

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

NATAN CARVALHO ROSAS QUINQUIOLO

Estados de uma partícula: uma busca pelas representações do Grupo de Poincaré

Guaratinguetá

2019

Natan Carvalho Rosas Quinquilo

Estados de uma partícula: uma busca pelas representações do Grupo de Poincaré

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física .

Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá

2019

Q7e	Quinquiolo, Natan Carvalho Rosas Estados de uma partícula: uma busca pelas representações do Grupo de Poincaré / Natan Carvalho Rosas Quinquiolo – Guaratinguetá, 2019. 48 f.: il. Bibliografia: f. 43 Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva 1. Teoria quântica . 2. Lorentz, Grupos de. 3. Lie, Grupos de. 4. Poincare, Séries. I.Título. CDU 530.145
-----	--

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

NATAN CARVALHO ROSAS QUINQUIOLO

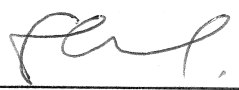
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM
BACHARELADO EM FÍSICA "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
BACHARELADO EM FÍSICA

Prof. Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira
UNESP-FEG


Prof. Dr. Denis Dalmazi
UNESP-FEG

Junho , 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, José Manoel e Deise, a minha irmã, Natália, e minha namorada, Juliana, por possibilitarem, através do apoio irrestrito e incentivo constante, que minha formação fosse concluída. A vocês todo o meu amor e carinho.

Agradeço também meu orientador e professor, Dr. Júlio Marny Hoff da Silva, por toda a competência, paciência e dedicação (muitas vezes não merecidas) desempenhadas em suas funções. A você minha mais sincera admiração.

Agradeço a todos os meus amigos, da faculdade ou não, que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Agradeço aos funcionários da instituição.

E por fim agradeço aos contribuintes que financiaram a minha formação.

*"If after every tempest come such calms,
May the winds blow till they have waken'd death."
Othello (Act II, Scene i).
(William Shakespeare)*

RESUMO

Neste trabalho estudamos, de maneira fundamental, estados de uma partícula na Mecânica Quântica através da aplicação da Relatividade Restrita via Teoria de Grupos e Teoria de Representações de Grupos. Para tanto, faz-se uma introdução as noções básicas em Tensores, bem como em Teoria de Grupos, com ênfase em Grupos de Lie e também em Teoria das Representações de Grupos de Lie. Por fim se desenvolve uma aplicação do formalismo de Teoria de Grupos em Relatividade Restrita para que seja possível descrever estados de uma partícula na Mecânica Quântica através da busca de representações irredutíveis do Grupo de Poincaré.

PALAVRAS-CHAVE: Grupo de Lorentz. Grupo de Poincaré. Wigner. Estados de uma Partícula.

ABSTRACT

In this work we studied, in a fundamental way, one-particle states in Quantum Mechanics by the application of Special Relativity through Group Theory and Representation Theory of Groups. Therefore, an introduction is made to the basic notions in Tensors, as well as in Group Theory, with emphasis of Lie Groups and also on Representation Theory of Lie Groups. Finally, an application of the Theory of Groups in Special Relativity is developed to describe the states of a particle in Quantum Mechanics through the search for irreducible Poincaré Group's representations.

KEYWORDS: Lorentz Group. Poincare Group. Wigner. One-Particle States.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	UMA BREVE INTRODUÇÃO A TEORIA DE TENSORES, GRUPOS E REPRESENTAÇÕES	10
2.1	TENSORES	10
2.2	GRUPOS E REPRESENTAÇÕES	16
3	GRUPO DE LORENTZ E GRUPO DE POINCARÉ	23
3.1	GRUPO DE LORENTZ	23
3.2	GRUPO DE POINCARÉ (QUÂNTICO)	26
4	ESTADOS DE UMA PARTÍCULA	32
4.1	BREVE INTRODUÇÃO A MECÂNICA QUÂNTICA	32
4.2	REPRESENTAÇÕES DE POINCARÉ	33
4.2.1	Grupos de isotropia	37
4.2.2	Paridade e Reversão Temporal	39
5	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICE A – TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE SIMETRIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho teve origem em um projeto de iniciação científica que tinha como propósito estudar fundamentos em Teoria Quântica de Campos via formalismo desenvolvido em (WEINBERG, 1996). No entanto, não se pode deixar de mencionar o trabalho de Wigner em (WIGNER, 1959) e (WIGNER, 1939) como fonte de inspiração. Portanto, o que se pode esperar do texto nada mais é do que a impressão do autor sobre assunto por deveras complexo, a saber, descrição de estados de uma partícula de maneira fundamental. É importante salientar que o trabalho tem como público alvo estudantes de nível de graduação interessados no assunto. Sob nenhuma hipótese ele deve ser tomado como referência na área de fundamentos em Teoria Quântica de Campos, pelo contrário, ele no máximo pode vir a ser um material complementar do estudo que deve ser feito em (WEINBERG, 1996), (DIAS, 2015), (HOFF DA SILVA, 2019), (WIGNER, 1939) e (WIGNER, 1959). Isto posto, é conveniente salientar que o trabalho foi feito e disposto de maneira que o estudante iniciante possa entender os pontos mais relevantes. No capítulo 2 será possível encontrar elementos básicos em tensores, grupos e representações de maneira que a transição para o assunto encontrado nos capítulos vindouros não seja grosseira, mas sim gradual. O objetivo do Capítulo 2 é, além de introduzir o leitor nos aspectos matemáticos básicos para a compreensão do texto, mostrar um caminho consistente via Teoria de Grupos e Representações para se encontrar os estados de uma partícula. Vale ressaltar o tópico sobre Grupos de Lie, em que temos a oportunidade de apreciar o desenvolvimento da fórmula de um elemento genérico qualquer de um dado grupo de Lie, tão utilizada na literatura mais profissional sobre Teoria Quântica de Campos. Parte-se do pressuposto que o leitor tenha pouca familiaridade com os assuntos desenvolvidos, mas sob nenhuma hipótese uma boa leitura ou mesmo uma disciplina que verse sobre os temas do Capítulo 2 podem ser substituídas pela leitura desse texto. Já no Capítulo 3 pretende-se estabelecer, com o que se tem em mãos, o conceito de Grupo de Lorentz e Grupo de Poincaré, começando por se ter contato com a física propriamente dita. Deste capítulo pode-se destacar as noções de simetria que são estabelecidas graças a abordagem feita em Relatividade Restrita via Teoria de Grupos. Vale notar que foi proposital a ideia de inverter o praxe e primeiro falar sobre os grupos e depois abordar a Mecânica Quântica; tipicamente, em livros da área, os assuntos são desenvolvidos concomitantemente. Uma vez estabelecido o conceito de Grupo de Lorentz e Grupo de Poincaré o Capítulo 4 mostra como a busca por uma representação do grupo de Poincaré acaba por se confundir com a descrição de um estado de uma partícula na Mecânica Quântica, dessa "confusão premeditada" se pode extrair conceitos valiosos, a saber, a noção de spin, que surge de maneira natural como consequência da necessidade de se preservar as simetrias da Relatividade Restrita na Mecânica Quântica, mais precisamente, ao se buscar uma representação para as transformações pertencentes ao Grupo de Lorentz via ação de operadores no espaço de Hilbert, não só conseguimos extrair a informação do spin de uma partícula, como conseguimos uma boa definição do que é uma partícula em si, seja ela fundamental ou não. No Capítulo 5 concluímos o trabalho.

Que o leitor não prossiga sem novamente se atentar para o seguinte aviso: esse trabalho deve ser lido pelo que é, uma tentativa de manifestar, em um material de apoio para alunos de nível de

graduação, as impressões do autor sobre um aspecto da teoria de fundamentos em Teoria Quântica de Campos.

2 UMA BREVE INTRODUÇÃO A TEORIA DE TENSORES, GRUPOS E REPRESENTAÇÕES

Diferentes tipos de formalismos podem ser aplicados para o desenvolvimento da teoria de tensores, bem como a teoria de grupos e a teoria de representações. Cada formalismo tem um propósito de acordo com a necessidade e o contexto do trabalho.

Como não poderia ser diferente, no nosso caso foi feito um recorte bastante específico que visa cobrir apenas o essencial de cada uma dessas teorias para a compreensão dos assuntos tratados nos capítulos posteriores.

2.1 TENSORES

Uma boa maneira de introduzirmos o conceito de tensor é estabelecer certa familiaridade com índices. Para isso vamos usar como pretexto a *convenção de Einstein para somatório*. Vamos considerar um vetor escrito na base canônica do $\mathbb{R}^3$ como

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i, \quad (2.1)$$

segundo a convenção de Einstein para somatórios essa mesma equação pode ser escrita da forma

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i, \quad i=1,2,3. \quad (2.2)$$

O raciocínio por trás dessa convenção é simples: quando tivermos casos de índices repetidos uma soma está implícita. Assim, podemos dizer que o caso $a_{ij}x_k$ não tem nenhuma soma implícita, mas para o caso $a_i^j x_j$ temos uma soma implícita sobre o índice j que nos produzirá

$$a_i^j x_j = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + a_i^3 x_3, \quad j=1,2,3. \quad (2.3)$$

O índice j na equação acima ganha o nome de *índice mudo*, já o índice i ganha o nome de *índice livre*. Note que em se tratando de índices mudos nós podemos, sem maiores problemas, fazer $j = k$ e ficarmos com $a_i^k x_k$, ou seja, $a_i^j x_j = a_i^k x_k$ (produz a mesma soma). Mas quando tratamos de índices livres, em geral, temos $a_i^j x_j \neq a_n^j x_j$, a não ser que $i = n$.

Doravante, quando objetos que possuem índices fizerem alguma operação matemática, estará implícita a soma em caso de índices iguais. Do contrário, menção explícita será feita. Vale notar que os índices mudos estão sempre restritos ao intervalo da soma que está implícita, já os índices livres estarão restritos a um intervalo definido de maneira conveniente para cada situação de interesse.

No nosso caminho para entendermos um tensor, podemos definir dois objetos muito importantes, o

delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (2.4)$$

e o símbolo de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ for uma permutação par de } 123, \\ -1, & \text{se } ijk \text{ for uma permutação ímpar de } 123, \\ 0, & \text{se dois ou mais índices forem iguais.} \end{cases} \quad (2.5)$$

As duas definições acima suscitam uma dúvida muito pertinente. Já que um objeto de um índice está representando um vetor, o que está sendo representado por um objeto de dois índices, como no caso do delta de Kronecker? E de três índices, como no caso do símbolo de Levi-Civita? Para o caso do delta de Kronecker podemos fazer a relação com uma matriz, em que os índices ij representam linha e coluna, respectivamente, e δ_{ij} seria um elemento de uma matriz com n -linhas e m -colunas, com 0 em todas as posições a não ser na diagonal principal, onde teríamos os valores iguais a 1. Para $n = 4$ com $i = 0, 1, 2, 3$ e $m = 4$ com $j = 0, 1, 2, 3$ ficamos com

$$\mathbb{I} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

repare que essa matriz é a conhecida matriz identidade, não importando sua dimensão.

Mas e para o caso do símbolo de Levi-Civita? A má notícia é que por conta do seu número de índices ser três, nós perdemos a capacidade de associar com objetos já conhecidos da matemática. Por outro lado, a boa notícia é que existe um outro objeto matemático capaz de descrever o símbolo de Levi-Civita. Na verdade, ele é capaz de descrever todos os objetos anteriores, sejam eles vetores ou matrizes. Esse objeto é o que chamamos de *tensor*.¹

Com isso em mente, vamos trabalhar um pouco melhor nossa noção de tensores. Como dito acima, um tensor é um objeto matemático capaz de descrever tanto um vetor quanto uma matriz, ou ainda objetos mais gerais. No entanto, essa não é uma noção que traz muita informação. O problema é que uma boa definição de tensor demanda um conhecimento bastante profissional de áreas da matemática que fogem do escopo desse trabalho. Então, na tentativa de encontrar um meio-termo, por assim dizer, vamos tomar como aceitável em nosso contexto a seguinte definição:

"Um tensor é um objeto matemático dotado de índices e componentes que, sob uma mudança de coordenadas, transforma-se respeitando regras determinadas."

Não obstante a falta de precisão matemática, vamos extrair alguns conceitos relevantes da definição acima. Por incrível que pareça, para o contexto desse trabalho, a maneira como definimos um tensor

¹ De maneira mais precisa o símbolo de Levi-Civita é uma densidade tensorial. Ver (WEINBERG, 1972).

nos traz informações valiosas. O objetivo final é que sejamos capazes de entender como se comporta uma possível manifestação da teoria da Relatividade Restrita na Mecânica Quântica, então nada mais adequado que entendermos tensores como objetos matemáticos que respeitem determinadas regras de transformações da Relatividade Restrita.

Na física é importante que se trabalhe com objetos matemáticos que sejam independentes do sistema de coordenadas utilizado. Essa necessidade se manifesta claramente quando pensamos em termos experimentais. Desejamos que os resultados obtidos em um laboratório não mudem simplesmente pelo fato do experimento ser feito em outro lugar, em outras palavras, não queremos perder poder de previsibilidade. Para tanto, necessitamos que as equações matemáticas utilizadas no emprego da física sejam capazes de manter as leis físicas invariantes. Vamos supor a existência de N variáveis reais $x^1, x^2, \dots, x^N$ representando um sistema de coordenadas x^i , em que $i = 1, 2, \dots, N$. Uma curva nesse sistema pode ser parametrizada através de

$$x^i = f^i(t), \quad \text{sendo } t \text{ um parâmetro qualquer.} \quad (2.7)$$

Como queremos que a física não dependa do sistema, vamos supor um outro sistema de coordenadas x'^i dado através de

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^N). \quad (2.8)$$

Ao assumirmos que o jacobiano dado por $J' = \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right|$ nunca se anule podemos inverter a Eq. (2.8) e ficamos com

$$x^i = g^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^N). \quad (2.9)$$

As equações (2.8) e (2.9) são chamadas de *transformação de coordenadas*. Vale ressaltar que $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right| = \frac{1}{J'}$. Podemos escrever as equações (2.8) e (2.9) na forma $x'^i = x'^i(x)$ e $x^i = x^i(x')$, respectivamente.

Definição: *Seja X^i um conjunto de N grandezas em um ponto qualquer de um espaço de N dimensões que se transforme segundo a seguinte regra:*

$$X'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} X^j(x), \quad (2.10)$$

nessas condições X^i é conhecido como as componentes de um vetor contravariante nos pontos do espaço em questão.

Definição: *Seja T^{ij} um conjunto de N^2 grandezas que se transformem sob mudanças de coordenadas segundo a seguinte regra:*

$$T'^{ij}(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl}(x), \quad (2.11)$$

nessas condições T^{ij} é conhecido como as componentes de um tensor contravariante de segunda ordem ou ordem dois.

Definição: Seja X_i um conjunto de N grandezas em um ponto qualquer de um espaço de N dimensões que se transforme segundo a seguinte regra:

$$X'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} X_j, \quad (2.12)$$

nessas condições X_i é conhecido como as componentes de um vetor covariante nos pontos do espaço em questão.

Definição: Seja T_{ij} um conjunto de N^2 grandezas que se transformem sob mudanças de coordenadas segundo a seguinte regra:

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl}, \quad (2.13)$$

nessas condições T_{ij} é conhecido como as componentes de um tensor covariante de segunda ordem ou ordem dois.

Dotados das definições acima estamos bem confortáveis para melhorarmos nossa noção sobre tensores. Vemos por exemplo que um vetor contravariante (covariante) nada mais é que um tensor contravariante (covariante) de ordem um ou de primeira ordem. Aqui é uma boa oportunidade para que seja feito uma ressalva: sempre que for feita referência a um tensor, estaremos nos referindo (de fato) as componentes de um tensor e não a um tensor propriamente dito. Isso é condizente com nossa definição simples de tensor, mas pode causar algum conflito caso o leitor seja mais afeito à matemática.

É de se esperar que se temos tensores de ordem um e ordem dois devamos ter tensores de ordens superiores. E de fato isso acontece, a extensão desse conceito para dimensões maiores é imediata e não traz muita informação diferente do que já foi discutido, mas o pensamento reverso nos revela algo curioso. Como se comporta um tensor de ordem zero? Ora, utilizando por comodidade a definição de tensor contravariante, vamos assumir que para esse caso $N^0 = 1$ e com isso tenhamos $T'(x') = T(x)$. Essa grandeza é também conhecida como sendo um *invariante* ou um *escalar*. Por coerência devemos ressaltar que esse objeto está associado às componentes de uma função escalar dos sistemas referenciais x'^i e x^i de um determinado espaço de N dimensões, respectivamente. Também podemos estender essa mesma noção para os tensores covariantes sem perda de informação. Dessa análise podemos interpretar que um invariante vai sempre manter seu valor, independente da escolha do sistema de referência.

Estabelecida nossa noção de tensores covariantes e contravariantes podemos ter também tensores chamados de *mistos*, como por exemplo tensores que se transformam segundo

$$T'^k_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^n_{lm}, \quad (2.14)$$

para esse caso temos um tensor misto de terceira ordem se transformando uma vez contravariante e duas vezes covariantes. Também é possível encontrar a notação do tipo T^1_2 . Dessa forma podemos entender um tensor contravariante de segunda ordem como sendo do tipo T^2_0 e um tensor covariante de terceira ordem como sendo do tipo T^0_3 .

Seguindo esse raciocínio podemos voltar ao delta de Kronecker e notar que embora ele possa ser

escrito como $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i$ podemos melhor entendê-lo como sendo um tensor de segunda ordem do tipo T_1^1 . Vejamos algumas operações básicas para tensores.

Adição e Subtração: Dois tensores de mesma ordem e tipo podem ser somados e subtraídos dando origem a um novo tensor de mesma ordem e tipo que os anteriores.

$$\begin{aligned} S_{kl}^{ij} &= A_{kl}^{ij} + B_{kl}^{ij}, \\ D_{kl}^{ij} &= A_{kl}^{ij} - B_{kl}^{ij}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Multipliação externa: Se tomarmos um tensor de ordem m e um tensor de ordem n e multiplicarmos cada uma de suas componentes teremos as componentes de um tensor de ordem $m + n$. A essa operação dá-se o nome de *multipliação externa* e seu resultado de *produto externo* dos tensores anteriores

$$M_{kl}^{irj} = E_k^{ir} D_l^j. \quad (2.16)$$

Contração de um tensor misto: Chamamos de contração de um tensor quando igualamos os índices covariantes e contravariantes de forma que seja realizada sobre eles uma soma (notação de Einstein para somatórios) de forma que o tensor final, contraído, não expresse mais os índices anteriores. Tomemos como exemplo um tensor de segunda ordem, misto, T_j^i e façamos $i = j$,

$$T_j^i \Rightarrow T_i^i = T_j^j = T. \quad (2.17)$$

Multipliação interna ou contração: Nesse caso a multipliação interna nada mais é que uma combinação de uma multipliação externa com uma contração, ou seja, tomemos dois tensores E_{jk}^i e C_l^{mn} , se fizermos $l = i$ ficamos com

$$E_{jk}^i C_l^{mn} \Rightarrow E_{jk}^i C_i^{mn} = E_{jk}^l C_l^{mn} = I_{jk}^{mn}. \quad (2.18)$$

Tensores simétricos e Tensores Anti-simétricos: Para nosso contexto, um tensor é dito *simétrico* em relação a dois índices contravariantes ou a dois índices covariantes se após a troca entre esses mesmos índices o tensor resultante é o mesmo. Por exemplo, com relação aos índices contravariantes i e j , temos:

$$T_{mnl}^{ijk} = T_{mnl}^{jik}, \quad (2.19)$$

para todas as permutações entre i e j .

Para o caso de tensores ditos *anti-simétricos* temos que na mesma situação acima o tensor resultante ou é nulo ou é diferente por uma troca de sinal, ou seja,

$$T_{mnl}^{ijk} = -T_{mnl}^{jik}. \quad (2.20)$$

Tomemos o caso interessante de um tensor qualquer covariante de segunda ordem T_{ij} , podemos

escrevê-lo da seguinte maneira:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}), \quad (2.21)$$

o que temos acima é a decomposição de um tensor qualquer em uma parte simétrica e outra parte anti-simétrica. Claramente nós temos o primeiro termo $\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ simétrico e pode ser representado como $T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = T_{(ji)}$ e o segundo termo $\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ é anti-simétrico e pode ser representado como $T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -T_{[ji]}$. Esse processo também é conhecido como *simetrização e anti-simetrização* de um tensor. O caso do tensor ser covariante é apenas um exemplo, esse raciocínio facilmente vale para tensores contravariantes. Vale notar que a contração entre um tensor, por exemplo, simétrico por dois índices covariantes com um tensor anti-simétrico por dois índices covariantes é nula.

Podemos, agora, olhar para o símbolo de Levi-Civita. Dentro de nossas definições o símbolo de Levi-Civita em três dimensões pode ser considerado um tensor de ordem três totalmente anti-simétrico, uma vez que ele é anti-simétrico por qualquer permutação feita por pares de índices. Essa idéia se mantém na expansão da definição do símbolo de Levi-Civita para dimensões superiores.

Tensores associados: Tensores resultantes de abaixamentos e levantamentos de índices são chamados de *tensores associados*. No exercício de entendermos melhor o funcionamento do abaixamento e levantamento de índices vamos definir um tensor chamado *tensor fundamental covariante*. Para tanto, vamos assumir a existência de um espaço cartesiano de N dimensões e que nesse espaço as coordenadas são representadas por x'^n e a distância entre pontos infinitesimalmente próximos seja dada por

$$ds^2 = g_{nm} dx'^n dx'^m, \quad (2.22)$$

com n e m variando de 1 até N . Podemos escrever a equação (2.22) em coordenadas genéricas x^i fazendo $dx'^n = \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} dx^i$, com isso temos

$$ds^2 = g_{nm} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} dx^i \frac{\partial x'^m}{\partial x^j} dx^j = g_{nm} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) é denominada *forma fundamental* ou *forma métrica*, com

$$g_{ij}(x) = g_{nm} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^j}, \quad (2.24)$$

lembrando que x'^n são as coordenadas cartesianas. A equação (2.24) é chamada de *tensor fundamental covariante* ou simplesmente *tensor métrico*. Duas importantes observações devem ser feitas nesse ponto. Primeiramente, por vezes, no jargão físico se faz referência à métrica querendo se referir à matriz que representa o tensor métrico e não a equação (2.23), ou seja, está se fazendo referência a equação (2.24); como não temos a pretensão de violar uma das tradições mais sagradas da física que se manifesta em usar palavras iguais para conceitos importantes e diferentes (muitas vezes de maneira imprecisa causando confusão), é possível que isso seja feito no decorrer desse trabalho (assim como no caso dos tensores!). Como segunda observação é importante destacar que a métrica é um tensor simétrico.

De maneira mais simples vamos definir o chamado *tensor fundamental contravariante* como sendo o tensor g^{ij} que respeita

$$g_{ij}g^{ij} = \delta_j^i, \quad (2.25)$$

o tensor fundamental contravariante também é simétrico.

De posse do conhecimento dos tensores definidos acima podemos voltar nossa atenção para o propósito dessa definição, abaixar e levantar índices de um tensor. Um tensor, por exemplo, de ordem 2 misto, T_p^j , pode ter seu índice abaixado ao realizarmos a seguinte operação

$$T_{ip} \equiv g_{ij}T_p^j. \quad (2.26)$$

O mesmo pode ser feito para levantar um índice, basta que usemos o tensor métrico contravariante ao invés de usarmos o tensor métrico covariante. Vale ressaltar, portanto, que uma das funções do tensor métrico é subir e abaixar índices em operações com tensores. Neste momento é muito importante ressaltar que os índices no tensor já não aparecem mais de maneira indistinta, suas posições verticais e horizontais são importantes. Em geral, T_p^j é diferente de T_p^j que é diferente de T_p^j . Eles só poderão ser o mesmo tensor se se tratar de um tensor simétrico. Ou no caso de estarmos tratando de coordenadas cartesianas, pois aí o tensor métrico assume o mesmo comportamento do delta de Kronecker e portanto $X_i = g_{ij}X^j = X^i$, o que mostra o caráter de indistinguibilidade de um vetor cartesiano quanto a covariância e contravariância.

Para finalizarmos nossa introdução aos tensores vejamos duas maneiras úteis de se escrever o símbolo de Levi-Civita relacionado com delta de Kronecker.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{imn} &= \delta_j^m\delta_k^n - \delta_m^j\delta_n^k, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2 GRUPOS E REPRESENTAÇÕES

Assim como no caso de tensores muito pode ser dito sobre teoria de grupos e teoria de representações, dos mais diversos formalismos, com as mais diversas necessidades. Para esse trabalho o recorte escolhido é tal que possibilite a compreensão do leitor nos assuntos vindouros. Mais especificamente o que vai ser desenvolvido nesta seção é o suficiente para se compreender noções de representações irredutíveis de um grupo de lie conexo, sempre com a ideia de que essas noções estão intimamente ligadas a resultados bastante expressivos quando aplicados em física. Assim sendo, vamos ao trabalho.

Definição: Um grupo G é um conjunto de elementos $\{g\}$ que possui uma regra de composição, $\circ$, bem definida entre seus componentes de forma a satisfazer quatro condições:

i) identidade: $\exists i \in G$ tal que $\forall g \in G$

$$g \circ i = i \circ g = g$$

ii) fechamento: $\forall g, h \in G$

$$g \circ h \in G$$

iii) inversa: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = i$$

iv) associatividade: $\forall g, h, f \in G$

$$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$$

Ou seja, de maneira informal, um grupo é qualquer conjunto de elementos que respeitem a mesma regra de composição e satisfaçam as quatro condições acima; que exista um elemento identidade que ao compor com qualquer elemento do grupo ele retorna o próprio elemento; que exista a propriedade de fechamento, pois ao realizar a composição entre dois elementos do conjunto se espera que ele retorne um elemento que também pertença a esse conjunto; que exista uma inversa de tal forma que ao compor esse elemento inverso via regra de composição do grupo ela lhe retorne o elemento identidade; por fim que exista associatividade entre os elementos do grupo seguindo a regra de composição. Um exemplo de grupo bem conhecido é o chamado *grupo abeliano* e tem como característica todos os seus elementos comutarem ($g \circ h = h \circ g$).

Definição: *Seja G um grupo e H um subconjunto desse grupo. H é chamado de subgrupo de G se possuir as mesmas propriedades de grupo de G .*

Definição: *Seja H um subgrupo de G , H é dito ser subgrupo invariante de G se $\forall g \in G$ e $\forall h \in H$ $g \circ h \circ g^{-1} \in H$. Em linhas gerais a ideia por trás dessa definição é que um elemento de G atuando em um elemento de H gera outro elemento de H , ou seja, H não se altera com a atuação de G .*

Basicamente, com o que temos acima, sabemos o que é um grupo. No entanto, são conceitos bastante abstratos que em termos físicos nos trazem poucas informações. É preciso que se avance mais um pouco na teoria para podermos obter resultados mais úteis. Nesse propósito nada mais natural que começarmos a olhar para o que a teoria de representação de um grupo tem a nos dizer.

Então o que podemos entender como uma representação de um grupo? De maneira abrangente, quando falamos em representações de um grupo, estamos nos referindo a uma espécie de realização da regra de composição entre os elementos pertencentes a um grupo. Em outras palavras, uma representação de um grupo é a maneira que se encontra de representar através de objetos matemáticos os elementos que constituem um grupo e suas relações. Esses objetos matemáticos podem muito bem ser funções, vetores, matrizes, tensores e etc.

Formalmente temos o seguinte: imaginemos um grupo G em que há uma correspondência de cada elemento g para com um operador T_g que atua em um espaço vetorial V (de dimensão finita ou não) que leva ao mesmo espaço vetorial V , de maneira que se $gh = f$ então $T_g T_h = T_f$ (ou seja,

preservando a regra de composição do grupo). Suponhamos que i , a identidade do grupo, esteja associada a $T_i = 1$ e esse operador seja o operador identidade e também que tenhamos $T_{g^{-1}} = T_g^{-1}$ (que o operador associado ao elemento inverso seja o próprio operador inverso), podemos dizer então que temos uma *representação* do grupo G .

É do nosso interesse tratarmos da chamadas *representações matriciais*, uma vez que elas serão amplamente utilizadas no decorrer deste trabalho. Para tanto vamos supor um espaço vetorial V que tem como base $\{e_i\}$, ao fazermos todos os operadores T_g atuarem sobre essa base teremos

$$T_g e_i = e_j (t_g)^j_i. \quad (2.28)$$

O conjunto de todas as matrizes $(t_g)^j_i$ é chamado de *representação matricial* do grupo G . Como estamos falando de uma representação matricial para operadores em um espaço vetorial, é natural que se pergunte o que aconteceria com a representação caso fizéssemos uma mudança de base. Sob uma mudança de base $e'_i = e_j S^j_i$ se obtém uma outra representação matricial de mesma dimensão relacionada a anterior por

$$(t_g)^i_j \rightarrow (S^{-1})^j_k (t_g)^k_l S^l_i. \quad (2.29)$$

Duas representações matriciais relacionadas através da equação (2.29)² são ditas *representações similares* ou *representações equivalentes*. Um importante conceito para nós é o de *representação irredutível*.

Definição: *Representação irredutível é a representação na qual os únicos subgrupos invariantes são o próprio grupo em questão e o vazio. Em outras palavras, pensando como operadores em um espaço vetorial, uma representação é dita irredutível se ao menos um operador linear não deixa nenhum subespaço invariante.*

Trabalhando esse importante conceito, podemos entender que uma representação irredutível de um espaço vetorial que atue nesse espaço vetorial precisa do espaço inteiro para representar um grupo não sendo possível reduzir esse espaço necessário a um subespaço. Por trás disso temos a ideia de construir representações irredutíveis para separar o grupo no maior número de subgrupos invariantes possível, fazendo com que estejamos trabalhando com os elementos mais fundamentais do grupo. Em termos de representações matriciais deve haver pelo menos uma matriz que não esteja na forma de diagonal de blocos, como por exemplo

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & g \\ 0 & 0 & f & h \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

A relação entre uma representação e um grupo, em geral, não é unívoca, o que significa que é possível que um mesmo grupo tenha diferentes tipos de representações.

² Seja $S : V \rightarrow V$ uma mudança de base: $e'_i = e_j S^j_i$, temos, $T_a e'_i = (T_a e_j) S^j_i = e_k (t_a)^k_j S^j_i$. Mas $e'_i (S^{-1})^i_k = e_j S^j_i (S^{-1})^i_k = e_j \delta^j_k = e_k$. Ou seja, $T_a e'_i = e'_l (S^{-1})^l_k (t_a)^k_j S^j_i$.

Um importante grupo para o estudo da Física é um grupo conhecido como *grupo de Lie*. Esse grupo se mostra bastante útil porque como veremos mais a frente todo grupo de Lie possui uma estrutura conhecida como álgebra associada a seus geradores, a *álgebra de Lie*. Esses aspectos são relevantes pois em posse dos mesmos podemos extrair qualquer informação em relação ao grupo que estamos trabalhando, inclusive nos possibilita encontrar as representações do grupo. Por sorte dois grupos que estamos interessados, a saber o Grupo de Lorentz e o Grupo de Poincaré, são grupos de Lie.

Definição: Um grupo A é dito *paramétrico* se for possível pelo menos localmente parametrizá-lo por r parâmetros reais de forma que o produto e a inversa sejam funções contínuas dos mesmos r parâmetros.

Definição: Um grupo de Lie é um grupo paramétrico em que a função que define a operação do grupo é uma função real e analítica. Em outras palavras, um grupo de Lie é um grupo que pode ser escrito, pelo menos de maneira local, como uma série de Taylor em cada ponto do domínio dessa função.

Para terminarmos nossa introdução nos conceitos básicos em grupos e representações, vamos olhar com certo cuidado um tipo específico de grupo de Lie conhecido como *grupo de Lie conexo*. Dele vamos extrair informações valiosas sobre os grupos de Lie.

Dado um elemento A de um grupo (e esse elemento é caracterizado por um número finito de parâmetros $a^1, a^2, \dots, a^r$) formando um conjunto $\{a\}$, se todos os elementos estão conectados à identidade por sequências contínuas de elementos que pertencem ao grupo, o grupo formado por elementos como A recebe o nome de *grupo de Lie conexo*. Dois elementos distintos de um grupo de Lie conexo correspondem a dois conjuntos distintos de valores para os parâmetros, como por exemplo $A(a)$ e $A(b)$. É dito que os elementos do grupo dependem de maneira suave dos parâmetros a^i . Também é dito que a lei de composição entre dois elementos do grupo deve ser $A(a)A(b) = A(c)$ tal que

$$c^i = \varphi^i(a, b), \quad (2.31)$$

em que φ^i são funções suaves de a e b .

Outras propriedades relevantes são:

1. Associatividade:

$$\varphi^i(a, \varphi(b, c)) = \varphi^i(\varphi(a, b), c); \quad (2.32)$$

2. Identidade:

$$\varphi^i(a, a_0) = \varphi^i(a_0, a) = a^i; \quad (2.33)$$

(com $A(a_0) = A(0, 0, \dots, 0)$);

3. Inversa:

$$\varphi^i(a, \bar{a}) = \varphi^i(\bar{a}, a) = a_0^i = 0, \quad (2.34)$$

(com $A(a)$ tendo sua inversa em $A(-a)$).

As matrizes de representação associadas a uma dada representação de um grupo de Lie devem depender suavemente dos parâmetros a^i . Isso nos permite expandir cada elemento de cada matriz em uma série de Taylor em torno do ponto $a^i = 0$. Em termos da matriz A , temos:

$$A(a) = \mathbf{1} + a^i \left(\frac{\partial A}{\partial a^i} \right)_{a=0} + \frac{1}{2!} a^i a^j \left(\frac{\partial^2 A}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=0} + \dots \equiv \mathbf{1} + i a^i X_i + \frac{1}{2} a^i a^j X_{ij} + \dots \quad (2.35)$$

As matrizes $X_i = \left(\frac{-i \partial A}{\partial a^i} \right)_{a=0}$ são chamadas de *geradores* de grupo. Através delas (os geradores) é possível exprimir um elemento genérico do grupo, desde que sejam especificados o conjunto de parâmetros que o caracteriza. Para chegarmos a esse resultado vejamos algumas considerações sobre o que foi desenvolvido até agora.

Podemos expandir em série de Taylor a lei de composição dos parâmetros φ :

$$\begin{aligned} \varphi^k(a, b) = \varphi^k(0, 0) + a^i \left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial a^i} \right)_{a=b=0} + b^i \left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial b^i} \right)_{a=b=0} + \frac{1}{2!} a^i a^j \left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=b=0} \\ + \frac{1}{2!} b^i b^j \left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial b^i \partial b^j} \right)_{a=b=0} + \frac{1}{2!} a^i b^j \left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right)_{a=b=0} + \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

Notemos que as relações

$$\varphi^k(0, 0) = 0; \quad \varphi^k(a, 0) = a^k; \quad \varphi^k(0, b) = b^k; \quad \varphi^k(a, -a) = 0, \quad (2.37)$$

implicam:

$$\left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial a^i} \right)_{a=b=0} = \left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial b^i} \right)_{a=b=0} = \delta_i^k, \quad (2.38)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial a^j} \right)_{a=b=0} = \left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial b^i \partial b^j} \right)_{a=b=0} = 0. \quad (2.39)$$

Podemos então escrever

$$\varphi^k(a, b) = a^k + b^k - \frac{1}{2} C_{ij}^k a^i b^j + \dots, \quad (2.40)$$

com

$$C_{ij}^k a^i b^j = - \left(\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial a^i \partial b^j} \right)_{a=b=0}. \quad (2.41)$$

De (2.37) e (2.40), temos

$$0 = a^k - a^k + \frac{1}{2} C_{ij}^k a^i a^j + \dots, \quad (2.42)$$

e devemos satisfazer $C_{ij}^k a^i a^j = 0$. Decompondo C_{ij}^k como $C_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ij}^k + C_{ji}^k) + \frac{1}{2}(C_{ij}^k - C_{ji}^k) = e_{ij}^k + f_{ij}^k$, notamos que $e_{ij}^k = 0$. Isso nos permite obter $C_{ij}^k = f_{ij}^k = -f_{ji}^k$. Utilizando (2.35) em $A(a)A(b) = A(\varphi(a, b))$, temos

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{1} + i a^i X_i + \frac{1}{2} a^i a^j X_{ij} + \dots \right) \left(\mathbf{1} + i b^i X_i + \frac{1}{2} b^i b^j X_{ij} + \dots \right) = \\ \left(\mathbf{1} + i \varphi^i(a, b) X_i + \frac{1}{2} \varphi^i(a, b) \varphi^j(a, b) X_{ij} + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Substituindo (2.40) em (2.43), igualando os coeficientes de $a^i b^i$ dos dois lados da equação e lembrando que X_{ij} é simétrico, temos:

$$-a^k b^j X_k X_j = -\frac{i}{2} f_{kj}^i X_i a^k b^j + \frac{1}{2} (a^k b^j + a^j b^k) X_{kj}. \quad (2.44)$$

Rearranjando a equação (2.44) ficamos com

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} (a^k b^j + a^j b^k) \{X_k, X_j\} - \frac{1}{4} (a^k b^j - a^j b^k) [X_k, X_j] = \\ -\frac{i}{4} f_{kj}^i X_i (a^k b^j - a^j b^k) + \frac{1}{2} X_{kj} (a^k b^j + a^j b^k). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por fim, comparando os coeficientes adequadamente encontramos:

$$X_{kj} = -\frac{1}{2} \{X_k, X_j\} \quad (2.46)$$

e

$$[X_k, X_j] = i f_{kj}^i X_i. \quad (2.47)$$

Podemos agora definir elementos importantes, as chamadas *constantes de estrutura*, representadas por f_{kj}^i .

Com o conhecimento das constantes de estrutura e o que foi desenvolvido até agora, para encontrarmos a forma de um elemento genérico do grupo basta que trabalhemos a expressão de $A(\varphi(a, b))$ e substituamos a expressão para X_{ij} , que nos dá

$$\begin{aligned} A(\varphi(a, b)) = \mathbf{1} + i\varphi^i(a, b)X_i - \frac{1}{2}\varphi^i(a, b)\varphi^j(a, b)X_iX_j + \\ -\frac{i}{3!}\varphi^i(a, b)\varphi^j(a, b)\varphi^k(a, b)X_iX_jX_k \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ao olharmos para a equação (2.48) conseguimos observar que ela equivale à expansão em série de Taylor para a função exponencial, de modo que

$$A(\varphi(a, b)) = \exp(i\varphi^i(a, b)X_i), \quad (2.49)$$

com $\varphi^i(a, b)$ sendo determinado ordem a ordem em função de a^i, b^i e as constantes de estrutura. Para o caso específico em que $b^i = 0$, temos

$$A(a) = \exp(ia^i X_i). \quad (2.50)$$

A equação (2.50) é a representação de um elemento genérico $A(a)$.

É bastante benéfico que tenhamos uma definição mais precisa do que estamos nos referindo quando falamos de álgebra, para que sejam esclarecidos mal entendidos.

Definição: Definimos como álgebra de Lie $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{R}$, o espaço vetorial $\mathcal{G}$ acrescido de uma

operação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, tal que para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{G}$ as relações abaixo são satisfeitas:

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[B, A] \implies [A, A] = 0 && \text{antissimétrica} \\ [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] &= 0 && \text{identidade de Jacobi.} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Com a definição de álgebra de Lie escrita acima podemos verificar que de fato existe para todo grupo de Lie uma álgebra de Lie associada aos seus geradores. Para o nosso caso, dos grupos de Lie conexos, temos

$$[X_i, X_j] = if_{ij}^k X_k, \quad (2.52)$$

em que f_{ij}^k 's são as constantes de estrutura e os X_i 's os geradores do grupo em questão. Vale ressaltar a existência de um objeto importante no estudo de grupos, o chamado *Operador de Casimir*. Um operador, obtido através da álgebra de Lie associada ao grupo, que tenha a propriedade de comutar com todos os geradores do grupo é denominado *Operador de Casimir*.

Com os elementos desenvolvidos neste capítulo estamos prontos para avançar no estudo de grupos de interesse físico. É o que será feito adiante. Para exemplos de grupos interessantes ver (DIAS, 2015) e (HOFF DA SILVA, 2019).

3 GRUPO DE LORENTZ E GRUPO DE POINCARÉ

Agora que estamos munidos de alguns conceitos matemáticos importantes podemos finalmente estudar alguma física. Para tanto, vamos concentrar nossa atenção em dois grupos muito úteis, o *Grupo de Lorentz* e o *Grupo de Poincaré*.

3.1 GRUPO DE LORENTZ

Como motivação vamos começar fazendo um breve comentário sobre a teoria da relatividade restrita e como isso se relaciona com o grupo de Lorentz. A Teoria da Relatividade Restrita, proposta por Albert Einstein em 1905, pode ser amparada em dois postulados:

- *A velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo é independente de qualquer referencial inercial, ou seja, assume um valor constante para qualquer observador;*

- *As leis da física são válidas para qualquer referencial inercial.*

Com base nesses postulados, Einstein encontrou equações para as transformações que conectavam dois referenciais inerciais. Vale notar que essas equações coincidiram com as equações encontradas por Lorentz e Fitzgerald (em outro contexto). Não por acaso, essas equações tem o nome de *transformações de Lorentz*.

Para um caso em particular, como exemplo, em que $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, temos:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.1)$$

Uma observação importante advinda dos postulados da relatividade é que a forma quadrática que relaciona dois eventos em relação a dois referenciais inerciais distintos é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = \alpha, \quad (3.2)$$

em que α é uma constante e as coordenadas “sem linha” indicam os eventos em um referencial da mesma maneira que as coordenadas “com linha” indicam os dois eventos no outro referencial. Essa relação deve se manter invariante pelas transformações mencionadas acima.

Vamos definir uma matriz conveniente que, por construção, se mantém invariante pelas transformações de Lorentz:

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

e denotar

$$x^0 \equiv ct; \quad x^1 \equiv x; \quad x^2 \equiv y; \quad x^3 \equiv z. \quad (3.4)$$

Suponha que as transformações que ligam dois referenciais inerciais sejam dadas por

$$x'^\mu = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\mu} x^{\alpha} + \alpha^{\mu}, \quad (3.5)$$

essas transformações são chamadas de *transformações de Poincaré*. Vale notar que para o caso em que $\alpha^{\mu} = 0$, a equação (3.5) passa a representar as *transformações de Lorentz*. A única restrição sobre α^{μ} é que ele seja real, já Λ deve satisfazer a condição das transformações de Lorentz:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta, \quad (3.6)$$

com η fixa.

Uma outra maneira de chegarmos ao mesmo resultado da equação (3.5) é a seguinte: a equação (3.2) descreve um intervalo entre dois eventos que deve se manter invariante (segundo os postulados da teoria) e esse intervalo pode ser escrito como $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ (a forma métrica definida no capítulo anterior) e $\eta_{\mu\nu}$ (o tensor métrico como definido no capítulo anterior) como sendo a métrica do espaço. Utilizando das propriedades da seção de tensores ficamos com $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, mas como ele é invariante temos $ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = ds^2$. Portanto

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \quad (3.7)$$

A equação (3.5) é a única transformação linear não-singular (matriz com determinante não nulo) que satisfaz a condição manifesta em (3.7).

Pois bem, com isso em mãos podemos definir o grupo de Lorentz.

Definição: Suponha um conjunto L de matrizes 4×4 que satisfazem a *condição de Lorentz* (3.6) e tem as seguintes propriedades:

1. Se Λ_1 e $\Lambda_2 \in L$, $\Lambda_1 \Lambda_2 \in L$, em que $\Lambda_1 \Lambda_2$ denota o produto de matrizes usual;
2. $\mathbf{1} \in L$;
3. $\forall \Lambda \in L$, $\Lambda^{-1} \in L$ (Neste caso, de fato, as matrizes que pertencem a L possuem inversa, e verificamos isso aplicando o determinante em (6) obtendo $\det \Lambda = \pm 1$);
4. $(\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3)$.

Esse conjunto, que pelas propriedades já estudadas forma um grupo, é o Grupo de Lorentz.

Voltando nossa atenção para a condição de Lorentz, podemos escrevê-la em forma de componentes e ficamos com

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta}, \quad (3.8)$$

e quando fizermos $\mu = \nu = 0$ em (3.8) ficamos com

$$1 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2. \quad (3.9)$$

Com o fato de (3.9) implicar em $\Lambda_0^0 \geq +1$ ou $\Lambda_0^0 \leq -1$ e $\det(\Lambda) = \pm 1$ podemos dividir o grupo de Lorentz em quatro setores distintos:

1. O subconjunto das transformações de Lorentz próprias ortócronas, com $\det\Lambda = 1$ e $\Lambda_0^0 \geq 1$, sendo representado pelo símbolo $L_+^\uparrow$;
2. O subconjunto das transformações de Lorentz próprias não-ortócronas, com $\det\Lambda = 1$ e $\Lambda_0^0 \leq -1$, sendo representado pelo símbolo $L_+^\downarrow$;
3. O subconjunto das transformações de Lorentz impróprias ortócronas, com $\det\Lambda = -1$ e $\Lambda_0^0 \geq 1$, sendo representado pelo símbolo $L_-^\uparrow$;
4. O subconjunto das transformações de Lorentz impróprias não-ortócronas, com $\det\Lambda = -1$ e $\Lambda_0^0 \leq -1$, sendo representado pelo símbolo $L_-^\downarrow$;

Dos quatro casos acima, apenas o caso 1 pode ser considerado um subgrupo, uma vez que é o único que possui a identidade. Este subgrupo é conhecido como $SO(1, 3)^1$. Mesmo se trabalhando na maior parte do tempo com o subgrupo $SO(1, 3)$, é importante salientar outras duas transformações que estão presentes nos outros subconjuntos do grupo de Lorentz.

A transformação de inversão espacial (ou paridade),

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

que pertence a $L_-^\uparrow$, e a inversão temporal

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

que pertence a $L_-^\downarrow$. Note que é possível escrever qualquer transformação de Lorentz, pertencente a qualquer subconjunto do grupo, através do produto de $\Lambda \in L_+^\uparrow$ com $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{PT}$. Vejamos um

¹ Essa sigla significa que esse subgrupo é formado por matrizes ortogonais (*Orthogonal*) e de determinante +1 (*Special*). A numeração (1, 3) faz referência a assinatura do espaço, indicando que a métrica utilizada é (+, -, -, -) ou (-, +, +, +). Daí a utilização de $SO(1, 3)$

exemplo a seguir. Suponhamos $A \in L_+^\uparrow$, sabemos que $\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 = \mathbf{1}$ (matriz identidade), então $A = \mathcal{P}^2 A = \mathcal{P}(\mathcal{P}A)$. Por hipótese $A_0^0 \geq 1$, então $(\mathcal{P}A)_0^0 = 1A_0^0 \geq 1$. Como $\det(\mathcal{P}A) = +1$ podemos concluir que $(\mathcal{P}A) \in L_+^\uparrow$. Portanto fica demonstrado a afirmação supracitada para o caso de uma transformação qualquer pertencente a $\mathcal{P}$. Os casos restantes seguem o mesmo raciocínio.

É comum que ao se fazer referência ao grupo de Lorentz esteja se fazendo referência, na verdade, ao subgrupo próprio-ortócrono de Lorentz. Ao olharmos para o que estudamos na seção sobre grupos percebemos que $L_+^\uparrow$ é um grupo de Lie conexo.

Uma característica importante do subgrupo das transformações de Lorentz próprias ortócronas, $SO(1, 3)$, é que suas transformações são continuamente conectadas à identidade, ou seja, nos permite escrever Λ em sua forma infinitesimal:

$$\Lambda = \mathbf{1} + \omega$$

em que ω deve ser uma matriz 4×4 anti-simétrica ($\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}$).

Por fim, vamos olhar para um aspecto do grupo de Lorentz. As matrizes pertencentes ao grupo de Lorentz são 4×4 , ou seja, possuem 16 elementos. Mas se olharmos com cuidado veremos que

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \eta_{\rho\rho} &= \Lambda_\rho^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\nu \text{ (sem soma em } \rho) \\ \text{(ii)} \quad \eta_{\rho\sigma} &= \Lambda_\sigma^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\nu \text{ (} \rho \neq \sigma) \end{aligned} \tag{3.12}$$

(i) nos dá 4 relações entre os elementos e (ii) nos dá outras 6 relações entre os elementos, o que faz com que os 16 elementos das matrizes do grupo não sejam todos necessários para descrever as mesmas matrizes, mas na verdade apenas 6 desses elementos ($16 - 4 - 6 = 6$) são independentes. Portanto dizemos que o grupo de Lorentz precisa de 6 parâmetros para descrever uma transformação arbitrária pertencente ao grupo.

3.2 GRUPO DE POINCARÉ (QUÂNTICO)

Para trabalharmos com o grupo de Poincaré podemos fazer diversas abordagens, mas a que nos interessa é a que revela o caráter mais importante deste grupo para a Física, na opinião despretensiosa de quem vos escreve. O grupo de Poincaré está, de alguma maneira, relacionado com o que se conhece por *simetrias fundamentais da natureza*. No entanto, é ululante que não podemos mencionar a palavra *simetria* sem pelo menos nos dedicarmos a ela por um momento. É bastante adequado que seja antes de começarmos a investigar o grupo de Poincaré.

Certamente o leitor já se deparou com a palavra simetria em seu cotidiano. Do senso comum é de se esperar que simetria signifique alguma coisa que ao ser dividida em várias partes ainda preserve sua forma característica. É essa propriedade, preservar uma característica básica (fundamental), que permite a apropriação da palavra pela Física. Simetria de um sistema físico é uma característica que permanece inalterada quando se sujeita esse mesmo sistema a um processo de transformação. Essa característica pode se manifestar de maneira intrínseca ou extrínseca ao sistema; na forma matemática ou física.

Teoria de grupos e suas representações são de extrema utilidade no estudo de simetrias de um sistema físico, uma vez que algumas simetrias podem formar um grupo de simetrias. Aproveitando o que nós discutimos sobre grupos e representações, em geral, os grupos de Lie são relacionados ao estudo de simetrias ditas *contínuas* e o estudo de grupos finitos está relacionado com simetrias ditas *discretas*. Feita essa ponderação bastante simples sobre simetria (para mais informações sobre simetria veja (WEYL, 2016)) podemos seguir ao grupo de Poincaré propriamente dito.

Poderíamos definir o grupo de Poincaré como sendo, de maneira simplificada, *uma extensão do grupo de Lorentz por um vetor de translação*, ou ainda, de modo mais familiar com o que desenvolvemos, como um *grupo de Lie não-abeliano e não-compacto*². Essa última definição fica clara quando se olha para os geradores e sua álgebra associada; os geradores do grupo de Poincaré estão presentes no próprio grupo, mas dissemos, *en passant*, que grupos abelianos são grupos em que todos os elementos comutam, e alguns geradores do grupo de Poincaré não comutam (a saber, por exemplo, os geradores associados aos boosts definidos posteriormente como sendo os K's).

Mas também é possível, com vista a um propósito, estudarmos o grupo de Poincaré via operadores unitários. O processo é constituído basicamente de se encontrar a regra de composição do grupo de Poincaré; feito isso podemos sem problemas encontrar seus geradores através de transformações infinitesimais e a ação de operadores unitários; assim encontramos sua álgebra de Lie associada aos seus geradores e partimos para suas representações. No entanto, a busca de representações de Poincaré será feita em circunstâncias especiais. Por hora vamos nos restringir a trabalhar até estarmos aptos a encontrar suas representações.

Como dissemos, vamos em algum momento associar o grupo de Poincaré a operadores unitários. Para isso é valioso darmos uma pequena noção do espaço sobre o qual operadores unitários trabalham. Esse espaço é conhecido como *espaço de Hilbert* e pode ser definido como se segue.

Suponhamos um espaço onde seja possível se definir uma norma, bem como uma distância. O espaço em questão se chama *espaço de Hilbert*, denotado por $\mathcal{H}$, que é um espaço vetorial sobre os complexos que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*, \quad (3.13)$$

$$(\phi, \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2) = \alpha_1 (\phi, \psi_1) + \alpha_2 (\phi, \psi_2), \quad (3.14)$$

$$(\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2, \psi) = \alpha_1^* (\phi_1, \psi) + \alpha_2^* (\phi_2, \psi), \quad (3.15)$$

² No contexto desse trabalho, o grupo em questão é dito não-compacto porque engloba transformações não-compactas (nesse caso os boosts e as translações). Por sua vez, essas transformações são consideradas transformações não-compactas devido ao fato do espaço paramétrico relacionado ao subconjunto de Lorentz que as contém ser limitado, porém não ser fechado.

$$(\phi, \phi) \geq 0, \text{ com } (\phi, \phi) = 0, \text{ se, e somente se, } \phi = 0. \quad (3.16)$$

Aqui $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno, com o qual podemos definir uma norma:

$$\|\phi\| = \sqrt{(\phi, \phi)}. \quad (3.17)$$

Com a norma é possível se definir uma distância

$$d(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|. \quad (3.18)$$

O espaço de Hilbert é dito *completo* em relação à norma definida. Isso quer dizer que qualquer sequência de Cauchy de vetores de $\mathcal{H}$ tem um limite que está em $\mathcal{H}$. A preocupação com esses dois últimos aspectos existe no contexto desse trabalho apenas para garantir que os métodos usados em espaço de dimensão finita também valham aqui, um espaço vetorial de dimensão infinita.

Com essa introdução ao espaço de Hilbert vamos aproveitar e definir operadores desse espaço e posteriormente operadores unitários.

Operadores são aplicações que levam vetores do espaço $\mathcal{H}$ em vetores do espaço $\mathcal{H}$. Duas classes de operadores são importantes para o desenvolvimento do trabalho. Os operadores *lineares* e os operadores *anti-lineares*, representados, respectivamente por:

$$A(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1 A\phi_1 + \alpha_2 A\phi_2, \quad (3.19)$$

$$A(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1^* A\phi_1 + \alpha_2^* A\phi_2. \quad (3.20)$$

O adjunto de um operador linear e de um operador anti-linear é definido, respectivamente, por:

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi) \quad (3.21)$$

e

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi)^* = (\psi, A\phi). \quad (3.22)$$

Os operadores conhecidos por *auto-adjuntos*, ou *hermitianos*, são definidos como

$$A = A^\dagger. \quad (3.23)$$

Com isso podemos definir um operador unitário como sendo o operador que respeite

$$UU^* = U^*U = \mathbf{I}, \text{ ou seja, } U^{-1} = U^*. \quad (3.24)$$

Estamos agora preparados para começarmos a trabalhar com o grupo de Poincaré.

Comecemos por tomar duas transformações sucessivas de Poincaré como definidas no capítulo anterior:

$$x'^{\mu} = (\Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a_1^{\mu} = P(\Lambda_1, a_1) x^{\mu}, \quad (3.25)$$

$$x''^{\mu} = (\Lambda_2)^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} + a_2^{\mu} = P(\Lambda_2, a_2) x'^{\mu}. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) em (3.26) ficamos com

$$x''^{\mu} = (\Lambda_2 \Lambda_1)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + (\Lambda_2)^{\mu}_{\nu} a_1^{\nu} + a_2^{\mu} = P(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) x^{\mu}, \quad (3.27)$$

em que $P(\Lambda, a)$ é uma transformação de Poincaré. Com a equação (3.27) nós temos a regra de composição. As transformações de Poincaré, assim como as transformações de Lorentz, formam um grupo, conhecido como *grupo de Poincaré*. Como propriedade de grupo, uma sucessão de composições de elementos do grupo também pertence ao grupo. É o que observamos na equação (3.28). Podemos associar cada transformação do grupo de Poincaré a um operador unitário no espaço de Hilbert, e esperamos que essa associação nos conduza ao mesmo processo de composição, ou seja,

$$P(\Lambda_1, a_1) P(\Lambda_2, a_2) = P(\Lambda_3, a_3), \quad (3.28)$$

implicando

$$U(\Lambda_1, a_1) U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_3, a_3). \quad (3.29)$$

Essa associação com operadores unitários é importante para buscarmos uma representação do grupo de Poincaré de maneira a podermos associar suas representações com resultados na Mecânica Quântica.

Para podermos identificar os geradores do grupo e darmos alguma interpretação física aos mesmos, vamos tomar as transformações de Poincaré em sua forma infinitesimal:

$$U(1 + \omega, \varepsilon) \simeq 1 + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \varepsilon_{\rho} P^{\rho}. \quad (3.30)$$

Da equação (3.30), com o que mostramos sobre tensores e o fato de $\omega_{\rho\sigma}$ ter que ser antissimétrica, podemos notar que

$$(J^{\rho\sigma})^{\dagger} = J^{\rho\sigma}, \quad (P^{\rho})^{\dagger} = P^{\rho}, \quad J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}, \quad (3.31)$$

ao variarmos os parâmetros $\omega_{\rho\sigma}$ e ε_{ρ} podemos interpretar os geradores.

Para o caso em que $\omega_{\rho\sigma} = 0$ e $\varepsilon_{\rho} \neq 0$, temos $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}$, ou seja, temos apenas translações em $\mathcal{R}^{1+3}$. As translações temporais serão realizadas por P^0 e as translações espaciais geradas por P^i . Isso nos conduz naturalmente a interpretar $P^0 = H$ como *hamiltoniana* e P^i como o *momento linear* sendo essas as definições das mesmas grandezas.

Com $\omega_{0\rho} = 0$ e $\varepsilon_{\rho} = 0$ temos $x'^0 = x^0$ e $x'^i = x^i + \omega^i_j x^j$ e devido a anti-simetria dos parâmetros

ω_{ij} , i.e., $\omega_{ij}^i = -\omega_{ji}^j$. Essas transformações também são transformações de Lorentz que preservam uma forma quadrática tridimensional, $\sum_i (x^i)^2 = \sum_i (x'^i)^2$ e isso nos leva a interpretar os geradores

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} J^{jk}, \quad (3.32)$$

como os *momentos angulares*.

As outras transformações, em que $\omega_{0i} \neq 0$ e todos os outros parâmetros são nulos, relacionam o espaço e o tempo $x'^0 = x^0 + \omega_{0i}^0 x^i$ e temos $x'^i = x^i + \omega_{0i}^i x^0$ e estão associados aos chamados *boosts*. Os geradores correspondentes são denotados por

$$K_i = J^{i0}. \quad (3.33)$$

Vamos agora em busca da obtenção da álgebra de Lie dos geradores. Para tanto, vamos começar considerando uma conjugação de uma transformação de Poincaré por uma transformação unitária infinitesimal

$$U(\Lambda, a)U(1 + \omega, \varepsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(1 = \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \quad (3.34)$$

Expandindo infinitesimalmente o primeiro termo e o último termo e usando $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\nu^\mu$ e também $\omega_{\rho\sigma}\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma a^\nu P^\mu = \frac{1}{4}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma - \Lambda_\nu^\rho\Lambda_\mu^\sigma)(a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu)$, e rearranjando os termos, temos

$$U(\Lambda, a)(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho)U^{-1}(\Lambda, a) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(\Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma[J^{\mu\nu} + 2a^\nu P^\mu]) - i\varepsilon_\rho\Lambda_\mu^\rho P^\mu. \quad (3.35)$$

Comparando, já que ω e ε são parâmetros independentes e geradores não dependem dos parâmetros, os termos proporcionais a ω e a ε nos dois lados da equação (3.35), ficamos com

$$U(\Lambda, a)J^{\rho\sigma}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\rho\Lambda_\nu^\sigma(J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) \quad (3.36)$$

e

$$U(\Lambda, a)P^\rho U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\rho P^\mu. \quad (3.37)$$

Considerando $\Lambda = 1 + \omega$ como sendo infinitesimalmente próximo a identidade, $a^\mu = \varepsilon^\mu$, e substituindo essas considerações nas equações (3.36) e (3.37) chegamos a

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\mu^\sigma J^{\rho\mu} - \varepsilon^\rho P^\sigma + \varepsilon^\sigma P^\rho \quad (3.38)$$

e

$$i[\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \varepsilon_\mu P^\mu, P^\rho] = \omega_\mu^\rho P^\mu. \quad (3.39)$$

Utilizando $\omega_\mu^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\mu^\sigma J^{\rho\mu} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}J^{\rho\nu})$ em (3.38) e (3.39)

conseguimos encontrar a álgebra de Lie associada aos geradores do grupo de Poincaré:

$$\begin{aligned} i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= (\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu}); \\ i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho; \\ [P^\mu, P^\nu] &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Utilizando as propriedades do capítulo de tensores e o que foi desenvolvido até aqui, convertendo para notação tridimensional, as equações expressas em (3.40) se tornam mais familiares³:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k, & [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k, & [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k, \\ [P_i, P_j] &= 0, & [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk} P_k, & [K_i, P_j] &= iH\delta_{ij}, \\ [J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = 0, & [K_i, H] &= iP_i. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Com isso feito, vamos buscar as representações do grupo de Poincaré.

Como foi dito anteriormente nesse capítulo, a busca das representações do grupo de Poincaré será feita de maneira especial, ela será feita através da aplicação do grupo de Poincaré na mecânica quântica.

³ Aqui, de acordo com a convenção (3.32) e (3.33), vale soma em k .

4 ESTADOS DE UMA PARTÍCULA

O leitor pode se perguntar por qual motivo buscaremos as representações de Poincaré na Mecânica Quântica. Bem, como foi visto, uma representação de um grupo não é única, o que nos habilita a procurarmos as representações que melhor nos convém. Para nós, então, vamos atrás daquelas representações que mostrem algum conteúdo físico. Como estamos trabalhando com o grupo de Poincaré, vamos aproveitar e buscar as representações que preservem simetrias na Mecânica Quântica, uma vez que o grupo de Poincaré é o grupo que possui as simetrias da relatividade restrita. O que estamos dizendo é que ao buscarmos as representações do grupo de Poincaré na Mecânica Quântica estaremos buscando não só simetrias no sentido quântico, que faz referência a preservação de probabilidades de se obter um observável, mas também estamos interessados em investigar o que as simetrias da Relatividade Restrita tem a nos dizer na Mecânica Quântica.

4.1 BREVE INTRODUÇÃO A MECÂNICA QUÂNTICA

A boa notícia é que a Mecânica Quântica se constrói sobre o mesmo espaço de Hilbert que introduzimos no capítulo anterior. No entanto alguns aspectos devem ser ressaltados. Até esse capítulo nada havia sido mencionado em relação a mecânica quântica. A conexão entre os conteúdos pode ser feita via espaço de Hilbert. Vejamos.

Os operadores lineares hermitianos definidos no capítulo anterior apresentam uma característica importante, seus autovalores associados são sempre reais. Podemos então associar aos observáveis físicos operadores lineares hermitianos que possuam um conjunto completo de autovetores.

Em uma equação de autovalor e autovetor, dada por

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad (4.1)$$

definimos os autovalores λ_n como os possíveis valores a serem medidos de um observável físico A . Num sistema físico descrito por um estado ψ , a probabilidade de que uma medida do observável A forneça λ_n é dada por:

$$P(\lambda_n) = |(\psi, \phi_n)|^2. \quad (4.2)$$

Obviamente é necessário que os vetores ψ que são associados com estados físicos sejam normalizados, ou seja,

$$(\psi, \psi) = 1, \quad (4.3)$$

uma vez que não queremos perder poder de previsão todas as vezes que experimentos forem realizados.

Nesse ponto devemos observar que operações de simetria em Mecânica Quântica são transformações globais no espaço de Hilbert que preserva as suas probabilidades. Ficamos então tentados a

fazer uma associação direta entre transformações de simetria e as relações diretas entre vetores do espaço de Hilbert. No entanto, na mecânica quântica, os estados físicos são descritos como *classes de equivalência* ou *raios*. Portanto o que podemos afirmar no momento é que transformações de simetria relacionam mapeamento entre raios.

Para resolver este problema, utilizaremos um teorema devido a Wigner que é a pedra fundamental na Mecânica Quântica pelo formalismo de teoria de grupos e representações: "*Toda transformação de simetria pode ser representada no espaço de Hilbert de estados físicos por um operador que será unitário e linear ou anti-unitário e anti-linear*". Uma demonstração simplificada desse teorema pode ser vista no Apêndice A, bem como uma apreciação mais refinada pode ser vista em (WEINBERG, 1996), (DIAS, 2015), (HOFF DA SILVA, 2019) e (WIGNER, 1959).

Operadores unitários e lineares são definidos como

$$\psi' = U\psi; \quad (4.4)$$

$$(U\phi, U\psi) = (\phi, \psi); \quad (4.5)$$

$$U(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1 U\phi_1 + \alpha_2 U\phi_2, \quad (4.6)$$

enquanto os operadores anti-unitários e anti-lineares são definidos por

$$\psi' = U\psi; \quad (4.7)$$

$$(U\phi, U\psi) = (\phi, \psi)^*; \quad (4.8)$$

$$U(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1^* U\phi_1 + \alpha_2^* U\phi_2. \quad (4.9)$$

Das definições anteriores, para operadores adjuntos, temos que para operadores unitários ou anti-unitários vale

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1. \quad (4.10)$$

Como observação final, em termos de simetrias, operadores unitários e lineares estão associados as simetrias contínuas e operadores anti-unitários e anti-lineares estarão associados a simetrias discretas.

4.2 REPRESENTAÇÕES DE POINCARÉ

Agora que encontramos a álgebra de Lie associada aos geradores do grupo de Poincaré e introduzimos a Mecânica Quântica, vamos finalmente procurar pelas representações do grupo de Poincaré e ver o que elas tem a nos dizer.

Ao escolhermos uma base de autovetores em relação as constantes de movimento estaremos

trabalhando com os operadores H e P^i , por exemplo. Para tanto, os estados devem satisfazer:

$$P^\mu \psi_{p,\sigma} = p^\mu \psi_{p,\sigma}, \quad (4.11)$$

com σ sendo um rótulo para possíveis casos de degenerescências.

Agora vejamos um fato interessante sobre a atuação do operador unitário associado as transformações de Poincaré; uma vez que $U(\Lambda, 0)U(1, \Lambda^{-1}a) = U(\Lambda, \Lambda\Lambda^{-1}a + 0) = U(\Lambda, a)$ temos

$$U(\Lambda, a) = U(\Lambda, 0)U(1, \Lambda^{-1}a), \quad (4.12)$$

o que significa que podemos interpretar uma transformação de Poincaré ($U(\Lambda, a)$) como sendo o produto de uma transformação de Lorentz ($U(\Lambda, 0)$) por uma translação ($U(1, \Lambda^{-1}a)$), nos possibilitando trabalhar com as partes separadamente. Ocorre, curiosamente, que o grupo de translações tem a sua representação, no espaço em questão, dada por

$$U(1, a)\psi_{p,\sigma} = \exp(-ia_\mu P^\mu)\psi_{p,\sigma} = e^{-ia_\mu p^\mu}\psi_{p,\sigma}, \quad (4.13)$$

o que é facilmente perceptível. Ora, escolhemos justamente uma base de estados em relação as contantes de movimento, portanto é de se esperar que a parte de translação, engendrada pelo operador associado ao momento, seja representada dessa forma. Uma outra maneira de se observar essa trivialidade é através de um outro teorema também atribuído a Wigner que nos garante que ao buscarmos representações irredutíveis de um grupo unitário ou obteremos uma representação trivial de dimensão finita ou obteremos uma representação não-trivial de dimensão infinita. Como não estamos interessados na representação trivial ¹, obviamente vamos optar por escolher a representação não-trivial. No entanto observa-se que na natureza apenas o momento e a posição possuem graus de liberdade contínuos (dimensão infinita). Por isso podemos dizer que a equação (4.13) descreve trivialmente a representação da parte translacional do grupo de Poincaré, uma vez que não estamos interessados em representar a posição.

Como foi dito, o fato de podermos separar o grupo de Poincaré da maneira descrita acima nos coloca em uma posição bastante conveniente, pois procuramos por representações do grupo de Poincaré, mas sabemos que podemos realizar essa busca separando as transformações, ou seja, basta que encontremos como representar as transformações de Lorentz, uma vez que as translações já se encontram trivialmente representadas. Para tanto, também sabemos que as transformações de Lorentz podem ser escritas como produtos de $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{PT}$ por transformações pertencentes ao subgrupo de Lorentz ortócrono próprio, o que reduz o trabalho em procurar representações desse subgrupo, de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{T}$.

Começaremos pelo subgrupo de Lorentz ortócrono próprio. Vamos definir $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$, isso nos diz que

$$P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = \Lambda^\mu_\nu p^\nu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}). \quad (4.14)$$

¹ Uma representação trivial de uma álgebra de Lie associada a um grupo de Lie, é a representação que está relacionada com a transformação linear que ao atuar no elemento neutro do espaço vetorial em questão, leva ao elemento neutro desse mesmo espaço vetorial.

Em palavras, olhando para (4.14) vemos que $(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma})$ é autovetor de P^μ com autovalor $\Lambda^\mu_\nu p^\nu$, pois $P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = U(\Lambda)U(\Lambda^{-1})P^\mu U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}$, mas $UP^\rho U^{-1} = \Lambda^\rho_\mu P^\mu$, portanto $P^\rho U^{-1} = \Lambda^\rho_\mu U^{-1}P^\mu$. Com isso, temos $P^\rho = \Lambda^\rho_\mu U^{-1}P^\mu U \Rightarrow (\Lambda^{-1})^\rho_k \Lambda^\rho_\mu U^{-1}P^\mu U = (\Lambda^{-1})^\rho_k P^\rho$. Ficamos então com $U^{-1}P^k U = (\Lambda^{-1})^k_\rho P^\rho$ ou $U^{-1}P^\mu U = \Lambda^\mu_\rho P^\rho$. Por fim, $P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = (U(\Lambda)\Lambda^\mu_\rho P^\rho \psi_{p,\sigma})$, portanto, $P^\mu(U(\Lambda)\psi_{p,\sigma}) = \Lambda^\mu_\nu p^\nu (U(\Lambda)\psi_{p,\sigma})$.

Isso nos leva a escrever a ação do operador unitário sobre esse estado como sendo igual a combinação linear de todos os autoestados associados ao autovalor transformado:

$$U(\Lambda)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) \psi_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (4.15)$$

Ficamos tentados a supor que os C' s da equação (4.15) sejam as representações procuradas. No entanto isso não é verdade. Ao fazermos duas transformações sucessivas, notamos que os C' s podem, eventualmente, estar relacionados não apenas a Λ_1 e Λ_2 , mas também a Λ_1 e Λ_2 simultaneamente, que os impediria de serem as representações que buscamos, uma vez que o caráter de representação de matrizes em relação a transformações de um grupo exige que as matrizes estejam em associação biunívoca com as representações, o que não aconteceria para o caso mencionado acima. Esse aspecto fica claro quando se faz duas composições sucessivas para a ação do grupo em um estado não transformado. Vejamos isso explicitamente. Realizando transformações sucessivas temos:

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2)\psi_{p,\sigma} = U(\Lambda_1) \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) \psi_{\Lambda_2 p, \sigma'} = \sum_{\sigma''\sigma'} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2 p) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) \psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''}.$$

Para que tenhamos uma representação devemos ter $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1 \Lambda_2)$. Mas

$$U(\Lambda_1 \Lambda_2)\psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma''} C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2, p) \psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''}$$

e ficamos com

$$\sum_{\sigma'} C_{\sigma''\sigma'}(\Lambda_1, \Lambda_2 p) C_{\sigma'\sigma}(\Lambda_2, p) = C_{\sigma''\sigma}(\Lambda_1 \Lambda_2, p).$$

Como foi dito, para que os C' s sejam matrizes representando as transformações do grupo eles devem respeitar uma associação biunívoca com as mesmas, o que implicaria, ao olharmos para a equação acima, $C(\Lambda_1, \Lambda_2 p)$ ser $C(\Lambda_1, p)$.

No entanto um método muito engenhoso desenvolvido por Wigner é capaz de contornar esse problema e, além disso, fazer a associação entre as representações do grupo de Poincaré com estados de uma partícula.

Vamos a algumas considerações a respeito do subgrupo $L_+^\uparrow$. Devemos atentar para o fato de que as transformações pertencentes a $L_+^\uparrow$ tem como características preservar a norma de um vetor ($p'^\mu p'_\mu = p^\mu p_\mu = m^2$) e também o sinal da componente zero ($p'^0 > 0$ se $p^0 > 0$ e $p'^0 < 0$ se $p^0 < 0$). Faz-se notar que $U(\Lambda)$ associa $\psi_{p,\sigma}$ a autovetores de P^μ relacionados a Λp . Com isso, o grupo de Lorentz pode ser representado dentro de espaços com p^2 e p^0 fixos. Vetores com a mesma norma

podem ser escritos como o efeito de uma transformação de $L_+^\uparrow$ aplicada a um vetor k^μ da seguinte maneira:

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p) k^\nu,^2 \quad (4.16)$$

em que $p^2 = k^2 = m^2$ e o sinal de p^0 é o mesmo de k^0 .

Dessa forma, ao atuarmos com o operador unitário temos

$$U(L(p))\psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L(p), k)\psi_{p,\sigma'} := \frac{1}{N(p)}\bar{\psi}_{p,\sigma}, \quad (4.17)$$

em que o fator $N(p)^3$ é obtido através da normalização⁴. Também através do processo de normalização se justifica um outro aspecto, o fato dos C' s não poderem ser independentes de valores de p . Note que se isso acontecesse o problema da relação biunívoca entre os C' s estaria resolvido. Por conseguinte, é necessário buscar as representações sobre uma outra base que também dependa de valores quaisquer de p , mas que respeite as condições descritas acima, ou seja, $\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p)U(L(p))\psi_{k,\sigma}$.

Assumindo $\bar{\psi}_{p,\sigma}$ como uma nova base para os autovetores de P^μ , o efeito de uma transformação de Lorentz sobre um vetor desta base é

$$U(\Lambda)\bar{\psi}_{p,\sigma} = N(p)U(L(\Lambda p))U(W(\Lambda, p))\psi_{k,\sigma}, \quad (4.18)$$

em que $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$. Note que $W(\Lambda, p)k = k^5$, e $W(\Lambda, p)$ é um elemento de $L_+^\uparrow$. O conjunto de todos os W 's que mantém um vetor k invariante é um subgrupo de $L_+^\uparrow$ conhecido como *grupo de isotropia (ou little group) de k^μ* .

A atuação de W no espaço de Hilbert é dada por

$$U(W(p))\psi_{k,\sigma} \equiv \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p), k)\psi_{k,\sigma'} \quad (4.19)$$

e para este caso, os D' s, de fato, são representações do grupo de isotropia. Pois

$$\begin{aligned} U(W_1)U(W_2)\psi_{k,\sigma} &= U(W_1) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2, k)\psi_{W_2 k, \sigma'} = \\ &= \sum_{\sigma''\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, W_2 k) D_{\sigma'\sigma}(W_2, k)\psi_{W_1 W_2 k, \sigma''} = \sum_{\sigma''\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, k) D_{\sigma'\sigma}(W_2, k)\psi_{k, \sigma''}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} U(W_1 W_2)\psi_{k,\sigma} &= \sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_2, k)\psi_{k, \sigma''}, \\ \Rightarrow \sum_{\sigma'} D_{\sigma''\sigma'}(W_1, k) D_{\sigma'\sigma}(W_2, k) &= D_{\sigma''\sigma}(W_1 W_2, k). \end{aligned}$$

Com o que foi mostrado nas equações acima podemos notar que, agora, os D' s podem ser representa-

² $p_\mu = \eta_{\mu\alpha} L^\alpha_\gamma k^\gamma \therefore p^\mu p_\mu = L^\mu_\nu k^\nu \eta_{\mu\alpha} L^\alpha_\gamma k^\gamma = L^\mu_\nu L^\alpha_\gamma \eta_{\mu\alpha} k^\nu k^\gamma = \eta_{\nu\gamma} k^\nu k^\gamma = k_\mu k^\mu.$

³ $k^\mu = L^\mu_\nu k^\nu \therefore L^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \Rightarrow N(k) = 1.$

⁴ Ver (WEINBERG, 1996), (DIAS, 2015) e (HOFF DA SILVA, 2019)

⁵ $W(\Lambda, p) k = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) k = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda p = L^{-1}(\Lambda p) L(\Lambda p) k = k.$

ções do grupo de isotropia, uma vez que nos livramos do problema da associação biunívoca. Portanto, ao descobrir as representações do grupo de isotropia, está-se descobrindo como se representar o grupo de Lorentz sobre a nova base. Após a normalização, a forma final da atuação de $U(\Lambda)$ sobre $\bar{\psi}_{p,\sigma}$ é

$$U(\Lambda)\bar{\psi}_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'\sigma} D_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda, p))\bar{\psi}_{\Lambda p, \sigma'}. \quad (4.20)$$

Neste ponto devemos parar para apreciar a destreza do método de Wigner. Tínhamos um claro problema para encontrar as representações do grupo de Poincaré porque não podíamos trabalhar com matrizes que não estivessem associadas de maneira biunívoca com as respectivas representações. O que Wigner fez, no fim das contas, foi encontrar um subgrupo, dentro do próprio subgrupo ortócrono-próprio, formado por elementos que mantêm um vetor qualquer k invariante; esse vetor, desde que pertença a espaços com p^2 e p^0 fixos, permite, ao respeitar a equação 4.17, a busca por representações relacionadas a atuação de operadores unitários sobre vetores da base que dependam de valores arbitrários de p . Isso se manifestará, finalmente, como a representação do grupo de Lorentz descrita pela equação (4.20).

Para uma melhor apreciação desse método, bem como do processo de normalização, veja (WIGNER, 1939) e (WEINBERG, 1996), também ver (WEINBERG, 1996), (DIAS, 2015) e (HOFF DA SILVA, 2019), respectivamente.

4.2.1 Grupos de isotropia

O problema agora é representarmos o grupo de isotropia. Como sua caracterização depende apenas da escolha de um vetor qualquer, isso será feito de acordo com casos de interesse.

Podemos avançar em relação ao método de Wigner para obter as representações do grupo de isotropia. Para isso, vamos escrever uma transformação infinitesimal do grupo em questão como

$$W^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \alpha^\mu_\nu. \quad (4.21)$$

Da condição que define W temos

$$W^\mu_\nu k^\nu = (\delta^\mu_\nu + \alpha^\mu_\nu)k^\nu = k^\mu, \quad (4.22)$$

o que implica $\alpha^\mu_\nu k^\nu = 0$ ou $\alpha_{\mu\nu} k^\nu = 0$. Das equações acima, fica claro que determinar W depende da escolha que é feita para k^μ .

1. Caso em que: $k^\mu = (\pm m, 0, 0, 0)$, $k^2 = m^2$. Corresponde a momento de tipo tempo, associado a energias positivas ou negativas, a depender do sinal da componente zero. As condições de vínculos estabelecidas para esse caso após análise das equações (4.21) e (4.22) são $\alpha_{0\nu} k^\nu = 0$ que é a identidade e $\alpha_{10} = \alpha_{20} = \alpha_{30} = 0$.

Para esse caso teremos uma transformação do grupo de isotropia parametrizada por $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$ como $U(W) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\alpha_{ij}J^{ij}$.

Lembrando que $J_1 = J^{23}$, $J_2 = J^{31}$ e $J_3 = J^{12}$ e que $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, temos, após definir

$\theta^1 = \alpha_{23}$, $\theta^2 = \alpha_{31}$ e $\theta^3 = \alpha_{12}$, $U(W) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\theta_{ij}J_i$. O grupo que mantém o vetor escolhido invariante é o $SO(3)$, e a representação para esse grupo de isotropia é dada por:

$$D_{\sigma'\sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) = [\exp(i\boldsymbol{\theta}(\Lambda, p) \cdot \mathbf{J})]_{\sigma'\sigma}. \quad (4.23)$$

Como estamos tratando de um grupo que respeita a mesma álgebra de $SO(3)$, e estamos no referencial de repouso da partícula, a maneira mais natural de se interpretar o σ é como uma projeção de um momento angular intrínseco, conhecido como *spin*. Portanto pode-se dizer que o estado $\bar{\psi}_{p,\sigma}$ representa a situação física na qual estamos tratando de uma partícula com momento p^μ , massa $p^\mu p_\mu = m^2$, spin j e projeção de spin σ .

Neste ponto vale a pena lembrarmos de um tipo de operador que definimos anteriormente, o operador de Casimir. No grupo de Poincaré podemos construir dois importantes operadores de Casimir; um deles é dado pelo quadrado do momento, ou seja, $P^\mu P_\mu = P^2$ e o outro é dado por $W^\mu W_\mu = W^2$ com W_μ sendo o *vetor de Pauli-Lubanski*, definido como $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$. Note que ambos são construídos com os geradores do grupo de Poincaré P e J . Para o caso específico desse exemplo, esses dois operadores de Casimir serão responsáveis por ajudar a rotular a partícula em questão. Como escolhemos um referencial adequado, o de repouso, o autovalor associado a $P^2 = m^2$ é a massa da partícula e no caso de $W^2 = -m^2 J^2$ o autovalor associado a J^2 é o spin da partícula.

2. Caso em que: $k^\mu = (\pm\kappa, 0, 0, \kappa)$, $k^2 = 0$. Corresponde a momento tipo luz, também associado a energias positivas e negativas como no caso anterior. Aqui, o grupo de isotropia encontrado é o *grupo euclidiano* em duas dimensões, ou também $ISO(2)$. A forma da representação desse grupo de isotropia é dada por

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\sigma\theta)\delta_{\sigma'\sigma}. \quad (4.24)$$

É possível associar o vetor escolhido com uma partícula de massa zero, em que se define os autovalores relacionados ao operador

$$J_{\hat{p}} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{P}|}, \quad (4.25)$$

como sendo a chamada *helicidade*. Esse operador é obtido no processo de se encontrar os geradores do grupo de isotropia, desde que o vetor escolhido tenha momento na direção $\hat{p}$, do contrário, $J_{\hat{p}}$ se torna apenas J_3 .

3. Caso em que: $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$, $k^2 = 0$. O grupo que mantém esse vetor invariante é todo o grupo de Lorentz ($SO(3, 1)$). Como esse grupo é não-compacto, segundo o outro teorema atribuído a Wigner, devemos tomar uma solução trivial para podermos ter uma representação unitárias com

dimensão finita. Para isso a representação escolhida é a representação trivial do grupo de Lorentz

$$U(\Lambda)\psi_0 = \psi_0. \quad (4.26)$$

Esta situação está associada a não termos nenhuma partícula presente, e usualmente é chamada de *vácuo*. É considerado invariante de Lorentz e tomado como sendo normalizado $(\psi_0, \psi_0) = 1$.

4. Caso em que: $k^\mu = (0, 0, 0, m)$, $k^2 = -m^2$. O grupo de isotropia desse caso envolve rotações em torno do eixo $\hat{z}$, *boosts* nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$, que define $SO(2, 1)$. Vale ressaltar que até hoje não foram observadas partículas que correspondem a momento desse tipo. Essas partículas são conhecidas como *táquions*.

Para melhor apreciar os grupos de isotropia ver (WIGNER, 1939) e (DIAS, 2015).

4.2.2 Paridade e Reversão Temporal

O caso agora é encontrar representações para $\mathcal{P}$ e para $\mathcal{T}$. Em relação a quadri-vetores do tipo x^μ , as transformações de paridade e reversão temporal são descritas, respectivamente, por:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

e

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Note que $\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = 1$. Os operadores $P = U(\mathcal{P})$ e $T = U(\mathcal{T})$ que representam, respectivamente, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ devem satisfazer:

$$\begin{aligned} PU(\Lambda, a)P^{-1} &= U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a), \\ TU(\Lambda, a)T^{-1} &= U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Supondo Λ e a infinitesimais, para o caso de $\mathcal{P}$, temos

$$PU(1 + \omega, \varepsilon)P^{-1} = U(\mathcal{P}(1 + \omega)\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) = U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon), \quad (4.30)$$

trabalhando o lado esquerdo da equação (4.30) chegamos a

$$\begin{aligned} PU(1 + \omega, \varepsilon)P^{-1} &= P \left\{ 1 + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_{\rho} P^{\rho} \right\} P^{-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} P(iJ^{\rho\sigma})P^{-1} - \varepsilon_{\rho} P(iP^{\rho})P^{-1}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

e trabalhando com o lado direito da equação (4.30) ficamos com

$$U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) = 1 + \frac{i}{2} (\mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1})_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i(\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu} P^{\mu}, \quad (4.32)$$

mas

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu} &= (\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu}^{\rho} \varepsilon_{\rho}, \\ (\mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1})_{\mu\nu} &= (\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu}^{\rho} \omega_{\rho\sigma} (\mathcal{P}\varepsilon^{-1})_{\nu}^{\sigma} = (\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu}^{\rho} (\mathcal{P}\varepsilon)_{\nu}^{\sigma} \omega_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

portanto

$$U(1 + \mathcal{P}\omega\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\varepsilon) = 1 + \frac{i}{2} (\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu}^{\rho} (\mathcal{P}\varepsilon)_{\nu}^{\sigma} \omega_{\rho\sigma} J^{\mu\nu} - i(\mathcal{P}\varepsilon)_{\mu}^{\rho} \varepsilon_{\rho} P^{\mu}. \quad (4.34)$$

Comparando os coeficientes encontramos:

$$\begin{aligned} P(iJ^{\rho\sigma})P^{-1} &= i\mathcal{P}_{\mu}^{\rho} \mathcal{P}_{\nu}^{\sigma} J^{\mu\nu}, \\ P(iP^{\rho})P^{-1} &= i\mathcal{P}_{\mu}^{\rho} P^{\mu}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

O mesmo processo vale para o caso $\mathcal{T}$ de modo que tenhamos:

$$\begin{aligned} T(iJ^{\rho\sigma})T^{-1} &= iT_{\mu}^{\rho} T_{\nu}^{\sigma} J^{\mu\nu}, \\ T(iP^{\rho})T^{-1} &= iT_{\mu}^{\rho} P^{\mu}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Analisando as equações acima com minúcia, percebe-se que buscamos representações unitárias para o caso da paridade e representações anti-unitárias para o caso da reversão temporal. Por exemplo, para o caso da paridade, vamos assumir que sua representação seja anti-unitária, e olhemos para a componente zero da conjugação do momento:

$$P(iP^0)P^{-1} = i\mathcal{P}_{\mu}^0 P^{\mu} = iP^0 \quad (4.37)$$

ou seja,

$$P(iH)P^{-1} = iH. \quad (4.38)$$

Caso P fosse anti-unitário, teríamos $PH = -HP$ e consequentemente, ao atuarmos em um auto-estado ψ de H com energia E , ficaríamos com

$$H(P\psi) = -iPH\psi = -E(P\psi). \quad (4.39)$$

O que a equação acima está nos dizendo é que nossa hipótese implicaria no fato do hamiltoniano não ter um estado de energia mínimo, o que não faz sentido fisicamente. Portanto, a representação que procuramos deve ser unitária e ao aplicarmos o Teorema de Representação de Simetrias concluímos que ela também deve ser linear. Uma análise parecida pode ser feita com relação ao caso da reversão temporal e encontraremos

$$T(iH)T^{-1} = -iH, \quad (4.40)$$

que nos leva a concluir que a representação nesse caso deve ser anti-unitária e portanto anti-linear.

Sobre as representações propriamente ditas, para o caso em que $m \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} P\psi_{p,\sigma} &= \eta\psi_{\mathcal{P}p,\sigma}, \\ T\psi_{p,\sigma} &= (-1)^{j-\sigma}\psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

como as representações de paridade e de reversão temporal, respectivamente.

Para o caso em que $m = 0$, temos:

$$\begin{aligned} P\psi_{p,\sigma} &= \eta_{\sigma}\exp(\pm i\pi\sigma)\psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}, \\ T\psi_{p,\sigma} &= \zeta_{\sigma}\exp(\pm i\pi\sigma)\psi_{\mathcal{P}p,\sigma}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

como as representações de paridade e de reversão temporal, respectivamente.

Vale ressaltar que foge do escopo desse trabalho um tratamento mais profundo sobre os casos das transformações de paridade e de reversão temporal, dado o elevado grau de dificuldade que se manifesta no estudo desses casos para partículas com massa ou sem massa. Portanto, para uma análise mais detalhada, veja (DIAS, 2015).

Com o desenvolvido nessa subseção, na subseção anterior mais a representação da parte de translação do grupo de Poincaré, podemos dizer que o grupo de Poincaré se encontra inteiramente representado no espaço de Hilbert.

5 CONCLUSÃO

O que é uma partícula? Pode parecer pouco usual começar a conclusão de um trabalho através de uma pergunta, mas essa pergunta foi o que nos guiou de maneira implícita por todo o caminho desenvolvido até aqui. Portanto, ela é de muita utilidade para nos ajudar a entender o que temos em mãos. Várias são as maneiras com que podemos responder a essa questão. Mas no contexto da Física de Partículas, ou ainda, de fundamentos em Teoria Quântica de Campos, podemos utilizar o que foi apresentado no capítulo 2, juntamente com o desenvolvido no capítulo 3 e capítulo 4 para atestarmos: uma partícula é uma representação irredutível do grupo de Poincaré. O caminho necessário para que chegássemos nessa definição nos permitiu apreciar, ainda que de maneira tímida, conceitos fundamentais para a física. Como um físico, dos mais capazes, me disse certa vez: *"se eu pudesse resumir a física em duas palavras elas seriam, simetria e conservação"*. E por sorte nos deparamos com esses dois conceitos ao longo do texto.

As simetrias, que são a razão maior pela qual se estuda física através do formalismo de teoria de grupos e de teoria de representações de grupos, puderam se manifestar no momento em que tivemos a pretensão de unirmos Relatividade Restrita e Mecânica Quântica. E isso aconteceu justamente quando buscamos representar o grupo de Poincaré (que carrega as simetrias do espaço-tempo) na Mecânica Quântica. Além disso conseguimos encontrar essas simetrias de modo a respeitar as simetrias da própria Mecânica Quântica. Essa ligação foi possível porque as representações do grupo de Poincaré foram estudadas no espaço de Hilbert. Vale notar que para esse caso, quando estudamos estados de uma partícula através das representações, nós nos deparamos de maneira natural com o conceito de spin. E pudemos entender de maneira peremptória que se quisermos atuar com a Relatividade Restrita na Mecânica Quântica nós devemos aceitar que o spin passe a ser um elemento que caracteriza uma partícula, fundamental ou não. Mais que isso, a forma final da nossa representação nos permitiu descrever outras partículas, bastando apenas tomarmos vetores convenientes.

O conceito de conservação aparece de forma mais implícita, mas o que são as relações de simetrias contínuas, simetrias discretas, com operadores lineares e anti-lineares e as relações e interpretações dos geradores do grupo de Poincaré analisadas pela álgebra de Lie associada aos mesmos geradores senão uma forma de se entender à la *Teorema de Noether*? Pois não podemos aferir do teorema, de maneira simplificada, que simetrias de um sistema físico implicam na existência de quantidades conservadas do mesmo sistema? Por exemplo, uma simetria manifesta em uma translação espacial nos dá a conservação de momento linear do sistema, já uma simetria manifesta em uma translação temporal nos dá a conservação da energia, e ainda, uma simetria manifesta em uma rotação no espaço nos dá a conservação do momento angular. Aqui, isso foi utilizado para se definir os geradores de transformações do grupo de Poincaré na Mecânica Quântica.

Todas essas simetrias estão presentes no grupo de Poincaré e isso foi possível ser observado graças ao tratamento de grupos e suas representações aplicado a duas áreas fundamentais da física moderna, Relatividade Restrita e Mecânica Quântica. Isso mostra o caráter indispensável de teoria de grupos na Física atual.

REFERÊNCIAS

- COUTO, R. T. **Introdução aos tensores**. 2003. Notas de Aula (disciplina de graduação) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2003. 118 p.
- DIAS, S. A. **Métodos teóricos para física de altas energias**. 2015. Notas de Aula (disciplina de pós-graduação) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2015. 111 p.
- HOFF DA SILVA, J. M. **Tópicos em fundamentos de teoria quântica de campos**. 2019. Notas de Aula (disciplina de pós-graduação) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2019.
- FALCIANO, F. T. **Grupos de Poincaré**. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro. 2009. Disponível em: <http://www.cbpf.br/ftovar/images/grupopoincare.pdf>. Acesso em: maio 2019.
- SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Califórnia: Addison-Wesley, 1994. 500 p.
- WEINBERG, S. **Lectures on quantum mechanics**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2015. 419 p.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: principles and applications of the general theory of relativity. New York: Wiley, 1972. 657 p.
- WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**: foundations, v. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 609 p.
- WEYL, H. **Symmetry**. Princeton: Princeton University Press, 2016. 176 p.
- WIGNER, E. **Group theory**: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra. New York: Academic Press, 1959. 372 p.
- WIGNER, E. On The Unitary Representation of the inhomogeneous Lorentz group, **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 40, n. 1, p. 149-204, 1939.

APÊNDICE A – TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE SIMETRIAS

Esse apêndice tem como propósito prover uma demonstração simplificada do Teorema de Representação de Simetrias. Para maiores detalhes ver (WEINBERG, 1996), (DIAS, 2015), (HOFF DA SILVA, 2019) e (WIGNER, 1959).

No espaço de Hilbert, estados físicos estão em correspondência um-a-um com os chamados *raios* do espaço. Um raio consiste em um conjunto de vetores de estado de norma unitária e que diferem entre si apenas por fatores de fase multiplicativos. Por exemplo, os estados ψ e $e^{i\theta}\psi$ pertencem ao mesmo raio R para algum θ real, ambos descrevem o mesmo estado físico. Por isso, podemos dizer que descrevemos estados físicos como classes de equivalência de estados do espaço de Hilbert. Nesse contexto, apresentamos o teorema da seguinte maneira:

Teorema: *Toda transformação de simetria pode ser representada no espaço de Hilbert de estados físicos por um operador que é ou linear e unitário ou anti-linear e anti-unitário*

Demonstração: Sejam $\psi_1 \in R_1$ e $\psi_2 \in R_2$, e também $\psi'_1 \in TR_1$ e $\psi'_2 \in TR_2$, então

$$|(\psi'_1, \psi'_2)|^2 = |(\psi_1, \psi_2)|^2 \quad (\text{A.1})$$

se T for uma transformação de simetria. Vamos requerer que a transformação tenha inversa que também preserve a probabilidade. Começemos por verificar a preservação de simetria na Mecânica Quântica de estados transformados, para isso vamos analisar um conjunto completo e ortonormal de vetores de estado e um conjunto equivalente de vetores transformados.

Seja $\{\psi_k\} \in R$ um conjunto completo ortonormal, i.e., $(\psi_k, \psi_l) = \delta_{kl}$ e $\{\psi'_k\} \in TR$ vetores transformados. Devemos ter

$$|(\psi'_k, \psi'_l)|^2 = |(\psi_k, \psi_l)|^2 = \delta_{kl}, \quad (\text{A.2})$$

mas $(\psi'_k, \psi'_k) \geq 0$ e real, portanto $(\psi'_k, \psi'_l) = \delta_{kl}$, como pode ser verificado abaixo:

$$(\psi'_k, \psi'_l)(\psi'_k, \psi'_l)^* = \delta_{kl},$$

$$\underline{k=l}: (\psi'_k, \psi'_l)(\psi'_k, \psi'_l)^* = 1,$$

$$\text{mas } (\psi'_k, \psi'_l) > 0 \text{ e } (\psi'_k, \psi'_l) \equiv n \therefore n^2 = 1 \Rightarrow n = 1. \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{k \neq l}: (\psi'_k, \psi'_l)(\psi'_k, \psi'_l)^* = 0,$$

$$\text{mas } (\psi'_k, \psi'_l) = (a + ib) \text{ e } (\psi'_k, \psi'_l)^* = (a - ib) \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \therefore a = b = 0$$

$$(\psi'_k, \psi'_l) = 0,$$

As equações em (A.3) implicam em $(\psi'_k, \psi'_l) = \delta_{kl}$.

Consideremos, por um momento, que $\{\psi'_k\}$ não seja completo. Existe, então, ψ' tal que

$$(\psi', \psi'_k) = 0 \quad \therefore \quad |(\psi'_k, \psi'_l)|^2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

e pela transformação inversa teremos

$$|(\psi'_k, \psi'_l)|^2 = |(\psi_k, \psi_l)|^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

o que é impossível pois $\{\psi_k\}$ é completo por hipótese. Com o desenvolvido acima nós mostramos que um conjunto de vetores de estados que formam uma base no espaço de Hilbert se mantém invariantes sob transformações de simetria. Como o teorema nos diz que transformações de simetria no espaço de Hilbert são representadas por operadores, devemos então estudar a atuação desses operadores em vetores do espaço. Para tanto comecemos por escolher um elemento de $\{\psi_k\}$, digamos ψ_1 , e definamos

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \psi_2), \quad (k \neq 1) \in R_k. \quad (\text{A.6})$$

Como a transformação preserva a completeza, qualquer vetor que pertence a TR_k pode ser escrito como: $\phi'_k = \sum_l C_{kl} \psi'_l$ e podemos calcular

$$|(\psi_1, \phi_k)|^2 = \left| \left(\psi_1, \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + \phi_k) \right) \right|^2 = \frac{1}{2} |(\psi_1, \psi_1) + (\psi_1, \psi_k)|^2 = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.7})$$

e

$$\left| (\psi'_1, \phi'_k) \right|^2 = \left| \left(\psi'_1, \sum_l C_{kl} \psi'_l \right) \right|^2 = \left| \sum_l C_{kl} (\psi'_1, \psi'_l) \right|^2 = |C_{k1}|^2, \quad \text{com} \quad (\psi'_1, \psi'_l) = \delta_{l1}, \quad (\text{A.8})$$

como $|(\psi_1, \phi_k)|^2 = |(\psi'_1, \phi'_k)|^2 \Rightarrow |C_{k1}|^2 = \frac{1}{2}$.

Podemos fazer o mesmo procedimento para um vetor qualquer e teremos:

$$|(\psi_k, \phi_k)|^2 = \left| \left(\psi_1, \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_k + \phi_k) \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{A.9})$$

$$\left| (\psi'_k, \phi'_k) \right|^2 = |C_{kk}|^2 \quad \therefore \quad |C_{kk}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.10})$$

analogamente, temos $C_{kl} = 0$ ($k \neq l$ e $k \neq 1$).

Escolhamos $C_{kk} = C_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e chamemos essa transformação de U :

$$\phi'_k = U \phi_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (U \psi_1 + U \psi_k). \quad (\text{A.11})$$

Construímos um mapa que engendra uma transformação de simetria em um estado. Vamos estendê-lo a todo o espaço de Hilbert. Seja $\psi = \sum_k C_k \psi_k$. Como $\{\psi'_k\} = \{U\psi_k\}$ é completo, temos $\psi' = \sum_k C'_k U\psi_k$

$$|(\psi_k, \psi)|^2 = \left| \left(\psi_k, \sum_l C_l \psi_l \right) \right|^2 = |C_k|^2 \quad (\text{A.12})$$

$$\left| (\psi'_k, \psi') \right|^2 = |C'_k|^2 \quad \therefore \quad |C'_k|^2 = |C_k|^2 \quad \forall k, \quad (\text{A.13})$$

em particular para $|C_1|^2 = |C'_1|^2$:

$$\frac{|C_k|}{|C_1|^2} = \frac{|C'_k|}{|C'_1|^2} \Rightarrow \frac{|C_k|^2}{|C_1|} \Rightarrow \left| \frac{C_k}{C_1} \right|^2 = \left| \frac{C'_k}{C'_1} \right|^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{C'_k}{C'_1} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \right); \\ \operatorname{Im} \left(\frac{C'_k}{C'_1} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{C_k}{C_1} \right). \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Ou seja, ou $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k}{C_1}$ (I) ou $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k^*}{C_1^*}$ (II).

Observação 1: Se $C_1 = 0$, devemos repetir o procedimento com outra escolha para ϕ_k . Alguma escolha será possível, pois ψ é não nulo.

Observação 2: A condição advinda de $|(\phi'_k, \psi')|^2 = |(\phi_k, \psi)|^2$ fixa a escolha em (I) ou (II).

Devemos mostrar agora que a mesma escolha $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k}{C_1}$ ou $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k^*}{C_1^*}$ deve ser feita para cada k .

Suponhamos que para algum k tenhamos $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k}{C_1}$, enquanto para tenhamos $l \neq k$ $\frac{C'_l}{C'_1} = \frac{C_l^*}{C_1^*}$.

Definamos agora $\Phi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1 + \psi_k + \psi_l) \Rightarrow \Phi = \frac{1}{\sqrt{3}} (U\psi_1 + U\psi_k + U\psi_l)$:

$$\begin{cases} |(\Phi, \psi)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1 + \psi_k + \psi_l), \sum_m C_m \psi_m \right|^2 = \frac{1}{3} |C_1 + C_k + C_l|^2; \\ |(\Phi', \psi')|^2 = \frac{1}{3} |C'_1 + C'_k + C'_l|^2. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{|C_1 + C_k + C_l|}{|C_1|^2} = \frac{|C'_1 + C'_k + C'_l|}{|C'_1|^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C'_k}{C'_1} + \frac{C'_l}{C'_1} \right|^2,$$

fazendo as substituições(I) e (II) em (A.17), temos

$$\left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l^*}{C_1^*} \right|^2 \quad (\text{A.18})$$

$$\left(1 + \frac{C_k^*}{C_1^*} + \frac{C_l}{C_1} \right) \left(1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l^*}{C_1^*} \right) = \left(1 + \frac{C_k^*}{C_1^*} + \frac{C_l^*}{C_1^*} \right) \left(1 + \frac{C_k}{C_1} + \frac{C_l}{C_1} \right)$$

desenvolvendo os termos das equações acima e rearranjando ficamos com

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{C_l C_k}{C_1 C_1}}_{A^*} + \underbrace{\frac{C_l^* C_k^*}{C_1^* C_1^*}}_A &= \underbrace{\frac{C_l^* C_k}{C_1^* C_1}}_{B^*} + \underbrace{\frac{C_l C_k^*}{C_1 C_1^*}}_B, \\ 2\text{Re}(A) &= 2\text{Re}(B), \\ \text{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \frac{C_l^*}{C_1^*} \right) &= \text{Re} \left(\frac{C_k}{C_1} \frac{C_l}{C_1} \right), \\ \text{Re}(uv^*) &= \text{Re}(uv), \\ \text{Re}(uv^*) &= \text{Re}[(u_1 + iu_2)(v_1 - iv_2)] = u_1 v_1 + u_2 v_2, \\ \text{Re}(uv) &= u_1 v_1 - u_2 v_2, \\ u_2 v_2 = 0 &\Rightarrow \text{Im} \left(\frac{C_k}{C_1} \right) \text{Im} \left(\frac{C_l}{C_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

o que é uma contradição, pois partimos de razões complexas.

Devemos ter $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k}{C_1}$ ou $\frac{C'_k}{C'_1} = \frac{C_k^*}{C_1^*}$ para todos os casos.

$$\begin{aligned} C'_1 = C_1 &\rightarrow C'_k = C_k, \forall k, \text{ e } U \left(\sum_k C_k \psi_k \right) = \sum_k C_k U \psi_k \quad (\star); \\ C'_1 = C_1^* &\rightarrow C'_k = C_k^*, \forall k, \text{ e } U \left(\sum_k C_k \psi_k \right) = \sum_k C_k^* U \psi_k \quad (\star\star). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

E finalmente, sejam $\psi = \sum_k A_k \psi_k$ e $\phi = \sum_k B_k \psi_k$ com U atuando segundo $(\star)$:

$$\begin{aligned} U(\alpha\psi + \beta\phi) &= U \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) \psi_k = \sum_k (\alpha A_k + \beta B_k) U \psi_k = \\ &= \alpha \sum_k A_k U \psi_k + \beta \sum_k B_k U \psi_k = \alpha U \psi + \beta U \phi \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

portanto U é linear.

Por outro lado $(U\psi, U\phi) = (\psi, U^\dagger U\phi)$, logo $(\psi, U^\dagger U\phi) = (\psi, \phi) \Rightarrow U^\dagger U = 1 \therefore U^\dagger = U$ e U é unitária.

Tomando U atuando segundo $(\star\star)$: $U(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha^*U\psi + \beta^*U\phi \therefore U$ é anti-linear. Por outro lado

$$\begin{aligned} (U\psi, U\phi) &= \left(U \sum_k A_k \psi_k, U \sum_l B_l \psi_l \right) = \\ &= \left(\sum_k A_k^* U \psi_k, \sum_l B_l^* U \psi_l \right) = \sum_{k,l} A_k B_l^* (\psi_k', \psi_l') = \sum_k A_k B_k^* = (\psi, \phi)^* \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

e U é anti-unitário.

Com o que foi desenvolvido acima o teorema fica demonstrado.