

**Análise da influência de variantes do método
de solução de escoamentos utilizando os
métodos de elementos finitos com
compressibilidade artificial e
pseudo-características**

Marcos Paulo de Carvalho Oliveira

Bauru

2007

**Análise da influência de variantes do método
de solução de escoamentos utilizando os
métodos de elementos finitos com
compressibilidade artificial e
pseudo-características**

Marcos Paulo de Carvalho Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da UNESP – Campus de Bauru, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru

2007

**DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
UNESP - BAURU**

Oliveira, Marcos Paulo de Carvalho.

Análise da influência de variantes do método de solução de escoamentos utilizando os métodos de elementos finitos com compressibilidade artificial e pseudo-características / Marcos Paulo de Carvalho Oliveira, 2007.

xii, 100 f. il.

Orientador : Vicente Luiz Scalon.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2007.

1. Compressibilidade artificial. 2. Método dos elementos finitos. 3. Cavidade recirculante. 4. CBS. I - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II - Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon pelo apoio, paciência e auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a meus familiares pelo apoio e incentivo.

Agradeço a todos, alunos e professores da UNESP, que de certa forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio econômico concedido através de bolsa de estudo.

“A verdadeira medida de um homem não se vê na forma como se comporta em momentos de conforto e conveniência, mas como se mantém em tempos de controvérsias e desafios”.

(Martin Luther King Jr)

OLIVEIRA, M. P. C. **Análise da influência de variantes do método de solução de escoamentos utilizando os métodos de elementos finitos com compressibilidade artificial e pseudo-características**. 114f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2007.

RESUMO

O desenvolvimento de modelos numéricos para simulação de escoamentos tem se dado em diversos aspectos: desde os métodos de acoplamento entre pressões e velocidades até as técnicas de estabilização da solução. Neste contexto, este trabalho se propõe a implementar e avaliar o comportamento de um destes algoritmos, o CBS, utilizando-o na simulação de um escoamento isotérmico de fluido incompressível. Para tanto, foram utilizados variantes do esquema de solução com relação à discretização no tempo, com os métodos explícito e semi-implícito, além de algumas outras alterações na discretização no espaço e nos termos de estabilização. A discretização geral do problema foi feita com o método dos elementos finitos utilizando-se uma malha formada por elementos bilineares. O algoritmo e suas variações foram avaliados através de uma série de resultados, para diversos valores do número de Reynolds, de um problema clássico: a cavidade recirculante. Desta forma, foi possível mostrar que todas as variações da solução usando a malha estabelecida apresentaram concordância satisfatória com os resultados da literatura. Além disto, verificou-se que a omissão do termo característico não apresentou diferenças significativas nos resultados para os valores de número de Reynolds testados. Os resultados mostraram também que o método semi-implícito converge com um menor número de incrementos de tempo que o método explícito.

Palavras-chave: CBS. Compressibilidade artificial. Método de elementos finitos. Cavidade recirculante.

OLIVEIRA, M. P. C. **Analysis of influency of several parameters in solution method in flow using the finite elements method with artificial compressibility and pseudo-characteristic.** 114f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2007.

ABSTRACT

The development of numerical models for fluid flow simulation occurred at many aspects: since coupling methods between pressures and velocities until stabilization techniques. In this context, this work intends to implement and evaluate one algorithm behavior, the CBS, used in a simulation of incompressible and isothermal flows. This work also uses the explicit and semi-implicit methods of the time discretization scheme and some others changes in space discretization and stabilization terms for tests with algorithm . The discretization technique used is the finite element method with the mesh formed by bilinear elements. The algorithm's changes were evaluated using results for several Reynold's number in a classic problem: the lid-driven cavity. All the changes in solution algorithm with the used mesh show good agreement with other results from bibliography. It was verified too, that the omission of characteristics term didn't present significant differences in results with Reynolds' number tested. It was observed yet that the solution code using the semi-implicit method converges with less time steps than the explicit one.

Keywords: CBS. Artificial compressibility. Finite elements method. Lid-driven cavity.

SUMÁRIO

I – Introdução.....	1
II – Revisão Bibliográfica.....	4
III– Metodologia.....	9
3.1 – Modelo Físico	10
3.2 – Formulação Zienkiewicz	13
3.2.1 – Aproximação de elementos finitos para equação convecção-difusão.....	13
3.2.2 – Procedimento de determinação da linha pseudo-característica de Galerkin.....	14
3.2.3 – Discretização da equações em elementos finitos.....	23
3.2.4 – Algoritmo – CBS.....	26
3.2.5 – Split A.....	27
3.2.6 – Split B.....	35
3.3 – Formulação Nithiarasu.....	35
3.3.1 – Algoritmo – CBS.....	36
3.4 – Compressibilidade Artificial.....	41
3.5 – Incremento de Tempo.....	42
3.6 – Método semi-implícito.....	43
3.7 – Ausência do termo característico.....	43
3.8 – Resumo geral.....	44
IV – Resultados e Discussões.....	47
4.1 – Análise da solução do problema da cavidade recirculante para diversos valores do numero de Reynolds	50
4.1.1 – Resultado para número de Reynolds = 400.....	51
4.1.2 – Resultado para número de Reynolds = 100.....	61
4.1.3 – Resultado para número de Reynolds = 1.000.....	65
4.2 – Análise do tempo necessário para execução do problema.....	69
V – Conclusões e propostas de trabalhos futuros.....	74
VI – Referências Bibliográficas.....	76
Apêndice.....	79

A – Método de elementos finitos.....	79
A.1 - Princípios gerais.....	79
A.2 - Aproximação por elementos finitos.....	81
A.3 - Elementos de referência.....	84
A.4 - Propriedades das funções de aproximação importantes para o método dos elementos finitos.....	86
A.5 - Construção das funções de interpolação.....	87
A.6 - Transformação de operadores diferenciais.....	90
A.7 – Coordenadas nodais e conectividade.....	92
A.8 – O método dos resíduos ponderados.....	93
A.9 – Integração numérica.....	95
A.10 – Tratamento das condições de contorno.....	96
B - Procedimento de resolução – Método Zienkiewicz – Rotinas.....	99
C - Procedimento de resolução – Método Nithiarasu – Rotinas.....	100

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Cavidade Recirculante.	3
Figura 2: Fluxograma geral do processo de solução.....	9
Figura 3: Condições de Contorno	10
Figura 4: Procedimento de determinação da linha pseudo-característica de Galerkin.....	15
Figura 5: Fluxo geral considerando as variantes utilizados no trabalho.	44
Figura 5(cont.): Fluxo geral considerando as variantes utilizados no trabalho.	45
Figura 5(cont.): Fluxo geral considerando as variantes utilizados no trabalho.	46
Figura 6: Malha Exponencial 21 x 21.....	49
Figura 7: Malha Exponencial 41 x 41.....	49
Figura 8: Esquema mostrando as linhas onde foram retirados os resultados para a montagem dos gráficos comparativos.....	50
Figura 9: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – (Re=400).....	51
Figura 10: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – Semi-Implícito – (Re=400)	52
Figura 11: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – STC – (Re=400)....	52
Figura 12: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – STC – Semi-Implícito – (Re=400)	53
Figura 13: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split B – (Re=400).....	53
Figura 14: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split B – Semi-Implícito – (Re=400)	54
Figura 15: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split B – STC – (Re=400) ...	54
Figura 16: Comparativo da evolução dos resultados – Nithiarasu – (Re=400).....	55
Figura 17: Comparativo da evolução dos resultados – Nithiarasu – Semi-Implícito – (Re=400)....	55
Figura 18: Comparativo da evolução dos resultados – Nithiarasu – STC – (Re=400).....	56
Figura 19: Comparação dos resultados entre os métodos – vx – (Re=400).....	57
Figura 20: Comparação dos resultados entre os métodos – uy – (Re=400).....	57
Figura 21: Comparativo dos resultados entre os métodos no desvio de pressão (Δp) (Re=400).....	58
Figura 22: Perfil de velocidade (Re=400).....	59

Figura 23: Perfil de Pressão (Re=400).....	60
Figura 24: Linhas de Contorno da Função Corrente (Re=400).....	60
Figura 25: Comparação dos resultados entre os métodos – vx – (Re=100).....	61
Figura 26: Comparação dos resultados entre os métodos – uy – (Re=100).....	62
Figura 27: Comparativo dos resultados entre os métodos no desvio de pressão (Δp) (Re=100).....	63
Figura 28: Perfil de Velocidade (Re=100).....	64
Figura 29: Perfil de Pressão (Re=100).....	64
Figura 30: Linhas de Contorno da Função Corrente (Re=100).....	65
Figura 31: Comparação dos resultados entre os métodos – vx – (Re=1.000).....	66
Figura 32: Comparação dos resultados entre os métodos – uy – (Re=1.000).....	66
Figura 33: Comparativo dos resultados entre os métodos no desvio de pressão (Δp) (Re=1.000)....	67
Figura 34: Perfil de Velocidade (Re=1.000).....	68
Figura 35: Perfil de Pressão (Re=1.000).....	68
Figura 36: Linhas de Contorno da Função Corrente (Re=1.000).....	69
Figura 37: Divisão do tempo para rodar o programa na plataforma Gnu-Octave, considerando 1 incremento de tempo para “Zienkiewicz – Split A” para Re=100 em um computador Atlon XP 1900+ com 256Mb.....	70
Figura 38: Divisão percentual do tempo para o cálculo das sub rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para Re=100.....	71
Figura 39: Divisão percentual do tempo para o cálculo do “Passo 1” da rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para Re=100.....	72
Figura 40: Divisão percentual do tempo para o cálculo do “Passo 2” da rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para Re=100.....	73
Figura 41: Divisão percentual do tempo para o cálculo do “Passo 3” da rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para Re=100.....	73
Figura 41: Anomalias comuns na discretização de um domínio através de malhas.....	82
Figura 42: Erro comum na discretização do domínio.	83
Figura 43: Transformação do domínio elementar.....	84
Figura 44.: Elemento bidimensional, linear e isoparamétrico.....	89
Figura 45: Pontos de integração para elementos triangulares e quadrangulares.....	96
Figura 46: Tipos de fronteira para a discretização da C.C. de terceira espécie.....	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Métodos e variações testadas.....	48
Tabela 2: Base polinomial para elementos de até duas dimensões.....	87

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- AC** – Artificial Compressibility – Compressibilidade Artificial
- CBS** – Characteristic Based Split – Algoritmo utilizando o método das características
- NI** – Método descrito em Nithiarasu (2003) na forma explícita
- NI-IMPL** – Método descrito em Nithiarasu (2003) na forma semi-implícita
- NI-STC** – Método descrito em Nithiarasu (2003) na forma explícita sem o uso do termo característico
- SUPG** – Streamline Upwind Petrov-Galerkin
- ZI-A** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split A na forma explícita
- ZI-A-IMPL** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split A na forma semi-implícita
- ZI-A-IMPL-STC** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split A na forma semi-implícita sem o uso do termo característico
- ZI-A-STC** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split A na forma explícita sem o uso do termo característico
- ZI-B** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split B na forma explícita
- ZI-B-IMPL** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split B na forma semi-implícita
- ZI-B-STC** – Método descrito em Zienkiewicz e Taylor (2000) com o Split B na forma explícita sem o uso do termo característico

SIMBOLOGIA

Latinos

B	matriz da derivada da função de aproximação elementar
c	velocidade do som adimensional
C	matriz auxiliar
f	matriz relacionada às condições de contorno
F_i	termo da equação geral de difusão
g	aceleração da gravidade adimensional
G	matriz auxiliar
G_i	termo da equação geral de difusão
h	menor dimensão do elemento
H	matriz auxiliar
k	constante difusiva genérica
K	matriz auxiliar
L	comprimento característico
M	matriz auxiliar
N	matriz da função de aproximação elementar
p	pressão adimensional
P	matriz auxiliar
Q_i	termo da equação geral de difusão
Re	número de Reynolds
t	tempo adimensional
u	componente adimensional da velocidade na direção horizontal
U	fluxo de escoamento de massa igual a ρu
v	componente adimensional da velocidade na direção vertical
V	fluxo de escoamento de massa igual a ρv
x	coordenada adimensional na direção horizontal
y	coordenada adimensional na direção vertical

Gregos

β	fator de compressibilidade artificial
δ	comprimento da linha de corrente durante o instante de tempo
Δ	variação da propriedade que o acompanha
ϕ	propriedade genérica
Γ	representação da superfície de controle
μ	viscosidade dinâmica (Ns/m ²)
$\theta, \theta_1, \theta_2$	fatores, entre 0 e 1, que determinam o esquema de discretização no tempo
ρ	densidade adimensional
τ_{ij}	tensão de cisalhamento
Ω	representação do volume de controle (domínio)

Sobrescritos

n	simboliza instante atual
$n+1$	simboliza instante posterior
$n+\theta$	simboliza instante intermediário θ
T	simboliza matriz transposta
-	simboliza valor médio
+	simboliza um valor dimensional
*	simboliza variável auxiliar na formulação de Zienkiewicz (Split A) e Nithiarasu
**	simboliza variável auxiliar na formulação de Zienkiewicz (Split B)
'	simboliza a mudança de uma variável independente para trabalhar coincidente com a linha corrente

Subscritos

x, y	simboliza a direção de atuação
i, j, k	notação tensorial
r	valor referencial
u	associado ao campo de velocidades
p	associado ao campo de pressões

I – Introdução

A simulação numérica, ou modelagem computacional, em mecânica de fluídos e transferência de calor teve um grande crescimento nos últimos 30 anos. O grande interesse se explica pela grande versatilidade e relativa simplicidade de aplicação desses métodos, diminuindo sensivelmente os trabalhos de laboratórios e conseqüentemente os custos, já que hoje em dia existem computadores de alta velocidade e com grande capacidade de armazenamento.

Pode-se dizer que essa área, que trata da simulação de soluções para problemas científicos, deve ser capaz de analisar os fenômenos, desenvolver modelos matemáticos para sua descrição e, ainda, elaborar códigos computacionais para obtenção das soluções desejadas. É área em expansão, de ampla aplicação, em desenvolvimento de produtos industriais, pesquisas científicas básicas e aplicadas, simulações e previsões temporais e espaciais de fenômenos, dentre outras.

Dentre os métodos estudados na modelagem computacional pode-se destacar alguns que têm aplicação direta à solução de problemas típicos das engenharias como: métodos dos elementos finitos, métodos dos elementos de contorno, método dos volumes finitos, métodos das diferenças finitas, métodos integrais e variacionais e métodos autoadaptativos. Além destes, existem ainda técnicas de computação distribuída, redes e malhas computacionais e, ainda, computação vetorial e paralela aplicada que podem em muito contribuir para o aprimoramento e, principalmente, aumento de velocidade de solução dos modelos anteriormente descritos. Por fim tem-se ainda princípios e, muitas vezes, programas que permitem etapas de pré e pós-processamento gráfico e otimização, sistemas de orientação espacial e modelagem que muito auxiliam nas etapas de estabelecimento do domínio computacional e visualização das soluções.

Cabe ressaltar, entretanto, que a análise numérica é anterior em muitos

séculos ao uso dos computadores. A interpolação linear, por exemplo, já era utilizada há mais de 2000 anos atrás. Muitos grandes matemáticos do passado já estavam preocupados com a análise numérica que resultaram em nomes de importantes algoritmos como o método de Newton, interpolação polinomial de Lagrange, eliminação Gaussiana, o método de Euler entre outros. Foram produzidos muitos livros com fórmulas e tabelas contendo dados, tais como, pontos de interpolação e coeficientes de funções que eram e ainda são utilizados atualmente.

A solução numérica de um problema é uma aproximação da solução de equações diferenciais, tanto ordinárias como parciais. As equações diferenciais parciais são resolvidas primeiramente através da discretização da equação, trazendo para dentro de um subespaço dimensional finito. Isso pode ser feito através do método de elementos finitos, método das diferenças finitas ou método dos volumes finitos. A justificativa teórica desses métodos envolvem teoremas de análise funcional que reduzem o problema para solução de equações algébricas. No presente estudo esta análise foi realizada utilizando-se o método dos elementos finitos.

Procedimentos numéricos necessários para este tipo de procedimento levam à necessidade de solução de sistemas, lineares ou não lineares, de equações. Estes sistemas representam outra importante interface entre os métodos numéricos e a análise matemática. Para a sua solução, pode-se considerar a existência de duas alternativas: o método direto e o iterativo. No método direto, a solução ocorre em um número finito de passos e fornece uma resposta precisa se utilizados com precisão aritmética infinita. No método iterativo não existe um número especificado de passos a serem calculados, começa com uma estimativa inicial que posteriormente com sucessivas aproximações converge para a resposta do problema. Um critério de convergência é especificado para decidir o quanto a solução está suficientemente precisa. Em geral, nos procedimentos de solução numérica os métodos iterativos são mais comumente utilizados que os métodos diretos, mesmo porque, são os indicados em sistemas de equações não-lineares .

Conhecidas as principais ferramentas disponíveis e seguindo a tendência de opção pelos modelos numéricos, este trabalho se propõe a implementar e aplicar um algoritmo numérico para simulação de escoamento isotérmico de fluido incompressível através de métodos computacionais, sendo utilizado o método de elementos finitos.

Muitos algoritmos e programas podem ser utilizados para implementar e executar a análise numérica nos computadores. Este trabalho se propõe a implementar as

rotinas de teste num ambiente matemático onde as ferramentas de análise e solução se encontram pré-implementadas. Para tanto, será utilizado o programa GNU-Octave (2007), que é um programa livre, aberto e com distribuição gratuita e pode ser executado nos sistemas operacionais Linux e Windows. Para o pós processamento e elaboração dos gráficos, embora pudesse ser feito diretamente pelo programa GNU-Octave, será utilizada uma outra ferramenta que melhor se adequa às necessidades de geração de isocurvas. Esta ferramenta pode ser encontrada em Kelley e Galbraith, GRI (2007) e também é livre, aberto, com distribuição gratuita e pode ser executado nos sistemas operacionais Linux e Windows.

Foi utilizado para avaliação dos resultados obtidos no estudo um problema teste de escoamento chamado de cavidade recirculante (“Lid-driven cavity”). Este problema consiste em uma cavidade fechada na qual a face superior se desloca com velocidade uniforme e todas as demais paredes permanecem estáticas, conforme pode ser observado na Figura 1. A cavidade recirculante é provavelmente um dos problemas mais utilizados como teste nos estudos aplicados a problemas no campo da dinâmica de fluidos em simulações computacionais. Os resultados obtidos para diversos valores do número de Reynolds nestes problemas permitirão uma comparação entre as diversas variantes de implementação a serem testados neste, indicando o seu comportamento em cada caso.

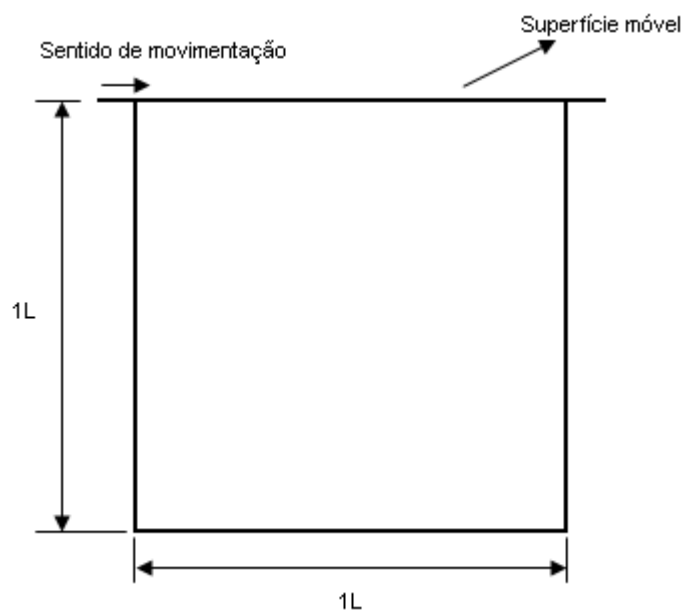


Figura 1: Cavidade Recirculante.

II – Revisão Bibliográfica

Existem inúmeros trabalhos que abordam os métodos numéricos e alguns, especificamente, o conhecido como método das pseudo-características possui uma vasta gama de adaptações e aplicações. Estas características, aliadas a sua formulação adequada para o acoplamento a estruturas, o torna um método muito flexível na adaptação às diferentes condições encontradas nos problemas de engenharia.

Um problema clássico para o teste do funcionamento de modelos numéricos é o problema da cavidade recirculante, anteriormente descrito. Uma solução clássica para o problema foi apresentada por Ghia, Ghia e Shin (1982). Neste caso foi utilizada uma formulação baseada nas equações para escoamentos bidimensionais e incompressíveis de Navier-Stokes. O trabalho apresentou, ainda, uma grande variedade de informações dos testes realizados, com resultados avaliados para diversos números de Reynolds. Desta forma ele será utilizado como referência na comparação das respostas obtidas nos testes realizados neste trabalho, como também foi para a grande maioria dos outros trabalhos que se utilizam desta geometria e estão presentes nesta revisão. Uma série de outros resultados para cavidade recirculante e com diferentes geometrias também podem ser vistos no trabalho de Erturk (2007).

Com relação ao modelo numérico utilizado, pode-se dizer que, embora tanto o método das pseudo-características como a solução acoplada usando a compressibilidade artificial fossem conhecidas há algum tempo, o trabalho precursor do método ora utilizado foi apresentado por Massarotti, Nithiarasu e Zienkiewicz (1998), onde o mesmo era usado na solução de problemas envolvendo transferência de calor. A partir deste estudo foi possível mostrar a eficiência do método através da comparação com outros resultados. O trabalho mostrou soluções compatíveis com diversos estudos experimentais e teóricos anteriores e

uma boa concordância. Em função disto o trabalho conclui que, da forma apresentada, a metodologia seria capaz de resolver complicados problemas de transferência de calor com uma precisão adequada.

Nesta mesma linha de desenvolvimento, Zienkiewicz et al (1999), apresentam outro trabalho com inovações que o permitiam substituir o método de Taylor–Galerkin (ou Lax–Wendroff), utilizados para solução de escoamentos compressíveis. Esse algoritmo, então chamado de *CBS (Characteristic Based Split)*, foi aplicado para uma grande variedade de situações, incluindo escoamentos completamente incompressíveis e escoamentos com superfície aberta. Com relação à velocidade do escoamento, o método foi aplicado em condições supersônicas e hipersônicas e apresentou uma precisão maior que os outros até então utilizados. Esse algoritmo é baseado nas equações de conservação da fluido-mecânica utilizando para solução o procedimento característico de Galerkin para a parte da equação do tipo convecção-difusão e o procedimento de Galerkin para a parte autoadjunta. Devido aos bons resultados obtidos e a generalidade do método, o interesse em seu desenvolvimento persistia.

Fazendo uma compilação dos trabalhos até então publicados, Zienkiewicz e Taylor (2000), apresentam um livro com a descrição completa da metodologia *CBS*. Utilizando-se da discretização de Galerkin e do métodos de elementos finitos o livro mostra os passos da resolução, as formulações utilizadas e avaliações do método, entre outras informações. Essa metodologia, a partir deste seu maior detalhamento, serviu como base de desenvolvimento para diversos autores no mundo inteiro, que passaram a trabalhar e divulgar este novo modelo.

Deste mesmo período, destaca-se ainda, outro trabalho de Nithiarasu e Zienkiewicz (2000) onde são apresentadas as técnicas de estabilização com os passos de tempo. Este trabalho tinha o seu principal foco nos escoamentos incompressíveis e na aceleração convectiva, utilizando o algoritmo *CBS*. Os modelos foram novamente testados para o caso da cavidade recirculante e, assim, foi possível uma avaliação dos resultados obtidos com a nova técnica.

Mudando alguns aspectos da discretização usual apresentada por Zienkiewicz e Taylor (2000) com a utilização da forma fraca da equação em alguns outros pontos, Nithiarasu (2003), apresenta uma proposta variante do algoritmo *CBS* tradicional. As alterações propostas, de acordo com os resultados apresentados, mostraram que a a qualidade

do resultados não foi afetada e que a facilidade de aplicação teve um ganho. A eliminação da necessidade de determinadas matrizes e/ou procedimentos trouxe um ganho para a sua aplicação, principalmente em problemas dinâmicos mais complexos onde o tempo de processamento torna-se mais significativo.

Dando prosseguimento ao procedimento proposto, Nithiarasu et al. (2004) apresentam o uso da metodologia *CBS* para simular escoamentos de fluidos incompressíveis isotérmicos e não isotérmicos. Com base nos resultados os autores concluíram que o método apresentou bons resultados para esses tipos de escoamentos mostrando uma interessante flexibilidade de uso em diferentes condições.

Dentre as diversas aplicações do modelo vale destacar o trabalho de Nithiarasu, Massarotti e Mattur (2005), onde é analisada a transferência de calor por convecção forçada em soldas executadas em uma placa de circuito impresso utilizando o algoritmo *CBS*. Análises realizadas a partir do resultado da simulação numérica permitiram verificar que a transferência de calor aumenta com o aumento do número de Reynolds e que o ângulo de ataque também é um fator importante na quantificação do processo.

Escoamentos sem viscosidade e compressíveis utilizando como base o algoritmo *CBS* também foram analisados por Thomas e Nithiarasu (2005). Os resultados obtidos com este trabalho demonstraram que o tamanho do elemento e a sua uniformização são aspectos importantes na avaliação de sua precisão. Através deste estudo, os autores demonstraram que algoritmos que produzem maior refinamento, na direção da linha aerodinâmica, melhoram a acuracidade da solução na região supersônica do escoamento.

Outras inovações importantes para o esquema foram apresentadas por Nithiarasu (2005), onde é utilizada uma formulação arbitrária Lagrangiana-Euleriana (*ALE*). Este trabalho utilizou-se da aplicação do algoritmo *CBS*, associado a implementação de compressibilidade artificial na aplicação de escoamentos em superfície livre obtendo bons resultados. Liu e Nithiarasu (2006), também fizeram uso com sucesso do algoritmo *CBS*, nas formas explícita e semi-implícita, para a solução de escoamentos viscoelásticos.

As diversas aplicações e as pequenas atualizações sofridas pelo modelo levaram à publicação de um novo trabalho por Nithiarasu, Codina e Zienkiewicz (2006). Este trabalho contém uma apresentação unificada de várias técnicas da dinâmica dos fluidos aplicadas no algoritmo *CBS* desde a sua concepção original.

A questão do conservacionismo também foi abordada no trabalho de

Nithiarasu e Zienkiewicz (2006). Neste estudo, foi realizado uma análise do método explícito para fluidos incompressíveis utilizando o algoritmo *CBS*, empregando tanto a forma conservativa como a não-conservativa. A estabilização, convergência e aspectos de conservação do presente método foram discutidas. Um procedimento para eliminação dos erros de primeira ordem no tempo foi proposto. Os resultados foram comparados com outros métodos e tendo apresentando uma boa concordância.

Massarotti et al. (2006), apresentaram em seu trabalho uma comparação dos métodos explícitos e semi-implícitos do algoritmo *CBS*-compressibilidade artificial. O estudo mostrou que os dois métodos apresentaram bons resultados, mas pequenas diferenças são notadas nas simulações em cavidade recirculante quando utilizados elevados números de Reynolds. Todas as soluções para o estado estacionário se mostraram praticamente idênticas, especialmente para problemas de convecção natural. Entretanto, a aplicação do método explícito em problemas desta natureza apresenta alguns problemas de convergência e forças de flutuações extremamente altas. Na solução de problemas transientes nota-se algumas diferenças com relação ao incremento de tempo utilizado em cada situação.

O uso de um termo adicional de estabilização Taylor-Galerkin no algoritmo *CBS* foi proposto por Li e Duan (2006). No trabalho, este algoritmo foi implementado e os resultados numéricos obtidos foram satisfatórios se comparados com os de outras referências. Com isto, foi possível demonstrar a potencialidade e estabilidade deste tipo de procedimento na simulação de escoamentos incompressíveis usando as equações de Navier-Stokes.

Embora o algoritmo *CBS* já tenha sido utilizado com sucesso em problemas de escoamento intenso, como o caso da cavidade recirculante com elevados valores do número de Reynolds, modelos de turbulência ainda não haviam sido testados. Percebendo-se desta lacuna, Nithiarasu e Liu (2006), apresentaram um algoritmo utilizando compressibilidade artificial e o algoritmo *CBS* para fluxos contínuos e com instabilidades de turbulência que pode ser aplicado a fluidos incompressíveis. Testes realizados pelos autores demonstraram o sucesso da aplicação do modelo $k-\epsilon$, aumentando assim, a gama de uso de variações do algoritmo *CBS*.

Uma grande variedade de trabalhos poderia, ainda, ser citada abrangendo a utilização do algoritmo *CBS* e *AC* (*Artificial Compressibility*) em diversas situações. Entretanto, foi dada uma maior ênfase aos trabalhos relacionados ao desenvolvimento da sua metodologia e à soluções de escoamento de fluido incompressível isotérmico utilizando o

algoritmo *CBS* associado à compressibilidade artificial. Também foram destacados alguns trabalhos que analisam o comportamento da solução do problema de cavidade recirculante. Cabe destacar entre as referências apresentadas os trabalhos Zienkiewicz e Taylor (2000) e Nithiarasu (2003), que propõem as bases dos modelos utilizados e serão citados de forma recorrente durante o texto.

Cabe destacar ainda que a grande maioria dos trabalhos citados utiliza-se da solução através de elementos finitos por elementos bidimensionais triangulares. Para o trabalho proposto a solução será avaliada com outro tipo de elemento: os elementos bidimensionais quadrangulares ou bilineares.

Conforme mencionado na introdução, o estudo realizado no presente trabalho se propõe a avaliar a interferência na solução de uma série de fatores como: o tipo de esquema utilizado dentre os principais sugeridos na literatura (e brevemente descritos nesta revisão), a influência do termo pseudo-característico, o esquema de discretização no tempo em cada caso e outros fatores considerados relevantes. Com isto será possível avaliar as condições em que cada implementação é a mais adequada e quais os fatores influenciam na precisão dos resultados obtidos e/ou convergência do problema.

III– Metodologia

As duas principais formulações utilizadas neste trabalho tiveram como base os procedimentos descritos por Zienkiewicz e Taylor (2000) e por Nithiarasu (2003). O modelo semi-implícito, utilizado nas duas formulações, foi baseado no trabalho Liu e Nithiarasu (2006). O procedimento geral de solução, em qualquer das formulações, segue o apresentado no fluxograma da Figura 2.

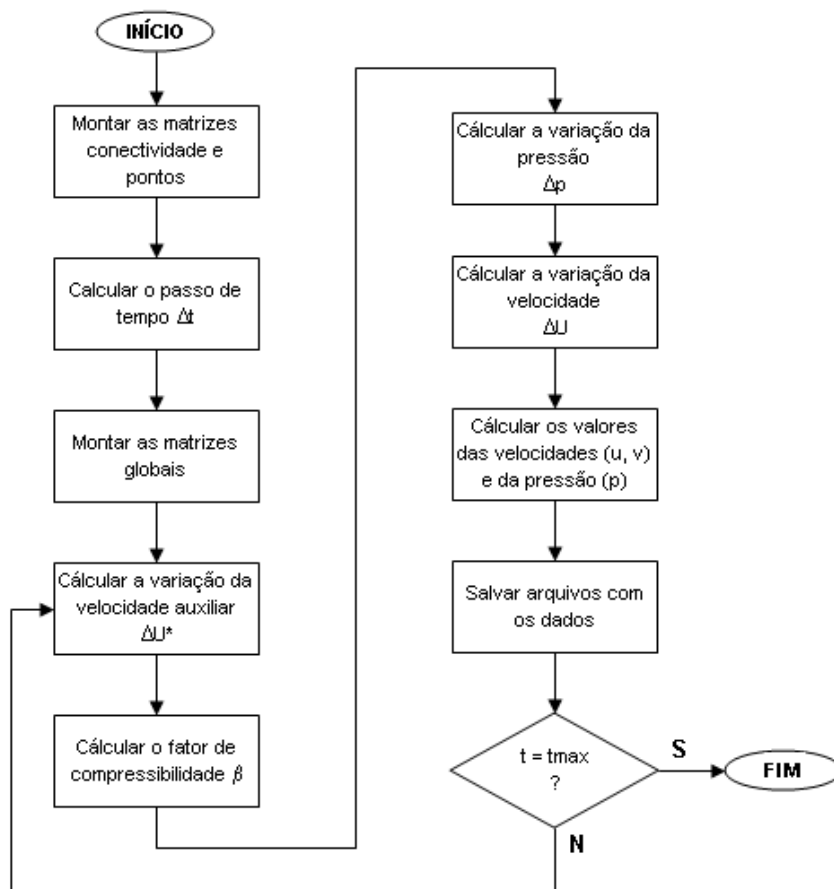


Figura 2: Fluxograma geral do processo de solução.

3.1 – Modelo Físico

O problema solucionado como maneira de verificar a eficácia do modelo numérico implementado é o da cavidade recirculante, apresentada na Figura 1. A geometria deste problema consiste em uma cavidade quadrada, com três paredes estáticas e a superfície superior se movimentando com uma determinada velocidade uniforme de translação u . Esta velocidade é o fator responsável pela movimentação do fluido. As equações que regem o problema serão resolvidas na sua forma adimensional.

Este problema será resolvido num domínio bidimensional, com coordenadas adimensionais x na direção horizontal e y na direção vertical. As componentes adimensionais da velocidade na direção de x serão representadas por u e na direção de y será representado por v .

Considerando-se, pelo princípio da aderência, que a velocidade do fluido nas três paredes estáticas da cavidade é igual a zero e que na parte superior é igual à velocidade da superfície superior móvel que se encontra em deslocamento no sentido da coordenada x , pode-se observar as condições de contorno conforme apresentada na Figura 3.

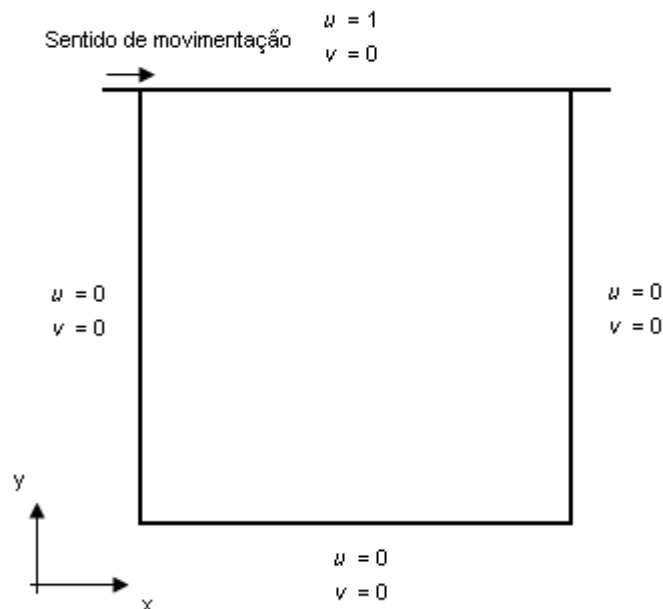


Figura 3: Condições de Contorno .

As equações que descrevem a solução do problema são as de continuidade e de Navier-Stokes e são apresentadas na sua forma adimensional nas equações (2), (5), (7) e (8). As variáveis adimensionais utilizadas são:

$$\rho = \frac{\rho^+}{\rho_r}, u = \frac{u^+}{U^+}, v = \frac{v^+}{U^+}, c = \frac{c^+}{U^+}, p = \frac{p^+}{\rho_r U^{+2}}, x = \frac{x^+}{L}, y = \frac{y^+}{L}, \text{Re} = \frac{\rho_r U^+ L}{\mu}, g = \frac{g^+}{L U^{+2}} \quad (1)$$

- *Equação da conservação da massa:*

A lei da conservação da massa ou lei de Lomonosov-Lavoisier, especifica que a massa das substâncias de um sistema fechado permanecerá constante, apesar do processo agindo dentro deste sistema.

Na sua forma mais geral pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad \text{ou} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

A equação geral do estado, se considerada a mecânica clássica, da velocidade do som para um fluido pode ser calculada da seguinte forma:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad \text{ou} \quad (3)$$

$$\partial \rho = \frac{1}{c^2} \partial p$$

onde a diferenciação é dada com respeito a mudança adiabática.

Considerando-se a diferenciação da equação (3) em relação a ∂t , tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4)$$

Igualando os termos da equação (2) e (4), tem-se:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (5)$$

- *Equações da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y:*

As equações de Navier-Stokes, descrevem o movimento de fluidos, tais como líquidos e gases. Essas equações estabelecem que as mudanças no momento em volumes infinitesimais do fluido são simplesmente a soma das forças dissipativas viscosas, mudanças da pressão, gravidade e outras forças agindo dentro do fluido, uma aplicação da segunda lei de Newton.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(uU)}{\partial x} + \frac{\partial(vU)}{\partial y} = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (6)$$

Considerando a hipótese de fluido newtoniano com viscosidade constante e incompressível, a equação (6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(uU)}{\partial x} + \frac{\partial(vU)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (7)$$

Analogamente na direção de y, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(uV)}{\partial x} + \frac{\partial(vV)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (8)$$

3.2 – Formulação Zienkiewicz

O método utilizado como base para este esquema foi o proposto por Zienkiewicz e Taylor (2000). Este procedimento e os fundamentos necessários para a sua formulação são apresentados ao longo desta seção.

3.2.1 – Aproximação de elementos finitos para equação convecção-difusão

Pode-se escrever a equação da conservação da quantidade de movimento utilizando uma variável geral apresentadas em coordenadas cartesianas na equação escalar da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(U_i \phi)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \\ \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(U_x \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(U_y \phi)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

mas,

$$\frac{\partial(U_i \phi)}{\partial x_i} = U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (10)$$

assim:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q = 0 \quad (11)$$

Note que todos os termos da equação acima, exceto o segundo (termo convectivo), são auto-adjuntos. O terceiro termo desaparecerá se a divergência da velocidade é zero, conforme segue:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

Desta forma a equação (11) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q = 0 \quad (13)$$

O comportamento padrão da equação acima pode ser determinado pela mudança da variável independente x para x' , para trabalhar em coincidência com a linha corrente, tal que:

$$dx'_i = dx_i - U_i dt \quad (14)$$

Note que para $\phi = \phi(x'_i, t)$ tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x \text{ const}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x' \text{ const}} = -U_i \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x' \text{ const}} \quad (15)$$

Substituindo a equação (15) em (13), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \right) + Q(x'_i) = 0 \quad (16)$$

3.2.2 – Procedimento de determinação da linha pseudo-característica de Galerkin

Neste trabalho, por se tratar de equações diferenciais parabólicas e elípticas, optou-se por utilizar o método da linha pseudo-característica. Essa nomenclatura é utilizada como uma forma de diferenciar o modelo atual do conhecido método das características, largamente utilizado na solução de equações diferenciais hiperbólicas.

Uma alternativa simplificada foi desenvolvida e algumas dificuldades foram evitadas mesmo com o custo da estabilidade condicional. Esse método foi primeiramente publicado por Zienkiewicz et al. (1984) e completamente descrito em numerosas publicações. Esta derivação inclui uma expansão local de Taylor e está ilustrada na Figura 4 :

A equação (13) pode ser escrita ao longo da linha pseudo-característica como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x'(t), t) - \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i'} \right) + Q(x_i') = 0 \quad (17)$$

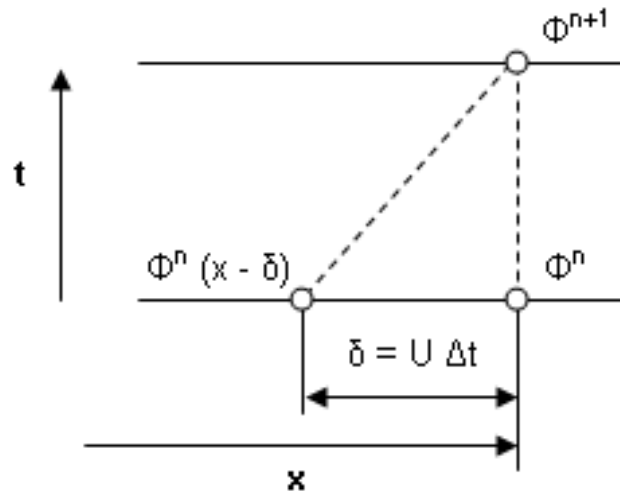


Figura 4: Procedimento de determinação da linha pseudo-característica de Galerkin.

Como mencionado, na coordenada x' , o termo convectivo desaparece e os termos fonte e difusão são quantidades médias ao longo da característica. Agora a equação é auto-adjunta e a aproximação espacial de Galerkin é utilizada. A discretização do tempo na equação (17) ao longo da característica, como pode ser observado na Figura 4, resulta em:

$$\frac{1}{\Delta t} (\phi^{n+1} - \phi^n |_{(x-\delta)}) \approx \theta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + (1-\theta) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^n |_{(x-\delta)} \quad (18)$$

onde θ é igual a zero para forma explícita e entre zero e um para forma semi e completamente implícita.

A velocidade média ao longo da pseudo-característica pode ser dada por diversas aproximações. Uma alternativa comumente utilizada, descrita no trabalho de Zienkiewicz e Codina (1996) é calculada conforme segue:

$$\bar{U} = U^n - U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} \quad (19)$$

A distância percorrida por uma partícula na direção do eixo x (Figura 4) é dada por:

$$\delta = \bar{U} \Delta t \quad (20)$$

Substituindo (19) em (20), tem-se:

$$\delta = \Delta t \left(U^n - U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \quad (21)$$

A solução da equação (17) na movimentação das coordenadas para atualização da grade apresenta algumas dificuldades, então é sugerida a expansão de Taylor e o uso da equação (20), tem-se:

$$\phi^n |_{(x-\delta)} \approx \phi^n - \delta \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (22)$$

e assumindo $\theta=0,5$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n |_{(x-\delta)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (23)$$

e:

$$\frac{1}{2} Q |_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (24)$$

Substituindo (21) em (22), tem-se:

$$\phi^n |_{(x-\delta)} \approx \phi^n - \Delta t \left(U^n - U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\Delta t \left(U^n - U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \right]^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \phi^n |_{(x-\delta)} \approx & \phi^n - \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \Delta t^2 U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left(U^{n2} - 2 U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} + U^{n2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \phi^n |_{(x-\delta)} \approx & \phi^n - \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \Delta t^2 U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \\ & - \Delta t^3 U^{n2} \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^4}{2} U^{n2} \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (27)$$

Omitindo-se os termos que possuem ordem (Δt^3) ou superior em (26), tem-se:

$$\phi^n|_{(x-\delta)} \approx \phi^n - \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \Delta t^2 U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \quad (28)$$

Substituindo (21) em (23), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) |_{(x-\delta)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{1}{2} \left[\Delta t \left(U^n - U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] \\ + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n |_{(x-\delta)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] \\ - \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (30)$$

Omitindo-se os termos que possuem ordem (Δt^2) em (30), tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n |_{(x-\delta)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \quad (31)$$

Substituindo (21) em (24), tem-se:

$$\frac{1}{2} Q |_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} \left(U^n - U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (32)$$

$$\frac{1}{2} Q |_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (33)$$

Omitindo-se os termos que possuem ordem (Δt^2) em (33), tem-se:

$$\frac{1}{2} Q |_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (34)$$

Assumindo $\theta=0,5$ em (18), tem-se:

$$\frac{1}{\Delta t}(\phi^{n+1} - \phi^n |_{(x-\delta)}) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + (1 - \frac{1}{2}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^n |_{(x-\delta)} \quad (35)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(\phi^{n+1} - \phi^n |_{(x-\delta)}) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n |_{(x-\delta)} - \frac{1}{2} Q^n |_{(x-\delta)} \quad (36)$$

Substituindo (28), (31), (34) em (36), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\phi^{n+1} - \phi^n + \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \Delta t^2 U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} U^{n2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \right) \approx \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{Q^n}{2} + \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} \end{aligned} \quad (37)$$

Rearranjando (37), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n \approx -\Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} Q^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} Q^n \\ + \Delta t^2 U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} \end{aligned} \quad (38)$$

Mas:

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{Q^{n+1} + Q^n}{2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \quad (40)$$

$$\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[U^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n = \Delta t^2 U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \quad (41)$$

Substituindo (39), (40) e (41) em (38), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t \left\{ U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right\} \\ & + \Delta t \left\{ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[U^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{\Delta t}{2} U \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t}{2} U \frac{\partial Q}{\partial x} \right\}^n \end{aligned} \quad (42)$$

Para problemas multidimensionais a equação (42) pode ser escrita com notação indicial e aproximando os termos $n+1/2$ para n (para a forma completamente explícita), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t \left\{ U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right\}^n \\ & + \Delta t \left\{ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i U_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] - \frac{\Delta t}{2} U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\Delta t}{2} U_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right\}^n \end{aligned} \quad (43)$$

Uma alternativa para aproximação do valor de \bar{U} recentemente recomendada Zienkiewicz e Codina (1996) é:

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \Big|_{(x-\delta)} \quad (44)$$

Usando a expansão de Taylor, tem-se:

$$U^n \Big|_{(x-\delta)} \approx U^n - \Delta t U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + O(\Delta t^2) \quad (45)$$

Substituindo (45) em (44), tem-se:

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \left(U^n - \Delta t U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \quad (46)$$

Rearranjando (46), tem-se:

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \quad (47)$$

$$\bar{U} = U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \quad (48)$$

onde:

$$U^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \quad (49)$$

Substituindo (48) em (20), tem-se:

$$\delta = \Delta t \left(U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \quad (50)$$

Substituindo (50) em (22), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi^n |_{(x-\delta)} \approx & \phi^n - \Delta t \left(U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\Delta t \left(U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \right]^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \\ & + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \phi^n |_{(x-\delta)} \approx & \phi^n - \Delta t U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left(U^{n+\frac{1}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} - U^{n+\frac{1}{2}} U^n \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{4} U^{n2} \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \phi^n |_{(x-\delta)} \approx & \phi^n - \Delta t U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n+\frac{1}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^3}{2} U^{n+\frac{1}{2}} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^4}{8} U^{n2} \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \\ & + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (53)$$

Omitindo-se os termos que possuem ordem (Δt^3) ou superior em (53), tem-se:

$$\phi^n |_{(x-\delta)} \approx \phi^n - \Delta t U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n+\frac{1}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \quad (54)$$

Substituindo (50) em (23), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Big|_{(x-\delta)} &\approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n - \frac{1}{2} \left[\Delta t \left(U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n \right] \\ &+ O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n \Big|_{(x-\delta)} &\approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n \right] \\ &+ \frac{\Delta t^2}{4} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (56)$$

Omitindo-se os termos em que possuem ordem (Δt^2) em (56), tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n \Big|_{(x-\delta)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n \quad (57)$$

Substituindo (50) em (24), tem-se:

$$\frac{1}{2} Q \Big|_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} \left(U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (58)$$

$$\frac{1}{2} Q \Big|_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{4} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (59)$$

Omitindo-se os termos que possuem ordem (Δt^2) em (59), tem-se:

$$\frac{1}{2} Q \Big|_{(x-\delta)} = \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (60)$$

Substituindo (54), (57), (60) em (36), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\Phi^{n+1} - \Phi^n + \Delta t U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi^n}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \Phi^n}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} U^{n+\frac{1}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial x^2} \right) &\approx \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^n - \frac{Q^n}{2} + \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \end{aligned} \quad (61)$$

Rearranjando (61),tem-se:

$$\begin{aligned}
\phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \Delta t \left(\frac{Q^{n+1} + Q^n}{2} \right) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n+\frac{1}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^2}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q^n}{\partial x}
\end{aligned} \quad (62)$$

Substituindo (39) e (40) em (62), tem-se:

$$\begin{aligned}
\phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t \left[U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right] \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left[U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + U^{n+\frac{1}{2}} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} - U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n + U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \right]
\end{aligned} \quad (63)$$

Pode-se, como mencionado anteriormente, fazer uma aproximação do termo $n+1/2$ para n , obtendo assim a forma completamente explícita. Deste modo a equação (63) pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t \left[U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q \right]^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left[U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + U^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - U \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + U \frac{\partial Q}{\partial x} \right]^n
\end{aligned} \quad (64)$$

mas,

$$U^n \frac{\partial}{\partial x} \left[U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \right] = \left[U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + U^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]^n \quad (65)$$

Substituindo (65) em (64), tem-se:

$$\begin{aligned}
\phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t \left[U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q \right]^n \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial}{\partial x} \left[U \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q \right]^n
\end{aligned} \quad (66)$$

Generalizando para forma multidimensional e escrevendo em notação indicial na forma conservativa a equação (66) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n \approx & -\Delta t \left[\frac{\partial(U_j \phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} U_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial(U_j \phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n \end{aligned} \quad (67)$$

Pode-se notar que embora se tenham realizado diferentes aproximações para o valor de \bar{U} , a diferença entre elas é muito pequena (equações (43) e (67)) e quando U é constante as aproximações resultam em termos de estabilização idênticos. Para os cálculos posteriores será utilizada a forma conservativa da equação (67).

3.2.3 – Discretização da equações em elementos finitos

Para o caso bidimensional com a equação (66), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta \phi = \phi^{n+1} - \phi^n = & \Delta t \left(-u \frac{\partial \phi}{\partial x} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - v \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q \right)^n \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^n \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ k \left[u \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) \right] \right\}^n \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left(u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^n \end{aligned} \quad (68)$$

Mas:

$$\frac{\Delta t^2}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^n = \frac{\Delta t^2}{2} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]^n \quad (69)$$

Substituindo (69) em (68) e rearranjando a equação, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta \phi &= \phi^{n+1} - \phi^n = -\Delta t \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \Delta t k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^n \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]^n \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ k \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \right\}^n \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left(u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} \right)^n \\
&= \Delta t (-A1 + B1) + \frac{\Delta t^2}{2} (C1 - D1 + E1)
\end{aligned} \tag{70}$$

Como a equação resultante é bem extensa, optou-se por simplificação, substituir os termos, na ordem em que estão dispostos na equação, pelas variáveis auxiliares A1 à E1 e que serão utilizadas na sequência.

Aplicando-se os conceitos de resíduos ponderados no termo $A1$ da equação (70), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_u^T A1 d\Omega = - \left(\int_{\Omega} N_u^T (N_u u) \frac{\partial N_u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} N_u^T (N_u v) \frac{\partial N_u}{\partial y} d\Omega \right) \phi^n \tag{71}$$

Em termos matriciais a equação (71) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} N_u^T A1 d\Omega = - \left(\int_{\Omega} [N_u]^T [N_u] [u] [B_x] d\Omega + \int_{\Omega} [N_u]^T [N_u] [v] [B_y] d\Omega \right) \phi^n \tag{72}$$

Aplicando-se os conceitos de resíduos ponderados no termo $B1$ da equação (70), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_u^T B1 d\Omega = \left(\int_{\Omega} [B_x]^T [Q]^T [Q] [B_x] d\Omega + \int_{\Omega} [B_y]^T [Q]^T [Q] [B_y] d\Omega \right) \phi^n \tag{73}$$

Aplicando-se os conceitos de resíduos ponderados no termo $C1$ da equação (70), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u^T CI d\Omega &= \int_{\Omega} N_u^T (N_u u) \frac{\partial}{\partial x} \left[(N_u u) \frac{\partial N_u}{\partial x} \right] d\Omega \phi^n \\ &+ \int_{\Omega} N_u^T (N_u v) \frac{\partial}{\partial y} \left[(N_u v) \frac{\partial N_u}{\partial y} \right] d\Omega \phi^n \end{aligned} \quad (74)$$

Fazendo a forma fraca de (74) desprezando os termos de superficie, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u^T CI d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial (N_u^T N_u u)}{\partial x} (N_u u) \frac{\partial N_u}{\partial x} d\Omega \phi^n \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial (N_u^T N_u v)}{\partial y} (N_u v) \frac{\partial N_u}{\partial y} d\Omega \phi^n \end{aligned} \quad (75)$$

Para uma iteraçao a velocidade pode ser considerada constante e tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u^T CI d\Omega &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_u^T}{\partial x} N_u + N_u^T \frac{\partial N_u}{\partial x} \right) u (N_u u) \frac{\partial N_u}{\partial x} d\Omega \phi^n \\ &- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_u^T}{\partial y} N_u + N_u^T \frac{\partial N_u}{\partial y} \right) v (N_u v) \frac{\partial N_u}{\partial y} d\Omega \phi^n \end{aligned} \quad (76)$$

A equaao (76) pode ainda ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u^T CI d\Omega &= - \int_{\Omega} ([B_x]^T [N_u] + [N_u]^T [B_x]) [u] [N_u] [u] [B_x] d\Omega \phi^n \\ &- \int_{\Omega} ([B_y]^T [N_u] + [N_u]^T [B_y]) [v] [N_u] [v] [B_y] d\Omega \phi^n \end{aligned} \quad (77)$$

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), o termo DI da equaao (70) pode ser desconsiderado. Aplicando-se os conceitos de residuos ponderados no termo EI da equaao (70), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_u^T EI d\Omega = - \left(\int_{\Omega} N_u^T (N_u u) \frac{\partial N_u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} N_u^T (N_u v) \frac{\partial N_u}{\partial y} d\Omega \right) Q^n \quad (78)$$

A equaao (78) pode ainda ser escrita como:

$$\int_{\Omega} N_u^T EI d\Omega = - \left(\int_{\Omega} [N_u]^T [N_u] [u] [B_x] d\Omega + \int_{\Omega} [N_u]^T [N_u] [v] [B_y] d\Omega \right) Q^n \quad (79)$$

Os principios da metodologia de elementos finitos para se chegar nesta integraao podem ser observada no apendice A.

3.2.4 – Algoritmo – CBS

Todas as pseudo-características essenciais da forma padronizada completamente conservativa podem ser escritas pelo conjunto de equações de continuidade e de Navier-Stokes apresentadas anteriormente nas equações (5) a (8).

As equações (7) a (8) podem ser discretizadas no tempo usando o processo característico de Galerkin, com exceção ao termo de pressão, que deve ser tratado como uma variável conhecida. Pode-se reescrever essa equação na forma:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j U_i) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \rho g_i + Q^{n+\theta_2} \quad (80)$$

com $Q^{n+\theta_2}$ sendo tratado como conhecido no instante $t=t^n+\theta_2 \Delta t$ conforme a equação:

$$Q^{n+\theta_2} = -\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (81)$$

com

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1-\theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (82)$$

ou

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (83)$$

e

$$\Delta p = p^{n+1} - p^n \quad (84)$$

Utilizando a equação (67) e substituindo ϕ por U_i , tem-se:

$$U_i^{n+1} - U_i^n = -\Delta t \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} U_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n \quad (85)$$

É considerada também a seguinte hipótese (termo desprezado):

$$\frac{\Delta t^2}{2} U^k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) \right]^n = 0 \quad (86)$$

Isso se deve ao fato do termo apresentar uma derivada de terceira ordem, que aumenta a complexidade da solução, aliado ao fato de ainda estar sendo multiplicado por Δt^2 .

Desta forma, a equação (85) torna-se:

$$U_i^{n+1} - U_i^n = -\Delta t \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} U^k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + Q \right]^n \quad (87)$$

Pode-se ainda, por ser considerado escoamento isotérmico com viscosidade constante, realizar a seguinte substituição:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (88)$$

Substituindo Q por $Q^{n+\theta_2}$ visto na equação (81), a equação (88) e acrescentando o termo de campo na equação (87), tem-se:

$$U_i^{n+1} - U_i^n = -\Delta t \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + Q^{n+\theta_2} + \rho g_i \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} U^k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + Q^{n+\theta_2} + \rho g_i \right]^n \quad (89)$$

Duas alternativas de aproximações podem ser realizadas para o termo Q , que serão chamadas de “Split A” e “Split B”. Na primeira é removido todos os termos do gradiente de pressão da equação (89) e na segunda é mantido os termos do gradiente fazendo com que ele corresponda a um incremento de tempo.

3.2.5 – Split A

Discretização temporal:

Será introduzida uma variável auxiliar ΔU_i^* , tal que:

$$\Delta U_i^* = U_i^* - U_i^n = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \rho g_i + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \rho g_i \right) \right]^n \quad (90)$$

Essa equação será resolvida com o método explícito aplicado para a forma discretizada tornando possível uma solução. A correção dada abaixo é avaliada primeiramente no incremento da pressão:

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial Q_i^n}{\partial x_k} \quad (91)$$

Da equação (5) tem-se:

$$\Delta p = \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \Delta p = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} = -\Delta t \left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i} \right] \quad (92)$$

onde β é a compressibilidade artificial, que será explicada em um tópico específico neste presente trabalho.

Substituindo ΔU_i da expressão (91) nesta expressão e expandindo-se o valor de $\partial p^{n+\theta_2}/\partial x$ de acordo com a equação (83), e rearranjando após desprezar os termos de alta ordem tem-se:

$$\Delta p = \left(\frac{1}{\beta^2} \right) \Delta p = -\Delta t \left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} + \Delta t \theta_1 \left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i \partial x_i} \right) \right] \quad (93)$$

onde ΔU_i^* e os termos de pressão na equação acima são calculados pela equação (91).

A equação também é completamente auto-adjunta na variável Δp (ou Δp) que é desconhecida. Agora a padronização tipo Galerkin pode ser utilizada pela discretização espacial.

Discretização espacial:

Empregando a forma fraca da discretização na equação (90) utilizando uma função peso da aproximação de Galerkin, tem-se:

$$\int_{\Omega} N_u^k \Delta U_i^* d\Omega = \Delta t \left[AI + \frac{1}{Re} BI + CI + \frac{\Delta t}{2} DI \right]^n \quad (94)$$

onde:

$$AI = \int_{\Omega} N_u^k \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right] d\Omega = -\int_{\Omega} N_u^k \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) d\Omega \quad (95)$$

$$BI = \int_{\Omega} N_u^k \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) d\Omega \quad (96)$$

como é um termo de segunda ordem, deve-se realizar uma integral por partes, assim:

$$BI = -\int_{\Omega} \frac{\partial N_u^k}{\partial x_j} u_i d\Omega + \int_{\Gamma} N_u^k u_i n_j d\Gamma \quad (97)$$

$$CI = \int_{\Omega} N_u^k (-\rho g_i) d\Omega = -\int_{\Omega} N_u^k \rho g_i d\Omega \quad (98)$$

$$DI = \int_{\Omega} N_u^k \left[u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \rho g_i \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} N_u^k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_u^k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho g_i) d\Omega \quad (99)$$

como a equação possui um termo de segunda ordem, podemos reduzir a ordem utilizando a forma fraca, assim:

$$DI = -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} (N_u^k u_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right) d\Omega + \int_{\Gamma} N_u^k u_k \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} (N_u^k u_k) \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho g_i) d\Omega \quad (100)$$

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), o termo residual da superfície pode ser desprezado, a equação acima, torna-se:

$$DI = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} (N_u^k u_k) \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \rho g_i \right) d\Omega \quad (101)$$

Substituindo (95), (97), (98) e (101) na equação (94), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_u^k \Delta U_i^* d\Omega = +\Delta t \left[-\int_{\Omega} N_u^k \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_u^k}{\partial x_j} u_i d\Omega - \int_{\Omega} N_u^k \rho g_i d\Omega \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} (N_u^k u_k) \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \rho g_i \right) d\Omega \right]^n + \Delta t \left[\int_{\Gamma} N_u^k u_i n_j d\Gamma \right]^n \quad (102)$$

Pode-se ainda escrever a equação acima na seguinte forma:

Passo 1 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal auxiliar).

$$\Delta \tilde{U}^* = -M_u^{-1} \Delta t [(C_u \tilde{U} + K_t \tilde{u} - f) - \Delta t (K_u \tilde{U} + f_s)]^n \quad (103)$$

onde:

$$M_u = \int_{\Omega} N_u^T N_u d\Omega \quad (104)$$

$$C_u = \int_{\Omega} N_u^T (\nabla (u N_u)) d\Omega \quad (105)$$

$$K_t = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \nabla N_p d\Omega \quad (106)$$

$$K_u = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla^T (u N_u))^T (\nabla^T (u N_u)) d\Omega \quad (107)$$

$$f = \int_{\Omega} N_u^T \rho g d\Omega + \int_{\Gamma} N_u^T t^d d\Gamma \quad (108)$$

$$f_s = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla^T (u \cdot N_u))^T \rho g d\Omega \quad (109)$$

Empregando a forma fraca da discretização na equação (93) utilizando uma função peso da aproximação de Galerkin, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_p^k \Delta p \, d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^k \frac{1}{\beta^2} \Delta p \, d\Omega \\
&= -\Delta t \int_{\Omega} N_p^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* - \Delta t \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} (p^n + \theta_2 \Delta p) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{110}$$

como $p^{n+\theta_2} = (p^n + \theta_2 \Delta p)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_p^k \Delta p \, d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^k \frac{1}{\beta^2} \Delta p \, d\Omega \\
&= -\Delta t \int_{\Omega} N_p^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* - \Delta t \theta_1 \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{111}$$

como a equação possui um termo de segunda ordem, deve-se integrar por partes, assim:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_p^k \Delta p \, d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^k \frac{1}{\beta^2} \Delta p \, d\Omega \\
&= +\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial N_p^k}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* - \Delta t \theta_1 \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] d\Omega \\
&\quad - \Delta t \int_{\Gamma} N_p^k \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* + \Delta t \theta_1 \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] n_j \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{112}$$

Pode-se ainda escrever a equação acima na seguinte forma:

Passo 2 : (procedimento para o cálculo da variação da pressão nodal).

$$(M_p + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H) \Delta \tilde{p} = \Delta t [G \tilde{U}^n + \theta_1 G \Delta \tilde{U}^* - \Delta t \theta_1 H \tilde{p}^n - f_p] \tag{113}$$

onde:

$$M_p = \int_{\Omega} N_p^T \left(\frac{1}{\beta^2} \right)^n N_p \, d\Omega \tag{114}$$

$$H = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \nabla N_p \, d\Omega \tag{115}$$

$$G = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \cdot N_u \, d\Omega \tag{116}$$

$$f_p = \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T [\tilde{U}^n + \theta_1 (\tilde{U}^* - \Delta t \nabla p^{n+\theta_2})] d\Gamma \quad (117)$$

mas:

$$\nabla p^{n+\theta_2} = \nabla p^n + \theta_2 \nabla (\Delta p) \quad (118)$$

Substituindo (118) em (117), tem-se:

$$f_p = \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T [\tilde{U}^n + \theta_1 (\tilde{U}^* - \Delta t (\nabla p^n + \theta_2 \nabla (\Delta p)))] d\Gamma \quad (119)$$

Expandindo a fórmula obtêm-se:

$$f_p = \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T \tilde{U}^n d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T \theta_1 \tilde{U}^* d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T \theta_1 (-\Delta t) \nabla p^n \cdot d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T \theta_1 (-\Delta t) \theta_2 \nabla (\Delta p) d\Gamma \quad (120)$$

Resumidamente tem-se:

$$f_p = f_{p1} + f_{p2} + f_{p3} + f_{p4} \quad (121)$$

onde:

$$f_{p1} = \Delta t \int_{\Gamma} N_p^T n^T \tilde{U}^n d\Gamma \quad (122)$$

$$f_{p2} = \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T n^T \Delta \tilde{U}^* d\Gamma \quad (123)$$

$$f_{p3} = -\Delta t^2 \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T n^T \nabla p^n d\Gamma \quad (124)$$

$$f_{p4} = -\Delta t^2 \theta_1 \theta_2 \int_{\Gamma} N_p^T n^T \nabla (\Delta p) d\Gamma \quad (125)$$

Substituindo (121) em (113), tem-se:

$$(M_p + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H + \Delta t f_{p4}) \Delta \tilde{p} = \Delta t [G \tilde{U}^n + \theta_1 G \Delta \tilde{U}^* - \Delta t \theta_1 H \tilde{p}^n - f_{p1} - f_{p2} - f_{p3}] \quad (126)$$

Empregando a forma fraca da discretizaao na equaao (91) utilizando uma funao peso da aproximaao de Galerkin, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_p^k \Delta U_i d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^k \left[\Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial Q_i^n}{\partial x_k} \right] d\Omega \\ &= \left[A2 - \Delta t B2 - \frac{\Delta t^2}{2} C2 \right] \end{aligned} \quad (127)$$

onde:

$$A2 = \int_{\Omega} N_p^k \Delta U_i^* d\Omega \quad (128)$$

$$B2 = \int_{\Omega} N_p^k \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} d\Omega \quad (129)$$

Substituindo (83) em (129), tem-se:

$$B2 = \int_{\Omega} N_p^k \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (130)$$

$$C2 = \int_{\Omega} N_p^k u_k \frac{\partial Q_i^n}{\partial x_k} d\Omega \quad (131)$$

Mas $Q_i^n = -\frac{\partial p^n}{\partial x_i}$, assim:

$$C2 = \int_{\Omega} N_p^k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (132)$$

Como a equaao possui um termo de segunda ordem, deve-se integrar por partes, assim:

$$C2 = - \left[- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (N_p^k u_k) \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} N_p^k u_k \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma \right] \quad (133)$$

Desprezando o gradiente normal de pressões no termo de superfície, tem-se:

$$C2 = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (N_p^k u_k) \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (134)$$

Substituindo (128), (130), (134) em (127), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_p^k \Delta U_i d\Omega = \int_{\Omega} N_p^k \Delta U_i^* d\Omega - \Delta t \left[\int_{\Omega} N_p^k \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (N_p^k u_k) \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (135)$$

Pode-se ainda escrever a equação acima na seguinte forma:

Passo 3 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal).

$$\Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{U}^* - M_u^{-1} \Delta t \left[G^T (\tilde{p}^n + \theta_2 \Delta \tilde{p}) + \frac{\Delta t}{2} P \tilde{p}^n \right] \quad (136)$$

onde:

$$P = \int_{\Omega} \nabla (u N_u)^T \nabla N_p d\Omega \quad (137)$$

Resumidamente o método funciona da seguinte maneira:

- a) É calculada a variação da velocidade nodal auxiliar ($\Delta \tilde{U}^*$) através da equação (103);
- b) É calculada a variação da pressão nodal ($\Delta \tilde{p}$) através da equação (126) utilizando o valor da velocidade nodal auxiliar ($\Delta \tilde{U}^*$) calculado no item “a”;
- c) É calculada a variação da velocidade nodal ($\Delta \tilde{U}$) através da equação (136) utilizando os valores da velocidade nodal auxiliar ($\Delta \tilde{U}^*$) calculado no item “a” e da variação da pressão nodal ($\Delta \tilde{p}$) calculado no item “b”;
- d) Esta seqüência de procedimento se repete até que a variável de tempo ($t = t + \Delta t$) seja

igual ao valor de $(t_{\text{máx}})$.

3.2.6 – Split B

Com Split B, a discretização e o processo de solução devem ter pequenas modificações, pois considera-se o gradiente de pressão. Como poderá ser notado nas equações (138), (139), (140), os termos de pressão que eram considerados nos passos 2 e 3 agora são considerados no passo 1, deixando de existir nos outros dois. Deixando os detalhes de derivação e utilizando processos idênticos de discretização, os passos finais podem ser resumidos conforme segue:

Passo 1 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal auxiliar).

$$\Delta \tilde{U}^{**} = -M_u^{-1} \Delta t \left[(C_u \tilde{U} + K_t \tilde{u} + G^T \tilde{p} - f) - \Delta t (K_u \tilde{U} + f_s + \frac{\Delta t}{2} P \tilde{p}) \right]^n \quad (138)$$

Passo 2 : (procedimento para o cálculo da variação da pressão nodal).

$$(M_p + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H) \Delta \tilde{p} = \Delta t [G \tilde{U}^n + \theta_1 G \Delta \tilde{U}^{**} - f_p] \quad (139)$$

Passo 3 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal).

$$\Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{U}^{**} - M_u^{-1} \Delta t [\theta_2 G^T \Delta \tilde{p}] \quad (140)$$

3.3 – Formulação Nithiarasu

Uma formulação alternativa foi proposta por Nithiarasu (2003). Do mesmo modo que na formulação de Zienkiewicz e Taylor (2000), o autor se baseou-se nas leis da conservação, que são descritas pelo conjunto de equações de Navier-Stokes apresentadas anteriormente (equações (5), (7) e (8)).

3.3.1 – Algoritmo – CBS

Discretização temporal:

Passo 1 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal auxiliar).

$$\Delta U_i^* = U_i^* - U_i^n = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right) \right]^n \quad (141)$$

Passo 2 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal auxiliar).

$$\Delta \rho = \rho^{n+1} - \rho^n = \left(\frac{1}{\beta^2} \right)^n \Delta p = -\Delta t \left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i^2} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2} \right) \right] \quad (142)$$

onde β é a compressibilidade artificial, que será explicada em um tópico específico neste presente trabalho.

Passo 3 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal auxiliar).

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (143)$$

no presente estudo $\theta_2 = 0$.

Discretização espacial:

Empregando a forma fraca da discretização na equação (141) utilizando uma função peso da aproximação de Galerkin, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_u^T \Delta U_i^* d\Omega &= \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right) \right]^n \\ &= \Delta t \left[A + B + \frac{\Delta t}{2} D \right]^n \end{aligned} \quad (144)$$

Substituindo (95), (97) e (101) na equação (144), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_u^T \Delta U_i^* d\Omega = +\Delta t \left[-\int_{\Omega} N_u^T \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_u^T}{\partial x_j} u_j d\Omega \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} (N_u^T u_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) \right) d\Omega \right]^n + \Delta t \left[\int_{\Gamma} N_u^T u_i n_j d\Gamma \right]^n \quad (145)$$

Pode-se ainda escrever a equação acima na seguinte forma:

Passo 1 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal auxiliar).

$$\Delta \tilde{U}^* = -M_u^{-1} \Delta t [(C_u \tilde{U} + K_t \tilde{u} - f) - \Delta t (K_u \tilde{U})]^n \quad (146)$$

onde:

$$M_u = \int_{\Omega} N_u^T N_u d\Omega \quad (147)$$

$$C_u = \int_{\Omega} N_u^T (\nabla (u N_u)) d\Omega \quad (148)$$

$$K_t = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \nabla N_p d\Omega \quad (149)$$

$$K_u = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla^T (u N_u))^T (\nabla^T (u N_u)) d\Omega \quad (150)$$

$$f = \int_{\Gamma} N_u^T t^d d\Gamma \quad (151)$$

Empregando a forma fraca da discretização na equação (142) utilizando uma função peso da aproximação de Galerkin, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_p^T \Delta p d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{\beta^2} \Delta p d\Omega \\ &= -\Delta t \int_{\Omega} N_p^T \frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* - \Delta t \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} (p^n + \theta_2 \Delta p) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (152)$$

como $p^{n+\theta_2} = (p^n + \theta_2 \Delta p)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_p^T \Delta p d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{\beta^2} \Delta p d\Omega \\
&= -\Delta t \int_{\Omega} N_p^T \frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* - \Delta t \theta_1 \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{153}$$

como a equação possui um termo de segunda ordem, deve-se integrar por partes, assim:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_p^T \Delta p d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{\beta^2} \Delta p d\Omega \\
&= -\Delta t \int_{\Omega} N_p^T \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \Delta t \theta_1 \int_{\Omega} \frac{\partial N_p^T}{\partial x_i} \left[\Delta U_i^* - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] d\Omega \\
&\quad - \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T \left[\Delta U_i^* + \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] n_j d\Gamma
\end{aligned} \tag{154}$$

Pode-se ainda escrever a equação acima na seguinte forma:

Passo 2 : (procedimento para o cálculo da variação da pressão nodal).

$$(M_p + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H) \Delta \tilde{p} = \Delta t [-G \tilde{U}^n + \theta_1 G \Delta \tilde{U}^* - \Delta t \theta_1 H \tilde{p}^n - f_p] \tag{155}$$

onde:

$$M_p = \int_{\Omega} N_p^T \left(\frac{1}{\beta^2} \right)^n N_p d\Omega \tag{156}$$

$$H = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \nabla N_p d\Omega \tag{157}$$

$$G = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T \cdot N_u \cdot d\Omega \tag{158}$$

$$f_p = \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T (\tilde{U}^* - \Delta t \nabla p^n) n^T d\Gamma \tag{159}$$

Expandindo a fórmula obtêm-se:

$$f_p = \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T \tilde{U}^* n^T d\Gamma + \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T (-\Delta t) \nabla p^n n^T d\Gamma \tag{160}$$

u, resumidamente:

$$f_p = f_{p1} + f_{p2} \quad (161)$$

sendo:

$$f_{p1} = \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T \Delta \tilde{U}^* n^T d\Gamma \quad (162)$$

$$f_{p2} = -\Delta t^2 \theta_1 \int_{\Gamma} N_p^T \nabla p^n n^T d\Gamma \quad (163)$$

Substituindo (161) em (155), tem-se:

$$(M_p + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H) \Delta \tilde{p} = \Delta t [G \tilde{U}^n + \theta_1 G \Delta \tilde{U}^* - \Delta t \theta_1 H \tilde{p}^n - f_{p1} - f_{p2}] \quad (164)$$

Empregando a forma fraca da discretização na equação (143) utilizando uma função peso da aproximação de Galerkin, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_p^T \Delta U_i d\Omega &= \int_{\Omega} N_p^T \left[\Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] d\Omega \\ &= [A2 - \Delta t B2] \end{aligned} \quad (165)$$

Substituindo (128) e (130) em (165), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_p^k \Delta U_i d\Omega = \int_{\Omega} N_p^k \Delta U_i^* d\Omega - \Delta t \left[\int_{\Omega} N_p^k \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \quad (166)$$

Pode-se ainda escrever a equação acima na seguinte forma:

Passo 3 : (procedimento para o cálculo da variação da velocidade nodal).

$$\Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{U}^* - M_u^{-1} \Delta t [G^T (\tilde{p}^n + \theta_2 \Delta \tilde{p})] \quad (167)$$

Resumidamente o método funciona da seguinte maneira:

- a) É calculada a variação da velocidade nodal auxiliar ($\Delta \tilde{U}^*$) através da equação (146);

- b) É calculada a variação da pressão nodal $(\Delta \tilde{p})$ através da equação (164) utilizando o valor da velocidade nodal auxiliar $(\Delta \tilde{U}^*)$ calculado no item “a”;
- c) É calculada a variação da velocidade nodal $(\Delta \tilde{U})$ através da equação (167) utilizando os valores da velocidade nodal auxiliar $(\Delta \tilde{U}^*)$ calculado no item “a” e da variação da pressão nodal $(\Delta \tilde{p})$ calculado no item “b”;
- d) Esta seqüência de procedimento se repete até que a variável de tempo $(t=t+\Delta t)$ seja igual ao valor de $(t_{\text{máx}})$.

3.4 – Compressibilidade Artificial

O valor do fator da velocidade do som utilizado na equação (5) pode acarretar restrições na escolha do incremento de tempo. Deste modo, normalmente é utilizado um parâmetro β como um fator de compressibilidade artificial, que sem comprometer os resultados, ameniza os efeitos impostos ao incremento de tempo. Este fator, não está associado às propriedades físicas do fluido, mas aos diferentes números de Reynolds e também aos diferentes regimes (denominados convecção e difusão).

Segundo Nithiarasu (2003), o valor utilizado para a compressibilidade artificial pode ser calculado conforme segue:

$$\beta = \max(\varepsilon, v_{conv}, v_{diff}) \quad (168)$$

onde ε é uma constante igual a 0,5, v_{conv} é a velocidade convectiva e v_{diff} é a velocidade de difusão, que podem ser calculadas conforme segue:

$$v_{conv} = (u_i u_i)^{1/2} \quad (169)$$

$$v_{diff} = \frac{2}{hRe} \quad (170)$$

sendo h o valor da menor dimensão do elemento considerado.

3.5 – Incremento de Tempo

O incremento de tempo é um parâmetro muito importante em soluções, pois deve ser o maior possível de forma que não comprometa a estabilidade da solução e, também, diminua a quantidade de passos a serem utilizados para atingir a solução em regime permanente.

O incremento de tempo para o método de Nithiarasu (2003) é calculado através da seguinte fórmula:

$$\Delta t_c = \min(\Delta t_{conv}, \Delta t_{diff}) \quad (171)$$

Os parâmetros Δt_{conv} e Δt_{diff} podem ser calculados conforme segue:

$$\Delta t_{conv} = \frac{h}{u + \beta} \quad (172)$$

$$\Delta t_{diff} = \frac{h^2 Re}{2} \quad (173)$$

Ao valor obtido deve-se aplicar um fator de segurança que deve ser estimado de forma iterativa, ou seja, considera-se o valor encontrado na execução da solução e verifica-se a ocorrência da estabilidade da solução, em caso negativo deve-se multiplicar o valor por um percentual deste número até que a estabilidade seja mantida. Neste trabalho os valores utilizados foram de 0,4 e 0,6. Assim:

$$\Delta t = FS * \Delta t_c \quad (174)$$

onde FS é o fator de segurança utilizado.

A obtenção do incremento de tempo utilizado por Zienkiewicz e Taylor (2000) tem uma pequena diferença ao utilizado por Nithiarasu (2003), no primeiro caso os autores não calculam o valor de Δt_{diff} e consideram que $\Delta t_c = \Delta t_{conv}$. As demais etapas seguem conforme anteriormente mencionado.

3.6 – Método semi-implícito

O uso do método semi-implícito implica em diferentes esquemas de aproximação no tempo. Neste caso, o procedimento é análogo ao anteriormente descrito alterando-se apenas os parâmetros:

- Manter na equação (103) ou (146) a solução da velocidade de forma explícita e nas demais equações considerar $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 1$;
- Estabelecer um ponto de pressão referencial inicial para rodar a rotina de solução;
- Não calcular a compressibilidade artificial e estabelecer um valor tendendo a infinito para o valor de β , no caso o valor adotado foi de 1×10^{20} .

3.7 – Ausência do termo característico

No desenvolvimento do trabalho optou-se por testar o uso e a omissão dos termos característicos nas expressões utilizadas por Zienkiewicz e Taylor (2000) e Nithiarasu (2003) em seus trabalhos para verificar a influência no desenvolvimento da solução. Este fato representa, neste caso, a eliminação das matrizes K_u e P . Assim as expressões anteriores sofreriam alterações nos seguintes passos:

Zienkiewicz – Split A:

Passo 1: Omissão da matriz K_u , deste modo a a equação (103) passa a ser escrita na forma: $\Delta \tilde{U}^* = -M_u^{-1} \Delta t [(C_u \tilde{U} + K_t \tilde{u} - f) - \Delta t f_s]^n$

Passo 3: Omissão da matriz P , deste modo a a equação (136) passa a ser escrita como:

$$\Delta \tilde{U} = \Delta \tilde{U}^* - M_u^{-1} \Delta t [G^T (\tilde{p}^n + \theta_2 \Delta \tilde{p})]$$

Zienkiewicz – Split B:

Passo 1: Omissão da matriz K_u e P , deste modo a a equação (138) passa a ser escrita:

$$\Delta \tilde{U}^{**} = -M_u^{-1} \Delta t [(C_u \tilde{U} + K_t \tilde{u} + G^T \tilde{p} - f) - \Delta t f_s]^n$$

Nithiarasu:

Passo 1: Omissão da matriz K_u , deste modo a equação (146) passa a ser escrita:

$$\Delta \tilde{U}^* = -M_u^{-1} \Delta t [(C_u \tilde{U} + K_t \tilde{u} - f)]^n$$

3.8 – Resumo geral

O fluxo apresentado na Figura 5 apresenta um resumo geral do processo considerando todos os métodos utilizados no trabalho.

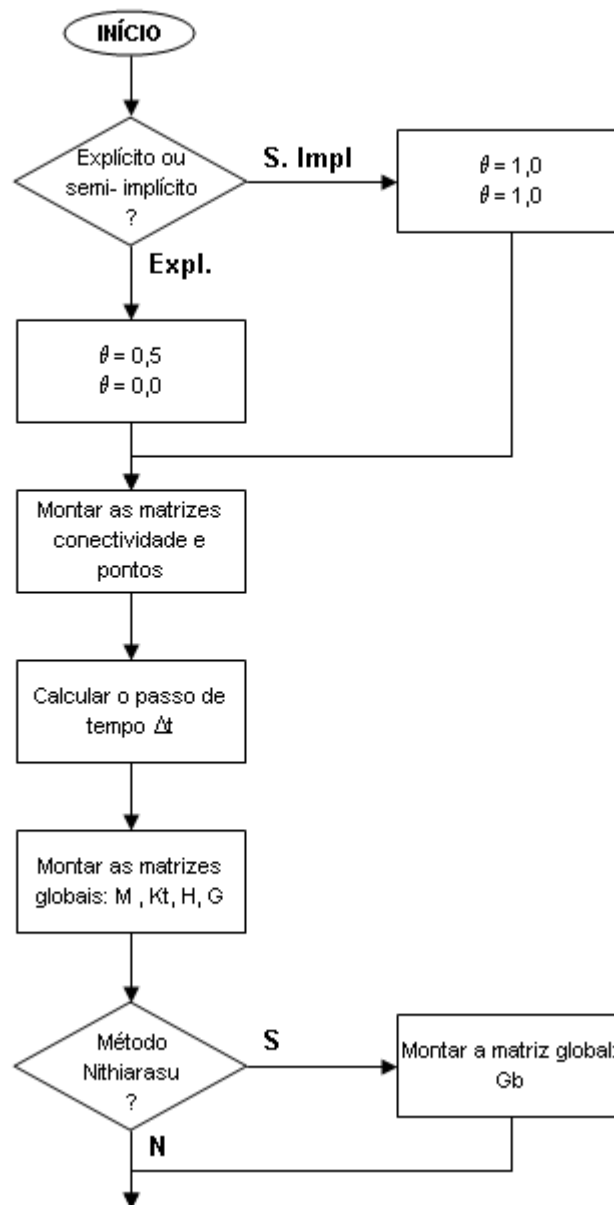


Figura 5: Fluxo geral considerando as variantes utilizados no trabalho.

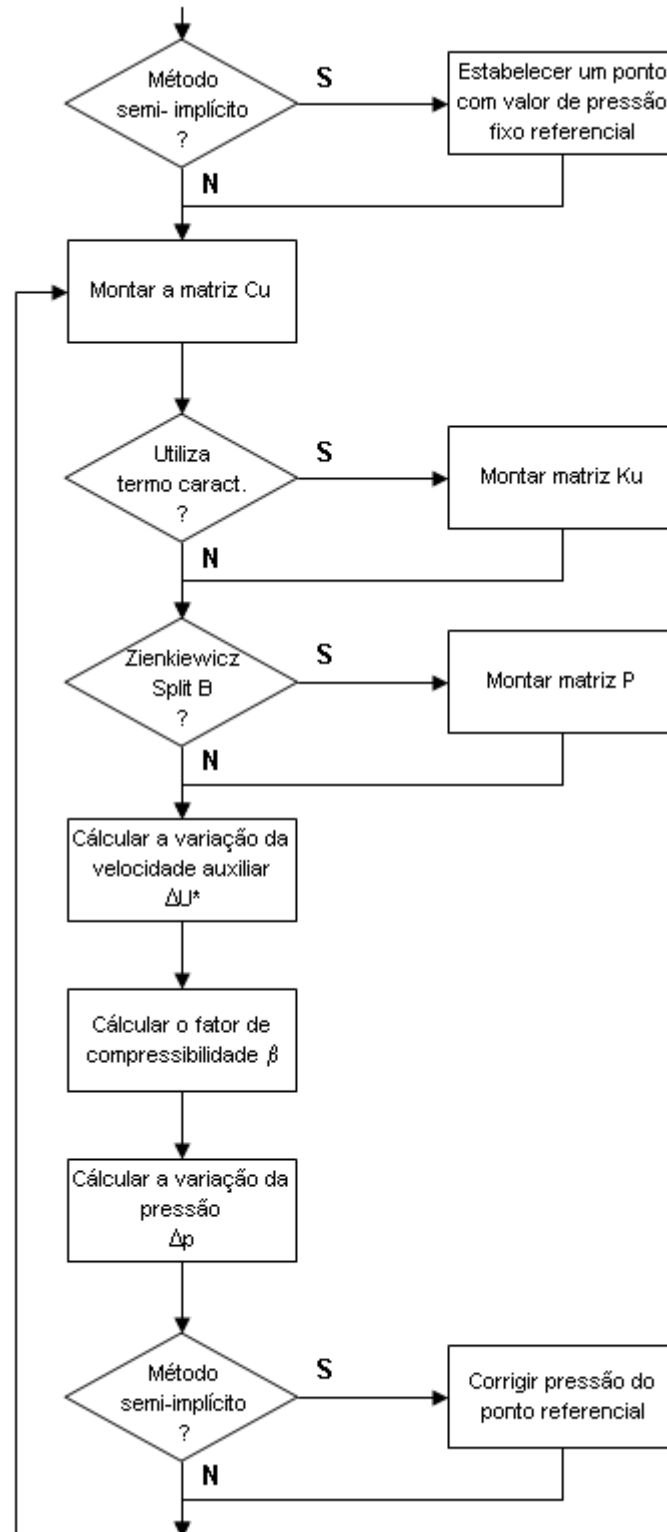


Figura 5(cont.): Fluxo geral considerando as variantes utilizados no trabalho.

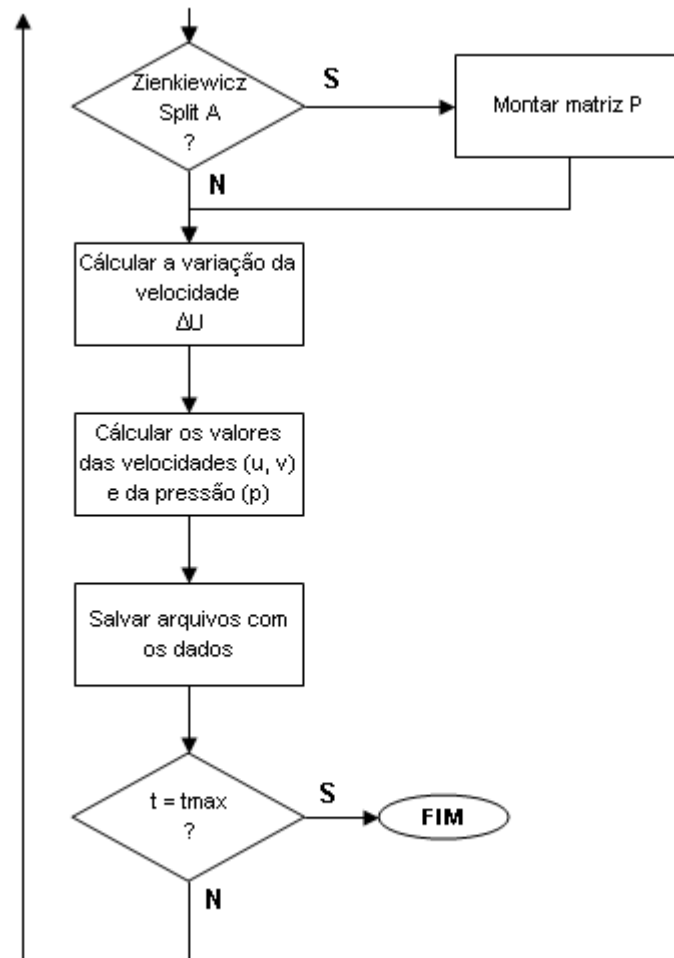


Figura 5(cont.): Fluxo geral considerando as variantes utilizados no trabalho.

IV – Resultados e Discussões

O presente trabalho utiliza-se dos esquemas explícito e semi-implícito baseados no método das pseudo-características com o uso do método de compressibilidade artificial (AC) em métodos de elementos finitos utilizando malha formada com elementos bilineares para a solução do problema da cavidade recirculante com alguns números de Reynolds (100, 400 e 1.000). São apresentados, ainda, resultados para as diversas condições com e sem o uso do termo característico, como pode ser observado na Tabela 1.

O código computacional utilizado para as rotinas, como comentado anteriormente, foi implementado sobre uma plataforma matemática: o GNU-Octave (2007), similar ao MATLAB. Todas as subrotinas foram escritas na forma de funções que eram chamadas a partir do programa principal de acordo com o fluxograma anteriormente apresentado na Figura 5 e o descrito nos Apêndices B e C.

Para a montagem da malha também foi utilizada uma subrotina no GNU-Octave (2007) tomando-se a perspectiva dos pontos onde seria necessário ter um maior refinamento. Considerando o fato da cavidade recirculante possuir uma maior variação nas extremidades (próximo as fronteiras), principalmente na parte superior, onde existe a aplicação da velocidade, optou-se por montar uma malha mais refinada neste pontos, utilizando para isso funções exponenciais para realizar a divisão dos elementos.

Para a malha 21 x 21 as expressões exponenciais utilizadas foram:

$$\text{em } x(0,0 - 0,5): x(i) = -3.01e-2 + (2.25932 * 10^{-2}) e^{(0.286856 * i)}$$

$$\text{em } x(0,5 - 1,0): x(i) = 1 + 3.01e-2 - (2.25932 * 10^{-2}) e^{(0.286856 * (nx + 1 - i))}$$

$$\text{em } y(0,0 - 1,0): y(i) = 1 + 0.0675847 - 0.0588736 e^{(0.137989 * (ny + 1 - i))}$$

Para a malha 41 x 41 as expressões exponenciais utilizadas foram:

em x (0,0 - 0,5): $x(i) = -0.113696 + 0.104505 e^{(0.0842984*i)}$

em x (0,5 - 1,0): $x(i) = 1 + 0.113696 - 0.104505 e^{(0.0842984*(nx+1-i))}$

em y (0,0 - 1,0): $y(i) = 1 + 0.237218 - 0.227622 e^{(0.0412911*(ny+1-i))}$

Sendo i o número do ponto que se está calculando, nx o número máximo de pontos na direção x e ny o número máximo de pontos na direção y .

O modelo de malha utilizada pode ser visto nas Figuras 6 e 7. Um refinamento de malha (21 x 21) foi utilizada para a solução do escoamento com números de Reynolds de 100 e 400 e um refinamento de malha (41 x 41) para o valor de Re de 1.000.

Tabela 1: Métodos e variações testadas.

Esquema	Θ_1	Θ_2	Termo Caract.	Malha Exponencial		Número de Reynolds		
				21 x 21	41 x 41	100	400	1.000
Zienkiewicz Split A	0,5	0,0	S	x		x	x	
			N		x			x
	1,0	1,0	S	x		x	x	
			N		x			x
Zienkiewicz Split B	0,5	0,0	S	x		x	x	
			N		x			x
	1,0	1,0	S	x		x	x	
			N		x			x
Nithiasaru	0,5	0,0	S	x		x	x	
			N		x			x
	1,0	1,0	S	x		x	x	
			N		x			x

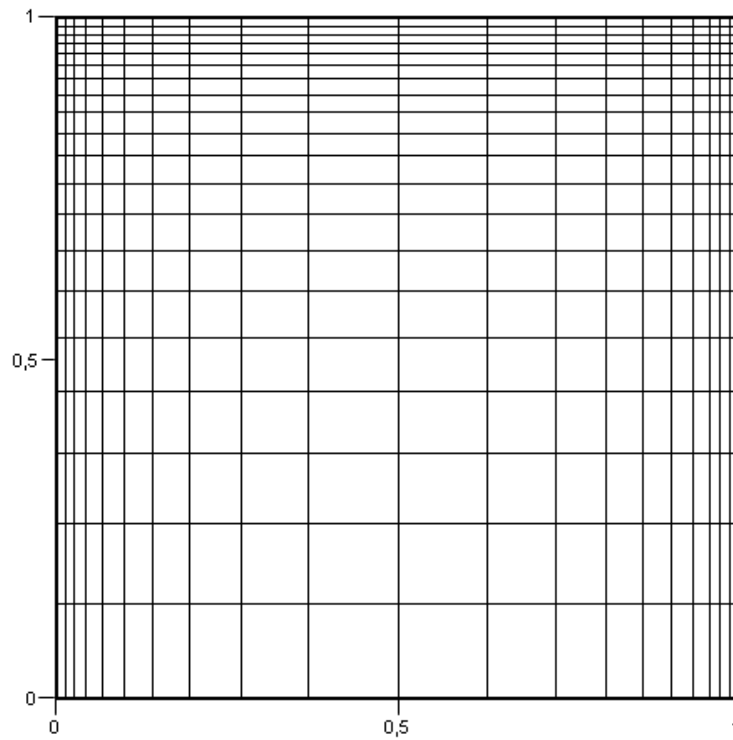


Figura 6: Malha Exponencial 21 x 21

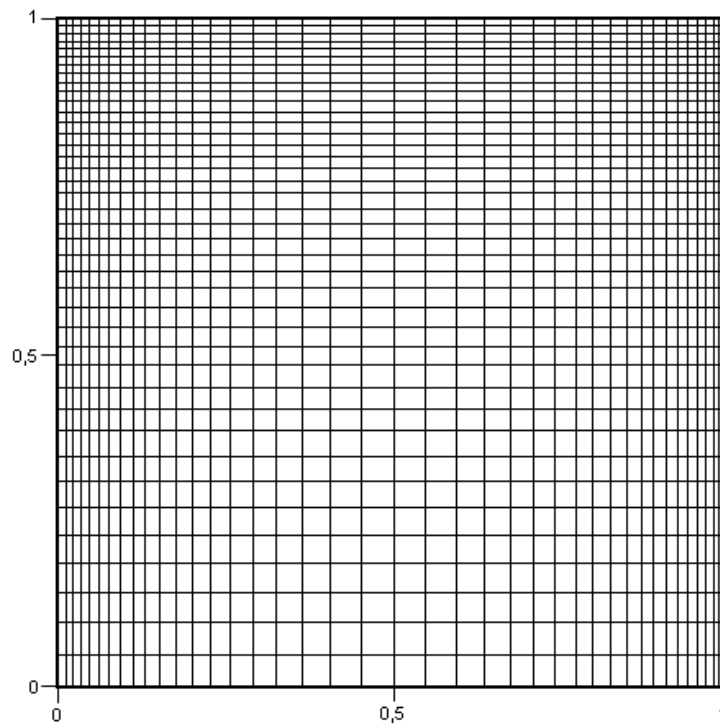


Figura 7: Malha Exponencial 41 x 41

4.1 – Análise da solução do problema da cavidade recirculante para diversos valores do número de Reynolds

Foram realizados 10 diferentes testes de métodos e a comparação de cada caso foi baseada em resultados para o mesmo do número de Reynolds. Desta forma, a partir de cada condição foram montados gráficos que permitiam a visualização comparativa entre resultados dos perfis de velocidade, distribuição de pressão e linhas de contorno de função corrente do presente trabalho com os resultados obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982). Nas seções subseqüentes estão apresentados os resultados da forma descrita e uma discussão sobre os fatores de maior influência sobre a solução. Os gráficos com resultados mostram os valores das velocidades obtidos na linha central conforme pode ser observado na Figura 8.

A princípio todos os métodos utilizaram-se de passos de tempo (Δt) proporcionais ao seus valores máximos calculados de acordo com os trabalhos de Zienkiewicz e Taylor (2000) e Nithiarasu (2003) e apresentados anteriormente independente do esquema a ser utilizado.

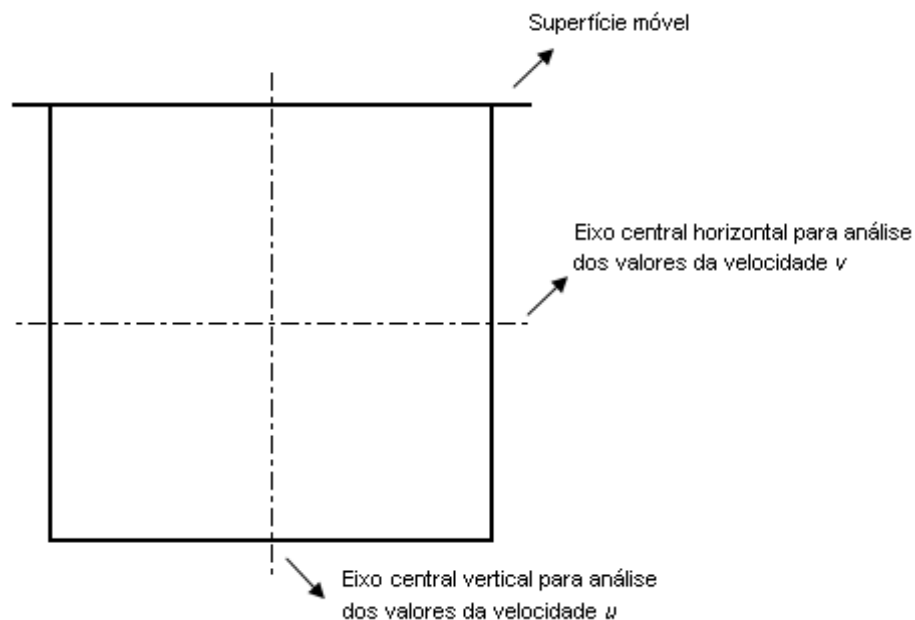


Figura 8: Esquema mostrando as linhas onde foram retirados os resultados para a montagem dos gráficos comparativos.

4.1.1 – Resultado para número de Reynolds = 400

Para a solução considerando $Re=400$ foi utilizado um incremento de tempo ($\Delta t=0,003$) que corresponde a 60% do máximo incremento de tempo possível. As Figuras 9 a 12 apresentam a evolução do perfil de velocidades v e u nas linhas centrais horizontais e verticais, respectivamente, para as diversas implementações do esquema “Split-A”. Os perfis são apresentados para cada 2.500 incrementos de tempo. Nestas figuras, a evolução dos resultados em função do tempo é mostrada nas diversas curvas, enquanto o resultado comparativo obtido por Ghia, Ghia e Shin (1982) para regime permanente é apresentado na forma de pontos.

A Figura 9 apresenta a evolução transiente para o esquema explícito mais comumente utilizado e mostra que a convergência do problema foi atingida quando o número de incrementos de tempo é de 7.500 passos. Nesta situação, os perfis de velocidade descritos estão praticamente coincidentes com os valores de referência, indicando que a solução atingiu a sua estabilização.

A Figura 10, por sua vez representa o mesmo resultado para o caso semi-implícito, ou seja, quando utiliza-se esquema explícito apenas para o campo de velocidades e esquema implícito é usado nas discretizações de pressão e correção da velocidade. Nota-se que, neste caso o processo de convergência é mais rápido e, o resultado para 5.000 passos de tempo se encontra um pouco mais próximo da condição de regime.

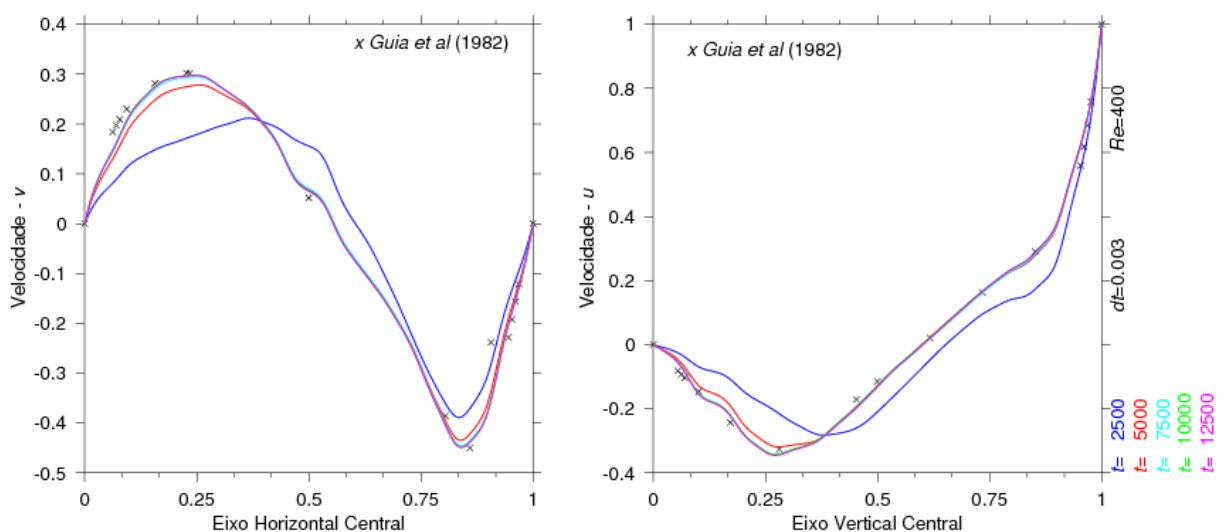


Figura 9: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – ($Re=400$)

A Figura 11 apresenta resultados muito similares aos apresentados na Figura 9, indicando que para a faixa de Reynolds analisada e elementos bilineares o uso de termos

característicos nesta implementação não se justifica.

A Figura 12 mostra o resultado para o esquema semi-implícito sem o termo característico. Esta figura indica que, da mesma forma que no caso anterior, nesta condição o termo característico não representa um fator preponderante para a solução. Note que neste caso, a velocidade de convergência foi praticamente a mesma da do caso representado na Figura 10, indicando que este tipo de formulação não é muito suscetível à presença do termo característico, assim como, nos esquemas explícitos.

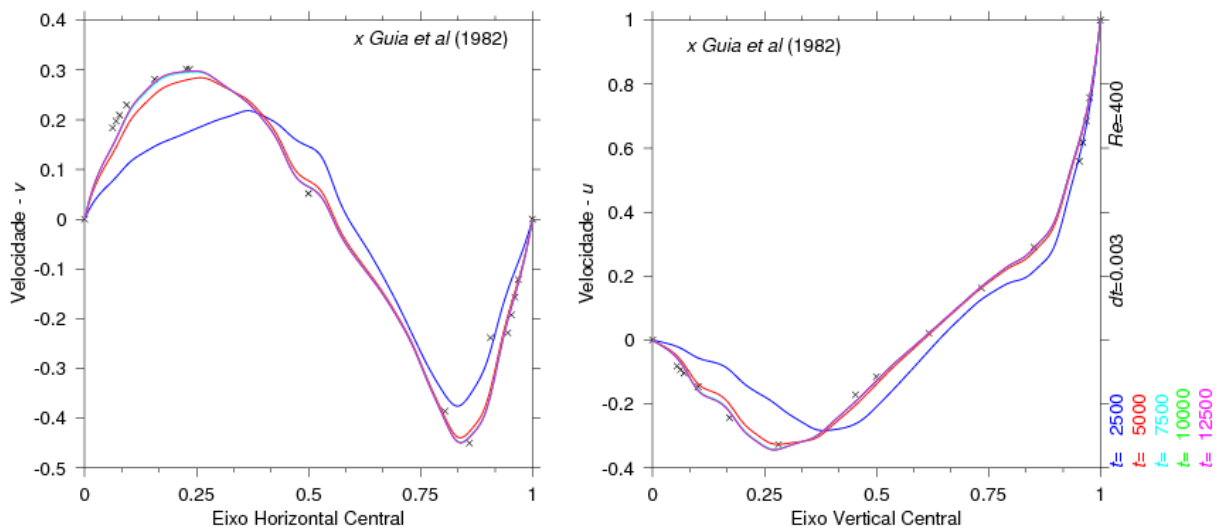


Figura 10: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – Semi-Implícito – ($Re=400$)

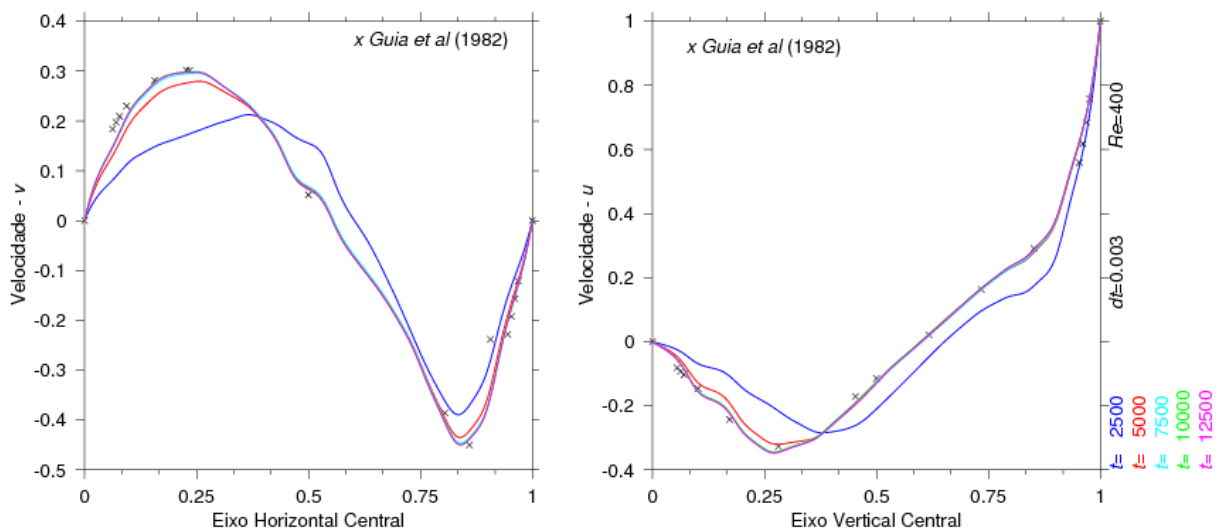


Figura 11: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – STC – ($Re=400$)

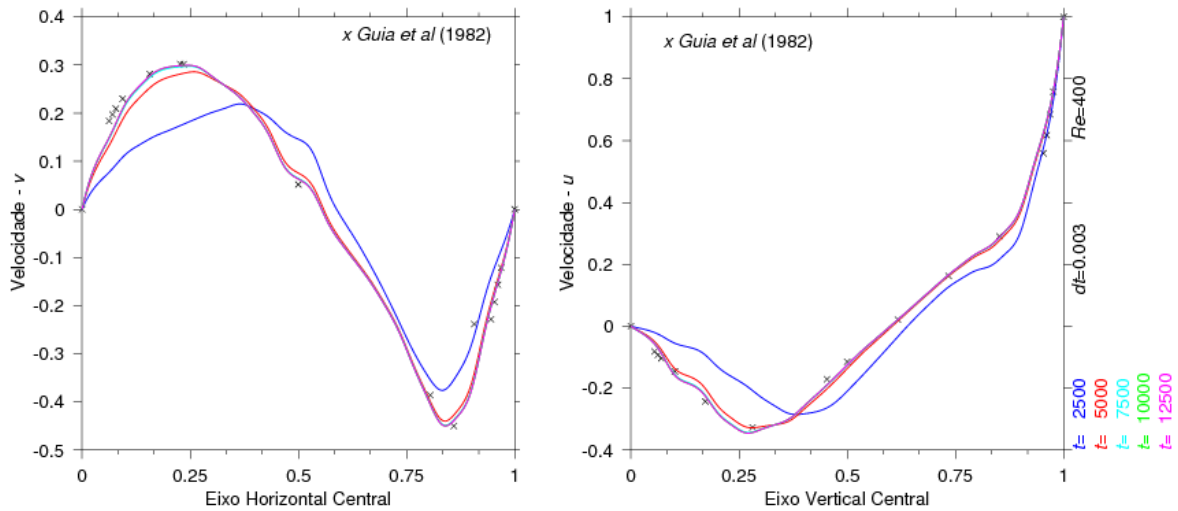


Figura 12: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split A – STC – Semi-Implicito – ($Re=400$)

As Figuras 13 a 15 representam resultados similares aos das Figuras 9 a 11 para implementações do “Split-B”, que considera o termo de pressão desde a etapa da estimativa da correção da velocidade. Embora, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), este tipo de acoplamento apresente menor estabilidade que o “Split-A”, entendeu-se como necessária a sua implementação para verificar o seu comportamento em cada caso.

Foram realizados os mesmos testes dos casos anteriores, excetuando-se o caso da aproximação semi-implícito sem o termo característico que já não apresentou bons resultados para o próprio “Split-A”. Uma comparação entre as Figuras 9 e 13 mostra que, realmente, o esquema tipo “Split-A” apresenta uma convergência um pouco mais rápida além de um resultado em regime permanente mais próximo do esperado.

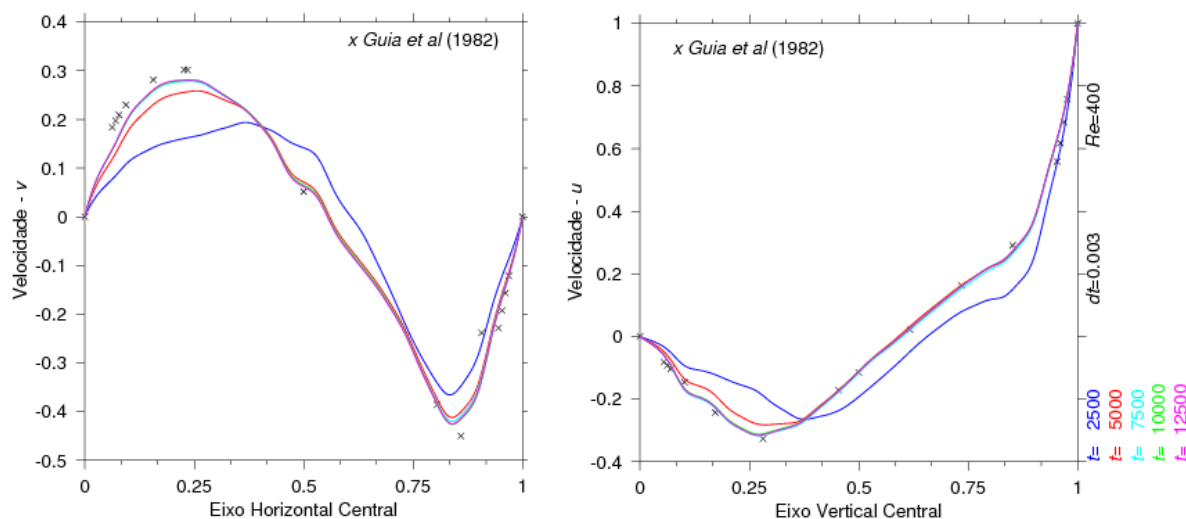


Figura 13: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split B – ($Re=400$)

Raciocínio equivalente poderia ser feito para o caso semi-implícito comparando-se as Figuras 10 e 14. Neste caso, entretanto, não se nota variações significativas entre os dois acoplamentos, seja na qualidade dos resultados ou na velocidade de convergência, mostrando que ambos são equivalentes. Desta forma, nota-se que a forma de acoplamento tem uma menor influência neste tipo de discretização. A comparação entre os esquemas semi-implícito e explícito no “Split-B”, Figuras 14 e 13, nos leva às mesmas considerações anteriormente destacadas para o “Split A”.

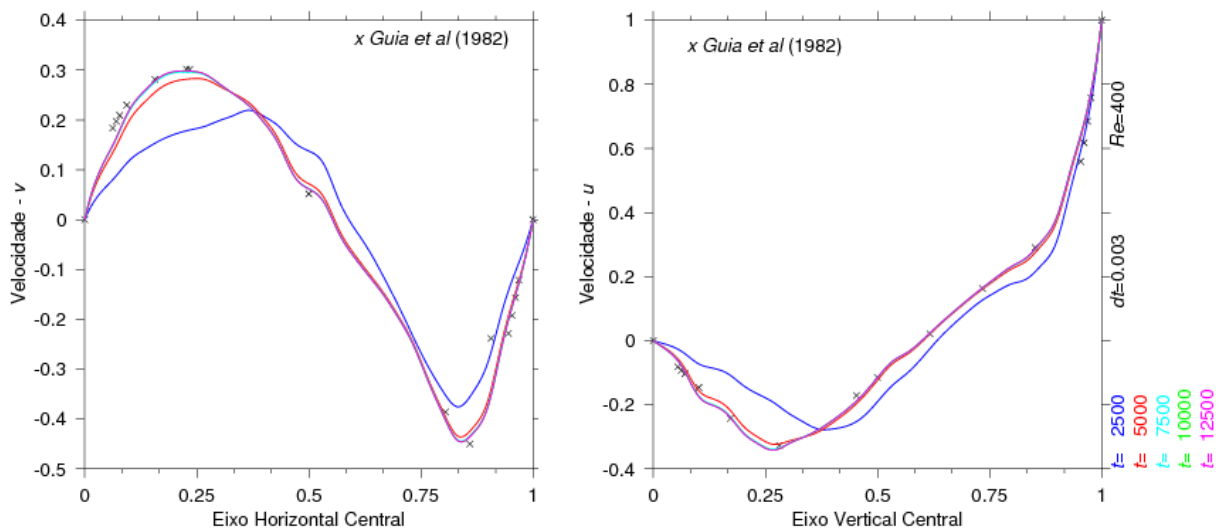


Figura 14: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split B – Semi-Implícito – ($Re=400$)

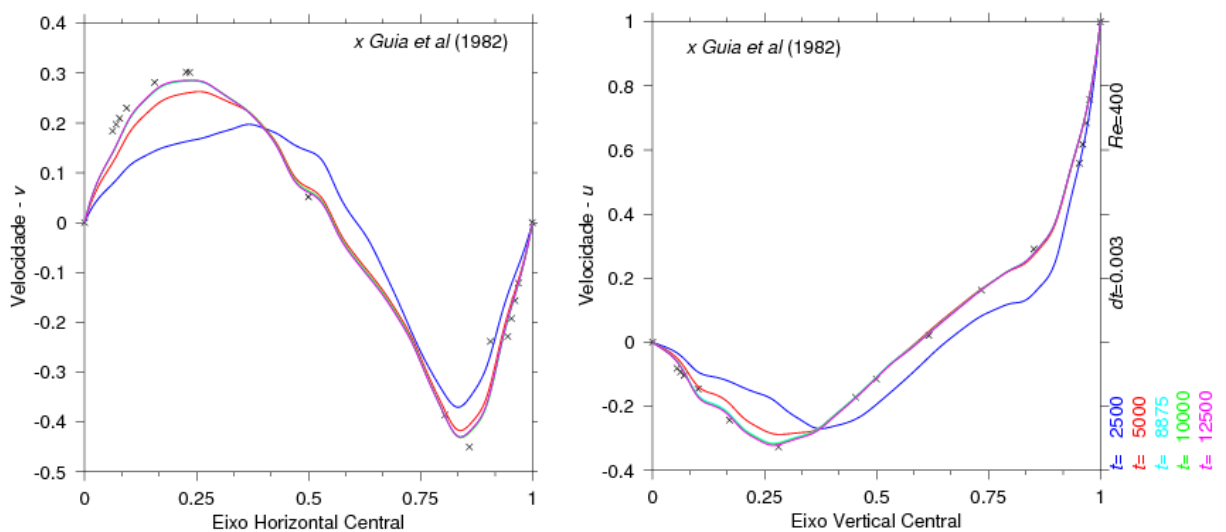


Figura 15: Comparativo da evolução dos resultados – Zienkiewicz – Split B – STC – ($Re=400$)

A Figura 15 apresenta os resultados para o “Split-B” sem o termo

característico e poderia ser comparado ao comportamento apresentado na Figura 11 pelo “Split-A”. Neste caso nota-se, novamente, a superioridade de convergência dos resultados do “Split-A”. Com relação à comparação com e sem o termo característico (Fig. 13), não se nota diferenças significativas nos resultados.

As Figuras 16 a 18 representam resultados similares às implementações anteriores do esquema proposto por Nithiarasu (2003). Como pela observação dos resultados obtidos entre o método com e sem termo característico no “Split-A” semi-implícito apresentaram as mesmas características do “Split-A” explícito, achou-se desnecessário a aplicação do esquema semi-implícito sem termo característico para o “Split-B” e Nithiarasu.

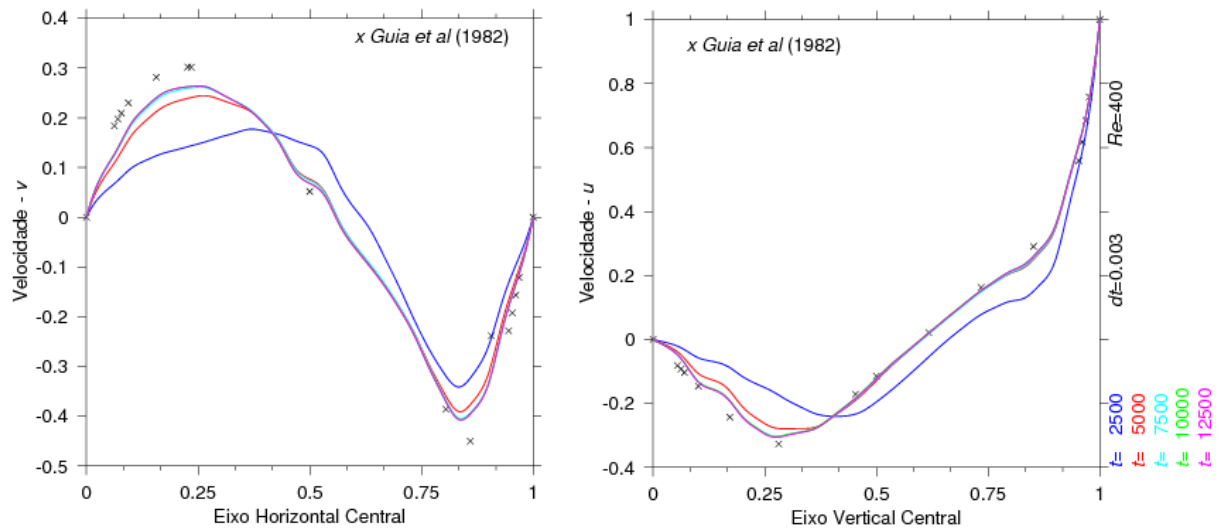


Figura 16: Comparativo da evolução dos resultados – Nithiarasu – ($Re=400$)

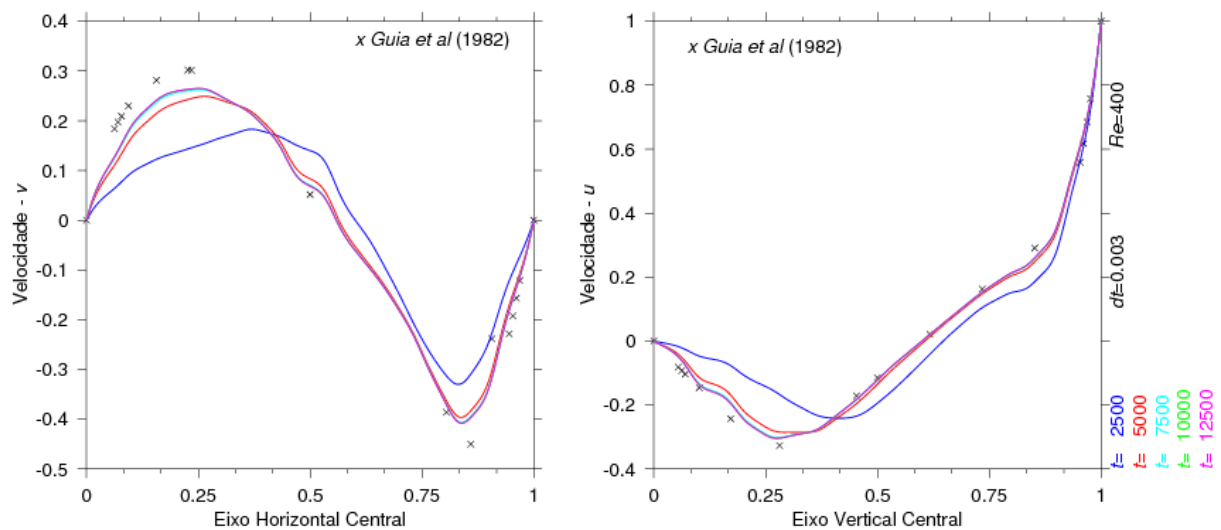


Figura 17: Comparativo da evolução dos resultados – Nithiarasu – Semi-Implícito – ($Re=400$)

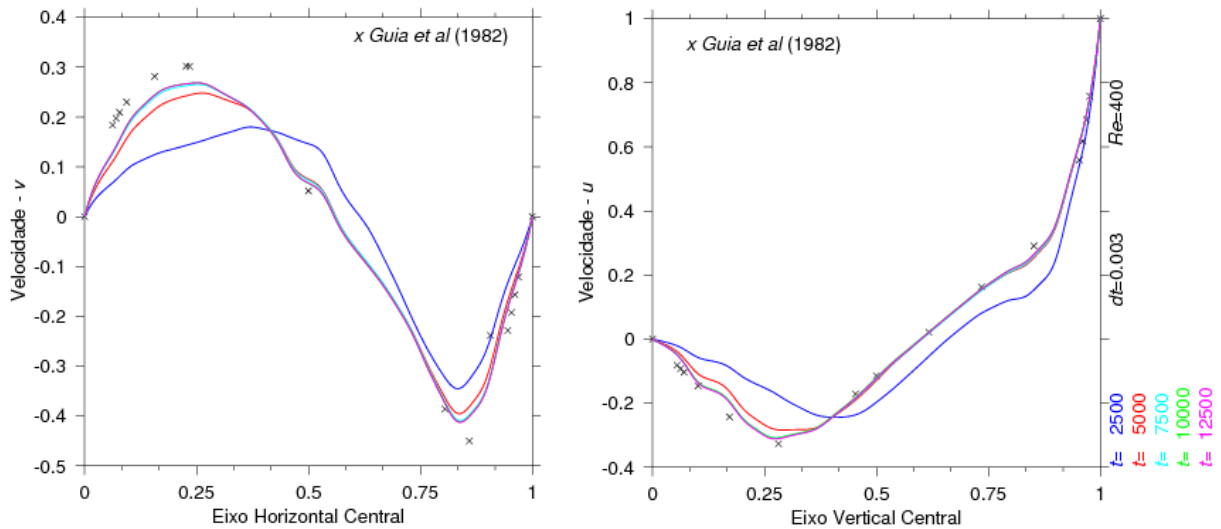


Figura 18: Comparativo da evolução dos resultados – Nithiarasu – STC – ($Re=400$)

Uma análise geral dos resultados mostra que este esquema apresenta, em termos gerais, resultados de qualidade inferior tanto ao “Split-A”, Figuras 9 a 11, como do “Split-B”, Figuras 13 a 15. Cabe ressaltar, entretanto, que este último esquema é um pouco mais rápido, uma vez que a quantidade de matrizes geradas é menor.

Como pode ser observado nos gráficos apresentados nas figuras anteriores, a partir de 7.500 passos as curvas permanecem estabilizadas nos resultados. Portanto a comparação das respostas obtidas para regime permanente para todas as combinações de esquemas e discretizações foram incluídos em um único gráfico e podem ser visualizados nas Figuras 19 e 20, para os perfis de velocidades v e u , respectivamente. A nomenclatura utilizada nas figuras correspondem a cada método avaliado e está descrita na lista de abreviações na parte inicial deste trabalho.

Estes resultados permitem confirmar as afirmações realizadas anteriormente identificando resultados mais próximos e mais afastados da solução de referência. Deve-se ressaltar, entretanto, que as figuras mostram que os resultados para a velocidade v , Figura 19, são muito mais sensíveis ao tipo de esquema utilizado do que o relacionado ao perfil de velocidades u , Figura 20.

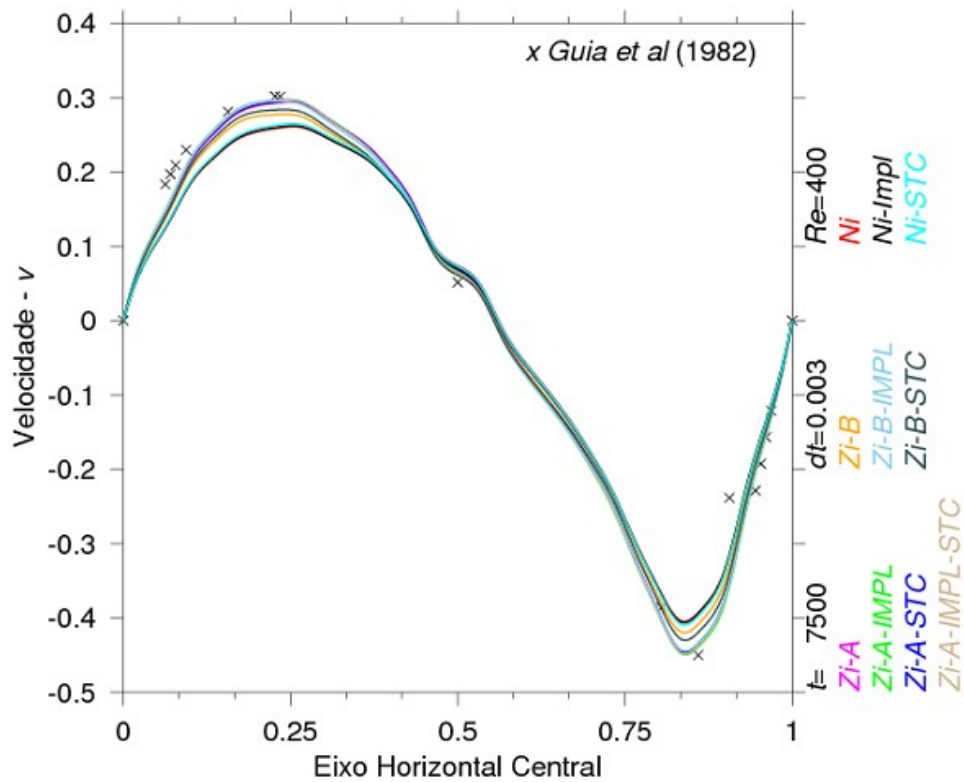


Figura 19: Comparação dos resultados entre os métodos - v_x - ($Re=400$)

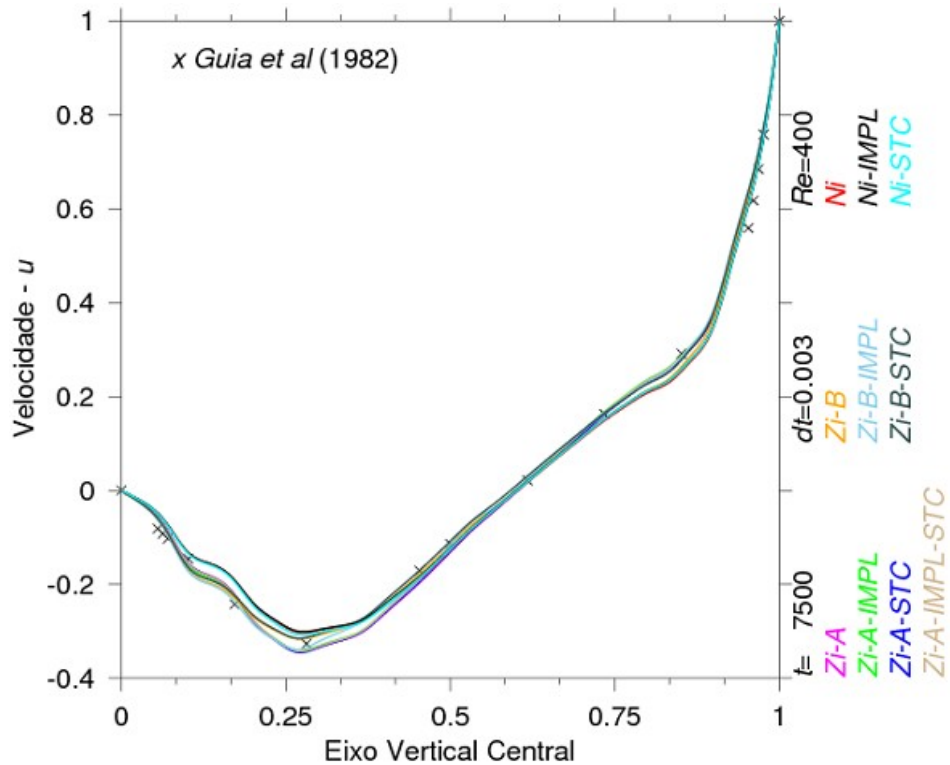


Figura 20: Comparação dos resultados entre os métodos - u_y - ($Re=400$)

Os resultados apresentados confirmam que os esquemas semi-implícitos com termo característico, seja Split-A ou B, foram as aproximações que mais se aproximaram da solução de referência. O “Split-A” explícito também apresentou resultados equivalentes, apenas ressaltando que pelo anteriormente demonstrado, o seu tempo de convergência é um pouco maior.

A Figura 21 apresenta o desvio da pressão, calculado através da norma dois do vetor do desvio da pressão dividido pelo termo de compressibilidade artificial β^2 , para os diversos casos analisados. Este desvio pode ser calculado apenas para os casos do “Split-A” e de Nithiarasu (2003) e não foi possível calculá-lo para o “Split-B” em função das diferenças da formulação.

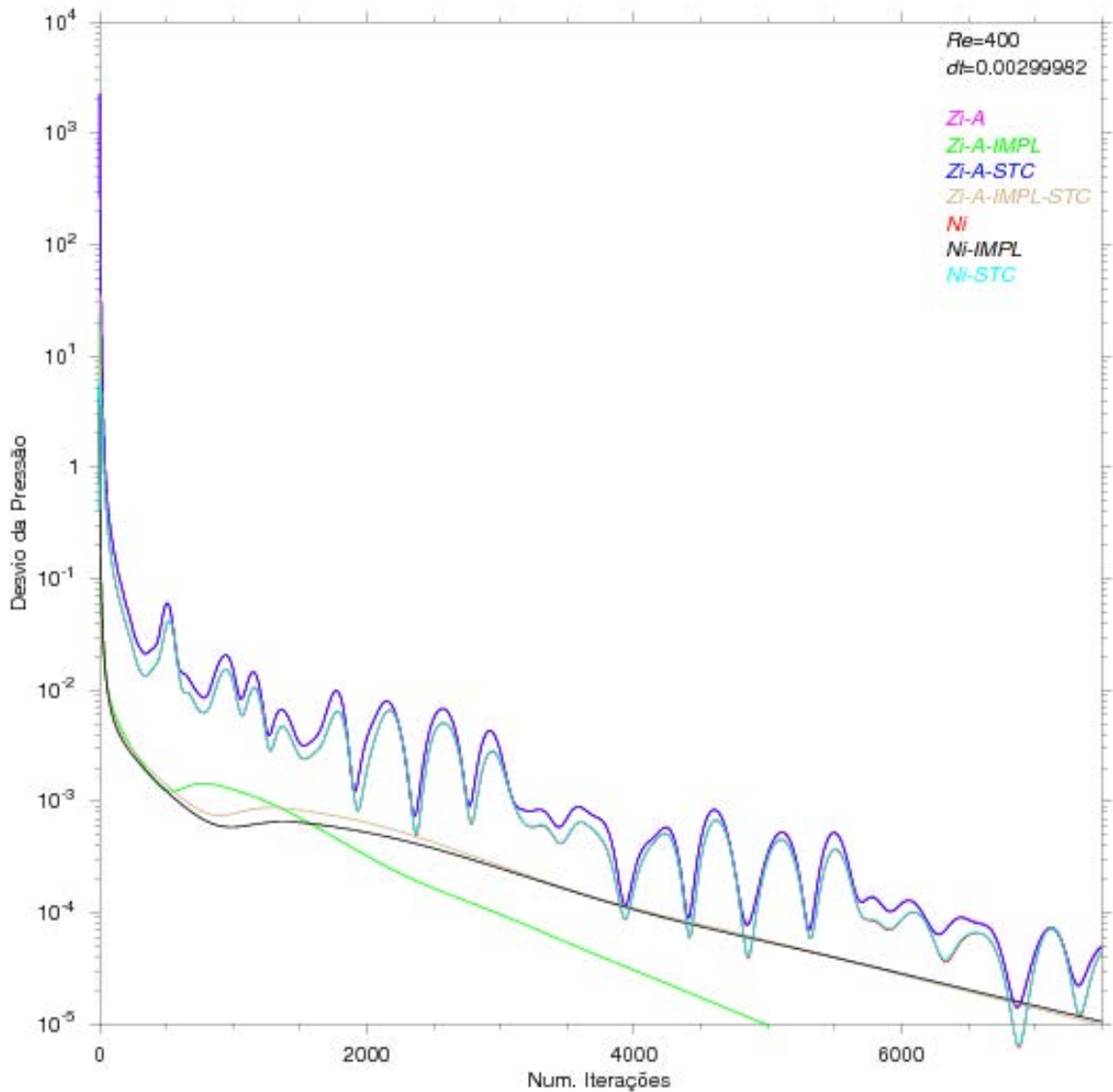


Figura 21: Comparativo dos resultados entre os métodos no desvio de pressão (Δp) ($Re=400$).

Os resultados dão uma idéia da velocidade de convergência de cada modelo e mostram a acentuada velocidade de convergência do esquema semi-implícito. Este fato pode ser verificado pelo próprio número de passos necessários para atingir um erro de 10^{-5} . Para o esquema semi-implícito são necessários 5.000 passos, enquanto para o “Split-A” o valor de 7.500 passos nem sequer é suficiente.

Esta diferença se justifica pela própria forma como a convergência ocorre, enquanto no semi-implícito ela se dá de forma monotônica, no caso do “Split-A” ela se dá de forma oscilante. Cabe destacar entretanto que a Figura 21 não é capaz de garantir a qualidade da solução, uma vez que o fato de um esquema reduzir a sua variação não garante que ele chegou à solução correta. Este é o caso, por exemplo, do esquema Nithiarasu, que embora tenha atingido um nível de oscilação baixo não foi capaz de se aproximar da solução de referência como os demais, como foi mostrado pelas figuras anteriores.

Analisando-se apenas as isocurvas não se verificam grandes diferenças entre os resultados para as diversas formulações anteriores e, por conta disto, serão apresentados resultados apenas de um caso. Estes resultados para vetores de velocidades, isobáricas e isocurvas de função corrente estão apresentados nas Figuras (22) a (24).

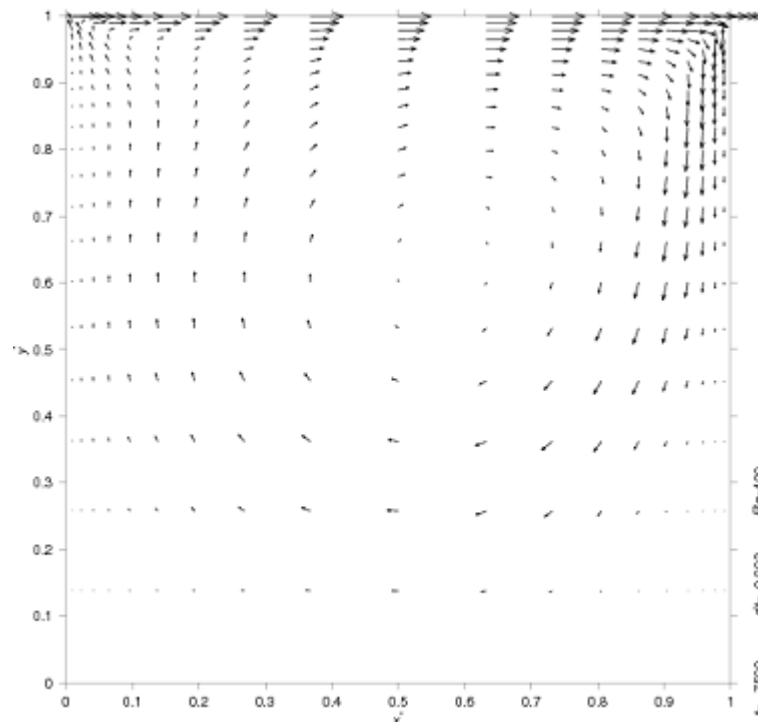


Figura 22: Perfil de velocidade ($Re=400$)

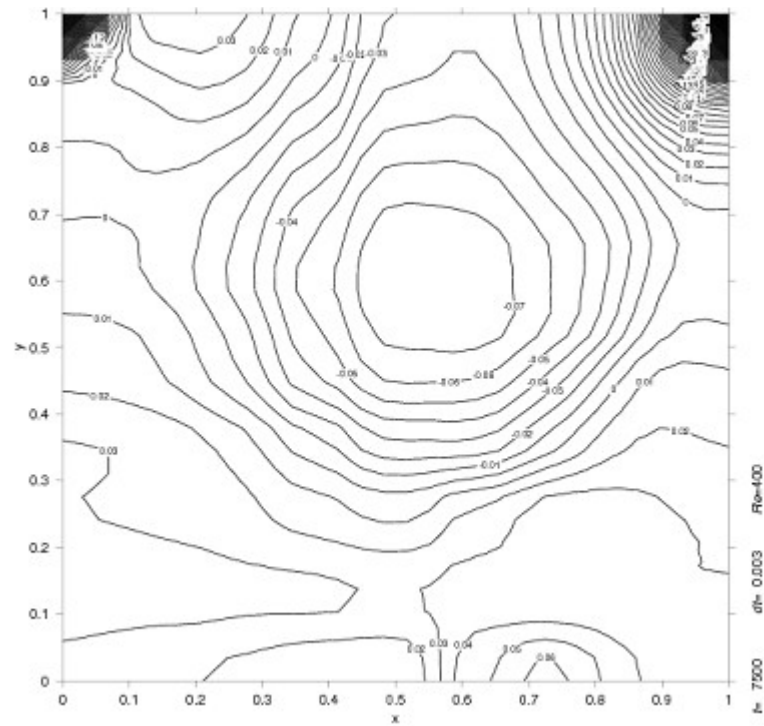


Figura 23: Perfil de Pressão ($Re=400$)

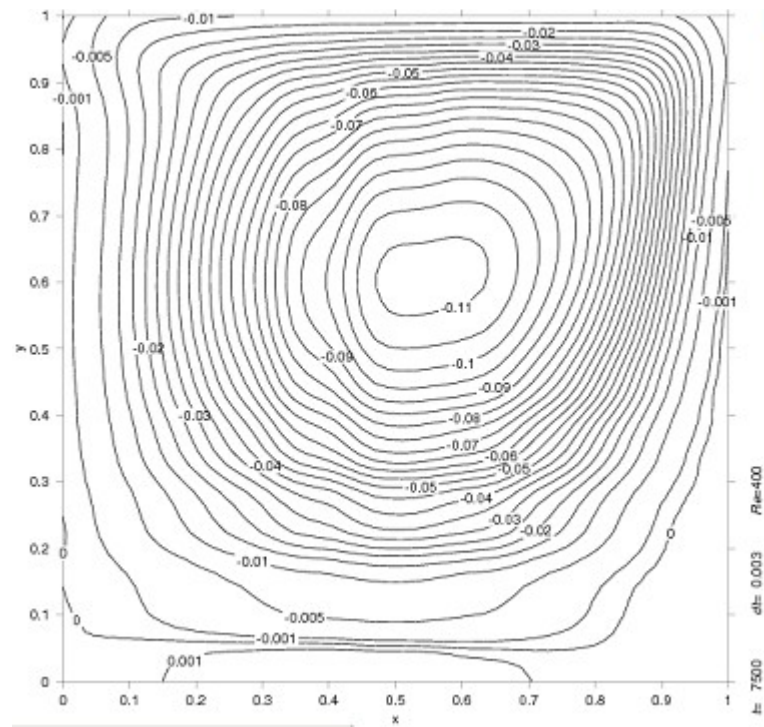


Figura 24: Linhas de Contorno da Função Corrente ($Re=400$)

4.1.2 – Resultado para número de Reynolds = 100

Para a solução do $Re=100$ foi utilizado um incremento de tempo ($\Delta t=0,0013332$) que corresponde a 40% do máximo incremento de tempo possível. Os perfis são apresentados para cada 1.000 incrementos de tempo. Ao contrário do que ocorre em $Re=400$ e $Re=1.000$, com $Re=100$, todos os métodos chegam à convergência e apresentam resultados praticamente iguais.

As curvas permanecem estabilizadas nos resultados no incremento de tempo de 6.000, para o $Re=100$. Portanto a comparação das respostas obtidas para regime permanente para todas as combinações de esquemas e discretizações foi incluída em um único gráfico e podem ser visualizados nas Figuras 25 e 26, para os perfis de velocidades v e u , respectivamente.

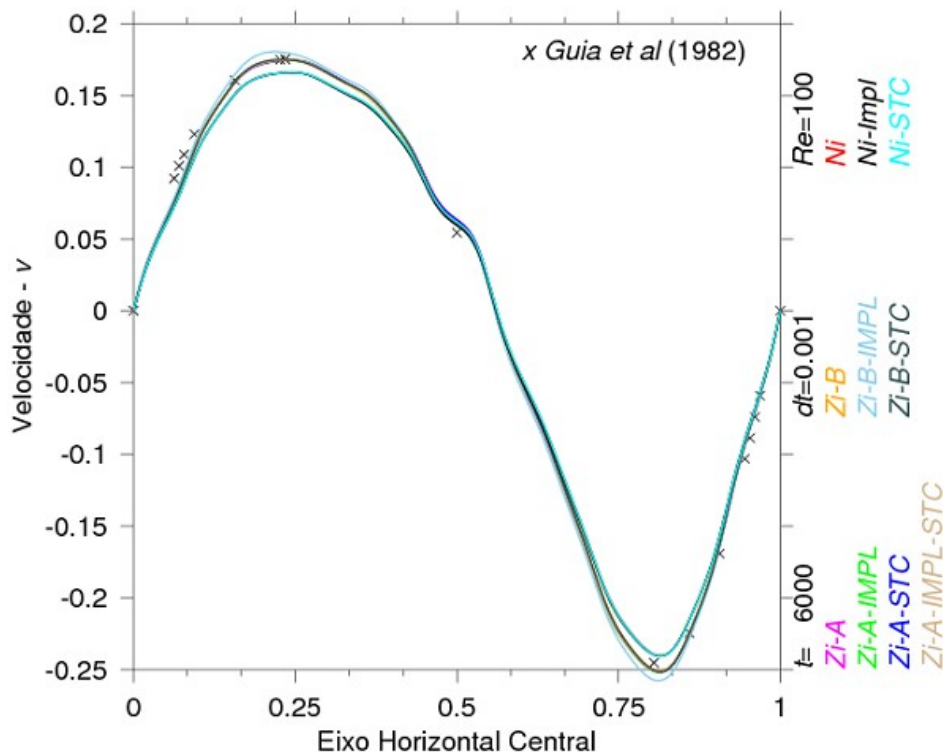


Figura 25: Comparação dos resultados entre os métodos – v_x – ($Re=100$)

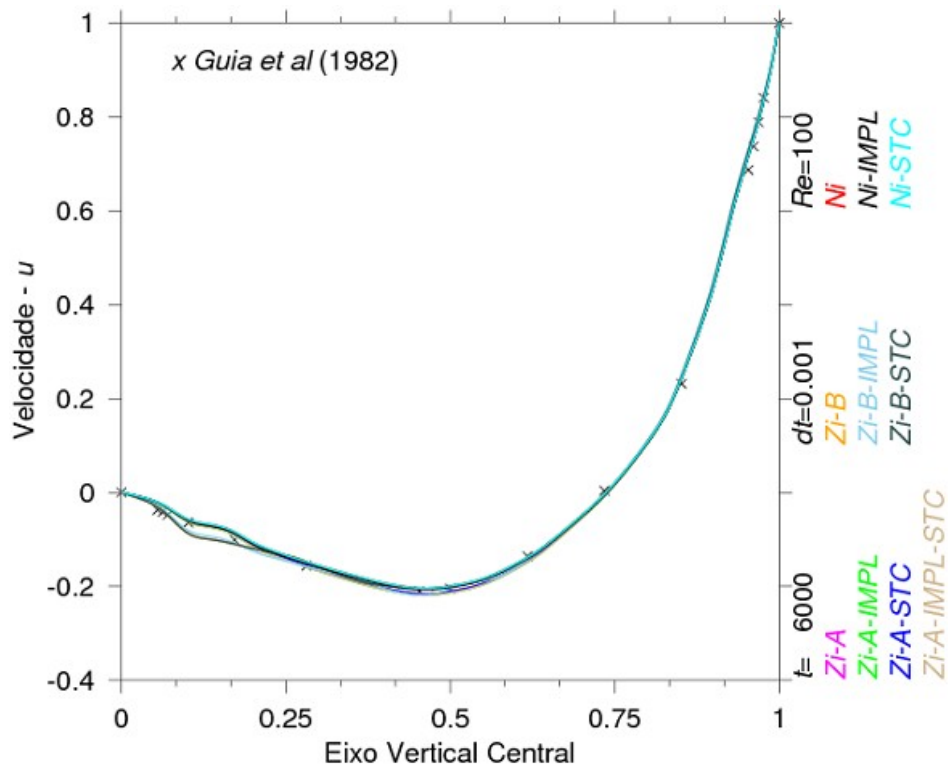


Figura 26: Comparação dos resultados entre os métodos - u_y - ($Re=100$)

Como já visto com os outros números de Re , os resultados dão uma idéia da velocidade de convergência de cada modelo. A Figura 27 apresenta o desvio médio da oscilação da pressão para os diversos casos analisados e apresentam as mesmas características que foram mencionadas para os outros números de Re . As características da solução, monotônica ou oscilante, continuam ocorrendo da mesma maneira que nos casos anteriores.

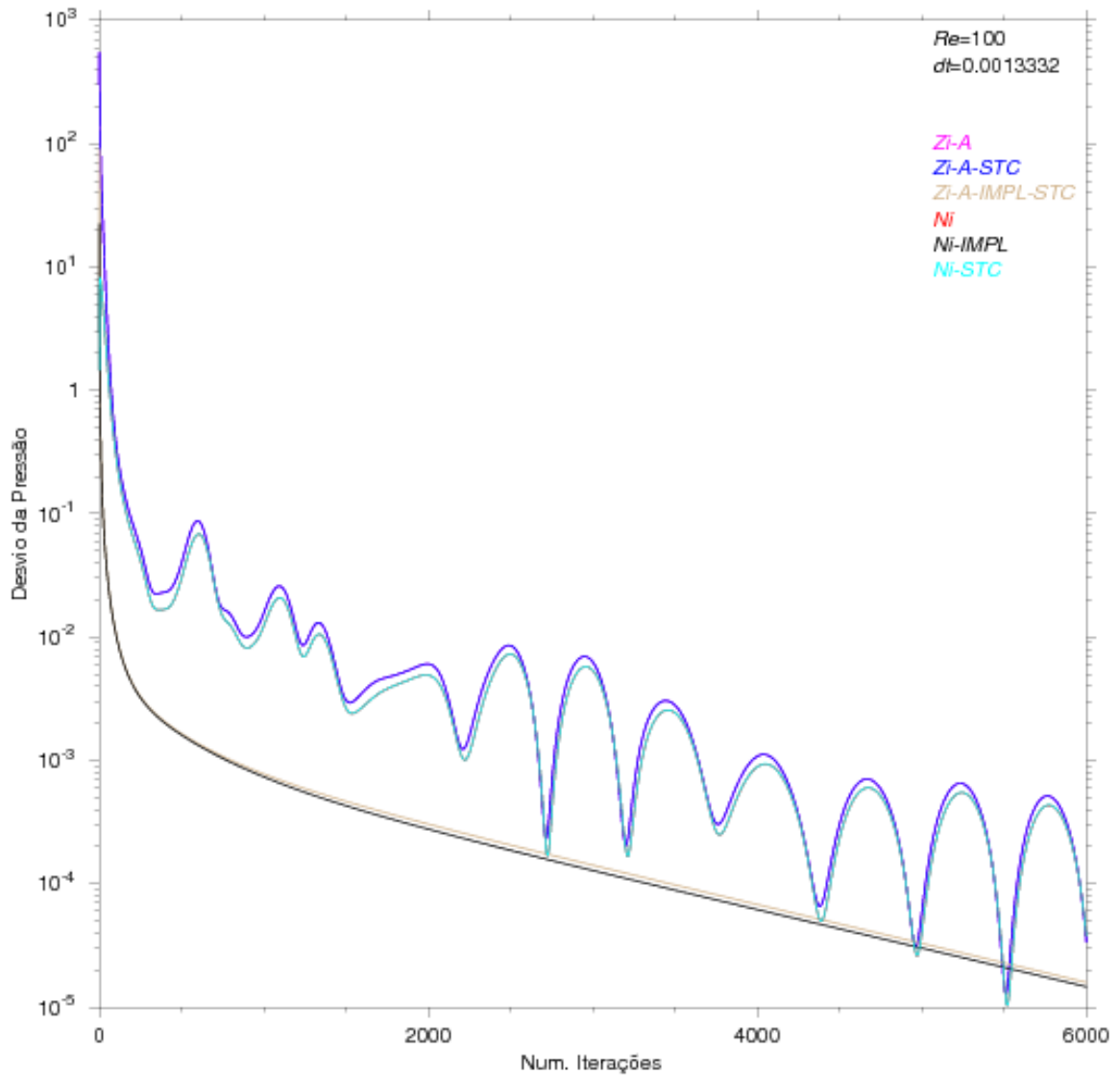


Figura 27: Comparativo dos resultados entre os métodos no desvio de pressão (Δp) ($Re=100$).

Da mesma forma analisando-se apenas as isocurvas não se verificam grandes diferenças entre os resultados para as diversas formulações, por conta disto, serão apresentados resultados apenas de um caso. Estes resultados para vetores de velocidades, isobáricas e isocurvas de função corrente estão apresentados nas Figuras 28 a 30.

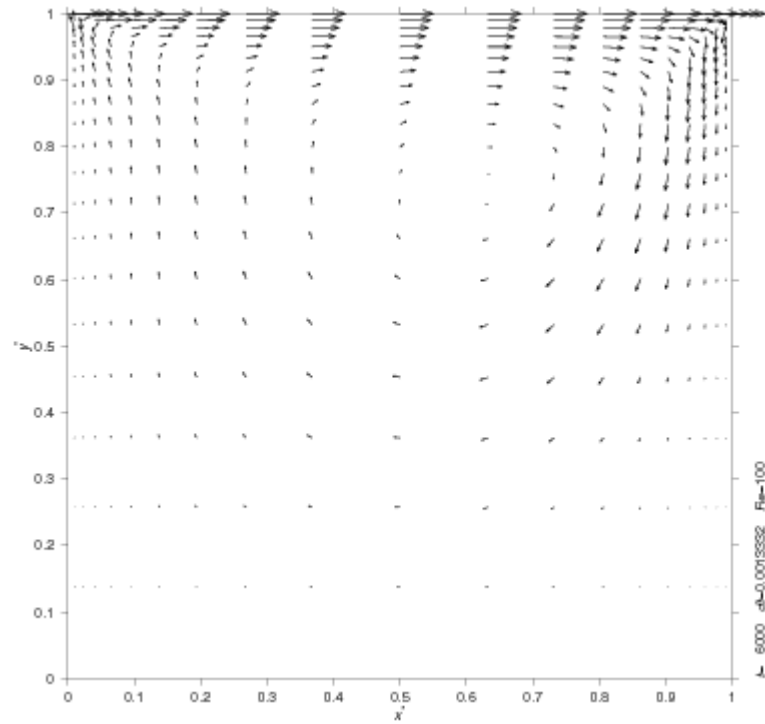


Figura 28: Perfil de Velocidade ($Re=100$)

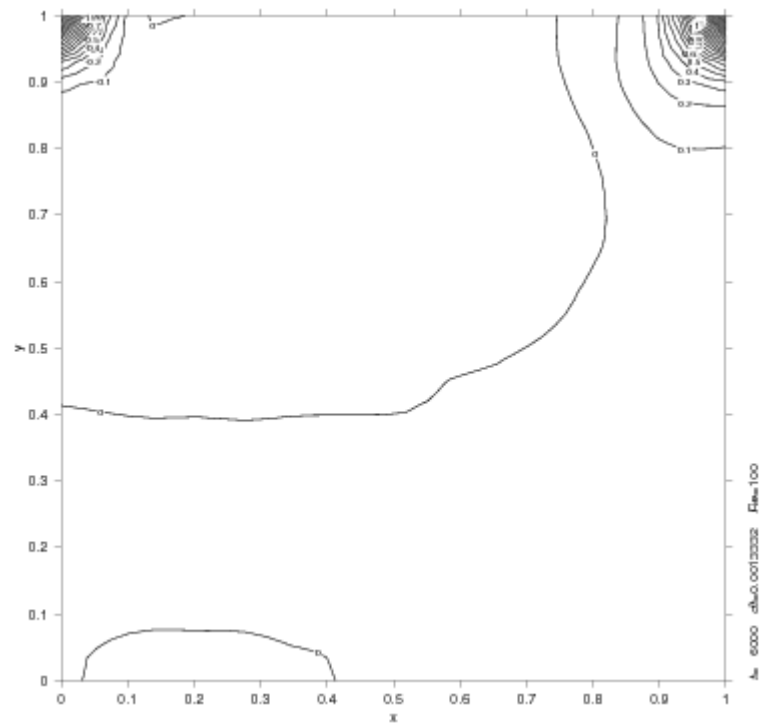


Figura 29: Perfil de Pressão ($Re=100$)

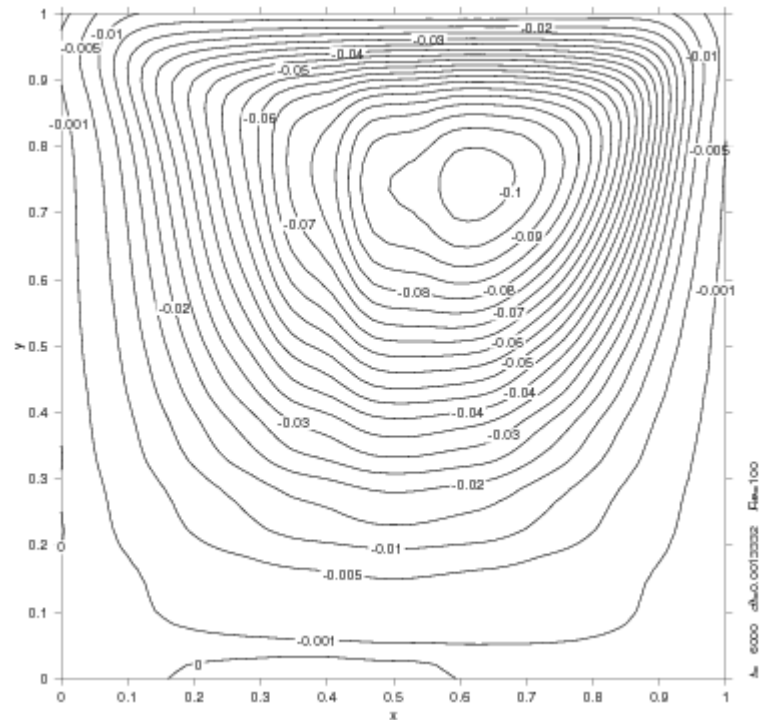


Figura 30: Linhas de Contorno da Função Corrente ($Re=100$)

4.1.3 – Resultado para número de Reynolds = 1.000

Para a solução do $Re=1.000$ foi utilizado um incremento de tempo ($\Delta t=0,002$) que corresponde a 40% do máximo incremento de tempo possível. Os perfis são apresentados para cada 2.500 incrementos de tempo. Análises e comentários idênticos aos realizados para $Re=400$ podem ser aplicados para $Re=1.000$.

Enquanto para $Re=400$ as curvas permanecem estabilizadas nos resultados no incremento de tempo de 7.500, para o $Re=1.000$ elas ocorrem no incremento de tempo 15.000. Portanto a comparação das respostas obtidas para regime permanente para todas as combinações de esquemas e discretizações foi incluída em um único gráfico e podem ser vistas nas Figuras 31 e 32, para os perfis de velocidades v e u , respectivamente.

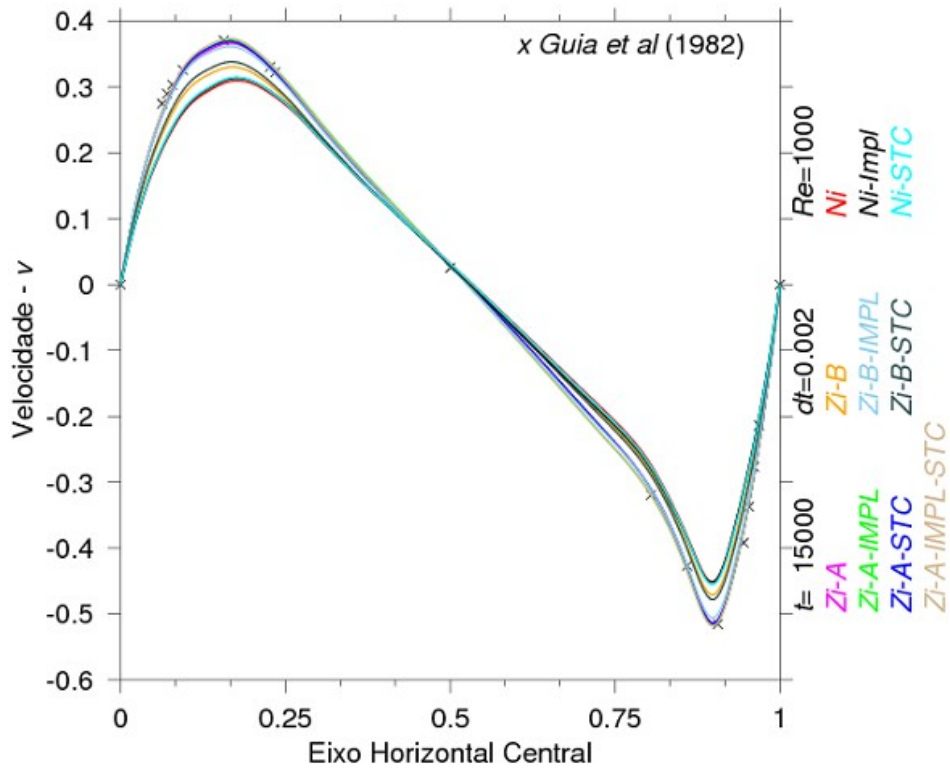


Figura 31: Comparação dos resultados entre os métodos – vx – ($Re=1.000$)

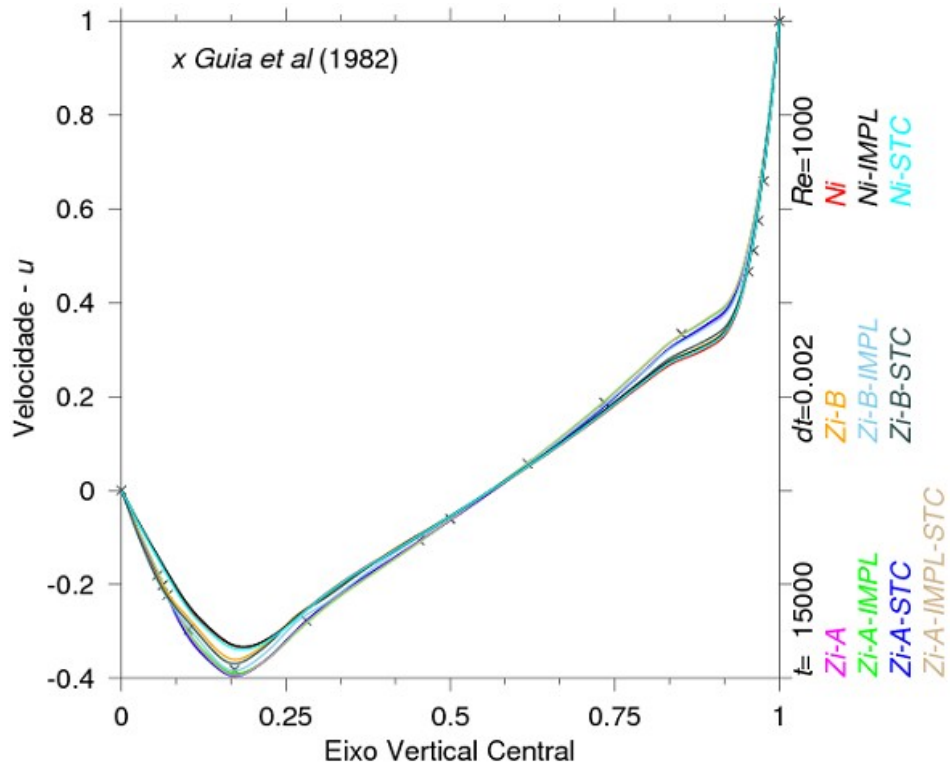


Figura 32: Comparação dos resultados entre os métodos – uy – ($Re=1.000$)

Com o número de $Re=1.000$, os resultados que dão uma idéia da velocidade de convergência de cada modelo, e podem ser vistos na Figura 27, apresentam as mesmas características que foram mencionadas para $Re=400$. As características da solução, monotônica ou oscilante, continuam ocorrendo da mesma maneira que no caso já citado.

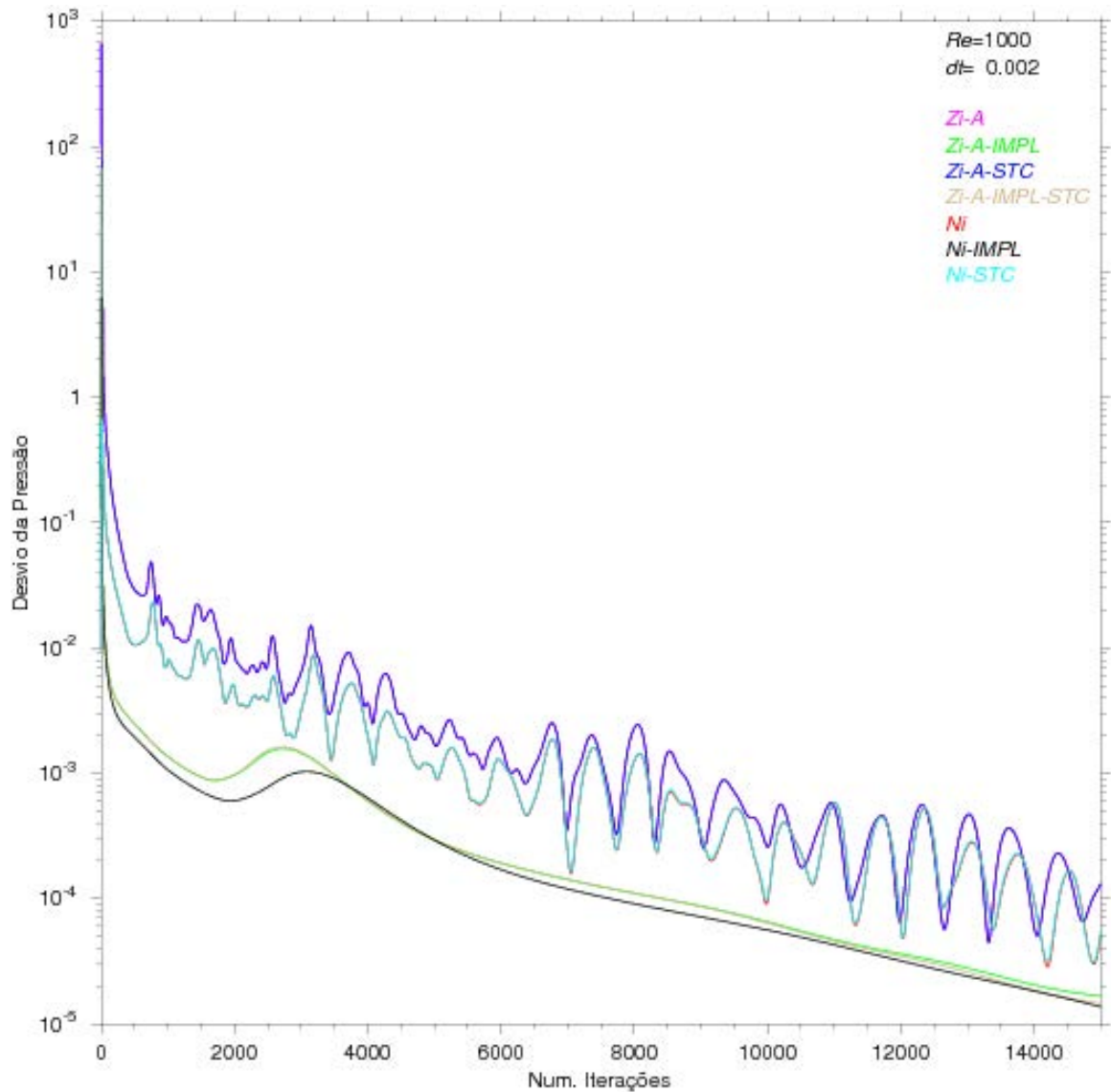


Figura 33: Comparativo dos resultados entre os métodos no desvio de pressão (Δp) ($Re=1.000$).

Da mesma forma analisando-se apenas as isocurvas não se verificam grandes diferenças entre os resultados para as diversas formulações, por conta disto, serão apresentados resultados apenas de um caso. Estes resultados para vetores de velocidades,

isobáricas e isocurvas de função corrente estão apresentados nas Figuras (34) a (36). Os resultados apresentados, da mesma forma que no caso anterior são equivalentes, em termos qualitativos, aos encontrados na literatura.

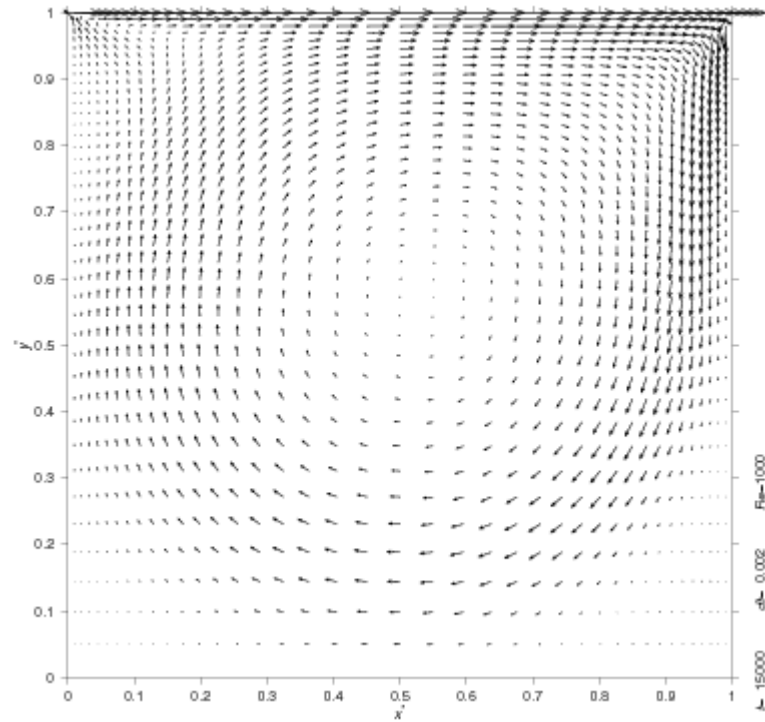


Figura 34: Perfil de Velocidade ($Re=1.000$)

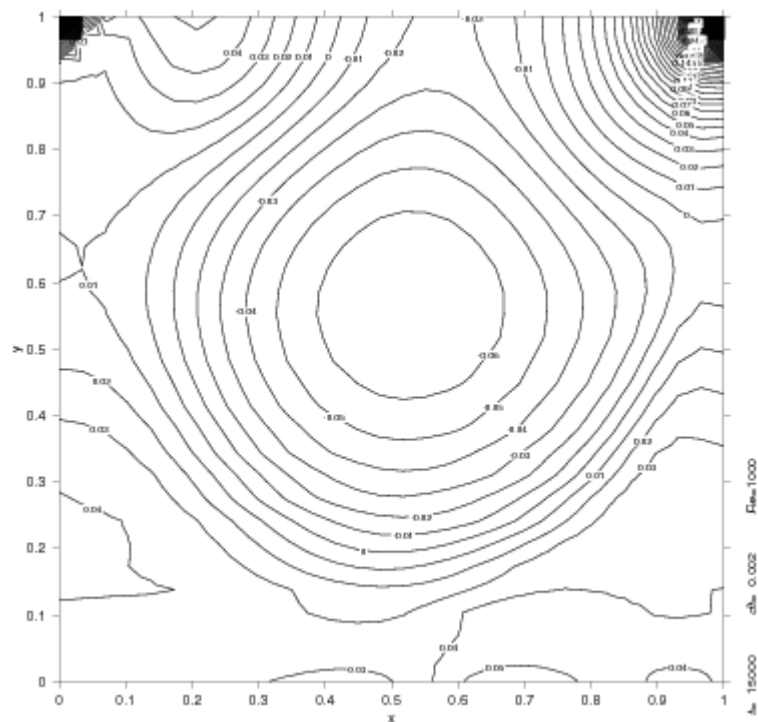


Figura 35: Perfil de Pressão ($Re=1.000$)

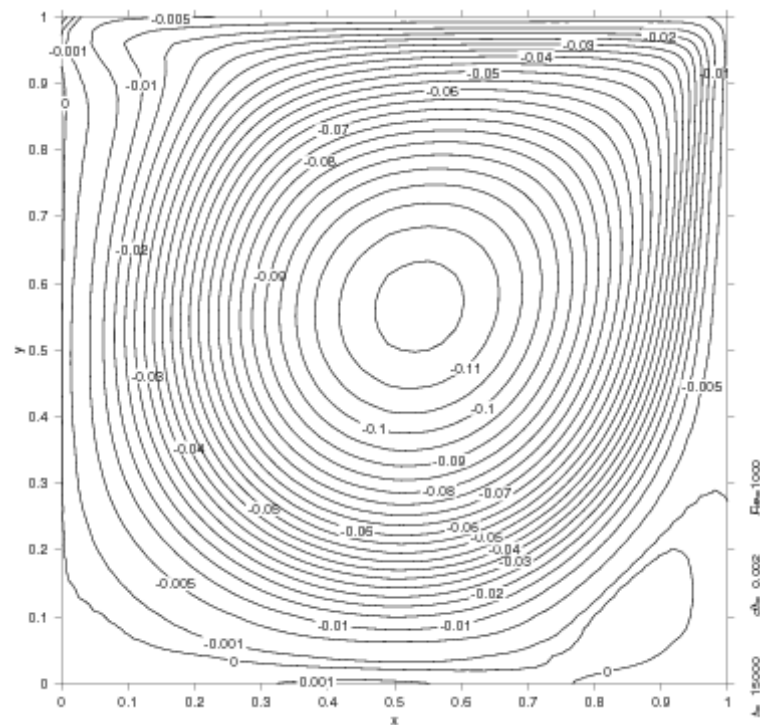


Figura 36: Linhas de Contorno da Função Corrente ($Re=1.000$)

4.2 – Análise do tempo necessário para execução do problema

Para obtenção dos resultados é necessário realizar o cálculo das equações utilizando um programa, no caso o GNU-Octave (2007) que demanda uma certa quantidade de tempo para executar as rotinas e gerar os arquivos de dados. Deste modo, neste tópico, estará sendo apresentado uma breve análise do consumo de tempo, utilizando como referência o método de Zienkiewicz – Split A – Explícito para $Re=100$ utilizando uma malha de 21×21 .

A Figura 37 apresenta a distribuição do tempo consumido considerando apenas um passo. A divisão foi realizada em três etapas conforme segue:

- cálculos iniciais: compreende a divisão dos pontos que formam a malha com suas respectivas coordenadas, conectividades e condições de contorno; o cálculo do incremento de tempo e a montagem das matrizes auxiliares iniciais. Esta etapa é somente realizada uma vez durante a rotina.

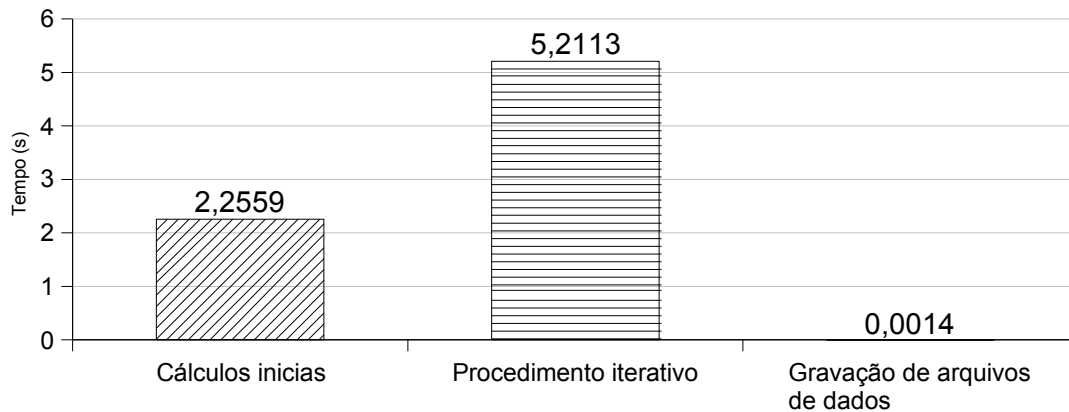


Figura 37: Divisão do tempo para rodar o programa na plataforma Gnu-Octave, considerando 1 incremento de tempo para “Zienkiewicz – Split A” para $Re=100$ em um computador Atlon XP 1900+ com 256Mb

- procedimento iterativo: compreende o cálculo da variação da velocidade auxiliar, a variação de pressão e posteriormente a variação da velocidade, montando suas respectivas matrizes e a solução das equações diferenciais apresentadas na metodologia deste presente trabalho. Esta etapa é realizada diversas vezes durante a rotina, dependendo da quantidade de passos necessários para a obtenção da estabilização dos resultados.
- gravação de arquivos de dados: compreende a gravação dos arquivos de dados para a geração dos gráficos e análises dos resultados. Por motivo de segurança e acompanhamento optou-se por atualizar os arquivos a cada 25 passos e gravação da cópia de análise a cada 1.000 passos para $Re = 100$ e 2.500 passos para Re superiores .

Conforme pode-se perceber da Figura 37, o procedimento iterativo é responsável pelo consumo da maior parcela de tempo, uma vez que abriga a maioria dos procedimentos mais complexos. Um complicador deste fato é que, justamente, este passo é o que precisa ser repetido por inúmeras vezes. Desta forma, o número de passos multiplicado pelo tempo de cada iteração será o indicador fundamental do tempo necessário para que o programa se complete.

Um detalhamento de qual parcela do tempo é utilizada em cada tarefa do procedimento iterativo pode ser vista na Figura 38. Esta etapa pode, ainda, ser subdividida em outras três partes:

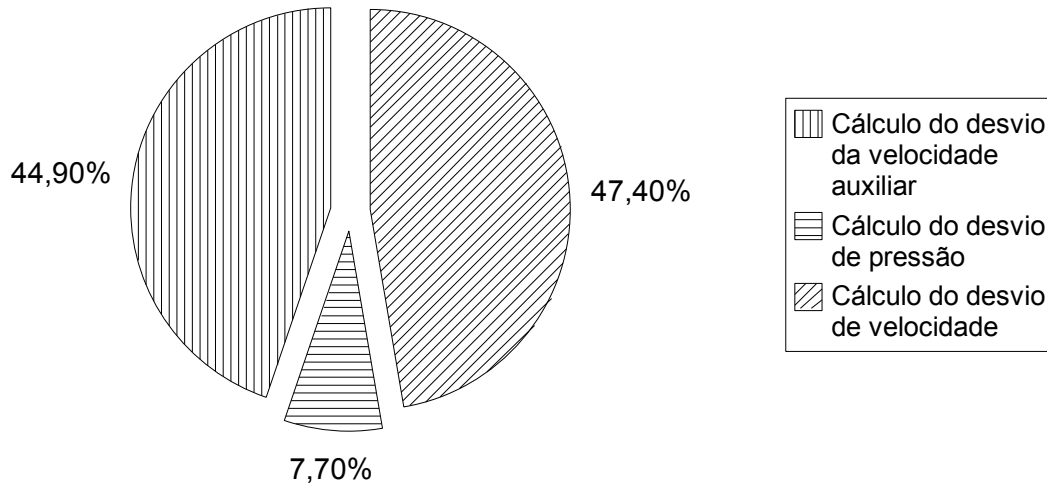


Figura 38: Divisão percentual do tempo para o cálculo das sub rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para $Re=100$

- cálculo da variação da velocidade auxiliar: compreende a montagem das matrizes auxiliares necessárias para a solução da equação da quantidade de movimento e as operações entre elas. Corresponde ao passo 1 do procedimento apresentado na metodologia.
- cálculo da variação de pressão: compreende a montagem das matrizes auxiliares necessárias para a solução da equação da variação de pressão e as operações entre elas. Corresponde ao passo 2 do procedimento apresentado na metodologia.
- cálculo da correção da velocidade: compreende a montagem das matrizes auxiliares necessárias para a solução da equação de correção da variação de velocidade e as operações entre elas, atualização dos valores de velocidade e pressão. Corresponde ao passo 3 do procedimento apresentado na metodologia.

Uma análise desta figura mostra que a maior parte do tempo é tomada para a montagem das matrizes globais para os passos 1 e 2. Nota-se que, estes deveriam ser os principais alvos de qualquer ação no sentido de redução de tempo de processamento. Em função disto estes dois passos também foram subdivididos buscando uma melhor identificação dos gargalos. O cálculo do desvio da velocidade auxiliar, passo 1, que representa 44,9% da Figura 38, está apresentado na Figura 39, e subdividido em:

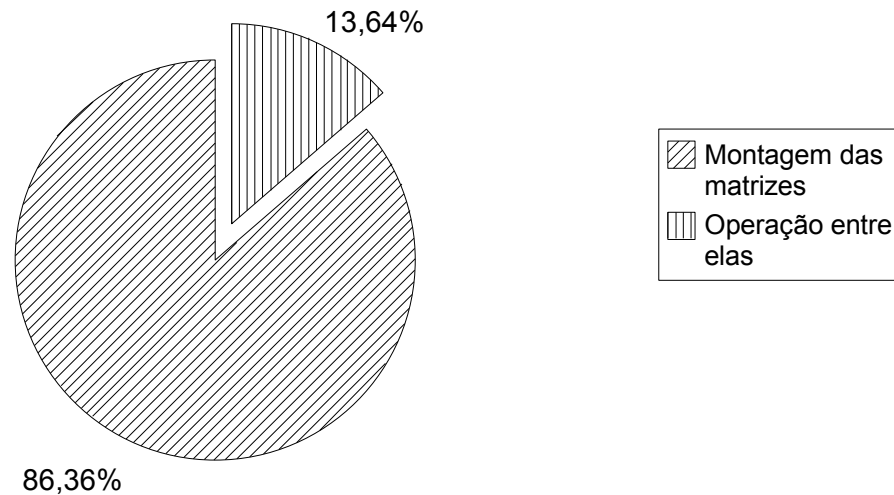


Figura 39: Divisão percentual do tempo para o cálculo do “Passo 1” da rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para $Re=100$

- montagem das matrizes: compreende o cálculo e a atualização das matrizes.
- operações entre elas: compreendendo a solução do sistema de equações.

Para este caso apresentado na Figura 39 os cálculos e a montagem da matriz global são os principais consumidores de tempo de CPU. Embora, não tenham sido feitos testes adicionais, técnicas alternativas para a montagem da matriz global poderiam ser muito eficazes na redução do tempo necessário para o processo de solução. O passo 2, ou a etapa de cálculo do desvio de pressão, que representa 7,7% da Figura 38, apresentado na Figura 40, também foi subdividido em:

- montagem das matrizes: compreende o cálculo e a atualização das matrizes.
- operações entre elas: solução da equação.
- cálculo do indicador do desvio de pressão.

A análise desta etapa apresenta resultados similares ao do passo 1, apresentando como uma etapa de grande consumo de tempo a de montagem de matriz. Entretanto, este passo apresenta também uma outra etapa como a maior consumidora de tempo o cálculo do desvio de pressão, que apenas serve para avaliar a convergência do modelo e, por conta disto, não tem a necessidade premente de ser calculado em todas os intervalos de tempo. Procedimentos de cálculo deste parâmetro alternados no tempo seriam capazes de reduzir o tempo final necessário para a sua conclusão de maneira significativa.

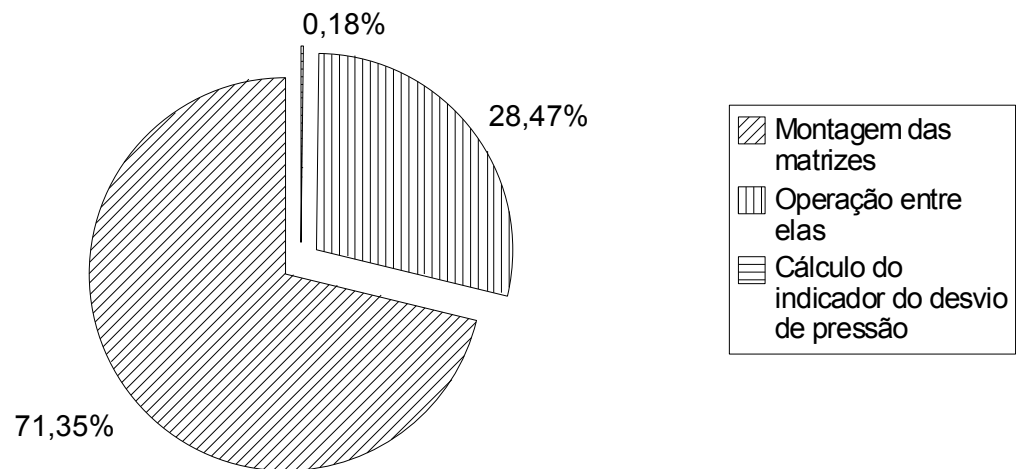


Figura 40: Divisão percentual do tempo para o cálculo do “Passo 2” da rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para $Re=100$

O cálculo da correção da velocidade, passo 3, que representa 47,4% da Figura 38, que está apresentado na Figura 41, tem também a maior parte do tempo tomado na montagem da matriz. Para a sua apresentação o mesmo foi dividido em:

- montagem das matrizes: compreende o cálculo e a atualização das matrizes.
- operações entre elas: solução da equação.
- atualização dos valores de velocidade e pressão. Tempo muito pequeno representando menos de 0,01% do total consumido.

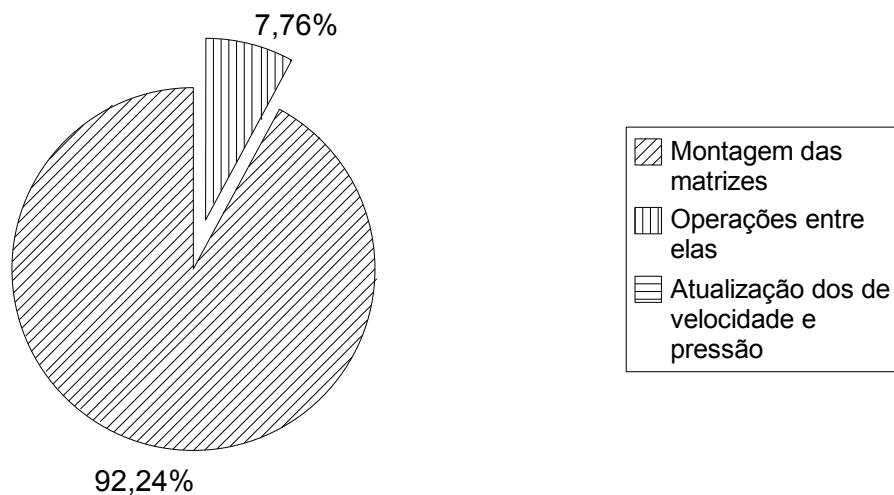


Figura 41: Divisão percentual do tempo para o cálculo do “Passo 3” da rotinas em “Zienkiewicz – Split A” para $Re=100$

V – Conclusões e propostas de trabalhos futuros

O desenvolvimento do modelo numérico, montagem das subrotinas, a implementação de diversas condições de teste aliadas a análise dos resultados permitiram concluir que:

- Todos os métodos implementados no trabalho apresentaram-se adequados à solução do problema com resultados satisfatórios e convergiram para próximo da solução do problema da cavidade recirculante apresentada por Ghia, Ghia e Shin (1982).
- A análise dos resultados para escoamentos menos intensos, como com $Re=100$, indicam que todos os métodos apresentados foram capazes de solucionar o problema com pequenas diferenças entre si. Estas diferenças somente são perceptíveis nos pontos mais críticos da curva de comparação “velocidade v_x eixo horizontal central”.
- Para os escoamentos com $Re=400$ e $Re=1.000$, os resultados obtidos para os diversos modelos já apresentaram uma maior diferença entre si. Os resultados mostram que os métodos baseados no “Split-A” apresentaram, de maneira geral, resultados próximos da solução encontrada na literatura. Do “Split-B”, apenas o esquema semi-implícito foi capaz de repetir o desempenho do “Split-A”. Os demais esquemas – “Split-B” e de Nithiarasu (2003) apresentaram resultados mais afastados da solução esperada nas mesmas condições de malha.
- O esquema semi-implícito, geralmente, convergia para a solução com um menor número de incrementos de tempo que os demais casos.
- Todos os modelos testados com o método semi-implícito, apresentaram curvas de convergência para desvio de pressão monotônicas, enquanto

nos métodos explícitos essas curvas se apresentaram de forma oscilantes. Convergências oscilantes complicam o estabelecimento de critérios de parada.

- Para os valores de Re testados, a omissão dos termos característicos das equações que descrevem a solução do problema não redundam em diferenças significativas nos resultados.
- Os resultados para a velocidade vertical v são, em geral, mais sensíveis à mudança do esquema utilizado que os da velocidade horizontal u .
- Analisando-se apenas as isocurvas, para o mesmo valor de Re , não se verifica grandes diferenças qualitativas entre os resultados nos diversos esquemas e formulações.
- A análise do tempo de cada etapa de solução mostrou que a montagem das matrizes é responsável pela maior parte do consumo de tempo de processamento utilizando-se os “scripts” do GNU-Octave (2007).

Da experiência adquirida durante a execução deste trabalho, surgiram alguns tópicos que, embora não tenham sido ainda realizados, poderiam trazer flexibilidade ao programa e/ou permitir avaliações importantes. Para tanto, sugere-se como futuros trabalhos a abordagem dos tópicos:

- A análise da influência do refinamento da malha nas variantes analisadas nos parâmetros de solução.
- Implementação e aplicação das condições de contorno para condições onde exista fluxo de massa de entrada e saída num volume de controle.
- Realizar testes com novas formas implementação com o objetivo de reduzir o tempo necessário para execução do programa.
- A implementação e aplicação de modelos de turbulência, permitindo ao código computacional resolver uma maior gama de problemas.
- Implementação da equação da energia, de maneira a permitir a solução de problemas de convecção natural e forçada.
- Testar outros métodos de estabilização além do método das características, como o SUPG, e verificar o comportamento de solução.
- Avaliar a influência do uso de elementos de maior e menor ordem, como os triangulares, no desempenho da solução.

VI – Referências Bibliográficas

DHATT, G. E TOUZOT, G.. *The Finite Element Method Displayed*, . Ed. J. Wiley & Sons, 1984.

ERTURK, E., Lid Driven Cavity Flow. Disponível em <<http://www.cavityflow.com>>. Acesso em junho/ 2007.

GHIA, U. GHIA, K.N. SHIN, C.T. , High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, v. 48, 387-411, 1982.

GNU-OCTAVE, Octave. Disponível em <<http://www.gnu.org/software/octave/>>. Acesso em 13 jun./ 2007.

KELLEY, D. E GALBRAITH, P., GRI. Disponível em <<http://gri.sourceforge.net/>>. Acesso em 13 de jun./ 2007.

LI, X. DUAN Q. , Meshfree iterative stabilized Taylor-Galerkin and characteristic-based split (CBS) algorithms for incompressible N-S equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, v. 195, 6125-6145, 2006.

LIU, C.B. NITHIARASU, P., Explicit and semi-implicit characteristic based split (CBS) schemes for viscoelastic flow calculations, *Proc. of European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD)*, 2006.

MASSAROTTI, N. ARPINO, F. LEWIS, R.W. NITHIARASU, P. , Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 66, 1618-1640, 2006.

MASSAROTTI, N. NITHIARASU, P. ZIENKIEWICZ, O.C. , Characteristic-based-split (CBS) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 8, 969-990, 1998.

NITHIARASU, P. , An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split(CBS) scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 48, 1415-1428, 2005.

NITHIARASU, P. , An efficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows, *Int. J. for Numer. Meth. Engng.*, v. 56, 1815-1845, 2003.

NITHIARASU, P. CODINA, R. ZIENKIEWICZ, O.C. , The Characterist-Based Split (CBS) scheme - a unified approach to fluid dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 66, 1514-1546, 2006.

NITHIARASU, P. LIU, C.B. , An artificial compressibility based characteristic based split (CBS) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 195, 2961–2982, 2006.

NITHIARASU, P. MATHUR, J.S. WEATHERILL, P. MORGAN, K. , Three-dimensional incompressible flow calculations using the characteristic based split (CBS) scheme, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 44, 1207-1229, 2004.

NITHIARASU, P. ZIENKIEWICZ, O.C. , Analysis of an explicit and matrix free fractional step method for incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 195, 5537–5551, 2006.

NITHIARASU, P. ZIENKIEWICZ, O.C. , On stabilization of the CBS algorithm: Internal and external time steps, *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, v. 48, 875-880, 2000.

NITHIASARU, P. MASSAROTTI, N. MATHUR, J.S. , Forced convection heat transfer from solder balls on a printed circuit board using the characteristic based split (CBS) scheme, *International Journal for Numerical Methods in Heat & Fluid Flow*, v. 15, 73-95, 2005.

PATANKAR, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, . Hemisphere, 1980.

SCALON, V. L., Métodos numéricos em fluido térmica, Cap. 5, pp.35 - 73, 2004.

THOMAS, C.G. NITHIARASU, P. , Influences of element size and variable smoothing on inviscid compressible flow solution, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, v. 15, 420-428, 2005.

ZIENKIEWICZ, O.C. CODINA, R. , A general algorithm for compressible e incompressible flow - Part I. The split, characteristic based scheme., *Int. J. Num. Meth. Fluids*, v. 20, 869-885, 1996.

ZIENKIEWICZ, O.C. LÖHNER, R. MORGAN, K. NAKAZAWA, S.. *Finit Elements in Fluids*, . Chichester: R.H.Gallagher et al., 1984.

ZIENKIEWICZ, O.C. NITHIARASU, P. CODINA, R. VAZQUEZ, M. ORTIZ, P. , The characteristic-based-split procedure: a efficient and accurate algorithm for fluid problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 31, 359–392, 1999.

ZIENKIEWICZ, O.C. TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method*, 5 ed.. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

Apêndice

A – Método de elementos finitos

As áreas da engenharia (mecânica dos sólidos, fenômenos de transporte, entre outras) são formadas por fenômenos físicos descritos, em sua maioria, por equações diferenciais parciais. Atualmente, o método dos elementos finitos tem se tornado o mais popular na resolução de problemas em regime permanente ou transiente, em regiões lineares ou não lineares, com domínios uni ou multidimensionais.

O processo de discretização na formulação por elementos finitos transforma as equações diferenciais parciais, suas condições de contorno e iniciais, em equações algébricas, as quais são resolvidas computacionalmente.

A finalidade deste item é apresentar os conceitos do método dos elementos finitos mais importantes e pertinentes a este trabalho, sem a pretensão de esgotar o assunto.

Será utilizado como base material preparado por Scalon (2004).

A.1 - Princípios gerais

Aproximação por funções

O princípio fundamental de elementos finitos consiste em utilizar funções polinomiais, de diferentes ordem, para aproximar a solução dentro do domínio do elemento (subdomínio do problema). Normalmente quando se tem uma determinada quantidade

expressa em termos de uma variação, espacial ou temporal, pode-se determinar uma equação de aproximação. A qualidade desta aproximação pode ser determinada através de um desvio expresso por:

$$e(x) = u(x) + u_{ex}(x) \quad (175)$$

sendo $e(x)$ o desvio, $u(x)$ a aproximação e $u_{ex}(x)$ o valor exato desta aproximação para este mesmo ponto.

Estão sendo utilizadas neste trabalho as expressões propostas por Zienkiewicz e Taylor (2000) e Nithiarasu (2003), que foram descritas anteriormente.

Aproximação nodal

Este mesmo procedimento pode ser utilizado para expressar uma função para uma variável genérica em função dos pontos nodais.

Imagine que se tenha um domínio qualquer e se conheça os valores de uma função qualquer em pontos determinados. Pode-se montar uma função que represente o comportamento da variável em função do seu valor nestes pontos. Para uma função $u(x)$ tem-se que para uma série de pontos nodais x_1, x_2, \dots, x_n os valores da função são, respectivamente, u_1, u_2, \dots, u_n . Pode-se desta forma fazer a aproximação nodal:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n \quad (176)$$

ou ainda, numa forma matricial:

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x)] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = [N] u \quad (177)$$

sendo N_i chamada de função de interpolação (interpolation function).

Assim sendo, é possível notar que:

- como $u(x_i) = u_i$, as funções de interpolação assumem os valores:

$$N_j = 0(x_i), \quad \text{se } i \neq j \quad \text{e} \quad N_j = 1, \quad \text{se } i = j \quad (178)$$

- o erro da aproximação nos pontos nodais é nulo.

$$e(x)=0 \quad \text{se } x=x_i \quad (179)$$

A.2 - Aproximação por elementos finitos

A construção das funções de aproximação $u(x)$ vai se tornando mais difícil a medida que o número de nós aumenta. Uma maior complexidade ainda é verificada quando o domínio V é irregular ou possui condições de contorno mais complexas. Por outro lado, as aproximações nodais de sub-domínio simplificam a obtenção da solução $u(x)$ e são extremamente fáceis de serem implementadas em um computador. Este procedimento consiste, basicamente, dos seguintes passos:

- divisão do domínio principal V em sub-domínios V^e ;
- a escolha de uma aproximação nodal adequada para cada sub-domínio, de maneira geral, depende dos pontos nodais e aproximações utilizadas nas vizinhanças. O método dos elementos finitos é apenas um tipo de aproximação nodal por sub-domínio, sendo suas características principais: a aproximação nodal dentro do sub-domínio depende apenas dos nós do próprio elemento e a aproximação elementar $u^e(x)$ deve garantir um mínimo de continuidade entre dois elementos assim como nas suas fronteiras.

Algumas definições importantes:

Nós: são os pontos do sub-domínio onde a função é avaliada;

Coordenadas nodais: são as coordenadas geométricas dos pontos avaliados.

Variáveis nodais: são valores da função de interesse, $u(x)$, nos nós.

Definição geométrica dos elementos

Imagine o problema genérico aproximado por elementos compostos pelos nós 1, 2, 3 e 4 e compreendendo o domínio total entre x_1 e x_4 . Os três elementos lineares

seriam responsáveis pelos seguintes domínios:

- Elemento 1: $V^1 \quad x_1 < x < x_2$
 - Elemento 2: $V^2 \quad x_2 < x < x_3$
 - Elemento 3: $V^3 \quad x_3 < x < x_4$
- (180)

Utilizando para cada um destes elementos de dois nós a função Lagrange tem-se que para cada elemento:

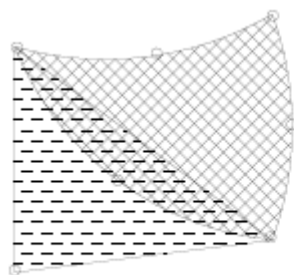
$$u^i(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (181)$$

sendo N_i dado pela expressão de Lagrange. No caso de elementos de dois nós utiliza-se apenas o polinômio de segunda ordem.

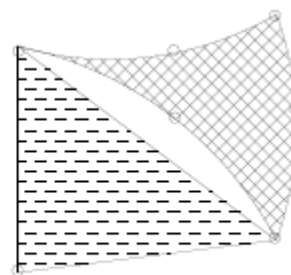
Regras para a discretização de domínios através de elementos finitos

A subdivisão de um domínio V em sub-domínios V^e deve obedecer a algumas regras:

- deve haver sempre uma fronteira comum entre os elementos adjacentes onde estarão os únicos pontos comuns entre os elementos. Estas fronteiras podem ser compostas por pontos, linhas ou áreas;
- não é permitida a existência de regiões comuns a mais de um elemento (superposição) e nem regiões dentro do domínio que não pertençam a região alguma (vão). Estas anomalias estão mostradas na Figura 41 .



(a) Superposição



(b) Vão

Figura 41: Anomalias comuns na discretização de um domínio através de malhas.

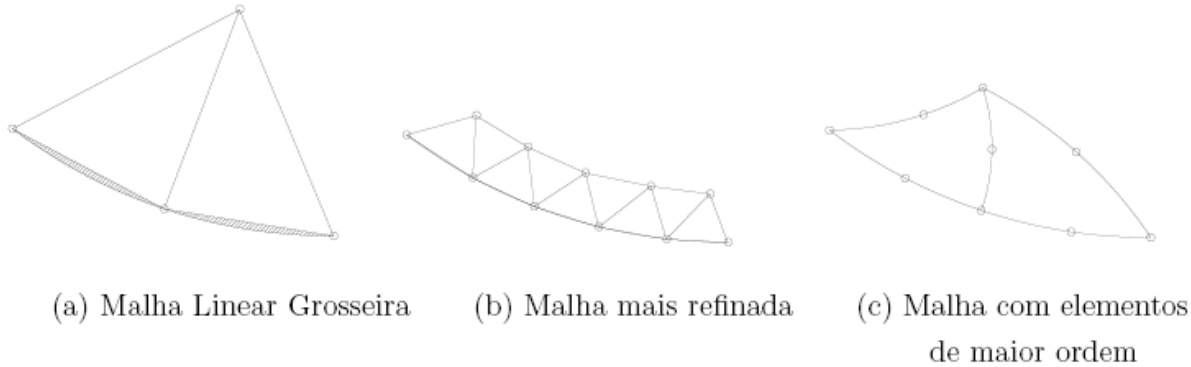


Figura 42: Erro comum na discretização do domínio.

- quando a fronteira do domínio do problema não coincide forma-se uma anomalia (vão) que acarreta em um erro que não pode ser mensurado. Entretanto, estes erros, denominados erros geométricos, podem ser minimizados utilizando-se elementos menores ou elementos de maior ordem, que melhor se adequam à fronteira. Estes procedimentos são melhor compreendidos quando se discretiza uma fronteira do tipo mostrado na Figura 42. Note que na Figura 42a a discretização é feita com elementos grosseiros e não é possível representar a fronteira de forma adequada, apresentando maiores vãos, nestas regiões. Na Figura 42b utiliza-se elementos menores e a fronteira já pode ser melhor representada. E finalmente, na Figura 42c, nota-se que foi obtida uma boa representação da fronteira mesmo com elementos mais grosseiros, desde que estes sejam de ordem superior e suas fronteiras possam ser deformadas para se ajustar ao domínio do problema.

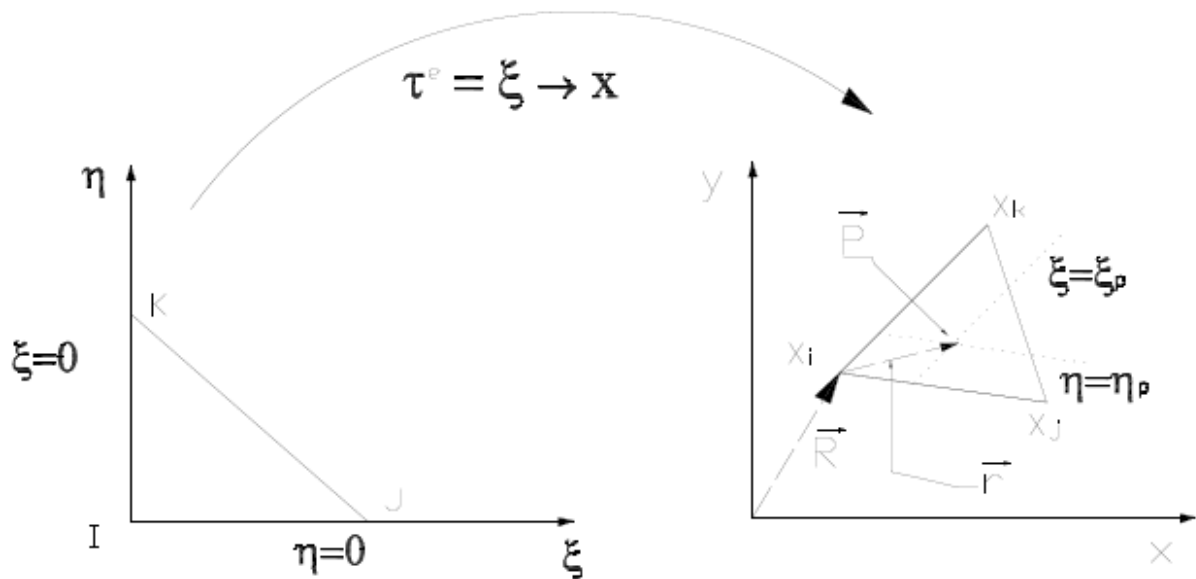


Figura 43: Transformação do domínio elementar.

A.3 - Elementos de referência

Quando se trabalha com elementos finitos existem dois tipos básicos de sistemas de coordenadas. A metodologia de elementos finitos usa ferramentas matemáticas para efetuar a transformação de um sistema de coordenadas para outro. A Figura 43 mostra o sistemas de referência para um elemento triangular. Os sistemas de coordenadas que coexistem neste caso são:

Sistema de coordenadas local: é aquele que existe dentro do elemento ideal e cujas coordenadas são expressas em termos de ξ e η .

Sistema de coordenadas global: que existe no sistema físico real e expresso em termos de coordenadas globais para todos os elementos.

Pode-se expressar a transformação de um sistema de coordenadas em outro através da expressão:

$$\tau^e: \xi \rightarrow x^e(\xi) \quad (182)$$

onde o ponto ξ representa um ponto no sistema de coordenadas local e x o ponto no sistema global.

Esta mesma expressão pode ser escrita em termos de variáveis nodais sendo

expressa na forma:

$$\tau^e: \xi \rightarrow x^e(\xi) = N(\xi)x^e \quad (183)$$

Para que esta transformação seja feita de maneira adequada são necessárias algumas condições:

- o sistema de transformação deve ser biunívoco (um ponto em cada conjunto tem correspondência a outro único ponto do outro sistema).
- cada nó local do sistema de coordenadas corresponde a um nó do sistema generalizado e vice-versa.
- da mesma forma que os nós, cada fronteira do elemento corresponde a uma fronteira global.

Neste sistema de coordenadas pode-se utilizar as próprias coordenadas para verificar as funções de interpolação. Desta forma:

$$x(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) x_i + N_2(\xi, \eta) x_j + N_3(\xi, \eta) x_k = [N] \{x\} \quad (184)$$

$$y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) y_i + N_2(\xi, \eta) y_j + N_3(\xi, \eta) y_k = [N] \{y\} \quad (185)$$

sendo N as funções de interpolação.

É possível notar que para que a transformação de coordenadas seja adequada é preciso considerar as amplitudes da transformação, assim como a múltipla composição de dimensões (η , por exemplo, apresenta derivadas tanto na direção x como y). Para corrigir este fator é necessário conhecer o Jacobiano $[J]$ da transformação. O Jacobiano é dado pela expressão:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (186)$$

É importante notar que o valor do determinante do Jacobiano resulta em duas vezes a área do mesmo.

A.4 - Propriedades das funções de aproximação importantes para o método dos elementos finitos

Propriedade Fundamental: o valor da função deve coincidir com os respectivos valores nodais. Com base na expressão geral (178):

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + \dots + N_n(x)u_n = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i \quad (187)$$

tem-se que a propriedade é atendida sobre o ponto nodal considerado j se:

$$N_j(x_i) = 0, \quad \text{se } i \neq j \quad \text{e} \quad N_j(x_i) = 1, \quad \text{se } i = j \quad (188)$$

Continuidade no elemento: as funções $N_i(x)$ devem ser contínuas em todo elemento, assim como as derivadas até a ordem s considerada.

Continuidade entre elementos: tanto os valores da função como de suas derivadas devem ser os mesmos nas fronteiras de elementos adjacentes, sejam eles calculados por um ou outro elemento.

Função polinomial completa: O erro de truncamento é minimizado com a diminuição do elemento. Por muitas outras razões é necessário diminuir o erro das derivadas e da função de aproximação. Além do mais, é necessário que para que se resolva um problema a função de interpolação possua pelo menos a mesma ordem (s) de derivadas contínuas. Caso contrário a função seria automaticamente anulada e não se conseguiria os resultados desejados para o problema.

Além disto existem algumas definições importantes que devem ser destacadas:

- se uma função é contínua pelas suas fronteiras ele é classificada com C^0 , se a função e a primeira derivada são contínuas, ela é classificada de C^1 , e assim sucessivamente.
- se a transformação de coordenadas e as funções de aproximação se utilizam das mesmas funções de interpolação, o elemento é chamado de isoparamétrico.
- se as funções de interpolação são diferentes podem haver dois tipos de

transformação:

pseudo-paramétrico: se as funções são diferentes mas utilizam a mesma base.

subparamétrica: quando as funções de interpolação da geometria são de ordem inferior à da variável de interesse.

- o número de variáveis nodais associadas a cada um dos nós de cada elemento é denominado por grau de liberdade do sistema.

A.5 - Construção das funções de interpolação

Escolha da base polinomial está diretamente associada ao número de pontos nodais do elemento, sendo que quanto maior o número de pontos, maior a base polinomial. A Tabela 2 mostra a base associada ao número de pontos do elemento.

Para a construção do polinômio é utilizada a propriedade básica da função de interpolação, ou seja, o fato de que no ponto nodal o valor resultante é igual ao próprio valor da função.

Tabela 2: Base polinomial para elementos de até duas dimensões.

Dimensão	Grau	Base polinomial	Aproximação	Nós
Base Completa				
1	1	$\langle 1 \ \xi \rangle$	linear	2
1	2	$\langle 1 \ \xi \ \xi^2 \rangle$	quadrático	3
2	1	$\langle 1 \ \xi \ \eta \rangle$	linear	3
2	2	$\langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \xi \eta \ \eta^2 \rangle$	quadrático	6
Base Incompleta				
2	2	$\langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi \eta \rangle$	quadrático	4

Sabendo que a transformação de sistemas é dada na forma:

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \langle a(x) \rangle \quad (189)$$

sendo $\langle P(\xi) \rangle$ a base polinomial e $\langle a(x) \rangle$ as variáveis generalizadas para montagem da função de interpolação. A expressão apresentada na (189) representa a aproximação generalizada, diferenciada da aproximação nodal.

A relação entre o sistema generalizado e nodal é dada pela aproximação avaliada no ponto nodal:

$$[u_n] = \begin{bmatrix} P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_n(\xi_1) \\ P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_n(\xi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_n(\xi_2) \end{bmatrix} \{a\} = [P_n] \{a\} \quad (190)$$

ou ainda invertendo a matriz dos polinômios:

$$\{a\} = [P_n]^{-1} \{u_n\} \quad (191)$$

As Expressões analíticas para as funções de interpolação podem ser obtidas a partir dos resultados anteriores com respeito a base polinomial e o vetor a . Se substituir (191) em (189), obtém-se:

$$u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{u_n\} \quad (192)$$

que implica em dizer que as funções de interpolação para a aproximação nodal:

$$u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{u_n\} \quad (193)$$

ou ainda as funções de aproximação nodal são dados por:

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \quad (194)$$

As derivadas de $u(\xi)$ podem ser obtidas diferenciando em relação a cada uma das variáveis geométricas, como no caso unidimensional:

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P_\xi \rangle \\ \langle P_\eta \rangle \end{bmatrix} [P_n]^{-1} \{u_n\} = \begin{bmatrix} \langle N_\xi \rangle \\ \langle N_\eta \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} = [B_\xi] \{u_n\} \quad (195)$$

Neste trabalho foram utilizados funções de interpolação para elemento quadrilateral de quatro nós conforme exemplo da Figura 44:

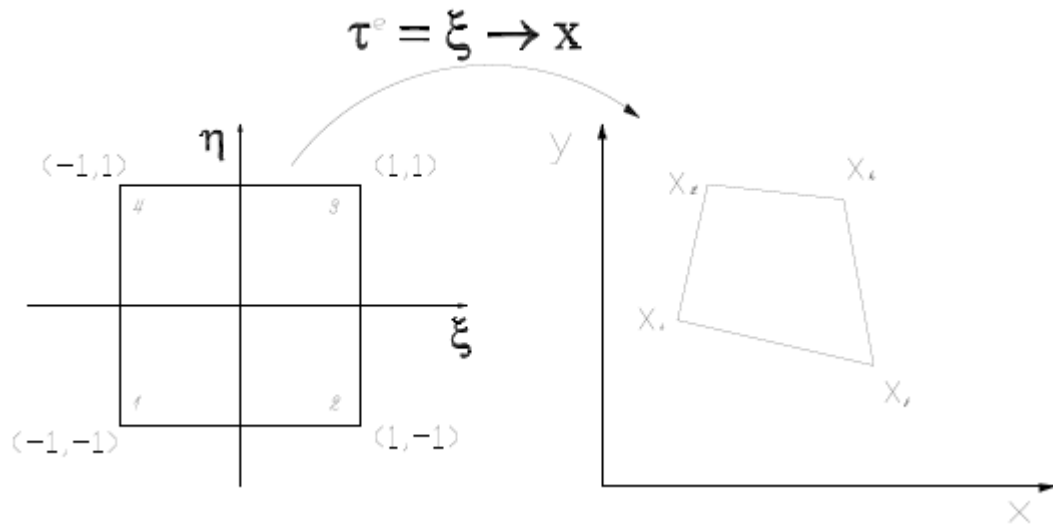


Figura 44.: Elemento bidimensional, linear e isoparamétrico.

Tomando como base o elemento de quatro nós (Figura 44), que é o utilizado neste trabalho, é preciso escolher uma base de acordo com este tamanho. Já que não existe nenhuma base completa para quatro nós a melhor escolha, que respeita as condições de simetria e inter-continuidade dos elementos pela Tabela 2 é:

$$\langle P_{\xi} \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle \quad (196)$$

A Montagem da matriz P_n , com base na avaliação da base polinomial nos quatro nós possíveis (com seus respectivos valores de ξ e η):

$$\xi = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ e } \eta = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow [P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (197)$$

Invertendo-se a matriz da expressão $[P_n]$, tem-se

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{4}[P_n]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (198)$$

Obtém-se as expressões de $\langle N \rangle$ a partir da multiplicação da base

polinomial pela inversa de [Pn], assim:

$$\begin{aligned}
 \langle N \rangle &= \langle P \rangle [P]^{-1} = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \rangle \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \langle N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta) \ N_4(\xi, \eta) \rangle \quad (199) \\
 &= \frac{1}{4} \langle 1 - \xi - \eta + \xi\eta \quad 1 + \xi - \eta - \xi\eta \quad 1 + \xi + \eta + \xi\eta \quad 1 - \xi + \eta - \xi\eta \rangle \\
 &= \frac{1}{4} \langle (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (1 + \xi)(1 - \eta) \quad (1 + \xi)(1 + \eta) \quad (1 - \xi)(1 + \eta) \rangle
 \end{aligned}$$

O elemento determinado é isoparamétrico e portanto as mesmas funções utilizadas para a interpolação de uma quantidade genérica podem ser utilizadas para as variáveis espaciais (x e y no caso deste elemento bidimensional):

$$x(\xi, \eta) = \langle N \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad y(\xi, \eta) = \langle N \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (200)$$

A.6 - Transformação de operadores diferenciais

As equações que governam os fenômenos físicos envolvem normalmente não somente as funções u , mas também as suas derivadas. Como já foi destacado, a aproximação no espaço real é sempre complexa devendo ser dada preferência para se trabalhar no domínio elementar. Isto implica na utilização das funções de aproximação no espaço ξ :

$$u_{ex} \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} \quad (201)$$

sendo possível a obtenção da solução através da transformação de coordenadas.

Normalmente a transformação é complexa, como já foi enfatizado. De qualquer forma, quando é preciso avaliar uma derivada da referida função, seja qual for a transformação desejada, esta é feita através do princípio da regra da cadeia, que numa forma

matricial poderia ser expressa por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \{\partial_{\xi}\} = [J] \{\partial_x\} \quad (202)$$

sendo [J] o Jacobiano da matriz de transformação.

De forma análoga pode-se enfatizar que transformação inversa respeita a mesma regra:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \Rightarrow \{\partial_x\} = [J]^{-1} \{\partial_{\xi}\} \quad (203)$$

Com isto é possível obter qualquer matriz de transformação, desde que esta seja biunívoca e, portanto, gere matrizes inversíveis.

No caso bidimensional temos que:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix} \Rightarrow [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{2,2} & -J_{1,2} \\ -J_{2,1} & J_{1,1} \end{bmatrix} \quad (204)$$

onde $\det[J] = J_{1,1}J_{2,2} - J_{1,2}J_{2,1}$.

Montagem do Jacobiano

Considerando a matriz de transformação de variáveis entre um espaço real x e um espaço elementar ξ tem-se que a aproximação nodal se apresenta na forma:

$$\{x \ y \ z\} = \langle N \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}] \quad (205)$$

No caso bidimensional:

$$\{x \ y\} = \langle N \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\}] \quad (206)$$

E o Jacobiano pode ser montado a partir das próprias derivadas da função:

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \{x \ y\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \eta} \end{pmatrix} [\{x_n\} \ \{y_n\}] \quad (207)$$

Transformação de uma integral

Supondo agora que se deseje realizar uma integração de uma função genérica f no domínio elementar, muito mais simples, e transformá-la para o domínio real.

Para realizar este objetivo é preciso analisar a natureza da integração. Para uma integração sobre uma determinada área no espaço real tem-se que:

$$dA = (dx \ x \ dy) \quad (208)$$

sendo:

$$\begin{aligned} dx &= J_{1,1} d\vec{\xi} + J_{2,1} d\vec{\eta} \\ dy &= J_{1,2} d\vec{\xi} + J_{2,2} d\vec{\eta} \end{aligned} \quad (209)$$

$$dA = \det[J] d\zeta d\eta \quad (210)$$

A.7 – Coordenadas nodais e conectividade

Com os nós numerados de forma sequencial de 1 até n e expresso num sistema de coordenadas global (generalizado), pode-se montar uma descrição com todos os pontos em uma tabela. No caso bidimensional devem constar na tabela o número do nó e sua respectiva coordenada x e y .

A união de alguns nós faz surgir os elementos que também podem ser numerados sequencialmente de 1 até m ($m < n$). Estes elementos podem ser descritos através do número dos nós que o compõem, e que podem ser associados ainda à tabela anterior, que possui as coordenadas dos pontos. Esta tabela que apresenta as conexões entre os nós de cada elemento é chamada de conectividade.

A formulação por elementos finitos exige alguns cuidados sendo o principal deles o fato que a mesma deve obedecer uma seqüência de conexão entre os elementos, não podendo ser apresentada em uma ordem aleatória. Normalmente é utilizado um ponto como referência inicial e um sentido de numeração, horário ou anti-horário, para expressar a conectividade.

Considerando todo o procedimento não faz diferença qual o ponto que se adota como origem para o elemento e nem o sentido de rotação, no entanto, para todos os elementos deve ser adotado o mesmo sentido de rotação.

A.8 – O método dos resíduos ponderados

Considere a resolução de um sistema físico qualquer, do qual se conhece a equação diferencial. Trata-se de uma equação em termos de derivadas parciais ou totais, linear ou não linear e de ordem n e pode ser expressa na forma:

$$\mathcal{L}(u) + f_v = 0 \quad \text{em todo domínio } V \quad (211)$$

e sujeitas as condições de contorno:

$$C(u) = f_s \quad \text{no contorno } S \quad (212)$$

sendo u a variável principal do problema e varia de acordo com a posição no espaço.

Define-se a função residual como sendo:

$$W(u) = \int_V \langle \Psi \rangle \{R(u)\} dV = \int_V \langle \Psi \rangle \{\mathcal{L}(u) + f_v\} dV \quad (213)$$

O método dos resíduos ponderados é normalmente expresso em sua forma integral:

$$\mathcal{L}(u) + f_v = 0 \quad \text{em todo domínio } V \quad (214)$$

sendo Ψ uma função peso dentre as possíveis e u a solução para o problema que satisfaz as condições de contorno $C(u)$.

Transformação Integral: integração por partes

As transformações integrais são utilizadas para reduzir a ordem das equações diferenciais. Relembrando ainda que para uma integração genérica:

$$u v = \int_V u dV + \int_V v dV \Rightarrow \int_V u dV = - \int_V v du + u v \quad (215)$$

Unidimensional:

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\psi}{dx} u dx + (\psi u) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (216)$$

Bidimensional:

$$u v = \int_V u dV + \int_V v dV \Rightarrow \int_V u dV = - \int_V v du + u v \quad (217)$$

A forma fraca da equação, obtida a partir da integração por partes mostrada anteriormente, apresenta algumas características e requisitos diferenciados:

- (a) a ordem da maior derivada de variável de interesse u é reduzida, o que relaxa a condição de continuidade necessária para a convergência;
- (b) algumas das condições de contorno aparecem diretamente na expressão geral;
- (c) reduz a ordem necessária para a função de interpolação entre os nós;
- (d) aumenta a ordem necessária para a função peso da solução.

Método de Galerkin

Existem várias opções de escolha para a função peso, sendo que cada uma pode apresentar melhores ou piores resultados de acordo com o tipo de problema a ser solucionado. Esta escolha pode ser auxiliada com a utilização de referências básicas de elementos finitos, como Dhatt, G. e Touzot, G. (1984).

No entanto existe um esquema de escolha de função peso que se destaca pela grande utilização nos mais diversos tipos de problemas. Este esquema de solução, conhecido como o método de Galerkin, se utiliza da mesma função usada na interpolação da variável

principal (u) para a função de interpolação (ψ) , ou seja:

$$\psi = \langle N \rangle \quad (218)$$

A.9 – Integração numérica

Até agora todas as integrais a serem resolvidas o foram analiticamente, no entanto não pode-se deixar de se considerar a integral numérica como ferramenta importante neste tipo de solução. Da forma já vista anteriormente pode-se dizer que a integral a ser solucionada é:

$$\int_e g(x) dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \approx \sum_{j=1}^{n_s} \omega_j \sum_{k=1}^{n_s} \omega_k G(\zeta_j, \eta_k) = \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \omega_j \omega_k G(\zeta_j, \eta_k) \quad (219)$$

Os pontos de integração são obtidos assim como a função peso para diversas geometrias sendo as mais comuns a quadratura de Gauss e o método de Newton-Cotes para elementos quadrilaterais e o método de Gauss-Radau para elementos triangulares. Existem uma série de pontos de integração escolhidos com funções peso também determinadas. Dentre estas possibilidades estão mostradas na Figura 45 as mais utilizadas que são as de 4 pontos para elementos quadrangulares e 3 pontos para elementos triangulares.

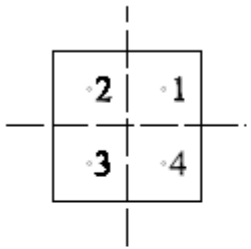
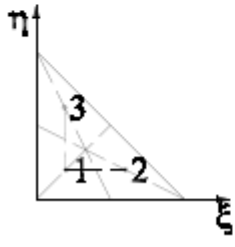
Esquema	Num. pontos	Posições	Peso
	4	$\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}$	1
	3	$1/6, 1/6$ $2/3, 1/6$ $1/6, 2/3$	1/6

Figura 45: Pontos de integração para elementos triangulares e quadrangulares.

Neste trabalho serão considerados elementos quadrangulares.

A.10 – Tratamento das condições de contorno

O tratamento das condições de contorno através do método dos elementos finitos não é uma tarefa simples, ele vem acompanhado de uma série de operações que não são imediatas. Para simplificar esta tarefa será utilizado neste estudo um tratamento, vide Patankar (1980), das condições de contorno onde é definida uma condição de contorno genérica na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha_c u + \beta_c \quad (220)$$

Esta equação é capaz de representar qualquer condição de contorno usual (das três espécies) e outras ainda podem ser aproximadas. Para esta representação é necessário que:

- **Condição de contorno da primeira espécie** onde o valor da variável

u é especificado na fronteira. Isto é possível de se obter substituindo os valores constantes em (220) por: $\alpha_c \rightarrow -\infty$ e $\beta_c \rightarrow -\infty$ e u_e sendo u_e o valor especificado para a variável u na fronteira. Este esquema pode ser facilmente explicado indicando uma tendência de para qualquer valor resultante da derivada ($\partial u / \partial \vec{n}$), o valor de u estará muito próximo do valor especificado u_e .

Uma outra possibilidade para este tipo de condição de contorno, e até mesmo mais comum no tratamento de condições deste tipo é a substituição da linha da matriz equivalente ao nó pela respectiva igualdade, ou sejam, $u_i = u_e$ onde i é o número do nó considerado.

- **Condição de contorno de segunda espécie** onde o valor conhecido é a taxa de variação, ou fluxo, da variável considerada. Neste caso substitui-se os valores em (220) por: $\alpha_c = 0$ e $\beta_c = u_e'$ onde u_e' é o valor da derivada na fronteira considerada, não se esquecendo de considerar o sinal da derivada, que deve estar de acordo com o sentido de \vec{n} .
- **Condição de contorno de terceira espécie** é uma condição típica de transmissão de calor com a condição de convecção e deve expressar a igualdade (caso em que se trata de uma fronteira final de x):

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T + \frac{h T_\infty}{k} \quad (221)$$

e se igualarmos esta expressão em (220) obtém-se que:

$$\alpha_c = -\frac{h}{k} \quad \text{e} \quad \beta_c = \frac{h T_\infty}{k} \quad (222)$$

É importante ressaltar que caso se trate de uma fronteira inicial de x , como mostrada na Figura 46, \vec{n} e \vec{i} tem direções opostas, no entanto o sinal da expressão para convecção também se inverte pela posição da fronteira. Desta forma, o resultado final é sempre o mesmo e independe de se tratar de uma fronteira inicial ou final.

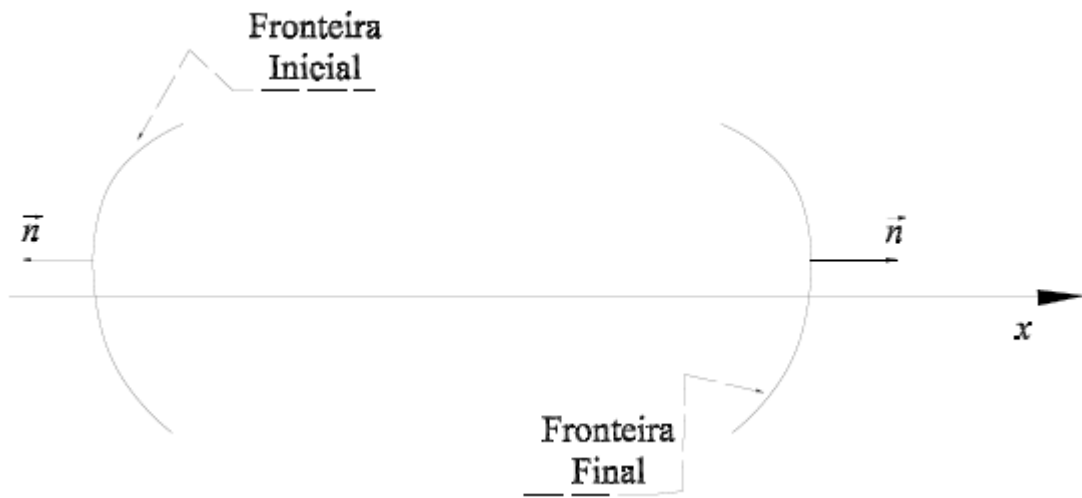


Figura 46: Tipos de fronteira para a discretização da C.C. de terceira espécie.

Neste trabalho será considerado as condições de contorno de segunda espécie.

B - Procedimento de resolução – Método Zienkiewicz – Rotinas

Passo 1: É necessário calcular as matrizes da equação (103) e substituir na fórmula. Essas matrizes são calculadas através de subrotinas no programa principal conforme segue:

Programa Principal: geral.

Subrotinas: matmass: M_u .
 matvel: C_u, K_u .
 matdifu: K_t .
 ccgrad: f.

Passo 2: É necessário calcular as matrizes da equação (126) e substituir na fórmula. Essas matrizes são calculadas através de subrotinas no programa principal conforme segue:

Programa Principal: geral2.

Subrotinas: matmass: M_p .
 matdifu: H.
 matgpr: G.
 matfppr: f_p .

Passo 3: É necessário calcular as matrizes da equação (136) e substituir na fórmula. Essas matrizes são calculadas através de subrotinas no programa principal conforme segue:

Programa Principal: geral.

Subrotinas: matmass: M_u .
 matgpr: G.
 matppr: P.

C - Procedimento de resolução – Método Nithiarasu – Rotinas

Passo 1: É necessário calcular as matrizes da equação (151) e substituir na fórmula. Essas matrizes são calculadas através de subrotinas no programa principal conforme segue:

Programa Principal: geral.

Subrotinas: matmass: M_u .
 matvel: C_u, K_u .
 matdifu: K_t .
 ccgrad: f.

Passo 2: É necessário calcular as matrizes da equação (169) e substituir na fórmula. Essas matrizes são calculadas através de subrotinas no programa principal conforme segue:

Programa Principal: geral.

Subrotinas: matmass: M_p .
 matdifu: H.
 matgpr: G.
 matfppr: f_p .

Passo 3: É necessário calcular as matrizes da equação (172) e substituir na fórmula. Essas matrizes são calculadas através de subrotinas no programa principal conforme segue:

Programa Principal: geral.

Subrotinas: matmass: M_u .
 matgpr: G.