UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Existência e Concentração de Soluções para uma Equação de Schrödinger Estacionária

Jonas Antonio Padovani Ederli

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Coorientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Julho de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Existência e Concentração de Soluções para uma Equação de Schrödinger Estacionária

Jonas Antonio Padovani Ederli

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Coorientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Julho de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Padovani Ederli, Jonas Antonio.
P138e Existência e concentração de soluções para uma Equação de Schrödinger Estacionária / Jonas Antonio Padovani Ederli. - Presidente Prudente : [s.n], 2015
46 f. : il.

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Equação de Schrödinger não linear. 2. O Teorema do Passo da Montanha. 3. Métodos Variacionais. I. Pimenta, Marcos Tadeu. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
ORIENTADOR

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
UNESP/FCT

Prof. Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO
UFPA

JONAS ANTONIO PADOVANI EDERLI

Presidente Prudente (SP), 22 de julho de 2015.

Resultado: **APROVADO**.

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5417 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

Aos meus pais Antonio e Maria Sueli,
ao meu irmão Daniel
e às minhas irmãs Natana, Glória Maria, Rebeca e Maria Angélica

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a graça de concluir mais esta etapa da minha vida e por ter permitido conhecer pessoas especiais que me ajudaram muito durante este período.

Agradeço aos meus pais Antonio e Maria Sueli pelo amor que sempre demonstraram por mim e pela educação sólida e cristã que me deram.

Agradeço aos meus irmãos e à minha família no geral que sempre me apoiaram em cada passo desta conquista.

Agradeço aos meus amigos, principalmente ao Guilherme, Fernando, Danilo (Kurt), Elton, Leonardo, Gustavo, Vinícius, Douglas (Yugi), Junior, Heloísa, Crislaine, Adriano, Cintia, Rafael (Castanha), Rafael (Pão), Irineu (Powerfera), José Vanterler (Pancada) e todos aqueles que de alguma maneira contribuiram para o bom andamento deste trabalho, me ajudando direta ou indiretamente. Sou grato, sobretudo, pelos momentos de descontração por eles proporcionados.

Agradeço pelos meus professores da graduação e do mestrado que não mediram esforços para me ensinar. Tenho plena certeza de que sem eles nada disso seria possível.

Agradeço ao meu orientador Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pela sua infinita paciência e preocupação comigo, pela dedicação integral em me atender e tirar minhas dúvidas e principalmente por ter me dado o exemplo do que é ser um excelente profissional.

Agradeço aos professores Suetônio de Almeida Meira (coorientador) e Roberto de Almeida Prado que contribuiram significativamente com as dicas e com as correções valiosas.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Quanto mais um homem se aproxima de suas metas, tanto mais crescem as dificuldades.

Johann Goethe

Resumo

Nesse trabalho estudamos resultados de existência e concentração de soluções positivas para uma equação de Schrödinger estacionária não-linear, quando um parâmetro tende a zero. Mais especificamente, provamos que quando o parâmetro tende a zero, a sequência de soluções obtidas possui um ponto de máximo que tende a se concentrar em torno de um ponto de mínimo global do potencial. A técnica utilizada consiste na utilização de métodos variacionais para comparar as soluções obtidas com a solução de um problema limite que envolve o valor de mínimo do potencial.

Palavras-Chave: *Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional, Equação de Schrödinger, Métodos Variacionais.*

Abstract

In this work we study some results about existence and concentration of positive solutions for a nonlinear stationary version of the Schrödinger equation, as a parameter goes to zero. More specifically, we prove that the sequence of solutions have a maximum points which concentrate around the global minimum of the potential, as a parameter goes to zero. The technique used relies on variational methods to compare the solutions with the solution of a limit problem which have information on the minimum of the potential.

Keywords: *Partial Differential Equations, Functional Analysis, Schrödinger equation, Variational Methods.*

Sumário

Capítulo 1

Introdução

De grande interesse na física-matemática é a versão estacionária da equação de Schrödinger não-linear, ou mais especificamente,

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

A equação (1.1) foi estudada por Rabinowitz em [13], onde foi provado um resultado de existência de soluções usando pioneiramente métodos puramente variacionais, supondo que a não-linearidade f se comporta como uma potência subcrítica e o potencial V satisfaz uma condição global. Após isso, Wang em [15], provou que o problema (1.1) com a não-linearidade $f(u) = |u|^{p-1}u$, admite uma sequência de soluções que se concentram em torno do mínimo global do potencial V. Antes desses, resultados de existência e concentração de soluções para (1.1) haviam sido provados pela primeira vez por Floer e Weinstein em [5] para o caso unidimensional e depois generalizados para dimensões mais altas por Oh em [10].

Outro trabalho bastante importante no estudo desse tipo de problema é o artigo de Del Pino e Felmer [4], onde os autores abordam o problema (1.1) com uma não-linearidade do tipo potência subcrítica e potencial satisfazendo uma condição que pode ser vista como uma versão local da condição suposta por Wang em [15]. Nesse trabalho, os autores introduzem uma técnica que ficou conhecida por Método de Penalização, a qual vem sendo largamente utilizada até os dias atuais.

Generalizações acerca dos resultados de Rabinowitz, Wang, Del Pino e Felmer e outros, vêm sendo desenvolvidos por vários autores, envolvendo hipóteses mais gerais sobre a não-linearidade f e potencial V, bem como também para outros operadores como por exemplo o $p-$laplaciano, desenvolvido por Alves e Figueiredo em [2] e biharmônico de Pimenta e Soares [11, 12], entre outros.

Neste trabalho, faremos um estudo detalhado dos trabalhos [13] e [15], onde se estuda o problema (1.1) com não-linearidade f e potencial V satisfazendo o seguinte conjunto de hipóteses.

(V_1) $V \in C^0(\mathbb{R}^N)$;

(V_2) $0 < V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V < \liminf_{|x|\to+\infty} V$;

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(0) = f'(0) = 0$;

(f_3) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $p \in (1, 2^* - 1)$, tais que $|f(s)| \leq c_1|s| + c_2|s|^p$, para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$,

(f_4) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$;

(f_5) $\dfrac{f(s)}{s}$ é crescente para $s > 0$.

Os principais resultados desse trabalho são os seguintes teoremas.

Teorema 1 *Suponha que* $(f_1) - (f_5)$, (V_1) *e* (V_2) *valham. Então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que para* $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *existe* u_ϵ *solução de (1.1) tal que* $I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon$.

Teorema 2 *Sejam* V *satisfazendo* (V_1) *e* (V_2) *e* $f(s) = |s|^{p-1}s$ *onde* $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. *Então para toda sequência* $\epsilon_m \to 0$, *existe uma subsequência que continuaremos a denotar por* (ϵ_m) *tal que (1.1) (com* ϵ_m *no lugar de* ϵ*) possui uma solução positiva* $u_m \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* u_m *se concentra em um ponto de mínimo global* x_0 *de* V *no seguinte sentido: Para cada* $m > 0$ *suficientemente grande,* u_m *possui somente um ponto de máximo local* x_m *(portanto, global), com* $x_m \to x_0$, *quando* $m \to \infty$, *e para todo* $\delta > 0$ *e* m *suficientemente grande,*

$$\max_{|x-x_0|\leq\delta} u_m(x) > (V_0)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{1.2}$$

Na demonstração de ambos, empregamos métodos variacionais e utilizamos os argumentos de Rabinowitz para a prova da existência de solução para o problema (1.1), para valores de ϵ suficientemente pequenos.

Uma vez obtidas as soluções, mostramos que os níveis minimax associados ao problema (1.1) convergem para o nível minimax do seguinte problema limite

$$\begin{cases} -\Delta u + V_0 u & = & f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u > 0. \end{cases}$$

Isto, por sua vez, nos permite mostrar a concentração das soluções em torno de um ponto de mínimo de V utilizando-se dos argumentos de Wang.

Nossa principal contribuição é de caráter estritamente pedagógico no sentido de facilitar a leitura dos artigos [13] e [15], para iniciantes na área de Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Para isso, procura-se exibir todos os cálculos e justificar todas as passagens nas demonstrações. Para procurar manter o texto tão auto-contido quanto possível, serão apresentados no Capítulo 2 alguns resultados preliminares.

Capítulo

2

Preliminares

2.1 Os Espaços de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer, limitado ou não. Começaremos este capítulo definindo o conceito de derivada fraca de uma função.

Definição 1 *Um multi-índice α é uma n-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, para todo $0 < i \leq n$. Temos associado ao multi-índice α alguns símbolos, um deles é*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_N}^{\alpha_N}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$, chamado de ordem do multi-índice α.

Definição 2 *Seja u localmente integrável em Ω, ou seja, para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$, temos que $\displaystyle\int_K |u| dx < \infty$ e considere α um multi-índice qualquer. Então uma função v localmente integrável é chamada de α-ésima derivada fraca de u se satisfaz*

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \tag{2.1}$$

para toda $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$. Nesse caso denotamos $v = D^\alpha u$.

Dizemos que uma função é fracamente diferenciável se a sua derivada fraca de primeira ordem existe e diremos que ela é k vezes fracamente diferenciável se sua derivada fraca até a ordem k existe. Vamos denotar o espaço linear das funções k vezes fracamente diferenciáveis em Ω por $W^k(\Omega)$. Note que $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$ e que o conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito de derivada clássica que preserva a validade da integração por partes (2.1).

Definição 3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$. Definimos os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \text{para } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

Observação 1 *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, dotado da norma*

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \text{se } 1 \leq p < \infty \tag{2.2}$$

$$\|u\|_{k,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty,\ \text{se } p = \infty. \tag{2.3}$$

Observação 2 *Quando $p = 2$, denotamos $W^{k,p}(\Omega)$ simplesmente por $H^k(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos o espaço*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \textit{para}\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Definimos também, o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$, como sendo

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

Teorema 3 *O subespaço $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Ver demonstração em [1].

Teorema 4 *Se Ω satisfaz a condição do cone interior uniforme, isto é, existe um cone fixo K_Ω tal que cada $x \in \Omega$ é o vértice de um cone $K_\Omega(x) \subset \overline{\Omega}$ e congruente a K_Ω, então existe uma imersão contínua*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \textit{para}\ 1 \leq q \leq \frac{Np}{N - kp},\ \textit{onde}\ kp < N, \tag{2.4}$$

isto é, a aplicação de inclusão $i : W^{k,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é contínua.

Ver demonstração em [1].

2.2 O Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção vamos provar o Teorema do Passo da Montanha e para isso, definiremos objetos que servirão de pré-requisitos para a prova desse.

Seja E um espaço de Banach real. Uma aplicação $I : E \to \mathbb{R}$ é chamada de funcional. Para fazer sentido o que vamos entender por ponto crítico de I, vamos definir o que vem a ser um funcional ser diferenciável no sentido de Fréchet.

Definição 4 *Dizemos que Ié Fréchet diferenciável em $u \in E$ se existe uma aplicação linear contínua $L = L(u) : E \to \mathbb{R}$ que cumpre a seguinte condição: para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe um $\delta = \delta(\epsilon, u) > 0$ tal que*

$$|I(u + v) - I(u) - Lv| \leq \epsilon\|v\|,$$

para todo $v \in E$, com $\|v\| \leq \delta$. A aplicação L será denotada por $I'(u)$.

Note que $I'(u) \in E^*$, onde E^* é o espaço dual de E.

Definição 5 *Um ponto crítico u de I é um ponto em que $I'(u) = 0$, ou seja, $I'(u)\psi = 0$ para toda $\psi \in E$. O valor de I em u é então chamado de valor crítico de I.*

Iremos provar agora o Teorema do Passo da Montanha e para isso usaremos o seguinte resultado.

Lema 1 *(Lema da Deformação) Seja $\varphi^d := \varphi^{-1}(]-\infty, d])$, X um espaço de Hilbert, $\varphi \in C^2(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Considere que para todo $u \in \varphi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$, $\|\varphi'(u)\| \geq 2\epsilon$. Então, existe $\eta \in C(X, X)$ tal que:*

(i) $\eta(u) = u$, *para todo* $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(ii) $\eta(\varphi^{c+\epsilon}) \subset \varphi^{c-\epsilon}$.

Teorema 5 *(Teorema do Passo da Montanha) Seja* X *um espaço de Hilbert,* $\varphi \in C^2(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ *e* $r > 0$ *tais que* $\|e\| > r$. *Considere* $b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e)$. *Então, para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $u \in X$ *tal que*

(a) $c - 2\epsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\epsilon$;

(a) $\|\varphi'(u)\| < 2\epsilon$.

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(u)) \tag{2.5}$$

e $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0$ *e* $\gamma(1) = e\}$.

Demonstração. Note que $b \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\gamma(t))$, e então $b \leq c \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\gamma(te))$. Suponha que, para algum $\epsilon > 0$, a conclusão do Teorema não seja válida. Podemos assumir que

$$c - 2\epsilon \geq \varphi(0) \geq \varphi(e). \tag{2.6}$$

Pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.7}$$

Considere $\beta := \eta \circ \gamma$, onde η é dado como no lema anterior. Pelo item (i) do Lema da Deformação e por 2.6 temos que

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0$$

e que $\beta(1) = e$. Logo, temos que $\beta \in \Gamma$. Segue do item (ii) do Lema da Deformação e de 2.7 que

$$c \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\beta(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição. ■

Capítulo

3

Resultados de Existência

Nesta seção, o nosso objetivo é provar que o problema

$$\left\{ \begin{array}{c} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u > 0. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

possui solução, onde $N \geq 3$ e f e V satisfazem as condições $(f_1) - (f_5)$, (V_1) e (V_2) são satisfeitas.

A abordagem começa observando que o problema

$$-\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N$$

é equivalente ao problema

$$-\Delta v + V(\epsilon x)v = f(v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

onde as soluções u_ϵ de (3.1) e v_ϵ de (3.2) são relacionadas por $v_\epsilon(x) = u_\epsilon(\epsilon x)$. Assim estudemos o problema (3.2).

Para cada $\epsilon > 0$ definimos o espaço de Hilbert $H_\epsilon \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ como sendo

$$H_\epsilon = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \|u\|_\epsilon < \infty\},$$

onde

$$\|.\|_\epsilon : H_\epsilon \longmapsto \mathbb{R}$$

define uma norma em H_ϵ dada por

$$\|u\|_\epsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x) u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

que vem do produto interno

$$\langle u, v \rangle_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(\epsilon x) uv) dx.$$

Por (V_1), para $N > 2$ temos as imersões contínuas:

$$H_\epsilon \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \text{ para } 2 \leq p \leq 2^*.$$

Temos associado à equação (3.2), o funcional dado por

$$I_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

para $u \in H_\epsilon$.

Prova-se que $I_\epsilon \in C^1(H_\epsilon, \mathbb{R})$. Além disso, temos que $I_\epsilon(0) = 0$.

Lema 2 *O funcional I_ϵ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, ou seja:*

(i) existem constantes ρ, $\alpha > 0$ tais que $I_\epsilon|_{\partial B_\rho} > \alpha$, e

(ii) existe um $e \in H_\epsilon \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I_\epsilon(e) < 0$.

Demonstração. Primeiramente, provemos o item (ii). Note que, para $u \in H_\epsilon \setminus \{0\}$ e $t > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^N;\ |tu(x)| > r\}| > 0 \tag{3.3}$$

onde $|X|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto X.

De fato, se $|\{x \in \mathbb{R}^N;\ |tu(x)| > r\}| = 0$ paratodo $r > 0$, teríamos que $|tu(x)| = 0$ q.t.p, o que contraria o fato de $u \neq 0$ em H_ϵ. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx \geq \int_{\{x\in\mathbb{R}^N;\ |tu(x)|>r\}} F(tu)dx.$$

Logo, por (3.3) e pela condição (f_4), segue que

$$I_\epsilon(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|_\epsilon^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx \leq \frac{t^2}{2}\|u\|_\epsilon^2 - \int_{\{x\in\mathbb{R}^N;\ |tu(x)|>r\}} F(tu)dx$$

$$\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_\epsilon^2 - a_3 t^\mu \int_{\{x\in\mathbb{R}^N;\ |tu(x)|>r\}} |u|^\mu dx \longrightarrow -\infty,$$

quando $t \longrightarrow \infty$ e dessa forma, o item (ii) está provado.

Agora, provemos o item (i).

Por (f_2), temos que para todo $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t| < \delta$,

$$|F(t)| \leq \frac{\eta}{2}|t|^2 \tag{3.4}$$

Note que, por (f_4), existe $A = A(\eta) > 0$ tal que, se $|t| \geq \delta$,

$$|F(t)| \leq A(\eta)|t|^{p+1} \tag{3.5}$$

De fato, como

$$|F(t)| \leq |t||f(t)| \leq |t|(c_1|t| + c_2|t|^p) = c_1|t|^2 + c_2|t|^{p+1},$$

temos que

$$\frac{|F(t)|}{|t|^{p+1}} \leq \frac{c_1|t|^2 + c_2|t|^{p+1}}{|t|^{p+1}} = \frac{c_1}{|t|^{p-1}} + c_2 \leq \frac{c_1}{|\delta|^{p-1}} + c_2 := A(\delta).$$

De (3.4) e (3.5), segue que

$$|F(t)| \leq \frac{\eta}{2}|t|^2 + A|t|^{p+1}.$$

para todo $t \geq 0$.
Fazendo $J(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(t)dx$, pelas imersões contínuas de Sobolev, temos que

$$|J(u)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\eta}{2}|u|^2 + A|u|^{p+1}\right) dx = \frac{\eta}{2}\|u\|^2_{L^2} + A\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}}$$

$$\leq C\left(\tfrac{\eta}{2}\|u\|^2_\epsilon + A\|u\|^{p+1}_\epsilon\right) = C\|u\|^2_\epsilon\left(\tfrac{\eta}{2} + A\|u\|^{p-1}_\epsilon\right).$$

Então, tomando $\|u\|_\epsilon < \left(\frac{\eta}{2A}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, temos

$$|J(u)| \leq \eta C\|u\|^2_\epsilon \tag{3.6}$$

Como

$$I_\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2_\epsilon - J(u),$$

por (3.6) segue que

$$I_\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2_\epsilon - J(u) \geq \tfrac{1}{2}\|u\|^2_\epsilon - C\eta\|u\|^2_\epsilon = \|u\|^2_\epsilon\left(\tfrac{1}{2} - C\eta\right).$$

Logo, escolhendo $\eta > 0$ de modo que $\frac{1}{2} - C\eta > 0$, se $\|u\|_\epsilon = \rho$, temos que

$$I_\epsilon(u) \geq \alpha,$$

onde $\alpha := \rho^2\left(\frac{1}{2} - C\eta\right)$. ■

A seguir, além de definir o que vem a ser a Variedade de Nehari, vamos também apresentar uma propriedade muito interesante a respeito dela. Mostraremos que a variedade de Nehari, denotada por $\mathcal{N}_\epsilon$, é radialmente homeomorfa à esfera unitária $\mathcal{S}^1$ em H_ϵ.

Definição 6 *Definimos como sendo a Variedade de Nehari o conjunto $\mathcal{N}_\epsilon$ dado por*

$$\mathcal{N}_\epsilon = \left\{u \in H_\epsilon \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right\}. \tag{3.7}$$

É interessante notar que $\mathcal{N}_\epsilon$ é um conjunto que contém todas as soluções fracas não-triviais do problema (3.1).

Antes de provar o próximo lema, considere para todo $u \in H_\epsilon \setminus \{0\}$ e $t > 0$ a aplicação

$$\psi_\epsilon(t) = I_\epsilon(tu). \tag{3.8}$$

Note que $\psi_\epsilon(0) = 0$ e usando argumentos similares ao do Lema 2, temos que $\psi_\epsilon(t) > 0$ para t suficientemente pequeno e $\psi_\epsilon(t) < 0$ para t suficientemente grande. Portanto, o $\max\limits_{t\geq 0} \psi_\epsilon(t)$ existe e é assumido em um certo $t = \varphi_\epsilon(u) > 0$. Derivando ψ_ϵ, temos que

$$\psi'_\epsilon(t) = I'_\epsilon(tu)u = t\|u\|^2_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)udx = t^2\|u\|^2_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)udx.$$

Aplicando em $t = \varphi_\epsilon(u)$, temos

$$\psi'(\varphi_\epsilon(u)) = (\varphi_\epsilon(u))\|u\|_\epsilon^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi_\epsilon(u)u)udx. \tag{3.9}$$

Como $\varphi_\epsilon(u)$ é o ponto onde ψ assume o seu máximo, a derivada nesse ponto é nula, ou seja, $\psi'(\varphi_\epsilon(u)) = 0$. Então, usando esse fato em (3.9), segue que

$$(\varphi_\epsilon(u))^2\|u\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi_\epsilon(u)u)\varphi_\epsilon(u)udx$$

Portanto, $\varphi_\epsilon(u)u \in \mathcal{N}_\epsilon$.

Lema 3 *O número $\varphi_\epsilon(u) > 0$ é o único valor de t tal que $tu \in \mathcal{N}_\epsilon$.*

Demonstração. Para provar a unicidade de $\varphi_\epsilon(u)$, vamos supor que existem dois valores diferentes e mostrar que eles são os mesmos. Para isso, tomemos um $\widehat{\varphi}_\epsilon(u)$, tal que $0 < \widehat{\varphi}_\epsilon(u) \neq \varphi_\epsilon(u)$ e $\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u \in \mathcal{N}_\epsilon$. Sendo assim, temos que

$$I'_\epsilon(\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u)\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u = 0,$$

ou seja,

$$(\widehat{\varphi}_\epsilon(u))^2\|u\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u)\widehat{\varphi}_\epsilon(u)udx.$$

Então

$$\|u\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u)u}{\widehat{\varphi}_\epsilon(u)}dx. \tag{3.10}$$

Por outro lado, como $\varphi_\epsilon(u)u \in \mathcal{N}_\epsilon$,

$$\|u\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_\epsilon(u)u)u}{\varphi_\epsilon(u)}dx. \tag{3.11}$$

Logo, de (3.10) e (3.11) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u)u}{\widehat{\varphi}_\epsilon(u)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_\epsilon(u)u)u}{\varphi_\epsilon(u)}dx. \tag{3.12}$$

Como escolhemos $\widehat{\varphi}_\epsilon(u) \neq \varphi_\epsilon(u)$, podemos supor, sem perda de generalidade que $\widehat{\varphi}_\epsilon(u) < \varphi_\epsilon(u)$. Pela hipótese (f_5), temos que

$$\widehat{\varphi}_\epsilon(u) < \varphi_\epsilon(u) \Rightarrow \frac{f(\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u(x))}{\widehat{\varphi}_\epsilon(u)} < \frac{f(\varphi_\epsilon(u)u(x))}{\varphi_\epsilon(u)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(\widehat{\varphi}_\epsilon(u)u)}{\widehat{\varphi}_\epsilon(u)} - \frac{f(\varphi_\epsilon(u)u)}{\varphi_\epsilon(u)} \right) udx \neq 0,$$

contradizendo (3.12). ■

Lema 4 *A aplicação $T : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{N}_\epsilon$ definida por $T(u) = \varphi_\epsilon(u)u$ é bijetora e sua inversa $T^{-1} : \mathcal{N}_\epsilon \to \mathcal{S}^1$ é dada por $T^{-1}(u) = \dfrac{u}{\|u\|_\epsilon}$.*

Demonstração. Para provar esse lema, basta verificar que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = u$.

De fato, primeiramente note que para todo $u \in \mathcal{S}^1$,

$$T^{-1} \circ T(u) = T^{-1}(T(u)) = \frac{\varphi_\epsilon(u)u}{\|\varphi_\epsilon(u)\|_\epsilon \|u\|_\epsilon} = u.$$

Note ainda que, para todo $u \in \mathcal{N}_\epsilon$, temos que $\varphi_\epsilon\left(\frac{u}{\|u\|_\epsilon}\right) = \|u\|_\epsilon$. Então, para $u \in \mathcal{N}_\epsilon$,

$$T \circ T^{-1}(u) = T(T^{-1}(u)) = \varphi_\epsilon\left(\frac{u}{\|u\|_\epsilon}\right)\frac{u}{\|u\|_\epsilon} = u.$$

■

Assim, para concluirmos que $\mathcal{N}_\epsilon$ é radialmente homeomorfa à esfera $\mathcal{S}^1$ em H_ϵ, basta mostrar que a aplicação $u \mapsto \varphi_\epsilon(u)$ é contínua em $H_\epsilon \setminus \{0\}$.

Proposição 1 *A aplicação* $\Lambda : H_\epsilon \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *dada por* $\Lambda(u) = \varphi_\epsilon(u)$ *é contínua.*

Demonstração. Seja $u_m \longrightarrow u$ em $H_\epsilon \backslash \{0\}$. Como $\varphi_\epsilon(u_m)u_m \in \mathcal{N}_\epsilon$, temos que

$$I'_\epsilon(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)\varphi_\epsilon(u_m)u_m = 0,$$

ou seja,

$$(\varphi_\epsilon(u_m))^2\|u_m\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)\varphi_\epsilon(u_m)u_m dx. \tag{3.13}$$

Mostremos que, a menos de subsequência, $(\varphi_\epsilon(u_m))$ é limitada.

Como $\varphi_\epsilon(u_m) > 0$, temos que analisar dois casos. Se $\varphi_\epsilon(u_m) \leq 1$ ao longo de uma subsequência, não há o que provar. Consideremos então $\varphi_\epsilon(u_m) > 1$ e note que, $\varphi_\epsilon(u_m)|u_m| > |u_m|$. Assim, por (f_4), se $u_m(x) > 0$, então

$$\int_{u_m(x)}^{\varphi_\epsilon(u_m)u_m(x)} \frac{\mu}{s} ds \leq \int_{u_m(x)}^{\varphi_\epsilon(u_m)u_m(x)} \frac{f(s)}{F(s)} ds$$

$$\Rightarrow F(\varphi_\epsilon(u_m)u_m(x)) \geq (\varphi_\epsilon(u_m))^\mu F(u_m) \tag{3.14}$$

Analogamente, se $u_m(x) < 0$, prova-se que

$$F(\varphi_\epsilon(u_m)u_m(x)) \geq (\varphi_\epsilon(u_m))^\mu F(u_m) \tag{3.15}$$

Assim, por (f_4) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)\varphi_\epsilon(u_m)u_m dx \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)dx \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_\epsilon(u_m))^\mu F(u_m)dx$$

Assim, em (3.13)

$$(\varphi_\epsilon(u_m))^2\|u_m\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)\varphi_\epsilon(u_m)u_m dx \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_\epsilon(u_m))^\mu F(u_m)dx$$

$$\Longrightarrow \frac{\varphi_\epsilon(u_m)^2}{\varphi_\epsilon(u_m)^\mu} \geq \frac{\mu \int_{\mathbb{R}^N} F(u_m)dx}{\|u_m\|_\epsilon^2}$$

$$\Longrightarrow \varphi_\epsilon(u_m)^{\mu-2} \leq \frac{1}{\mu}\frac{\|u_m\|_\epsilon^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u_m)dx} \tag{3.16}$$

Devemos encontrar um limite superior para $\varphi_\epsilon(u_m)$ e para isso é suficiente que

$$\frac{\|u_m\|_\epsilon}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u_m)dx} \to \frac{\|u\|_\epsilon}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx}.$$

Como $u_m \to u$ em H_ϵ, pela continuidade da norma, temos que

$$\|u_m\|_\epsilon^2 \longrightarrow \|u\|_\epsilon^2 \tag{3.17}$$

Sendo assim, vamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_m)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx. \tag{3.18}$$

A ideia é utilizar o Teorema da Convergência Dominada Generalizada, então vamos verificar que suas hipóteses são satisfeitas. De fato, observe que

(i) Como F é contínua e $u_m \to u$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, segue que $F(u_m) \longrightarrow F(u)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$.

(ii) Temos também que

$$|F(s)| \leq a_1|s|^2 + a_2|s|^{p+1}.$$

Então,

$$|F(u_m)| \leq a_1|u_m|^2 + a_2|u_m|^{p+1} \longrightarrow a_1|u|^2 + a_2|u|^{p+1}$$

Além disso, pelas imersões contínuas de Sobolev
(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(a_1|u_m|^2 + a_2|u_m|^{p+1})dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N}(a_3|u|^2 + a_4|u|^{p+1})dx.$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizada,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_m)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Sendo assim, em (3.16), por (3.17) e (3.18) temos que

$$\varphi_\epsilon(u_m)^{\mu-2} \leq \frac{1}{\mu}\frac{\|u_m\|_\epsilon^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u_m)dx} \longrightarrow \frac{\|u\|_\epsilon^2}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx}$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

Logo $\varphi_\epsilon(u_m)$ é limitada, então possui uma subsequência que converge para um $\overline{\varphi} \geq 0$.

Afirmação: $\overline{\varphi} \neq 0$.

De fato, se $\overline{\varphi} = 0$, temos em (3.13) que

$$\|u_m\|_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)u_m^2}{\varphi_\epsilon(u_m)u_m}dx \tag{3.19}$$

Como $\|u_m\|_\epsilon^2 \longrightarrow \|u\|_\epsilon^2$, por (f_2) segue que

$$\lim_{\varphi_\epsilon(u_m)u_m\to 0} \frac{f(\varphi_\epsilon(u_m)u_m)u_m}{\varphi_\epsilon(u_m)} = 0.$$

Além disso, (u_m) é limitada, então segue que a integral do último membro de (3.19) converge para zero. Logo, teremos que $\|u\|_\epsilon = 0$, contradizendo o fato de que $u \in H_\epsilon \setminus \{0\}$. Dessa forma, $\overline{\varphi} > 0$. Então, a menos de subsequência, $\varphi_\epsilon(u_m) \longrightarrow \overline{\varphi} > 0$. Pela unicidade de $\varphi_\epsilon(u)$, segue que $\overline{\varphi} = \varphi_\epsilon(u)$. Portanto, $\varphi_\epsilon(u_m) \longrightarrow \varphi_\epsilon(u)$ o que implica que $\Lambda(u_m) \longrightarrow \Lambda(u)$, mostrando a continuidade de Λ. ■

Assim, concluímos que $\mathcal{N}_\epsilon$ é radialmente homeomorfa à esfera $\mathcal{S}^1$ em H_ϵ.

Sejam c_ϵ e c_ϵ^* definidos por

$$c_\epsilon = \inf_{g\in\Gamma_\epsilon} \max_{0\leq t\leq 1} I_\epsilon(g(t)) \tag{3.20}$$

e

$$c_\epsilon^* = \inf_{u\in H_\epsilon\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\epsilon(tu) \tag{3.21}$$

onde Γ_ϵ é dado por

$$\Gamma_\epsilon = \{g \in C([0,1], H_\epsilon);\ g(0) = 0 \ e \ I_\epsilon(g(1)) < 0\}, \tag{3.22}$$

Proposição 2 $c_\epsilon^* = c_\epsilon = \inf\limits_{\mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon$.

Demonstração. Para cada $u \in H_\epsilon$, como ψ_ϵ assume o seu máximo em $\varphi_\epsilon(u) > 0$, temos que

$$\max_{t\geq 0} \varphi_\epsilon(tu) = \max_{t\geq 0} I_\epsilon(tu) = I_\epsilon(\varphi_\epsilon(u)u).$$

onde a última igualdade segue da unicidade de $\varphi_\epsilon(u)$. Logo,

$$c_\epsilon^* = \inf_{u\in H_\epsilon\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\epsilon(tu) = \inf_{u\in H_\epsilon\setminus\{0\}} I_\epsilon(\varphi_\epsilon(u)u) = \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon \tag{3.23}$$

Afirmação: Para todo $g \in \Gamma_\epsilon$, $g([0,1]) \cap \mathcal{N}_\epsilon \neq \emptyset$.

De fato, tomemos $u \in H_\epsilon \setminus \{0\}$, de forma que ou $u \in \mathcal{N}_\epsilon$ ou u está no interior de $\mathcal{N}_\epsilon$. Se u está no interior de $\mathcal{N}_\epsilon$, temos que $\varphi_\epsilon(u) > 1$ e então $\varphi_\epsilon'(1) \geq 0$. Note que,

$$\varphi_\epsilon'(1) \geq 0 \Longrightarrow I_\epsilon'(u)u \geq 0.$$

Assim,

$$\|u\|_\epsilon^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx \tag{3.24}$$

Note que, por (f_4), temos que, para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\mu F(s) \leq f(s)s \Longrightarrow \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(s)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(s)sdx.$$

Logo,

$$\frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^N} F(s)dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(s)sdx. \tag{3.25}$$

Por (3.24) e (3.25),

$$I_\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|_\epsilon^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

$$\geq \tfrac{\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = \Big(\frac{\mu}{2} - 1\Big)\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Como $\mu > 2$, temos que $\frac{\mu}{2} - 1 > 0$. Assim,

$$\Big(\frac{\mu}{2} - 1\Big)\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx > 0$$

o que implica

$$I_\epsilon(u) > 0.$$

Temos que $g(1)$ está no exterior de $\mathcal{N}_\epsilon$, pois $I_\epsilon(g(1)) < 0$. Por outro lado, $g(0)$ está no interior de $\mathcal{N}_\epsilon$. Logo, pelo Teorema da Alfândega, $g([0,1]) \cap \mathcal{N}_\epsilon \neq \emptyset$ e a afirmação está provada. Sendo assim,

$$\max_{0\leq t\leq 1} I_\epsilon(g(t)) \geq \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon = c_\epsilon^*.$$

Portanto,

$$c_\epsilon \geq c_\epsilon^*. \tag{3.26}$$

Por outro lado, para $u \in H_\epsilon \setminus \{0\}$ fixo, $I_\epsilon(tu) < 0$, para t suficientemente grande. Assim, cada raio $\{tu;\ t \geq 0\}$ pode ser associado a uma função $g_u \in \Gamma_\epsilon$ a menos de um reescalonamento. Assim,

$$c_\epsilon^* = \inf_{u\in H_\epsilon\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I_\epsilon(tu) = \inf_{u\in H_\epsilon\setminus\{0\}} \max_{0\leq t\leq 1} I_\epsilon(g_u(t)) \geq \inf_{g\in\Gamma_\epsilon} \max_{0\leq t\leq 1} I_\epsilon(g(t)) = c_\epsilon \tag{3.27}$$

Portanto, de (3.26) e (3.27) obtém-se que $c_\epsilon = c_\epsilon^*$. ∎

Observação 3 *Como $\mathcal{N}_\epsilon$ homeomorfo à esfera unitária, este divide H_ϵ em duas componentes conexas. Na prova anterior, os termos "interior"e "exterior"de $\mathcal{N}_\epsilon$ se referem, respectivamente, à componente conexa que contém a origem e a que não contém.*

Observação 4 *Como $c_\epsilon = \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} I_\epsilon$ e qualquer ponto crítico não trivial de I_ϵ pertence a $\mathcal{N}_\epsilon$, se c_ϵ é um valor crítico de I_ϵ, então é o menor valor crítico positivo de I_ϵ.*

O próximo resultado nos mostra a dependência monótona de c_ϵ com relação a V. Considere para cada $j = 1,\ 2$, o problema

$$-\Delta u + a_j(x)u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \tag{3.28}$$

onde o funcional associado a (3.28) é dado por

$$I_j(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a_j(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

e considere o conjunto Γ_j dado por

$$\Gamma_j = \{g \in C([0,1]), H^1);\ g(0) = 0 \text{ e } I_j(g(1)) < 0\}.$$

Proposição 3 *Seja f satisfazendo as hipóteses $(f_1)-(f_5)$ e a_1 e $a_2 \in C^0(\mathbb{R}^N)$ de modo que existe $d>0$ tal que a_1,$a_2 \geq d$ em $\mathbb{R}^N$. Se $a_2 \geq a_1$ em $\mathbb{R}^N$, então $c_2 \geq c_1$, onde os c_j são os respectivos níveis minimax associados ao problema (3.28) com a_j igual a a_1 e a_2.*

Demonstração. Temos que

$$a_2 \geq a_1 \Longrightarrow I_2(u) \geq \; I_1(u), \tag{3.29}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, pela definição de Γ_j, temos que $g \in \Gamma_2 \Longrightarrow g \in \Gamma_1$.

Por (3.29),

$$I_2(u) \geq I_1(u) \Longrightarrow \max_{0\leq t\leq 1} I_2(g(t)) \geq \max_{0\leq t\leq 1} I_1(g(t)).$$

Logo,

$$c_2 = \inf_{g\in\Gamma_2}\max_{0\leq t\leq 1} I_2(g(t)) \geq \inf_{g\in\Gamma_2}\max_{0\leq t\leq 1} I_1(g(t)) \geq \inf_{g\in\Gamma_1}\max_{0\leq t\leq 1} I_1(g(t)) = c_1.$$

■

Para provar a próxima proposição, considere o funcional I_{V_0} definido por

$$I_{V_0}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V_0 u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Além disso, sejam Γ_{V_0} e c_{V_0} definidos como

$$\Gamma_{V_0} = \{g \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N));\, g(0) = 0 \text{ e } I_{V_0}(g(1)) < 0\}$$

e

$$c_{V_0} = \inf_{g\in\Gamma_{V_0}}\max_{0\leq t\leq 1} I_{V_0}(g(t)).$$

Proposição 4 *Se as hipóteses $(V_1)-(V_2)$ e $(f_1)-(f_5)$ são satisfeitas, então ou c_ϵ é nível crítico de I_ϵ ou $c_\epsilon \geq c_{V_0}$.*

Demonstração. Por (2.5), existe uma sequência $(w_m) \subset H_\epsilon$ tal que $\|w_m\|_\epsilon = 1$ e quando $m \to \infty$,

$$\max_{\theta\geq 0} I_\epsilon(\theta w_m) \to c_\epsilon. \tag{3.30}$$

Então, associando a cada w_m uma função $g_m \in \Gamma_\epsilon$, de modo que $\max_{0\leq t\leq 1} g_m(t) = \max_{\theta\geq 0} I_\epsilon(\theta w_m)$, temos que pelo Teorema 2.4 de [16], existe uma sequência $(u_m) \subset H_\epsilon$, $0 < \delta_m \to 0$ e $0 \leq t_m \leq 1$ tais que,

$$\|u_m - g_m(t_m)\|_\epsilon \leq \delta_m^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

$$c_\epsilon - \delta_m < I_\epsilon(u_m) < c_\epsilon \tag{3.32}$$

e

$$\|I'_\epsilon(u_m)\|_\epsilon \leq \delta_m^{\frac{1}{2}}. \tag{3.33}$$

Sendo assim, (3.32) e (3.33) implicam que (u_m) é limitada em H_ϵ. Logo, a menos de uma subsequência $u_m \rightharpoonup u_\epsilon$ em H_ϵ e $u_m \to u_\epsilon$ em $L^p_{loc(\mathbb{R}^N)}$, para $1 \leq p < 2^*$, onde u_ϵ é uma solução fraca de (3.1). Então, existem $(y_m) \subset \mathbb{R}^N$, $\beta > 0$ e $R > 0$, tais que

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(y_m)} u_m^2 dx > \beta. \tag{3.34}$$

De fato, pois caso contrário, para todo $R > 0$, teríamos que

$$\liminf_{m\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} u_m^2 dx = 0.$$

Consequentemente, pelo Lema I.1 de [8], segue que

$$u_m \longrightarrow 0 \text{ em } L^p, \text{ para } 2 \leq p < 2^*. \tag{3.35}$$

Mas, usando (3.32),(3.33) e o fato de $\|u_m\|_\epsilon$ ser limitada, obtém-se

$$I_\epsilon(u_m) - \frac{1}{2} I'_\epsilon(u_m) u_m \longrightarrow c_\epsilon > 0 \tag{3.36}$$

Por outro lado, (3.35) e as hipóteses (f_2) e (f_3) mostram que

$$I_\epsilon(u_m) - \tfrac{1}{2} I'_\epsilon(u_m) u_m = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} u_m f(u_m) - F(u_m) \right) dx \longrightarrow 0,$$

o que contraria (3.36).

Se (y_m) contém uma subsequência limitada, por (3.34), $u_\epsilon \neq 0$. Além disso, para cada $\rho > 0$, como por (f_4), temos que, para $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$0 < \mu F(s) \leq s f(s) \Rightarrow F(s) \leq \frac{s f(s)}{\mu} < \frac{s f(s)}{2}$$

o que implica

$$\frac{1}{2} s f(s) - F(s) > 0.$$

Logo, pelas imersões compactas de Sobolev,

$$I_\epsilon(u_m) - \tfrac{1}{2} I'_\epsilon(u_m) u_m \geq \int_{B_\rho(0)} \left(\frac{1}{2} f(u_m) u_m - F(u_m) \right) dx \to \int_{B_\rho(0)} \left(\frac{1}{2} f(u_\epsilon) u_\epsilon - F(u_\epsilon) \right) dx.$$

Por outro lado,

$$I_\epsilon(u_m) - \tfrac{1}{2} I'_\epsilon(u_m) u_m \longrightarrow c_\epsilon.$$

Então, quando $m \to \infty$, temos que

$$c_\epsilon \geq \int_{B_\rho(0)} \left(\frac{1}{2} f(u_\epsilon) u_\epsilon - F(u_\epsilon) \right) dx.$$

Como ρ é qualquer e o integrando é positivo, pelo Teorema da Convergência Monótona, segue que

$$c_\epsilon \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_\epsilon) u_\epsilon - F(u_\epsilon) \right) dx. \tag{3.37}$$

Como u_ϵ é uma solução fraca não trivial de (3.1), temos que $u_\epsilon \in \mathcal{N}_\epsilon$, ou seja,

$$c_\epsilon \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} f(u_\epsilon) u_\epsilon - F(u_\epsilon) \right) dx = I_\epsilon(u_\epsilon).$$

Logo, pela Observação 5, $I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon$ e o resultado está provado para este caso.

Agora, suponhamos que (y_m) não seja uma sequência limitada, então, para todo $\alpha > 0$ e $\rho > 0$,

$$\max_{\theta \geq 0} I_\epsilon(\theta w_m) \geq I_\epsilon(\alpha w_m) = I_{V_0}(\alpha w_m) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\alpha w_m|^2 dx$$

$$= I_{V_0}(\alpha w_m) + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\alpha w_m|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\alpha w_m|^2 dx.$$

Como por (V_2) podemos escolher ρ de modo que $V(x) \geq V_0$, para todo $x \in (B_\rho(0))^c$, segue que

$$\max_{\theta \geq 0} I_\epsilon(\theta w_m) \geq I_{V_0}(\alpha w_m) + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\alpha w_m|^2 dx. \tag{3.38}$$

Como (3.38) vale para todo $\alpha > 0$, podemos escolher em particular $\alpha = \varphi_{V_0}(w_m)$. Logo, segue que,

$$\begin{aligned}\max_{\theta \geq 0} I_\epsilon(\theta w_m) &\geq I_{V_0}(\varphi_{V_0}(w_m) w_m) + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\varphi_{V_0}(w_m) w_m|^2 dx \\ &\geq \inf_{\mathcal{N}_\epsilon} I_{V_0} + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\varphi_{V_0}(w_m) w_m|^2 dx. \\ &= c_{V_0} + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\varphi_{V_0}(w_m) w_m|^2 dx,\end{aligned}$$

ou seja, temos que

$$\max_{\theta \geq 0} I_\epsilon(\theta w_m) \geq c_{V_0} + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\varphi_{V_0}(w_m) w_m|^2 dx. \tag{3.39}$$

Afirmação: A sequência $(\varphi_{V_0}(w_m))$ é limitada, a menos de subsequência.

com efeito, como $\varphi_{V_0}(w_m) > 0$, temos dois casos a considerar. A saber:
(i) ao longo de uma subsequência $\varphi_{V_0}(w_m) \leq 1$ ou
(ii) ao longo de uma subsequência $\varphi_{V_0}(w_m) > 1$ para m suficientemente grande.

No caso (i) não há o que provar.

Para o caso (ii), como $\varphi_{V_0}(w_m) > 1$, por (f_4) temos que

$$\varphi_{V_0}(w_m)^2 \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi_{V_0}(w_m) w_m) dx \geq \mu \varphi_{V_0}(w_m)^\mu \int_{\mathbb{R}^N} F(w_m) dx$$

Logo, temos que

$$\varphi_{V_0}(w_m)^{\mu - 2} \leq \frac{1}{\mu} \frac{1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(w_m) dx}. \tag{3.40}$$

Se ao longo de uma subsequência o termo do lado direito de (3.40) é limitado, encontramos um limite superior para $\varphi_{V_0}(w_m)$. Caso contrário, para $m \to \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(w_m)dx \longrightarrow 0. \tag{3.41}$$

Afirmação: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(w_m)dx \nrightarrow 0.$

De fato, note que como em (3.31)

$$g_m(t_m) \equiv \xi_m w_m \tag{3.42}$$

onde $g_m \in \Gamma_\epsilon$ e $\xi_m \in \mathbb{R}_+$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por (3.31),

$$\|\xi_m w_m - u_m\|_\epsilon \leq \delta_m^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

e como anteriormente, por (3.32) e (3.33), temos que (u_m) é limitada em H_ϵ.

Logo, como vale (3.43), existe uma constante $K > 0$, que independe de m, tal que

$$\xi_m \leq \delta_m^{\frac{1}{2}} + \|u_m\|_\epsilon \leq K.$$

Sendo assim, para qualquer $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\|w_m\|_{L^2(B_r(y))} = \tfrac{1}{\xi_m}\|\xi_m w_m\|_{L^2(B_r(y))} \geq \tfrac{1}{K}\|\xi_m w_m\|_{L^2(B_r(y))}.$$

Logo, temos que

$$\|w_m\|_{L^2(B_r(y))} \geq \frac{1}{K}\|\xi_m w_m\|_{L^2(B_r(y))} \geq \frac{1}{K}\left(\|u_m\|_{L^2(B_r(y))} - \|u_m - \xi_m w_m\|_{L^2(B_r(y))}\right). \tag{3.44}$$

Segue de (3.43) e das imersões de Sobolev que

$$\|w_m\|_{L^2(B_r(y))} \geq \frac{1}{K}\left(\|u_m\|_{L^2(B_r(y))} - C\delta_m^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.45}$$

Logo, pelo Lema I.1 de [8] existe uma sequência $(y_m) \subset \mathbb{R}^n$ e constantes $\beta > 0$, $R > 0$, tais que

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(y_m)} w_m^2 dx \geq \beta.$$

Então em (3.45), escolhendo $y = y_m$ e $r = R$, para m grande obtemos

$$\|w_m\|_{L^2(B_R(y_m))} \geq \frac{1}{K}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.46}$$

Para provar que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(w_m)dx \nrightarrow 0$, basta mostrar então que existe $\beta_1 > 0$ tal que, a menos de subsequência,

$$\int_{B_R(y_m)} F(w_m)dx \geq \beta_1$$

Por (f_4), temos que $F(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| \geq 1$ e $F(s) \geq K_1|s|^\mu$ com $K_1 > 0$. Logo, para todo $\gamma > 0$, existe uma constante $A_\gamma > 0$ de modo que

$$|s|^2 \leq \gamma + A_\gamma F(s), \tag{3.47}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Para mostrar que (3.47) vale, considere $\gamma > 0$ pequeno, ou seja, podemos supor que $\gamma < 1$. Temos que analisar dois casos.

Caso 1: Se $|s| > 1$, então como $\mu > 2$,

$$F(s) \geq K_1|s|^\mu > K_1|s|^2.$$

Caso 2: Se $|s| \leq \gamma$, então temos novamente que considerar dois casos.

(i) Se $|s| \leq 1$, como $A_\gamma F(s) > 0$, segue que

$$|s|^2 \leq |s| \leq \gamma \leq \gamma + A_\gamma F(s).$$

(ii) Se $\gamma \leq |s| < 1$, para A_γ suficientemente grande,

$$|s|^2 \leq \gamma + A_\gamma \min_{\gamma \leq s \leq 1} F(s).$$

Logo,

$$\int_{B_R(y_m)} |w_m|^2 dx \leq \int_{B_R(y_m)} (\gamma + A_\gamma F(w_m))\, dx = \gamma|B_R| + A_\gamma \int_{B_R(y_m)} F(w_m) dx,$$

onde $|B_R|$ é a medida de Lebesgue de B_R. Se

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(w_m) dx \longrightarrow 0$$

quando $m \to \infty$, como γ é arbitrário, segue da desigualdade anterior que

$$\int_{B_R(y_m)} w_m^2 dx \to 0$$

quando $m \to \infty$, o que é impossível em virtude de (3.46).

Portanto, $\varphi_{V_0}(w_m)$ é limitada.

Dando continuidade na demonstração da Proposição 4, vamos supor que existe um $\eta_1 > 0$, tal que

$$\|w_m\|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \eta_1. \tag{3.48}$$

Essa suposição será provada logo abaixo.

Como $g_m(t_m) = \xi_m w_m$, onde $\xi_m \in \mathbb{R}_+$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por (3.31), temos que

$$\|\xi_m w_m - u_m\|_\epsilon \leq \delta_m^{\frac{1}{2}}. \tag{3.49}$$

Assim, usando as imersões contínuas de Sobolev, temos que

$$\|u_m\|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \|\xi_m w_m\|_{L^2(B_\rho(0))} - \|\xi_m w_m - u_m\|_{L^2(B_\rho(0))}. \tag{3.50}$$

Por (3.49), o último termo do lado direito de (3.50) tende à zero, quando $m \to \infty$. Assim, se $\xi_m \to 0$ ao longo de uma subsequência, como w_m é limitada, $\xi_m w_m \to 0$. E pela continuidade de I_ϵ, $I_\epsilon(\xi_m w_m) \to 0$, o que contraria (3.30), ou seja, (ξ_m) é limitada inferiormente por um $M > 0$. Isso significa que para todo $m \in \mathbb{N}$, $|\xi_m| \geq M$. Sendo assim, de (3.50)

$$\|u_m\|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \|\xi_m w_m\|_{L^2(B_\rho(0))} - \|\xi_m w_m - u_m\|_{L^2(B_\rho(0))}$$

$$\geq |\xi_m|\eta_1 - C\|\xi_m w_m - u_m\|_\epsilon \geq M\eta_1 - C\delta_m^{\frac{1}{2}} \tag{3.51}$$

Portanto, (3.51) nos mostra que existe uma constante $\eta_2 > 0$ dada por $\eta_2 = M\eta_1 - C\delta_m^{\frac{1}{2}}$ tal que,

$$\|u_m\|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \eta_2.$$

Logo, ao longo de uma subsequência, $u_m \rightharpoonup u_\epsilon$ em H_ϵ, que é solução fraca não trivial de (3.1), com $I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon$.

Agora nos resta verificar que (3.48) é válido.

De fato, se (3.48) não valesse, teríamos que, ao longo de uma subsequência de $m's \to \infty$,

$$\|w_m\|_{L^2(B_\rho(0))} \to 0. \tag{3.52}$$

Assim, por (3.30), (3.52) e pelo fato da sequência $(\varphi_{V_0}(w_m))$ ser limitada, segue da relação (3.39) descrita por

$$\max_{\theta \geq 0} I_\epsilon(\theta w_m) \geq c_{V_0} + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(V(\epsilon x) - V_0)|\varphi_{V_0}(w_m)w_m|^2 dx,$$

que $c_\epsilon \geq c_{V_0}$. Desta forma, a prova da Proposição 4 está completa. ■

Lema 5 *Existe $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$-\Delta w + V_0 w = f(w) \ em \ \mathbb{R}^N \tag{3.53}$$

e $I_{V_0}(w) = c_{V_0}$, onde $I_{V_0}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V_0 u^2) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$, $u \in H_\epsilon$ e c_{V_0} é o nível minimax associado a I_{V_0}.

Demonstração. Pelo Teorema 8.5 de [16], existe uma sequência $(w_m) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I_{V_0}(w_m) \to c_{V_0}$ e $I'_{V_0}(w_m) \to 0$. Note que, por (f_4), por um lado

$$I_{V_0}(w_m) - \tfrac{1}{\mu}I'_{V_0}(w_m)w_m = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\mu}\right)\|w_m\|_{V_0}^2 + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\mu}f(w_m)w_m - F(w_m)\right)dx$$

$$\geq \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\mu}\right)\|w_m\|_{V_0}^2,$$

onde

$$\|w_m\|_{V_0}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_m|^2 + V_0 w_m) dx.$$

Por outro lado, temos que

$$I_{V_0}(w_m) - \frac{1}{\mu} I'_{V_0}(w_m) w_m \leq c_{V_0} + o_m(1)\|w_m\|_{V_0} + o_m(1),$$

Assim, segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|w_m\|_{V_0}^2 \leq c_{V_0} + o_m(1)\|w_m\|_{V_0} + o_m(1).$$

Logo, (w_m) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pelo Lema I.1 de [8], existem uma sequência $(y_m) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $\beta > 0$, $R > 0$, tais que

$$\liminf_{m \to \infty} \int_{B_R(y_m)} w_m^2 dx > \beta.$$

Note que, se $\tau_y u(x) = u(x - y)$, então pela regra da cadeia e fazendo uma simples mudança de variável, temos que $I_{V_0}(\tau_y u) = I_{V_0}(u)$.
Assim, a menos de uma translação de w_m,

$$\liminf_{m \to \infty} \int_{B_R(0)} w_m^2 dx \geq \beta.$$

Sendo assim, $w_m \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde w é solução fraca e não trivial de (3.1). Logo, de forma similar a (3.37), mostra-se que $I_{V_0}(w) = c_{V_0}$. $\blacksquare$

Finalmente, vamos mostrar que o problema (3.1) possui solução fraca não trivial. Neste intuito, vamos provar o principal teorema deste capítulo.

Teorema 6 *Suponha que* $(f_1) - (f_5)$, (V_1) *e* (V_2) *valham. Então existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que para* $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *existe* u_ϵ *solução de (3.1) tal que* $I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon$.

Demonstração.
Vamos supor que c_ϵ não é um valor crítico de I_ϵ, então, pela Proposição 4, temos que

$$c_\epsilon \geq c_{V_0}. \tag{3.54}$$

Vamos mostrar então que (3.54) é impossível para ϵ suficientemente pequeno. Para isso, vamos empregar um argumento de comparação. Seja w uma solução de (3.1) tal que $I_{V_0}(w) = c_{V_0}$. Considere $R > 0$ e $\chi_R \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tal que

(i) $\chi_R(t) = 1$, se $t \leq R$,

(ii) $\chi_R(t) = 0$, se $t \geq R + 2$,

(iii) $|\chi'_R(t)| \leq 1$, para $R < t < R + 2$.

Seja $v = \chi_R w$. Então, para qualquer $\widehat{\theta} > 0$,

$$\gamma_R \equiv \max_{\theta \geq 0} I_{V_0}(\theta v) \geq I_\epsilon(\widehat{\theta} v) + \frac{1}{2}\int_{B_{R+2}(0)} (V_0 - V(\epsilon x))|\widehat{\theta} v|^2 dx. \tag{3.55}$$

Escolha $\widehat{\theta} = \varphi_\epsilon(v)$, onde φ_ϵ é dada pela Proposição 1. Assim, como na prova do Teorema 6,

$$\gamma_R \geq c_\epsilon + \frac{1}{2}\int_{B_{R+2}(0)} (V_0 - V(\epsilon x))|\widehat{\theta} v|^2 dx. \tag{3.56}$$

Note que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$V_0 - V(\epsilon x) \geq \tfrac{1}{2}(V_0 - V(\epsilon x)) \text{ em } B_{R+2}(0).$$

Então, em (3.56), temos que

$$\gamma_R \geq c_\epsilon + \frac{1}{2}\int_{B_{R+2}(0)} (V_0 - V(\epsilon x))|\widehat{\theta} v|^2 dx \geq c_\epsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(V_0 - V(0))\right)\widehat{\theta}^2 \int_{B_{R+2}(0)} v^2 dx.$$

Assim,

$$\gamma_R \geq c_\epsilon + \frac{1}{4}\left(V_0 - V(0)\right)\widehat{\theta}^2 \int_{B_{R+2}(0)} v^2 dx. \tag{3.57}$$

Note que $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\epsilon, R)$ depende de ϵ e de R.

Vamos mostrar que existe um $\theta_0 > 0$ tal que $\widehat{\theta}(\epsilon, R) \geq \theta_0$ para todo ϵ suficientemente pequeno e R suficientemente grande. Além disso, escolhendo R de modo que

$$\int_{B_{R+2}(0)} v^2 dx \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx, \tag{3.58}$$

teremos que

$$\gamma_R \geq c_\epsilon + \frac{1}{8}\left(V_0 - V(0)\right)\theta_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx. \tag{3.59}$$

Por outro lado, vamos mostrar que existe uma função $\psi(R) > 0$ tal que, $\psi(R) \to 0$, quando $R \to \infty$ e

$$\gamma_R \leq c_{V_0} + \psi(R) \tag{3.60}$$

Portanto, escolhendo R suficientemente grande tal que

$$\psi(R) < \frac{1}{8}\left(V_0 - V(0)\right)\theta_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2 dx, \tag{3.61}$$

teremos que (3.59), (3.60) e (3.61) implicam que $c_\epsilon < c_{V_0}$, contradizendo (3.54). Vamos verificar a existência de θ_0 e mostrar que vale (3.60). Temos que $\widehat{\theta}$ é caracterizado por

$$\widehat{\theta}^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(\epsilon x)v^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(\widehat{\theta} v)\widehat{\theta} v dx. \tag{3.62}$$

Por (f_2) e (f_3), para todo $\eta > 0$, existe uma constante $A_\eta > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \eta|z| + A_\eta |z|^p \tag{3.63}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^N$. Logo, por (3.61), (3.62) e (3.63), segue que

$$\widehat{\theta}^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_0 v^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\eta \widehat{\theta} v^2 + A_\eta |\widehat{\theta} v|^{p+1}) dx. \tag{3.64}$$

Note que, como $v = \chi_R w$, temos que

$$|v| \leq |\chi_R||w| \Rightarrow |v| \leq |w| \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx. \tag{3.65}$$

Além disso, como $v = w$ em $B_R(0)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + \frac{V_0}{2} v^2 \right) dx \geq \int_{B_R(0)} \left(|\nabla v|^2 + \frac{V_0}{2} v^2 \right) dx = \int_{B_R(0)} \left(|\nabla w|^2 + \frac{V_0}{2} w^2 \right) dx \tag{3.66}$$

Portanto, para R suficientemente grande,

$$\int_{B_R(0)} \left(|\nabla w|^2 + \frac{V_0}{2} w^2 \right) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + \frac{V_0}{2} w^2 \right) dx \tag{3.67}$$

Dessa forma, tomando $\eta = \frac{V_0}{2} > 0$ em (3.64), temos que

$$\widehat{\theta}^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V_0 v^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\widehat{\theta}^2 \frac{V_0}{2} v^2 + A_\eta \widehat{\theta}^{p+1} |v|^{s+1} \right) dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V_0 v^2 - \frac{V_0}{2} v^2 \right) dx \leq A_\eta \widehat{\theta}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} v^{p+1} dx.$$

Por (3.65), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + \frac{V_0}{2} v^2 \right) dx \leq A_\eta \widehat{\theta}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} v^{p+1} dx \leq A_\eta \widehat{\theta}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} w^{p+1} dx.$$

Assim, por (3.66) e (3.67), segue que

$$\widehat{\theta}^{p-1} \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + \frac{V_0}{2} v^2 \right) dx}{\displaystyle A_\eta \int_{\mathbb{R}^N} w^{p+1} dx} \geq \frac{\displaystyle\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + \frac{V_0}{2} w^2 \right) dx}{\displaystyle A_\eta \int_{\mathbb{R}^N} w^{p+1} dx}.$$

Portanto,

$$\widehat{\theta} \geq \left(\frac{\displaystyle\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + \frac{V_0}{2} w^2 \right) dx}{\displaystyle A_\eta \int_{\mathbb{R}^N} w^{s+1} dx} \right)^{\frac{1}{1-s}} := \widehat{\theta}_0 > 0. \tag{3.68}$$

Agora, resta provar que (3.60) vale.

De fato, note que por (3.55),

$$\gamma_R = I_{V_0}(\varphi(v)v) = c_{V_0} + I_{V_0}(\varphi(v)v) - I_{V_0}(w). \tag{3.69}$$

Então, basta mostrar apenas que

$$|I_{V_0}(\varphi(v)v) - I_{V_0}(w)| \to 0, \tag{3.70}$$

quando $R \to \infty$.

De fato, como $v = \chi_R w$, temos que

$$\chi_R w \to w \text{ em } H_\epsilon.$$

Pela Proposição 1, $\varphi(v) \to \varphi(w)$. Mas como w é uma solução fraca não-trivial de (3.1), temos que $\varphi(w) = 1$. Desta forma, a continuidade de φ implica (3.70) e a prova do resultado está completa. ■

Capítulo

4

Resultados de Concentração

Neste capítulo vamos mostrar que as soluções obtidas no capítulo anterior apresentam um fenômeno de concentração em torno de pontos de mínimo global do potencial, no caso particular em que a não linearidade é do tipo $f(s) = |s|^{p-1}s$, onde $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

Seja $\epsilon_m \to 0$, quando $m \to \infty$. Para m suficientemente grande, pelo Teorema 6, do Capítulo 3, sabemos que existe uma solução de energia mínima $u_m \in H_{\epsilon_m}$ para o problema

$$-\epsilon_m^2 \Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u, \tag{4.1}$$

Lembremos que o problema (4.1) é equivalente ao seguinte problema

$$-\Delta v + V(\epsilon_m x)v = |v|^{p-1}v, \tag{4.2}$$

onde v_m e u_m, soluções de (4.1) e (4.2), respectivamente, estão relacionados por $v_m(x) = u_m(\epsilon_m x)$, onde portanto $I_{\epsilon_m}(v_m) = c_{\epsilon_m}$.

Para o problema (4.2), temos associado o funcional $I_{\epsilon_m} : H_{\epsilon_m} \to \mathbb{R}$, dado pela expressão

$$I_{\epsilon_m}(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + V(\epsilon_m x)v^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{p+1}dx. \tag{4.3}$$

É válido lembrar que, de forma análoga ao Capítulo 3, pode-se provar que $I_{\epsilon_m} \in C^1(H_\epsilon, \mathbb{R})$ e que qualquer ponto crítico de I_{ϵ_m} é uma solução fraca de (4.2). Para estudar os pontos críticos de I_{ϵ_m}, vamos introduzir o seguinte conjunto que também já é conhecido em virtude do capítulo anterior. Esse conjunto é conhecido como a Variedade de Nehari para I_{ϵ_m} e é dado por

$$\mathcal{M}_m = \{v \in H_{\epsilon_m} \setminus \{0\};\ I'_{\epsilon_m}(v)v = 0\}. \tag{4.4}$$

Definimos também o conjunto

$$\Gamma_m = \{\eta \in C([0,1]),\ H_{\epsilon_m});\ \eta(0) = 0,\ \eta(1) \neq 0,\ I_{\epsilon_m}(\eta(1)) \leq 0\}$$

e o valor minimax do passo da montanha por

$$c_{\epsilon_m} = \inf_{\eta \in \Gamma_m} \max_{t \in [0,1]} I_{\epsilon_m}(\eta(t)).$$

Então, para qualquer $v \in H_{\epsilon_m} \backslash \{0\}$, existe um único $\theta > 0$ tal que

$$I_{\epsilon_m}(\theta v) = \max_{t \geq 0} I_{\epsilon_m}(tv), \ \theta v \in \mathcal{M}_m. \tag{4.5}$$

Além disso,

$$0 < c_{\epsilon_m} = \inf_{v \in \mathcal{M}_m} I_{\epsilon_m}(v) = \inf_{v \in H_{\epsilon_m} \backslash \{0\}} \max_{t \geq 0} I_{\epsilon_m}(tv). \tag{4.6}$$

Em vista de (4.6), v_m é um minimizante de I_{ϵ_m} em $\mathcal{M}_m$. Note que cada minimizante v_m de I_{ϵ_m} em $\mathcal{M}_m$ não muda de sinal. De fato, por (4.5), existe um $\theta > 0$ tal que $\theta |v_m| \in \mathcal{M}_m$ e

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} I_{\epsilon_m}(t|v_m|) = I_{\epsilon_m}(\theta |v_m|) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \theta^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v_m|^{p+1} dx \\ &= \theta^{p+1} I_{\epsilon_m}(v_m) = \theta^{p+1} c_{\epsilon_m}. \end{aligned}$$

Esse fato juntamente com (4.6) implica que $\theta \geq 1$. Mas,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla |v_m||^2 + V(\epsilon_m x) v_m^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_m|^2 + V(\epsilon_m x) v_m^2) = \int_{\mathbb{R}^N} |v_m|^{p+1} dx$$

e $\theta v_m \in \mathcal{M}_m$. Então, $\theta \leq 1$. Logo, segue que $\theta = 1$ e $|v_m| \in \mathcal{M}_m$. Assim, $|v_m|$ também é um minimizante de I_{ϵ_m} em $\mathcal{M}_m$. Argumentos semelhantes ao do Capítulo 3, nos mostram que $|v_m|$ é uma solução fraca de (4.2). Agora, pelo princípio do máximo forte, $|v_m|$ nunca se anula e desta forma v_m não muda de sinal.

Vamos provar o teorema que já foi enunciado no Capítulo 1, mas por praticidade, será enunciado novamente aqui.

Teorema 7 *Sejam V e f satisfazendo (V_1) e (V_2) e (f_1) - (f_5), respectivamente. Então para toda sequência $\epsilon_m \to 0$, existe uma subsequência que continuaremos a denotar por (ϵ_m) tal que (3.1) (com ϵ_m no lugar de ϵ) possui uma solução positiva $u_m \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e (u_m) se concentra em um ponto de mínimo global x_0 de V no seguinte sentido: Para cada $m > 0$ suficientemente grande, u_m possui somente um ponto de máximo global x_m, com $x_m \to x_0$, quando $m \to \infty$, e para todo $\delta > 0$ e m suficientemente grande,*

$$\max_{|x - x_0| \leq \delta} u_m(x) > (V_0)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{4.7}$$

Para provar o Teorema 7, a ideia será comparar v_m com a solução positiva u_0 de

$$\Delta u - V_0 u + u^p = 0, \ u(\infty) = 0, \ u(0) = \max u \tag{4.8}$$

e a prova seguirá de uma série de lemas que serão provados ao longo deste capítulo. Antes de começarmos efetivamente a prova do teorema, provaremos o seguinte resultado que nos será muito útil para os resultados posteriores.

Lema 6 $\lim_{m \to \infty} c_{\epsilon_m} = c_0$.

Demonstração. Para qualquer $R > 0$, tome $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que, $\varphi_R = 1$ em $B_R(0) = \{|x| \leq R\}$, $\varphi_R = 0$ em $(B_{R+1}(0))^C$, $0 \leq \varphi_R \leq 1$ e $|\nabla \varphi_R| \leq c(N)$. Seja $v_R = \varphi_R u_0$. Tome uma sequência y_k tal que $V(y_k) \to V_0$. Seja $w(x) = v_R\left(x + \dfrac{y_k}{\epsilon_m}\right)$. Então, existe um único $\theta = \theta(k, m, R) > 0$ tal que $\theta w \in \mathcal{M}_{\epsilon_m}$, ou seja,

$$\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + V(\epsilon_m x) w^2) dx = \theta^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} w^{p+1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_R|^2 + V(\epsilon_m x + y_k) v_R^2) dx = \theta^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} v_R^{p+1} dx$$

Dessa forma, temos que

$$\theta^{p-1} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_R|^2 + V(\epsilon_m x + y_k) v_R^2) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_0 v_R^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} V_0 v_R^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v_R^{p+1} dx}$$

$$\Rightarrow \theta^{p-1} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_R|^2 + V_0 v_R^2) dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v_R^{p+1} dx} + \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_m x + y_k) - V_0) v_R^2) dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v_R^{p+1} dx} \tag{4.9}$$

Afirmação: $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_R|^2 + V_0 v_R^2) dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} v_R^{p+1} dx} = 1.$

A afirmação segue do fato de v_R convergir para u_0 quando $R \to \infty$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq q \leq 2^*$, somado ao fato de u_0 ser solução de (4.8).

Também, para R fixo, se tomarmos k e m suficientemente grande tal que $V(y_k)$ está suficientemente perto de V_0, fixando tal k podemos provar que o segundo termo do lado direito da igualdade em (4.9) está suficientemente próximo de 0.

Juntando esses fatos vemos que dado $\eta > 0$, existe R e k suficientemente grandes de tal forma que

$$1 - \eta < \liminf_{m\to\infty} \theta \leq \limsup_{m\to\infty} \theta < 1 + \eta. \tag{4.10}$$

Agora, observe que

$$c_{\epsilon_m} \leq I_{\epsilon_m}(\theta w) = \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \theta w|^2 + V(\epsilon_m x)(\theta w)^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\theta w|^{p+1} dx$$

$$= \theta^2 \left(I_{\epsilon_m}(w) + \frac{1 - \theta^{p-1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx \right)$$

$$= \theta^2 \left(I_{V_0}(w) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\epsilon_m x) - V_0) w^2 dx + \frac{1 - \theta^{p-1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx \right)$$

$$= \theta^2 \left(I_{V_0}(v_R) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(\epsilon_m x + y_k) - V_0) v_R^2 dx + \frac{1 - \theta^{p-1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v_R|^{p+1} dx \right) \tag{4.11}$$

$$= \theta^2 A(k, m, R)$$

onde para todo $\eta > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ tais que

$$c_0 - \eta < \liminf_{m\to\infty} A(k, m, R) \leq \limsup_{m\to\infty} A(k, m, R) < c_0 + \eta. \tag{4.12}$$

Assim, por (4.10), (4.11) e (4.12) segue que para todo $\eta > 0$, temos que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\limsup_{m\to\infty} c_{\epsilon_m} \leq \limsup_{m\to\infty} \theta(k,m,R)^2 A(k,m,R) < c_0 + K\eta.$$

Como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que $\limsup_{m\to\infty} c_m \leq c_0$.

Por outro lado, como $V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V$, temos que $I_{\epsilon_m}(v) \geq I_{V_0}(v)$, para $v \in E_\epsilon$. Logo, $c_{\epsilon_m} \geq c_0$. Assim segue que de fato

$$\lim_{m\to\infty} c_m = c_0.$$

■

Como comentamos no início deste capítulo, a prova do Teorema 7 seguirá dos lemas enunciados e provados a seguir. Primeiramente, note que

$$c_{\epsilon_m} = I_{\epsilon_m}(v_m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_m|^2 + V(\epsilon_m x) v_m^2) dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|v_m\|_{\epsilon_m}.$$

Como $c_{\epsilon_m} \to c_0$, quando $m \to \infty$, segue que $\|v_m\|_{\epsilon_m}$ é limitada, quando $m \to \infty$.

Lema 7 *Existe uma sequência $\{y_m\}$ e constantes positivas R e β, tais que*

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(y_m)} v_m^2(x) dx \geq \beta. \tag{4.13}$$

Demonstração. Caso contrário, para qualquer $R > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} v_m^2(x) dx = 0,$$

e pelo Lema de Lions, teríamos que $v_m \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para $2 < q < 2^*$. Isso é impossível, pois pelo Lema 6, temos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} v_m^{p+1} dx = c_{\epsilon_m} \to c_0 > 0,$$

quando $m \to \infty$. ■

Seja $w_{\epsilon_m}(x) = v_{\epsilon_m}(x + y_m) = u_{\epsilon_m}(\epsilon_m x + \epsilon_m y_m)$. Então, por (4.13),

$$\liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(0)} w_{\epsilon_m}^2(x) dx \geq \beta > 0. \tag{4.14}$$

Além disso,

$$-\Delta w_{\epsilon_m} + V(\epsilon_m x + \epsilon y_m) w_{\epsilon_m} = w_{\epsilon_m}^p, \tag{4.15}$$

onde $w_{\epsilon_m} > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Ainda, como $w_{\epsilon_m} \in \mathcal{M}_m$ temos que

$$c_{\epsilon_m} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_{\epsilon_m}|^2 + V(\epsilon_m x + \epsilon_m y_m) w_{\epsilon_m}^2) dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} w_{\epsilon_m}^{p+1} dx. \tag{4.16}$$

Seja o conjunto $\mathcal{M}_0$ dado por

$$\mathcal{M}_0 = \{v \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\};\ I'_{V_0}(v)v = 0\},$$

onde

$$I_{V_0}(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v|^2 + V_0 v^2)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{p+1}dx.$$

Vamos mostrar o seguinte resultado.

Lema 8 $\{\epsilon_m y_{\epsilon_m}\}$ *é limitada quando* $m \to \infty$.

Demonstração. De fato, pois caso contrário, existiria uma sequência $\epsilon_m \to 0^+$, tal que

$$\epsilon_m y_{\epsilon_m} \to \infty.$$

Por (4.16) e pelo Lema 6, temos que

$$\begin{aligned} C\|w_m\|_{H^1} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla w_m|^2 + V(\epsilon_m x + \epsilon_m y_m)w_m^2\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_m|^2 + V(\epsilon_m x)v_m^2\right)dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{\epsilon_m} \to \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_0, \end{aligned}$$

quando $m \to \infty$, ou seja, $w_m = w_{\epsilon_m}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, temos que

(i) $w_m \rightharpoonup w_0 \geq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $w_m \to w_0 \geq 0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p < 2^*$;

(iii) $w_m \to w_0 \geq 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$.

Por (4.13), $w_0 \neq 0$. Logo, existe um $\theta > 0$ tal que $\theta w_0 \in \mathcal{M}_0$.

Afirmação: Como $\liminf\limits_{x\to\infty} V(x) > V_0$, por (4.14) existe $\delta > 0$ tal que

$$\Delta w_0 - (V_0+\delta)w_0 + w_0^p \geq 0 \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^N) = (H^1(\mathbb{R}^N))^*, \tag{4.17}$$

onde $(H^1(\mathbb{R}^N))^*$ denota o dual de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

De fato, primeiramente note que para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ o funcional

$$\Delta w_0 - (V_0+\delta)w_0 + w_0^p : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R},$$

é dado por

$$(\Delta w_0 - (V_0+\delta)w_0 + w_0^p)(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N}(\Delta w_0.\varphi - (V_0+\delta)w_0.\varphi + w_0^p.\varphi)dx.$$

Assim, temos que

$$\Delta w_0 - (V_0+\delta)w_0 + w_0^p \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N}(\Delta w_0.\varphi - (V_0+\delta)w_0.\varphi + w_0^p.\varphi)dx \geq 0, \tag{4.18}$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$, para provar (4.18), basta provar então que, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\varphi \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta w_0.\varphi - (V_0+\delta)w_0.\varphi + w_0^p.\varphi)dx \geq 0.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $\varphi \geq 0$ e note que

$$\int_{R^N} (-\nabla w_m \nabla\varphi - V(\epsilon_m x + \epsilon_m y_m)w_m\varphi + w_m^p\varphi)dx = 0 \tag{4.19}$$

Tomando o $\liminf$ em ambos os lados, temos o seguinte:

(i) $w_m \rightharpoonup w_0 \Rightarrow \liminf\limits_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_m \nabla\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_0 \nabla\varphi dx;$

(ii) $\liminf\limits_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} -V(\epsilon_m x + \epsilon_m y_m)w_m\varphi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} -(V_0+\delta)w_0\varphi dx$ pelo Teorema da Convergência Dominada;

(iii) $w_m \to w_0$ em $L^p(supp\varphi) \Rightarrow \liminf\limits_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_m^p\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_0^p\varphi dx.$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\nabla w_0 \nabla\varphi - (V_0+\delta)w_0\varphi + w_0^p\varphi)dx \geq 0. \tag{4.20}$$

Como (4.20) vale para toda $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \geq 0$, então, aproximando $|w_0|$ por funções suaves e positivas, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-|\nabla w_0|^2 - V_0 w_0^2 + w_0^{p+1})dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} (-|\nabla w_0|^2 - (V_0+\delta)w_0^2 + w_0^{p+1})dx \geq 0. \tag{4.21}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_0|^2 + (V_0+\delta)w_0^2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1}dx.$$

Logo, $0 < \theta < 1$. Como $p > 1$, temos

$$\begin{aligned}
c_0 = \inf_{\mathcal{M}_0} I_{V_0}(v) \leq I_{V_0}(\theta w_0) &= \theta^{p+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1}dx \\
&< \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1}dx \\
&\leq \liminf_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} w_m^{p+1}dx \\
&= \liminf_{m\to\infty} I_{\epsilon_m}(w_m) = \lim_{m\to\infty} I_{\epsilon_m}(w_m) = c_0,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade e a última igualdade seguem do Lema de Fatou e do Lema 6, respectivamente. Assim chegamos a $c_0 < c_0$, o que é uma contradição, o que prova o resultado. ■

Pelo último resultado a menos de subsequência, temos que $\overline{x}_m \equiv \epsilon_m y_{\epsilon_m} \to x_0$ e, pelo Lema 6, $w_m \equiv w_{\epsilon_m} \rightharpoonup w_0 > 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, quando $m \to \infty$.

Lema 9 *x_0 é um ponto de mínimo global de V.*

Demonstração. Aplicando a Teoria da Regularidade Elíptica para (4.15), temos que $w_m \to w_0$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e portanto

$$-\Delta w_0 + V(x_0)w_0 = w_0^p,\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.22}$$

Como $V_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_0|^2 + V_0 w_0^2)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1}dx. \tag{4.23}$$

Logo, existe um $0 < \theta \leq 1$ tal que $\theta w_0 \in \mathcal{M}_0$.

Observe que, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
c_0 = \lim_{m\to\infty} c_{\epsilon_m} &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} w_m^{p+1}dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1}dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} (\theta w_0)^{p+1}dx \\
&= I_{V_0}(\theta w_0) \geq \inf_{\mathcal{M}_0} I_{V_0} \geq c_0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\theta = 1$ e de fato $w_0 \in \mathcal{M}_0$. Assim temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_0|^2 + V_0 w_0^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2)dx,$$

o que só é possível se $V(x_0) = V_0$ e o lema está provado. ■

Provados os lemas, passaremos agora à prova do Teorema 7.

Demonstração. (**Teorema 7:**)

Note que, como $w_m \rightharpoonup w_0 \Rightarrow \|w_0\| \leq \liminf_{m\to\infty}\|w_m\|$ e pelo Lema 10, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2)dx &\leq \liminf_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_m|^2 + V(x_0)w_m^2)dx \\
&\leq \limsup_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_m|^2 + V(x_0)w_m^2)dx \\
&\leq \limsup_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_m|^2 + V(\epsilon_m x + \overline{x}_m)w_m^2)dx \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{c_{\epsilon_m}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)} = \frac{c_0}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2)dx.
\end{aligned}$$

Observação 5 *A igualdade da quarta linha acima é justificada da seguinte forma.*

Note que, como v_m satisfaz $-\Delta v_m + V(\epsilon_m x)v_m = v_m^p$, temos que

$$0 = I'_{\epsilon_m}(v_m)v_m = \|v_m\|^2_{\epsilon_m} - \int_{\mathbb{R}^N}|v_m|^{p+1}dx \Rightarrow \|v_m\|^2_{\epsilon_m} = \int_{\mathbb{R}^N}|v_m|^{p+1}dx. \tag{4.24}$$

Por outro lado, $I_{\epsilon_m}(v_m) = c_{\epsilon_m}$, então usando (4.24),

$$c_{\epsilon_m} = I_{\epsilon_m}(v_m) = \frac{1}{2}\|v_m\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v_m|^{p+1}dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|v_m\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{c_{\epsilon_m}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)} = \|v_m\|^2. \tag{4.25}$$

Assim, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_m|^2 + V(x_0)w_m^2)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2)dx,$$

quando $m \to \infty$, ou seja, $\|w_m\|_{H^1} \to \|w_0\|_{H^1}$. Logo, $w_m \to w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto, $w_m \to w_0$ em L^{2^*}. Pela recíproca do Teorema de Frechet-Kolmogorov (Corolário 4.27 de [3]), segue que para todo $\eta > 0$, existe $R > 0$, tal que $\|w_m\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N \setminus B_R)} < \eta$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$\|w_m\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N \setminus B_R)} \to 0, \tag{4.26}$$

quando $R \to \infty$ uniformemente em $m \in \mathbb{N}$.

Note que, como $V \geq 0$ e $w_m \geq 0$,

$$-\Delta w_m \leq -\Delta w_m + V(\epsilon_m x + \overline{x}_m)w_m = w_m^p.$$

Então temos que w_m é uma subsolução de

$$\text{-}\Delta u = |u|^{p-1}u.$$

Pela Desigualdade de Harnack (Teorema 8.17 de [14]), tomando $f_i,\ g = 0$ e $R = 1$, temos que

$$\sup_{B_1(Q)} w_m \leq C\|w_m\|_{L^{2^*}(B_2(Q))}, \text{ onde } Q \in \mathbb{R}^N. \tag{4.27}$$

Afirmação: $w_m(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ uniformemente em $m \in \mathbb{N}$, ou seja, para todo $\eta > 0$, existe um $R_0 > 0$ e um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|w_m(x)| < \eta$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x| > R_0$ e para todo $m \geq m_0$.

Com efeito, para todo $\eta > 0$, existem, por (4.26), um $R_0 > 0$ e um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} w_m^{2^*}dx\right| < \eta$$

para todo $R \geq R_0$ e para todo $m \geq m_0$. Seja $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x| > R_0 + 2$ e $m \geq m_0$. Note que

$$B_2(x) \subset B_R^C(0). \tag{4.28}$$

Então, como w_m é positiva, por (4.28) e pela Desigualdade de Harnack, temos que

$$w_m(x) \leq \max_{B_1(x_0)} w_m \leq C\left(\int_{B_2(x)} w_m^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C\left(\int_{(B_{R_0}(0))^C} w_m^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C\eta^{\frac{1}{2^*}}$$

e a afirmação está provada.

Sendo assim, $u_m(x) = w_m\left(\dfrac{x-\overline{x}_m}{\epsilon_m}\right)$ decai uniformemente para zero para todo x fora de qualquer vizinhança de x_0, quando $m\to\infty$. Isso se dá porque como $\overline{x}_m \to x_0$, quando $m\to\infty$ e $x\neq x_0$, temos que o quociente $\dfrac{x-\overline{x}_m}{\epsilon_m}\to\infty$, quando $m\to\infty$.

Afirmação: Seja x_m um máximo local de u_m. Por (4.1), e pelo princípio do máximo forte,

$$u_m(x_m) \geq (V_0)^{\frac{1}{p-1}}.$$

De fato, como $u_m(x_m) = \max\limits_{\mathbb{R}^N} u_m$, temos que $-\Delta u_m(x_m) \geq 0$. Logo,

$$V_0 u_m(x_m) \leq V(x_m)u_m(x_m) \leq -\epsilon_m^2 \Delta u_m(x_m) + V(x_m)u_m(x_m) = u_m(x_m)^p$$

Então,

$$V_0 u_m(x_m) \leq u_m(x_m)^p \Rightarrow u_m(x_m) \geq (V_0)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.29}$$

Portanto, $x_m \to x_0$, quando $m\to\infty$, pois caso contrário $u_m(x_m)$ tenderia à zero quando $m\to\infty$.

Continuando a prova do Teorema 7, vamos verificar a unicidade de x_m. Seja $\overline{w}_m(x) = u_m(\epsilon_m x + x_m)$. Então,

$$-\Delta\overline{w}_m(x) + V(\epsilon_m x + x_m)\overline{w}_m = \overline{w}_m^p,\ \overline{w}_m > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{4.30}$$

Além disso, temos que $\overline{w}_m(0) = u_m(x_m)$, ou seja, 0 é um ponto crítico de $\overline{w}_m$ e como x_m é um ponto de máximo, segue que $-\Delta\overline{w}_m(0) \geq 0$. Assim, como $V_0 \leq V(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}^N$, segue de (4.29) que

$$V_0\overline{w}_m(0) \leq -\Delta\overline{w}_m(0) + V(\epsilon_m 0 + x_m)\overline{w}_m(0) = \overline{w}_m(0)^p$$

Logo,

$$\overline{w}_m(0) \geq V_0^{\frac{1}{p-1}}.$$

Pelos mesmos argumentos usados acima para w_m temos que, que passando a uma subsequência de $(\overline{w}_m)$, $\overline{w}_m \to w_0$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e em $H^1(\mathbb{R}^N)$, onde $w_0\neq 0$ satisfazendo (4.22). Além disso, $\overline{w}_m \to 0$ quando $x\to\infty$ uniformemente com relação a m. Então, para todo compacto $K\in\mathbb{R}^N$, $\overline{w}_m\to w_0$ em $C^2(K)$ e $\nabla\overline{w}_m \to \nabla w_0$ em $C^0(K)$. Logo,

$$\sup_{x\in K}|\nabla\overline{w}_m(x) - \nabla w_0(x)| \to 0$$

quando $m\to\infty$. Assim, $0 = \nabla\overline{w}_m(0) \to \nabla w_0(0) = 0$, pois o fato de zero ser ponto crítico de $\overline{w}_m$ implica que ele é também um ponto crítico de w_0. Por um resultado devido a Gidas-Ni-Nirenberg [6], w_0 é esfericamente simétrica com respeito a algum ponto P e ainda radialmente decrescente. Logo $w_0'(s) < 0$, para $0\neq s = |x-P|$, onde por um abuso de notação, estamos usando o mesmo símbolo w_0 para representar a função $\tilde{w}_0(s) = w_0(x)$, onde $|x-p| = s$. Desta forma, $P=0$, isto é, w_0 é radialmente simétrica com respeito à origem. Assim, pelo resultado de unicidade de solução radialmente simétrica e decrescente para problemas autônomos provado por Kwong (ver [7]), segue que $w_0 = u_0$.

Para mostrar a unicidade do ponto de máximo local de u_m, como $\overline{w}_m$ é definida como sendo a translação pelos pontos de máximo x_m através de u_m, é suficiente mostrar que ele é o único ponto de máximo de $\overline{w}_m$.

Afirmação: Todo ponto de máximo de $\overline{w}_m$ converge para zero quando $m \to \infty$. De fato, seja $\bar{x}_m = \max_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_m$ e suponha que $\bar{x}_m \to \overline{x}_0 \neq 0$ a menos de subsequência. Então,

$$0 = \nabla \overline{w}_m(\bar{x}_m) \to \nabla w_0(\overline{x}_0) = 0,$$

o que não é possível, pois o único ponto crítico de w_0 é a origem. Portanto, $\overline{w}_m(\bar{x}_m) \to 0$ e a afirmação está provada.

Agora, como $\overline{w}_m$ decai para zero uniformemente com respeito à k quando $x \to \infty$, todo ponto de máximo local de $\overline{w}_m$ está numa bola finita em $\mathbb{R}^N$. Observe que $\overline{w}_m \to w_0 = u_0$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e somente o zero é ponto de máximo de u_0, então dado $\epsilon > 0$, temos que $u_0'(r) < 0$, para $0 \leq r \leq \epsilon$. Logo, $u_0''(0) < 0$ (estamos identificando $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ radialmente simétrica com $\widehat{u}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\widehat{u}_0(r) = u_0(x)$, onde $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = r$). Como $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema da Conservação do Sinal, segue que $u_0''(s) < 0$, para $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$. Agora, por um resultado de unicidade de pontos críticos devido a Ni e Takagi (ver Lema 4.2 de [9]), segue que para m suficientemente grande, a origem é o único ponto crítico de $\overline{w}_m$. Isso encerra a prova do resultado. ■

Referências

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces.* Academic Press Limited, 1978.

[2] ALVES, C.;FIGUEIREDO, G. Existence and multiplicity of positive solutions to a p-laplacian equation in $\mathbb{R}^N$. *Differential Integral Equations*, 19:143–162, 2006.

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2010.

[4] DEL PINO, M.;FELMER, P. Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbound domais. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 4:121–137, 1996.

[5] FLOER, A.;WEINSTEIN, A. Nonspreading wave pachets for the cubic Schrödinger equations. *Manuscripta Math*, 112:109–135, 2003.

[6] GIDAS, B.;NI, W.M.;NIRENBERG, L. Symmetric of positive solutions of nonlinear elliptic equations em $\mathbb{R}^N$. *Adv. Math. suppl. Stud 7A, Math. Anal. Appl. Part A*, pages 369–402, 1981.

[7] KWONG, M. Uniqueness of positive solutions of $\nabla u - u + u^p = 0$ em $\mathbb{R}^N$. *Arch. Rational Mech. Anal*, 105:243–266, 1989.

[8] LIONS, P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the locally compact case, part 2. *Annales de l'I.H.P, section C*, 1:223–283, 1984.

[9] NI,W.M.;TAKAGI,I. On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. *Comm. Pure Appl. Math. XLIV*, pages 819–851, 1991.

[10] OH, Y.G. Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class $(v)_a$. *Communications in Partial Differential Equations*, 13:1499–1519, 1988.

[11] PIMENTA, M.T.O.;SOARES, S. H. M. Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, pages 274–289, 2012.

[12] PIMENTA, M.T.O.;SOARES, S. H. M. Singularly perturbed biharmonic problems wuth superlinear nonlinearities. *Advances in differential Equations*, 19(1-2):31–50, 2014.

[13] RABINOWITZ, P.H. On a class of nonlinear schrödinger equations. 43:271–291, 1992.

[14] TRUDINGER, N.S.;GILBARG, D. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 2001.

[15] WANG, X. On concentration of positive bound states of nonlinear schrödinger equations. *Comm. Pure Appl. Math*, 153:229–244, 1993.

[16] WILLEM, M. *Minimax Theorems*. Springer, Birkhäuser, 1996.