

CLASS.: 511.3 F 368m
TOMBO: 771

SVE

IORELLA FERRAIOLO

511.3
F 368m
771

**MATEMÁTICA KANTIANA E
PERCEPÇÃO DA REALIDADE**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus Marília

1996

1410000771



FIORELLA FERRAILO

MATEMÁTICA KANTIANA E PERCEPÇÃO DA REALIDADE

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação pela Universidade Estadual Paulista-Campus Marília sob a orientação do Prof. Dr Lauro Frederico Barbosa da Silveira

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus Marília
1996

Banca Examinadora

Prof. Dr. Cosme Damião Bastos Massi

Prof. Dr. Ivo Assad Ibri

Prof. Dr. Lauro F. Barbosa da Silveira



Dedicatória

Ao professor Tasso pela lição de amor, respeito e humanidade.

Aos Professores pela importância da educação e compromisso com todos os estudantes.

Aos professores e amigos que de alguma maneira ajudaram para a realização deste trabalho.

Ao Caio *por este amor infinito.*

ÍNDICE

SUMÁRIO 01

APRESENTAÇÃO 03

CAP. I - MATEMÁTICA KANTIANA 07

I.1- Núcleos numéricos, o infinito e o zero 08

I.2- Imagem, conceito e regra de construção matemática 16

Agradecimentos

CAP. II - MATEMÁTICA E REALIDADE 27

II.1- O real e o existente 27

II.2- Geometria aritmética e álgebra 33

CAP. III - MATEMÁTICA, LÓGICA E REALIDADE 39

III.1- Híndus e a matemática humana, lógica existencial e matemática 39

III.2- Kant e Híndus, Hindes como o formal ou lógico e o real ou existencial 50

CAP. IV - MATEMÁTICA E PERCEIÇÃO DO MUNDO 57

IV.1- A proposta de Hans Reichenbach 57

IV.2- Imagem e visualização 67

CONCLUSÃO 71

BIBLIOGRAFIA 73

Ao professor Lauro pela lição de conhecimento e humildade.

Ao Padovan pela imprescindível colaboração e companheirismo em todos os momentos.

Aos professores e amigos que de algum modo colaboraram para a realização deste trabalho.

À C.A.P.E.S. pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

RESUMO	02
APRESENTAÇÃO	03
CAP. I - MATEMÁTICA KANTIANA.....	07
I.1- Juízos matemáticos: o sintético a priori	08
I.2- Intuição, conceito e regra de construção matemática	16
CAP. II - MATEMÁTICA E REALIDADE	27
II.1- O real e o existente	27
II.2- Geometria aritmética e álgebra	35
CAP. III - MATEMÁTICA, LÓGICA E REALIDADE	39
III.1- Hintikka e a matemática kantiana: lógica existencial e matemática	39
III.2- Kant e Hintikka: limites entre o formal ou lógico e o real ou existente	50
CAP. IV - MATEMÁTICA E PERCEPÇÃO DO MUNDO	57
IV.1- A proposta de Hans Reichenbach	57
IV.2- Intuição e visualização	67
CONCLUSÃO	71
BIBLIOGRAFIA.....	81



RESUMO

A proposta deste trabalho é resgatar a concepção matemática de Immanuel Kant, em suas relações com a realidade. Entendendo que tal concepção muito pode auxiliar nas reflexões acerca dos fundamentos da matemática, procuramos esclarecer o que possibilitaria e garantiria a correspondência entre matemática e realidade, chamando, posteriormente, outros autores para um diálogo.

Jakko Hintikka reelabora a concepção matemática de Kant subvertendo, porém, ao nosso ver, conceitos essenciais da filosofia kantiana. Ao tentar aproximar a proposta de Kant das teorias lógicas atuais, esvazia completamente a intuição pura kantiana de seu conteúdo sensível, nivelando o intuitivo e o lógico, de modo que as relações entre matemática e realidade ficam obscurecidas.

Hans Reichenbach, por sua vez, propõe que tal intuição seja abandonada, já que a matemática caso se pretenda intuitiva, trata simplesmente da nossa forma desenvolvida de perceber o mundo não dizendo nada a respeito das realidades físicas; e ao se pretender pura, constitui-se numa função essencialmente lógica, não apresentando, portanto, nada de intuitivo.

Tal discussão remeteu-nos diretamente às dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem da matemática, em parte, ao menos, decorrentes do desconhecimento das características próprias daquele fazer e da sua fundamentação por parte dos próprios docentes.

Voltar a atenção para tais aspectos colaboraria, certamente, para um melhor relacionamento didático e pedagógico, propiciaria aos alunos a oportunidade de experimentar a alta criatividade do trabalho da razão e, por via de consequência, reduziria um tão frequente motivo do fracasso escolar.

Nesse sentido, sugerimos que a matemática de Kant enquanto esta se pretende tratar da forma de experiência possível pode auxiliar na compreensão do fazer matemático, numa relação legítima com a realidade, relação esta que, acreditamos, jamais poderá ser garantida mediante procedimentos meramente lógicos.



APRESENTAÇÃO

O problema central para o qual nos orientamos na elaboração deste trabalho foi procurar explicitar a relação que se apresenta entre matemática e realidade através da concepção kantiana dessa ciência.

A filosofia crítica desenvolvida por Immanuel Kant no século XVIII e especificamente a concepção matemática por ele proposta apresentou-nos um terreno frutífero que nos permitiu selecionar e levantar aspectos altamente sugestivos, não só do ponto de vista epistemológico no qual nos concentraremos aqui, mas também do ponto de vista pedagógico.

As questões como aqui as tratamos certamente não se apresentam à maioria dos matemáticos, pois elas são pressupostas de acordo com a corrente teórica defendida por eles. Como ilustrou P.J. DAVIS em seu livro **A Experiência Matemática**, não passa pela cabeça de um matemático convicto questionar a verdade cósmica de sua teoria ou a existência dos objetos por ele utilizados já que, em muitos casos, eles são demonstrados de acordo com a não contradição formal. Os matemáticos admitirão que seus objetos não são naturais, no entanto, insistirão que são descobertos e não inventados, o que garante a sua universalidade e sua característica intrínseca às leis da natureza. Ainda mais, notamos que a preocupação em dissecar as relações entre o real e o formal não se apresenta, pois problemas epistemológicos e ontológicos são deliberadamente evitados por eles.

Mas, diferentemente dos matemáticos caracterizados por Davis, não nos quietaremos diante desse emaranhado de pressuposições que, se realmente fossem irrelevantes, não deixariam margens para diferentes e contrárias correntes matemáticas.

A concepção matemática de Kant nos permite dissecar aspectos do caráter formal matemático em correspondência com a existência fenomenológica e ontológica não só de seu próprio objeto como também da possibilidade de aplicá-lo à realidade exterior. Tal vínculo entre matemática e realidade pode ser apresentado como



tão estreito e ao mesmo tempo tão independente, que nos permite falar de um universo estritamente matemático.

Pois, perguntamos, afinal qual é a relação que se apresenta entre matemática e realidade na filosofia kantiana? O que garante nela o acordo com a experiência e o mundo físico cuja ciência tanto se desenvolveu com seu auxílio? O que possibilita a sua correspondência com a realidade ?

A volta a Kant não se dá por acaso, já que a sua concepção matemática tem sido retomada e reinterpretada com frequência por comentadores atuais. Isso se deve ao fato dela propiciar novas reflexões, não só acerca de sua própria teoria, como também da relação desta com as ciências atuais.

Para esse fim, iniciaremos o primeiro capítulo rastreando a concepção matemática kantiana principalmente do modo pela qual ela é exposta na **Crítica da Razão Pura**.

No capítulo segundo procuraremos levantar tais relações entre matemática e realidade , e já que elas não se apresentam de modo mais explícito em seus textos, faremos uma exposição mais livre, sem deixar, contudo, de limitar-nos ao que entendemos ser a proposta do filósofo alemão. Ainda nesse capítulo, abordaremos brevemente alguns problemas específicos pertinentes a discussões que estarão presentes em capítulos posteriores, como o da aceitação por parte de Kant de geometria não euclidianas e o da superioridade da geometria euclidiana sobre as outras geometrias.

No capítulo terceiro, analisaremos a proposta de Jakko Hintikka em tratar do método matemático de Kant reduzindo seu caráter construtivo sintético a um procedimento da geometria euclidiana. Entendendo que houve um equívoco em estender uma característica da geometria euclidiana a outros ramos da matemática, Hintikka reconstrói alguns conceitos kantianos, permitindo que a concepção matemática deste se aproxime de métodos utilizados atualmente em lógica. Em seguida, analisaremos a sua proposta à luz dos textos kantianos. Entendemos que tal abordagem, embora procure resgatar Kant, conflitua com noções essenciais daquela filosofia, além de apresentar dificuldades ainda maiores ao esforço de se precisar os limites entre o formal ou lógico, o real e o existente.



Ainda tomando a filosofia kantiana como centro de reflexão, buscamos acentuar as relações entre a sua matemática e a nossa forma de percepção do mundo. Assim, no capítulo quarto trataremos para discussão Hans Reichenbach, cujo texto abordado visa tratar, no que especificamente nos interessa, de geometrias euclidianas e não euclidianas e nossa percepção do mundo de acordo com a física atual. A intenção reichenbachiana de descartar a intuição kantiana nos faz relevar a permanência do processo perceptivo humano na leitura do universo.

Defendemos em decorrência desse estudo que tal análise na medida em que busca clarificar relações entre o formal e o real, assim como da matemática com outras ciências, em muito contribui para o entendimento da mesma.

Na conclusão buscamos, então, levantar as implicações deste estudo as quais consideramos relevantes no que concerne ao ensino e aprendizagem da matemática. Acreditamos que, por um lado, algumas dificuldades e fracassos no ensino desta ciência são consequências do desconhecimento do próprio fazer matemático que, muitas vezes, decorre de problemas referentes a sua fundamentação. Por outro, julgamos que a questão intuitiva tão bem acentuada por Kant nos permite compreender um pouco mais acerca da nossa forma perceptiva do mundo. Desse modo, entendemos como e porque estamos muito mais aptos a compreender o espaço euclidiano do que o espaço riemanniano.

Tal problemática nos alerta para o anacronismo pedagógico ao qual estão submetidos a maioria dos estudantes brasileiros; porque, de certo modo, nosso mundo ainda é essencialmente euclidiano e newtoniano.

É necessário esclarecer, no entanto, que a pesquisa aqui proposta no concernente ao ensino e a aprendizagem da matemática, não pretende adentrar-se no domínio da didática da matemática e considerar problemas concretos decorrentes deste aprendizado. Pretende, isto sim, localizar-se no âmbito do pensamento filosófico de Kant e pensar a matemática por ele proposta em relação à experiência e à realidade e mesmo em relação ao pensamento filosófico. Espera-se, contudo, que tal reflexão possa vir a oferecer subsídios, mesmo que indiretos, para a compreensão do fazer matemático e consequentemente de seu aprendizado.



Gostaríamos de acrescentar, antes de finalizar, que no referente a proposta de Hintikka e Reichenbach estamos muitos menos preocupados em discutir questões específicas acerca de matemática, lógica e física do que em entender porque e como tais pensadores foram buscar Kant. Assim, pedimos desculpas por eventuais equívocos de interpretação acerca do domínio específico de suas teorias, quando precisamos, mesmo que brevemente , nelas adentrar.

Tais possíveis equívocos, embora possam e devam ser sanados, não trarão prejuízos imediatos ao nosso trabalho, mesmo porque este não visa pretensiosamente discordar desses autores respeitáveis cujos trabalhos são tão significativos, mas simplesmente tentar trazer as questões da filosofia kantiana para o centro de uma discussão no plano filosófico.



CAP. I - MATEMÁTICA KANTIANA

A ciência matemática manteve, na filosofia kantiana, o *status* de uma ciência segura da qual a metafísica e outras ciências deviam tomar exemplo. Ela era, para o filósofo alemão, o verdadeiro modelo de acordo com o qual se podia prosseguir legitimamente sem o auxílio da experiência.

Assim, relembramos Kant no prefácio à 2ª edição da **Crítica da Razão Pura**:

“ Desde os tempos mais remotos que a história da razão pode alcançar no admirável povo grego, a matemática entrou na via segura de uma ciência.”
(2,B p.X)

E não por acaso Kant inspirou-se em procedimentos matemáticos para ilustrar o processo *a priori* do conhecimento:

“... Aquele que primeiro demonstrou o triângulo isóceles (fosse ele Tales, ou como quer que se chamasse) teve uma iluminação; descobriu que não tinha que seguir passo a passo o que via na figura, nem o simples conceito que dela possuía, para conhecer de certa maneira, as suas propriedades; que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava a priori por conceitos e que, para conhecer, com certeza, uma coisa a priori, nada devia atribuir-lhe se não o que fosse consequência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito.” (2,B pp.XI-XII)



Assim, para o filósofo alemão, a matemática espelha a legitimidade da razão, permitindo esclarecer muito de seus procedimentos e devendo consolá-la quando esta é impelida a afastar-se da experiência. Pois, embora apresente limites, torna seguro os seus resultados, intentando espantar os fantasmas da razão especulativa.

I.1 Juízos matemáticos: “*O sintético a priori*”

O caráter *a priori* do conhecimento matemático aliado à sinteticidade dos seus juízos estabelecem a peculiaridade das proposições daquela ciência. Kant defendeu que a matemática trata essencialmente de juízos sintéticos *a priori* e que é a principal produtora destes juízos.

Por isso, para iniciarmos a exposição acerca da concepção matemática de Kant devemos explicar estes juízos. Desse modo, partiremos de noções elementares as quais permitiram a Kant distinguir conhecimento *a priori* e *a posteriori* e juízos *analíticos* e *sintéticos*.

Já na **Dissertação de 1770**, no seu chamado período pré-crítico, Kant trabalhou tais distinções, mas foi na **Crítica da Razão Pura** que ele abordou tais relações com maior clareza.

Num trecho introdutório à **Crítica da Razão Pura** Kant busca fundamentar a distinção entre conhecimento *a priori* e *a posteriori*:

“ Não resta dúvida de que todo o nosso conhecimento começa pela experiência; efetivamente, que outra coisa poderia despertar e pôr em ação a nossa capacidade de conhecer senão os objetos que afetam os sentidos e que, por um lado, originam por si mesmas as representações e, por outro lado, põe em movimento a nossa faculdade intelectual e levam-na a compará-las, transformando assim a matéria bruta das



impressões sensíveis num conhecimento que se denomina experiência ? Assim, na ordem do tempo, nenhum conhecimento precede em nós a experiência e é com esta que todo o conhecimento tem o seu início “. (2,B p.1)

Assim, de acordo com uma postura aparentemente empirista, Kant nos revelou que a experiência propicia o conhecimento o qual deve ser denominado empírico ou *a posteriori*, já que se inicia de acordo com as impressões dos sentidos.

Quando tratou, porém, de buscar a origem do conhecimento Kant abandonou o campo da experiência e o situou a nível da própria faculdade conhecer, possibilitando o fundamento de um conhecimento *a priori*. Assim continuou:

“ Se, porém, todo o conhecimento se inicia com a experiência, isso não prova que todo ele derive da experiência. Pois bem poderia o nosso próprio conhecimento por experiência ser um composto do que recebemos através das impressões sensíveis e daquilo que a nossa própria capacidade de conhecer (apenas posta em ação por impressões sensíveis) produz por si mesma, aspecto esse que não distinguimos dessa matéria prima, enquanto nossa atenção não despertar por um longo exercício que nos torne aptos a separá-los”.
(2,B pp.1-2)

Assim podemos admitir que embora todo o nosso conhecimento comece com a experiência, a sua origem se encontra antes no sujeito como condição necessária à produção do conhecimento da experiência, ou , como distinguiu Kant, do fenômeno.

Salvaguardar a possibilidade de um conhecimento *a priori* implicava, na verdade, na garantia de certeza nas ciências. Mas tal possibilidade, trouxe, através da filosofia kantiana, o acréscimo de dois fatos interessantes.



Primeiro, sabemos que a possibilidade de um conhecimento *a priori* implica no fato de que a origem do conhecimento se apresente no sujeito. Daí a mudança de enfoque na teoria do conhecimento a qual Kant denominou “revolução copernicana” e que reservou ao sujeito, em detrimento do objeto, o papel central no processo do conhecimento, pois,

“Só conhecemos a priori das coisas aquilo que nós próprios colocamos nelas” (2,B p. IX)

Assim, notamos, é a estrutura do sujeito articulada com a experiência que constrói o conhecimento. E é a capacidade de produzir conhecimento *a priori* que torna possível as ciências, principalmente as matemáticas, cujas necessidade e universalidade que apresentam nos seus juízos de modo algum podem fundar-se na experiência.

Em consequência, a existência de conhecimentos *a priori* revelou um problema, razão pela qual Kant fez a distinção entre *fenômeno*, ou seja, o objeto da experiência como ele nos aparece de acordo com o nosso modo de perceber as coisas, e a *coisa em si*, ou seja, o objeto da experiência como é em si mesmo e cujas características próprias jamais podem ser apreendidas por nós.

“Se a nossa intuição devesse ser de tal maneira que representasse coisas como são em si mesmas, não se produziria nenhuma intuição a priori, mas seria sempre empírica, pois só posso saber o que esta contido no objeto em si mesmo se este me for presente e dado”. (5, § 9)

Assim, o fenômeno enquanto trata de referir-se apenas aos objetos como se apresentam a nós, segundo a nossa forma própria de receber o objeto da experiência, pode dispensar um objeto presente e dado. O que de *a priori* podemos afirmar acerca do fenômeno será discutido mais a frente. Neste ponto vale simplesmente

acentuar que é a estrutura própria do sujeito que nos permite a referência *a priori* aos fenômenos.

O princípio essencial de distinção de um conhecimento *a priori* é reconhecido pela necessidade e universalidade que só um conhecimento que não depende da experiência pode possuir. Pois, acentuou Kant, a experiência pode nos fornecer generalizações de fatos, mas jamais é capaz de garantir um conhecimento seguro.

A distinção entre conhecimento *a priori* e *a posteriori* em associação com a distinção entre juízos *analíticos* e *sintéticos* vem esclarecer os juízos matemáticos kantianos.

Um juízo analítico, no sentido proposto por Kant, traz sempre em seu sujeito a relação proposta por seu predicado, ou, em outras palavras, o predicado nada acrescenta àquilo que antes já não estava expresso no conceito do sujeito ao qual é atribuído.

Nessa espécie de juízo, a relação entre sujeito e predicado é apenas uma decomposição daquilo que antes já se apresentava no sujeito. Por isso a sua relação é sempre pensada *a priori*, pois, mesmo que esta seja desenvolvida pela experiência, não há necessidade de se recorrer a ela para validar o juízo expresso, já que ele é explícito por si mesmo.

Kant nos alertou que os juízos analíticos fundamentam-se no princípio de contradição. Negar o predicado relativo ao sujeito de um juízo dessa espécie implica em negar o próprio sujeito. Daí, embora realmente tal relação possa vir a ser verificada empiricamente, tal fato torna-se irrelevante por se tratar de uma questão puramente lógica, derivada de regras semânticas.

Um juízo sintético, por sua vez, manifesta uma relação de acréscimo ao sujeito, pois o predicado se encontra totalmente à parte daquilo que propõe necessariamente o conceito do sujeito, jamais podendo ser pensado nele mediante qualquer decomposição.

Os juízos de experiência, nos alertou Kant, são todos sintéticos pois estes podem acrescentar ao sujeito predicados diversos, não contidos no simples conceito do sujeito. Tais predicados podem, inclusive, ser meros acidentes cuja necessidade lhes é irreconciliável. Consequentemente, à experiência cabe legitimar os juízos sintéticos



que se apresentam empiricamente. Sendo assim, os juízos da experiência são juízos sintéticos *a posteriori*.

Porém, de acordo com a abordagem kantiana, a fundamentação de um juízo sintético *a priori* deve ser buscada em outro lugar ainda que não no princípio de contradição. Como o predicado num juízo sintético é sempre acrescentado ao conceito do sujeito, não existe garantia dada no princípio de contradição que sustente a necessidade de tal predicado, o que de outro modo também não nos pode garantir a experiência.

Dessa forma, os juízos sintéticos *a priori* não podem ser estabelecidos unicamente através do princípio de contradição de acordo com leis lógicas. Devem, portanto, ser buscados na possibilidade da experiência, ou no que propiciaria a mesma *a priori*.

As distinções aqui propostas por Kant nos permitem discernir os juízos com os quais a matemática trabalha. Já acrescentamos também que tais juízos não podem se sustentar na experiência, mas que, ao contrário, devem justamente propiciá-la para que seja preservado o caráter universal e necessário de que são dotados. Por outro lado, sequer o princípio de contradição é capaz de sustentar as suas proposições, embora ele deva ser aqui também respeitado.

Desse modo, Kant posicionou-se contra os analistas de sua época, ou seja, os autores que, como Hume, atribuíam às representações matemáticas um caráter analítico:

“Os juízos matemáticos são todos sintéticos... Antes de mais, cumpre observar que as verdadeiras proposições matemáticas são sempre juízos a priori e não empíricos, porque comportam a necessidade, que não se pode extrair da experiência”.
(2,B pp.14-15)

É na sutileza de respeitar a experiência sem contudo contaminar-se por ela que se encontra a peculiaridade da matemática. A fundamentação de tal peculiaridade legitimadora do caráter sintético



a priori repousa nas formas puras da intuição apresentada por Kant na “Estética Transcendental”.

Kant entendeu por intuição o modo imediato pelo qual um conhecimento pode se referir a objetos. Tal intuição se manifesta à medida que o objeto se apresenta a nós de acordo com a sensibilidade, ou seja, de acordo com a nossa capacidade de receber representações.

Perceber de que modo um objeto pode ser apresentado, ou como ele pode afetar-nos independentemente da experiência do objeto propriamente dito, foi possível graças ao espírito penetrante de Kant. Em resposta a este problema, ele perguntou insistentemente como seria possível intuir algo *a priori*, ou, como seria possível a intuição do objeto preceder ao próprio objeto?

“É, pois, de uma única maneira possível que minha intuição preceda a realidade do objeto e se produz como conhecimento a priori, quando ela nada mais contém do que a forma da sensibilidade que antecede em meu sujeito, todas as impressões reais pelas quais os objetos me afetam. Com efeito, posso saber a priori que os objetos dos sentidos podem ser intuídos segundo esta forma de sensibilidade. Segue-se daí que proposições que se referem apenas a esta forma da intuição sensível serão possíveis e válidas por objetos dos sentidos, e inversamente, que intuições possíveis a priori, não podem referir-se jamais a outras coisas que não objetos de nossos sentidos”.(5, § 9)

Ao abstrair da nossa capacidade de receber representações tudo aquilo que tenha a ver com a sensação ou com a matéria do fenômeno, ou seja, ao dispensar todas as características dos fenômenos que só poderiam ser obtidas *a posteriori*, permanecem ainda as formas puras da intuição: o espaço como forma externa de recepção (relações de coexistência e justaposição) e o tempo como forma interna de recepção (relações de sucessão e simultaneidade).

O sentido externo nos permite a representação dos objetos enquanto fora de nós, situados no espaço. Consequentemente todas as relações mediante as quais os objetos possam se apresentar enquanto exteriores a nós, pertencem a nossa intuição espacial.

O sentido interno, por sua vez, permite a intuição do nosso estado interior ou a intuição de nós mesmos mediante a intuição do tempo. Uma vez que todas as nossas representações, sejam elas exteriores ou não, pertencem ao nosso estado interno, o tempo é a condição formal de todos os fenômenos em geral. Ou seja, todos os fenômenos, a medida que se apresentam a nós, estão submetidos às relações do tempo.

Espaço e tempo se apresentam, portanto, como condição de recepção de todo e qualquer objeto sem os quais não se pode apresentar objeto algum. Tais formas são inerentes a nossa capacidade de representação, encontrando-se desse modo, *a priori* no sujeito.

Assim, notou Kant, é possível perfeitamente representar um espaço e um tempo em que não haja objeto algum, uma vez que tais intuições são próprias do sujeito, permanecendo em detrimento do objeto representado. Por outro lado, jamais podemos representar um objeto que não esteja no espaço e no tempo, já que estes se apresentam como condição de toda e qualquer representação.

As formas puras da intuição permitem fundamentar e legitimar os juízos sintéticos *a priori*, expressando a especificidade adotada pela matemática:

“Tempo e espaço são as intuições que servem de fundamento a todos os conhecimentos da matemática pura e juízos que surgem ao mesmo tempo como apodícticos e necessários; pois a matemática deve apresentar todos os seus conceitos primeiro na intuição e a matemática na intuição pura, isto é, construí-los, sem os quais (por ela não proceder analiticamente, ou seja, por desmembramento dos conceitos, mas sinteticamente) é lhe impossível dar um passo se quer enquanto lhe faltar a intuição pura, pois

somente nela pode ser dada a matéria para juízos sintéticos a priori". (5, § 10)

Espaço e tempo são os elementos que propiciam a construção matemática permitindo a Kant acentuar o caráter sintético *a priori* da mesma. Ele nos mostrou que para se pensar uma proposição matemática é necessário buscar ajuda na intuição. Quando pensamos, por exemplo, a soma de dois números e o seu resultado, buscamos ajuda na intuição, sendo que tal resultado não se apresenta apenas mediante o conceito dos números somados. Em outras palavras, os números somados jamais nos apresentam, somente por seus conceitos, o resultado sem que lhe seja acrescentado aqueles elementos da intuição:

"À primeira vista, poder-se-ia, sem dúvida, pensar que a proposição $7+5=12$ é uma proposição simplesmente analítica, resultante, em virtude do princípio de contradição, do conceito da soma de sete e de cinco. Porém, quando se observa de mais perto, verifica-se que o conceito da soma de sete e de cinco nada mais contém do que a reunião dos dois números em um só, pelo que, de modo algum, é pensado qual é esse número único que reúne os dois. O conceito de doze de modo algum ficou pensado pelo simples fato de se ter concebido essa reunião de sete e de cinco, e por mais que analise o conceito que possuo de uma tal soma possível, não encontrarei nele o número doze. Temos de separar estes conceito, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo os cinco dedos da mão ou (como Segner na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição. Com efeito, tomo primeiro o número 7 e, com a ajuda dos dedos da minha mão para intuir o conceito de cinco, adicionei-lhes uma a uma mediante esse processo figurativo, as unidades que primeiro juntei para perfazer o



número 5 e vejo assim surgir o número 12 .“
(2,B pp.15-16)

Assim, no procedimento aritmético recorremos ao tempo limitando-o em sua unicidade para chegarmos à soma resultante, construindo, desse modo, novos conceitos.

Na geometria, de outro modo, para compreendermos a propriedade de uma figura, recorremos ao espaço e acrescentamos pela intuição aquilo sem o qual não nos seria permitido construir tal conceito:

“... Que a linha reta seja a mais curta distância entre dois pontos é uma proposição sintética, porque o meu conceito de reta não contém nada de quantitativo, mas sim uma qualidade. O conceito de mais curta tem de ser totalmente acrescentado e não pode ser extraído de nenhuma análise do conceito de linha reta. Tem de recorrer-se à intuição, mediante a qual unicamente a síntese é possível”. (2,B p.16)

Em consequência, notamos em concordância com o filósofo alemão, que os conceitos matemáticos construídos mediante o auxílio da intuição pura não podem ser considerados meros conceitos analíticos, como se pensava em sua época. Se assim fossem, reduziriam a matemática a um sistema de representações gerais, eliminando seu vínculo intuitivo uniforme com a experiência e esvaziando as ciências de modo geral. Tal problema esteve sempre presente na filosofia kantiana, mas este parece não ter se esgotado em si mesmo.

1.2. - Intuição, Conceito e Regra de Construção Matemática.



Além das possíveis interpretações oferecidas pela leitura da “Estética Transcendental”, a “Doutrina Transcendental do Método” propiciou uma investigação mais abrangente da concepção da matemática kantiana ampliando os conceitos de intuição e de construção e, desse modo, a leitura da concepção matemática por ele defendida.

A distinção apresentada entre conhecimento matemático e conhecimento filosófico, pela qual o filósofo alemão propõe ser o primeiro obtido por construção de conceito e o segundo racionalmente por conceitos¹, acentuou o caráter construtivo da matemática.

Como observou Kant, construir um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde. Desse modo, como vimos na construção de um conceito matemático, recorreremos à intuição pura e o consideramos *in concreto*² o que de outro modo jamais seria possível por meros conceitos, como pretendido no conhecimento filosófico.

Embora tanto o conhecimento matemático quanto o filosófico impliquem em juízos sintéticos, só o caráter construtivo da matemática permite considerar legitimamente o geral no particular. Isto é, o ato de construção que lhe é possibilitado pelo auxílio da intuição pura permite a representação de um particular ou mesmo individual que valha universalmente. Pois, na construção efetuada na matemática diferencia-se apenas o ato de construção de conceito, sendo que o particular da intuição não é considerado. O objeto do conceito é representado pelo individual como um “modelo”. Desse modo, por exemplo, quando recorreremos ao lápis e papel para traçar um círculo, obtemos a representação particular de um círculo. Mas o ato de construção que nos propiciou a sua representação de acordo com regras anteriores e as propriedades dali extraídas independem da figura da experiência e são válidas universalmente para todo e qualquer círculo.

“O conhecimento filosófico considera, pois, o particular apenas no geral, o conhecimento matemático, o geral no particular e mesmo no

¹ Cf. B p.742

² Kant se utiliza do termo *in concreto* quando se refere à construção realizada a nível da intuição.



individual, mas a priori e por meio da razão, de modo que, da mesma maneira que este individual está determinado por certas condições gerais da construção, também o objeto do conceito, a que este individual corresponde apenas como seu esquema, deve ser pensado como universalmente determinado". (2,B p.742)

"Dê-se a um filósofo o conceito de um triângulo retângulo e o encargo de investigar, à sua maneira como pode ser a relação da soma dos ângulos desse triângulo com o ângulo reto. Nada possui a não ser o conceito de uma figura que está limitada por três linhas retas e nessa figura o conceito de igual número de ângulos. Pode então refletir tanto quanto quiser sobre esse conceito, que, a partir dele, nada produzirá de novo. Pode analisar e tornar claro o conceito de linha reta ou de ângulo ou do número três, mas não chegará a outras propriedades que não estejam contidas nestes conceitos. Mas que o geômetra tome esta questão. Começa imediatamente a construir um triângulo (...) Consegue, dessa maneira, graças a uma cadeia de raciocínios, guiado pela intuição, a solução perfeitamente clara e ao mesmo tempo universal do problema". (2,B p.744-745)

O enfoque dado ao caráter construtivo da matemática cuja referência intuitiva é capaz de, através de um individual, representar relações gerais, nos permite explorar, além do encontro do elemento intuitivo exigido pela síntese *a priori*, isto é, por qualquer ligação que possa ser realizada antes da experiência, as regras da construção de tais conceitos.

"... Determinar a priori no espaço uma intuição (uma figura), dividir o tempo (a duração) ou simplesmente reconhecer o que tem de universal a síntese de uma só e mesma coisa no tempo e no espaço e, como resultado, a grandeza de uma intuição em geral (o número), é operação



racional por construção de conceitos e chama-se matemática". (2,B p.752)

Para compreensão do método de construção matemática faz-se necessário introduzir outras noções presentes no seu sistema crítico.

Kant apresentou o nosso conhecimento como proveniente de duas fontes, uma das quais a sensibilidade que, como vimos, recebe representações, e a outra, o entendimento que pensa as representações mediante conceitos. O conhecimento humano é conhecimento por conceitos (discursivo). A intuição nos fornece o *diverso* ou seja, representações desordenadas, as quais devem ser ordenadas e ligadas pelo entendimento. Ambas as faculdades são essenciais para o processo do conhecimento. Desse modo, pode-se lêr:

"... Sem a sensibilidade nenhum objeto nos seria dado; sem o entendimento nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios, intuições sem conceito são cegas. Pelo que é tão necessário tornar sensíveis os conceitos (isto é, acrescentar-lhes o objeto na intuição) como tornar compreensíveis as intuições (isto é, submetê-las aos conceitos) ... O entendimento nada pode intuir e os sentidos nada podem pensar. Só pela sua reunião se obtém conhecimento. (...) " (2,B p.75)

O entendimento é uma faculdade ativa e é a sua espontaneidade que permite que a síntese do diverso seja efetuada. Tal síntese, destituída de um conteúdo empírico, retrata a síntese pura das representações, ou seja, o modo como podemos representar *a priori* o diverso da intuição pura apresentados no espaço e tempo, unificado e organizado pelo entendimento.

Então, de acordo com a proposta kantiana, o espaço e tempo são condições pura da apresentação do diverso da intuição enquanto os conceitos são responsáveis por conferir unidade à síntese pura das representações, segundo a faculdade do entendimento.



Kant montou sua tábua das categorias ou dos conceitos puros do entendimento e a dividiu em quatro classes, sendo que as duas primeiras (categorias matemáticas) se relacionam diretamente aos objetos da intuição, e as duas outras (categorias dinâmicas) se referem à forma da existência desses objetos em suas relações recíprocas e em relação ao entendimento³.

Na filosofia transcendental kantiana devemos ter sempre presente o sinalizador de objetividade, por ele apresentado, ou seja, a experiência. Embora as intuições puras e os conceitos puros do entendimento nos permitam requerer um caráter transcendental, para que haja conhecimento de algo, como vimos, é sempre necessário que os conceitos se apliquem às intuições, ou, em última instância, à possibilidade da experiência.

A sensibilidade é, com efeito, uma faculdade passiva pois através dela os objetos apenas nos afetam independente de nossa vontade. São apenas formas de recepção que não permitem nada conhecer. Consequentemente, se faz necessário que a faculdade do entendimento venha exercer a sua espontaneidade e, assim, por meio de conceitos pensar as intuições puras. Estas nada mais são do que a soma da experiência possível.

E por isso Kant buscou na “Dedução Transcendental das Categorias” legitimar transcendentalmente o uso dos conceitos puros do entendimento de modo a remetê-los sempre à experiência possível.

Como sabemos, as intuições puras são somente condições de se nos apresentarem objetos e só têm validade no âmbito da experiência possível. Portanto, mesmo a matemática só se manteve num caminho seguro porque seus conceitos se referem sempre à experiência possível como conteúdo de suas construções pois, as condições de uma experiência possível são as condições da possibilidade dos objetos da experiência.

Todas as nossas representações referem-se antes de tudo ao diverso da intuição que nos apresenta a matéria bruta dos sentidos, e só a unidade da intuição nos permite representá-las.

³ Não nos deteremos aqui em detalhar a tábua das categorias, mas simplesmente nos referiremos a ela conforme seja necessário para compreensão do nosso trabalho.



Mas, observa Kant, a capacidade de receber objetos não é responsável pela unidade das representações. A sensibilidade é uma faculdade passiva que apresenta a nós a multiplicidade da intuição. Cabe, em última instância, ao entendimento ou a faculdade de representação, mediante a sua espontaneidade, todo o tipo de ligação, quer de intuições, quer de conceitos, a qual Kant denomina síntese.

“ O eu penso deve poder acompanhar todas as minhas representações; se assim não fosse, algo se representaria em mim, que não poderia, de modo algum, ser pensado, que o mesmo é dizer, que a representação ou seria impossível ou pelo menos nada seria para mim. A representação que pode ser dada antes de qualquer pensamento chama-se intuição. Portanto, todo o diverso da intuição possui uma relação necessária do eu penso, no mesmo sujeito em que esse diverso se encontra. Esta representação, porém, é um ato da espontaneidade, isto é, não pode considerar-se pertencente à sensibilidade. Dou-lhe o nome de apercepção pura, para distinguir da empírica ou ainda o de apercepção originária porque é aquela autoconsciência que, ao produzir a representação eu penso que tem de poder acompanhar todas as outras, e que é una e idêntica em toda consciência, não pode ser acompanhada por nenhuma outra”. (2,B pp.131-132)

É, portanto, pela consciência das representações, isto é, pela nossa capacidade de colocá-las juntas ordenadamente que podemos pensar e conhecer os objetos da experiência, inclusive os da matemática, pois todas as minhas intuições, para que possam se apresentar a um sujeito, devem se unir numa consciência que possa organizar a possibilidade da experiência.

Kant deu o nome de unidade transcendental da apercepção àquela pela qual todo diverso dado numa intuição é reunido num conceito do objeto. No entanto, a síntese dos conceitos puros do entendimento ou das categorias realizada segundo a unidade da



apercepção assenta no entendimento sendo, desse modo, puramente intelectual. Ou seja, seus conceitos se relacionam com os objetos da intuição em geral, não sendo possível determinar objeto algum. São deste modo, simples formas do pensamento.

Mas se os conceitos puros do entendimento só podem se referir à intuição pura em geral, a matemática por tratar da intuição pura *in concreto* uma vez que apresenta na intuição pura o objeto correspondente ao seu conceito, busca na faculdade da imaginação a síntese que se lhe refere. A imaginação tem, portanto, especial relevância na construção dos conceitos matemáticos.

Kant na “Dedução Transcendental” definiu a imaginação como “a faculdade de representar um objeto, mesmo sem a presença deste na intuição”. Tal faculdade é responsável pela realização da síntese do diverso da intuição sensível, a qual Kant denomina síntese figurada em distinção à síntese realizada pelo entendimento.

“Mas, visto que toda a nossa intuição é sensível, a imaginação pertence à sensibilidade, (...); na medida, porém, em que a sua síntese é um exercício da espontaneidade (...) que é determinante, e não apenas, como o sentido, determinável pode determinar a priori o sentido, quanto à forma, de acordo com a unidade da apercepção, é portanto uma faculdade de determinar a priori a sensibilidade. (...)”
(2,B pp.151-152)

Portanto, a imaginação que liga o diverso da intuição sensível depende, por um lado, da sensibilidade que lhe fornece a diversidade apreendida e, por outro, do entendimento quanto à unidade da sua síntese intelectual.

Quando traçamos uma linha em pensamento, por exemplo, adicionamos ponto a ponto no espaço segundo as determinações do tempo. Para adicioná-los um após outro e não perdê-los em sua sucessão ou na construção de uma figura é necessário uma síntese interna que a represente em sua totalidade para que a



construção seja efetuada. Ela deve ser construída e apresentada ao sujeito que a constrói.

À faculdade da imaginação compete reproduzir e produzir sínteses de acordo com a sensibilidade e o entendimento. Kant distinguiu um do outro ambos os processos da imaginação:

“ ... Mas , na medida em que a imaginação é espontaneidade, também por vezes lhe chamo imaginação produtiva e assim a distingo da imaginação reprodutiva, cuja síntese está submetida a leis meramente empíricas, as da associação ... ” (2,B p.152)

Assim, propôs Kant, para conhecermos *a priori* os objetos da experiência devem nos ser dados, primeiro, o diverso da intuição pura; segundo, a síntese desse diverso pela imaginação; terceiro, os conceitos que conferem unidade a esta síntese pura e que consistem unicamente na representação dessa unidade sintética necessária.

A função produtiva da imaginação regulamenta a construção matemática de acordo com os esquemas, por isso nenhuma outra parte da **Crítica da Razão Pura** é tão esclarecedora no concernente ao modo de construção matemática do que aquela que trata do esquematismo. O esquematismo é em essência um elemento articulador entre as categorias e os fenômenos, ou ainda entre o entendimento e a sensibilidade.

A sensibilidade, como vimos, trata de apresentar os fenômenos intuitivamente, enquanto o entendimento trata de conceitos os quais devem ser aplicados aos fenômenos. A imaginação produtiva, de acordo com o esquematismo, produz esquemas os quais possibilitam relacionar os conceitos aos objetos da intuição.

É pela determinação transcendental do tempo, ou seja, em vista daquilo que o tempo nos apresenta como totalmente *a priori*, que se possibilita o esquematismo. O tempo, segundo afirmou

Kant, apresenta-se como condição formal do diverso do sentido interno e, portanto, da ligação de todas as representações. Por ele, o diverso *a priori* se apresenta na intuição pura de acordo com as regras de unificação que só são possíveis mediante conceitos, embora devam determinar o diverso possível da experiência, pois qualquer representação empírica do diverso implica a temporalidade.

Esta determinação possibilita mediar conceitos e fenômenos sem comprometimento dos elementos envolvidos, apresentando-nos os esquemas.

O esquema se apresenta como um produto da imaginação produtiva vista em sua síntese, não dizendo respeito a uma intuição particular. Distinguindo-se da imagem cuja relação se dá com o sensível, o esquema é a representação de um processo em geral da imaginação.

Tendo em vista que os nossos conceitos puros não se assentam sobre a imagem mas sobre esquemas, estes só podem se apresentar determinando, como uma regra, nossa intuição em relação a um certo conceito em geral (ou à forma lógica do conceito).

Os números em geral ou uma figura geométrica em geral são, segundo Kant, claros exemplos de esquemas. Os esquemas são, portanto, monogramas gerais através das quais é possível construir a matemática.

Assim, esclareceu o próprio Kant:

“ ... Quando disponho cinco pontos um após o outro (...) tenho uma imagem do número cinco. Em contrapartida, quando apenas penso um número em geral, que pode ser cinco ou cem, este pensamento é antes a representação de um método para representar um conjunto de acordo com certo conceito, por exemplo, mil numa imagem, que eu, no último caso, dificilmente poderia abranger com a vista e comparar com o conceito. Ora é esta representação de um processo geral da imaginação para dar a um conceito a sua imagem que designo pelo nome de esquema desse conceito”. (2,B pp.179-180)

Assim notamos, o esquematismo na matemática permite que algo seja construído. De outro modo, o esquema para o conceito de um cão em geral, por exemplo, por se tratar de um conceito empírico, refere-se diretamente a existência de cães na natureza, enquanto que o esquema de um triângulo é construído totalmente *a priori*. Mas a mesma regra que vale para um enquanto produção de esquema, vale para o outro.

Poderíamos também pensar, do modo como nos alertou Kant, que um conceito matemático não se diferenciaria de um conceito metafísico, porque sua existência não se “materializa” como no caso de um cão. Mas, perguntamos, qual seria o esquema de um conceito metafísico qualquer?

Ora, vimos que o esquema é um elemento articulador entre o entendimento e a sensibilidade. Mesmo um conceito empírico pode ser representado em sua forma pura, pois pode ser previsto por ela. Mas um conceito metafísico, por não estar submetido as mesmas condições que possibilitam o nosso conhecimento (intuição e conceito) não são passíveis de representação, e portanto, de um esquema que antecipe a representação intuitiva referente ao seu conceito. Antes disso, as regras que propiciariam a representação de tal conceito não podem jamais ser construídas.

Desse modo Kant celebraria mais uma vitória da matemática contra a filosofia especulativa:

“ Não se trata aqui de proposições analíticas, que podem ser engendradas por simples análise dos conceitos (no que teria o filósofo, sem dúvida, a vantagem sobre o seu rival), mas de proposições sintéticas, que devem ser conhecidas a priori. Com efeito, não devo considerar aquilo que realmente penso no meu conceito de triângulo (este não é mais que mera definição); pelo contrário devo sair dele para alcançar propriedades que não residem nesse conceito, mas contudo lhe pertencem. Ora, isso não é possível a não ser que determine o meu objeto segundo as condições, seja da intuição empírica, seja da intuição pura. No primeiro caso (medindo



os ângulos do triângulo) terei apenas uma proposição empírica que não encerra nenhuma generalidade e muito menos universalidade, e da qual não é aqui o caso. O segundo procedimento é a construção matemática, e precisamente aqui a construção geométrica, mediante a qual acrescento numa intuição pura, tanto como numa intuição empírica, o diverso que pertence ao esquema de um triângulo em geral, por consequência ao seu conceito; neste modo de proceder devem absolutamente ser construídas proposições sintéticas universais.” (2,B p.746)

O conhecimento matemático se legitima, então, segundo a capacidade da imaginação produtiva de construir, como na geometria, as figuras no espaço e/ou captá-las no tempo e produzindo o próprio tempo, como na aritmética. Tais procedimentos se efetuam sem o auxílio da experiência, embora possam antecipá-la em suas formas possíveis. É a fundamentação no espaço e no tempo que, de qualquer modo, possibilita a experiência de acordo com as regras do entendimento.

A matemática constrói-se a partir da intuição pura, desenvolvendo-se pelo esquematismo para que se lhe possibilite a relação com os conceitos puros do entendimento. Um objeto da intuição empírica apresenta-se como fenômeno *in concreto* na experiência. É, contudo, através das formas puras da intuição que ele encontra as condições de sua possibilidade, o que se perfaz quando aquelas formas se encontram ligadas ao entendimento pelo esquematismo. No processo de construção do objeto matemático dispensa-se a apresentação de uma intuição empírica, pois a matéria de uma representação só é dada *a posteriori*, e com certeza ninguém jamais encontrou figuras geométricas ou um número na natureza.

Qual é, então, o estatuto de realidade das construções matemáticas se só a matéria pode lhe dar este status? Qual a sua relação exata com a experiência e em que medida a matemática pode ser legitimada por ela?



CAP. II - MATEMÁTICA E REALIDADE

II. 1. - O Real e o Existente

Toda a nossa exposição anterior visou destacar o papel e o procedimento das ciências matemáticas no projeto crítico de Kant. Mas a nossa finalidade específica é acentuar as relações que aquelas ciências apresentam com a realidade, pois entendemos que através destas relações é possível resgatar aspectos da filosofia kantiana, os quais muito têm de interesse e atualidade.

Para explicar tais aspectos, mudaremos um pouco o nosso método de exposição, que antes tratava de rastrear mais linearmente a filosofia kantiana. Já esboçada a proposta de Kant, buscaremos pinçar elementos que nos permitam tratar das questões levantadas, procurando, no entanto, respondê-las respeitando os parâmetros da filosofia crítica. Para esclarecer aquilo que Kant não deixou tão claro, buscaremos, inclusive a ajuda de outros estudiosos de sua obra.

Ao tentar responder às questões acerca do estatuto de realidade das construções matemáticas, e da relação desta com o mundo da experiência ou da realidade exterior, sentimos dificuldade em tratá-las separadamente.

Isto se explica porque os objetos tanto da matemática como os exteriores os quais são suscetíveis de aplicação matemática são objetos que se apresentam pelo nosso modo único de perceber as coisas, e são, na filosofia kantiana, restritos a essa representação, ou seja, ao modo como nós podemos conhecer, isto é, intuir e pensar os fenômenos da experiência. Pois, claro, tanto o objeto da matemática quanto o objeto real da experiência externa, não são



aqui de modo algum tratados como “coisas em si”, e nem, no caso dos objetos da matemática, simplesmente como *noumêna*.⁴

Desse modo, tais objetos serão tratados conjuntamente em nossa exposição tomando o cuidado de acentuar quando se trata de um e de outro, pois entendemos que desse modo eles se esclarecerão mutuamente.

Os conceitos matemáticos, como vimos, são construídos, isto é, apresentados *a priori* na intuição, por nossa capacidade de pensar os objetos da experiência de acordo com a intuição pura. E somente em vista deste recurso, ou seja, pelo fato de “algo” apresentar-se a nós na intuição pura, que se torna possível a construção de um conceito, ao qual deve, segundo a proposta crítica de Kant, corresponder um objeto. Assim, devemos procurar o objeto que corresponde ao conceito matemático.

Os conceitos matemáticos (a representação) como os seus esquemas (método de representação) referem-se à generalidade com que se pode representar objetos individuais considerando o geral no particular, uma vez que, como vimos, a intuição que auxilia na construção matemática permite a representação de um particular que valha universalmente.

Para construir um conceito, por exemplo de triângulo, operamos mediante a intuição espacial, segundo as regras do esquematismo, um método de representar uma figura que embora possa trazer traços empíricos (como o triângulo desenhado no papel) exprimem um conceito. A generalidade se apresenta no ato da construção do triângulo, e não na figura individual representada. Enquanto intuitiva, refere-se a um objeto singular. Mas enquanto é uma representação geral, mediante sua representação *a priori*, exprime algo que valha universalmente para qualquer representação de um triângulo.

Do mesmo modo, o conceito de um número qualquer é construído mediante a intuição temporal e trata da unidade da síntese do diverso de uma intuição homogênea em geral. Tal síntese efetuada

⁴ Kant apresentou na *Crítica da Razão Pura* um pequeno capítulo no qual tratou da distinção entre fenômeno e *noumêno*, onde acentuou que este último, “objeto intelectual”, não se apresenta à nossa intuição (Cf. B/294 e ss.). Em princípio adiantaremos que quanto às suas relações de exterioridade, os objetos da matemática são tratados de acordo com o grau de realidade que expressam.



pela imaginação refere-se diretamente ao que pode ser percebido temporalmente, ou seja, intuitivamente, e ao mesmo tempo exprime a generalidade do que é possível apresentar-se na experiência.

Todos os princípios e as representações dos objetos da matemática são produzidos *a priori*. Como já aludimos anteriormente, ninguém jamais encontrou um triângulo ou um número na natureza e, portanto, nada de material, que aliás, só pode representar-se *a posteriori*, pertence à construção dos objetos matemáticos propriamente ditos.

Assim, uma figura geométrica se apresenta, seja quando nos utilizamos de recursos empíricos usando lápis e papel por exemplo, ou quando a imaginamos de acordo com regras totalmente *a priori*. A representação que fazemos *a posteriori* no papel, ou seja, a representação individual, jamais daria conta nela mesma da generalidade expressa em seu conceito.

Do mesmo modo, um número, representante da síntese quantitativa do diverso da intuição segundo determinações do tempo, apresenta-se mais facilmente compreendido de modo completamente puro. Não tratamos, portanto, de sua representação empírica, ou seja, de sua imagem, mas sim, de acordo com o esquema, de sua produção pura. Pois, qualquer que possa vir a ser a imagem do objeto matemático, ele é determinado antes e independentemente dela, pelas regras através das quais é construído, ou seja, pelas quais ele é possível.

Um objeto da intuição empírica apresenta-se como fenômeno *in concreto* na experiência. Suscetível, porém, de formas puras, condições de sua possibilidade de apresentar-se a nós, possui um esquema correspondente o qual permite que o nosso entendimento lhe aplique conceitos. O objeto matemático, ou seja, o objeto apresentado pela intuição pura, surge como um fenômeno *in concreto* nas nossas formas puras de representação, ou seja, ao nível de uma “experiência interna”, que se nos mostra pura como seus esquemas e seus conceitos.

Por conseqüência, ao tentar subsumir os fenômenos matemáticos sob a categoria da existência, parece faltar ao objeto dessa representação, uma referência natural que pudesse dotar-lhe de uma possível sensação, a qual seria responsável por sua realidade. Contudo, a síntese de sua representação no espaço e no tempo é



idêntica à síntese que permite a possibilidade da existência e realidade dos objetos da experiência empírica⁵, ou externa, deste modo acomodando-se às mesmas regras de representação. Trata-se, portanto, de uma existência possível.

Pode-se perguntar, então, o que distinguiria os fenômenos empíricos dos fenômenos matemáticos. Qual seria o estatuto de realidade dos objetos matemáticos e que tipo de existência eles teriam?

Do ponto de vista transcendental, mesmo um objeto empírico é um fenômeno que existe independentemente do sujeito que o representa. Ele só se apresenta quando um sujeito qualquer o apreendeu de acordo com a sua capacidade de ser afetado pelos objetos, ou seja, de acordo com a sensibilidade, o ordenando e o categorizando pelo entendimento. Dele mesmo nada sabemos, mas apenas da sensação provocada pela afecção (matéria) do fenômeno. Nem por isso, de acordo com a proposta kantiana, podemos concluir por sua não existência. Faltaria, contudo, procurar para o fenômeno matemático “a coisa” externa e empírica responsável por uma “provável sensação” que este exerce sobre a nossa sensibilidade.

Kant afirmou claramente que não se deve atribuir um ser aos objetos da geometria, mas somente uma essência⁶, pois sabemos que por construção de conceitos não podemos representar uma existência efetiva, mas somente a possibilidade dessa existência. Com esta afirmação Kant buscou justamente acentuar a impossibilidade de representar-se a existência numa intuição *a priori*, pois ela só se efetiva na experiência empírica.

Ora, o tempo se produz na apreensão da intuição, ou melhor, do fenômeno, e o fenômeno matemático é a representação de um tempo representado nele mesmo. A existência, nos orientou Kant, trata da **realidade** de um objeto em algum tempo. Então, se sabemos que o objeto matemático se apresenta num tempo determinado, devemos perguntar por sua realidade.

⁵ Usamos a expressão “experiência empírica” para distingui-la do que chamamos de experiência interna ou matemática, embora tal termo pareça, na terminologia kantiana, um tanto redundante.

⁶ Cf. 4-Kant. p. 3 (nota de rodapé)



Na **Crítica da Razão Pura** Kant expôs-nos o conceito de realidade em três momentos, respectivamente concordantes à intuição, à imaginação e ao entendimento.

A nível intuitivo “**real** é o que passa pelos sentidos”. Assim, notamos, na representação de um objeto empírico “algo”, externo a nós, responsável pela sensação que em nós corresponde ao fenômeno, é apresentado aos sentidos da percepção. Intuitivamente falando, portanto, o objeto matemático passa pelos sentidos, e por esta razão deve ser considerado real.

No esquematismo a realidade é definida como “a existência num determinado tempo”. Se aceitarmos, que os objetos da matemática são possíveis no tempo, já que nele se constroem, então eles têm existência possível, e portanto, têm realidade possível.

Num terceiro sentido, a nível dos conceitos puros do entendimento, “**real** é aquilo que corresponde a uma sensação **em geral**, ou seja, aquilo cujo conceito **indica** em si próprio um ser no tempo”.

Aqui encontramos alguma dificuldade que pode ser sanada se aceitarmos, como anteriormente dito, nos mantermos sempre nos parâmetros da **possibilidade** de existência.

Em primeiro lugar poderíamos dizer que o fenômeno matemático corresponde a uma **sensação em geral** e não particular, pois à medida em que é construído causa em nós uma mudança operada pela sensibilidade, provocando a realização da síntese e a organização do diverso intuitivo. Tal sensação não é uma sensação no mesmo sentido de uma sensação empiricamente determinada, mas uma sensação provocada pela forma da possibilidade da matéria que se apresenta internamente ao intelecto humano de acordo com as condições da experiência. Também podemos dizer acerca da “indicação de um ser no tempo”, que o conceito matemático indica em si próprio a **possibilidade** de um ser no tempo.

Não podemos fugir da conclusão de que os objetos matemáticos têm uma existência possível. Falaríamos, então, de um modo particular de existência, de forma que o objeto empírico apresentaria uma existência externa material determinada e o objeto matemático uma existência geral restrita à razão como sensibilidade pura, porém de acordo com a possibilidade material da experiência.



Assim, poderíamos classificar os conceitos matemáticos construídos a partir da intuição pura em relação a outros conceitos de “conceitos intuitivos”. Poderíamos também aceitar, de acordo com a proposta de Winterbourne⁷ que Kant identifica existência matemática com possibilidade de construção. Deste modo, os fenômenos matemáticos existem à medida em que podem ser construídos. Mesmo porque a distinção entre realidade, efetividade das coisas e possibilidade se dá a nível do entendimento, mas não é válida em relação ao objeto. Tal distinção foi acentuada por Kant na **Crítica do Juízo**:

“É absolutamente necessário ao entendimento humano distinguir entre a possibilidade e a efetividade das coisas. A razão dessa distinção encontra-se no sujeito e na natureza das suas faculdades de conhecimento. (...) Ora, toda distinção por nós realizada entre o simplesmente possível e o efetivo repousa no fato de o primeiro significar somente a posição da representação de uma coisa relativamente ao nosso conceito e em geral à faculdade de pensar, enquanto o segundo significa a colocação da coisa em si mesma (fora desse conceito). Por isso a distinção entre coisas possíveis e efetivas é tal, que é válida simplesmente para o entendimento humano, pois que na verdade sempre conseguimos pensar alguma coisa, mesmo que não exista ou representar-nos algo como dado, mesmo que disso não tenhamos qualquer conceito.”
(1, p.340)

Eis também o porque da dificuldade de dissociar totalmente a realidade dos objetos próprios da matemática, das relações desta com a realidade. Pois, como vimos, o objeto matemático respeita as mesmas regras de apresentação de qualquer objeto externo a nós, isto é, da experiência empírica, quando esta é considerada como

⁷ V. A.T. Winterbourne em seu artigo Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*. Cambridge, 12 (1): 33- 46, 1981..



destituída de suas determinações materiais, pois, à medida em que entendemos sua construção, entendemos a possibilidade da experiência. Somente a matemática nos permite trabalhar de acordo com a possibilidade da experiência, quando, através de figuras, números e suas relações ordenamos a realidade exterior, aplicando-a a esta última. É por isso também que as categorias matemáticas podem se aplicar a qualquer fenômeno real e exterior, pois elas podem determinar a forma pela qual pensamos os objetos, como *quantum*, de modo que os objetos “são criados para nós no espaço e no tempo, por uma síntese uniforme”.

A realidade potencial emprestada ao objeto da matemática subsidia a compreensão da relação tão estreita que tal ciência mantém com a existência das coisas ou realidade atual. A matemática se aplica tão perfeitamente ao mundo exterior porque ela trabalha a própria forma de intuir a realidade. Os objetos por ela construídos, do mesmo modo, se submetem à forma da experiência, pois preenchem em essência o nosso potencial intuitivo. Ela traz em si a forma intuitiva pura de toda a realidade. A matemática, portanto, apresenta a possibilidade da existência do real.

Como vimos, o esquematismo permite à essência da possibilidade da matemática vir a tratar da realidade, pois os conceitos construídos pela matemática, são peculiarmente homogêneos à realidade externa, de acordo com o seu esquema, podendo com justeza ser aplicados ao mundo da experiência.

Kant notou claramente tal homogeneidade quando mostrou que o conceito geométrico puro de um círculo corresponde ao conceito empírico de um prato, já que o redondo pensado no círculo é intuído no prato.

Na aplicação dos conceitos puros à experiência, o modo de produção de sua síntese pode ser, segundo o filósofo alemão, **matemático** quando se reporta à intuição, ou **dinâmico** quando trata da existência do fenômeno.

Sabemos que as condições *a priori* da intuição são absolutamente necessárias pois todos os fenômenos só se apresentam desse modo. Assim, a matemática pode ser aplicada aos objetos da experiência.



“A síntese dos espaços e dos tempos, considerada forma essencial de toda intuição, é o que torna possível, simultaneamente, a apreensão do fenômeno, portanto todo conhecimento dos objetos dessa experiência é o que a matemática, no seu uso puro, demonstra em relação a essa síntese, é o que necessariamente é válido para esta”. (2,B p.201)

Todos os fenômenos podem apresentar-se para Kant como **grandezas extensivas**, ou seja “aquela em que a representação das partes torna possível a representação do todo” e como **grandeza intensiva**, dado o grau de influência da sensação sobre os sentidos⁸.

No que se refere à parte pura das representações, todos os fenômenos, inclusive os matemáticos, podem apresentar-se como grandezas extensivas, pois, como já observamos antes, é impossível a representação de algo que não seja produzido em suas partes, as quais poderão ser posteriormente unificadas. Portanto, na intuição do fenômeno como um todo, já se encontram incluídas as partes da representação.

No que se refere à grandeza intensiva, porém, Kant observou que o fenômeno se apresenta de modo gradual a uma consciência empírica e a uma consciência pura. O grau de realidade que é determinado pela sensação desaparece completamente na intuição pura, pois a sensação não pode de modo algum ser antecipada, e aumentada gradativamente na intuição empírica.

Assim, a partir de uma consciência pura, matemática, torna-se possível a existência do real dos sentidos. Tal consciência pura, geradora de princípios puros e constitutivos, permite a aplicação da matemática aos fenômenos, enquanto *quantum* propício de encher-se de realidade.

Desse modo, podemos ver porque a realidade possível, “o vir a ter um grau” potencializado mas não atualizado pelo objeto da matemática, subsidia a compreensão da relação tão estreita que tal ciência mantém com a existência das coisas ou realidade atual. A matemática se aplica tão perfeitamente ao mundo exterior porque ela respeita em toda a extensão da nossa forma perceptiva do mundo o

⁸ Cf. B / 202 e ss.



nosso modo de ler a realidade. Os objetos por ela construídos se submetem, do mesmo modo, à forma da experiência, pois eles preenchem em essência o nosso potencial intuitivo. Seus princípios já tem, em si, a forma intuitiva pura de toda a realidade, e consequentemente são a possibilidade, condição *a priori* da existência do real.

II. 2 - Geometria, Aritmética e Álgebra

É fato comum na abordagem da filosofia matemática de Kant, a observação de que o filósofo alemão teria principalmente tratado de esclarecer e ilustrar procedimentos da geometria euclidiana. Tal observação gerou duas questões freqüentemente discutidas pelos leitores preocupados com a concepção matemática kantiana, questões estas que serão relevantes para discussões levantadas em capítulos posteriores.

A primeira trata de avaliar se realmente há algum privilégio imputado por Kant à geometria sobre a aritmética e principalmente sobre a álgebra.

Fora de dúvida, o fato de Kant ter esclarecido tão pouco acerca da álgebra, apesar da dificuldade maior que esta apresenta do ponto de vista intuitivo, deixa uma certa impressão de obscuridade e de falta de sustentação⁹ em sua discussão geral da matemática.

Mas, aqui defendemos nós que o recurso freqüente à geometria euclidiana se deve mais ao fato desta descrever de forma mais observável as relações e regras espaciais do que pela supremacia de seus fundamentos.

⁹ Decorrente dessa abordagem veremos no próximo capítulo que J.HINTIKKA considerou as relações de tempo insustentáveis -- fundação intuitiva da aritmética e da álgebra -- propondo outro modo de resgatar a concepção kantiana.



A “Estética Transcendental” trata de compôr a nossa forma perceptiva da experiência, já que seus elementos puros *a priori* são responsáveis pela possibilidade de se nos apresentar objetos. O espaço limita-se aos fenômenos externos sem nunca dispensar a determinação do tempo que nos permite realizar a síntese a nível da imaginação.

Se pensarmos na produção de figuras no espaço, do modo como acontece na geometria euclidiana, o caráter construtivo da matemática pode ser acompanhado empiricamente (desenhando um círculo no papel, por exemplo) e desse modo parece bastante evidente.

O mesmo já não acontece numa operação aritmética, pois esta, dispensando a representação espacial, trata de relações de tempo. E os números determinam como *quantum* o seu elemento intuitivo.

Se considerarmos, também, a totalidade da teoria do tempo na filosofia kantiana, mais facilmente podemos aceitar o estatuto próprio conferido às representações algébricas.

O fato da “Estética Transcendental” tratar mais especificamente da forma pela qual os fenômenos em geral se apresentam no espaço perceptivo, a função do tempo aí considerada parece reduzida. E a geometria então, por captar tais relações, parece privilegiada.

Mas as funções temporais são mais amplas do que aí expostas. Primeiro, porque vimos que as relações a elas subjacentes determinam tanto a representação das coisas quanto a forma de intuirmo-nos a nós mesmos. Também, de acordo com a nossa faculdade da imaginação, o tempo nos permite realizar a síntese pura das representações, e é somente pela determinação transcendental do tempo, abstraídas todas as características espaciais, que se tem uma garantia de representações universais, pois na síntese das representações puras, embora possamos dispensar a construção de figuras, jamais poderíamos dispensar as construções temporais, pois sem elas jamais teríamos qualquer tipo de representação.

As operações algébricas foram entendidas por Kant como construções simbólicas¹⁰, as quais, porém, remetem-se sempre à

¹⁰ Kant na *Crítica do Juízo* referiu-se aos sinais algébricos considerando-os meras marcas subjetivas ou simples expressão de conceitos (cf. I-Kant, p 221). Tal afirmação veio de encontro a afirmação daqueles leitores de Kant que subestimaram o papel da álgebra em sua



possibilidade da experiência. Assim, consideramos uma notação algébrica correspondente a uma representação temporal possível, cuja forma remete-se imediatamente à possibilidade intuitiva que representa.

Em concordância com Winterbourne entendemos, por conseguinte, ser a álgebra na concepção matemática kantiana, uma ciência mais pura e não menos intuitiva do que a geometria ou a aritmética. Embora trate seu conteúdo possível, através de suas notações, com certo distanciamento, não perde seu vínculo com a intuição. As operações algébricas respeitam as regras do esquematismo, e este procedimento solicita sempre o auxílio da intuição enquanto garantia da possibilidade da experiência. Os símbolos algébricos não trazem em si traços intuitivos, mas os representam e estão, em consequência disso, determinados pelos princípios da experiência.

Um sinal algébrico representa sempre um elemento temporal essencialmente intuitivo, e suas expressões representam na intuição relações de magnitude. Tal elemento, produzido na imaginação, de modo algum é criado pela simples razão de acordo com conceitos lógicos, cujos esquemas sequer podemos representar. Por ser produzido de acordo com o esquematismo seu vínculo intuitivo está garantido, o que jamais aconteceria se a produção fosse unicamente lógica.

Assegurando o caráter intuitivo da álgebra e entendendo que Kant admitiria uma geometria sem figuras, concluímos da possível superioridade da álgebra em relação à geometria, por esta última ser compreendida pela primeira, embora tenha sido preterida nas ilustrações elucidativas da **Crítica da Razão Pura**.

A segunda questão objetada por alguns comentadores, trata do fato de Kant ter tão frequentemente se utilizado da geometria euclidiana gerando a idéia de que o seu sistema não abarcaria outras geometrias ou, ao menos, que a concepção kantiana defendia sua supremacia¹¹.

teoria. Winterbourne no artigo “A Construção e o Papel do Esquematismo na Filosofia da Matemática de Kant” apresentou uma resposta a esse problema reafirmando a álgebra como a mais pura das ciências.

¹¹ Tal questão será retomada no capítulo IV, quando abordaremos a proposta de HANS REICHENBACH.



Realmente, a geometria euclidiana obteve muito destaque na obra do filósofo alemão, tendo sido frequentemente utilizada para ilustrar o procedimento construtivo da matemática.

Mas se considerarmos que a geometria euclidiana era inquestionável na época de Kant, já que as geometrias não euclidianas tiveram um surgimento póstumo, não é de se acusar tanto a aparente ingenuidade de sua postura.

Sem dúvida que o espaço perceptivo por nós desenvolvido é euclidiano e que tal fato parece realmente legar uma supremacia de tal geometria.

Mas, quanto a esta questão, defendemos mais uma vez ter Kant se utilizado de tal geometria pela facilidade com que podemos visualizá-la. No mais, basta desconsiderar o fato de tal geometria produzir figuras no espaço que entenderemos porque não podemos afirmar que Kant não aceitava geometrias não euclidianas.

A produção de figuras no espaço é uma característica própria da geometria euclidiana. No entanto, o que é realmente relevante não é propriamente a figura, mas a intuição do espaço que nos possibilitou construí-la, e este espaço permanece na reelaboração de outras geometrias.

Do mesmo modo, já notamos que a geometria euclidiana é uma descrição de nossa intuição espacial e é só por isso que ela é enfatizada em detrimento da geometria analítica.

A “Estética Transcendental” trata de modo mais específico da qualidade que apresentam as figuras espaciais de poderem aplicar-se ao espaço da percepção. A geometria euclidiana apresenta-se como um recurso que possibilita captar as relações que se oferecem ao nível das sínteses imediatas dos dados fornecidos pela intuição pura, permitindo-nos compreender melhor o caráter sintético e construtivo da matemática.

Portanto, se do mesmo modo que na questão da álgebra sairmos do terreno da “Estética” e considerarmos a proposta kantiana como um todo, poderemos desfazer tais mal entendidos quanto à sua concepção matemática¹².

¹² Estudos como os de PALMQUIST e WINTERBOURNE propiciaram uma nova leitura da concepção kantiana, aproximando-a de outras geometrias.



CAP. III - MATEMÁTICA, LÓGICA E REALIDADE.

III. 1. - Hintikka e a Matemática Kantiana.

A relação que se estabelece entre matemática e realidade na concepção kantiana nos levou aos trabalhos de Jakko Hintikka, cuja proposta resgata a matemática de Kant acentuando um novo enfoque da noção de intuição, numa tentativa de aproximação com a lógica moderna¹³.

Hintikka observou um crescente interesse por parte dos filósofos analíticos pela filosofia kantiana, principalmente pelas questões epistemológicas e metafísicas. Embora, de acordo com ele, tais esforços muito venham a colaborar trazendo sugestões interessantes para a investigação filosófica mostrando a relevância e a contemporaneidade do trabalho kantiano, muito pouco tem apresentado de concreto por não terem enfatizado a análise lógica da linguagem.

A proposta a qual Hintikka pretende defender trata de considerar o *a priori* kantiano como conhecimento conceitual e não estendido a um sentido de percepção ou sensibilidade.

No artigo **Kant's new method of thought and his theory of mathematics**¹⁴ Hintikka acentuou a importância da "revolução copernicana" proposta na **Crítica da Razão Pura** para uma nova interpretação de sua teoria da matemática.

¹³ Para a análise da proposta de Hintikka nos utilizamos principalmente dos textos: **Kant On The Mathematical Method** de 1967, **Logic Language Games, And Informacion** de 1973 e **Kant's New Method Of Thought And History Of Mathematics** de 1967.

¹⁴ Cf. 24



Tal método, como sabemos, baseia-se na tese de que “nós só conhecemos *a priori* das coisas o que nós mesmos nelas colocamos”, e nisso, o que há de *a priori* no conteúdo das coisas trata dos conceitos a elas aplicáveis enquanto objetos possíveis. Este tratamento corresponderia, segundo o autor, àquele conferido pela lógica formal no âmbito da representação.

Uma afirmação desta parece confrontar-se diretamente com a proposta de intuição kantiana, mas, para Hintikka, tal incompatibilidade não passa de erros de interpretação da sua epistemologia ou de enganos internos a própria concepção de Kant.

Hintikka apresenta o desconhecimento das premissas da teoria do método matemático kantiano como gerador de um entendimento equivocado das noções de espaço e tempo ou das intuições puras. É claro, por serem tais intuições responsáveis pelo caráter construtivo da matemática, tais interpretações poderiam ser desastrosas para a leitura da concepção kantiana daquela ciência.

A referência de Kant à intuição é frequentemente entendida como um apelo à imaginação espaço temporal, diz Hintikka, mas esta interpretação, se for aceita, é incompatível com os desenvolvimentos posteriores realizados em matemática e lógica.

Desse modo, ao invés de descartar a teoria matemática kantiana, Hintikka a resgata propondo na leitura da “Doutrina Transcendental do Método” uma reinterpretação dos conceitos de intuição e construção matemática, noções estas indispensáveis à concepção kantiana do conhecimento de uma tal natureza.

Ao apresentar sua interpretação do termo intuição, Hintikka procurou defender a tese que Kant não a teria entendido como mais evidente do que um argumento lógico, embora encontrasse dificuldade para sustentar tal idéia¹⁵.

“... In Kant and in his immediate predecessors, the term “intuition” did not necessarily have anything to

¹⁵ Tal dificuldade parece evidente se considerarmos a nossa exposição anterior na qual a interpretação adotada é oposta a defendida por Hintikka. Mas tal argumentação contrária será levantada na segunda parte deste capítulo, conforme metodologia adotada, reservando a esta a proposta de Hintikka.



do with appeal to imaginations or to direct perceptual evidence. In the form of a paradox, we may perhaps say that the intuitions Kant contemplated were not necessarily very intuitive. For Kant, an intuition is simply anything which represents or stands for an individual object as distinguished from general concepts". (24, p.130)

De acordo com a análise de Hintikka, um conceito que designa um objeto específico pode ser chamado intuitivo. Assim, num argumento matemático, os conceitos são considerados pelo **significado** de seus representantes individuais. Dessa maneira, Hintikka declara que o uso de variáveis na álgebra é intuitivo porque as variáveis **significam** números não especificados ou um individual.

A insistência de Kant em conectar intuição e sensibilidade foi para Hintikka, um erro justificado pelo fato dos conhecimentos obtidos por tais intuições serem aplicáveis à experiência. A busca, portanto, de tal referencial impossibilitou que Kant viabilizasse uma intuição capaz de satisfazer aos anseios lógicos construtivos da matemática.

Sabemos que o conhecimento matemático é obtido pela razão a partir de construção de conceitos, e que isto significa exibir *a priori* a intuição correspondente ao conceito. Embora Kant não tenha encontrado outra saída senão através do recurso à sensibilidade, Hintikka defende que o processo de transição de um conceito geral para uma intuição que o represente, nada traz de sensível. A conexão que Kant pensou existir entre matemática e sensibilidade só se apresentaria *a posteriori*. O que pode ser atribuído *a priori* nesta transição não passa de uma representação conceitual a qual traz elementos confundidos em sua representação.

Tal interpretação, que dá excessivo ênfase aos sentidos, acrescenta Hintikka, trata o conhecimento como um processo passivo, como um simples registro de informações, e sabemos que Kant jamais imputou tal passividade ao conhecimento.

Kant contrastou conceitos gerais para representar individuais, ou seja intuições. O uso destas em matemática seria uma generalização de um traço da geometria euclidiana que nos permitiria alcançar a essência do método matemático.



Deste modo ficaria assegurado que a noção de construção não seria sintética no sentido empregado por Kant, pois os juízos sintéticos *a priori* seriam, na verdade, constituídos por dados *a posteriori*.

A razão pela qual Kant pensou que as verdades matemáticas seriam sintéticas, decorreria do fato delas procederem por construção de conceitos. Sabemos, contudo, que exibir *a priori* a intuição correspondente equivale a construir conceitos. Definida pois a intuição como representação de individuais, podemos falar que a matemática é sintética em vista da intuição de tais singulares que representam individuais, embora não passem de conceitos.

Hintikka observa também que um argumento é analítico “se e somente se não introduz qualquer novo individual na discussão”. Este sentido se aproxima completamente do sentido kantiano de analiticidade. Porém Kant entendeu também que as inferências acerca da existência de individuais são impossíveis por meios puramente analíticos. À matemática, todavia, seria permitido referir-se à existência de individuais ou à experiência possível.

O fato da geometria euclidiana nos permitir estender nossa capacidade intuitiva¹⁶ à experiência externa é responsável pela falta de desprendimento desta intuição para com a sensibilidade. Este vínculo ao sensível, por consequência, alarga seu alcance a toda concepção matemática kantiana.

É claro que, através da geometria, podemos facilmente construir uma figura na imaginação de acordo com a nossa faculdade perceptiva, sem a necessidade de desenhá-la sobre um pedaço de papel. Até aqui toda relação geométrica se apresenta de acordo com a estrutura de nossa sensibilidade. Mas, a peculiaridade de tal construção não poderia ser atribuída a um sentido mais amplo de construção. Assim ressalta Hintikka:

“... The only reason why Kant thought that mathematics is based on the use of constructions was that constructions were necessary in the elementary geometry of his day, derived in

¹⁶ Intuitivo, no sentido proposto por Hintikka, é mais desvinculado da sensibilidade do que do lógico.



most cases almost directly from Euclid's Elementa. But this was only an accidental peculiarity of that system of geometry". (23, p.161)

Hintikka propôs averiguar se alguma vez Kant pensou, além do sentido usual de intuição, algum outro **individual** que pudesse corresponder àqueles atualmente usados nos argumentos matemáticos. Assim, propôs que se assumirmos que Kant aceitou por intuição a representação de um individual, seja através da sensibilidade — como intuição propriamente dita — ou através do entendimento — como representação por conceitos correspondentes — melhor poderemos entender o procedimento da álgebra e da aritmética. Consequentemente, adiantamos, em álgebra podemos introduzir uma representação de um individual, algo que a torne sintética, de modo análogo ao procedimento o qual Kant toma por construtivo.

Hintikka transpôs da estrutura da proposição de Euclides, a idéia sugerida pelo filósofo alemão de que a matemática é baseada no uso de exemplos individuais de conceitos gerais.

Com efeito, segundo o procedimento de Euclides, enuncia-se uma proposição geral (**Protaxis**) e amplia-se o conteúdo do enunciado para uma figura particular (**Ecthesis**). Em seguida, a figura construída é complementada por uma construção auxiliar (**Kataskevi**). O próximo passo é provar as inferências extraídas da figura através do uso de axiomas, proposições anteriormente provadas e as propriedades da figura (**Apodéxis**). Depois de alcançadas as conclusões desejadas sobre o particular, voltamos ao enunciado geral para provar a tese.

Este procedimento permite, pelo menos em dois momentos (**Ecthesis** e **Kataskevi**), que a noção de construção no sentido kantiano seja dotada de necessidade. A forma de construção possibilitada por elas é adequada à noção geral de intuição, acrescentando novas entidades individuais no processo.

Portanto, para Hintikka, o termo construção deve ser entendido não só em relação à sensibilidade, como acontece na “Estética Transcendental” e é ilustrado com presteza pela geometria Euclidiana, mas, principalmente no que diz respeito à introdução de representações individuais de termos gerais, que nos permita deduzir



argumentos os quais não se apresentam somente em vista de conceitos gerais.

Tal reconstrução da noção de intuição teria sido aceita por Kant como uma premissa à sua argumentação de que toda a nossa intuição é própria à nossa sensibilidade, pois nada foi mais natural para ele do que conectar individuais com o uso dos nossos sentidos. Assim, defende Hintikka, a conexão entre sensibilidade e intuição foi apresentada por Kant como algo a ser provado, e não assumido.

Kant reconheceu plenamente a possibilidade da introdução de uma nova entidade na construção geométrica, sendo esse acréscimo que a torna sintética, e não, ao contrário do que pensam seus comentadores, o auxílio da imaginação.

O motivo, segundo Hintikka, de Kant ter estendido o uso da construção da geometria para outras partes da matemática foi ter em mente, de acordo com as idéias correntes em sua época defender a conexão entre geometria e as operações aritméticas. Nas palavras de Hintikka:

“... Kant’s statements show that he was perfectly well aware of the connection between the basic arithmetical operations and certain geometrical constructions. (...) It seems to me Kant did not hesitate to generalize to other parts of mathematics, and even beyond mathematics, the distinction between analysis and synthesis in the old geometrical sense of the distinction.” (48, pp.212-213)

Assim, seguindo a posição de Hintikka, em aritmética ou álgebra uma equação constitui-se num juízo analítico se ela puder ser verificada sem a realização de qualquer operação demonstrativa. Dessa maneira Kant exemplificou verdades tais como “ $a=a$ ” e “ $a+b \geq a$ ”.



Podemos então entender porque Kant defendia que a operação “ $7+5=12$ ” é imediatamente certa ou indemonstrável ao compreendê-la à luz da estrutura da geometria euclidiana.

“... The preliminary representation of the number 7 and 5 by means of groups of five and seven individuals corresponds to the setting-out or Ecthesis. The gradual process of combining the two groups into a single group of twelve individuals corresponds to the preparatory construction, to the Kataskevi. (...) When Kant says that simple arithmetical equations are immediate and indemonstrable he simply means that no proof proper, no Apodexis is required to establish them.”
(48, pp.213-214)

A noção de *ecthesis* oferece-nos uma boa pista acerca da significação da noção kantiana de construção¹⁷, permitindo conectar o método matemático com a sensibilidade, pois ela identifica-se com certos métodos de prova da lógica moderna, mais especificamente com uma das mais importantes regras de inferência da teoria da quantificação. A distinção entre método intuitivo e não intuitivo reaparece na formalização do raciocínio matemático como uma distinção entre diferentes significados de prova lógica.

Para Hintikka, a distinção entre raciocínio intuitivo e lógico foi, para Kant ao menos em geometria, equivalente à distinção entre o uso de postulados, ou seja, **princípios de construção**, e o uso de axiomas, ou seja, **princípios de demonstração**. A distinção consiste no fato de que postulados, de acordo com Aristóteles, são hipóteses existenciais. A construção matemática consideraria, portanto, o uso desta última classe de hipótese.

Só assim a construção, enquanto elemento de nossa sensibilidade, pode dar-se *a priori* na matemática. Ao aplicarmos à realidade um argumento matemático particular no curso do qual uma hipótese existencial é utilizada, introduzimos uma representação para

¹⁷ Hintikka nota que tal noção já aparecera antes na lógica aristotélica permitindo a Aristóteles mover considerações gerais de termos particulares.



um novo individual, sem nenhuma necessidade da apresentação do objeto individual pela experiência. Esta apresentação seria, assim, efetuada *a priori*. A existência do objeto individual não é dada pela experiência, mas pela hipótese que o presume, precedendo no entanto o objeto. Não podemos, no entanto, perder de vista que deve haver um objeto qualquer ao qual o representativo corresponda. Devemos por outro lado garantir que a representação introduzida realmente remeta-se a objetos cujas propriedades pressupomos.

"... there is one and only case in which we can be sure that the individuals we have assumed to exist really do so and have the desired properties. This in the case in which we have ourselves created the objects in question or ourselves put the desired properties and relations into them. And he seems to think that there is only one stage of our coming to be aware of objects in which this kind of 'putting properties into objects' can take place. Or, rather, there is only one stage in which we can 'put properties' into all (individual) objects. This stage is sensible perception. For sensible perception is the only way in which an individual object can 'make its way' into our consciousness. Outer sense is the only way in which we can become aware of external objects. For this reason, it is the only stage of our coming to know objects at which we can ourselves give spatial relations to all external objects. Therefore, the spatial relations postulated in geometry must be due to the structure of our outer sense." (23, p.178)

De acordo com as conclusões alcançadas, Hintikka apresenta passo a passo aos argumentos kantianos acerca da matemática, argumentos análogos acerca da teoria da quantificação, os quais transcrevemos aqui:

(1) O raciocínio matemático lida principalmente com a existência de individuais.

(2) Os resultados do raciocínio matemático são aplicados *a priori* a toda experiência, de acordo com o resultado de sua “revolução copernicana”.

(3) A existência de individuais tratados no raciocínio matemático é conforme ao processo por meio do qual nós vimos a conhecer a existência de individuais em geral.

Hintikka acrescenta que não devemos nos preocupar com a existência de individuais como tais, mas sim enquanto esses manifestam as suas relações com os outros individuais. Por isso propõe parafrasear (3) como se segue:

(4) As relações mútuas de individuais com as quais o raciocínio matemático lida são conforme o processo por meio do qual podemos conhecer a existência de individuais.

(5) O processo por meio do qual nós conhecemos a existência de individuais em geral é a percepção.

De (4) e (5) segue-se:

(6) A estrutura do raciocínio matemático é própria à estrutura do nosso aparato de percepção.

É o ponto (6) que, para Hintikka, vem justamente complementar os resultados alcançados na “Estética Transcendental” como sendo uma característica básica da doutrina do método matemático em Kant.

Ao tentar transportar os pontos da estrutura kantiana para o campo da lógica simbólica, Hintikka encontrou dificuldades sobretudo no ponto (5), já que os itens (1), (2) e (4) não apresentam implausibilidade.

Segundo Hintikka, no ponto (5), Kant cometeu um sério engano, pois não devemos aceitar que sempre conhecemos a existência de objetos individuais por meio da percepção, no sentido em que ela é a totalidade do processo envolvido. Nem sempre a percepção está envolvida e o conceito de sentido interno ao qual Kant recorre, se apresenta como o ponto mais fraco de seu sistema.

Em consequência disso, nota que se mantivermos esta hipótese, as considerações de Kant acerca da álgebra seriam inválidas, pois, encontraríamos dificuldades em admitir que as variáveis



da álgebra (representações de números individuais), são também conhecidas pela percepção.

" This is the temptation to think that the basic materials of human knowledge are given to us passive receivers who do not have to actively search for these materials". (23, p.180)

Hintikka propõe, então, que a percepção não seja o processo por meio do qual conhecemos a existência de individuais em geral. Para ele, este processo deve ser efetuado por meio de **pesquisa** (*searching*) e **descoberta** (*finding*) .

Desse modo, ele propõe que o ponto (5) deve ser formulado como se segue:

(5) O processo pelo qual nós vimos a conhecer a existência de individuais é pela averiguação ou pela pesquisa.

Assim conclue:

(6) A estrutura de um argumento lógico é próprio à estrutura do processo de **pesquisa e descoberta**.

Aproximando dessa maneira o método matemático kantiano da lógica da quantificação, esta torna-se essencialmente a lógica da **pesquisa e descoberta**.

Assim diz, atentando à terminologia kantiana, que os quantificadores não tratam com conceitos gerais, mas com certos elementos intuitivos. Provavelmente, feitas essas considerações, a teoria da quantificação não tivesse sido propriamente lógica para Kant, já que para ele, a lógica tratava somente de conceitos gerais. Talvez admitisse que a quantificação é menos dependente da lógica do que do método intuitivo, tendo sua inferência sido chamada mais propriamente matemática do que lógica.

Os argumentos matemáticos, como Kant os entendeu, são raciocínios semelhantes àqueles tratados em teoria da quantificação e referem-se, da mesma forma, a procedimentos sintéticos através dos quais novos individuais são introduzidos no



argumento, permitindo-nos deduzir outros que não se apresentariam somente em vista de conceitos gerais. Estes são principalmente os argumentos que tratam de hipóteses existenciais.

Hintikka diz que toda inferência quantificacional pode, como na *ecthesis* geométrica, ser construtiva em certo sentido. Ela é construtiva, pois, para realizá-la nós tentamos construir um quadro da realidade tal qual ela seria se a inferência fosse verdadeira. Para isso introduzimos representações de individuais cuja existência deveria ser verdadeira para satisfazê-lo.

A teoria da quantificação poderia, portanto, ser equivalente ao processo por meio do qual conhecemos a existência de objetos individuais. Nesse sentido, o raciocínio lógico é tão necessário e universal quanto o conhecimento matemático de Kant. De algum modo, propõe Hintikka, conectamos nossos conceitos lógicos de existência os quais constituem objetos da teoria da quantificação, ao modo pelo qual podemos perceber a experiência. E, nesse caso, a experiência relevante é aquela sobre a qual nosso conhecimento de existência se volta.

Além disso, Hintikka acredita que o conceito é inseparável da informação da realidade. A doutrina kantiana manteve a idéia de que o caráter sintético estaria conectado com a experiência real, enquanto que o analítico se relacionaria ao conceito. Porém, defende a afirmação de que a informação conceitual e a informação fatural são inseparáveis na ordem da linguagem. Quando usamos a linguagem para informar ou registrar algo sobre algum aspecto da realidade, envolvemos alternativas acerca do mundo em que vivemos. Nós, de qualquer forma, estamos mediados por certo sistema conceitual para pesquisar a realidade. Não podemos discernir quais as informações sobre a **realidade** e quais as informações sobre **conceitos** com que estamos nos defrontando.

Entretanto, explicita Hintikka, uma sentença quantificada não pode ser comparada diretamente com a realidade como se fosse uma representação isomórfica, mesmo quando ela for verdadeira. Para compará-la com a realidade nós temos primeiro que construir, de acordo com regras determinadas, diferentes *model sets* nos quais ela possa ser fixada, acrescentando um elemento convencional à descrição sugerida.



III. 2. - Kant e Hintikka: limites entre o formal e o lógico e o real ou existente.

Até aqui, na primeira parte, procuramos expôr a abordagem de Hintikka acerca da concepção matemática de Kant. Tal abordagem buscou inserir o projeto matemático de Kant no contexto da lógica moderna.

Nesta segunda parte levantaremos algumas considerações acerca da interpretação de Hintikka, defendendo que tal proposta, embora tenha o mérito de trazer a matemática kantiana para a discussão, não parece de acordo com as premissas da teoria original.

O próprio Hintikka tem em mente, em sua retomada do pensamento de Kant, que equívocos acerca da teoria kantiana da matemática, tanto se deveram a erros de interpretação de seus leitores, como do próprio Kant.

A nossa abordagem acerca da leitura de Hintikka trouxe como preocupação central, as relações entre matemática e realidade. Tais relações parecem ser completamente alteradas, de modo que os limites entre o lógico e o real, na filosofia crítica de Kant, parecem confundir-se totalmente.

A interpretação de Hintikka, por um lado, realmente consegue sanar alguns problemas freqüentemente encontrados na filosofia matemática de Kant, como, por exemplo, o da obscuridade das relações intuitivas em álgebra. Mas, por outro lado, traz irreparáveis prejuízos ao esvaziar o conceito de intuição e considerá-lo uma mera forma lógica.

Quando Hintikka afirmou que “o intuitivo não deve necessariamente se opor ao lógico” ou, que “os argumentos matemáticos não são mais imediatos do que as evidências lógicas”, ele está nivelando relações lógicas e matemáticas. A razão para a tal afirmação, como podemos ver, decorreria do fato de que para Hintikka, os conceitos seriam inseparáveis da informação da realidade.

Devemos notar que a lógica, para Kant, é uma ciência descritiva e analítica que independe do conteúdo das suas



proposições. Ela é um instrumental necessário mas não suficiente para a construção de uma ciência.

Ao contrário do que defendeu Hintikka quando afirmou que “o intuitivo não deve necessariamente se opor ao lógico”, o filósofo alemão sempre recorreu à intuição para distinguir e caracterizar argumentos matemáticos, o que jamais seria possível somente com recursos lógicos.

Em vários pontos a proposta de Hintikka parece se aproximar muito daquela de Johann Gottlob Frege¹⁸. Assim como Hintikka, Frege acredita que o conceito de intuição na filosofia kantiana é mais amplo do que aquele apresentado na “Estética”. No entanto, tal sentido é ampliado por ele principalmente na “Lógica Transcendental” de modo a substar o parentesco entre geometria e aritmética.

Hintikka também parece ter tomado de Frege a idéia de que a intuição temporal é o ponto mais fraco do sistema kantiano, uma vez que Frege professa que “o apelo à intuição se faz quando não se é capaz de apresentar outro fundamento”. (47, §12)

Deixamos claro, porém, que embora em termos kantianos a proposta de Hintikka pudesse apresentar-se meramente como defensora do reducionismo lógico das ciências matemáticas isto não se dá. Diferentemente de Frege e Russell, Hintikka afirmou claramente que, incluída a lógica da quantificação, a lógica moderna seria insuficiente para dar conta das verdades matemáticas.

Hintikka, ao propor que o termo intuição seja entendido de modo mais amplo parece ultrapassar as fronteiras da proposta kantiana e fazendo isto, desrespeita os limites impostos por aquela teoria.

É certo que a análise da matemática kantiana, principalmente da noção de intuição, efetuada na amplitude de toda a **Crítica da Razão Pura**, trouxe novos elementos para a compreensão do método matemático. Assim, como bem notou Hintikka, a noção de construção que se apresenta na “Doutrina Transcendental do Método”, ou seja, a consideração de que o método matemático trata o geral no particular e mesmo no individual, determinado por certas condições

¹⁸ V. FREGE, J.G. **Os Fundamentos da Aritmética**. in “Os Pensadores” trad. Luiz Henrique dos Santos, São Paulo, Ed. Abril, 1974.



gerais, em muito possibilitou a compreensão da teoria kantiana. Mas tal afirmação não permite que descartemos a intuição do modo como ela se nos foi apresentada na “Estética Transcendental”, substituindo-a por representantes lógicos e ultrapassando as regras da experiência possível. Pois, embora Kant tenha permitido que a matemática se referisse *a priori* aos fenômenos, ele nunca admitiu que ela deixasse de se referir a experiência possível.

Por um lado, no que se refere ao conceito de construção, notamos que construir *a priori* um conceito parece um processo pelo qual não se separam os elementos envolvidos, já que *a priori* se refere ao que nós colocamos pelas mesmas condições com as quais podemos experimentar o mundo. Construir conceitos só parece possível à medida em que as condições próprias da sensibilidade e do entendimento são respeitadas.

Hintikka procurou defender que o processo de transição de um conceito geral para uma intuição que o represente não tem nada de sensível e que, a ênfase dada à sensibilidade transforma o processo de conhecimento num processo passivo. Porém, parece ter esquecido que a construção de conceitos, própria do conhecimento matemático, só se torna possível à medida que as condições próprias da sensibilidade — ou seja, a apresentação, nesse caso *a priori*, do objeto construído pelo conceito — e as leis do entendimento são respeitadas. O **material** que nós procuramos, depende de nossa atividade, depende da nossa capacidade de sintetizar e organizar o diverso da intuição pura, que para ser unificado, deve se apresentar de algum modo a nós; mesmo que só de acordo com a mera possibilidade, o que, neste caso, já parece suficiente.

Por outro lado, observamos que, de fato, excetuando-se a geometria euclidiana, encontraremos algumas dificuldades quando queremos precisar o caráter intuitivo dos outros domínios da matemática, como é caso da própria aritmética e principalmente da álgebra.

Para evitar a saída de Frege que considerou as operações aritméticas analíticas, em certo sentido, apenas uma lógica mais desenvolvida, Hintikka propôs um novo sentido para os juízos sintéticos. Ou seja, um juízo seria sintético à medida em que introduzisse a representação de um novo individual.



O fato de Hintikka ter desconsiderado os argumentos relativos a intuição temporal, por achá-los insustentáveis, fez com que ele descartasse toda uma gama de possibilidades de se reinterpretarem os problemas internos à filosofia matemática de Kant.

Mas, para nós, a aritmética parece mesmo garantir-se enquanto fundamentada no tempo, pelo uso dos números como seu principal material intuitivo. Seu vínculo com a sensibilidade permanece sempre em relação ao seu material enquanto *quantum*. Tal experimentação parece tão provável ou experimentável quanto aquela das figuras geométricas, já que os números são representações decompostas do tempo, fragmentações de nosso sentido interno.

O número para Kant não é simplesmente um novo individual mas a unidade sintética do diverso que possibilita a representação do mundo fenomênico. Sua particularidade se apresenta justamente a medida em que suas formas puras antecedem os fenômenos que podem ser apresentados na experiência mediante o diverso intuitivo sintetizado pela imaginação de acordo com as leis próprias do entendimento.

Talvez, se Hintikka tivesse atentado para o fato de que o tipo de construção efetuada na geometria (no caso euclidiana) trata de apresentar os próprios objetos de acordo com nossa percepção espaço-temporal pela qual nós podemos visualizar relações espaciais e que na aritmética permanecem apenas as relações temporais, não teria abandonado as considerações acerca das relações de tempo. De outro modo, contudo, a álgebra faz total abstração da natureza do objeto. Ela não apresenta, como na construção geométrica, uma relação espacial, e nem temporal, como na aritmética, mas respeita as condições gerais de qualquer intuição que possa se apresentar por meio de tais relações.

Já notamos antes que a álgebra devido ao fato de proceder, segundo Kant, por construção simbólica e, portanto, por seu alto grau de abstração, nos apresentava maiores dificuldades para a compreensão de seu estatuto ao nível da crítica.

Observamos novamente, porém, que uma variável é a representação de um individual que, embora desconhecido, guarda relação legítima com o objeto que representa e com suas condições intuitivas.



Assim voltamos a considerar, como também fez Hintikka que mesmo em geometria o essencial não é a figura individual representada, mas sim o conceito geral que ela expressa. Do mesmo modo, não devemos nos ocupar com uma variável algébrica em si mesma enquanto mera significação, mas sim à medida em que ela representa um individual, cuja natureza é de nós completamente desconhecida, e reporta-se a conceitos gerais. Embora desconhecendo-se sua relação espaço-temporal, seu vínculo intuitivo está garantido pelas condições humanas de representação que o determinam.

Por isso, acentuamos, as variáveis algébricas não **significam** algo no sentido em que simplesmente estão no lugar de algo sem manter um vínculo **sensível** com aquilo que representam. O procedimento algébrico determina as relações espaço temporais representadas, apresentando a possibilidade legítima da experiência de tal conceito.

Aqui seguimos mais uma vez a sugestão de A. T. Winterbourne que relê as considerações acerca da álgebra à luz do esquematismo. Faz notar que as operações algébricas respeitam as regras do esquematismo, e que esse processo solicita sempre para a sua efetivação, o auxílio da intuição. Tal processo não se deve somente à forma do raciocínio, mas implica na intuição que as operações ocultam. Os símbolos algébricos não trazem em si traços intuitivos, mas os representam segundo a possibilidade intuitiva e estão, deste modo, limitados aos mesmos princípios intuitivos de toda a experiência.

Nossa análise da matemática kantiana trouxe à constatação que uma relação estreita entre matemática e realidade é legítima, porque a experiência possível é o parâmetro da construção matemática. A intuição foi, com efeito, entendida por nós como a forma, condição imediata pela qual a experiência se nos apresenta.

Para nós a proposta de Hintikka descaracteriza a concepção matemática de Kant, não satisfazendo as relações entre matemática e realidade apresentadas pelo filósofo.

Ao assegurar à matemática a referência à existência, Hintikka não o faz em vista dos parâmetros da experiência. Ao contrário, a existência que ele nos apresenta é dotada de um estatuto meramente lógico e formal que dispensa totalmente a consideração da sensibilidade humana.



No entanto, a proposta de Hintikka chama a atenção para um problema de imediata importância para nossa discussão, ou seja, delimitar o domínio do lógico e do real, ou do formal e do existente.

Tal problema já esteve presente de alguma forma quando tentamos, no capítulo I, tratar da existência dos objetos da matemática, e configurar as fronteiras da matemática com a realidade, à medida em que pode ser aplicada à experiência.

Hintikka explica a necessidade e universalidade do nosso raciocínio lógico, do mesmo modo como Kant dedicou-se a professar a necessidade e universalidade do conhecimento matemático.

Embora na época de Kant não houvesse uma lógica como aquela da teoria da quantificação em que estivesse presente a preocupação de se perguntar pelo conteúdo das proposições, dificilmente ele a entenderia fundamentada nos moldes do método matemático.

A teoria da quantificação pretende trabalhar com elementos intuitivos¹⁹ cuja distinção face aos conceitos gerais não nos parece delineada de forma precisa. Daí perguntarmos em que tais elementos intuitivos distinguem-se de conceitos gerais?

Não parece claro para nós que ao enunciarmos “existe um x , tal que $x \dots$ ” possamos garantir que algo realmente exista cujos predicados enunciados lhe pertençam. Pois, em se tratando de expressões lógicas cujas regras de construção não se guiam também pela nossa sensibilidade, nada impede que emitamos juízos sem qualquer parâmetro de realidade. Por outro lado, o valor de verdade dos enunciados — pois só ele parece legitimá-los — no caso de uma hipótese existencial, ao ultrapassar uma mera formalidade, baseia-se em questão de fato e de experiência.

Muito diferente é o caso da variável algébrica, em que, como já notamos, a possibilidade de sua inclusão na equação já está vinculada *a priori* à sensibilidade.

Embora Hintikka tenha nos mostrado que mesmo a teoria da quantificação não corresponde necessariamente termo a termo com a realidade — “não é uma representação isomórfica da realidade”

¹⁹ Intuitivo, aqui, é utilizado no sentido proposto por Hintikka.



— a conexão que ele propõe existir entre o conceito e a existência real pode vir a ser confirmada, mas jamais poderá ser legitimada em si mesma.

Portanto, nos parece que a redução efetuada por Hintikka, escapa à proposta kantiana. Um existencial puramente lógico, jamais satisfaria às premissas de Kant. Tal existência ou realidade é uma suposição que, embora possa vir a ser verificada num futuro, é de uma ordem cujos limites parecem não estar devidamente expressos.

É louvável o esforço de Hintikka em resgatar Kant e talvez de aprender de seus possíveis erros. Porém, parece que não é de Kant que ele fala, já que abandona pontos tão essenciais da doutrina do filósofo alemão. A passagem efetuada por Hintikka entre o formal e o existente se indispõe, com efeito, com toda aquela filosofia.

Quanto a uma resposta definitiva que esclareça a correspondência entre o real ou existente e o formal ou lógico nada podemos afirmar senão, como observou Kant, de acordo com os limites da experiência e da condição perceptiva que dela possamos ter. Esta afirmação seria válida tanto no caso de nossa percepção apresentar características euclidianas, quanto no caso de não apresentá-las.



CAP. IV - MATEMÁTICA E PERCEPÇÃO DO MUNDO

IV. 1 - A proposta de Hans Reichenbach

No decorrer de nossa investigação acerca da concepção matemática de Kant e de sua relação com a realidade, nos deparamos com o trabalho de Hans Reichenbach, especificamente com um livro de 1958 intitulado **The Philosophy of Space & Time**.

Neste livro Reichenbach manifesta preocupação em consolidar filosofia e ciência para a compreensão da possibilidade do conhecimento humano, e refere-se frequentemente à filosofia kantiana chegando, no entanto, a rejeitá-la como inútil.

Logo na introdução à edição inglesa, Rudolf Carnap, encarregado de escrevê-la, observa que “as questões relativas à natureza da geometria têm se constituído num problema decisivo para a teoria do conhecimento”²⁰.

Provavelmente a abordagem de Reichenbach da filosofia de Kant trouxe implícita uma idéia comum à qual nós já nos referimos, ou seja, a afirmação de que a teoria kantiana não reservou espaço para outras geometrias que não a euclidiana, assim como a idéia aproximada de que, para aquele sistema filosófico, tal geometria seria superior às outras.

Tais objeções permitem que, desde logo, se vislumbre que, de acordo com o contexto científico atual, dificilmente Reichenbach irá aceitar que aos princípios da geometria euclidiana pudesse ser atribuído um caráter sintético *a priori*. A razão para esta não aceitação apresenta-se explicitada ainda na introdução de Carnap:

²⁰ 51, p V.



"The principles of geometry, e.g., Euclid's axioms, seem to possess two characteristics which are not easily reconciled. On the one hand, they appear as immediately evident and therefore to hold with necessity. On the other hand, their validity is not purely logical, but factual; in technical terms, they are not analytic but synthetic." (53, p.V)

Assim, a geometria caso seja **pura** e portanto assegurada pela lógica, nada pode dizer sobre o espaço físico. Tal geometria seria considerada *a priori*, no entanto, analítica. A **geometria física**, que descreve a estrutura do espaço físico, por sua vez, seria estabelecida empiricamente, sendo, portanto, sintética mas não *a priori*.

Se, por um lado, a geometria euclidiana satisfazia plenamente à teoria física newtoniana, por outro, teorias mais recentes, como a da relatividade, elegiam geometrias não euclidianas para a fundamentação do espaço físico.

Vale notar que Reichenbach não negou força à geometria euclidiana, reconhecendo o caráter fechado e completo do sistema nela fundamentado:

"... The basis of the system was given by the geometrical axioms, from which all theorems were derived. The great practical significance of this construction consisted in the fact that it endowed geometry with a certainty never previously attained by any other science. The small number of axioms forming the foundation of the system were so self-evident that their truth was accepted without reservation. The entire construction of geometry was carried through by a skillful combination of the axioms alone, without any addition of further assumptions; the reliability of the logical inferences used in the proofs was so great that the derived theorems, which were sometimes quite involved, could be regarded as certain as the axioms. Geometry thus became the



prototype of a demonstrable science, the first instance of a scientific rigor which, since that time, has been the ideal of every science. " (53, p.1)

Porém, embora o sistema axiomático de Euclides tenha resolvido o problema da demonstrabilidade da ciência, também reduziu a mesma a um sistema de axiomas. Por outro lado, tal sistema mantém a questão epistemológica de justificar a verdade de seus axiomas, o que de fato, é um problema intrínseco a qualquer ciência, de modo que o método axiomático não tem sido capaz de estabelecer conhecimento com certeza absoluta.

Na verdade, o problema que aqui nos interessa é pelo qual abordaremos um pouco da proposta de Reichenbach, diz respeito ao caráter visual da geometria euclidiana e da relação desta com a realidade, sobretudo, analisar porque Reichenbach entendeu que a **visualização**²¹, enquanto correspondente à **intuição pura** kantiana, deve ser abandonada pelas ciências.

Como sabemos, o postulado das paralelas foi investigado e pareceu insatisfatório, por sua demonstração transcender toda a possibilidade da experiência. Foi justamente tal problemática que abriu caminho para geometrias não euclidianas, considerando-se a dispensabilidade de tal postulado.

Contudo, o abandono do 5º postulado encontra um obstáculo no fato de que não parece ser possível visualizar relações entre paralelas que contrariem aquelas por ele estabelecidas. De fato, porém, tal obstáculo não mais parece poder se sustentar.

" Although the existence of several parallels to a given line through one point contradicts the human power of visualization, this assumption could be introduced as an axiom, and a consistent geometry could be developed in combination with Euclid's other axioms. " (53, p.3)

²¹ Devemos acentuar que Reichenbach chama "visualização" um correspondente ao "Anschauung" kantiano que é comumente traduzido por intuição. O conceito de visualização pura é utilizado por ele justamente como aquilo que, em oposição à visualização empírica foi chamado em termos kantianos "intuição pura".



Desse modo, o aparecimento de geometrias não euclidianas, construídas sobre variantes do 5º postulado, e o fato delas inclusive terem sido adotadas por teorias físicas mais recentes, como a de Einstein, permitiram, na opinião de Reichenbach, que a geometria euclidiana perdesse o seu caráter *a priori*.

Realmente, diz Reichenbach, a natureza tem nos apresentado com um modo de percepção que se aproxima muito das leis da geometria euclidiana. O nosso espaço perceptivo, por exemplo, aceita que a menor distância entre dois pontos seja uma linha reta. Tal aceitação, contudo, nos alerta ele, decorreria mais da adoção habitual de conceitos da geometria euclidiana do que da própria estrutura da experiência. Podemos assim, concluir que somos de fato tentados a estabelecer o caráter *a priori* desta geometria.

Pelo fato da geometria euclidiana satisfazer plenamente à percepção da realidade humana esperamos que a ela seja imputada a tarefa de tratar de objetos reais.

No entanto, nota Reichenbach, não existe uma superioridade epistemológica da geometria euclidiana, pois ela não diz nada sobre as realidades físicas embora concorde com nosso modo de percepção.

“ (...) The axiom that the straight line is the shortest distance is highly intuitive only because we have adapted the concept of straightness to the system of Euclidian concepts. It is therefore necessary merely to change these conditions to gain a correspondingly intuitive and clear insight into different sets of axioms; this recognition strikes at the root of the intuitive priority of Euclidian geometry”. (53, p.91)

O traço diferencial da geometria euclidiana que a leva a ser tão preferencialmente abraçada é a experiência da visualização, isto é, a possibilidade de reproduzir suas proposições em imagens.



No entanto, observa Reichenbach, é necessário notar que existem dois componentes característicos na visualização.

O primeiro, por ele chamado função produtora de imagem (*image-producing-function*) revela ser da natureza da visualização reproduzir o objeto na forma de uma imagem.

Porém, a visualização não é completamente arbitrária. Uma vez que nós usamos a visualização para descobrir relações geométricas, um segundo componente, ou seja, a função normativa (*normative function*) intervém a fim de corrigir as imagens por nós produzidas.

Segundo Reichenbach, devemos considerar que a visualização tem seus limites, e mesmo a geometria euclidiana contém figuras que não podem ser visualizadas, de modo que, o que nos permite compreendê-las são as leis lógicas.

A função normativa é o componente mais importante da visualização e é essencialmente lógica. A compulsão visual não fornece qualquer coisa diferente da compulsão lógica. Ainda mais, a compreensão das inferências obtidas pela visualização é possível mediante as leis lógicas implícitas na imagem.

"The merit of visualization consists only in the fact that it translates the logical compulsion of Euclidian geometry into a visual compulsion. The normative function of visualization is revealed as a correlate of the logical compulsion and achieves the same results by means of the elements furnished by the image-producing function as the logical inference does by means of the conceptual elements of thought. This is the significance of visualization. It seems to be much easier to make logical inferences with the help of visual representation than by means of abstract concepts."(53, pp.42-43)



Para Reichenbach a intuição kantiana proviria justamente da segunda função da visualização, ou seja, da *normative function*:

" Kant's synthetic a priori pure intuition springs from the normative function of visualization. It is this function that tends to single out Euclidean geometry from all the others; it seems to compel us to regard Euclid's axiom of the parallels as unquestionably true." (53, p.39)

Ao acentuar que o aspecto lógico é mais importante do que aquele relativo às proporções das figuras, Reichenbach procura justamente estabelecer que o espaço geométrico euclidiano não dá conta de todo o espaço atualmente adotado e nada teria a ver com a percepção espacial experimentada, já que esta não se constituiria num critério para a adoção de uma determinada geometria.

" ... the essence of geometrical proof is contained in the logic of its derivations, not in the proportions of the figures. Non-Euclidean geometry is a logically constructible system -- this was the first and must important result established by its inventors." (53, p.4)

É certo que, observa ele, o problema relativo ao espaço físico é diferente daquele levantado pelo espaço matemático. Por um lado, em matemática várias teorias podem se apresentar como equivalentes, ou até complementares, no referente à aceitação de diversas geometrias. Por outro, a tarefa de optar pela geometria que apresentaria o espaço real, isto é, correspondente a realidade física, é muito mais complexa.

À geometria matemática, segundo Reichenbach, cabe revelar os espaços possíveis enquanto a física deve decidir qual deles corresponde ao espaço físico.



" If several kinds of geometries were regarded as mathematically equivalent, the question arose which of these geometries was aplicable to physical reality; there is no necessity to single out Euclidean geometry for this purpose. Mathematics shows a variety of possible forms of relations among which physics selects the real one by means of observations and experiments. " (53, p.6)

Embora a matemática tenha desenvolvido procedimentos que nos capacitam a visualizar geometrias não euclidianas por meio da geometria euclidiana, ou seja, a mapeá-las sobre o espaço euclidiano, tal visualização é estritamente euclidiana, isto é, permitindo somente que elementos de geometrias euclidianas possam ser visualizados na expressão de conceitos da geometria não euclidiana.

" We wanted to compare our ability to visualize one or the other; therefore we must try to visualize non-Euclidean space in the same manner as Euclidean space, i.e. within the three-dimensional domain. " (53, p.54)

Reichenbach propõe, então, um tratamento físico do problema da visualização, de modo que seja preservada a possibilidade de visualização de geometrias não euclidianas:

" It is indeed possible to visualize non-Euclidean space by an adjustment of visualization to a different congruence. Euclidean space has thus lost its privileged status. It should not be objected that even this method constitutes a mapping of non-Euclidean relations upon Euclidean space. Space as such is neither Euclidian nor non-Euclidean but



only a continuous three-dimensional manifold²²”
(53, pp.56-57)

A forma geométrica de um corpo, enfatiza, não é um dado absoluto da experiência, mas depende de **definições coordenativas**.²³ Em física definir não significa somente reduzir um conceito a outros conceitos, pois suas definições devem derivar de fatos físicos, uma vez que pretende tratar de objetos reais. Ou seja, tais definições são coordenadas por objetos reais e a física deve estabelecer a unidade desta coordenação. As primeiras definições que nos permitem desenvolver um sistema conceitual cuja preocupação em se tratar de objetos reais se mantêm, são chamadas de definições coordenativas.

No que se refere à forma geométrica de um corpo, portanto, suas propriedades dependerão de definições que precederiam à experiência do objeto, de acordo com o sistema adotado. Ela não é resultado imediato da experiência mas depende da escolha da definição. Ou seja, tais definições possuem uma característica essencialmente lógica. Trata-se aqui, diz Reichenbach, da possibilidade de se tomar medidas, que embora sejam dependentes de nossas habilidades humanas, se apliquem a fatos objetivos independente delas.

“ Although it may be admitted that Euclidean geometry is unique in that it can be easily visualized, the theory of the visual a priori does not disprove the theory of the relativity of geometry and of the necessity for coordinative definitions of the comparison of length. On the contrary, it is only this theory that can state precisely the epistemological function of visualization: the possibility of visualization is a ground for subjective preference of one particular coordinative definition. But the occurrence of visualization does not imply anything about the space of real objects. ” (53, p.34)

²² O grifo é nosso.

²³ V. 51, pp.14-23



Embora tenhamos cultivado a visualização do espaço euclidiano, bem poderíamos de outra forma ter desenvolvido um modo não euclidiano de estruturar a experiência. Pois, qualquer que seja a nossa representação de espaço, permanece um espaço real independentemente do espaço que representamos.

Assim, observa, para que se considere a visualização de geometrias não euclidianas torna-se necessário que se reconheça duas instâncias diversas da visualização, isto é, que a visualização se efetue de acordo com espaços topologicamente diferentes:

"Whoever has successfully adjustment himself to a different congruence is able to visualize non-Euclidean structures as easily as Euclidean structures and to make inferences concerning them". (53, p.55)

"Space will be visualized as non-Euclidean if we succeed in visualizing the new definition of congruence as congruence, i.e., in adjusting our eyes to it." (53, p.57)

Consequentemente, as geometrias não euclidianas podem ser visualizadas tanto de modo puro, como de modo empírico. Assim, observa, quando ilustramos no papel uma lei da geometria euclidiana, alcançamos a visualização pura por meio da visualização empírica. Isto pode ser feito porque, segundo ele:

"... pure visualization is nothing but a sensible quality which is realized in sense perception." (53, p.84)

Para ele, portanto, tal visualização não possui qualquer referência à realidade, isto é, não possui nada de intuitivo:



*"... Kant invented the concept of **pure visualization** as opposed to **empirical visualization**. He too, however, was fully aware of the fact that pure visualization must be related in some fashion to empirical visualization. It is in his terminology the **form of empirical visualization**, and therefore pure visualization without any reference to reality is an empty notion with no epistemological significance". (53, pp.83-84)*

Pois, como já notou Reichenbach, a função normativa da intuição, que nos possibilita estruturar a percepção, não é de origem visual, mas lógica, e a aceitação de axiomas é baseada em condições lógicas e não obtidas de imagens. Assim, completa sua objeção a Kant:

*"If we speak of a special visual compulsion, we express the idea that more restrictive laws hold for visualization than for logical thinking. It is this idea which Kant meant by his *synthetic a priori* judgments of visualization, and it is also the reaction which aprioristic philosophy had all along to the existence of non-Euclidean geometries: it is possible to construct them logically, but is impossible to visualize them." (53, p.43)*

Deste modo, Reichenbach é levado a propor que neguemos a visualização no sentido que a filosofia transcendental confere à intuição e aos conceitos puros do entendimento. De outro modo, defende aceitar a função normativa da visualização, cuja origem é estritamente lógica.



IV. 2 - Intuição e Visualização

Se, por um lado, Hintikka resgatou o método matemático kantiano aproximando-o da lógica moderna, por outro, Hans Reichenbach não hesitou em abandonar a proposta kantiana, considerando-a incompatível com a física e a matemática de nossos dias. A geometria euclidiana inspirou para Hintikka a reconstrução de noções kantianas, sem contudo ter aceitado que a teoria do filósofo alemão inviabilizava a aceitação de outras geometrias.

A postura de Reichenbach no tocante a Kant parece defender a afirmação de que o sistema kantiano não havia deixado espaço para outras geometrias, ou que, ao menos, defendia a superioridade da geometria euclidiana.

Claro, não negamos em momento algum o papel de destaque, igualmente salientado por Hintikka e outros comentadores de Kant, que a geometria euclidiana apresentou, influenciando o projeto crítico do filósofo alemão. Nem podemos esquecer que os axiomas da geometria euclidiana eram verdades inquestionáveis na época de Kant, e que a utilização de tal geometria só despertaria confiabilidade ao seu sistema.

Porém, nós aqui defendemos a tese de que a abordagem de Reichenbach não faz jus à proposta kantiana, já que seu entendimento parece exigir algumas considerações mais aprofundadas.

Tudo leva a crer que durante sua exposição que visa negar a prioridade da geometria euclidiana, Reichenbach tem em mente encaminhar uma crítica ao sistema kantiano e ao senso comum quando se tem em vista a fundamentação do conhecimento científico.

Mas, já de início, defendemos que Reichenbach se enganou ao afirmar que Kant considerou que a própria geometria euclidiana era absolutamente *a priori* e que tal geometria abarcava o espaço real. Assim, notamos, para Kant não era pura e simplesmente a geometria euclidiana que era *a priori*, mas a intuição do espaço o qual tal geometria descrevia e ilustrava com clareza. Neste sentido, como já



levantamos no capítulo I, tal abordagem levada a cabo por Reichenbach dificilmente levaria em conta que Kant poderia admitir uma geometria sem figuras.

Ora, na “Estética Transcendental”, Kant procurou sobretudo tratar da nossa forma de percepção e que, no referente à intuição do espaço, sua visualização enquadra-se na descrição proposta pela geometria euclidiana.

Porém, Reichenbach parece ter se utilizado indevidamente do termo intuição, porque a visualização por ele proposta refere-se, sobretudo, a imagens e figuras dadas e não simplesmente, como nos parece ser a proposta kantiana, à **possibilidade** de tal experiência. Portanto parece referir-se mais ao empírico propriamente dito, levando indevidamente para o domínio do *a priori* elementos que só poderiam determinar-se na experiência.

Em outras palavras, Reichenbach toma como *a priori* a realização do nosso modo de percepção, ou o resultado dela, e não simplesmente a condição dessa realização, que no caso do espaço kantiano é descrito pela geometria euclidiana. Porém, ele acredita que descartando a geometria euclidiana, dever-se-ia igualmente abandonar a proposta intuitiva de Kant.

Quando o filósofo alemão se utilizou de uma proposição da geometria euclidiana “a menor distância entre dois pontos é uma linha reta” para ilustrar juízos sintéticos *a priori*, ele talvez simplesmente estivesse apresentando relações espaciais possíveis na geometria euclidiana, que tornassem perceptíveis tais relações.

Assim, quando Reichenbach diz que não há uma visualização pura (intuição pura) no sentido da filosofia *a priori*, ele toma por absoluto o espaço geométrico euclidiano, sem considerar, como realmente parece ter proposto Kant, que tal geometria apenas descreve o espaço de acordo com o nosso modo perceptivo, sem contudo esgotar-se nele.

Afastando-se do apriorismo intuitivo, Reichenbach defende, contudo, que a forma geométrica de um corpo não deve ser um dado absoluto da experiência, mas depende de funções essencialmente lógicas. Apresenta-nos, então, **definições coordenativas** que nos possibilitam tomar medidas independentemente



de nossa visualização (intuição), de acordo com espaços topologicamente diferentes.

Mas, perguntamos, em que medida tomar medidas não exigiria a intuição espacial e mesmo o apriorismo de tal intuição?

Ora, seja qual for o nosso conceito de espaço, quer seja ele euclidiano ou não — já que poderíamos, segundo nos mostrou o próprio Reichenbach, independentemente do nosso modo de percepção atualmente desenvolvido, visualizar geometrias não euclidianas — devemos ter, para uma avaliação de medida, a adoção de um espaço qualquer. Dessa forma, o espaço adotado é que seria, em relação a experiência propiciada, uma intuição *a priori* embora as regras que possibilitariam tais medidas fossem essencialmente lógicas.

Mais ainda, acrescentamos a favor de Kant que o ato de medir implica não só na adoção de uma intuição espacial como também de uma intuição temporal que nos permita dar continuidade e unidade à medição, sintetizando-a.

Também a afirmação de Reichenbach que a aceitação de axiomas não é baseada em imagens coincide, ao contrário do que ele parece ter entendido, com a proposta kantiana.

Kant não admitia que as imagens ou a representação das figuras fossem responsáveis pela necessidade e universalidade da geometria, pois tais figuras são obtidas *a posteriori*, e portanto, de modo empírico, embora o seu conceito tenha sido construído de modo absolutamente *a priori*.

Do mesmo modo, ao impor limites à visualização empírica — devido a nossa impossibilidade de visualizar determinadas figuras — Reichenbach apresentou o argumento que Kant já tinha em mente no domínio do *a priori*.

Como vimos, a representação *a priori* da figura, seria considerada de acordo com seus esquemas, segundo as regras de obtenção de tais figuras, e cuja origem não é totalmente lógica (ou só de acordo com conceitos puros), mas busca na intuição do espaço a possibilidade de construir-se. Ou seja, Kant não ignorou a impossibilidade de visualizar determinadas figuras, mas garantiu no domínio do *a priori* a possibilidade intuitiva de sua construção.



O próprio Reichenbach chegou perto da resolução do problema quando acentuou o caráter descritivo da geometria euclidiana, defendendo que seus conceitos aproximam-se muito do nosso modo de percepção. O fato de que talvez pudéssemos ter desenvolvido um modo não euclidiano de visualização espacial é um argumento favorável à tese kantiana de que o espaço simplesmente nos permite estruturar ou organizar a experiência ou a realidade, sejam elas euclidianas ou não.

Para Reichenbach, porém, o nosso modo de estruturar a experiência é predominantemente lógico e de modo algum intuitivo, de forma que seria permitido às ciências construir-se além do espaço perceptivo humano. No entanto, o espaço restante não seria de algum modo intuitivo? Ou seja, o espaço não manteria sua integridade ou seria o mesmo enquanto que o que muda nas diversas geometrias são as relações possíveis em tal espaço? O próprio Reichenbach não disse que usamos a visualização simplesmente para descobrir tais relações geométricas?

Se, a função que regula a visualização for essencialmente lógica, o que garante sua relação com a realidade e, portanto, com a experiência, uma vez que a física pretende tratar do espaço real?

Seja, portanto, qual for o espaço adotado (euclidiano ou não) este espaço deve apresentar-se intuitivamente para quem organiza a experiência e, conseqüentemente, o mundo real.

Parece que a proposta de abandonar a visualização pura a favor da função normativa da visualização, ou seja, de sua origem lógica, não resolve o problema do espaço perceptivo. A percepção visual, ou o que Reichenbach entende por ela, realmente não é *a priori* para Kant. A intuição pura kantiana nada tem de visual.

A geometria tomada de acordo com características estritamente lógicas tornar-se-ia uma formalização simplesmente axiomática sem qualquer garantia de vínculo aplicativo à realidade da experiência mesmo numa operação *a posteriori*. Desse modo, todo o esforço da crítica kantiana teria sido em vão.



CONCLUSÃO

Nos capítulos precedentes, buscamos resgatar a concepção matemática de Kant insistindo nas relações entre esta e a realidade, dialogando com outros autores que voltam sua atenção para tal proposição.

Cabe agora, nesta conclusão, tratar de algumas possíveis consequências de tal abordagem quando considerada a aprendizagem da matemática e o ensino que busca propiciá-la.

Como notamos anteriormente, não intentamos nesse trabalho tratar de uma didática da matemática no sentido de uma técnica de ensino, mas, como bem propôs Michael Otte no seu livro **O Formal, o Social e o Subjetivo**, enquanto uma crítica, mesmo que somente aproximativa, da própria ciência matemática. Neste caso, cabe refletir acerca dos fundamentos de tal ciência do ponto de vista filosófico e, com isto, procurar trazer subsídios para o aprimoramento de seu ensino.

Dentre as três correntes principais que manifestam diferentes concepções a respeito da natureza da matemática e de sua relação com o real, — o **Formalismo**, o **Intuicionismo** e o **Logicismo** — nota-se que pelo menos as duas primeiras apresentam notadas raízes inseridas na concepção kantiana da matemática.

A distinção acentuada por Kant entre o que é intuitivo e o que é lógico nos permite entender precisamente os limites entre o que seria real, ou relativo ao mundo da experiência e o que seria puramente formal ou lógico.

Tais limites tornam-se, por sua vez, muito confusos quando se adentra no terreno da matemática, já que em nossos dias predomina a tendência de entendê-la como uma ciência puramente analítica, passível de ser totalmente formalizada.

Como agravante, a pretensa neutralidade científica com que se pretende o trabalho matemático puro desvincula tal ciência também do âmbito político e social, mantendo-a auto suficiente e isenta de qualquer característica relacionada ao prático.



Justamente esta dificuldade em entender como a matemática se relaciona com a experiência ou com o mundo real provoca uma impressão de distanciamento desta com a realidade, de modo a gerar, por vezes, grande dificuldade na compreensão da própria matemática e em seu aprendizado. E esta dificuldade persistindo, tanto mais se agrava quando se considera ser a matemática uma disciplina que se faz presente em quase todo o período da vida escolar de um estudante.

Mas as dificuldades no ensino e na aprendizagem da matemática não se apresentam somente em virtude de seu caráter abstrato. Seu *status* de ciência exata e precisa, e a especificidade que lhe permite ser uma ciência universal, capaz de ser operada em qualquer lugar do mundo e, supõe-se, para qualquer cultura, intrigam até os próprios especialistas que chegam a delegar-lhe um terreno externo próprio, no qual ela se manifesta.

Esta é, por exemplo, a posição adotada pelos matemáticos que têm no platonismo a matriz de suas concepções. Os entes matemáticos são aqui considerados como eternos e existentes objetivamente, não necessitando, deste modo, para existir, de nenhum tipo de construção mental. Cabe, portanto, aos matemáticos descobrir tais entidades abstratas sem preocupar-se com as relações destas com o mundo empírico.

Consequentemente, a relação entre matemática e realidade, à medida em que a primeira pode ser perfeitamente concebida e compreendida num plano abstrato absolutamente próprio, torna-se obscura.

Não discutiremos a inegável importância do aprendizado da matemática e o quanto ele é imprescindível

Na verdade muitas são as questões discutidas pelos próprios matemáticos sem chegar a consenso algum. Mas algumas idéias predominantes e as aplicações dessas idéias no âmbito do ensino da matemática podem tornar-se muitas vezes responsáveis pelo fracasso na aprendizagem da matemática.

Não por acaso a matemática é encarada como uma ciência para alguns poucos eleitos da qual nem todos podem tomar conhecimento. E mediante ao fato da real impossibilidade de



compreender o fazer matemático, aumenta o acovardamento e a postura de reverência frente a tal ciência.

Mas, se esses eleitos fazedores de matemática, navegantes do mar das abstrações, ainda não conseguiram chegar a um consenso, imaginemos os meros aprendizes tentando manter-se pelo menos flutuando nesse oceano.

É insuficiente e desonesto imputar a culpa do fracasso na apreensão da matemática ao aluno em virtude da falta de aptidão ou da capacidade de efetuar um raciocínio abstrato, quando, na verdade, a própria ciência matemática nós é apresentada de um modo que não nos sentimos realmente capazes de compreendê-la.

Uma vez que os procedimentos matemáticos são uma experiência comum, precisamos, em princípio, entender e justificar a universalidade da matemática e sua relação com a realidade, para que seja possível compreender seus fundamentos, desmistificando o seu próprio fazer, e sua relação com o mundo empírico.

Embora a matemática a partir do século XV tenha passado a se desenvolver independentemente dos resultados práticos independentemente do empírico, ela não deixou de manter o vínculo com a experiência e o mundo físico. Mas, mesmo não havendo preocupação do matemático com a aplicação de suas teorias ao mundo empírico, ela continuou a produzir resultados que estavam de acordo com a experiência e que possibilitavam o avanço científico e tecnológico.

Então, como explicar que mediante o procedimento matemático que se pretenda pura abstração uma teoria nele sustentada e que, portanto, independa do empírico possa manter um tão estreito vínculo com o mundo da experiência? Talvez na verdade porque embora possa-se professar a sua independência empírica quanto ao seu desenvolvimento, não se pode negar sua origem sensível. Na verdade, todos os conceitos matemáticos tiveram suas raízes em fatos físicos e geométricos de modo que estão diretamente vinculados ao mundo da experiência.



Na proposta kantiana acerca da natureza da matemática tal correspondência entre o universo da matemática e o universo da experiência se apresenta altamente esclarecedora.

Neste sentido, nos propusemos a averiguar a cerca da concepção matemática de Kant mesmo que ela, em alguns aspectos, possa parecer ingênua e ultrapassada, pois, atualmente, é difícil conceber a matemática como modelo absoluto e infalível de pensar. Trabalhar aquela concepção, no entanto, não se constitui num exercício inútil uma vez que a falibilidade atribuível a uma ciência formal não transparece facilmente aos olhos de quem a ela recorre. Na verdade, considerar a matemática infalível, permaneceria ainda presente na opinião de muitos alunos e de um número significativo de professores.

A construção matemática proposta por Kant realiza-se mediante as intuições puras de espaço e tempo, assumindo um caráter sintético *a priori*. Uma vez que tais intuições são as condições segundo as quais é possível relacionar-se com o mundo da experiência, a matemática é uma ciência que conteria de modo puro todo o tipo de relação possível no universo da experiência.

As relações entre matemática e realidade são possíveis porque a construção matemática, ao apresentar *a priori* a intuição pura pela qual nos é permitido prever em sua possibilidade toda a experiência, efetua-se mediante nossa forma de intuir a realidade. Deste modo, estabelece, a bem da verdade, os parâmetros da experiência possível que a filosofia crítica irá explicitar. A experiência matemática dirá respeito, necessariamente, à nossa experiência do mundo.

Não devemos, contudo, ao tratar das relações entre matemática e realidade, deixar de considerar a diversidade com que o próprio termo “realidade” pode ser entendido.

Quando dizemos que o conhecimento matemático na concepção kantiana mantém uma estrita correspondência à realidade, não queremos com isto pretender que, para tal concepção, aquele conhecimento dê conta de todos os aspectos da realidade. Muito especialmente, não queremos afirmar que ele se refira àquilo que existe efetivamente. Pretendemos afirmar que a matemática propicia, de modo necessitante, uma leitura possível da realidade.



As operações construtivas da matemática dão conta de um aspecto da realidade enquanto são antecipações mentais do universo da experiência. Estritamente falando, a matemática não tem como objeto a própria realidade; relaciona-se com ela, porque, como já consideramos, constrói sinteticamente todos os seus conceitos mediante as formas pelas quais estabelece-se qualquer referência à realidade, sem em nada depender do empírico ou de qualquer representação geral sobre esta mesma realidade.

Seus elementos constitutivos são conformes a possibilidade da experiência e, embora possam independê-la na sua produção, não prescindem da forma de toda experiência, ou da forma com que a razão pode experimentar a experiência, isto é, de uma razão intuitiva. Por essa razão ela antecipa o mundo dos fenômenos, não porque seja a verdadeira essência das coisas (como queria Platão) ou porque uma correspondência duvidosa entre o que é formal e o que é real seja assegurada, ou, pior ainda, desprezada.

Os objetos matemáticos são construções mentais fundamentadas nas condições de receptividade dos fenômenos próprias à razão. Podemos, assim, entender porque a matemática se manifesta de modo comum a todos os homens. Fazer matemática é manipular relações de possibilidade correspondentes à forma pela qual a razão determina o mundo da experiência.

Poderíamos, com efeito, dizer que, em termos kantianos, se o homem tivesse a capacidade de ao pensar, produzir um objeto — modo de criação imputado exclusivamente a Deus — esta capacidade se realizaria mediante a produção do objeto matemático. Por via da matemática, o pensamento divino se estenderia ao homem.

Conviria, neste momento, retomar a questão das relações entre matemática e lógica. Vimos no capítulo III que Hintikka, em seus escritos, pretendeu reduzir a intuição kantiana a uma mera forma lógica, de modo que não só as relações propostas aqui entre matemática e realidade ficariam obscurecidas, como também se confundir-se-iam os limites entre o que é lógico e o que é intuitivo, distinção esta tão precisamente acentuada por Kant.

Exetando-se as proposições da geometria euclidiana, sabemos que para a maioria dos matemáticos atuais a matemática é entendida e concebida como uma ciência analítica.



Kant já dialogava com os analistas de sua época os quais defendiam tese semelhante a esta. Mas com a proposta de Frege e Russell em reduzir a matemática à lógica, e mais a frente com os avanços na formalização da matemática, tal idéia tomou corpo. Assim, a matemática diria tanto a respeito dos objetos quanto teria a dizer a própria lógica, de modo que ambas estariam submetidas a um problema de representações gerais.

Em matemática e lógica os objetos seriam substituídos por conceitos que expressariam relações e propriedades de objetos.

No entanto, como notamos na discussão com Hintikka, em tais substituições jamais restaria um conteúdo intuitivo que garantisse uma legítima relação com o mundo da experiência, relação esta tão bem ilustrada pela matemática aplicada e pelo uso que a física faz desta ciência.

A possibilidade meramente lógica nada pode garantir acerca da experiência. Ao contrário, toda a matematização passa pelo problema da percepção, pois toda síntese matemática só é possível em vistas das relações de exterioridade, próprias do sentido externo, e de continuidade, próprias do sentido interno.

Ao aceitarmos, com Kant, uma matemática construtiva e, deste modo, que a matemática não é natural como algo que simplesmente fosse dado à razão, não podemos relevar a questão da percepção. Uma matemática que pretende-se construtiva, e desse modo conforme à possibilidade da experiência, permite à razão produzir antecipada e representativamente a própria experiência.

De fato, a própria formação dos conceitos matemáticos apresenta-se confusa as vezes, aos próprios professores de matemática, permanecendo assim até o final de sua formação²⁴, e todas as justificativas lógicas não parecem suficiente para esclarecer tal modo de representação.

A matemática distingue-se da lógica não enquanto são capazes de expressar relações e propriedades dos objetos, mas

²⁴ Cf. LOURENÇO, Marcos Luiz. **Sobre a Formação de Conceitos Matemáticos**: como estudantes universitários se comportam diante de determinadas propriedades dos números reais. Marília: UNESP, 1995. (dissertação de mestrado)



na medida em que cabe a ela conformar-se ao conteúdo possível da experiência não se restringindo à mera formalização.

A natureza da matemática manifesta-se por seu conteúdo intuitivo, pela existência de objetos que se apresentam à nossa experiência imediata e que não se subsumem àquelas relações efetivadas pela lógica. A generalidade com que se apresentam os objetos da matemática representa somente a universal possibilidade da experiência.

A problemática do ensino da matemática muitas vezes pode se iniciar na própria formação do professor e não dizer nada a respeito do conhecimento insatisfatório do conteúdo, ou da didática por ele utilizada, mas da concepção que este adotou, as vezes não voluntariamente, e segundo a qual ensina matemática. Ou seja, a partir da própria fundamentação da matemática podem decorrer maus modos de ensinar, dificultando, portanto, o apreender.

Imputamos aos equívocos e confusões gerados pelo fato de se conceber que matemática possa ser concebida como uma ciência que pode ser completamente formalizável uma parcela de responsabilidade no fracasso escolar desta ciência.

A proposta de Hilbert de formalização da matemática embora ainda não tenha tido êxito completo, ocupa a mente de muitos matemáticos, e é a concepção atualmente defendida pela maioria deles.

A formalização do raciocínio matemático implica no fato de que qualquer máquina poderia realizar qualquer operação matemática.

E, de fato, ao aluno muitas vezes é ensinado a proceder matematicamente como o faria uma máquina.

Não existe a participação efetiva do aluno na elaboração do pensamento. Não existe a interiorização da experiência, mas o simples proceder sem criatividade, acrítico.

Em matemática, ensina-se aos alunos a importância do rigor e das regras sem maiores considerações sobre a natureza do próprio pensamento. O aluno não é estimulado a compreender os processos matemáticos, mas sim que alguns procedimentos devem



ser realizados rigorosamente, passo a passo, para se chegar ao resultado correto. Na verdade, não importa mais o fazer, mas os resultados a que se deve chegar exatamente. Formúlas e regras aparentemente sem sentido devem ser obedecidas. Porque efetivamente deve-se proceder deste modo ou porque esta assegurado mediante tal procedimento um resultado seguro é um verdadeiro mistério. O que era para ser simples (algoritmo) passa a ser completamente incompreensível.

Somente a consideração de que a matemática não é um mero formalismo nos permitiria distinguir o pensamento humano daquele pretensamente produzido pela máquina, uma vez que toda formalização em algum grau decidível, em princípio, poderia ser realizada pelo computador. Essa distinção pode parecer um pouco prematura, pois um computador realiza muito mais precisa e rapidamente qualquer cálculo que, em alguns casos, poderiam levar horas para serem realizados por um homem e, mesmo, tornarem-se praticamente inexecutáveis.

Então, tomada em consideração a eficiência com que a máquina poderia realizar tais operações, pensando em nós, seria mais cômodo e vantajoso abandonar o aprendizado de matemática e adquirir calculadoras e computadores de última geração. Neste sentido, os resultados procurados seriam muito mais seguros.

Mas o pensamento matemático não é mera repetição de regras. Ele é um ato criativo e disso os matemáticos não abrem mão.

De acordo com esta idéia, construir um conceito implica que tenhamos a experiência do objeto, interiorizando tal experiência. Caso não ocorra tal interiorização ou a experiência mental, não ocorrerá também pensamento. A máquina é capaz de nos fornecer o resultado, mas é incapaz de vivenciar o experimento. Quem então o faria, numa dissociação preocupante mas que tem que ser enfrentada sobretudo no âmbito da aprendizagem, é aquele que a programa e aquele que a opera.

Decorre, por sua vez, do capítulo IV deste trabalho uma questão que, se não for bem colocada, acarreta frequentes dificuldades para compreensão da matemática e o avanço do estudo



da mesma. Trata-se do fato de tendermos a considerar o espaço como sendo essencialmente euclidiano.

É justamente do caráter empírico da geometria euclidiana que decorre não só a preferência desta por parte dos alunos de matemática, como também a acentuada incompreensibilidade das outras geometrias. Por outro lado, daí também decorre o fato de tantos autores terem se utilizado da possibilidade de geometrias não euclidianas para desestabilizar os argumentos da filosofia kantiana.

Afinal, que a menor distância entre dois pontos possa não ser uma linha reta é para muitos algo extremamente constrangedor, se não considerado o fato de tais conceitos da geometria euclidiana corresponderem somente ao modo por nós desenvolvido de visualizar a experiência.

Mas, de outro modo, que a menor distância entre dois pontos seja uma linha reta continua sendo uma proposição necessária e universal se considerarmos o espaço por ela descrito.

A geometria euclidiana teve por muitos um tratamento absolutamente especial uma vez que ela realmente surgiu em decorrência de problemas práticos como o da medição de terras. Tanto que, inclusive, o próprio Frege não deixou de parabenizar Kant por ter descoberto o caráter sintético *a priori* da geometria euclidiana.

Por outro lado, Hintikka dela se utilizou para justificar equívocos ocorridos na interpretação kantiana, acreditando que tal característica construtiva da geometria euclidiana tinha indevidamente sido estendida a outros ramos da matemática.

Considerando, portanto, o fato de que estes outros ramos não tenham recebido um tratamento tão especial, inclusive na obra kantiana — embora nessa a geometria euclidiana tenha sido preferencialmente utilizada como recurso demonstrativo — assim como as dificuldades impostas pela forma como comumente visualizamos o mundo ao nosso redor, que não parece corresponder aos modos de representação não euclidianos do espaço, não é de se estranhar que estes tenham sido tão frequentemente incompreendidos. Mas as diferentes geometrias são somente diferentes modos de determinar a intuição espaço-temporal.



Acreditamos, pois, que a concepção de uma matemática construtiva e, portanto, intuitiva, que se apresente conforme nossa sensibilidade — se a esta conferirmos o sentido kantiano de uma faculdade transcendental receptiva da razão — possa amenizar o estranhamento provocado por aquela ciência. Para isso, basta que consideremos uma intuição que não somente se conforme ao nosso modo mais desenvolvido de estruturar a experiência, mas que possa englobar toda a possibilidade de se relacionar com esta. Somente assim, poderíamos conceber um mundo não absolutamente euclidiano sem sentir violentada nossa capacidade de percebê-lo e de com ele interagir.

Caso a aprendizagem se orientasse neste sentido, muitos falsos problemas seriam evitados e muito mais livremente poderia a razão desenvolver-se em sua ilimitada capacidade de investigar o real.

1. KANT, Immanuel. *Crítica da Faculdade da Razão*. Trad. de Valério Rohden e Antônio Marques. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1943.

2. _____. *Crítica da razão Pura*. Trad. de Moisés Costa dos Santos e Alexandre P. Moreira. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.

3. _____. *Disertação de 1770 e carta a Marcus Herz*. Trad. de Leonel Rohden dos Santos e Antônio Marques. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1964.

4. _____. *Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza*. Trad. de Artur Morin. Lisboa: Figueira 70, 1990.

5. _____. *Prolegômenos à Toda Metafísica Futura*. Trad. Artur Morin. Lisboa: Edições 70, 1987.

II - *Verba altera loquor*

6. DAVAIL, Roger. *La Méaphysique de Kant. Perspectives sur la métaphysique de Kant. D'après la théorie du schématisme*. Paris: P.U.F., 1980.



BIBLIOGRAFIA:

I - Obras de Kant:

(obs: As referências das obras de Kant seguem a paginação original. A letra B refere-se à segunda edição da **Crítica da Razão Pura**.)

1. KANT, Immanuel. **Crítica da Faculdade do Juízo**. Trad. de Valério Rohden e Antônio Marques. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1993.
2. _____. **Crítica da razão Pura**, Trad. de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.
3. _____. **Dissertação de 1770 e carta a Marcus Herz**. Trad. de Leonel Ribeiro dos Santos e Antônio Marques. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1984.
4. _____. **Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza**, Trad. de Artur Morão. Lisboa: Edições 70, 1990.
5. _____. **Prolegômenos à Toda Metafísica Futura**. Trad. Artur Morão. Lisboa: Edições 70, 1987.

II - Obras sobre Kant:

6. DAVAL, Roger. **La Métaphysique de Kant**. Perspectives sur la métaphysique de Kant d'après la théorie du schématisme. Paris: P.U.F., 1950.



7. MELNICK, Arthur. **Space, Time and Thought in Kant.** Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1989.
8. PATON, H.J. **Kant's Metaphisic of Experience.** London: George Allen, 1970.
9. PHILONENKO, A. **L'oeuvre de Kant**, Tome I. Paris: Vrin, 1969.
10. VAIHINGER, E. **Kommentar Zu Kants Kritik der Reinen Vernunft**, Stuttgart: W. Spemann, 1881-92.
11. VUILLEMIN, J. **Physique at Metaphysique Kantiennes.** Paris: P.U.F., 1955.
12. WINTERBOURNE, A. T. **The Ideal and the Real, an outline of Kant's theory of space, time and mathematical construction.** Dordrech/ Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1988.

III - Artigos e periódicos:

13. ANGELL, R.B. The geometrical of visibles. **Nous** 8, pp.87-117, 1974.
14. BALZER, W. Mathematics structures as representations of intelectual structures. **Dialectica** 34, pp.247-262, 1980.
15. BELL, J.L. Category theory and foundations of mathematics. **British Journal for Philosphy of Science** 32, pp. 349-358, 1981.
16. BLASCO, J.L. Los limites del empirismo. **Ágora** 7, pp. 41-54, 1988.
17. BONFANTINI, M. Il primo Russell o il canto del cigno della geometria kantiana, XXIII, III, **Acme**. pp. 349-433, 1970.
18. BUROKER, S.J. Space and inconsequence: the origin of Kant's idealism. **Nous**, XVII, 2, pp. 321-323, 1983.
19. BUTTS, R.E. Rules, examples and constructions, Kant's theory of mathematics. **Synthese** 47, pp. 257-288, 1981.



- 20.CASSIRER, E. Kant und die moderne mathematik. **Kant-Studien**, pp. 41-42, 1907.
- 21.CASTILLO, L.C. Ciencia y metafísica a la luz del “esquematismo de Kant”. **Universitas Phioosophica**, I, 1, pp. 11-24, 1983.
- 22.ELDER, C. L. Kant and unity of experience. **Kant-Studien**, 1980.
- 23.HINTIKKA, J. Kant on the mathematical method. **The Monist** 51, pp. 352-375, 1967.
- 24._____ Kant's new method of thought and his theory of mathematics. **Ajatus** 27, pp. 37-47, 1965.
- 25.HOWELL, R. Intuition, synthesis and individuation in the Critique of Pure Reason. **Nous** VII, 3, 1973.
- 26.KITCHER, P. Discovering the forms of intuition. **The Philosophical Review** 96, 2, pp. 205-248, 1987.
- 27.KRAUSSER, P. “Form intuition”and formal intuition in Kant s theory of experience and science. **Studies in History and Philosophy of Science** 4, 3, pp. 279-288, 1973.
- 28.LOPARIC, Z. Heurística kantiana. **Bolletino di Storia della Filosofia** 5, 1983.
- 29.MARTINS, E. Esquema e imagem. **Bolletino di Storia della Filosofia** 5, 1983
- 30.OGUAH, E. Transcendental arguments and mathematical intuition in Kant. **Kant-Studien** 1, pp. 35-46, 1980.
- 31.PALMQUIST, S. R. Six perspectives on the object in Kants theory knowledgs. **Dialetica** 40, pp. 121-151, 1986.
- 32._____ Knowledgs and experience. An examination of four reflective “perspectives” in Kant's critical philosphy. **Kant-Studien**, 2, pp. 170-198, 1987.
- 33._____ Kant on Euclid: Geometry in perspective. **Philosophia Mathematica**, II,V.5,pp. 88-113, 1990.



- 34.PALUMBO, M. Imaginazione e matematica in Kant. **Kant-Studien**, 1, pp. 102-105, 1987.
- 35.PHILONENKO, A. Lectura del esquematismo. **Ágora**, 7, pp. 9-26, 1988.
- 36.RADNER, M. Kantian space and ontological alternatives. **Kant-Studien**, 4, pp. 385-402, 1987.
- 37.RAGGIO, A.R. La filosofia matematica de Kant. **Manuscrito**, 2,pp. 07-18, 1978.
- 38.SCHWARZ, W. Kant's categories of reality and existence. **Philosophy and Phenomenological Research**, LVIII, 2, 1989.
- 39.SCHWYZER, H. How are concepts of objects possible? **Kant-Studien**, 2, 1982.
- 40.YOUNG, J.M. Kant on the construction of arithmetical concepts. **Kant-Studien** 1, pp. 17-46, 1982.
- 41.WARNOCK, G.L. Concepts and schematism. **Analysis** 9, pp. 77-82, 1949.
- 42.WINTERBOURNE, A.T. Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics. **Studies in History and Philosophy of Science** 12, pp. 33-46, 1981.
- 43._____ Kitcher on Kant and mathematical intuition. **Kant-Studien** 2, pp. 180-185, 1989.

IV - Outras obras:

- 44.BLAIRE, Eric **Philosophy of Mathematics Education**. London: Institute of Education, University of London, 1981.(tese de doutorado)
- 45.CASSIRER, Ernest **El Problema del Conocimiento**. Trad. Wenceslau Rocas. México: Fondo de Cultura Economica, 1986.



- 46.DAVIS, P.J. e HERSH, R. **A Experiência Matemática.** Rio de Janeiro: Ed. Francisco Alves, 1985.
- 47.FREGE, Gottlob **Os Fundamentos da Aritmética.** Trad. Luís Henrique dos Santos. in Col. "Os Pensadores". São Paulo: Abril, 1974.
- 48.HINTIKKA, J. **Logic, Language Games and Information.** Oxford: Claredon Press, 1973.
- 49.LOURENÇO, Luiz Marcos **Sobre a Formação dos Conceitos Matemáticos** : como estudantes universitários se comportam diante de determinadas propriedades dos números reais. Marília : UNESP, 1995. (dissertação de mestrado)
- 50.MACHADO, Nilson José **Matemática e Realidade.** São Paulo: Cortez Editora, 1987.
- 51.OTTE, Michael **O Formal, o Social e o Subjetivo: Uma introdução à filosofia e à didática da matemática.** Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo: Editora Unesp, 1993.
- 52.RAY, Christopher **Tempo, Espaço e Filosofia.** Trad. Telma Médici Nóbrega. Campinas: Papirus, 1993.
- 53.REICHENBACH, H. **The Philosophy of Space and Time.** Trad. Maria Reichenbach e John Freund. New York: Dover, 1958.
- 54.TIESZEN, Richard **Mathematical Intuition: Phenomenologic and Mathematical Knowledge.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.



