

RESSALVA

Atendendo a solicitação do autor, o texto completo desta tese será disponibilizado somente a partir de 28/04/2025.

HADAMEZ KUZMINSKAS

Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária

Ilha Solteira - SP

2023



HADAMEZ KUZMINSKAS

Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira - SP

2023



FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

K97p Kuzminskas, Hadamez.
Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária / Hadamez Kuzminskas. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
98 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2023

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Inclui bibliografia

1. Sistemas de ordem fracionária. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Controle robusto. 4. Realimentação de saída. 5. Modelo reduzido de ordem fracionária. 6. Identificação com condições iniciais não nulas.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

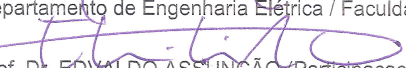
TÍTULO DA TESE: Projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas para sistemas dinâmicos de ordem fracionária

AUTOR: HADAMEZ KUZMINSKAS

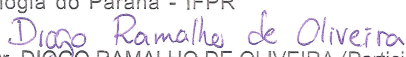
ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES (Participação Presencial)
Departamento de Eixo de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR


Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Elétrica/Automação / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS


Prof. Dr. LEONARDO ATAÍDE CARNIATO (Participação Virtual)
Departamento de Indústria / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

Ilha Solteira, 28 de abril de 2023

AGRADECIMENTOS

Gratidão:

- A Deus, a minha família e aos meus amigos, pelo cuidado, atenção e compreensão;
- Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, ao Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão e ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção pela confiança e incentivo;
- Aos colaboradores do Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP de Ilha Solteira, pelo respeito, cooperação e união;
- A todos os colaboradores da pós-graduação da UNESP de Ilha Solteira, solícitos em ajudar;
- A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade de crescimento e apoio financeiro.

RESUMO

Esse trabalho aborda os seguintes tópicos em sistemas lineares de ordem fracionária: análise de estabilidade, projetos de controladores robustos, modelo reduzido e identificação com condições iniciais não nulas. Os objetivos do primeiro tópico foram: 01) Apresentar quatro critérios de análise de estabilidade para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$ via LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), levando-se em conta que a região de estabilidade desses sistemas contém setores no semi-plano complexo direito. Um dos critérios é baseado em GLMIs (*Generalized Linear Matrix Inequalities*) e fornece uma condição necessária e suficiente em LMIs para atestar a estabilidade assintótica. Esse critério fundamenta parte das pesquisas existentes em síntese de controle para sistemas fracionários; 02) Apresentar um critério de análise de estabilidade para sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$ via LMIs, observando que sua região de estabilidade é um setor no semi-plano complexo esquerdo. Os objetivos do segundo tópico foram: 01) Apresentar resultados de síntese de controle robusto por realimentação de pseudo-estados via LMIs para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$, bem como uma proposta de controle robusto por realimentação α -derivativa via LMIs, utilizando o critério das GLMIs; 02) O mesmo para os sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$, utilizando o critério pertinente. As propostas deste tópico são corroboradas por exemplos numéricos. O objetivo do próximo tópico foi propor um método de controle com realimentação de saída para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$ via LMIs, lançando-se mão das equações do sistema, de um observador de pseudo-estados do tipo *Luenberger*, de uma malha externa e de dois *leaky integrators*, a fim de fornecer uma descrição aumentada em espaço de pseudo-estados e uma equação adequada para a saída controlada do sistema. As LMIs calculam ganhos tais que os autovalores dos blocos da matriz do sistema aumentado estejam localizados na região de estabilidade, incluindo alocação regional dos autovalores. A análise de robustez proposta contém as matrizes incertas consideradas diretamente na matriz do sistema aumentado. O análogo elétrico de ordem fracionária de um modelo vigente para o sistema respiratório humano é utilizado como aplicação, fornecendo adequadamente uma pressão de ar de entrada capaz de gerar um fluxo de ar de entrada em um perfil de tempo desejado, o que pode ser integrado, portanto, ao projeto de um respirador mecânico. O próximo tópico propõe um método para a obtenção de um modelo com número reduzido de variáveis de pseudo-estados. A motivação elementar é reduzir o tempo computacional. Em exemplos numéricos, a comparação das funções de transferência e respostas no tempo mostram a efetividade da proposta. O último tópico propõe um método de identificação de funções de transferência fracionárias com condições iniciais não nulas, descritas pela derivada de Caputo, com base em resultados estabelecidos para o caso de condições iniciais nulas, generalizando-os. A efetividade é demonstrada em exemplos numéricos.

Palavras-chave: sistemas de ordem fracionária; desigualdades matriciais lineares; controle robusto; realimentação de saída; modelo reduzido de ordem fracionária; identificação com condições iniciais não nulas.

ABSTRACT

This work addresses the following topics in linear systems of fractional order: stability analysis, robust controller designs, reduced model and identification with non-zero initial conditions. The objectives of the first topic were: 01) Present four stability analysis criteria for systems of order $\alpha \in (0, 1)$ via LMIs (Linear Matrix Inequalities), taking into account that the stability region of these systems contains sectors in the right complex half-plane. One of the criteria is based on GLMIs (*Generalized Linear Matrix Inequalities*) and provides a necessary and sufficient condition on LMIs to attest the asymptotic stability. This criterion underpins part of the existing research on control synthesis for fractional systems; 02) Present a stability analysis criterion for systems of order $\alpha \in (1, 2)$ via LMIs, noting that the stability region is a sector in the left complex half-plane. The objectives of the second topic were: 01) Present synthesis results of robust pseudo-state feedback control via LMIs for systems of order $\alpha \in (0, 1)$, as well as a proposal for robust α -derivative feedback control via LMIs, using the GLMIs criteria; 02) The same for systems with order $\alpha \in (1, 2)$, using the presented criteria. The proposals in this topic are corroborated by numerical examples. The objective of the next topic was to propose a control method with output feedback for systems of order $\alpha \in (0, 2)$ via LMIs, based on the system equations, a Luenberger type pseudo-state observer, an outer loop and two leaky integrators, in order to provide an augmented description in pseudo-state space and a suitable equation for the controlled output of the system. LMIs calculate gains such that the eigenvalues of the blocks of the augmented system matrix are located in the stability region, including regional allocation of the eigenvalues. The proposed robustness analysis contains the uncertain matrices synthesized directly into the augmented system matrix. The fractional order electrical analogue of a current model for the human respiratory system is used as an application, adequately providing an inlet air pressure capable of generating an inlet airflow at a desired time profile, which can be integrated, therefore, for the design of a mechanical respirator. The next topic proposes a method for obtaining a model with a reduced number of pseudo-state variables. The elementary motivation is to reduce computational time. In numerical examples, the comparison of transfer functions and responses over time shows the effectiveness of the proposal. The last topic proposes a method for identifying fractional transfer functions with non-zero initial conditions, described by the Caputo derivative, based on results established for the case of zero initial conditions, generalizing them. The effectiveness was demonstrated in numerical examples.

Keywords: fractional order systems; linear matrix inequalities; robust control; output feedback; reduced fractional order model; identification with nonzero initial conditions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Regiões de estabilidade no plano complexo, destacadas em azul	20
Figura 2	Gráfico das regiões de estabilidade, destacadas em azul	20
Figura 3	Decomposição da região de estabilidade	26
Figura 4	Pêndulo invertido	41
Figura 5	Resultados do pêndulo invertido de ordem $\alpha = 0,5$	44
Figura 6	Exemplo numérico, sistema de ordem $\alpha = 0,5$	45
Figura 7	Exemplo numérico, sistema de ordem $\alpha = 1,5$	46
Figura 8	Diagrama de blocos, controle de saída	50
Figura 9	Árvore respiratória	56
Figura 10	Linha de transmissão	57
Figura 11	Análogo elétrico recursivo para a árvore respiratória, com $Z_i = R_{e_i} + jL_{e_i}$, $i = 1, \dots, 24$	61
Figura 12	Análogo elétrico recursivo para a árvore respiratória no formato de uma rede do tipo <i>ladder</i>	61
Figura 13	Rede RC do tipo <i>ladder</i>	62
Figura 14	Resultados introdutórios	63
Figura 15	Resultados sem a malha externa: $K_r = 0$	64
Figura 16	Resultados com a malha externa, ganho $K_r = 100$	65
Figura 17	$K_r = 100$ na malha externa, com variações de até $\pm 5\%$ nos parâmetros R_{UA} e C_{UA}	66
Figura 18	$K_r = 100$ na malha externa, com variações de até $\pm 15\%$ nos parâmetros R_{UA} e C_{UA}	66
Figura 19	Métrica de erro E_H	73
Figura 20	Respostas $\hat{H}_1(j\omega)$ a $\hat{H}_4(j\omega)$ e $H_1(j\omega)$ a $H_4(j\omega)$	74
Figura 21	Correntes $i_0(t)$ a $i_3(t)$	74
Figura 22	Métrica de erro E_H	75
Figura 23	Respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$	75
Figura 24	Correntes $i(t)$	76
Figura 25	Métrica de erro E_H	76
Figura 26	Respostas $\hat{H}_1(j\omega)$ a $\hat{H}_4(j\omega)$ e $H_1(j\omega)$ a $H_4(j\omega)$	77
Figura 27	Correntes $i_0(t)$ a $i_3(t)$	77
Figura 28	Métrica de erro E_H	78
Figura 29	Respostas $\hat{H}(j\omega)$ e $H(j\omega)$	78
Figura 30	Correntes $i(t)$	79

Figura 31	Geração dos sinais utilizados no método proposto. As funções de transferência dos blocos ‘Sistema a ser identificado’, ‘Filtro 1’ e ‘Filtro 2’ são, respectivamente, $G(s)$, $(\sigma + s)/s$ e σ/s . Os círculos com os sinais $+$ e $\times$ indicam pontos de multiplicação e adição no domínio do tempo, respectivamente. $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ representa a transformada inversa de Laplace de $H(s)$	81
Figura 32	Exemplo 6.1 (a) Sinal de entrada $u(t)$ (b) Sinal de saída $y(t)$, o gráfico menor mostra a condição inicial $y(0^-)$ (c) Erro E empregado na escolha de α_1	85
Figura 33	Exemplo 6.2 (a) Sinal de entrada $u(t)$ (b) Sinal de saída $y(t)$, o gráfico menor mostra a condição inicial $y(0^-)$ (c) Erro E empregado na escolha de α_1 e β_1 , o gráfico menor mostra que a função de transferência foi mantida estritamente própria	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros do pêndulo invertido	42
Tabela 2	Exemplo 6.1. Parâmetros estimados (média $\pm$ desvio padrão sobre 1000 realizações) pelo método proposto e pelo método em Galvão et al. (2020)	85
Tabela 3	Exemplo 6.2. Parâmetros estimados (média $\pm$ desvio padrão sobre 1000 realizações) pelo método proposto e pelo método em Galvão et al. (2020)	87

LISTA DE SIGLAS

MATLAB	Laboratório matricial (<i>MATrix LABoratory</i>)
FOMCON	Modelagem de ordem fracionária (<i>Fractional Order Modeling Control</i>)
SISO	Entrada-única, saída-única (<i>Single-Input, Single-Output</i>)
BIBO	Entrada-limitada, saída-limitada (<i>Bounded-Input, Bounded-Output</i>)
PVINI	Problema de Valor Inicial de ordem Não Inteira
LMIs	Desigualdades matriciais lineares (<i>Linear Matrix Inequalities</i>)
GLMI	Desigualdade matricial linear generalizada (<i>Generalized Linear Matrix Inequalities</i>)
CPE	Elemento de fase constante (<i>Constant Phase Element</i>)
FOTF	Função de transferência de ordem fracionária (<i>Fractional-Order Transfer Function</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais;
$\mathbb{R}^{n \times p}$	Conjunto das matrizes $n \times p$ com elementos reais;
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos;
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos;
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos;
$\mathbb{C}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos complexos;
$\mathbb{C}^{n \times p}$	Conjunto das matrizes $n \times p$ com elementos complexos;
$\mathbb{N}$	Conjunto dos elementos naturais;
$\Gamma(\cdot)$	Função Gama de Euler;
M^T	Transposta da matriz real M ;
M^{-1}	Inversa da matriz M ;
$M \succ (\succeq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) positiva;
$M \prec (\preceq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) negativa;
$I_{n \times n}$	Matriz identidade de ordem $n \times n$;
$0_{n \times p}$	Matriz nula de ordem $n \times p$;
$ z $	Módulo do número complexo z ;
$\arg(z)$	Argumento do número complexo z ;
$ \arg(z) $	Módulo do argumento do número complexo z ;
$Re\{z\}$,	Parte real do número complexo z ;
$Im\{z\}$,	Parte imaginária do número complexo z ;
$\bar{z}$	Conjugado do número complexo z ;
$\bar{Z}$	Conjugado da matriz complexa Z ;
Z^*	Conjugado transposto da matriz complexa Z ;
$Sym\{M\}$	É a soma $M + M^*$;
$\min$	Mínimo de um conjunto;
$\max$	Máximo de um conjunto;
$\sup$	Supremo de um conjunto;
$\lambda(M)$	Conjunto formado pelos autovalores da matriz M ;
$Re(\lambda(M))$	Conjunto formado pela parte real dos autovalores da matriz M ;
$Im(\lambda(M))$	Conjunto formado pela parte imaginária dos autovalores da matriz M ;
$ \arg(\lambda(M)) $	Conjunto formado pelo módulo dos argumentos dos autovalores da matriz M ;
$\min \arg(\lambda(M)) $	Mínimo do conjunto formado pelo módulo dos argumentos dos autovalores da matriz M ;
$\mathcal{D}^\alpha$	Operador linear derivada temporal de ordem α ;

I^α	Operador linear integral de Riemann-Liouville de ordem α ;
${}^c D^\alpha$	Operador linear derivada temporal de Caputo de ordem α ;
$f^{(k)}(t)$	Derivada de ordem inteira k da função $f(t)$;
$\exists$	Sentença matemática ‘existe’;
$\nexists$	Sentença matemática ‘não existe’;
$\neq$	Sentença matemática ‘diferente de’;
$\Rightarrow$	Sentença matemática ‘implica em’;
$>, <$	Sentença matemática ‘maior’ e ‘menor’, respectivamente;
$\geq, \leq$	Sentença matemática ‘maior ou igual’ e ‘menor ou igual’, respectivamente;
$\cup$	União de conjuntos;
$\cap$	Intersecção de conjuntos;
$^\circ$	Grau trigonométrico;
$\%$	Porcentagem;
$\sum$	Somatório;
$\prod$	Produtório;
$\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathfrak{D}$	Denotam regiões ou conjuntos oportunamente definidos;
$tr(M)$	Traço da matriz M ;
$rank(M)$	Posto da matriz M ;
$L_1[a, b]$	Espaço das funções módulo integráveis no intervalo $[a, b]$;
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformada de <i>Laplace</i> da função $f(t)$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	OBJETIVOS	16
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	16
2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA $\alpha \in (0, 2)$	18
2.1	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0, 1)$	20
2.1.1	Critério de estabilidade baseado na análise da região de instabilidade, condição necessária e suficiente	20
2.1.2	Critério de estabilidade baseado em um sistema de ordem inteira equivalente, condição suficiente	22
2.1.3	Critério de estabilidade baseado em análise geométrica, condição necessária e suficiente	24
2.1.4	Critério de estabilidade baseado em GLMIs (<i>‘Generalized Linear Matrix Inequalities’</i>), condição necessária e suficiente	25
2.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (1, 2)$	30
2.3	CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	31
3	SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA $\alpha \in (0, 2)$	32
3.1	CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0, 1)$	33
3.1.1	Realimentação de pseudo-estados	33
3.1.2	Realimentação α -derivativa	36
3.2	CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (1, 2)$	38
3.2.1	Realimentação de pseudo-estados	38
3.2.2	Realimentação α -derivativa	39
3.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS	40
3.4	CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	47
4	CONTROLE DE SAÍDA DE SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0, 2)$ EMPREGANDO UM OBSERVADOR DE PSEUDO-ESTADOS	48
4.1	CONDIÇÃO EM LMI PARA $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE ORDEM $\nu \in (0, 2)$	51
4.2	USO DE UMA MALHA EXTERNA	53
4.3	ANÁLISE ROBUSTA	54
4.4	MODELO DO SISTEMA RESPIRATÓRIO HUMANO PARA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA	56
4.4.1	Análogo elétrico da rede pulmonar	57

4.4.1.1	<i>Análogo elétrico segundo o modelo viscoelástico</i>	58
4.4.1.2	<i>Análogo elétrico segundo o modelo elástico</i>	60
4.4.2	Análogo elétrico com o CPE	61
4.4.3	Análogo elétrico com o CPE, representação em espaço de pseudo-estados	62
4.5	RESULTADOS: CONTROLE DE SAÍDA COM OBSERVADOR DE PSEUDO-ESTADOS APLICADO À REDE PULMONAR	63
4.6	CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	67
5	MODELO REDUZIDO PARA SISTEMAS DE ORDEM $\alpha \in (0, 2)$	68
5.1	CONCEITOS PRELIMINARES	68
5.1.1	Sistemas de ordem fracionária comensuráveis	68
5.1.2	Ferramentas matemáticas	68
5.2	MODELO REDUZIDO PARA SISTEMAS FRACIONÁRIOS COMENSURÁVEIS	70
5.3	APLICAÇÃO AO MODELO DO SISTEMA RESPIRATÓRIO HUMANO	73
5.3.1	Sistema original de ordem $\alpha \in (0, 1)$	73
5.3.1.1	<i>Redução com os quatro primeiros pseudo-estados do modelo pulmonar</i>	73
5.3.1.2	<i>Redução com o primeiro pseudo-estado do modelo pulmonar</i>	75
5.3.2	Sistema original de ordem $\alpha \in (1, 2)$	76
5.3.2.1	<i>Redução com os quatro primeiros pseudo-estados do modelo pulmonar</i>	76
5.3.2.2	<i>Redução com o primeiro pseudo-estado do modelo pulmonar</i>	78
5.4	CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	79
6	IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE ORDEM FRACIONÁRIA E CONDIÇÕES INICIAIS NÃO NULAS UTILIZANDO SINAIS MODULADOS EXPONENCIALMENTE	80
6.1	CONCEITOS PRELIMINARES	80
6.2	MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO PROPOSTO	82
6.3	RESULTADOS	84
6.4	CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	87
7	CONCLUSÕES	88
7.1	CONTRIBUIÇÕES	88
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICE A: SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE VOLTERRA - MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH FRACIONÁRIO	97

1 INTRODUÇÃO

Desde as últimas décadas, a comunidade científica constatou que o comportamento dinâmico de muitos sistemas físicos é precisamente descrito por equações diferenciais de ordem fracionária, de modo que a modelagem com os operadores do cálculo fracionário se torna frequente nas pesquisas em diversas áreas das ciências e engenharias, como, por exemplo, em condução de calor (POVSTENKO, 2004, 2009; ABRO; GOMEZ-AGUILAR, 2021), ondas eletromagnéticas (ENGHEIA, 1997; TARASOV, 2009; ROSALES et al., 2011; GÓMEZ-AGUILAR et al., 2016b; KACHHIA; ATANGANA, 2021), mecânica dos fluidos (KULISH; LAGE, 2002; JENA; CHAKRAVERTY, 2021), viscoelasticidade (BAGLEY; CALICO, 1991; ESPINDOLA; NETO; LOPES, 2005; LORENZO et al., 2017), propagação de ondas sonoras em materiais porosos e rígidos (FELLAH; DEPOLLIÉ; FELLAH, 2002; ZHU et al., 2021), biomedicina (IONESCU; KEYSER, 2009), circuitos RLC (RADWAN; SALAMA, 2012; RADWAN; FOUDA, 2013; GÓMEZ-AGUILAR et al., 2016a, 2017; ACAY; INC, 2021), osciladores (SAID et al., 2017; ELWY et al., 2021), baterias (MU et al., 2017; LIU et al., 2022) e neurônios (SHARMA et al., 2020; MAO; HU, 2021). O cálculo fracionário, ferramental matemático presente nessas áreas, pode ser estudado, por exemplo, em Oldham e Spanier (1974), Podlubny (1998), Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), West (2016), Yang (2019), Anastassiou (2020) e Anastassiou (2021).

O controle de sistemas de ordem fracionária é extensivamente considerado na literatura, desde os conceitos elementares de análise de estabilidade (MATIGNON, 1996, 1998; LI; CHEN; PODLUBNY, 2009; SABATIER; MOZE; FARGES, 2010; YU et al., 2013; GUO; MA, 2016; DUARTE-MERMOUD et al., 2015; DAI; CHEN, 2017), observabilidade e controlabilidade (MATIGNON; D'ANDRÉA-NOVEL, 1996, 1997; BETTAYEB; DJENNOUNE, 2008; BALACHANDRAN et al., 2013; AL-ZHOUR, 2022) até os conceitos mais elaborados, como controle: proporcional - integral - derivativo (PODLUBNY; DORCAK; KOSTIAL, 1997; PODLUBNY, 1999; PADULA; VISIOLI, 2011; DUMLU; ERENTURK, 2013; SHAH; AGASHE, 2016; SHENG; BAI; XIE, 2021), por modos deslizantes (EFE, 2008; YIN et al., 2017; RABAH; LADACI, 2020), adaptativo (SHI et al., 2020) e *backstepping* (LIU et al., 2017, 2020).

Parte do controle moderno se estabelece com os problemas de otimização convexa caracterizados por LMIs. A literatura contém condições em LMIs para a estabilidade e estabilização robusta de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$ com incertezas politópicas (KUZMINSKAS, 2018; FARGES; SABATIER; MOZE, 2011), intervalares e politópicas (ADELIPOUR; ABOOE; HAERI, 2015) e limitadas em norma (N'DOYE et al., 2013; ZHANG; LI, 2016), bem como de sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$ com incertezas politópicas (FARGES; SABATIER; MOZE, 2011), intervalares (LU; CHEN, 2009) e limitadas em norma (N'DOYE et al., 2013).

O critério mais difundido para atestar a estabilidade de sistemas fracionários lineares e invariantes no tempo foi introduzido por *Matignon* e consiste em uma condição necessária e

suficiente, com base nas localizações dos autovalores da matriz dinâmica do sistema (MATIGNON, 1996). Conforme este critério, a região de estabilidade é especificada através da ordem α do sistema e é convexa para $\alpha \in (1, 2)$ e não convexa para $\alpha \in (0, 1)$. A partir desse resultado, são obtidas em Sabatier, Moze e Farges (2010) condições em LMIs baseadas em 4 critérios distintos, a fim de atestar a estabilidade de sistemas fracionários lineares invariantes no tempo de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (apesar da não convexidade da região) e de ordem $\alpha \in (1, 2)$. O estudo da estabilidade e estabilização se desenvolve também através da extensão do método direto de *Lyapunov* para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$, estabelecida em Li, Chen e Podlubny (2009, 2010), segundo a qual a estabilidade assintótica é verificada através da existência de uma função de *Lyapunov* $V(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$, com $x(t)$ o vetor de pseudo-estados do sistema em questão, tal que ${}^C D^\alpha V(x(t)) < 0, \forall x(t) \neq 0$. Esta metodologia, juntamente com o limitante superior de ${}^C D^\alpha V(x(t))$, para $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T > 0$, (DUARTE-MERMOUD et al., 2015), é utilizada, por exemplo, em Kuzminskas (2018) na dedução de condições em LMIs para a estabilização de sistemas lineares e não lineares descritos por modelos *fuzzy Takagi-Sugeno*. Ademais, a extensão do método direto de *Lyapunov* para sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$ é mais recente e se encontra estabelecida em Guo e Ma (2016).

Na área de identificação de sistemas fracionários, os seguintes resultados são destacados: identificação dos parâmetros e expoentes fracionários da função de transferência através de sinais modulados exponencialmente obtidos de uma entrada ao degrau (JACYNTHO et al., 2015) ou de uma entrada arbitrária (GALVÃO et al., 2020) com condições iniciais nulas, e identificação dos parâmetros da equação diferencial fracionária, com condições iniciais não nulas, através do uso de funções *block pulse* (LU et al., 2020).

No ínterim, foi estabelecido na literatura o chamado modelo difusivo para descrever a natureza fracionária de sistemas dinâmicos (TRIGEASSOU et al., 2012b; TRIGEASSOU; MAAMRI; OUSTALOUP, 2013). Nessa abordagem, o sistema fracionário é convertido em um sistema inteiro de dimensão infinita. Essa conversão não decorre de uma aproximação do sistema fracionário por um sistema inteiro, mas da natureza inteira de dimensão distribuída e infinita do integrador fracionário (TRIGEASSOU et al., 2012a). Considerações acerca desse modelo e como ele se relaciona com o ferramental aqui utilizado estão fora do escopo desse trabalho.

Os resultados propostos nesse trabalho são assim chamados: ‘Controle robusto de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$ (ou de sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$), realimentação α -derivativa’, ‘Controle de saída de sistemas de ordem $\nu \in (0, 2)$ empregando um observador de pseudo-estados’, ‘Modelo reduzido para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$ ’ e ‘Identificação de funções de transferência de ordem fracionária e condições iniciais não nulas usando sinais modulados exponencialmente’, contemplados nos Capítulos 3, 4, 5 e 6, respectivamente. O sistema físico utilizado para exemplificar as metodologias dos Capítulos 4 e 5 é o sistema respiratório humano, através do análogo elétrico de um modelo vigente (IONESCU; MACHADO; KEYSER,

2011). A natureza fracionária das vias aéreas respiratórias e do pulmão decorre da presença de propriedades dicotômicas e recursivas, que caracterizam uma estrutura fractal e conduzem naturalmente ao modelo com operadores fracionários (IONESCU et al., 2009). Esse modelo utiliza o CPE (*‘Constant Phase Element’*), também conhecido como capacitor de ordem fracionária (ELWAKIL, 2010). A impedância do CPE é $Z_{CPE} = 1/(s^\alpha C)$, com C a pseudo-capacitância (WESTERLUND; EKSTAM, 1994). A fase entre corrente e tensão do elemento capacitivo convencional de impedância $Z = 1/(sC)$, com C a capacitância em $[F]$, é constante e igual a $-\pi/2$. A fase do CPE é $-\alpha\pi/2$, a qual também é constante para um determinado valor de α , sem introdução de dependência com a frequência. Por esse motivo, o capacitor fracionário é chamado de *‘Constant Phase Element’*.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos desta tese foram propor:

- LMIs para a estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$ ou de ordem $\alpha \in (1, 2)$, via realimentação α -derivativa;
- Uma metodologia original de controle de saída para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$ via LMIs, que inclui observador de pseudo-estados (MATIGNON; D’ANDRÉA-NOVEL, 1997; N’DOYE et al., 2009; LAN; HUANG; ZHOU, 2012; QIU; JI, 2017), ganho adicional de malha externa e *leaky integrators* (WEITENBERG et al., 2018). Como aplicação é utilizado um modelo vigente para o sistema respiratório humano;
- Um modelo com quantidade reduzida de variáveis de pseudo-estados para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$, utilizando a função de transferência e propriedades do traço matricial. Como aplicação é utilizado um modelo vigente para o sistema respiratório humano;
- Uma metodologia de identificação dos coeficientes e expoentes de funções de transferência de ordem fracionária, segundo a derivada de *Caputo*, baseada na metodologia aplicada a condições iniciais nulas estabelecida em Galvão et al. (2020).

A contextualização inicial envolve principalmente:

- Apresentação dos principais critérios traduzidos em LMIs vigentes na literatura para a estabilidade e estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$;
- Apresentação do modelo vigente para o sistema respiratório humano.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

O Capítulo 2 apresenta as principais condições em LMIs para a análise de estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$. O Capítulo 3 apresenta resultados em LMIs para a estabilização de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$ via realimentação de pseudo-estados e propõe resultados via

realimentação α -derivativa. O Capítulo 4 propõe um método de controle de saída para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$. O Capítulo 5 propõe a identificação de um modelo com quantidade reduzida de variáveis de pseudo-estados e o Capítulo 6 a identificação de funções de transferência fracionárias com condições iniciais não nulas. Em sequência as conclusões da tese e um apêndice sobre a simulação de sistemas de ordem fracionária $\alpha > 0$.

7 CONCLUSÕES

Essa tese compila quatro critérios para análise de estabilidade por realimentação de pseudo-estados de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$, via LMIs. Um dos critérios mais utilizados na literatura para as propostas de síntese de controle é aquele que se baseia no conceito de regiões LMIs generalizadas, aplicado a sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$. Utilizando esse critério, uma proposta para o controle via realimentação α -derivativa de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$ encontra-se no Teorema 3.3. Além disso, o Teorema 3.5 traz a proposta para o controle via realimentação α -derivativa agora aplicada a sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$. No Capítulo 4 é proposta uma metodologia de controle de saída que inclui um observador de pseudo-estados do tipo *Luenberger*, *leaky integrators* e uma malha externa, cuja eficácia é demonstrada através da aplicação ao modelo do sistema respiratório humano, em que é fornecida uma pressão de ar capaz de gerar um perfil desejado de vazão de ar, o que pode ser integrado ao projeto de um respirador mecânico. Além disso, através de uma abordagem em que as matrizes incertas são consideradas diretamente em uma matriz aumentada, o ganho do controlador demonstrou ser robusto diante de variações consideráveis nos parâmetros. O modelo do sistema respiratório humano também demonstra, no Capítulo 5, a eficácia da metodologia proposta de redução da quantidade de variáveis de pseudo-estados de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$. Por fim, o Capítulo 6 propõe um método de identificação de funções de transferência de ordens fracionárias $0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$, com condições iniciais não nulas, utilizando sinais modulados exponencialmente e formas de onda de entrada arbitrárias, como extensão dos resultados aplicados ao caso em que o sistema está inicialmente em repouso, estabelecidos em Galvão et al. (2020). A eficácia da identificação é demonstrada com exemplos numéricos de funções de transferência.

7.1 CONTRIBUIÇÕES

- Apresentação e contextualização dos resultados fundamentais no âmbito da análise e síntese de sistemas de ordem fracionária através de LMIs;
- Teoremas 3.3 e 3.5 para a estabilização α -derivativa de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$ e $\alpha \in (1, 2)$, respectivamente;
- Capítulo 4: metodologia de controle de saída, com análise de robustez;
- Capítulo 5: metodologia de redução da quantidade de variáveis de pseudo-estados;
- Capítulo 6: identificação de funções de transferência de ordens fracionárias, com condições iniciais não nulas.

REFERÊNCIAS

- ABRO, K. A.; GOMEZ-AGUILAR, J. F. Fractional modeling of fin on non-Fourier heat conduction via modern fractional differential operators. *Arabian Journal for Science and Engineering*, Springer, Heidelberg, v. 46, n. 3, p. 2901–2910, 2021.
- ACAY, B.; INC, M. Electrical circuits RC, LC, and RLC under generalized type non-local singular fractional operator. *Fractal and Fractional*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, Basel, v. 5, n. 1, p. 9, 2021.
- ADELIPOUR, S.; ABOOEE, A.; HAERI, M. LMI-based sufficient conditions for robust stability and stabilization of LTI-fractional-order systems subjected to interval and polytopic uncertainties. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Sage Publications Ltd., London, v. 37, n. 10, p. 1207–1216, 2015.
- AL-ZHOUR, Z. Controllability and observability behaviors of a non-homogeneous conformable fractional dynamical system compatible with some electrical applications. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, Alexandria, v. 61, n. 2, p. 1055–1067, 2022.
- ANASTASSIOU, G. A. *Generalized fractional calculus: new advancements and applications*. [S.l.]: Springer Nature, 2020.
- ANASTASSIOU, G. A. *Unification of Fractional Calculi with Applications*. [S.l.]: Springer Nature, 2021.
- BACHELIER, O. *Commande des systemes linéaires incertains: placement de pôles robuste en D-stabilité*. Tese (Doutorado) — Toulouse, INSA, 1998.
- BAGLEY, R. L.; CALICO, R. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, v. 14, n. 2, p. 304–311, 1991.
- BALACHANDRAN, K.; GOVINDARAJ, V.; ORTIGUEIRA, M. D.; RIVERO, M.; TRUJILLO, J. J. Observability and controllability of fractional linear dynamical systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, Kidlington, v. 46, n. 1, p. 893–898, 2013.
- BETTAYEB, M.; DJENNOUNE, S. New results on the controllability and observability of fractional dynamical systems. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Ltd., London, v. 14, n. 9-10, p. 1531–1541, 2008.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Book: Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994. 205 p.
- BUSŁOWICZ, M. Stability of state-space models of linear continuous-time fractional order systems. *Acta Mechanica et Automatica*, Politechnika Białostocka. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, v. 5, n. 2, p. 15–22, 2011.
- CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, Oxford, v. 13, n. 5, p. 529–539, 1967.

- CHILALI, M. *Methodes LMI pour l'analyse et la synthèse multicritère*. Tese (Doutorado) — Paris 9, 1996.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999.
- DAI, H.; CHEN, W. New power law inequalities for fractional derivative and stability analysis of fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 87, n. 3, p. 1531–1542, 2017.
- DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 29, n. 1-4, p. 3–22, 2002.
- DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numerical algorithms*, Springer, New York, v. 36, n. 1, p. 31–52, 2004.
- DUARTE-MERMOUD, M. A.; AGUILA-CAMACHO, N.; GALLEGOS, J. A.; CASTRO-LINARES, R. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, Amsterdam, v. 22, n. 1-3, p. 650–659, 2015.
- DUMLU, A.; ERENTURK, K. Trajectory tracking control for a 3-DOF parallel manipulator using fractional-order $PI^\lambda D^\mu$ control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, Piscataway, v. 61, n. 7, p. 3417–3426, 2013.
- EFE, M. Ö. Fractional fuzzy adaptive sliding-mode control of a 2-DOF direct-drive robot arm. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, Piscataway, v. 38, n. 6, p. 1561–1570, 2008.
- EL-KHAZALI, R.; MOMANI, S. Stability analysis of composite fractional systems. *International Journal of Applied Mathematics*, Academic Publications, Sofia, v. 12, n. 1, p. 73–86, 2003.
- ELWAKIL, A. S. Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, IEEE, Piscataway, v. 10, n. 4, p. 40–50, 2010.
- ELWY, O.; ABDELATY, A. M.; SAID, L. A.; MADIAN, A. H.; RADWAN, A. G. Two implementations of fractional-order relaxation oscillators. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, Springer, New York, v. 106, n. 2, p. 421–432, 2021.
- ENGHEIA, N. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, IEEE, Piscataway, v. 39, n. 4, p. 35–46, 1997.
- ESPINDOLA, J. J. D.; NETO, J. M. da S.; LOPES, E. M. O. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, Philadelphia, v. 164, n. 2, p. 493–506, 2005.
- FARGES, C.; MOZE, M.; SABATIER, J. Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. In: IEEE. *2009 European Control Conference (ECC)*. [S.l.], 2009. p. 3395–3400.
- FARGES, C.; SABATIER, J.; MOZE, M. Fractional order polytopic systems: robust stability and stabilisation. *Advances in Difference Equations*, Springer, Heidelberg, v. 2011, n. 1, p. 1–10, 2011.

- FELLAH, Z.; DEPOLIER, C.; FELLAH, M. Application of fractional calculus to the sound waves propagation in rigid porous materials: validation via ultrasonic measurements. *Acta Acustica United with Acustica*, S. Hirzel Verlag, Stuttgart, v. 88, n. 1, p. 34–39, 2002.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. *LMI control toolbox user's guide*. [S.l.: s.n.], 1995.
- GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S.; KIENITZ, K. H.; PAIVA, H. M.; AFONSO, R. J. M. Fractional order modeling of large three-dimensional RC networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, IEEE, Piscataway, v. 60, n. 3, p. 624–637, 2013.
- GALVÃO, R. K. H.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; PAIVA, H. M.; HADJILOUCAS, S. Identification of fractional-order transfer functions using exponentially modulated signals with arbitrary excitation waveforms. *ISA Transactions*, Elsevier, New York, v. 103, p. 10–18, 2020.
- GÓMEZ-AGUILAR, J.; CÓRDOVA-FRAGA, T.; ESCALANTE-MARTÍNEZ, J.; CALDERÓN-RAMÓN, C.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. Electrical circuits described by a fractional derivative with regular Kernel. *Revista Mexicana de Física*, Sociedad Mexicana de Física, Mexico City, v. 62, n. 2, p. 144–154, 2016.
- GÓMEZ-AGUILAR, J.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R.; LÓPEZ-LÓPEZ, M.; ALVARADO-MARTÍNEZ, V. Atangana-Baleanu fractional derivative applied to electromagnetic waves in dielectric media. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Taylor & Francis, Abingdon, v. 30, n. 15, p. 1937–1952, 2016.
- GÓMEZ-AGUILAR, J. F.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. F.; OLIVARES-PEREGRINO, V. H.; TANECO-HERNÁNDEZ, M. A.; GUERRERO-RAMÍREZ, G. V. Electrical circuits RC and RL involving fractional operators with bi-order. *Advances in Mechanical Engineering*, Sage Publications Ltd., London, v. 9, n. 6, p. 1–10, 2017.
- GUO, Y.; MA, B. Extension of Lyapunov direct method about the fractional nonautonomous systems with order lying in $(1, 2)$. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 84, n. 3, p. 1353–1361, 2016.
- IONESCU, C.; KEYSER, R. D. Parametric models for characterizing respiratory input impedance. *Journal of Medical Engineering & Technology*, Taylor & Francis, Abingdon, v. 32, n. 4, p. 315–324, 2008.
- IONESCU, C.; OUSTALOUP, A.; LEVRON, F.; MELCHIOR, P.; SABATIER, J.; KEYSER, R. D. A model of the lungs based on fractal geometrical and structural properties. In: *15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2009)*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 994–999.
- IONESCU, C. M.; KEYSER, R. D. Relations between fractional-order model parameters and lung pathology in chronic obstructive pulmonary disease. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, Piscataway, v. 56, n. 4, p. 978–987, 2009.
- IONESCU, C.-M.; KOSIŃSKI, W.; KEYSER, R. D. Viscoelasticity and fractal structure in a model of human lungs. *Archives of Mechanics*, Polska Akademia Nauk * Instytut Podstawowych Problemow, Warsaw, v. 62, n. 1, p. 21–48, 2010.
- IONESCU, C. M.; MACHADO, J. A. T.; KEYSER, R. D. Modelling of the lung impedance using a fractional-order ladder network with constant phase elements. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, IEEE, Piscataway, v. 5, n. 1, p. 83–89, 2011.
- IONESCU, C. M.; SEGERS, P.; KEYSER, R. D. Mechanical properties of the respiratory system

derived from morphologic insight. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, IEEE, Piscataway, v. 56, n. 4, p. 949–959, 2008.

JACYNTHO, L. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S. Identification of fractional-order transfer functions using a step excitation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, IEEE, Piscataway, v. 62, n. 9, p. 896–900, 2015.

JENA, R. M.; CHAKRAVERTY, S. Fractional fluid mechanics systems. In: *New Paradigms in Computational Modeling and Its Applications*. [S.l.]: Elsevier, 2021. p. 71–83.

KACHHIA, K. B.; ATANGANA, A. Electromagnetic waves described by a fractional derivative of variable and constant order with non singular kernel. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, v. 14, n. 7, p. 2357–2371, 2021.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. [S.l.]: Elsevier, 2006.

KULISH, V. V.; LAGE, J. L. Application of fractional calculus to fluid mechanics. *Journal of Fluids Engineering*, ASME International, New York, v. 124, n. 3, p. 803–806, 2002.

KUZMINSKAS, H. Controle robusto chaveado de sistemas lineares e não lineares de ordem fracionária. 2018. 109 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, Ilha Solteira, SP, Brasil, 2018.

LAN, Y.-H.; HUANG, H.-X.; ZHOU, Y. Observer-based robust control of a $(1 \leq a < 2)$ fractional-order uncertain systems: a linear matrix inequality approach. *IET control theory & applications*, IET, Stevenage, v. 6, n. 2, p. 229–234, 2012.

LAN, Y.-H.; ZHOU, Y. LMI-based robust control of fractional-order uncertain linear systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 62, n. 3, p. 1460–1471, 2011.

LI, C.; TAO, C. On the fractional Adams method. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 58, n. 8, p. 1573–1588, 2009.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, Oxford, v. 45, n. 8, p. 1965–1969, 2009.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 59, n. 5, p. 1810–1821, 2010.

LIANG, D. *Some important properties for matrix calculus*. Carnegie Mellon University, 2015.

LIU, H.; PAN, Y.; CAO, J.; WANG, H.; ZHOU, Y. Adaptive neural network backstepping control of fractional-order nonlinear systems with actuator faults. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, IEEE, Piscataway, v. 31, n. 12, p. 5166–5177, 2020.

LIU, H.; PAN, Y.; LI, S.; CHEN, Y. Adaptive fuzzy backstepping control of fractional-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, IEEE, Piscataway, v. 47, n. 8, p. 2209–2217, 2017.

LIU, Z.; QIU, Y.; FENG, J.; CHEN, S.; YANG, C. A simplified fractional order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries. *Journal of Electrochemical Energy Conversion and Storage*, The American Society of Mechanical Engineers, New York, v. 19, n. 2, p. 021001, 2022.

- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*. [S.l.], 2004. p. 284–289.
- LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. Initialization in fractional order systems. In: IEEE. *2001 European Control Conference (ECC)*. [S.l.], 2001. p. 1471–1476.
- LORENZO, S. D.; PAOLA, M. D.; MANTIA, F. P. L.; PIRROTTA, A. Non-linear viscoelastic behavior of polymer melts interpreted by fractional viscoelastic model. *Meccanica*, Springer, Dordrecht, v. 52, n. 8, p. 1843–1850, 2017.
- LU, J.-G.; CHEN, G. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 54, n. 6, p. 1294–1299, 2009.
- LU, J.-G.; CHEN, Y.-Q. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional order α : The $0 < \alpha < 1$ case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 55, n. 1, p. 152–158, 2010.
- LU, Y.; TANG, Y.; ZHANG, X.; WANG, S. Parameter identification of fractional order systems with nonzero initial conditions based on block pulse functions. *Measurement*, Elsevier, Amsterdam, v. 158, p. 107684, 2020.
- MA, Y.; LU, J.; CHEN, W. Robust stability and stabilization of fractional order linear systems with positive real uncertainty. *ISA Transactions*, Elsevier, New York, v. 53, n. 2, p. 199–209, 2014.
- MAO, J.-W.; HU, D.-L. Vibrational resonance and electrical activity behavior of a fractional-order FitzHugh–Nagumo neuron system. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, Basel, v. 10, n. 1, p. 87, 2021.
- MATIGNON, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: CITESEER. *Computational engineering in systems applications*. [S.l.], 1996. v. 2, n. 1, p. 963–968.
- MATIGNON, D. Stability properties for generalized fractional differential systems. In: EDP SCIENCES. *ESAIM: proceedings*. [S.l.], 1998. v. 5, p. 145–158.
- MATIGNON, D.; D’ANDRÉA-NOVEL, B. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In: CITESEER. *Computational engineering in systems applications*. [S.l.], 1996. v. 2, p. 952–956.
- MATIGNON, D.; D’ANDRÉA-NOVEL, B. Observer-based controllers for fractional differential systems. In: IEEE. *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 4967–4972.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1993.
- MOZE, M.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. [S.l.], 2005. v. 47438, p. 1611–1619.
- MU, H.; XIONG, R.; ZHENG, H.; CHANG, Y.; CHEN, Z. A novel fractional order model based state-of-charge estimation method for lithium-ion battery. *Applied Energy*, Elsevier, Oxford, v. 207, p. 384–393, 2017.

- N'DOYE, I.; DAROUACH, M.; VOOS, H.; ZASADZINSKI, M. On the robustness of linear and non-linear fractional-order systems with non-linear uncertain parameters. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Oxford University Press, Oxford, v. 33, n. 4, p. 997–1014, 2015.
- N'DOYE, I.; DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; RADHY, N.-E. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems. *Automatica*, Elsevier, Oxford, v. 49, n. 6, p. 1907–1913, 2013.
- N'DOYE, I.; ZASADZINSKI, M.; DAROUACH, M.; RADHY, N.-E. Observer-based control for fractional-order continuous-time systems. In: IEEE. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. [S.l.], 2009. p. 1932–1937.
- OGATA, K. *Modern control engineering*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010.
- OLDHAM, K.; SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. [S.l.]: Elsevier, 1974.
- OUSTALOUP, A. *La dérivation non entière*. [S.l.]: Hermes, 1995.
- PADULA, F.; VISIOLI, A. Tuning rules for optimal PID and fractional-order PID controllers. *Journal of process control*, Elsevier, London, v. 21, n. 1, p. 69–81, 2011.
- PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark, Danmarks Tekniske Universitet*, Kgs. Lyngby, v. 7, n. 15, p. 510, 2008.
- PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. [S.l.]: Elsevier, 1998.
- PODLUBNY, I. Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ - controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, Piscataway, v. 44, n. 1, p. 208–214, 1999.
- PODLUBNY, I.; DORCAK, L.; KOSTIAL, I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and $PI^\lambda D^\mu$ - controllers. In: IEEE. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1997. v. 5, p. 4985–4990.
- POVSTENKO, Y. Thermoelasticity that uses fractional heat conduction equation. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer, New York, v. 162, n. 2, p. 296–305, 2009.
- POVSTENKO, Y. Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress. *Journal of Thermal Stresses*, Taylor & Francis, New York, v. 28, n. 1, p. 83–102, 2004.
- QIU, J.; JI, Y. Observer-based robust controller design for nonlinear fractional-order uncertain systems via LMI. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, London, v. 2017, p. 1–15, 2017.
- RABAH, K.; LADACI, S. A fractional adaptive sliding mode control configuration for synchronizing disturbed fractional-order chaotic systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer, Cham, v. 39, n. 3, p. 1244–1264, 2020.
- RADWAN, A. G.; FOU DA, M. E. Optimization of fractional-order RLC filters. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Birkhaeuser Science, Cham, v. 32, n. 5, p. 2097–2118, 2013.
- RADWAN, A. G.; SALAMA, K. N. Fractional-order RC and RL circuits. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Springer, Cham, v. 31, n. 6, p. 1901–1915, 2012.
- ROSALES, J.; GÓMEZ, J.; GUÍA, M.; TKACH, V. Fractional electromagnetic waves. In: IEEE. *2011 11th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM)*. [S.l.], 2011.

p. 1–3.

SABATIER, J.; MOZE, M.; FARGES, C. LMI stability conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 59, n. 5, p. 1594–1609, 2010.

SAID, L. A.; RADWAN, A. G.; MADIAN, A. H.; SOLIMAN, A. M. Three fractional-order-capacitors-based oscillators with controllable phase and frequency. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, World Scientific, Singapore, v. 26, n. 10, p. 1750160, 2017.

SALGADO, G. H. O. Métodos numéricos para solução de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo. 2015. 175 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte, 2015.

SHAH, P.; AGASHE, S. Review of fractional PID controller. *Mechatronics*, Elsevier, Oxford, v. 38, p. 29–41, 2016.

SHARMA, S. K.; MONDAL, A.; MONDAL, A.; UPADHYAY, R. K.; HENS, C. Emergence of bursting in a network of memory dependent excitable and spiking leech-heart neurons. *Journal of the Royal Society Interface*, The Royal Society, London, v. 17, n. 167, p. 20190859, 2020.

SHENG, Y.; BAI, W.; XIE, Y. Fractional-order $PI^\lambda D$ sliding mode control for hypersonic vehicles with neural network disturbance compensator. *Nonlinear Dynamics*, Springer, Dordrecht, v. 103, n. 1, p. 849–863, 2021.

SHI, X.; CHENG, Y.; YIN, C.; ZHONG, S.; HUANG, X.; CHEN, K.; QIU, G. Adaptive fractional-order SMC controller design for unmanned quadrotor helicopter under actuator fault and disturbances. *IEEE Access*, IEEE, Piscataway, v. 8, p. 103792–103802, 2020.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, D. E. *A unified algebraic approach to control design*. [S.l.]: CRC Press, 1997.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Taylor & Francis, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

SUN, H.; ZHANG, Y.; BALEANU, D.; CHEN, W.; CHEN, Y. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, Amsterdam, v. 64, p. 213–231, 2018.

TARASOV, V. E. Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media. *Theoretical and Mathematical Physics*, Springer, Cham, v. 158, n. 3, p. 355–359, 2009.

TEPLJAKOV, A.; PETLENKOV, E.; BELIKOV, J. FOMCON: Fractional-order modeling and control. In: *Toolbox for MATLAB. 18th International Conf. Mixed Design of Integrated Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 16–18.

TRIGEASSOU, J.-C.; MAAMRI, N.; OUSTALOUP, A. The infinite state approach: origin and necessity. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 66, n. 5, p. 892–907, 2013.

TRIGEASSOU, J.-C.; MAAMRI, N.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. State variables and transients of fractional order differential systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, Oxford, v. 64, n. 10, p. 3117–3140, 2012.

TRIGEASSOU, J.-C.; MAAMRI, N.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. Transients of fractional-order integrator and derivatives. *Signal, Image and Video Processing*, Springer, London, v. 6, n. 3, p. 359–372, 2012.

- WEIBEL, E. R. Mandelbrot's fractals and the geometry of life: a tribute to Benoît Mandelbrot on his 80th birthday. In: *Fractals in Biology and Medicine*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 3–16.
- WEITENBERG, E.; JIANG, Y.; ZHAO, C.; MALLADA, E.; PERSIS, C. D.; DÖRFLER, F. Robust decentralized secondary frequency control in power systems: merits and tradeoffs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, Piscataway, v. 64, n. 10, p. 3967–3982, 2018.
- WEST, B. J. *Fractional calculus view of complexity: tomorrow's science*. [S.l.]: CRC Press, 2016.
- WESTERLUND, S.; EKSTAM, L. Capacitor theory. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, IEEE, Piscataway, v. 1, n. 5, p. 826–839, 1994.
- WOLKOWICZ, H.; SAIGAL, R.; VANDENBERGHE, L. *Handbook of semidefinite programming: theory, algorithms and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- XUE, D. 4. Solutions of linear fractional-order differential equations. In: *Fractional-Order Control Systems: Fundamentals and Numerical Implementations*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2017. p. 99–140. ISBN 9783110497977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/9783110497977-004>>.
- XUE, D. FOTF toolbox for fractional-order control systems. In: *Applications in control*. [S.l.]: De Gruyter Berlin, Germany, 2019. p. 237–266.
- YANG, X.-J. *General fractional derivatives: theory, methods and applications*. [S.l.]: CRC Press, 2019.
- YIN, C.; HUANG, X.; CHEN, Y.; DADRAS, S.; ZHONG, S.-m.; CHENG, Y. Fractional-order exponential switching technique to enhance sliding mode control. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, New York, v. 44, p. 705–726, 2017.
- YU, J.; HU, H.; ZHOU, S.; LIN, X. Generalized Mittag-Leffler stability of multi-variables fractional order nonlinear systems. *Automatica*, Elsevier, Oxford, v. 49, n. 6, p. 1798–1803, 2013.
- ZHANG, S.; YU, Y.; YU, J. LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks. *IEEE Transactions on neural networks and learning systems*, IEEE, Piscataway, v. 28, n. 10, p. 2423–2433, 2016.
- ZHANG, X.; CHEN, Y. D-stability based LMI criteria of stability and stabilization for fractional order systems. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. [S.l.], 2015. v. 57199, p. V009T07A029.
- ZHANG, X.; LI, B. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems with the fractional order α ($0 < \alpha < 1$). In: IEEE. *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. [S.l.], 2016. p. 560–563.
- ZHANG, X.; ZHANG, Y. D-admissibility criteria of singular fractional order systems. In: IEEE. *2019 Chinese Control Conference (CCC)*. [S.l.], 2019. p. 1253–1257.
- ZHU, G.; XIONG, Y.; LI, Z.; XIAO, L.; LI, M.; BAI, X. F. A nonlinear dynamic model of magnetorheological elastomers in magnetic fields based on fractional viscoelasticity. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Sage Publications Ltd., London, v. 32, n. 2, p. 228–239, 2021.