

RESSALVA

Atendendo solicitação do(a) autor(a), o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 31/01/2018.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

MARCELO CAVALCANTI DA SILVA

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA DE PLACAS UTILIZANDO O
ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR**

Ilha Solteira

2017

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

MARCELO CAVALCANTI DA SILVA

**ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA DE PLACAS UTILIZANDO O
ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Prof. Dr. JEFFERSON SIDNEY CAMACHO

Orientador

Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Co-orientador

Ilha Solteira

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586a Silva, Marcelo Cavalcanti da.
Análise linear estática e dinâmica de placas utilizando o elemento finito prismático regular linear / Marcelo Cavalcanti da Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
152 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Estruturas, 2017

Orientador: Jefferson Sidney Camacho
Co-orientador: Rogério De Oliveira Rodrigues
Inclui bibliografia

1. Análise linear estática e dinâmica. 2. Comportamento estrutural de placas.
3. Método dos elementos finitos.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO


TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise linear estática e dinâmica de placas utilizando o elemento finito prismático regular linear

AUTOR: MARCELO CAVALCANTI DA SILVA

ORIENTADOR: JEFFERSON SIDNEY CAMACHO

COORIENTADOR: ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA CIVIL,
área: ESTRUTURAS pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. JOSÉ LUIZ PINHEIRO MELGES
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. RODRIGO PIERNAS ANDOLFATO
. / TECNOBENS Construção e Incorporação Ltda

Ilha Solteira, 31 de janeiro de 2017

Márcia Regina Nagamachi Chaves
Supervisor Técnico de Seção - STPG

DEDICO

Ao meu pai João Vaz da Silva e minha mãe Maria Cavalcanti da Silva, que me educaram com amor, e souberam com sabedoria transmitir para minha vida o valor da educação. E também ao meu sobrinho Gabriel Adriano Cavalcanti da Silva, a sua existência me inspirou a realizar sempre o melhor de mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus,

Pelo amparo de sua paz e pelo consentimento da realização deste trabalho.

Aos meus pais João e Maria,

Pela compreensão e paciência ao longo do período de estudo.

Ao Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues,

Pela transmissão de conhecimentos de forma clara e simples de assuntos complexos.

Ao Prof. Dr. Jefferson Nascimento de Oliveira,

Pela confiança e incentivo, que foram essenciais no transcorrer deste percurso.

À Mestra Rosane Caldeira,

Pelo recebimento de sentimentos e dos seus conhecimentos de informática.

Aos meus amigos de curso,

Pela cumplicidade, troca de informações e pela amizade.

Aos funcionários do Departamento da Engenharia Civil – FEIS/ UNESP,

Por proporcionar um bom ambiente de trabalho.

A CAPES,

Pelo recurso financeiro, que foi essencial para que pudesse dedicar-me aos estudos.

Oração de São Francisco de Assis

“Senhor, fazei-me instrumento de vossa paz.

Onde houver ódio, que eu leve o amor;

Onde houver ofensa, que eu leve o perdão;

Onde houver discórdia, que eu leve a união;

Onde houver dúvida, que eu leve a fé;

Onde houver erro, que eu leve a verdade;

Onde houver desespero, que eu leve a esperança;

Onde houver tristeza, que eu leve a alegria;

Onde houver trevas, que eu leve a luz.

Ó Mestre, fazei que eu procure mais

consolar, que ser consolado;

compreender, que ser compreendido;

amar, que ser amado.

Pois é dando que se recebe,

é perdoando que se é perdoado,

e é morrendo que se vive para a vida eterna.”

São Francisco de Assis

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal analisar o comportamento linear estático e dinâmico de placas, com carregamento perpendicular ao seu plano médio, realizando a discretização estrutural com o elemento finito prismático regular linear. Na dedução das matrizes de rigidez e de massas do elemento finito em questão, utiliza-se a formulação com parâmetros generalizados e com coordenadas homogêneas, cujas funções aproximadoras com vinte e quatro monômios, respectivamente, foram extraídos do polinômio algébrico cúbico em “x”, “y” e “z”. Para a consideração do amortecimento utiliza-se o Método de Rayleigh e para a integração numérica ao longo do tempo utiliza-se o Método de Newmark, via algoritmo predictor / corretor. Ao final deste trabalho foram elaborados exemplos elucidativos visando uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos, que foram comparados com os valores determinados do elemento finito de placa retangular. Como conclusões finais, para placas muito delgadas deve-se utilizar o elemento finito de placa retangular; em placas delgadas é possível a utilização dos elementos finitos de placa retangular e o prismático regular linear; e para placas espessas deve-se utilizar o elemento finito prismático regular linear.

Palavras-chave: Análise linear estática e dinâmica. Comportamento estrutural de placas. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The main objective of this work is to analyze the static and dynamic linear behavior of plates with perpendicular loading to its mean plane, performing the structural discretization with the regular linear prismatic finite element. In the deduction of the stiffness and mass matrices of the finite element, it is used the formulation with generalized parameters and with homogeneous coordinates, whose approximate functions with twenty-four monomials, respectively, were extracted from the cubic algebraic polynomial in x , y and z . For the damping consideration, it is used the Rayleigh Method and for the numerical integration by along the time it is used the Newmark Method, via forecaster / corrector algorithm. At the end of this work, elucidative examples were elaborated aiming a quantitative and qualitative analysis of the obtained results which were compared with the finite element determined values of rectangular plate. As final conclusions, for very thin plates must use the rectangular plate finite element; in thin plates it is possible to use the rectangular plate finite elements and the linear regular prismatic; and for thick plates the linear regular prismatic finite element must be used.

Keywords: Static and dynamic linear analysis. Structural behavior of Plates. Finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Elemento finito de placa retangular	22
Figura 2	- Graus de liberdade do elemento finito de placa retangular	22
Figura 3	- Placa com carregamento perpendicular ao seu plano médio	23
Figura 4	- Sistema estrutural arbitrário	26
Figura 5	- Tensões atuantes em um cubo infinitesimal	28
Figura 6	- Elemento infinitesimal do sólido com variação de tensões em suas faces	29
Figura 7	- Deformação linear do elemento linear	32
Figura 8	- Deformação cisalhante de um elemento infinitesimal no plano	33
Figura 9	- Modelo reológico	38
Figura 10	- Deformação tangencial provocada por um deslocamento virtual	41
Figura 11	- Aceleração constante	49
Figura 12	- Aceleração com variação linear	50
Figura 13	- Diagrama de blocos do método de Newmark	58
Figura 14	- Diagrama de blocos para análise estática com carregamento incremental	59
Figura 15	- Elemento finito prismático regular linear com oito nós	60
Figura 16	- Pirâmide de Pascal	62
Figura 17	- Monômios do elemento finito prismático regular linear	63
Figura 18	- Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em x	68
Figura 19	- Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em y	69
Figura 20	- Componentes da função de forma nos lados do prisma com a variável em z	69
Figura 21	- Carregamento superficial no elemento finito prismático regular linear	79
Figura 22	- Carga concentrada no elemento finito prismático regular linear	84
Figura 23	- Esquematização de matrizes simétricas	87
Figura 24	- Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise estática	91
Figura 25	- Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise estática com carregamento incremental	92
Figura 26	- Etapas das sub-rotinas do programa para cálculo da análise dinâmica	93
Figura 27	- Apoios das bordas da placa discretizada em $2 \times 2 \times 2$	100
Figura 28	- Placa quadrada com carga distribuída	101

Figura 29	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	103
Figura 30	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	104
Figura 31	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	105
Figura 32	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	106
Figura 33	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	107
Figura 34	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	108
Figura 35	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	109
Figura 36	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	110
Figura 37	- Placa quadrada com carga concentrada em seu ponto central	112
Figura 38	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 2x2 no plano xy	113
Figura 39	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 4x4 no plano xy	114
Figura 40	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 8x8 no plano xy	115
Figura 41	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 16x16 no plano xy	116

Figura 42	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 20x20 no plano xy	117
Figura 43	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 24x24 no plano xy	118
Figura 44	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa, e malha de 32x32 no plano xy	120
Figura 45	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 2x2 no plano xy	121
Figura 46	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 4x4 no plano xy	122
Figura 47	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 8x8 no plano xy	123
Figura 48	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 16x16 no plano xy	124
Figura 49	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 20x20 no plano xy	125
Figura 50	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 24x24 no plano xy	126
Figura 51	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 32x32 no plano xy	128
Figura 52	- Gráfico do deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas engastadas, e malha de 42x42 no plano xy	130
Figura 53	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	132
Figura 54	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	133

Figura 55	- Gráfico do deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	134
Figura 56	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	141
Figura 57	- Forças nos pontos da placa para y=2,50m e “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	142
Figura 58	- Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com carregamento incremental	144
Figura 59	- Gráfico dos deslocamentos do ponto central da placa com “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy, com 2 camadas na direção z, todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	103
Tabela 2	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/100 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	104
Tabela 3	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	105
Tabela 4	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/25 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	106
Tabela 5	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	107
Tabela 6	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	108
Tabela 7	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas apoiadas na altura média da placa	109
Tabela 8	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga distribuída, considerando-se todas as bordas engastadas	110
Tabela 9	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 2x2 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	113
Tabela 10	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 4x4 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	114

Tabela 11	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 8x8 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	115
Tabela 12	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 16x16 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	116
Tabela 13	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 20x20 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	117
Tabela 14	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 24x24 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	118
Tabela 15	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy e todas as bordas apoiadas na altura média da placa	119
Tabela 16	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 2x2 no plano xy e todas as bordas engastadas	120
Tabela 17	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 4x4 no plano xy e todas as bordas engastadas	121
Tabela 18	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 8x8 no plano xy e todas as bordas engastadas	122
Tabela 19	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 16x16 no plano xy e todas as bordas engastadas	123
Tabela 20	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 20x20 no plano xy e todas as bordas engastadas	124
Tabela 21	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 24x24 no plano xy e todas as bordas engastadas	125

Tabela 22	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy e todas as bordas engastadas	127
Tabela 23	- Deslocamento do eixo central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, malha de 42x42 no plano xy e todas as bordas engastadas	129
Tabela 24	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/20 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	131
Tabela 25	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/10 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	132
Tabela 26	- Deslocamento do ponto central da placa com “t/a” de 1/5 e carga concentrada, considerando-se todas as bordas apoiadas na base da placa	133
Tabela 27	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e z=0, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	135
Tabela 28	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e z=12,5cm, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	136
Tabela 29	- Deslocamentos dos pontos da placa para y=2,50m e z=25cm, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	137
Tabela 30	- Forças nos pontos da placa para y=2,50m e z=0, “t/a” de 1/20, carga concentrada, malha de 32x32 no plano xy, com 2 camadas na direção z, e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	138

Tabela 31	- Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=12,5\text{cm}$, " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 32×32 no plano xy , com 2 camadas na direção z , e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	139
Tabela 32	- Forças nos pontos da placa para $y=2,50\text{m}$ e $z=25\text{cm}$, " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 32×32 no plano xy , com 2 camadas na direção z , e com todas as bordas apoiadas na altura média e na base da placa	140
Tabela 33	- Deslocamentos do ponto central da placa com " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 42×42 no plano xy , com 2 camadas na direção z , todas as bordas engastadas, e com carregamento incremental	143
Tabela 34	- Deslocamentos do ponto central da placa com " t/a " de $1/20$, carga concentrada, malha de 42×42 no plano xy , com 2 camadas na direção z , todas as bordas engastadas, e com análise dinâmica	146

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EFPR	Elemento finito de placa retangular
EFPRL	Elemento finito prismático regular linear
MATLAB	Laboratório de Matrizes (programa computacional)
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SIMBOLOS

ν	Coeficiente de Poisson
u	Componente de deslocamento na direção X
v	Componente de deslocamento na direção Y
w	Componente de deslocamento na direção Z
γ	Deformação cisalhante
ε	Deformação linear
ρ	Densidade específica
$\underline{f_e}$	Esforços externos
F	Força
ω	Frequência natural de vibração da estrutura
$\underline{\phi}$	Matriz das funções de forma
\underline{C}	Matriz de amortecimento da estrutura
\underline{c}	Matriz de amortecimento do elemento
\underline{d}	Matriz de deslocamento nodal
\underline{M}	Matriz de massa da estrutura
\underline{m}	Matriz de massa do elemento
\underline{K}	Matriz de rigidez da estrutura
\underline{k}	Matriz de rigidez do elemento
E	Módulo de elasticidade longitudinal
M	Momento fletor
μ	Parâmetro de amortecimento viscoso
τ	Tensão cisalhante
σ	Tensão normal
\underline{u}	Vetor de deslocamento
V_e	Volume do elemento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	TEMA E MOTIVAÇÃO	21
1.2	OBJETIVO	24
1.3	APRESENTAÇÃO	24
2	EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	25
2.1	CONCEITOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS DEFORMÁVEIS	25
2.1.1	<i>Solicitações atuantes em um sistema estrutural devidas ao meio externo</i>	26
2.1.1.1	<i>Esforços volumétricos</i>	27
2.1.1.2	<i>Esforços superficiais</i>	27
2.1.1.3	<i>Esforços concentrados</i>	27
2.1.2	<i>Tensores de tensões e deformações</i>	27
2.1.3	<i>Equações de equilíbrio de um sólido</i>	31
2.1.4	<i>Relações cinemáticas</i>	32
2.1.5	<i>Relações constitutivas</i>	35
2.1.6	<i>Condições de contorno</i>	36
2.1.7	<i>Resolução do problema</i>	37
2.2	BASE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	37
2.3	TRABALHOS VIRTUAIS PROVENIENTES DE FORÇAS QUE ENVOLVEM UMA ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA	38
2.3.1	<i>Trabalhos virtuais no elemento estrutural devido ao meio externo</i>	39
2.3.2	<i>Trabalhos virtuais das forças restauradoras</i>	40
2.3.3	<i>Trabalhos virtuais das forças inerciais</i>	42
2.3.4	<i>Trabalhos virtuais das forças dissipativas</i>	43
2.4	EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO	44
3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO	47
3.1	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	47
3.2	EQUAÇÕES DE NEWMARK	48

3.2.1	<i>Aceleração constante durante o intervalo de tempo</i>	48
3.2.2	<i>Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo</i>	50
3.2.3	<i>Equações generalizadas</i>	52
3.3	PROCESSOS ITERATIVOS	52
3.4	PROCESSO INCREMENTAL	53
3.5	MÉTODO DE NEWMARK PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA AO LONGO DO TEMPO	53
3.5.1	<i>Equacionamento básico</i>	54
3.6	ALGORITMO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO PROCESSO	56
4	ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR LINEAR	60
4.1	TRIÂNGULO DE PASCAL	60
4.2	FUNÇÕES DE FORMA	63
4.3	MATRIZ DE RIGIDEZ	70
4.4	MATRIZ DE MASSAS	73
4.5	MATRIZ DE AMORTECIMENTO	75
4.5.1	<i>Frequências naturais de vibração</i>	75
4.5.2	<i>Amortecimento Rayleigh</i>	77
4.6	FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES	79
4.6.1	<i>Forças nodais equivalentes para carregamento na superfície</i>	79
4.6.2	<i>Forças nodais equivalentes para esforço concentrado</i>	83
5	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	87
5.1	GENERALIDADES	87
5.2	MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	87
5.2.1	<i>Processo de expansão e acumulação</i>	88
5.2.2	<i>Armazenamento computacional da matriz de rigidez</i>	88
5.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	88
5.4	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	89
5.5	ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO	90
5.5.1	<i>Descrição das sub-rotinas</i>	94
6	ANÁLISE NUMÉRICA	100
6.1	GENERALIDADES	100
6.2	EXEMPLO 1 – ANÁLISE ESTÁTICA DA PLACA QUADRADA COM CARGA DISTRIBUÍDA	101

6.3	EXEMPLO 2 – PLACA QUADRADA COM CARGA CONCENTRADA EM SEU PONTO CENTRAL	111
6.3.1	Análise estática	112
6.3.1.1	<i>Todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média da placa e todas as bordas engastadas</i>	112
6.3.1.2	<i>Todas as bordas simplesmente apoiadas na base da placa</i>	131
6.3.1.3	<i>Todas as bordas simplesmente apoiadas na altura média e na base da placa</i>	134
6.3.1.4	<i>Carregamento incremental considerando-se todas as bordas engastadas</i>	143
6.3.2	Análise dinâmica	144
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
7.1	CONCLUSÕES	149
7.2	PROPOSTA DE DESENVOLVIMENTO	151
	REFERÊNCIAS	152

1 INTRODUÇÃO

1.1 TEMA E MOTIVAÇÃO

O objetivo do Engenheiro de Estruturas é determinar os esforços internos e os deslocamentos, que ocorrem em um sistema estrutural quando submetido a um carregamento arbitrário.

Quando as grandezas vetoriais dos esforços internos e deslocamentos do sistema estrutural forem invariantes no tempo, a análise estrutural é classificada como estática, como por exemplo, o peso próprio.

No entanto, se as ações dos carregamentos provocarem no sistema estrutural um comportamento onde as tensões e deformações variem com o tempo, a análise será classificada como dinâmica. Como exemplos de carregamentos que provoquem um comportamento estrutural dinâmico, podem ser citados: a incidência do vento nas edificações, a frenagem/aceleração/movimentação de veículos em pontes, o salto de pessoas em um estádio de futebol, o sismo, etc.

Os Métodos Analíticos Clássicos, através da solução das Equações Diferenciais, dentro das hipóteses adotadas, determinam a resposta exata dos esforços internos e dos deslocamentos da estrutura em seus infinitos pontos. Porém essas soluções são possíveis em sistemas estruturais de geometria simples. Em função da continuidade do cálculo analítico, os sistemas estruturais possuem um número infinito de graus de liberdade.

Para contornar tal dificuldade, o Método dos Elementos Finitos considera um sistema estrutural discreto, que contém um número finito de graus de liberdade. É realizada a divisão do modelo geométrico dos elementos estruturais em pequenas regiões, chamadas de elementos finitos, que são interconectadas entre si por meio de nós para formar o conjunto estrutural.

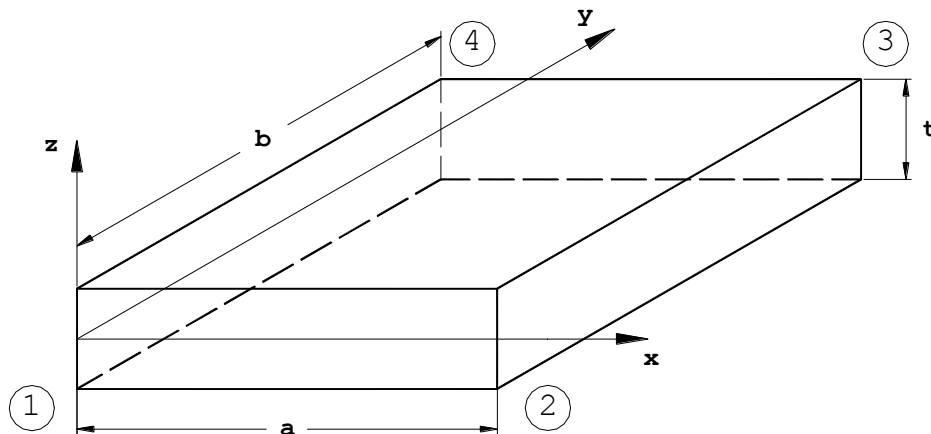
A precisão da solução do Método dos Elementos Finitos será função do tipo do elemento, da sua disposição e do número de elementos finitos a ser considerado na análise estrutural. Quanto maior for o número de elementos finitos maior será a precisão dos resultados gerados, como consequência, maior será o sistema discreto de equações a ser resolvido.

“Com a idealização do Método dos Elementos Finitos, que ocorreu na década de cinquenta com os trabalhos de Argyris e Kelsey, publicados em 1954, e de Turner et al. Publicado em 1956,” (RODRIGUES, 1997, p.1) e do desenvolvimento da informática ocorrido no final da década de 1980, principalmente em função do aumento da capacidade de armazenamento, gerenciamento e processamento de dados, apresentados pelos computadores de pequeno porte, proporcionou ao Engenheiro de Estruturas a aplicação do Método dos Elementos Finitos em

programas computacionais, com geração de modelos mais refinados, proporcionando maior segurança e menor custo aos projetos estruturais.

Neste contexto, em janeiro de 2004 foi apresentado na dissertação de Waidemam (2004) a análise estrutural dinâmica de placas delgadas, utilizando-se elemento finito de placa retangular. As figuras 1 e 2 apresentam tal elemento.

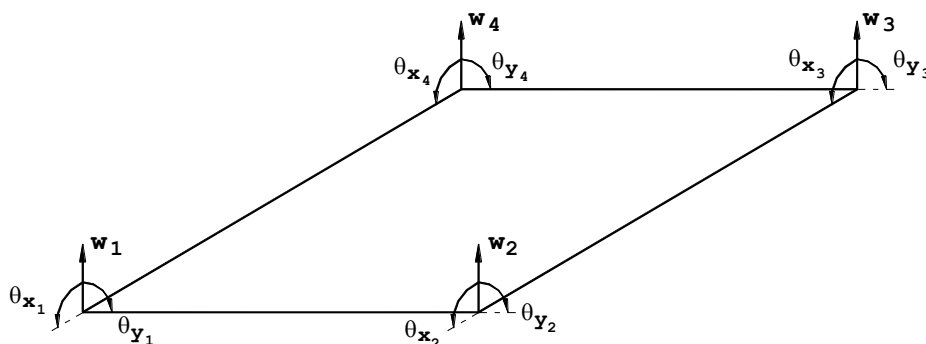
Figura 1 – Elemento finito de placa retangular



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p. 61).

Devido à espessura “t” ser muito menor do que as outras duas dimensões “a” e “b”, o elemento finito de placa retangular é classificado como elemento finito laminar.

Figura 2 – Graus de liberdade do elemento finito de placa retangular



Fonte: (WAIDEMAM, 2004, p. 61).

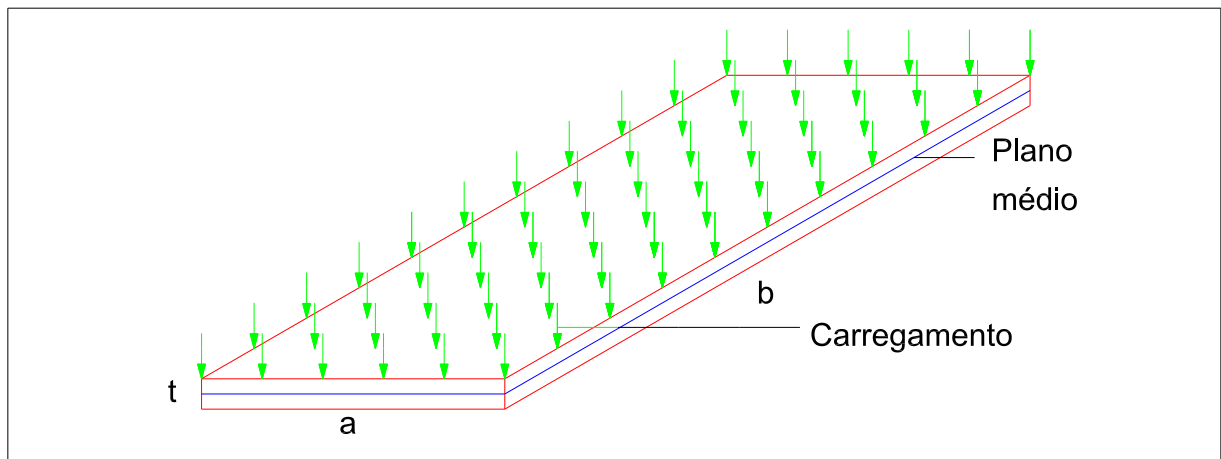
Neste trabalho será apresentado a análise estrutural linear estática e dinâmica de placas, com a utilização do elemento finito prismático regular linear. Os resultados determinados neste trabalho serão comparados com os de Waidemam

(2004), para validação e comparação das respostas determinadas pelos diferentes elementos finitos.

Segundo Martinelli et al. (1986) as placas são elementos estruturais simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão normal a esse plano, chamada de espessura, é pequena em relação às demais. As placas têm a particularidade de serem solicitadas por esforços externos normais ao plano médio.

A figura 3 ilustra uma placa com carregamento perpendicular ao seu plano médio.

Figura 3 – Placa com carregamento perpendicular ao seu plano médio



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em Martinelli et al. (1986) as placas são classificadas de acordo com a relação “ t/a ”, onde “ t ” é a espessura e “ a ” é o menor dos vãos da placa:

- Espessas: $t/a > 1/5$;
- Delgadas: $1/5 \geq t/a \geq 1/100$;
- Muito delgadas: $t/a < 1/100$.

Consta em (VAZ, 2011, item 7.2) que o parâmetro $r=a/t$ classifica a placa em:

- Delgadas: $r \geq 20$;
- Espessas: $r < 20$.

Para formar uma biblioteca de softwares para análise estrutural, será desenvolvido um programa computacional em linguagem MATLAB, que contemple as análises estática e dinâmica de placas com comportamento linear, permitindo sempre que possível realizar a comparação do comportamento estático e dinâmico de tais sistemas estruturais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo à análise estrutural linear estática e dinâmica de placas, com a utilização do elemento finito prismático regular linear. Os resultados determinados neste trabalho sendo comparados com os de Waidemam (2004) para validação e comparação da resposta obtida pelos diferentes elementos finitos.

Primeiramente foi apresentada toda a teoria, as análises estática e dinâmica linear via método dos elementos finitos, o método de Newmark para integração numérica da equação do movimento. Do elemento finito prismático regular linear foi citada sua matriz de rigidez, foi deduzida a matriz de massas utilizando-se a formulação em coordenadas homogêneas, a matriz de amortecimento caracterizada pelo método de Rayleigh, e determinadas às forças nodais equivalentes para os carregamentos concentrado e distribuído.

Depois de estabelecida toda a teoria, foi desenvolvido o programa computacional capaz de solucionar as análises linear estática e dinâmica, possibilitando o entendimento estrutural da placa.

O problema relativo à análise dinâmica com amortecimento demonstrou a importância dos parâmetros de amortecimento “ ξ_i ”, uma vez que esses possuem influência direta nos deslocamentos máximos e no tempo para cessar a vibração.

O número de discretizações do elemento finito prismático regular linear para obter à solução está relacionado com o valor de “ t/a ” da placa, quanto maior for “ t/a ” menor será a malha a ser discretizada no plano xy , e maior será o número de camadas a serem discretizadas na direção z .

Para “ t/a ” de 1/100 com carga distribuída neste trabalho não foi determinada a malha necessária do elemento finito prismático regular linear para chegar à solução, devido à dificuldade computacional. Portanto para “ t/a ” de 1/100 deve-se utilizar elemento finito de placa retangular, que obteve a solução com uma malha de 16x16 no trabalho de (WAIDEMAM, 2004).

Para “ t/a ” de 1/20 com o carga concentrada a resposta do elemento finito prismático regular linear convergiu com 4 camadas na direção z , e com uma malha de 32x32 para os apoios fixos na altura média da placa, e malha de 42x42 para o

engaste nas bordas. O elemento finito de placa retangular alcançou a solução com uma malha de 20x20.

Os problemas desenvolvidos no capítulo 6 para placa delgada, segundo a classificação de (VAZ, 2011), mostram que as malhas do elemento finito prismático regular linear necessárias para a solução dos problemas, foram maiores do que as malhas desenvolvidas pelo elemento finito de placa retangular. Portanto a aplicação do elemento finito de placa retangular proporciona economia no processamento computacional.

As funções interpoladoras do elemento finito prismático regular linear tem variação linear nos lados do prisma, este fato explica a necessidade de uma maior discretização de sua malha para a precisão dos resultados finais, pois a deformação da placa proveniente da flexão não é uma função linear.

O elemento finito prismático regular linear apresentou um diferencial em relação ao elemento de placa retangular, que é a possibilidade de restringir a placa por apoios fixos em pontos distintos na altura da placa, neste trabalho foi desenvolvido com os apoios fixos na altura média e na base da placa. Este fato possibilita ao projetista estrutural definir o ponto de aplicação dos apoios fixos que farão a restrição da placa, que melhor representar o encontro da viga com a placa na estrutura. A deformação da placa proveniente da restrição com os apoios na base é menor, comparada com a determinada com os apoios na altura média. Em relação à reação de apoio horizontal, com a placa apoiada em sua base o valor obtido foi maior do que a reação horizontal obtida pela placa apoiada em sua altura média.

Pelo o fato do elemento finito prismático regular linear ser um elemento sólido, recomenda-se a sua aplicação nos problemas de placas espessas, conforme classificação dada por (VAZ, 2011), ao invés do elemento finito de placa retangular. Os problemas resolvidos pelo elemento finito prismático regular linear para “ t/a ” de 1/10 e de 1/5 mostrou-se malhas menores no plano xy necessárias a solução, quando comparadas com as malhas da placa delgada, viabilizando assim sua aplicação em placas espessas.

Com o decorrer do tempo, a tendência é que o desenvolvimento da informática continue ocorrendo, fazendo com que a aplicação dos elementos finitos sólidos tenha uma maior aplicação nos projetos de engenharia estrutural, principalmente em elementos estruturais com geometrias tridimensionais.

7.2 PROPOSTAS DE DESENVOLVIMENTO

Uma proposta de desenvolvimento é a aplicação de outros elementos finitos sólidos no software desenvolvimento neste trabalho, como o elemento finito prismático regular parabólico que tem 20 nós, onde a potência de seus monômios que formam a sua função interpoladora é maior, comparada com a do elemento finito prismático regular linear.

Como perspectiva futura pode-se fazer a análise da não-linearidade, física e/ou geométrica de sistemas estruturais, uma vez que o programa computacional desenvolvido pode fazer a adaptação facilmente.

REFERÊNCIAS

- ALBERTINI, M. M. **Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural utilizando o elemento finito prismático regular parabólico.** 2009. 214 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- BARES, R. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared.** Barcelona: Gustavo Gili, 1972. 537 p.
- DANSON, D. J. **Analysis of plate bending problems by the direct boundary element method.** 1980, 93 f. Dissertation (MSC. in Advanced Structural Engineering) – Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, Southampton, 1980.
- FAGLIONI, A. F. **Análise não linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear.** 2006. 122 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- MARTINELLI, D. A. O.; MONATANARI, I.; SAVASSI, W. **Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares: conceituação teórica, métodos das diferenças finitas e elementos finitos.** São Carlos: EESC, 1986. 114 p.
- RODRIGUES, R. O. **Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado.** 1997. 298 f. Tese (Doutorado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas.** Amsterdam: Elsevier, 2011. 296 p.
- WAIDEMAM, L. **Análise dinâmica de placas delgadas utilizando elementos finitos triangulares e retangulares.** 2004. 153 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.
- WARBURTON, G. B. **The dynamical behavior of structure.** New York: Pergamon Press, 1976. 354 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method.** 5th. ed. Oxford: Butterworth; Heinemann, 2000. v 3.