilde{\rho}_c$, gerando cerca de $1,9 \times 10^5$ modelos, dos quais selecionamos aqueles que concordavam com os parâmetros cosmológicos observados.

A figura 6.3 mostra o número normalizado de modelos que satisfaz os vínculos observacionais como função de V_0 , dado em unidades de $\tilde{\rho}_c$. A linha tracejada mostra o número de modelos que satisfaz os limites para a constante de Hubble, $h = 0,72 \pm 0,08$ [Freedman *et al.* (2001)]. Note que V_0 tem que ser da ordem de $\tilde{\rho}_c$, a densidade crítica atual. A linha tracejada-pontilhada foi obtida a partir dos vínculos na constante de Hubble e na equação de estado da quintessência, $-0,8 \leq \omega_{\phi 0}^{(e)} \leq -0,4$ [Amendola (2003)]. A linha pontilhada corresponde ao caso em que a constante de Hubble e o parâmetro de densidade, $0,6 \leq \Omega_{\phi 0} \leq 0,8$, são analisados, e a linha cheia quando os três vínculos são considerados. Note que a região permitida na constante do potencial, $V_0 = [0,25\tilde{\rho}_c; 0,45\tilde{\rho}_c]$, 68% de nível de confiança ($V_0 = [0,15\tilde{\rho}_c; 0,55\tilde{\rho}_c]$, 95% de nível de confiança), é essencialmente determinada pelos vínculos em h e $\Omega_{\phi 0}$, que são bastante conservadores e robustos.

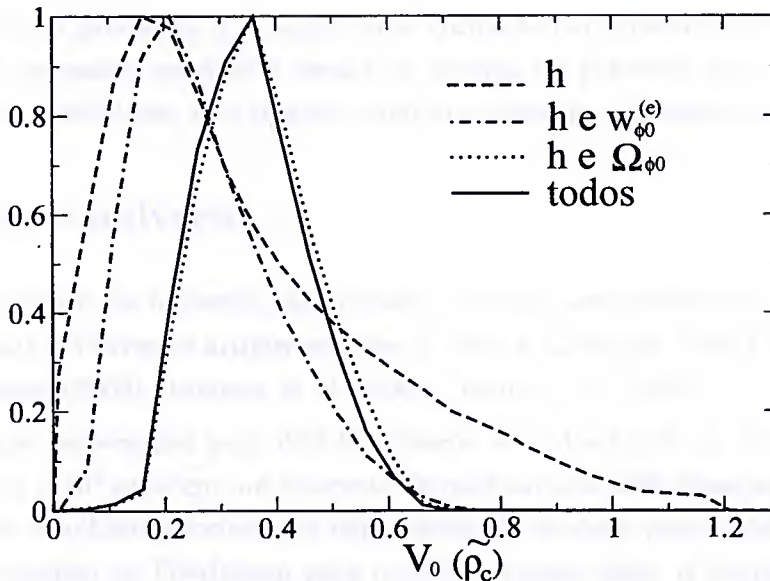


Figura 6.3: Número normalizado de modelos que satisfazem os vínculos observacionais discutidos no texto.

Mas o que exatamente este ajuste fino em V_0 significa? V_0 é o parâmetro mais im-

portante na determinação da época em que o campo atinge o regime atrator (figura 6.4). Como pode ser visto na figura 6.1, para os valores permitidos de V_0 , o universo está entrando no regime atrator por volta da época atual, o que implica que os valores da equação de estado e do parâmetro de densidade continuam variando atualmente, embora seus valores sejam já muito próximos aos valores de ponto fixo.

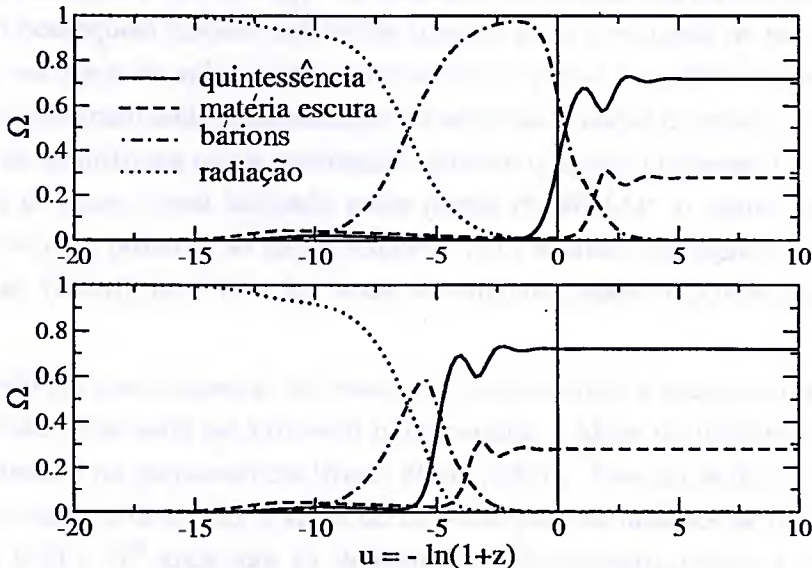


Figura 6.4: Parâmetros de densidade dos componentes do universo como função de $u = \ln(1+z)$ para $\lambda = 3$, $\beta = 2$. Na figura superior, temos que $V_0 = 10^{-4} \tilde{\rho}_c$, e na inferior, $V_0 = 10^3 \tilde{\rho}_c$.

Neste sentido, o problema da coincidência cósmica não é resolvido nestes modelos, uma vez que é necessário escolher a escala de energia do potencial para obter soluções cosmologicamente realísticas, exatamente como nos casos de quintessência não acoplada.

6.4 Idade do universo

A utilização da idade do universo para colocar vínculos nos modelos de energia escura tem sido discutida em diversos artigos recentes [Krauss e Chaboyer (2001), Krauss (2002), Krauss e Chaboyer (2003), Jimenez *et al.* (2003), Kunz *et al.* (2003)].

A colaboração responsável pelo WMAP colocou vínculos fortes na idade do universo $t_0 = (13,7 \pm 0,2) \times 10^9$ anos em um intervalo de confiança de 68% [Spergel *et al.* (2003)]. Entretanto, este resultado é fortemente dependente de modelo, pois é obtido a partir da integração da equação de Friedmann para o melhor ajuste deles, o modelo Λ CDM com índice espectral variável.

Observações independentes de modelo são obtidas, por exemplo, a partir da idade dos mais antigos aglomerados globulares. O limite inferior para a idade desses objetos (e conseqüentemente para a idade do universo) é $t_0 = 10,4 \times 10^9$ anos em um intervalo de

95% de confiança. [Krauss e Chaboyer (2003)].

Usando o limite acima e a posição do primeiro pico no espectro de potências da radiação cósmica de fundo medida pelo WMAP é possível colocar um limite superior na equação de estado (suposta constante) da energia escura, $\omega_\phi < -0,67$ com 90% de nível de confiança [Jimenez *et al.* (2003)]. Entretanto, os limites superiores para a idade do universo não conseguem colocar um limite inferior para a equação de estado da energia escura, uma vez que para valores altos da idade do universo ($t_0 \gtrsim 18 \times 10^9$ anos) o modelo cosmológico é essencialmente independente do valor da equação de estado [Krauss (2002)]. No entanto, se admitirmos que a reionização ocorreu quando o universo tinha bem menos que 1 bilhão de anos, como indicado pelos dados do WMAP, o limite superior para a idade do universo é próximo ao limite superior para a idade dos aglomerados globulares [Jimenez *et al.* (2003)], $t_0 \approx 16 \times 10^9$ anos, e podemos colocar vínculos nos modelos cosmológicos.

Um método em que a equação de estado da quintessência é parametrizada de modo a permitir que ela varie pode ser utilizado para calcular a idade do universo independentemente do potencial da quintessência [Kunz *et al.* (2003)]. Usando os dados de supernovas e da radiação cósmica de fundo, a idade do universo para os modelos de quintessência fica $t_0 = (13,8 \pm 0,3) \times 10^9$ anos com 1σ de confiança. Entretanto, mesmo este método não pode ser aplicado para parametrizar os modelos de VAMPs, pois nestes casos a equação de estado da matéria escura fria também é variável. Com isso, os limites para a idade do universo obtidos das análises de radiação de fundo não podem ser usados para colocar vínculos nos modelos discutidos neste capítulo.

Dessa forma, adotamos $(10,7 < t_0 < 16,3) \times 10^9$ anos em um intervalo de 95% de confiança [Krauss e Chaboyer (2003)], para estudar os vínculos que a idade do universo impõe neste cenário. Note que adicionamos à idade dos aglomerados 0,3 bilhões de anos, uma vez que os dados do WMAP indicam uma reionização precoce do universo [Spergel *et al.* (2003), Jimenez *et al.* (2003)].

A idade do universo no cenário de VAMPs é dada por

$$\begin{aligned}
 t_0 = & H_0^{-1} \int_0^{z_i} \left\{ \Omega_{\phi 0} \exp \left[3 \int_{-u_i}^0 \left[1 + \omega_\phi^{(e)}(u) \right] du \right] + \Omega_{b0}(1+z)^3 \right. \\
 & \left. + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{\chi 0} \exp \left[3 \int_{-u_i}^0 \left[1 + \omega_\chi^{(e)}(u) \right] du \right] \right\}^{-1/2} \frac{dz}{(1+z)},
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

onde u_i é o valor inicial de u ($u_i = -30$ para nossos cálculos) e z_i é o *redshift* correspondente.

Para explorar a região do espaço de parâmetros que é capaz de satisfazer os vínculos de idade nós utilizamos o mesmo procedimento da seção anterior, variando λ e β na região $[0, 01; 20]$, com passo de $\Delta\lambda = \Delta\beta = 0,05$ e um valor fixo de V_0 , gerando cerca de $1,6 \times 10^5$ modelos, dos quais os que satisfaziam os vínculos na constante de Hubble e na idade do universo. Os resultados são mostrados na figura 6.5, para três diferentes valores de V_0 .

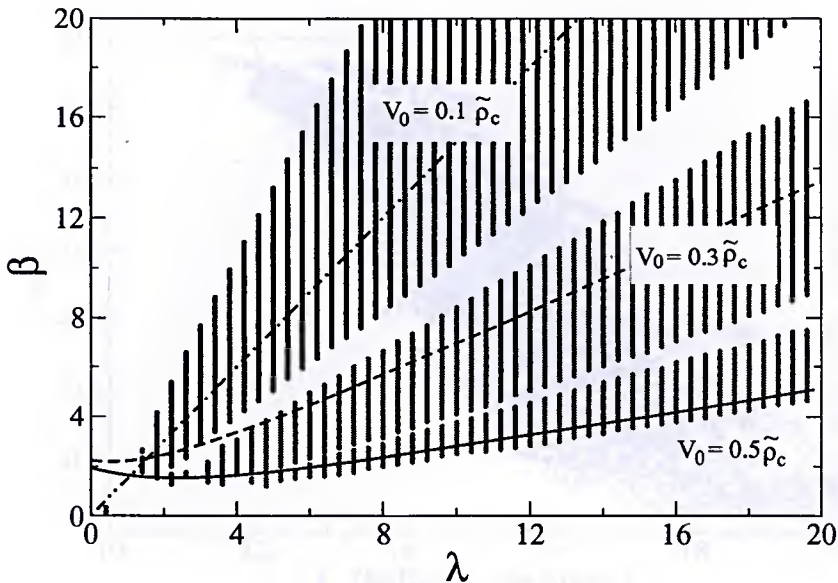


Figura 6.5: Vínculos no espaço de parâmetros (λ, β) impostos pela idade do universo para $V_0 = 0,1 \tilde{\rho}_c$, $V_0 = 0,3 \tilde{\rho}_c$ e $V_0 = 0,5 \tilde{\rho}_c$. As linhas correspondem aos limites da figura 6.2.

Os vínculos impostos pela idade do universo estão na mesma direção dos colocados pela densidade de energia e equação de estado da quintessência, indicando uma correlação entre eles, que pode ser vista explicitamente na figura 6.6. Note que tal correlação é exatamente oposta a que ocorre quando a equação de estado da quintessência desacoplada é constante [Jimenez *et al.* (2003)]: valores maiores de $\omega_{\phi 0}^{(e)}$ implicam menores valores para a idade atual do universo.

No caso constante, a relação entre t_0 e ω é direta: para equações de estado mais negativas a contribuição da densidade de energia torna-se importante mais tarde, uma vez que ρ varia com $a^{-3(1+\omega)}$. Conseqüentemente, o universo é dominado pela matéria por um tempo maior, de modo que sua idade é menor quando comparada a um universo em que a energia escura tem uma equação de estado maior.

Para o cenário de VAMPs, entretanto, a situação é mais complicada: modelos que satisfazem a idade do universo têm uma correlação positiva no espaço de parâmetros, e tem uma inclinação menor para valores maiores de V_0 (figura 6.5). Para valores mais altos de V_0 , o universo atinge o atrator mais cedo, e portanto, para um mesmo β , a idade do universo é maior, pois o universo está acelerando a mais tempo. Além disso, para o mesmo β , valores maiores de V_0 implicam valores maiores de λ para os modelos que satisfazem os vínculos de idade, e conseqüentemente, da equação (6.34), a equação de estado tende a -1 . Apesar dessa correlação, devido à grande degenerescência na região permitida, parece bastante difícil colocar vínculos em $\omega_{\phi 0}^{(e)}$ baseado em limites em t_0 e vice-versa.

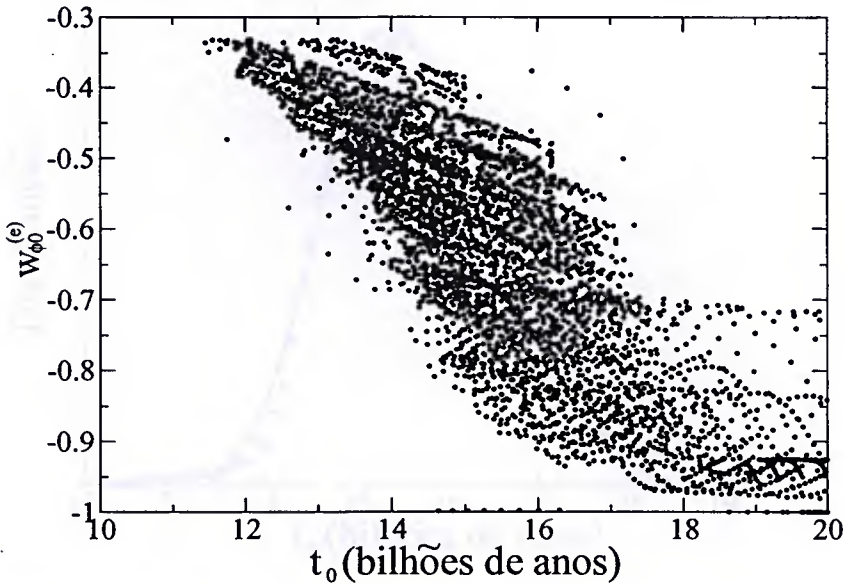


Figura 6.6: Idade do universo versus a equação de estado atual do universo para modelos que satisfazem o parâmetro de Hubble.

A figura 6.7 mostra a idade do universo para os modelos que satisfazem os vínculos na constante de Hubble e na densidade de quintessência. Aqui utilizamos passos $\Delta\lambda = \Delta\beta = 0,2$ e $\Delta V_0 = 0,05\tilde{\rho}_c$ para a região $\lambda = [0,01; 20]$, $\beta = [0,01, 20]$ e $V_0 = [0,1\tilde{\rho}_c; 0,8\tilde{\rho}_c]$.

O ajuste indica que a idade do universo nos modelos de VAMPs é

$$t_0 = \left(15,3_{-0,7}^{+1,3}\right) \times 10^9 \text{ anos} , \quad (6.41)$$

em um intervalo de 68 % de confiança, valor consideravelmente maior que o obtido para os modelos de quintessência não acoplada [Kunz *et al.* (2003), Spergel *et al.* (2003)]. Isto parece natural, uma vez que nestes modelos a matéria escura fria também tem uma equação de estado efetiva negativa e acelera o universo. Dessa forma, a partir dos resultados acima, vemos que as medidas de idade do universo podem em princípio ajudar a distinguir entre os modelos acoplados e não acoplados. É importante enfatizar que este resultado é bastante conservador, uma vez que ele está baseado nos limites bem estabelecidos da constante de Hubble e da densidade de energia da quintessência.

Podemos ver que limites inferiores para a idade do universo não colocam vínculos fortes nestes modelos. Os limites superiores, entretanto, são potencialmente interessantes. Apenas para exemplificar isso, podemos especular o que aconteceria se os limites para a idade dos aglomerados globulares [Krauss e Chaboyer (2003), Jimenez *et al.* (2003)] fossem simétricos: $t_0 = (12,5 \pm 2,2) \times 10^9$ anos. Como fizemos anteriormente, podemos adicionar 0,3 bilhões de anos para a formação desses objetos, de modo que neste caso o limite superior para a idade do universo seria de 15 bilhões de anos. Este limite excluiria uma grande parte dos modelos atualmente permitidos (figura 6.7). Além disso, o espaço de parâmetros para estes limites é muito menor (figura 6.8) que no caso anterior excluindo $V_0 \gtrsim 0,3\tilde{\rho}_c$.

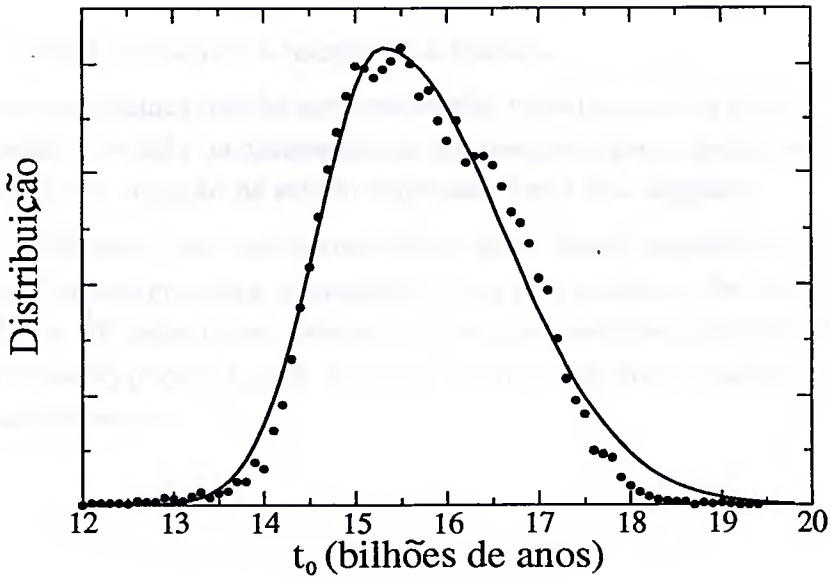


Figura 6.7: Distribuição dos modelos que satisfazem os vínculos na constante de Hubble e no parâmetro de densidade da quintessência atual, como função da idade do universo. O ajuste dos pontos indica que $t_0 = (15,3^{+1,3}_{-0,7}) \times 10^9$ anos com 68% de nível de confiança.

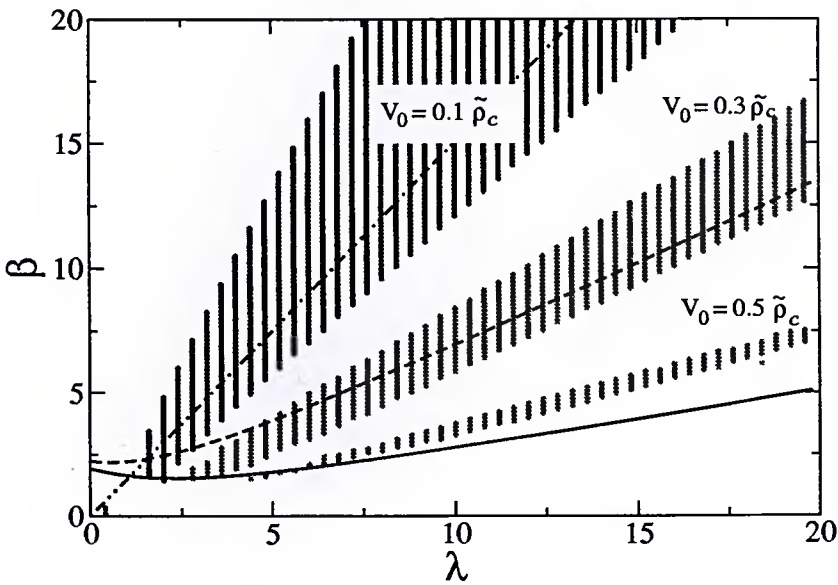


Figura 6.8: Vínculos impostos no espaço de parâmetros (λ, β) por $t_0 = (12,5^{+2,5}_{-1,9}) \times 10^9$ anos, para $V_0 = 0,1\tilde{\rho}_c$, $V_0 = 0,3\tilde{\rho}_c$ e $V_0 = 0,5\tilde{\rho}_c$. As linhas correspondem aos limites da figura 6.2.

Neste capítulo discutimos o cenário de VAMPs como uma potencial solução ao problema da coincidência. Mostramos que, ao contrário do que é geralmente afirmado, para obter soluções que geram parâmetros cosmológicos realísticos é necessário que a constante do potencial seja ajustada para a região $V_0 = [0,25\tilde{\rho}_c; 0,45\tilde{\rho}_c]$ em um intervalo 68% de confiança, o implica que o atrator está sendo atingido na época atual. Nesse sentido, o

modelo não é capaz de resolver a coincidência cósmica.

Além disso, mostramos que há uma correlação negativa entre a idade do universo e o valor da equação de estado da quintessência, um resultado que é oposto ao obtido quando a energia escura tem equação de estado constante e não está acoplada.

Por fim, verificamos que uma característica geral destes modelos é que o universo é mais velho que no caso em que a quintessência não está acoplada. De fato, obtivemos que $t_0 = (15,3_{-0,7}^{+1,3}) \times 10^9$ anos, o que mostra que melhores medidas independentes de modelo da idade do universo podem ajudar a distinguir entre diferentes modelos para explicar a origem da energia escura.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação discutimos a possibilidade dos modelos de quintessência exponencial, desacoplada ou acoplada à matéria escura, serem responsáveis pela energia escura que domina a energia do universo atual, considerando os limites observacionais para alguns parâmetros cosmológicos.

No caso desacoplado, nossos resultados mostram que o potencial exponencial não precisa ser mais finamente ajustado que os demais modelos de quintessência para explicar os vínculos atuais. De fato, se esquecermos por um instante o ajuste fino na constante que dá a escala de energia do potencial (ajuste fino esse que é utilizado em *todos* os modelos de quintessência), vemos que os demais parâmetros não precisam ser ajustados, uma vez que para um grande conjunto de condições iniciais e para todos os valores de λ que geram as soluções do tipo *scaling* o potencial exponencial gera soluções cosmologicamente realísticas. Além disso, uma outra característica interessante nesses modelos é que, para os valores de $\lambda > \sqrt{2}$, o universo, embora esteja acelerando na época atual, deixa de acelerar quando o regime atrator é atingido. É interessante observar também que para os vínculos discutidos aqui, mesmo melhores medidas não são capazes de excluir os modelos exponenciais, embora nesses casos seu espaço de parâmetros seja reduzido. Isso pode ser visto por exemplo na figura 5.5: no caso em que $\omega_{\phi 0} < -0,8$, temos que $\lambda \lesssim 1,25$, valor que exclui a possibilidade do universo estar num período de aceleração temporária.

Para os modelos acoplados (ou modelos de VAMPs), cuja principal motivação era resolver o problema da coincidência cósmica, mostramos que o regime *tracker* precisa de um grande ajuste na escala de energia do potencial, muito semelhante ao que ocorre nos modelos de quintessência desacoplada. Por essa razão, tais modelos não resolvem o problema da coincidência, ao contrário do que era afirmado na literatura. Além disso, analisamos também a idade do universo nestes modelos, e observamos que ela é significativamente maior do que nos modelos de quintessência não acoplada. Isso faz com que seja possível utilizar os vínculos na idade do universo para distinguir entre os modelos acoplados e desacoplados de quintessência, embora para que isso ocorra seja necessário obter vínculos sensivelmente melhores, especialmente no limite superior.

Dessa forma, concluímos que os modelos exponenciais, embora apresentem algumas

características que os tornam únicos, como por exemplo o regime *tracker*, comportam-se como os demais modelos no que diz respeito ao ajuste fino nos regimes que discutimos aqui. Dessa forma, ao menos no caso do potencial exponencial, a procura de soluções atratoras que expliquem a coincidência cósmica não gerou os resultados esperados. O problema da coincidência, um dos mais importantes e urgentes problemas do novo cenário cosmológico, continua em aberto.

Apêndice A

Sistema de Unidades Naturais

Nesta dissertação utilizamos o sistema natural de unidades, em que $c = \hbar = k_B = 1$. Neste sistema, todas as grandezas são expressas em unidades de energia, sendo que as relações dimensionais ficam da seguinte forma:

$$[\text{Energia}] = [\text{Massa}] = [\text{Temperatura}] = [\text{Comprimento}]^{-1} = [\text{Tempo}]^{-1} .$$

Os valores da velocidade da luz no vácuo

$$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} , \quad (\text{A.1})$$

da constante de Planck reduzida,

$$\hbar = 6,582 \times 10^{-22} \text{ MeV s} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J s} , \quad (\text{A.2})$$

e da constante de Boltzmann

$$k_B = 8,618 \times 10^{-14} \text{ GeV K}^{-1} = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} , \quad (\text{A.3})$$

são utilizados para converter os valores do sistema de unidades naturais para os demais sistemas de unidades.

Além disso, no sistema natural, temos que

$$M_P := G^{-1/2} \approx 1,221 \times 10^{19} \text{ GeV} , \quad (\text{A.4})$$

é a massa de Planck e G é a constante gravitacional de Newton. Uma outra grandeza que também utilizaremos é a chamada massa de Planck reduzida, m_P

$$m_P := \frac{M_P}{\sqrt{8\pi}} \approx 2,436 \times 10^{18} \text{ GeV} . \quad (\text{A.5})$$

Uma escala de tempo importante é o chamado tempo de Planck,

$$t_P := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,390 \times 10^{-44} \text{ s} . \quad (\text{A.6})$$

Além disso, alguns fatores de conversão do sistema de unidades naturais para o sistema internacional (SI) de unidades são:

$$\begin{aligned}1 \text{ GeV} &= 1,602 \times 10^{-10} \text{ J} , \\1 \text{ GeV} &= 1,160 \times 10^{13} \text{ K} , \\1 \text{ GeV} &= 1,783 \times 10^{-27} \text{ kg} , \\1 \text{ GeV}^{-1} &= 1,973 \times 10^{-16} \text{ m} , \\1 \text{ GeV}^{-1} &= 6,582 \times 10^{-25} \text{ s} .\end{aligned}\tag{A.7}$$

Apêndice B

Obtenção das Equações de Friedmann

As equações de Einstein da Relatividade Geral sem constante cosmológica são dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (\text{B.1})$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de Ricci [Weinberg (1972)] ,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\delta\mu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\delta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\delta}^{\delta} , \quad (\text{B.2})$$

e $\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu}$ é a conexão de Levi-Civita,

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}} \right) . \quad (\text{B.3})$$

Os componentes do tensor de Ricci não nulos na métrica de Robertson-Walker são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} , \\ R_{ij} &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) g_{ij} . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Além disso, \mathcal{R} é o escalar de Ricci, que na métrica de Robertson-Walker fica

$$\mathcal{R} = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) . \quad (\text{B.5})$$

$T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_{\mu}v_{\nu} - pg_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p) , \quad (\text{B.6})$$

onde usamos o fato que $v_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade própria para um observador comóvel em repouso e que ρ e p são respectivamente a densidade de energia e a pressão do fluido perfeito.

Dessa forma, das equações acima, obtemos as equações de Friedmann (2.11) e (2.12)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho , \quad (\text{B.7})$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p . \quad (\text{B.8})$$

Apêndice C

Parâmetros Cosmológicos

Os valores abaixo foram extraídos de [Freedman *et al.* (2001), Freedman e Turner (2003), Spergel *et al.* (2003)]. Os erros citados na segunda coluna correspondem a 1σ de nível de confiança.

	Valor do parâmetro	Valor utilizado no texto
Parâmetro de densidade total do Universo	$\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$	$\Omega_0 = 1,00$
Parâmetro de densidade da matéria bariônica	$\Omega_{b0} = 0,039 \pm 0,008$	$\Omega_{b0} = 0,04$
Parâmetro de densidade da matéria escura	$\Omega_{ME0} = 0,29 \pm 0,04$	$\Omega_{M0} = 0,3 \pm 0,1$
Parâmetro de densidade da energia escura	$\Omega_{\phi 0} = 0,67 \pm 0,06$	$\Omega_{\phi 0} = 0,7 \pm 0,1$
Temperatura da radiação cósmica de fundo	$T_0 = 2,725 \pm 0,001$ K	$T_0 = 2,725$ K
Constante de Hubble	$h = 0,72 \pm 0,08$	$h = 0,72 \pm 0,08$
Idade do universo	$t_0 = (13 \pm 1,5) \times 10^9$ anos	$t_0 = (13,5 \pm 2,8) \times 10^9$ anos
Equação de estado da energia escura	$\omega_{\phi 0} = -1 \pm 0,2$	$\omega_{\phi 0} = -0,8 \pm 0,2$

Tabela C.1: Valores de alguns parâmetros cosmológicos.

Referências

- [Albrecht e Steinhardt (1982)] Albrecht, A. e Steinhardt, P. J., *Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [Alpher, Bethe e Gamow (1948)] Alpher, R. A., Bethe, H. e Gamow, G., *The origin of chemical elements*, Phys. Rev. **73**, 803 (1948).
- [Alpher e Herman (1948)] Alpher, R. A. e Herman, R., *Evolution of the universe*, Nature **162**, 774 (1948).
- [Alpher e Herman (1950)] Alpher, R. A. e Herman, R., *Theory of the origin and relative abundance distribution of the elements*, Rev. Mod. Phys. **22**, 153 (1950).
- [Alpher e Herman (1988)] Alpher, R. A. e Herman, R., *Reflections on early work on “Big Bang” cosmology*, Physics Today, Agosto de 1988, p. 24.
- [Amendola (1999)] Amendola, L., *Scaling solutions in general nonminimal coupling theories*, Phys. Rev. D **60**, 043501 (1999) [astro-ph/9904120].
- [Amendola (2000)] Amendola, L., *Coupled quintessence*, Phys. Rev. D **62**, 043511 (2000) [astro-ph/9908023].
- [Amendola e Tocchini-Valentini (2001)] Amendola, L. e Tocchini-Valentini, D., *Stationary dark energy: the present universe as a global attractor*, Phys. Rev. D **64**, 043509 (2001) [astro-ph/0011243].
- [Amendola (2003)] Amendola, L., *Acceleration at $z > 1$?*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **342**, 221 (2003) [astro-ph/0209494].
- [Anderson e Carrol (1997)] Anderson, G. W. e Carrol, S. M., *Dark matter with time-dependent mass*, astro-ph/9711288.
- [Bahcall et al. (1999)] Bahcall, N. A., Ostriker, J. P., Perlmutter, S. e Steinhardt, P. J., *The cosmic triangle: revealing the state of the universe*, Science **284**, 1481 (1999) [astro-ph/9906463].
- [Barreiro et al. (2000)] Barreiro, T., Copeland, E. J. e Nunes, N. J., *Quintessence arising from exponential potentials*, Phys. Rev. D **61**, 127301 (2000) [astro-ph/9910214].

- [Bean *et al.* (2001)] Bean, R., Hansen, S. H. e Melchiorri, A., *Early-universe constraints on dark energy*, Phys. Rev. D **64**, 103508 (2001) [astro-ph/0104162].
- [Brush (1992)] Brush, S. G., *How cosmology became a science*, Scientific American, Agosto de 1992, p.34.
- [Burd e Barrow (1988)] Burd, A. B. e Barrow, J. D., *Inflationary models with exponential potentials*, Nucl. Phys. B **308**, 929 (1988).
- [Burles *et al.* (1998)] Burles, S., Nollett, K. M. e Turner, M. S., *Big-bang nucleosynthesis: linking inner space and outer space*, astro-ph/9903300.
- [Caldwell *et al.* (1998)] Caldwell, R. R., Dave, R. e Steinhardt, P. J., *Cosmological imprint of an energy component with general equation of state*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998) [astro-ph/9708069].
- [Carroll (2001a)] Carroll, S. M., *The cosmological constant*, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001) [astro-ph/0004075].
- [Carroll (2001b)] Carroll, S. M., *Dark energy and the preposterous universe*, astro-ph/0107571.
- [Cline (2001)] Cline, J. M., *Quintessence, cosmological horizons, and self-tuning*, JHEP **0108**, 035 (2001) [astro-ph/0105251].
- [Comelli *et al.* (2003)] Comelli, D., Pietroni, M., Riotto, A. *Dark energy and dark matter*, Phys. Lett. B **571**, 115 (2003) [hep-ph/0302080].
- [Copeland *et al.* (1998)] Copeland, E. J., Liddle, A. R., Wands, D. *Exponential potentials and cosmological scaling solutions*, Phys. Rev. D **57**, 4686 (1998) [astro-ph/9711068].
- [Dicke *et al.* (1965)] Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G. e Wilkinson, D. T., *Cosmic black-body radiation*, Astrophys. J. **142**, 414 (1965), reimpresso em Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe: Reprints*, Addison-Wesley Pub. Co. (1988).
- [Farrar e Peebles (2003)] Farrar, G. R. e Peebles, P. J. E., *Interacting dark matter and dark energy*, astro-ph/0307316.
- [Ferreira e Joyce (1997)] Ferreira, P. G. e Joyce, M., *Structure formation with a self-tuning scalar field*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4740 (1997) [astro-ph/9707286].
- [Ferreira e Joyce (1998)] Ferreira, P. G. e Joyce, M., *Cosmology with a primordial scaling field*, Phys. Rev. D **58**, 023503 (1998) [astro-ph/9711102].
- [França e Rosenfeld (2002)] França, U. e Rosenfeld, R., *Fine tuning in quintessence models with exponential potentials*, JHEP **0210**, 015 (2002) [astro-ph/0206194].

- [França e Rosenfeld (2004)] França, U. e Rosenfeld, R., *Age constraints and fine tuning in variable mass particle models*, a ser publicado em Phys. Rev. D (2004), [astro-ph/0308149].
- [Freedman et al. (2001)] Freedman, W. L. et al., *Final results from the Hubble Space Telescope Key Project to measure the Hubble constant*, Astrophys. J. **553**, 47 (2001) [astro-ph/0012376].
- [Freedman e Turner (2003)] Freedman, W. L. e Turner, M. S., *Colloquium: Measuring and understanding the universe*, Rev. Mod. Phys. **75**, 1433 (2003) [astro-ph/0308418].
- [Frieman et al. (1995)] Frieman, J. A., Hill, C. T., Stebbins, A. e Waga, I., *Cosmology with ultralight pseudo Nambu-Goldstone bosons*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2077 (1995) [astro-ph/9505060].
- [Gamow (1948a)] Gamow, G., *The origin of elements and the separation of galaxies*, Phys. Rev. **74**, 505 (1948).
- [Gamow (1948b)] Gamow, G., *The evolution of the universe*, Nature **162**, 680 (1948).
- [Guth (1981)] Guth, A., *Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [Hoffman (2003)] Hoffman, M. B., *Cosmological constraints on a dark matter-dark energy interaction*, astro-ph/0307350.
- [Hu et al. (1997)] Hu, W., Sugiyama, N. e Silk, J., *The physics of the microwave background anisotropies*, Nature **386**, 37 (1997) [astro-ph/9604166].
- [Hubble (1929)] Hubble, E. *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. **15**, 168 (1929), reimpresso em Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe: Reprints*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1988).
- [Jimenez et al. (2003)] Jimenez, R., Verde, L., Treu, T. e Stern, D. *Constraints on the equation of state of dark energy and the Hubble constant from stellar ages and the cosmic microwave background*, Astrophys. J. **593**, 622 (2003) [astro-ph/0302560].
- [Kolb e Turner (1990)] Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1990).
- [Kolda e Lyth (1999)] Kolda, C. e Lyth, D. H., *Quintessential difficulties*, Phys. Lett. B **458**, 197 (1999) [hep-ph/9811375].
- [Kolda e Lahneman (2001)] Kolda, C. e Lahneman, W., *Exponential quintessence and the end of acceleration*, astro-ph/0105300.
- [Krauss e Turner (1995)] Krauss, L. M. e Turner, M. S., *The cosmological constant is back*, Gen. Rel. Grav. **27**, 1137 (1995) [astro-ph/9504003].

- [Krauss e Turner (1999)] Krauss, L. M. e Turner, M. S., *Geometry and destiny*, Gen. Rel. Grav. **31**, 1453 (1999) [astro-ph/9904020].
- [Krauss e Chaboyer (2001)] Krauss, L. M. e Chaboyer, B., *New globular cluster age estimates and constraints on the cosmic equation of state and the matter density of the universe*, astro-ph/0111597.
- [Krauss (2002)] Krauss, L. M., *Dark energy and the Hubble age*, astro-ph/0212369.
- [Krauss e Chaboyer (2003)] Krauss, L. M. e Chaboyer, B., *Age estimates of globular clusters in the Milk Way: constraints on cosmology*, Science **299**, 65 (2003).
- [Kunz et al. (2003)] Kunz, M., Corasaniti, P. S., Parkinson, D. e Copeland, E. J., *Model-independent dark energy test with σ_8 and t_0 using WMAP*, astro-ph/0307346.
- [Liddle (1989)] Liddle, A. R., *Power-law inflation with exponential potentials*, Phys. Lett. B **220**, 502 (1989).
- [Liddle e Scherrer (1998)] Liddle, A. R. e Scherrer, R. J., *Classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions*, Phys. Rev. D **59**, 023509 (1998) [astro-ph/9809272].
- [Liddle e Lyth (2000)] Liddle, A. R. e Lyth, D. H., *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [Linde (1982)] Linde, A., *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopoles problems*, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [Linde (1983)] Linde, A., *Chaotic inflation*, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983).
- [Lucchin e Matarrese (1985)] Lucchin, F. e Matarrese, S., *Power-law inflation*, Phys. Rev. D **32**, 1316 (1985).
- [Marion e Thornton (1995)] Marion, J. B. e Thornton, S. T., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Saunders College, Fort Worth (1995).
- [Olive (2003)] Olive, K. A., *TASI lectures on dark matter*, astro-ph/0301505.
- [Ostriker e Steinhardt (1995)] Ostriker, J. P. e Steinhardt, P. J., *The observational case for a low-density universe with a non-zero cosmological constant*, Nature **377**, 600 (1995).
- [Padmanabhan (1996)] Padmanabhan, T., *Cosmology and astrophysics through problems*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [Padmanabhan (2003)] Padmanabhan, T., *Cosmological constant - the weight of the vacuum*, Phys. Rep. **380**, 235 (2003) [hep-th/0212290].

- [Peebles e Ratra (1988)] Peebles, P. J. E. e Ratra, B., *Cosmology with a time-variable cosmological "constant"*, *Astrophys. J.* **325**, L17 (1988).
- [Peebles et al. (1991)] Peebles, P. J. E., Schramm, D. N., Turner, E. L. e Kron, R. G., *The case for the relativistic hot Big Bang cosmology*, *Nature* **352**, 769 (1991).
- [Peebles e Ratra (2003)] Peebles, P. J. E. e Ratra, B., *The cosmological constant and dark energy*, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003) [astro-ph/0207347].
- [Perlmutter et al. (1998)] Perlmutter, S., *Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe*, *Nature* **392**, 51 (1998) [astro-ph/9712212].
- [Penzias e Wilson (1965)] Penzias, A. A. e Wilson, R. W., *A measurement of excess antenna temperature at 4800 Mc/s*, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965), reimpresso em Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe: Reprints*, Addison-Wesley Pub. Co. (1988).
- [Penzias (1978)] Penzias, A. A., *The origin of elements*, Nobel lecture (1978), disponível em <http://www.nobel.se/physics/laureates/1978/penzias-lecture.html>
- [Pietroni (2003)] Pietroni, M., *Brane worlds and the cosmic coincidence problem*, *Phys. Rev. D* **67**, 103523 (2003) [hep-ph/0203085].
- [Ratra e Peebles (1988)] Ratra, B. e Peebles, P. J. E., *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*, *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988).
- [Riess et al. (1998)] Riess, A. G. et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant* *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201].
- [Ross (2003)] Roos, M., *Introduction to Cosmology*, John Willey & Sons, New York (2003).
- [Rubano e Scudellaro (2001)] Rubano, C. e Scudellaro, P., *On some exponential potentials for a cosmological scalar field as quintessence*, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 307 (2001) [astro-ph/0103335].
- [Rubano e Scudellaro (2002)] Rubano, C. e Scudellaro, P., *Quintessence or phoenix*, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 1931 (2002) [astro-ph/0203225].
- [Sahni (2002)] Sahni, V., *The cosmological constant problem and quintessence*, *Class. Quant. Grav.* **19**, 3435 (2002) [astro-ph/0202076].
- [Schramm e Turner (1998)] Schramm, D. N. e Turner, M. S., *Big-bang nucleosynthesis enters the precision era*, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 303 (1998) [astro-ph/9706069].
- [Seife (2003)] Seife, C., *Breakthrough of the year: illuminating the dark universe*, *Science*, **302**, 2038 (2003).

- [Spergel *et al.* (2003)] Spergel, D. N. *et al.*, *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters*, *Astrophys. J. Supp.* **148**, 175 (2003) [astro-ph/0302209].
- [Steinhardt *et al.* (1995)] Steinhardt, P. J., *Cosmology at the crossroads*, em Kolb, E. W. e Peccei, R. D., *Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology in the Next Millennium*, 51, World Scientific, Singapore (1995) [astro-ph/9502024].
- [Steinhardt *et al.* (1999)] Steinhardt, P. J., Wang, L. e Zlatev, I., *Cosmological tracking solutions*, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999) [astro-ph/9812313].
- [Turner *et al.* (1984)] Turner, M. S., Steigman, G. e Krauss, L. M., *Flatness of the universe: reconciling theoretical prejudices with observational data*, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2090 (1984).
- [Turner e Tyson (1999)] Turner, M. S. e Tyson, J. A., *Cosmology at the millennium*, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S145 (1999) [astro-ph/9901113].
- [Turner (2000)] Turner, M. S., *The dark side of the universe: from Zwicky to accelerated expansion*, *Phys. Rep.* **333**, 619 (2000).
- [Wang *et al.* (2000)] Wang, L., Caldwell, R. R., Ostriker, J. P. e Steinhardt, P. J., *Cosmic concordance and quintessence*, *Astrophys. J.* **530**, 17 (2000) [astro-ph/9901388].
- [Weinberg (1972)] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [Weinberg (1989)] Weinberg, S., *The cosmological constant problem*, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [Weinberg (2000)] Weinberg, S., *The cosmological constant problems*, publicado em Cline, D. B., *Sources and detection of dark matter and dark energy in the universe: Proceedings*, Springer-Verlag (2001), [astro-ph/0005265].
- [Wetterich (1988)] Wetterich, C., *Cosmology and the fate of dilatation symmetry*, *Nucl. Phys. B* **302**, 668 (1988).
- [Wetterich (1995)] Wetterich, C., *An asymptotically vanishing time-dependent cosmological "constant"*, *Astron. Astrophys.* **301**, 321 (1995) [astro-ph/9408025].
- [Zeldovich e Khlopov (1978)] Zeldovich, Ya. B. e Khlopov, M. Yu., *On the concentrations of relic magnetic monopoles in the universe*, *Phys. Lett. B* **79**, 239 (1978).
- [Zlatev *et al.* (1999)] Zlatev, I., Wang, L. e Steinhardt, P. J., *Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999) [astro-ph/9807002].

