UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Limites Dinâmicos para Operadores de Schrödinger com Potenciais Sturmianos

Vinícius Lourenço da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Presidente Prudente - SP
Janeiro de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Limites Dinâmicos para Operadores de Schrödinger com Potenciais Sturmianos

Vinícius Lourenço da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente - SP

Janeiro de 2016

Ao meu Bom Deus e à minha família, dedico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por me sustentar em todos os momentos difíceis e por me dar força e sabedoria para superar todos os obstáculos.

À minha amada esposa Beatriz, por estar sempre ao meu lado com paciência e dedicação.

À minha família, por sempre me sustentar, amar e apoiar em todas as decisões que tomei.

Ao meu orientador Roberto de Almeida Prado, pelo seu investimento em mim, paciência, atenção e excelente orientação.

Aos meus amigos e colegas da salinha por trazer tanta alegria nas horas difíceis de estudo e por sempre compartilhar o conhecimento.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Baseando-se em trabalhos recentes da literatura, o presente trabalho tem como objetivo estudar limites dinâmicos para operadores de Schrödinger discretos, unidimensionais, com potenciais Sturmianos (modelos quase-periódicos). Tais limites são obtidos das taxas de propagação do pacote de ondas associado a uma partícula sobre a rede unidimensional $\mathbb{Z}$. Utilizando um método desenvolvido por Damanik e Tcheremchantsev, obtém-se um limite dinâmico superior não-trivial para uma família grande de operadores Sturmianos, associados a números de rotação irracionais. Além disso, apresenta-se um limite inferior global para a dimensão fractal superior do espectro desses operadores, o qual é usado para obter um limite dinâmico inferior para tais operadores Sturmianos associados a números irracionais de densidade limitada.

Serão utilizados resultados sobre o traço das matrizes de transferência associadas aos operadores de Schrödinger Sturmianos e também propriedades espectrais destes operadores.

Palavras-Chave: *Operadores de Schrödinger, Potenciais Sturmianos, Limites Dinâmicos.*

Abstract

Dynamical Bounds for Sturmian Schrödinger Operators

By following recent papers in the literature, the present work aims to study dynamical bounds for one dimensional discrete Schrödinger operators with Sturmian potentials by bounding the rates of propagation of the wavepacket. By a method developed by Damanik and Tcheremchantsev, is obtained a non trivial upper bound for almost all Sturmian Schrödinger operator associated with irrational numbers. Moreover, it presents a global lower bound for the upper box counting dimension of the spectrum of these operators, which is used to obtain a lower dynamical bound for such Sturmian Schrödinger operators associated with bounded density irrational numbers.

Will be used results about the traces of transfer matrices and spectral properties of Sturmian Schrödinger operators.

Keywords: *Schrödinger Operators, Sturmian Potentials, Dynamical Bounds.*

Sumário

Capítulo

1

Introdução

A dinâmica quântica de operadores de Schrödinger tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, por se tratar de um assunto importante, atual e relevante para a área de Física-Matemática. Sendo H um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, a equação de Schrödinger dependente do tempo, descrita por $i\partial_t\psi = H\psi$, determina uma evolução dinâmica unitária em $\mathcal{H}$ dada por $\psi(t) = e^{-itH}\psi(0)$. Sob a evolução temporal, geralmente $\psi(t)$ propaga-se com o tempo. Uma questão importante é quantificar esta propagação em casos concretos. Um dos casos mais estudados é quando o espaço é $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, H é um operador de Schrödinger da forma $-\Delta + V$ onde Δ é o Laplaciano e V um potencial, e $\psi(0)$ representa um pacote de ondas localizado. A forma do potencial V depende do modelo físico em estudo. Dentre os mais estudados destacam-se os potenciais Sturmianos e seu subcaso particular, o potencial de Fibonacci, que descrevem estruturas quase-cristalinas unidimensionais.

Neste trabalho consideramos uma rede unidimensional representada pelos números inteiros $\mathbb{Z}$. Em cada vértice $n \in \mathbb{Z}$, fixamos um átomo que gera um potencial $V(n) \in \mathbb{R}$. Na aproximação *tight binding*, o Hamiltoniano, modelo matemático que governa a dinâmica de um elétron neste ambiente, é dado por

$$(Hu)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n), \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \tag{1.1}$$

e é conhecido como *operador de Schrödinger discreto unidimensional.* Neste modelo supõe-se que não há interação entre elétrons e o Laplaciano discreto é o operador de diferença finita $(\Delta u)(n) = u(n+1) + u(n-1)$. Além disso, se o potencial V assume um número finito de valores reais, então H é um operador limitado e auto-adjunto, e seu espectro é um conjunto compacto da reta $\mathbb{R}$ (ver [6]).

Focaremos nosso estudo nos operadores de Schrödinger $H_{\beta,\lambda}$ do tipo (1.1), com os *potenciais Sturmianos* definidos por

$$V_{\beta,\lambda}(n) = \lambda\chi_{[1-\beta,1)}(n\beta \mod 1), \tag{1.2}$$

onde $\beta \in (0,1)$ é o número de rotação irracional e $\lambda > 0$ é a intensidade do potencial. Estes operadores Sturmianos $H_{\beta,\lambda}$ modelam estruturas quase-cristalinas unidimensionais e estão entre os modelos periódicos (que induzem transporte quântico) e os modelos aleatórios (que implicam localização dinâmica). O Hamiltoniano de Fibonacci $H_{\beta,\lambda}$, em que $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, é o exemplo mais simples e mais conhecido de modelo Sturmiano. Além disso, os operadores $H_{\beta,\lambda}$ exibem espectro puramente singular contínuo suportado sobre um conjunto com medida de Lebesgue zero, para todos os parâmetros β e λ (ver [4]).

Para o estudo dinâmico dos operadores Sturmianos $H_{\beta,\lambda}$, definidos acima, consideremos

$$a(n,T) = \frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T}|\langle e^{-itH}\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dt \tag{1.3}$$

a probabilidade em tempo médio da partícula estar localizada na posição n no tempo T e definamos os *momentos dinâmicos de ordem* p como sendo

$$\langle |X|^p_{\delta_1}\rangle(T) = \sum_n |n|^p a(n,T), \qquad p > 0. \tag{1.4}$$

Note que, quanto mais rápido os momentos $\langle |X|^p_{\delta_1}\rangle(T)$ cresce, mais rápido a partícula se propaga na rede. A maneira menos recente na literatura de se estudar a dinâmica de operadores Sturmianos é encontrando limites para os *expoente de transporte dinâmico superior e inferior* (ver [5]) definidos por

$$\beta^+_{\delta_1}(p) = \limsup_{T\longrightarrow\infty} \frac{\log\langle |X|^p_{\delta_1}\rangle(T)}{p\log T}, \tag{1.5}$$

$$\beta^-_{\delta_1}(p) = \liminf_{T\longrightarrow\infty} \frac{\log\langle |X|^p_{\delta_1}\rangle(T)}{p\log T}. \tag{1.6}$$

Entretanto, recentemente surgiram estudos (ver [16, 5]) que utilizam uma abordagem um pouco diferente para encontrar limites dinâmicos para os operadores Sturmianos, estudando as chamadas probabilidades exteriores em tempo médio (veja Seção 2.1). As quantidades que determinam a taxa de decaimento da probabilidade de encontrar a partícula em uma região de $\mathbb{Z}$ são dadas por $\alpha_u^\pm$, chamados de *expoentes críticos* (veja Seção 2.1). Tais expoentes determinam se há localização dinâmica para o operador H (caso em que $\alpha_u^+ = 0$) ou se há transporte quântico para H (caso em que $0 < \alpha_u^+ \leq 1$). Quando $\alpha_u^+ = 1$, dizemos que o operador H tem dinâmica balística, que é o transporte mais rápido que o sistema pode assumir sobre a rede $\mathbb{Z}$.

O objetivo deste trabalho é estudar detalhadamente os métodos que permitem obter limites dinâmicos não-triviais para os operadores de Schrödinger Sturmianos $H_{\beta,\lambda}$, ou seja, encontrar valores reais α_1 e α_2 tais que $0 < \alpha_1 \leq \alpha_u^\pm \leq \alpha_2 < 1$. O limite inferior α_1 implica em transporte quântico para $H_{\beta,\lambda}$, enquanto o limite superior α_2 permite quantificar, de uma certa forma, este transporte. Encontrar tais limites permite, por exemplo, estudar a difusão elétrica de um quase-cristal. O estudo de limites dinâmicos superiores é recente na literatura e os primeiros resultados que surgiram neste sentido foram para o Hamiltoniano de Fibonacci [5, 11] e em [16] há uma extensão dos resultados de [5], para uma classe grande de potenciais Sturmianos associados a irracionais $\beta \in (0,1)$. Já o estudo sobre limites dinâmicos inferiores é menos recente e existem uma série de resultados publicados na literatura como, por exemplo, [20, 21]. A técnica utilizada em [16] para limitar inferiormente os expoentes críticos exibe uma abordagem diferente, envolvendo a relação que os expoentes críticos possuem com a *dimensão fractal* do espectro do operador $H_{\beta,\lambda}$ (ver Definição 3, Seção 4.1).

No capítulo 2 apresentaremos os conceitos e resultados preliminares necessários para os capítulos seguintes, como as definições das quantidades dinâmicas a serem estudadas, propriedades dos potenciais Sturmianos, matrizes de transferência associadas aos operadores (1.1), estudo dos traços dessas matrizes e a relação destes com as aproximações periódicas do espectro de $H_{\beta,\lambda}$.

Apresentaremos agora os principais resultados de [16] que serão estudados com detalhes neste trabalho. O Teorema 1 a seguir exibe de forma precisa o limite dinâmico superior α_2 e sua demonstração será apresentada com detalhes na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Considere a expansão em frações continuadas de um irracional $\beta \in (0,1)$, denotada por $\beta = [0, a_1, a_2, \ldots]$ (veja 2.9).

Teorema 1 *Sejam $\beta \in (0,1)$ irracional, $\lambda > 20$ e $H_{\beta,\lambda}$ o operador de Schrödinger* (1.1) *com potencial Sturmiano* (1.2) *associado a β. Considere a sequência (q_k) associada a β, definida por* (2.11)*. Se $D = \limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log q_k}{k} < \infty$, então*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{2D}{\log\left(\frac{\lambda-8}{3}\right)} .$$

Além disso, se $\beta = [0, a_1, a_2, \ldots]$, com $a_k \neq 1$ para todo $k \geq 1$, então

$$\alpha_u^+ \leq \frac{D}{\log\left(\frac{\lambda-8}{3}\right)} .$$

Para os números que satisfazem $\omega = [0, a, a, \ldots]$ com $a \neq 1$, temos o seguinte corolário do Teorema 1 (ver [16]):

Corolário 1 *Para $\omega = [0, a, a, \ldots]$ com $a \neq 1$, tem-se o seguinte limite dinâmico para o expoente crítico:*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{\log(a+\omega)}{\log\left(\frac{\lambda-8}{3}\right)} .$$

Um fato bem conhecido é que o conjunto dos números irracionais que satisfazem $D < \infty$, tem medida de Lebesgue total (ver [16]). Não é uma tarefa difícil expressar D de forma explícita para números que possuem expansão em frações continuadas periódica. Entretanto, de forma geral, temos um resultado, conhecido como *Lema de Khinchin*, que explicita o valor de D, para quase todo irracional $\beta \in (0,1)$ (ver [16]):

Lema 1 (de Khinchin): *Para $\beta \in [0,1]$, defina a sequência*

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1},\ k \geq 2.$$

Então, para quase todo β com respeito a medida de Lebesgue, tem-se:

$$D = \limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log q_k}{k} = D_K = \frac{\pi^2}{12\log 2}$$

e

$$M = \liminf_{k\longrightarrow\infty} (a_1 \ldots a_k)^{1/k} = C_K = 2.685\ldots,$$

onde C_K é chamada de constante de Khinchin.

Desta forma, como consequência imediata do Teorema 1 e do Lema de Khinchin, temos o seguinte resultado:

Corolário 2 *Para quase todo irracional β com respeito a medida de Lebesgue, tem-se o seguinte limite dinâmico para o expoente crítico:*

$$\alpha_u^+ \leq \frac{2D_K}{\log\left(\frac{\lambda-8}{3}\right)} .$$

O próximo Teorema é o principal resultado de [16] para limitar inferiormente os expoentes críticos. Sua demonstração será apresentada no Capítulo 5, Seção 4.2 e utiliza resultados de [10, 20, 3] que relacionam os expoentes críticos com a dimensão fractal do espectro de $H_{\beta,\lambda}$. Segue abaixo seu enunciado:

Teorema 2 *Para qualquer número irracional* $\beta \in (0,1)$ *de densidade limitada (Definição* 4*) e* $\lambda > 20$, *tem-se*

$$\alpha_u^- \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log 2}{C + \log(\lambda + 5)}\ ,$$

com $C = \limsup \frac{3}{k}\sum_{j=1}^{k} \log(a_j + 2) < \infty$.

Capítulo

2

Conceitos Preliminares

Este capítulo contém as definições e resultados preliminares que são utilizados nas demonstrações dos Teoremas 1 e 2 sobre os limites dinâmicos para operadores de Schrödinger com potenciais Sturmianos.

2.1 Quantidades Dinâmicas

Estamos interessados em estudar limites dinâmicos para os operadores de Schrödinger com potenciais Sturmianos $H_{\beta,\lambda}$ definidos por (1.1)-(1.2). Para isso, consideremos o operador de Schrödinger discreto (1.1) com potencial qualquer. Vamos introduzir as quantidades dinâmicas que queremos limitar, baseando-se nas referências [5, 16]. Denotamos por

$$P(N,T) = \sum_{|n|>N} a(n,T) \tag{2.1}$$

a *probabilidade exterior em tempo médio* de encontrarmos a partícula no complementar da bola de centro 0 e raio N, na rede $\mathbb{Z}$, onde $a(n,T)$ está definido como em (1.3). Em nosso estudo, consideraremos $N = N(T) = T^\alpha - 2$, com $\alpha > 0$, apenas por motivos técnicos. Note que $P(-1,T) = 1$, para qualquer $T \geq 0$. Para todo $\alpha \in [0, +\infty]$, os números (ver [16])

$$S^-(\alpha) := -\liminf_{T\longrightarrow\infty} \frac{\log P(T^\alpha - 2, T)}{\log T} \tag{2.2}$$

e

$$S^+(\alpha) := -\limsup_{T\longrightarrow\infty} \frac{\log P(T^\alpha - 2, T)}{\log T}, \tag{2.3}$$

são as taxas de decrescimento de $P(T^\alpha - 2, T)$. Com efeito, para compreendermos isto, suponhamos que $S^\pm(\alpha) < \infty$, para algum $\alpha > 0$. Assim, dado $\delta > 0$, existe $T_0 > 0$ suficientemente grande, de tal forma que para todo $T > T_0$, temos:

$$-\frac{\log P(T^\alpha - 2, T)}{\log T} \leq S^\pm(\alpha) + \delta.$$

Mas isto equivale a dizer que

$$P(T^\alpha - 2, T) \geq T^{-(S^\pm(\alpha)+\delta)}. \tag{2.4}$$

Isto mostra que $T^{-(S^\pm(\alpha)+\delta)}$ limita inferiormente o decrescimento de $P(T^\alpha - 2, T)$.

Note que $S^{\pm}(0) = 0$, e que $S^{\pm}$ são não-decrescentes, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$, tem-se $S^{\pm}(\alpha_1) \leq S^{\pm}(\alpha_2)$. Ademais, para todo $\alpha > 0$, tem-se

$$0 \leq S^{+}(\alpha) \leq S^{-}(\alpha) \leq +\infty.$$

À partir de $S^{\pm}$, definamos os *expoentes críticos* como sendo:

$$\alpha_l^{\pm} := \sup\{\alpha \geq 0 : S^{\pm}(\alpha) = 0\}, \tag{2.5}$$

$$\alpha_u^{\pm} := \sup\{\alpha \geq 0 : S^{\pm}(\alpha) < \infty\}. \tag{2.6}$$

Estes satisfazem $0 \leq \alpha_l^{\pm} \leq \alpha_u^{\pm} \leq 1$. Note que α_u^{+} é o expoente tal que a taxa de decaimento de $P(T^{\alpha} - 2, T)$ é a mais rápida. De fato, devido a (2.4), temos:

$$P(T^{\alpha_u^{+}} - 2, T) \geq T^{-(S^{\pm}(\alpha_u^{+})+\delta)}, \tag{2.7}$$

para $\delta > 0$ e $T > 0$ suficientemente grande. Se $\alpha > 0$ é tal que $S^{\pm}(\alpha) < \infty$, então $\alpha \leq \alpha_u^{+}$ e como $S^{\pm}$ é não-decrescente, segue que $S^{\pm}(\alpha) \leq S^{\pm}(\alpha_u^{+})$ e, portanto,

$$\frac{1}{T^{S^{\pm}(\alpha_u^{+})+\delta}} < \frac{1}{T^{S^{\pm}(\alpha)+\delta}},$$

ou seja, $T^{-(S^{\pm}(\alpha_u^{+})+\delta)}$ vai à zero mais rápido que qualquer $T^{-(S^{\pm}(\alpha)+\delta)}$.

Os expoentes $\alpha_l^{\pm}$ podem ser interpretados como as taxas (inferior e superior) de propagação da parte essencial do pacote de onda e os expoentes $\alpha_u^{\pm}$ como as taxas de propagação da parte mais rápida do pacote de onda. Em particular, se $\alpha > \alpha_u^{+}$, então $P(T^{\alpha} - 2, T)$ vai a zero mais rápido do que qualquer inverso de potência de T. Quando $\alpha_u^{\pm} = 1$ dizemos que o operador H exibe *transporte balístico*, que é o transporte mais rápido do pacote de onda, e quando $\alpha_u^{+} = 0$ dizemos que H exibe *localização dinâmica*. Nosso estudo se baseará em limitar α_u^{+}. Os modelos Sturmianos (estruturas quase-periódicas) se encontram entre os modelos aleatórios que implicam em localização dinâmica e modelos periódicos que implicam em transporte balístico.

2.2 Potenciais Sturmianos

Esta seção contém um breve estudo sobre os *potenciais Sturmianos* definidos em (1.2). Cada potencial Sturmiano é gerado por um número de *rotação irracional* $\beta \in (0, 1)$ que pode ser expandido em frações continuadas, permitindo decompor o potencial em *palavras Sturmianas*, as quais possuem propriedades e relações recursivas importantes para o nosso estudo. Nesta seção foram utilizadas as referências [1, 13, 17].

O seguinte lema permite expressarmos os potenciais Sturmianos (1.2) de outra maneira.

Lema 2 *Para todo $\beta \in (0, 1)$ irracional e $\lambda > 0$, tem-se*

$$V_{\beta,\lambda}(n) = \lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, \tag{2.8}$$

onde $\lfloor x \rfloor = \max_{m\in\mathbb{Z}}\{m \leq x\}$ é a função parte inteira de x.

Demonstração. Note que $V_{\beta,\lambda}(n) = 1$ se, e somente se, $n\beta - \lfloor n\beta \rfloor \in [1-\beta, 1)$. Isto equivale a dizer que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m + 1 - \beta \leq n\beta \leq m + 1$, com $m\beta < m + 1 < n\beta + \beta$, ou seja, $m = \lfloor n\beta \rfloor$. Por outro lado, $\lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor = 0$ ou 1, pois $0 \leq \lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor \leq (n+1)\beta - \lfloor n\beta \rfloor = \{n\beta\} + \beta < 2$, onde $\{x\}$ denota a parte fracionária de x. Por fim, temos

$$\lfloor (n+1)\beta \rfloor - \lfloor n\beta \rfloor = 1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}; m + 1 - \beta \leq n\beta \leq m + 1,$$

com $m = \lfloor n\beta \rfloor$, mostrando o resultado.

■

Observação 1 *A partir do Lema acima, consideraremos em todo o texto os potenciais Sturmianos* (1.2) *na forma* (2.8).

Se β for um número racional da forma $\frac{p}{q}$, então o potencial $V_{\beta,\lambda}(n)$ é periódico, com período q, isto é, $V_{\beta,\lambda}(n+q) = V_{\beta,\lambda}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Com efeito, se $\beta = \frac{p}{q}$, então para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos:

$$\begin{aligned} V_{\beta,\lambda}(n+q) &= \lambda\left(\left\lfloor (n+q+1)\frac{p}{q}\right\rfloor - \left\lfloor (n+q)\frac{p}{q}\right\rfloor\right) \\ &= \lambda\left(\left\lfloor \frac{np}{q} + \frac{pq}{q} + \frac{p}{q}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{np}{q} + \frac{pq}{q}\right\rfloor\right) \\ &= \lambda\left(p + \left\lfloor (n+1)\frac{p}{q}\right\rfloor - p - \left\lfloor n\frac{p}{q}\right\rfloor\right) \\ &= V_{\beta,\lambda}(n). \end{aligned}$$

Sabe-se que para potenciais periódicos os correspondentes operadores de Schrödinger possuem espectro absolutamente contínuo e transporte balístico. Dessa forma, assumiremos em nosso estudo que $\beta \in [0,1]$ é irracional. Por [13], cada $\beta \in (0,1)$ admite uma *expansão em frações continuadas* da seguinte forma:

$$\beta = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}} = [0, a_1, a_2, \ldots], \tag{2.9}$$

onde cada a_n é um natural não-nulo unicamente determinado. Truncando esta sequência na etapa n, obtemos a sequência de *aproximações racionais* $\dfrac{p_n}{q_n} = [0, a_1, \ldots, a_n]$ de β. Os números p_n e q_n satisfazem a seguinte relação recursiva (ver [13] para detalhes):

$$p_{-1} = 1, \qquad p_0 = 0, \qquad p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \tag{2.10}$$

$$q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1, \qquad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}. \tag{2.11}$$

Essa expansão tem papel fundamental na construção dos potenciais Sturmianos. Para compreendermos este fato, seja um conjunto finito $\mathcal{A}$, chamado de *alfabeto*, onde cada elemento é chamado de *letra*. Então, uma *palavra* de comprimento n sobre este alfabeto é um elemento de $\mathcal{A}^n$ constituído de n letras de $\mathcal{A}$. Uma *palavra infinita* pertence à $\mathcal{A}^\infty$ e é formado por infintas letras de $\mathcal{A}$. Em particular, considere as seguintes *palavras Sturmianas* W_n sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, \lambda\}$:

$$W_{-1} = \lambda, \qquad W_0 = 0, \qquad W_1 = 0^{a_1-1}\lambda, \qquad W_{n+1} = W_n^{a_{n+1}}W_{n-1}, \forall n \geq 1, \tag{2.12}$$

onde W_n^m significa a repetição de W_n m-vezes. Então, para um dado n, o comprimento da palavra finita W_n dada por (2.12) é o período da sequência Sturmiana $V_{\beta,\lambda}(n)$, dada por (1.2), associada ao valor $\beta = p_n/q_n$. Isto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima letra da palavra infinita $W_\infty = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} W_n$ é o valor de $V_{\beta,\lambda}(n)$.

Exemplo 1 *O Hamiltoniano de Fibonacci $H_{\beta,\lambda}$, com potencial $V_{\beta,\lambda}$ associado ao número $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0,1,1,\ldots]$, chamado número de Ouro (ou Razão Áurea), é o operador de Schrödinger com potencial Sturmiano mais simples. Neste caso, as aproximações racionais* *de β são dadas por F_n/F_{n+1}, para $n \geq -1$, e o comprimento da palavra W_n é F_{n+1}. A sequência $\{F_n\}_n$ satisfaz* (2.11) *e seus primeiros valores estão apresentados abaixo:*

$$F_{-1} = 0, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8.$$

Além disso, as seis primeiras palavras associadas a este β são:

$$W_{-1} = \lambda, \quad W_0 = 0, \quad W_1 = 0\lambda, \quad W_2 = 0\lambda 0, \quad W_3 = 0\lambda 00\lambda, \quad W_4 = 0\lambda 00\lambda 0\lambda 0.$$

A proposição a seguir mostra a simetria que os potenciais Sturmianos (2.8) possuem.

Proposição 1 *Seja $V_{\beta,\lambda}$ o potencial Sturmiano associado ao irracional $\beta \in (0,1)$. Então valem as propriedades:*

i) $V_{\beta,\lambda}(-n) = V_{\beta,\lambda}(n-1)$, *para todo* $n \geq 2$.

ii) $V_{\beta,\lambda}(q_n + k) = V_{\beta,\lambda}(k)$, *para todo* $1 \leq k \leq q_{n+1} - 1$.

Demonstração.

i) Temos:

$$V_{\beta,\lambda}(-n) = \lambda(\lfloor(-n+1)\beta\rfloor - \lfloor -n\beta\rfloor) = \lambda(\lfloor n\beta\rfloor - \lfloor(n-1)\beta\rfloor) = V_{\beta,\lambda}(n-1).$$

ii) Como $q_n\beta + p_n = (-1)^n\|q_n\beta\|$ e $\|m\beta\| > \|q_n\beta\|$, para todo $m < q_{n+1}$ e $m \neq q_n$, onde $\|x\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x+n|$, temos:

$$\begin{aligned} V_{\beta,\lambda}(q_n + k) &= \lambda(\lfloor(q_n+k+1)\beta\rfloor - \lfloor(q_n+k)\beta\rfloor) \\ &= \lambda(\lfloor(k+1)\beta + q_n\beta - p_n\rfloor - \lfloor k\beta + q_n\beta - p_n\rfloor) \\ &= \lambda(\lfloor(k+1)\beta\rfloor - \lfloor k\beta\rfloor) = V_{\beta,\lambda}(k). \end{aligned}$$

■

2.3 Matrizes de Transferência

Consideremos $H_{\beta,\lambda}$ o operador de Schrödinger (1.1) com potencial Sturmiano (1.2) associado a um irracional β, com λ fixado. Nosso objetivo é limitar, tanto superiormente, quanto inferiormente, os expoentes dinâmicos (2.6) associados a $H_{\beta,\lambda}$. Isso será feito através de técnicas que conectam o comportamento das soluções da *equação de autovalores*

$$H_{\beta,\lambda}u = zu, \ (u \neq 0, \ z \in \mathbb{C}), \tag{2.13}$$

com tais expoentes. Se u é solução de (2.13), então para todo $n \geq 1$,

$$u(n+1) + u(n-1) + V_{\beta,\lambda}(n)u(n) = zu(n), \ z \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$

A forma matricial de (2.14) é

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - V_{\beta,\lambda}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Iterando (2.15), obtemos para $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - V_{\beta,\lambda}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} z - V_{\beta,\lambda}(1) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Para $n \leq -1$,

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - V_{\beta,\lambda}(n+1) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdots \begin{pmatrix} z - V_{\beta,\lambda}(0) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Denotemos por

$$T_\beta(n,z) = \begin{pmatrix} z - V_{\beta,\lambda}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\lambda \ \text{ fixado}).$$

De forma geral, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = F_\beta(n,z) \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

onde

$$F_\beta(n,z) = \begin{cases} T_\beta(n,z)\ldots T_\beta(1,z), & n \geq 1 \\ I_2, & n = 0 \\ T_\beta(n+1,z)^{-1}\ldots T_\beta(0,z)^{-1}, & n \leq -1 \end{cases}$$

sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2. Note que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o determinante $\det(T_\beta(n,z)) = 1$ e como consequência $\det(F_\beta(n,z)) = 1$. Chamamos as matrizes $F_\beta(n,z)$ de *matrizes de transferência* e quando $n = q_k$ denotamos $M_k(z) = F_\beta(q_k, z)$ (β e λ fixos).

Vejamos agora uma propriedade recursiva que as matrizes de transferência $M_k(z)$ satisfazem:

Proposição 2 *Seja $z \in \mathbb{C}$. Para todo $k \geq 0$, temos:*

$$M_{k+1}(z) = M_{k-1}(z) M_k(z)^{a_{k+1}}, \tag{2.18}$$

onde

$$M_0 = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1, é válido que:

$$\begin{array}{lllll} T(1,z) & = T(q_k+1,z) & = T(2q_k+1,z) & = \ldots & = T((a_{k+1}-1)q_k+1,z) \\ T(2,z) & = T(q_k+2,z) & = T(2q_k+2,z) & = \ldots & = T((a_{k+1}-1)q_k+2,z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T(q_k,z) & = T(2q_k,z) & = T(3q_k,z) & = \ldots & = T((a_{k+1}q_k,z). \end{array} \tag{2.19}$$

Logo, usando (2.11) e (2.19), obtemos:

$$\begin{aligned} M_{k+1}(z) &= T(q_{k+1},z)T(q_{k+1}-1,z)\ldots T(2,z)T(1,z) \\ &= T(a_{k+1}q_k+q_{k-1},z)T(a_{k+1}q_k+q_{k-1}-1,z)\ldots \\ &\quad \ldots T(a_{k+1}q_k,z)T(a_{k+1}q_k-1,z)\ldots \\ &\quad \ldots T((a_{k+1-1})q_k+1,z)T((a_{k+1-1})q_k,z)T((a_{k+1-1})q_k-1,z)\ldots \\ &\quad \ldots T(q_k,z)T(q_k-1,z)\ldots T(2,z)T(1,z) \\ &= T(a_{k+1}q_k+q_{k-1},z)\ldots T(a_{k+1}q_k+1,z)\left(T(q_k,z)\ldots T(1,z)\right)^{a_{k+1}} \\ &= T(q_{k-1},z)\ldots T(1,z)M_k(z)^{a_{k+1}} \\ &= M_{k-1}(z)M_k(z)^{a_{k+1}}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n, então definimos o *comutador entre A e B* como sendo: $[A, B] = AB - BA$. As matrizes de transferência $M_k(z)$ são invariantes pelo comutador, como veremos na proposição abaixo. Para detalhes e demonstração, veja [17].

Proposição 3 *Para quaisquer $\lambda > 0$, $z \in \mathbb{C}$ e $k \geq 0$, tem-se*

$$[M_{k+1}(z), M_{k-1}(z)]^2 = \lambda^2 I_2. \tag{2.20}$$

2.4 Aplicação Traço

Nesta seção veremos uma forma particular de representar a bem conhecida *aplicação traço*, a qual gera um sistema dinâmico com propriedades que independem do irracional $\beta \in (0, 1)$ escolhido. Para cada $k, p \in \mathbb{Z}$, definimos a *aplicação traço* por:

$$\begin{aligned} t_{k,p} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto t_{k,p}(z) := \operatorname{tr}(M_{k-1}(z) M_k(z)^p) \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde a função $\operatorname{tr}(M)$ representa o traço da matriz M. A aplicação traço pode ser dada de forma recursiva, como veremos na proposição 4 abaixo. Para isso, denotaremos por S_n o n-ésimo *polinômio de Chebyshev de segundo tipo*:

$$S_{-1}(x) = 0, \quad S_0(x) = 1, \quad S_1(x) = x, \quad S_{k+1}(x) = xS_k(x) - S_{k-1}(x), \tag{2.22}$$

para quaisquer $k \geq 0$ e $x \in \mathbb{C}$. Esses polinômios têm as seguintes propriedades [1, 17]:

$$S_k(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \forall k \geq -1, \forall \theta \in \mathbb{C} \tag{2.23}$$

e

$$S_k S_{k-2} - S_{k-1}^2 = S_1 S_{-1} - S_0 = -1, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em [17].

Proposição 4 *Seja $t_{k,p}$ o traço da matriz $M_{k-1}M_k^p$. Então, para todo $p \geq 0$, tem-se*

$$t_{k,p+1} = t_{k+1,0} t_{k,p} - t_{k,p-1}, \tag{2.25}$$

e consequentemente,

$$t_{k,p+1} = S_p(t_{k+1,0}) t_{k,1} - S_{p-1}(t_{k+1,0}) t_{k,0}. \tag{2.26}$$

Além disso, para todo $k \geq 0$,

$$t_{k+2,0} = t_{k,a_{k+1}}, \qquad t_{k+1,1} = t_{k,a_{k+1}+1}, \qquad t_{k+1,-1} = t_{k,a_{k+1}-1}. \tag{2.27}$$

Denotemos por $x_k = t_{k+1,0} = \operatorname{tr}(M_k)$, $y_k = t_{k,0} = \operatorname{tr}(M_{k-1})$ e $z_k = t_{k,1} = \operatorname{tr}(M_{k-1}M_k)$. Então,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= z_k S_{a_{k+1}-1}(x_k) - y_k S_{a_{k+1}-2}(x_k), \\ y_{k+1} &= x_k, \\ z_{k+1} &= z_k S_{a_{k+1}}(x_k) - y_k S_{a_{k+1}-1}(x_k), \end{aligned} \tag{2.28}$$

com as condições iniciais: $t_{1,0} = x_0 = z$, $t_{0,0} = y_0 = 2$ e $t_{0,1} = z_0 = z - \lambda$.

Observação 2 *Omitimos z no enunciado acima para simplificar as notações.*

Demonstração. Primeiramente, note que, dada uma matriz complexa $A_{2\times 2}$ qualquer, o seu polinômio característico é

$$P_A(\gamma) = \det(A - \gamma I_2) = p(\gamma) = \gamma^2 - \mathrm{tr}(A)\gamma + \det(A)I_2, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$. Logo,

$$A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2. \tag{2.29}$$

Se $\det(A) = 1$, então $\mathrm{tr}(A)I_2 = A + A^{-1}$. Mostraremos a relação (2.25). De fato, usando o fato que $\det(M_k) = 1$, para todo k, e (2.29), temos:

$$\begin{aligned}
t_{k,p+1}I_2 + t_{k,p-1}I_2 &= M_{k-1}M_k^{p+1} + [M_{k-1}M_k^{p+1}]^{-1} + M_{k-1}M_k^{p-1} + [M_{k-1}M_k^{p-1}]^{-1} \\
&= M_{k-1}M_k^{p}[M_k + M_k^{-1}] + [M_k^{-1} + M_k][M_{k-1}M_k^{p}]^{-1} \\
&= [M_{k-1}M_k^{p} + [M_{k-1}M_k^{p}]^{-1}][M_k + M_k^{-1}] \\
&= t_{k+1,0}t_{k,p}I_2,
\end{aligned}$$

o que implica em (2.25). Provemos agora a primeira igualdade de (2.26) usando o segundo princípio de indução finita. A segunda igualdade é análoga. Seja $t = t_{k+1,0}$. Para $p = 0$, segue de (2.22) que

$$t_{k,0+1} = 1t_{k,1} - 0t_{k,0} = S_0(t)t_{k,1} - S_{0-1}(t)t_{k,0}.$$

Suponhamos válida a primeira igualdade de (2.26) para todo $j \in [0, 1, \dots, p]$. Então, por (2.25) e hipótese de indução,

$$t_{k,p+1} + t_{k,p-1} = tt_{k,p} = tS_{p-1}(t)t_{k,1} - tS_{p-2}(t)t_{k,0}.$$

Usando a hipótese de indução e (2.22), temos:

$$\begin{aligned}
t_{k,p+1} &= (tS_{p-1}(t) - S_{p-2}(t))t_{k,1} - (tS_{p-2}(t) - S_{p-3}(t))t_{k,0} \\
&= S_p(t)t_{k,1} - S_{p-1}(t)t_{k,0},
\end{aligned}$$

mostrando que (2.26) vale para todo $p \geq 0$. Para mostrar (2.27), usamos o fato que o traço é comutativo e a Proposição 2, para obtermos:

$$\begin{gathered}
t_{k,a_{k+1}} = \mathrm{tr}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}}) = \mathrm{tr}(M_{k+1}) = t_{k+2,0}, \\
t_{k,a_{k+1}+1} = \mathrm{tr}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}+1}) = \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k) = \mathrm{tr}(M_kM_{k+1}) = t_{k+1,1}, \\
t_{k,a_{k+1}-1} = \mathrm{tr}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}-1}) = \mathrm{tr}(M_kM_{k+1}^{-1}) = t_{k+1,-1}.
\end{gathered}$$

Por último, as três relações em (2.28) são consequências diretas de (2.26) e (2.27).

■

O próximo lema técnico permite a demonstração da Proposição 5 a seguir, que mostra a relação de invariância em k que o traço das matrizes de transferência satisfaz.

Lema 3 *Dada uma matriz $M_{2\times 2}$ tal que $\det(M) = 1$, então para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$M^k = S_{k-1}(\mathrm{tr}(M))M - S_{k-2}(\mathrm{tr}(M))I_2.$$

Demonstração. Provemos o lema por indução finita sobre k. Para $k = 1$,

$$M^1 = S_0(\mathrm{tr}(M))M - S_{-1}(\mathrm{tr}(M))I_2 = 1M - 0I_2.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $k \in \mathbb{N}$. Usando a relação

$$M^2 + I_2 = M(M + M^{-1}) = M\,\mathrm{tr}(M),$$

a hipótese de induão e (2.22), temos que

$$\begin{aligned}
M^{k+1} = M^k M &= S_{k-1}(\mathrm{tr}(M))M^2 - S_{k-2}(\mathrm{tr}(M))M \\
&= S_{k-1}(\mathrm{tr}(M))(M\,\mathrm{tr}(M) - I_2) - S_{k-2}(\mathrm{tr}(M))M \\
&= M[\mathrm{tr}(M)S_{k-1}(\mathrm{tr}(M)) - S_{k-2}(\mathrm{tr}(M))]I_2 - S_{k-1}(\mathrm{tr}(M))I_2 \\
&= MS_k(\mathrm{tr}(M)) - S_{k-1}(\mathrm{tr}(M))I_2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

Proposição 5 *Para todo $\lambda > 0$ e para quaisquer $k, p \geq 0$, temos a seguinte relação de invariância em k:*

$$t_{k,p}^2 + t_{k,p-1}^2 + t_{k+1,0}^2 - t_{k,p}t_{k,p-1}t_{k+1,0} = 4 + \lambda^2. \tag{2.30}$$

Em termos das sequências $\{x_k\}_k, \{y_k\}_k$ e $\{z_k\}_k$ da Proposição 4, temos:

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - x_k y_k z_k = 4 + \lambda^2.$$

Demonstração. Note que dadas duas matrizes A e B de 2×2 tais que $\det(A) = \det(B) = 1$, temos:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB^{-1}). \tag{2.31}$$

Seja $\mathcal{I}_k = t_{k,p}^2 + t_{k,p-1}^2 + t_{k+1,0}^2 - t_{k,p}t_{k,p-1}t_{k+1,0}$. Usando (2.31) mostraremos que $\mathcal{I}_k = \mathrm{tr}(M_{k+1}^{-1}M_k^{-1}M_{k+1}M_k) + 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(M_{k+1}^{-1}M_k^{-1}M_{k+1}M_k) &= \mathrm{tr}((M_kM_{k+1})^{-1})\,\mathrm{tr}(M_{k+1}M_k) - \mathrm{tr}(M_{k+1}M_kM_{k+1}M_k) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 - \mathrm{tr}(M_k^2M_{k+1}^2) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 - \mathrm{tr}(M_k)\,\mathrm{tr}(M_kM_{k+1}^2) + \mathrm{tr}(M_k(M_kM_{k+1}^2)^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 - \mathrm{tr}(M_k)\,\mathrm{tr}(M_kM_{k+1}^2) + \mathrm{tr}(M_{k+1}^2) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 + \mathrm{tr}(M_{k+1}^2) - \\
&\quad - \mathrm{tr}(M_k)(\mathrm{tr}(M_kM_{k+1})\,\mathrm{tr}(M_{k+1}) - \mathrm{tr}(M_kM_{k+1}(M_{k+1})^{-1})) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 + \mathrm{tr}(M_{k+1}^2) - \\
&\quad - \mathrm{tr}(M_k)(\mathrm{tr}(M_kM_{k+1})\,\mathrm{tr}(M_{k+1})\,\mathrm{tr}(M_k) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 + \mathrm{tr}(M_k)^2 + \mathrm{tr}(M_{k+1}^2) - \\
&\quad - \mathrm{tr}(M_k)\,\mathrm{tr}(M_kM_{k+1})\,\mathrm{tr}(M_{k+1}) \\
&= \mathrm{tr}(M_{k+1}M_k)^2 + \mathrm{tr}(M_k)^2 + \mathrm{tr}(M_{k+1})^2 - \\
&\quad - \mathrm{tr}(M_k)\,\mathrm{tr}(M_kM_{k+1})\,\mathrm{tr}(M_{k+1}) - 2 \\
&= \mathcal{I}_k - 2.
\end{aligned}$$

Pela proposição 2,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(M_{k+1}^{-1}M_k^{-1}M_{k+1}M_k) &= \operatorname{tr}(M_{k+1}M_kM_{k+1}^{-1}M_k^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}+1}M_{k+1}^{-1}M_k^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}+1}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}})^{-1}M_k^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(M_{k-1}M_k^{a_{k+1}+1}(M_k^{a_{k+1}})^{-1}M_{k-1}^{-1}M_k^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(M_{k-1}M_kM_{k-1}^{-1}M_k^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(M_{k-1}^{-1}M_k^{-1}M_{k-1}M_k) \\
&= \mathcal{I}_{k-1} - 2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{k-1}$ $\forall k \geq 0$ e, consequentemente, $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Basta mostrar que $\mathcal{I}_0 = \lambda^2 + 4$. Sendo

$$\mathcal{I}_0 = \operatorname{tr}(M_1M_0)^2 + \operatorname{tr}(M_1)^2 + \operatorname{tr}(M_0)^2 - \operatorname{tr}(M_0)\operatorname{tr}(M_1M_0)\operatorname{tr}(M_1),$$

devemos calcular os valores destes traços para os casos em que $a_1 = 1$ e $a_1 > 1$.

Se $a_1 = 1$, então pela Proposição 2, $M_1 = M_{-1}M_0^{a_1} = M_{-1}M_0$. Logo,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 &= (z(z-\lambda)-2)^2 + (z-\lambda)^2 + z^2 - z(z-\lambda)(z(z-\lambda)-2) \\
&= z^2 - 2z(z-\lambda) + z^2(z-\lambda)^2 + 4 \\
&= (z - z(z-\lambda))^2 + 4 \\
&= \lambda^2 + 4.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $a_1 > 1$, calculemos $\operatorname{tr}(M_1)$ e $\operatorname{tr}(M_1)M_0$. Pela Proposição 2, $M_1 = M_{-1}M_0^{a_1} = M_1M_0M_0^{a_1-1}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a_1-1} \\
&= \begin{pmatrix} z-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a_1-1}.
\end{aligned}$$

Pelo lema 3,

$$M_0^{a_1-1} = S_{a_1-2}(z)\begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - S_{a_1-3}(z)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$M_1 = S_{a_1-2}(z)\begin{pmatrix} z(z-\lambda)-1 & -(z-\lambda) \\ z & -1 \end{pmatrix} - S_{a_1-3}(z)\begin{pmatrix} z-V & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$M_0M_1 = S_{a_1-2}(z)\begin{pmatrix} z^2(z-\lambda)-2z & -z(z-\lambda)+1 \\ z(z-\lambda)-1 & -(z-\lambda) \end{pmatrix} - S_{a_1-3}(z)\begin{pmatrix} z(z-\lambda)-1 & -z \\ z-\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, usando que

$$\operatorname{tr}(M_1) = (z(z-\lambda)-2)S_{a_1-2}(z) - (z-\lambda)S_{a_1-3}(z),$$

$$\operatorname{tr}(M_0M_1) = (z^2(z-\lambda)-2z)S_{a_1-2}(z) - (z(z-\lambda)-1)S_{a_1-3}(z),$$

as propriedades de polinômios de Chebyshev e o Lema 3, podemos concluir que $\mathcal{I}_0 = \lambda^2 + 4$.

■

Para finalizarmos esta seção, veremos um lema que estabelece uma condição necessária e suficiente para que o traço $x_k = t_{k+1,0}$ das matrizes de transferência fique limitado. Sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Lema 4 *A sequência $\{x_k(z)\}_k$ definida na proposição 4 é não-limitada se, e somente se,*

$$|x_{N-1}(z)| \leq 2, \qquad |x_N(z)| > 2, \qquad |x_{N+1}(z)| > 2, \tag{2.32}$$

para algum $N \geq 0$ e $z \in \mathbb{C}$. Além disso,

$$|x_{N+2}(z)| > \frac{|x_{N+1}(z)||x_N(z)|}{2} > 2, \forall n \geq N \tag{2.33}$$

e existe uma constante $C > 1$ tal que

$$\frac{|x_n(z)|}{2} > C^{q_n}. \tag{2.34}$$

O lema à seguir é uma variação do Lema 4, acrescentando-se um valor $\delta > 0$ suficientemente pequeno na limitação do traço x_k. Além disso, é utilizado termos da sequência $\{z_k\}$ definida na Proposição 4. A demonstração dada abaixo difere da apresentada em [1] para o Lema 4.

Lema 5 *A sequência $\{x_k(z)\}_k$ definida na Proposição 4 é não-limitada se, e somente se,*

$$|x_{N-1}(z)| \leq 2+\delta, \qquad |x_N(z)| > 2+\delta, \qquad |z_N(z)| > 2+\delta, \tag{2.35}$$

para algum $N \geq 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Defina a sequência

$$G_k = G_{k-1} + a_{k+N}G_{k-2}, \qquad G_0 = 1, \qquad G_{-1} = 1. \tag{2.36}$$

Então,

$$|x_{k+1}(z)| \geq |z_k(z)| \geq e^{cG_{k-N}} + 1, \forall k > N, \tag{2.37}$$

com $c = \log(1+\delta) > 0$ constante.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que, para qualquer $k \geq 0$ e $|x| > 2$, vale a desigualdade

$$|S_k(x)| - |S_{k-1}(x)| \geq (|x|-1)^k \tag{2.38}$$

onde S_k é o k-ésimo polinômio de Chebshev definido por (2.22). Com efeito, usando (2.22), temos:

$$\begin{aligned}
|S_k(x)| - |S_{k-1}(x)| &= |xS_{k-1}(x) - S_{k-2}(x)| - |S_{k-1}(x)| \\
&\geq |x||S_{k-1}(x)| - |S_{k-2}(x)| - |S_{k-1}(x)| \\
&\geq (|x|-1)(|S_{k-1}(x)| - |S_{k-2}(x)|) \\
&\geq \dots \\
&\geq (|x|-1)^k(|S_0(x)| - |S_1(x)|) = (|x|-1)^k.
\end{aligned}$$

Faremos a demonstração por indução finita. Denotemos $x_k(z) = x_k$. Suponha que exista $N \geq 0$ de modo que (2.35) seja verdade. Nossa hipótese de indução é:

$$H_N: \quad |x_N| > 2+\delta, \qquad |z_N| > 2+\delta, \qquad |x_{N-1}| \leq |z_N|. \tag{2.39}$$

Note que (2.35) implica em (2.39). Mostremos que (2.39) implica as seguintes relações:

1. $|z_{N+1}| > |z_N|$,
2. $|x_{N+1}| > |z_N|$,
3. $|x_N| \leq |z_{N+1}|$.

De fato, por (2.39) e (2.28), temos:

$$\begin{aligned}
|z_{N+1}| &= |z_N S_{a_{N+1}}(x_N) - x_{N-1} S_{a_{N+1}-1}(x_N)| \\
&\geq |z_N||S_{a_{N+1}}(x_N)| - |x_{N-1}||S_{a_{N+1}-1}(x_N)| \\
&\geq |z_N||S_{a_{N+1}}(x_N)| - |z_N||S_{a_{N+1}-1}(x_N)| \\
&= |z_N| \left(|S_{a_{N+1}}(x_N)| - |S_{a_{N+1}-1}(x_N)|\right) \\
&\geq (|x_N| - 1)^{a_{N+1}} |z_N| \\
&> (2 + \delta - 1)^{a_{N+1}} |z_N| \\
&= (1 + \delta)^{a_{N+1}} |z_N| > |z_N|,
\end{aligned}$$

provando 1). Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|z_{N+1}| &> |z_N|(|x_N| - 1) \\
&= |x_N|(|z_N| - 1) + |x_N| - |z_N| \\
&\geq (2 + \delta)(|z_N| - 1) + |x_N| - |z_N| \\
&\geq 2(|z_N| - 1) + |x_N| - |z_N| \\
&= |z_N| + |x_N| - 2 \\
&\geq 2 + \delta + |x_N| - 2 \\
&= |x_N| + \delta > |x_N|.
\end{aligned}$$

Sendo assim, 3) é válido. Por fim, como $|x_N| - 1 > 2 + \delta - 1 = 1 + \delta > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|x_{N+1}| &= |z_N S_{a_{N+1}-1}(x_N) - x_{N-1} S_{a_{N+1}-2}(x_N)| \\
&\geq |z_N||S_{a_{N+1}-1}(x_N)| - |x_{N-1}||S_{a_{N+1}-2}(x_N)| \\
&\geq |z_N|(|S_{a_{N+1}-1}(x_N)| - |S_{a_{N+1}-2}(x_N)|) \\
&\geq |z_N|(|x_N| - 1)^{a_{N+1}-1} > |z_N|,
\end{aligned}$$

o que prova 2). Usando essas três desigualdades juntamente com a hipótese de indução, obtemos o seguinte: $|z_{N+1}| > |z_N| > 2 + \delta$, $|x_{N+1}| > |z_N| > 2 + \delta$ e $|x_N| \leq |z_{N+1}|$, ou seja, (2.39) é válido para todo $n \geq N$.

O que nos resta mostrar é que, supondo (2.35), $\{x_k\}_k$ é não-limitada. Com efeito, como $|z_{k+1}| \geq |z_k|(|x_k| - 1)^{a_{k+1}}$, para todo $k \geq N$, segue que

$$\log |z_{k+1}| \geq \log |z_k| + a_{k+1} \log (|x_k| - 1), \forall k \geq N.$$

Por 1) e 2), esta expressão vem à ser:

$$\log (|z_{k+1}| - 1) \geq \log (|z_k| - 1) + a_{k+1} \log (|z_{k-1}| - 1), \forall k \geq N.$$

Note que $\log (|z_{k+1}| - 1) \geq cG_k$, para todo $k \geq N$, onde a sequência $\{G_k\}_k$ é dada por (2.36) e $c = \log (1 + \delta)$. Para provar tal fato, usaremos o segundo princípio da indução finita. Para $k = N$, temos:

$$\log(|z_N| - 1) > \log(2 + \delta - 1) = c = cG_{N-N}.$$

Suponhamos agora que exista k_0 natural de modo que nossa afirmação seja verdadeira, para todo $k \in \{N, N+1, \ldots, k_0 - 1\}$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} \log(|z_{k_0}| - 1) & \geq & \log(|z_{k_0} - 1| - 1) + a_{k_0} \log(|z_{k_0} - 2| - 1) \\ & \geq & cG_{k_0-1-N} + a_{k_0} cG_{k_0-2-N} \\ & = & c(G_{k_0-1-N} + a_{k_0} G_{k_0-2-N}) = cG_{k_0-N}, \end{array}$$

mostrando válido para k_0, provando o desejado. Logo,

$$|z_k| \geq e^{cG_{k-N}} + 1, \forall k \geq N.$$

Por 2),

$$|x_{k+1}| \geq |z_k| \geq e^{cG_{k-N}} + 1, \forall k \geq N,$$

provando que a sequencia $\{x_k\}_k$ é não-limitada, completando a demonstração.

■

Observação 3 *Como a outra implicação do lema não é utilizada, omitimos sua demonstração e esta pode ser encontrada em* [1].

Apresentaremos agora um lema técnico necessário para trocar a sequência $\{G_k\}_k$, definida em (2.36), pela sequência $\{q_k\}_k$ das aproximações periódicas do irracional $\beta \in (0,1)$.

Lema 6 *Seja $\beta = [a_1, a_2, \ldots]$ tal que $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} < \infty$. Seja a sequência $\{G_k\}_k$ definida por* (2.36). *Então, existe uma constante $d > 1$ de modo que $G_k^d > q_k$, para todo k.*

Demonstração. Por hipótese, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\limsup_k \frac{\log q_k}{k} = \log C.$$

Como $\frac{\log q_k}{k}$ é crescente, então

$$q_k \leq C^k, \forall k.$$

Consideremos as três sequências: $\{F_k\}_k$, $\{G_k\}_k$ e $\{q_k\}_k$, onde F_k é o k-ésimo número de Fibonacci, que satisfaz $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, k \geq 1$. Então, podemos mostrar por indução que

$$F_k \leq G_k \leq q_k, \forall k.$$

Portanto, tomando $d > \frac{\log C}{\omega} > 1$, onde ω é o número de Fibonacci, completamos a demonstração.

■

2.5 Aproximações Periódicas

Seja $\beta \in (0,1)$ um irracional qualquer e considere $\beta_k = p_k/q_k$ as aproximações racionais de β. Então, os operadores de Schrödinger periódicos $H_k \equiv H_{\beta_k,\lambda}$ com potenciais (1.2) associados à β_k, são chamados de *aproximações periódicas de $H_{\beta,\lambda}$* e é bem conhecido que tais operadores convergem fortemente para $H_{\beta,\lambda}$ (ver, por exemplo [17] e [19]). O espectro desses operadores possuem propriedades interessantes que veremos nesta seção.

Definição 1 *Seja $\delta \geq 0$ suficientemente pequeno. Então, para $k, p \geq -1$, definimos os espectros das aproximações periódicas de $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ como:*

$$\begin{aligned} \sigma_{k,p} &= \{z \in \mathbb{C} : |t_{k,p}(z)| \leq 2\}, \\ \sigma_{k,p}^{\delta} &= \{z \in \mathbb{C} : |t_{k,p}(z)| \leq 2 + \delta\}, \\ (\sigma_{k,p}^{\delta})^{\mathbb{R}} &= \{E \in \mathbb{R} : |t_{k,p}(E)| \leq 2 + \delta\}. \end{aligned}$$

Um fato bastante conhecido (ver [1, 17, 19]) é que o espectro dos operadores H_k é formado pelas energias $E \in \mathbb{R}$ tais que $|t_{k,0}(E)| \leq 2$, ou seja, $\sigma(H_k) = (\sigma_{k,0}^{0})^{\mathbb{R}}$. Sendo assim, estudar as propriedades satisfeitas pelos conjuntos definidos acima é obter informações sobre o espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ de $H_{\beta,\lambda}$, como veremos nos próximos resultados.

Proposição 6 *Seja $H_{\beta,\lambda}$ o operador de Schrödinger* (1.1) *com potencial Sturmiano* (1.2), *com $\beta \in (0, 1)$ irracional e $\lambda > 0$. Então, a sequência de espectros $\sigma_{k,p}$ das aproximações periódicas H_k de $H_{\beta,\lambda}$ satisfaz:*

i) O conjunto $(\sigma_{k,p}^{0})^{\mathbb{R}}$ é formado pela união de $pq_k + q_{k-1}$ intervalos disjuntos.

ii) $\sigma(H_{\beta,\lambda}) \subset \sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,0}$ e $\sigma_{k,p+1} \subset \sigma_{k+1,0} \cup (\sigma_{k+1,0}^{c} \cap \sigma_{k,p})$, para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq -1$.

iii) Para todo $\lambda > 4$, $\sigma_{k+1,0} \cap \sigma_{k,p} \cap \sigma_{k,p-1} = \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 0$.

Observação 4 *Os intervalos disjuntos que constituem os conjuntos $(\sigma_{k,p}^{0})^{\mathbb{R}}$ são chamados de bandas. Os intervalos entre as bandas são chamados de gap.*

Demonstração. *i)* É bem conhecido que o espectro de um operador q-periódico é formado pela união de q bandas. Ademais, a invariância do comutador (2.20) implica que nenhuma das matrizes $M_{k-1}M_k^p$ pode ser múltiplo da matriz identidade, já que $\lambda > 0$. Logo, como duas bandas podem se interseccionar em um único ponto z_0 no qual a matriz de transferência é $\pm I_2$, segue que todas as bandas são disjuntas e, portanto, existem $pq_k + q_{k-1}$ delas.

ii) Provemos que $\sigma(H_{\beta,\lambda}) \subset \sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,0}$. Se mostrarmos que $z \notin \sigma_{k+1,0}$ e $z \notin \sigma_{k,0}$ implica $z \notin \sigma(H_{\beta,\lambda})$, então o resultado está provado. De fato, pelo Lema 4, se dado $z \in \mathbb{C}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$|x_k(z)| > 2 \qquad \text{e} \qquad |x_{k+1}(z)| > 2$$

então

$$|x_j(z)| > 2, \forall j \geq k$$

e, assim, $z \notin \sigma(H_{\beta,\lambda})$. Portanto, $\sigma(H_{\beta,\lambda}) \subset \sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,0}$. Para mostrar $\sigma_{k,p+1} \subset \sigma_{k+1,0} \cup (\sigma_{k+1,0}^{c} \cap \sigma_{k,p})$, note que sempre temos $\sigma_{k,p+1} \subset \sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k+1,0}^{c}$. Então, basta provar que, dado z de modo que

$$|t_{k,p+1}(z)| \leq 2 \qquad \text{e} \qquad |t_{k+1,0}(z)| > 2,$$

então

$$|t_{k,p}(z)| \leq 2.$$

Para isso, suponhamos por absurdo que, para dado z, tenhamos

$$|t_{k,p+1}(z)| \leq 2, \qquad |t_{k+1,0}(z)| > 2, \qquad \text{e} \qquad |t_{k,p}(z)| > 2.$$

Desta forma, para todo $p' \in \mathbb{Z}$, se

$$0 < |t_{k,p'+1}(z)| \leq |t_{k,p'}(z)|, \tag{2.40}$$

então,

$$\frac{|t_{k+1,0}(z)|}{2}|t_{k,p'}(z)| - |t_{k,p'+1}(z)| > 0. \tag{2.41}$$

Pela Proposição 4, temos que $t_{k,p'-1}(z) = t_{k+1,0}(z)t_{k,p'}(z) - t_{k,p'+1}(z), \forall p'$. Logo,

$$\begin{aligned} |t_{k,p'-1}(z)| &= |t_{k+1,0}(z)t_{k,p'}(z) - t_{k,p'+1}(z)| \\ &\geq |t_{k+1,0}(z)||t_{k,p'}(z)| - |t_{k,p'+1}(z)| \\ &= \frac{|t_{k+1,0}(z)|}{2}|t_{k,p'}(z)| + \frac{|t_{k+1,0}(z)|}{2}|t_{k,p'}(z)| - |t_{k,p'+1}(z)|, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |t_{k,p-1}(z)| > \frac{|t_{k+1,0}(z)|}{2}|t_{k,p'}(z)|, \forall p'. \tag{2.42}$$

Como $|t_{k+1,0}(z)| > 2$ e $|t_{k,p'}(z)| > 2$, (2.42) implica que

$$|t_{k,p'-1}(z)| > |t_{k+1,0}(z)| \qquad \text{e} \qquad |t_{k,p'-1}(z)| > |t_{k,p'}(z)|. \tag{2.43}$$

Observe que (2.43) é válido para $p' = p$. Por indução, provamos que (2.43) vale para todo $p' \leq p$. Note que $|t_{k,0}(z)| > 2$ e $|t_{k-1,a_k-1}(z)| = |t_{k,-1}(z)| > 2$. Além disso, como $t_{k-1,a_k}(z) = \mathrm{tr}(M_{k-2}(z)M_{k-1}(z)^{a_k}) = \mathrm{tr}(M_k(z)) = t_{k+1,0}(z)$, por (2.43) obtemos

$$t_{k-1,a_k}(z) = t_{k+1,0}(z) < |t_{k,-1}(z)| = |t_{k-1,a_k-1}(z)|.$$

Prosseguindo de maneira indutiva, vemos que

$$2 = |t_{0,0}(z)| < 2,$$

um absurdo. Isto completa a demonstração.

iii) Provemos a contra recíproca de *iii)*. Suponhamos que

$$\sigma_{k+1,0} \cap \sigma_{k,p} \cap \sigma_{k,p-1} \neq \emptyset.$$

Então, tomemos elementos das sequências x_k, y_k e z_k definidas na Proposição 4 tais que estejam nesta interseção. Por um caso particular da relação recursiva (2.30),

$$x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - x_k y_k z_k = 4 + \lambda^2, \forall k \geq 0,$$

temos:

$$\begin{aligned} 4 + \lambda^2 &= |x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - x_k y_k z_k| \\ &\leq 4 + 4 + 4 + 8 = 20, \end{aligned}$$

implicando $\lambda \leq 4$.

∎

Como consequência da Proposição 6, temos que para $\lambda > 4$, cada banda $B_{k,p+1}$ de $\sigma_{k,p+1}$ está inteiramente contida em uma banda de $\sigma_{k+1,0}$ ou de $\sigma_{k,p}$. De fato, o item *ii)* implica que

$$B_{k,p+1} \subset \sigma_{k+1,0} \cup \sigma_{k,p}.$$

Entretanto, se $B_{k,p+1}$ tem parte em ambos os conjuntos, então existe

$$x \in B_{k,p+1} \cap \sigma_{k+1,0} \cap \sigma_{k,p}.$$

Mas por *iii)*, esta interseção é vazia. Portanto, $B_{k,p+1} \subset \sigma_{k+1,0}$ ou $B_{k,p+1} \subset \sigma_{k,p}$.

A Proposição 6 mostra a estrutura satisfeita pelos conjuntos $(\sigma_{k,0}^0)^{\mathbb{R}}$. Desta forma, podemos classificar as bandas de acordo com a seguinte definição:

Definição 2 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos:*

i) Banda tipo I: uma banda de $\sigma_{k,1}$ contida em um gap de $\sigma_{k+1,0}$ e em uma banda de $\sigma_{k,0}$.

ii) Banda tipo II: uma banda de $\sigma_{k+1,0}$ contida numa banda de $\sigma_{k,-1}$ e num gap de $\sigma_{k,0}$.

iii) Banda tipo III: uma banda de $\sigma_{k+1,0}$ contida numa banda de $\sigma_{k,0}$ e num gap de $\sigma_{k,1}$.

Observação 5 *Em* [16]*, o item (i) da definição* 2 *recebe o nome de Gap tipo I.*

Esta definição nos permite mostrar que o espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ pode ser coberto, em cada nível k, por bandas dos três tipos. Isto é feito por indução. Com efeito, para $k = 0$, temos que $(\sigma^0_{0,0})^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $(\sigma^0_{0,1})^{\mathbb{R}} = [\lambda - 2, \lambda + 2]$ e $(\sigma^0_{1,0})^{\mathbb{R}} = [-2, 2]$. Pelo item *ii)* da Proposição 6, $\sigma(H_{\beta,\lambda}) \subset (\sigma^0_{1,0})^{\mathbb{R}} \cup (\sigma^0_{0,1})^{\mathbb{R}}$ que são, respectivamente, uma banda tipo I e uma banda tipo III. A hipótese de indução e a conclusão deste fato segue do seguinte lema, cuja demonstração está em [17]:

Lema 7 *Seja $\beta = [a_1, \ldots, a_k, \ldots] \in (0, 1)$ um irracional associado ao operador de Schrödinger (1.1) $H_{\beta,\lambda}$ com potencial Sturmiano (1.2). Para cada $k \in \mathbb{N}$:*

i) Uma banda tipo I contém uma única banda tipo II de $\sigma_{k+2,0}$ no nível $k + 1$.

ii) Uma banda tipo II contém $(a_{k+1} + 1)$ bandas do tipo I de $\sigma_{k+1,1}$ no nível $k + 1$. Estas bandas se alternam com a_{k+1} bandas do tipo III de $\sigma_{k+2,0}$ no nívelk $+ 1$.

iii) Uma banda tipo III contém (a_{k+1}) bandas do tipo I de $\sigma_{k+1,1}$ no nível $k + 1$. Estas bandas se alternam com $a_{k+1} - 1$ bandas do tipo III de $\sigma_{k+2,0}$ no nível $k + 1$.

Portanto, vemos que o espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ é formado por bandas das aproximações periódicas do espectro, dadas na Definição 1. O próximo teorema nos permite controlar o tamanho destas bandas. De fato, seja o alfabeto $\mathcal{A} = \{I, II, III\}$. Para cada banda $B_k \subset \sigma(H_{\beta,\lambda})$, no nível k, existe uma única palavra $i_0 i_1 \ldots i_k \in \mathcal{A}^n$, com $n \geq k$, tal que B_k é uma banda tipo i_k, contida em uma banda tipo i_{k-1}, no nível $k-1$, que por sua vez está contida em uma banda tipo i_{k-2}, no nível $k - 2$, e esta sucessão de contingências segue até o nível 0. Chamamos esta palavra de *índice de B_k*. Note que duas bandas distintas podem ter o mesmo índice.

Seja $A = (A_k)_k$, onde $A_k = (a_{i,j}(k))$, uma sequência de matrizes 3×3 e $\tau = i_0 i_1 \ldots i_k$ um índice. Então, definimos:

$$L\tau(A) = a_{i_0,i_1}(0) a_{i_1,i_2}(1) \ldots a_{i_{k-1},i_k}(k). \tag{2.44}$$

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3 *Seja $H_{\beta,\lambda}$ o operador de Schrödinger Sturmiano* (1.1)-(1.2) *associado ao irracional $\beta = [a_1, a_2, \ldots]$ em $[0, 1]$, com $\lambda > 20$. Então, para cada k, qualquer banda B_k de índice τ definida acima satisfaz*

$$4L_\tau(Q) \leq |B_k| \leq 4L_\tau(P),$$

onde $|B_k|$ é o comprimento da banda B_k, $P = (P_j)_{j>0}$,

$$P_j = \begin{pmatrix} 0 & c_1^{a_j - 1} & 0 \\ c_1/a_j & 0 & c_1/a_j \\ c_1/a_j & 0 & c_1/a_j \end{pmatrix},$$

com $c_1 = \frac{3}{\lambda-8}$ *e* $Q = (Q_j)_{j>0}$,

$$Q_j = \begin{pmatrix} 0 & c_2^{a_j-1} & 0 \\ c_2(a_j+2)^{-3} & 0 & c_2(a_j+2)^{-3} \\ c_2(a_j+2)^{-3} & 0 & c_2(a_j+2)^{-3} \end{pmatrix},$$

com $c_2 = \frac{1}{\lambda+5}$.

Veja que, a partir deste Teorema, a hipótese $\lambda > 20$ será necessária. Para detalhes da demonstração do Teorema 3, veja a referência [15].

Passaremos a considerar os conjuntos $\sigma_{k,0}^{\delta}$ da definição 1, com $\delta > 0$ e energias complexas. Para que a relação de invariância da proposição 5 continue válida, é necessário considerar a hipótese $\lambda > \lambda_0(\delta) = [16 + 24\delta + 9\delta^2 + 4]^{1/2}$ (ver [16]). Desta forma, a estrutura satisfeita pelas aproximações periódicas do espectro provada nesta seção continua válida para os conjuntos $\sigma_{k,0}^{\delta}$ (veja [16] para detalhes).

À vista disso, podemos enunciar e demonstrar a proposição 7 a seguir. Este importante resultado será usado na demonstração do Teorema 1 e nos mostra que a altura dos conjuntos $\sigma_{k,0}^{\delta}$ mede aproximadamente o seu comprimento.

Proposição 7 *Se* $K \geq 3$, $\delta > 0$ *e* $\lambda > \max\{20, \lambda_0(\delta)\}$, *então existem constantes positivas* c_δ, d_δ *tais que*

$$\bigcup_{j=1}^{q_{k-1}} B(x_k^{(j)}, r_k) \subseteq \sigma_{k,0}^{\delta} \subseteq \bigcup_{j=1}^{q_{k-1}} B(x_k^{(j)}, R_k),$$

onde $\{x_k^{(j)}\}_{j\in\{1,\ldots,q_{k-1}\}}$ *são os zeros de* x_k, $r_k = c_\delta \inf_\tau L_\tau(Q)$, $R_k = d_\delta \sup_\tau L_\tau(P)$ *e* $B(x,r)$ *representa a bola aberta de centro* $x \in \mathbb{C}$ *e raio* $r > 0$.

Demonstração. Primeiramente, note que $x_k = \mathrm{tr}(M_k)$ é um polinômio de grau q_k com coeficientes reais. Pelo Lema 6 de [5], para $\lambda > \max\{20, \lambda_0(2\delta)\}$, sabemos que o conjunto $\sigma_{k,0}^{2\delta} = \{z \in \mathbb{C} : |x_k(z)| \leq 2 + 2\delta\}$ é formado por q_{k-1} componentes conexas, as quais denotaremos por $\{C_j\}_{1\leq j\leq q_{k-1}}$, onde cada uma contém um único zero $x_k^{(j)}$ de x_k. Além disso, claramente $\sigma_{k,0}^{\delta} \subset \sigma_{k,0}^{2\delta}$ e cada componente C_j contém uma componente conexa $\widetilde{C_j}$ de $\sigma_{k,0}^{\delta}$. Portanto, para obter o resultado basta mostrar que

$$B(x_k^{(j)}, r_k) \subseteq \widetilde{C_j} \subseteq B(x_k^{(j)}, R_k), \tag{2.45}$$

para todo $1 \leq j \leq q_{k-1}$.

Consideremos a função $x_k : \mathrm{int}(C_j) \longrightarrow B(0, 2+2\delta)$ e sua inversa $x_k^{-1} : B(0, 2+2\delta) \longrightarrow \mathrm{int}(C_j)$. Note que tais funções são univalentes. Seja

$$F : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F(z) = \frac{x_k^{-1}((2+2\delta)z) - x_k^{(j)}}{(2+2\delta)(x_k^{-1})'(0)}.$$

Note que F é uma função de *Schlitch*, ou seja, é univalente, $F(0) = 0$ e $F'(0) = 1$. Com efeito, F é univalente pelo fato de x_k^{-1} ser univalente. Agora, como $x_k(x_k^{(j)}) = 0$ se, e somente se, $x_k^{-1}(0) = x_k^{(j)}$, segue que

$$F(0) = \frac{x_k^{-1}((2+2\delta)0) - x_k^{(j)}}{(2+2\delta)(x_k^{-1})'(0)} = \frac{x_k^{(j)} - x_k^{(j)}}{(2+2\delta)(x_k^{-1})'(0)} = 0.$$

Além disso,

$$F'(z) = \frac{(2+2\delta)[(x_k^{-1})'((2+2\delta)z)]}{(2+2\delta)(x_k^{-1})'(0)},$$

o que implica $F'(0) = 1$. Sendo assim, pelo Teorema de Distorção de Koebe (ver em [2]) obtemos:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |F(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad |z| \leq 1.$$

Como $|\frac{2+\delta}{2+2\delta}| < 1$, então aplicando a desigualdade acima para o círculo $|z| = \frac{2+\delta}{2+2\delta}$, obtemos:

$$\frac{(2+2\delta)(2+\delta)}{(4+3\delta)^2} \leq |F(z)| \leq \frac{(2+2\delta)(2+\delta)}{\delta^2}.$$

Pela definição de F, segue que

$$\frac{(2+2\delta)^2(2+\delta)}{(4+3\delta)^2}|(x_k^{-1})'(0)| \leq |x_k^{-1}((2+2\delta)z) - x_k^{(j)}| \leq \frac{(2+2\delta)^2(2+\delta)}{\delta^2}|(x_k^{-1})'(0)|,$$

para $|z| = \frac{2+\delta}{2+2\delta}$. Então, para $|z| = 2+\delta$, segue que

$$|x_k^{-1}(z) - x_k^{(j)}| \leq \frac{(2+2\delta)^2(2+\delta)}{\delta^2}|(x_k^{-1})'(0)| \tag{2.46}$$

e

$$\frac{(2+2\delta)^2(2+\delta)}{(4+3\delta)^2}|(x_k^{-1})'(0)| \leq |x_k^{-1}(z) - x_k^{(j)}|. \tag{2.47}$$

Note que $x_k(x_k^{(j)}) = 0$ implica $x_k^{(j)} = x_k^{-1}(0)$. Pela derivada de função inversa [7], temos $(x_k^{-1})'(0) = 1/x_k'(x_k^{(j)})$ e, desta maneira, $(x_k^{-1})'(0) \in C_j$. Pelo Teorema 3, para cada banda C_j de $\sigma_{k,0}^{\delta}$, existe um índice τ tal que

$$4L_\tau(Q) \leq |C_j| \leq 4L_\tau(P).$$

Tomando o ínfimo e o supremo em τ na desigualdade acima, teremos que, para cada k e cada j,

$$\inf_\tau L_\tau(Q) \leq |(x_k^{-1})'(0)| \leq \sup_\tau L_\tau(P).$$

Logo,chamando $d_\delta = \frac{4(2+2\delta)^2(2+\delta)}{\delta^2}$ e $c_\delta = \frac{4(2+2\delta)^2(2+\delta)}{(4+3\delta)^2}$, temos:

$$r_k \leq |x_k^{-1}(z) - x_k^{(j)}| \leq R_k, \tag{2.48}$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq q_{k-1}$ e $|z| = 2+\delta$. Como imagem de um conjunto compacto através de x_k é um conjunto compacto, então $x_k^{-1}(z) \in \operatorname{fr} C_j$, para todo $|z| = 2+\delta$. Agora, dado $y \in \widetilde{C_j} \subset \operatorname{int}(C_j)$, existe $z \in B(0, 2+2\delta)$ tal que $x_k^{-1}(z) = y$. Logo, pela continuidade de x_k^{-1} e por (2.48), temos

$$r_k \leq |x_k^{-1}(z) - x_k^{(j)}| \leq R_k,$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq q_{k-1}$ e $z \in B(0, 2+\delta)$. Portanto,

$$B(x_k^{(j)}, r_k) \subseteq \widetilde{C_j} \subseteq B(x_k^{(j)}, R_k), \forall k, j.$$

■

Capítulo

3

Limite Dinâmico Superior

Neste capítulo apresentaremos os detalhes da demonstração do Teorema 1, enunciado na Introdução. A ideia é encontrar $N(T) \longrightarrow \infty$ de tal forma que

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} P(N(T),T) = 0. \tag{3.1}$$

Intuitivamente, a equação (3.1) diz que, para T suficientemente grande, a ação da função de onda $\psi(t) = e^{-itH_{\beta,\lambda}}\delta_1$, com $1 \leq t \leq T$, é insignificante na região $(-\infty, -N(T)) \cup (N(T), \infty)$. Isto é feito tomando $N(T) = T^{\alpha}$, com $\alpha \in (0,1)$, e para tal escolha, tem-se, para T suficientemente grande,

$$P(N(T),T) \leq T^{-m}, \ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

ou seja, $P(N(T),T) \longrightarrow 0$ mais rápido que qualquer inverso de potência de T e, portanto, $\alpha_u^+ \leq \alpha$. Este α é o limite superior não-trivial procurado para o expoente crítico α_u^+.

3.1 Limitação das Probabilidades Exteriores

Para cada $N \geq 1$, sejam

$$P_d(N,T) = \sum_{n>N} a(n,T) \qquad \text{e} \qquad P_e(N,T) = \sum_{n<-N} a(n,T), \tag{3.3}$$

as *probabilidades exteriores à direita e à esquerda*, respectivamente. Note que $P(N,T) = P_d(N,T) + P_e(N,T)$. Nesta seção, apresentaremos uma limitação superior para $P_d(N,T)$ e $P_e(N,T)$ em termos de quantidades envolvendo as normas de matrizes de transferência em energias complexas, e isto será feito através do seguinte teorema:

Teorema 4 *Seja $H = -\Delta + V$ o operador de Schrödinger (1.1) agindo em $\ell^2(\mathbb{Z})$, com $V : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ um potencial limitado. Seja $K \geq 4$ de modo que $\sigma(H) \subseteq [1-K, K-1]$. Então,*

$$P_d(N,T) \lesssim e^{-cN} + T^3 \int_{-K}^{K} \left(\max_{1\leq n\leq N} \|M_n(E+i/T)\|^2 \right)^{-1} dE$$

e

$$P_e(N,T) \lesssim e^{-cN} + T^3 \int_{-K}^{K} \left(\max_{-N\leq n\leq -1} \|M_n(E+i/T)\|^2 \right)^{-1} dE.$$

A notação $f \lesssim g$ significa que existe uma constante $C > 0$ de modo que $f \leq Cg$. A demonstração do Teorema 4 será feita para $P_d(N,T)$ e é análoga (com exceção das constantes obtidas) para $P_e(N,T)$. A seguir, estão enunciados e demonstrados dois resultados importantes que serão utilizados na demonstração do Teorema 4, conhecidos como *Identidade de Parseval* e *Estimativa de Combes-Thomas*.

Sejam H um operador de Schrödinger definido por (1.1) e $\{\delta_n\}$ a base canônica de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Então, temos o seguinte resultado adaptado do Lema 3.2 em [11].

Lema 8 (Identidade de Parseval). *Para quaisquer energia $E \in \mathbb{R}$ e $T > 0$, temos:*

$$\frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T}|\langle e^{-itH}\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dt = \frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}} |\langle (H-z)^{-1}\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dE,$$

onde $z = E + i/T$.

Demonstração. Para um dado $T > 0$ fixo, consideremos a seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/T}\langle e^{-itH}\delta_1, \delta_n\rangle, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & , \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} |e^{-t/T}\langle e^{-itH}\delta_1, \delta_n\rangle| dt \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-t/T}\|e^{-itH}\| dt < \infty$, segue que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Argumento análogo mostra que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Desta forma, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Sejam μ_{δ_1,δ_n} a medida espectral associada ao operador H e ao par de vetores (δ_1, δ_n) e $g(H) = e^{-itH}$. Pelo Teorema Espectral [6], a expressão

$$\langle g(H)\delta_1, \delta_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(E') d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E')$$

é única e, em particular,

$$\langle e^{-itH}\delta_1, \delta_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-itE'} d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E'),$$

e a medida espectral μ_{δ_1,δ_n} fica definida por

$$\langle (H-z)^{-1}\delta_1, \delta_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} d\mu_{\delta_1,\delta_n}(x).$$

Portanto,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/T}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-itE'} d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E'), & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0 & , \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Para $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, a *transformada de Fourier* (ver [6] para detalhes) é dada por

$$(\mathcal{F}\psi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-itp}\psi(t) dt$$

e sua inversa

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ixp}\phi(p) dp.$$

Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, pelo Teorema de Fubini (ver [8]), temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1}f)(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{iEt}e^{-t/T}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-iE't}d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E')\right]dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_0^\infty e^{iEt-t/T-iE't}dt\right]d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{-i}{E'-(E+i/T)}\right]d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E') \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{E'-(E+i/T)}\right]d\mu_{\delta_1,\delta_n}(E') \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\langle R(E+i/T)\delta_1,\delta_n\rangle = \frac{-i}{2\pi}\langle R(z)\delta_1,\delta_n\rangle.
\end{aligned}$$

Sendo f um elemento de $L^2(\mathbb{R})$, então $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}f\|_2 = \|f\|_2$ (ver [6]). Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T}|\langle e^{-itH}\delta_1,\delta_n\rangle|^2dt &= \frac{2}{T}\|f\|_2^2 \\
&= \frac{2}{T}\|\mathcal{F}^{-1}f\|_2^2 \\
&= \frac{2}{T}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\langle R(z)\delta_1,\delta_n\rangle\right|^2 dE \\
&= \frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}}|\langle R(z)\delta_1,\delta_n\rangle|^2dE,
\end{aligned}$$

o que demonstra o resultado.

■

O próximo resultado encontra-se em [12].

Teorema 5 (Estimativa de Combes-Thomas). *Seja $H = -\Delta + V$ o operador de Schrödinger* (1.1) *agindo em $\ell^2(\mathbb{Z})$, com V um potencial qualquer. Se a distância entre E e o espectro $\sigma(H)$ satisfaz $0 < \mathrm{dist}(E,\sigma(H)) = \eta \leq C$ para qualquer $C > 0$, então*

$$\langle (H-E)^{-1}\delta_n,\delta_m\rangle \leq \frac{2}{\eta}e^{-\frac{\eta}{12C}|n-m|}, \tag{3.4}$$

para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para um operador T agindo em $\ell^2(\mathbb{Z})$, denotemos $T(n,m) = \langle T\delta_n,\delta_m\rangle$. Sejam $\mu > 0$ e $n_0 \in \mathbb{Z}$ fixos e definamos o seguinte operador em $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$(F_{n_0}u)(n) = e^{\mu|n_0-n|}u(n).$$

Note que $(F_{n_0}^{-1}u)(n) = e^{-\mu|n_0-n|}u(n)$. Além disso, para qualquer operador T em $\ell^2(\mathbb{Z})$, temos

$$(F_{n_0}^{-1}TF_{n_0})(n,m) = e^{-\mu|n_0-n|}T(n,m)e^{\mu|n_0-m|}. \tag{3.5}$$

De fato, como

$$\begin{aligned}
\langle F_{n_0}u, v\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\mu|n_0-n|}u(n)\overline{v(n)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\overline{e^{\mu|n_0-n|}v(n)} \\
&= \langle u, F_{n_0}v\rangle,
\end{aligned}$$

segue que F_{n_0} é autoadjunto. Então,

$$\begin{aligned}
\langle F_{n_0}^{-1} T F_{n_0}\delta_n, \delta_m\rangle &= \langle F_{n_0}^{-1} T\delta_n, F_{n_0}\delta_m\rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-\mu|n_0-j|}(T\delta_n)_j e^{\mu|n_0-j|}(\delta_m)_j \\
&= e^{-\mu|n_0-n|}\left[\sum_{j\in\mathbb{Z}}(T\delta_n)_j(\delta_m)_j\right] e^{\mu|n_0-m|} \\
&= e^{-\mu|n_0-n|}T(n,m)e^{\mu|n_0-m|},
\end{aligned}$$

provando, assim, (3.5). Desta forma,

$$T(n,m) = e^{-\mu|n_0-m|}(F_{n_0}^{-1}TF_{n_0})(n,m)e^{\mu|n_0-n|}.$$

Para $n = n_0$, usando a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, temos:

$$\begin{aligned}
|(H-E)^{-1}(n,m)| &= |e^{-\mu|n-m|}(F_n^{-1}(H-E)^{-1}F_n)(n,m)e^{\mu|n-n|}| \\
&= e^{-\mu|n-m|}|F_n^{-1}(H-E)^{-1}F_n(n,m)| \\
&= e^{-\mu|n-m|}|(F_n^{-1}(H-E)F_n)^{-1}(n,m)| \\
&= e^{-\mu|n-m|}|(F_n^{-1}HF_n-E)^{-1}(n,m)| \\
&\leq e^{-\mu|n-m|}\|(F_n^{-1}HF_n-E)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|(H-E)^{-1}(n,m)| \leq e^{-\mu|n-m|}\|(F_n^{-1}HF_n-E)^{-1}\|. \tag{3.6}$$

Vamos estimar $\|(F_n^{-1}HF_n - E)^{-1}\|$. Para isso, apliquemos a *segunda equação do resolvente* [6] em $(H-E)^{-1}$ e $(F_n^{-1}HF_n - E)^{-1}$ para obtermos:

$$(F_n^{-1}HF_n - E)^{-1} = (H-E)^{-1} - (F_n^{-1}HF_n - E)^{-1}(F_n^{-1}HF_n - H)(H-E)^{-1}.$$

Daí,

$$(H-E)^{-1} = (F_n^{-1}HF_n - E)^{-1}[1 + (F_n^{-1}HF_n - H)(H-E)^{-1}].$$

Se provarmos que $\|(F_n^{-1}HF_n - H)(H-E)^{-1}\| < 1$, então poderemos inverter $(1 + (F_n^{-1}HF_n - H)(H-E)^{-1})$ para obter

$$(F_n^{-1}HF_n - E)^{-1} = (H-E)^{-1}[1 + (F_n^{-1}HF_n - H)(H-E)^{-1}]^{-1}. \tag{3.7}$$

Mostremos $\|(F_n^{-1}HF_n - H)(H-E)^{-1}\| < 1$. Dado um operador T em $\ell^2(\mathbb{Z})$, se

$$a_1 = \sup_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{v\in\mathbb{Z}}|T(u,v)| < \infty$$

e

$$a_2 = \sup_{v\in\mathbb{Z}}\sum_{u\in\mathbb{Z}}|T(u,v)| < \infty,$$

então T é limitado e, por [12],

$$\|T\| \leq a_1^{1/2}a_2^{1/2}. \tag{3.8}$$

Usando (3.5), obtemos

$$\sum_{v\in\mathbb{Z}}|(F_n^{-1}HF_n - H)(u,v)| \leq \sum_{v:|u-v|=1}|e^{-\mu|n-u|}e^{\mu|n-v|} - 1|. \tag{3.9}$$

Para $|u-v| \leq 1$, temos $||n-u|-|n-v|| \leq |u-v| \leq 1$ e, além disso, para qualquer $|a| \leq 1$ e $\mu > 0$,

$$|e^{\mu a} - 1| \leq |e^{\mu} - 1| = e^{\mu} - 1 \leq \mu e^{\mu}. \tag{3.10}$$

Por (3.9) e (3.10),

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} |(F_n^{-1} H F_n - H)(u, v)| \leq 2\mu e^{\mu}. \tag{3.11}$$

Analogamente, obtemos

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} |(F_n^{-1} H F_n - H)(u, v)| \leq 2\mu e^{\mu}. \tag{3.12}$$

Como consequência de (3.11), (3.12) e (3.8), segue que

$$\|F_n^{-1} H F_n - H\| \leq a_1^{1/2} a_2^{1/2} \leq (2\mu e^{\mu})^{1/2} (2\mu e^{\mu})^{1/2} = 2\mu e^{\mu}.$$

Para provar o resultado para todo $C > 0$, vamos distinguir dois casos: (1) $\eta \leq 1$ e (2) $\eta \leq C$, para $C > 1$. Para o primeiro caso, seja $\mu = \eta/12$. Como $\text{dist}(E, \sigma(H)) = \eta \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\|(F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1}\| &\leq \|F_n^{-1} H F_n - H\| \|(H - E)^{-1}\| \\
&\leq 2\mu e^{\mu} \frac{1}{mu} \\
&= 2 \frac{\mu}{12} e^{\mu/12} \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{1}{6} e^{\mu/12} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $\mu < C$ com $C > 1$, tomemos $\mu = \eta/12C$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|(F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1}\| &\leq \|F_n^{-1} H F_n - H\| \|(H - E)^{-1}\| \\
&\leq 2\mu e^{\mu} \frac{1}{\mu} \\
&= 2 \frac{\mu}{12C} e^{\mu/12C} \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{1}{6C} e^{\mu/12} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, em ambos os casos, $1 + (F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1}$ é invertível. Então, podemos usar a *série de Neumann* [6] para representá-lo da seguinte maneira:

$$[(F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1} - (-1)]^{-1} = -1 \frac{1}{(-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1}}{-1} \right)^j.$$

Logo,

$$\|(1 + (F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1})^{-1}\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2. \tag{3.13}$$

Por (3.7) e (3.13), segue que

$$\|(F_n^{-1} H F_n - E)^{-1}\| = \|(H - E)^{-1} [(F_n^{-1} H F_n - H)(H - E)^{-1} + 1]^{-1}\| \leq \frac{2}{\delta}$$

e, por (3.6),

$$|(H - E)^{-1}(n, m)| \leq \frac{2}{\mu} e^{-\frac{\mu}{12C}|n - m|},$$

o que completa a demonstração.

■

Vamos agora trabalhar na demonstração do Teorema 4. Pela identidade de Parseval (Lema 8), temos que

$$a(n,T) = \frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T}|\langle e^{-itH}\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dt = \frac{1}{\pi T}\int_{-\infty}^\infty |\langle (H - E - i/T)\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dE.$$

Seja $T \geq 1$. Chamando $\varepsilon = 1/T$, então $0 < \varepsilon \leq 1$. Além disso, seja $z = E + i\varepsilon$ e $R(z) = (H - zI)^{-1}$. Nestes termos,

$$a(n,T) = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^\infty |\langle R(z)\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dE.$$

Somando $a(n,T)$ para $n > N$ e usando o Teorema da Convergência Monótona (veja [8]), temos:

$$\begin{aligned} P_d(N,T) = \sum_{n>N} a(n,T) &= \sum_{n>N} \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^\infty |\langle R(z)\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dE \\ &= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \sum_{n>N} |\langle R(z)\delta_1, \delta_n\rangle|^2 dE \\ &= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^\infty M_d(N,z) dE, \end{aligned}$$

onde

$$M_d(N,z) = \sum_{n>N} |\langle R(z)\delta_1, \delta_n\rangle|^2.$$

Pela *igualdade de Parseval* (ver [6]),

$$M_d(N,z) = \|\chi_N R(z)\delta_1\|^2, \tag{3.14}$$

com $\chi_N(n) = 0$ se $n \leq N$ e $\chi_N(n) = 1$ se $n > N$.

Se estimarmos uma limitação superior para $M_d(N,z)$, estaremos limitando superiormente $P_d(N,T)$, já que

$$P_d(N,T) = \frac{\varepsilon}{\pi}\left[\int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE + \int_{-K}^{K} M_d(N,z)dE\right]. \tag{3.15}$$

Para o caso em que $E \in (-\infty, -K) \cup (K, \infty)$, definindo $\eta = \operatorname{dist}(E + i\varepsilon, \sigma(H))$, então $\eta \geq 1$, já que, supondo o contrário, teríamos a existência de um elemento $x \in \sigma(H)$ de modo que $(E - x)^2 < 1 - \varepsilon^2 < 1$, pois $0 < \varepsilon^2 \leq 1$, o que implicaria $E \in [-K, K]$, um absurdo. Logo, pela estimativa de Combes-Thomas (Teorema 5), temos que

$$|\langle R(z)\delta_1, \delta_n\rangle| \leq \frac{2}{\eta} e^{c\min\{c\eta,1\}|n-1|}, \tag{3.16}$$

sendo $c > 0$ uma constante. Provemos que existe uma constante $C_1(K)$ de modo que

$$\int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE \leq C_1(K)e^{-cN}, c > 0.$$

De fato, por (3.16),

$$\begin{aligned} M_d(N,z) &= \sum_{n>N} |\langle R(z)\delta_1, \delta_n\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n>N} \left(\frac{2}{\eta} e^{-c\min\{c\eta,1\}|n-1|}\right)^2 \\ &= \frac{4}{\eta^2} \sum_{n\geq N} e^{-2c\min\{c\eta,1\}|n|}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE \leq \int_{E:|E|\geq K} \frac{4}{\eta^2} \sum_{n\geq N} e^{-2c\min\{c\eta,1\}|n|} dE. \tag{3.17}$$

Para obtermos uma limitação superior para a integral em (3.17), basta analisar o caso em que $\min\{c\eta, 1\} = c\eta$. Para isso, façamos algumas considerações. Seja $\delta = \mathrm{dist}(E, \sigma(H))$. Então, $\delta < \eta$, o que implica $e^{-\delta} > e^{-\eta}$ e $1/\eta^2 < 1/\delta^2$. Além disso, pelo espectro $\sigma(H)$ ser fechado, existe $x \in \sigma(H)$ de tal modo que $\delta = |E - x|$. Como a integral de Lebesgue é invariante por translações (veja [8]), segue que, na integral, podemos substituir $|E - x|$ por $|E|$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE &\leq \int_{E:|E|\geq K} \frac{4}{\delta^2} \sum_{n\geq N} e^{-2c^2\delta n} dE \\ &\leq \int_{E:|E|\geq K} \frac{4}{|E-x|^2} \sum_{n\geq N} e^{-2c^2|E-x|n} dE \\ &\leq \int_{E:|E|\geq K} \frac{4}{E^2} \sum_{n\geq N} e^{-2c^2|E|n} dE. \end{aligned}$$

Fazendo uso do fato que $\sum_{n\geq 0} e^{-2c^2|E|n} = (1 - e^{-2c^2|E|})^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq N} e^{-2c^2|E|n} &= e^{-2c^2|E|N} \sum_{n\geq 0} e^{-2c^2|E|n} \\ &= \frac{e^{-2c^2|E|N}}{1 - e^{-2c^2|E|}} \\ &\leq \frac{e^{-cKN}}{1 - e^{-cK}} \\ &\leq \frac{e^{-cN}}{1 - e^{-cK}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE &\leq \int_{E:|E|\geq K} 4E^{-2} \frac{e^{-cN}}{1 - e^{-cK}} dE \\ &\leq \frac{4}{1 - e^{-cK}} e^{-cN} \frac{2}{K}, \end{aligned}$$

já que $\int_{E:|E|\geq K} E^{-2} dE = 2/K$. Portanto, chamando $C_1(K) = \frac{2}{K} 4(1 - e^{-cK})^{-1}$, com $c > 0$, podemos concluir que

$$\int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE \leq C_1(K) e^{-cN}. \tag{3.18}$$

Para estimarmos a integral em (3.15) para o caso em que $E \in [-K, K]$, precisamos considerar a seguinte classe de operadores:

$$(H_N^{\pm}\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V_N^{\pm}(n)\psi(n), \tag{3.19}$$

onde o potencial $V_N^{\pm}$ é *truncado* da seguinte forma:

$$V_N^{\pm}(n) = \begin{cases} V(n), & \text{se} \quad n \leq N \\ \pm 2K, & \text{se} \quad n \geq N+1. \end{cases} \tag{3.20}$$

Naturalmente, denotamos $R_N^{\pm}(z) = (H_N^{\pm} - z)^{-1}$. Definamos

$$S^{\pm}(N, z) = \|\chi_N R_N^{\pm}(z)\delta_1\|^2 = \sum_{n>N} |\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_n\rangle|^2. \tag{3.21}$$

O próximo resultado relaciona as quantidades $M_d(N, z)$ e $S^{\pm}(N, z)$.

Lema 9 *Para quaisquer $E \in [-K, K]$ e $0 < \varepsilon < 1$, existem constantes $c_1(K), c_2(K) > 0$ unicamente dependentes de K tais que*

$$\varepsilon^2 S^{\pm}(N, z) \leq c_1(K) M_d(N, z) \leq c_2(K)\varepsilon^{-2} S^{\pm}(N, z),$$

onde $z = E + i\varepsilon$.

Demonstração. Aplicando a *primeira identidade do resolvente* (ver [6]) para $R(z)$ e $R_N^{\pm}(z)$, temos

$$\begin{aligned} R(z)\delta_1 - R_N^{\pm}(z)\delta_1 &= R(z)(H - H_N^{\pm})R_N^{\pm}(z)\delta_1 \\ &= R(z)(-\Delta + V(n) + \Delta - V_N^{\pm}(n))R_N^{\pm}(z)\delta_1 \\ &= R(z)(V(n) - V_N^{\pm}(n))R_N^{\pm}(z)\delta_1 \\ &= R(z)(\chi_N(V(n) \mp 2K))R_N^{\pm}(z)\delta_1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Note que $\|R(z)\| < 1/|Im(z)| = \varepsilon^{-1}$. Ademais, por hipótese, o potencial V é limitado. Então, usando (3.22), temos

$$\begin{aligned} M_d(N, z) &= \|\chi_N R(z)\delta_1\|^2 \\ &= \|\chi_N R(z)\delta_1 - \chi_N R_N^{\pm}(z)\delta_1 + \chi_N R_N^{\pm}(z)\delta_1\|^2 \\ &\leq 2\left[\|\chi_N R_N^{\pm}(z)\delta_1\|^2 + \|\chi_N R(z)\delta_1 - \chi_N R_N^{\pm}(z)\delta_1\|^2\right] \\ &= 2\left[S^{\pm}(N, z) + \|R(z)(\chi_N(V \mp 2K))R_N^{\pm}(z)\delta_1\|^2\right] \\ &= 2\left[S^{\pm}(N, z) + \|R(z)\|^2 |(V \mp 2K)| \|\chi_N R_N^{\pm}(z)\delta_1\|^2\right] \\ &< 2\left[\varepsilon^{-2} S^{\pm}(N, z) + \varepsilon^{-2}|(V \mp 2K)| S^{\pm}(N, z)\right] \\ &= c_2(K)\varepsilon^{-2} S^{\pm}(N, z), \end{aligned}$$

onde $c_2(K) = 2 + 2|V(n) \mp 2K|$. De modo análogo, mostra-se que $\varepsilon^2 S^{\pm}(N, z) \leq c_1(K) M_d(N, z)$.

■

O próximo passo será relacionar $S^{\pm}(N, z)$ com as soluções da equação de autovalores

$$Hu = zu, \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{3.23}$$

Dado qualquer $z \in \mathbb{C}$, definimos $u_0(n, z)$ e $u_1(n, z)$ como soluções da equação (3.23) que satisfazem as seguintes condições iniciais:

$$\begin{array}{ll} u_0(0, z) = 0 & \qquad u_1(0, z) = 1 \\ u_0(1, z) = 1 & \qquad u_1(1, z) = 0. \end{array}$$

Como $V(n) = V_N^{\pm}(n)$, para todo $n \leq N$, então as soluções de (3.23) para os operadores H e $H_N^{\pm}$ coincidem, para $n \leq N$. Já para $n \geq N+1$, a equação $(H_N^{\pm})(n) = zu(n)$ implica em

$$u(n+1) + u(n-1) = (z \mp 2K)u(n). \tag{3.24}$$

A forma matricial para a equação (3.24) é:

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \mp 2K & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

os autovalores da matriz em (3.25) são:

$$\lambda_{1,2}^{\pm}(z) = \frac{(z \mp 2K) \pm \sqrt{(z \mp 2K)^2 - 4}}{2}, \tag{3.26}$$

e sua solução geral de (3.24) é dada por

$$u(n) = C_1^{\pm} \lambda_1^{\pm}(z)^n + C_2^{\pm} \lambda_2^{\pm}(z)^n, \tag{3.27}$$

onde $C_{1,2}^{\pm}$ são constantes. O fato de que $E \in [-K, K]$ implica que $K \leq E + 2K \leq 3K$ e $-3K \leq E - 2K \leq -K$. Logo, como $z \pm 2K = E \mp 2K + i\varepsilon$, então $|z \mp 2K|^2 = (E \mp 2K)^2 + \varepsilon^2 \geq K^2 + \varepsilon^2 \geq K^2$. À vista disso,

$$|z \mp 2K| \geq K \geq 4. \tag{3.28}$$

Usando (3.28), vemos que $\lambda_{1,2}^{\pm}(z)$ satisfazem

$$|\lambda_1^{\pm}(z)| < 1 < |\lambda_2^{\pm}(z)| \tag{3.29}$$

e que existem constantes uniformes $b(K)$ e $c(K)$ (ver [5]) tais que

$$|\lambda_1^{\pm}(z)| \leq b(K) < 1 \qquad \text{e} \qquad |\lambda_1^{+}(z) - \lambda_1^{-}(z)| \geq c(K) > 0. \tag{3.30}$$

Lema 10 *Seja $z = E + i\varepsilon$, com $E \in [-K, K]$ e $0 < \varepsilon < 1$. Então, para todo $n \geq N \geq 3$, temos:*

$$|\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_n \rangle| \leq 2\varepsilon^{-1} \frac{|\lambda_1^{\pm}(z)|^{n-N}}{|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z) - u_0(N+1,z)|} \tag{3.31}$$

e

$$|\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_n \rangle| \leq \varepsilon^{-1} \frac{|\lambda_1^{\pm}(z)|^{n-N}}{|\lambda_1^{\pm}(z)u_1(N,z) - u_1(N+1,z)|}. \tag{3.32}$$

Demonstração. Primeiramente, para qualquer operador de Schrödinger $H = -\Delta + V$ sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$, definamos os *operadores truncados* $H_{\pm}$ da seguinte forma:

$$H_{\pm} := H|_{\ell^2(\mathbb{Z}^{\pm})} : \ell^2(\mathbb{Z}^{\pm}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^{\pm}),$$

sendo $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -1, 0\}$ e $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$. Naturalmente, $R(z) = (H - z)^{-1}$ e $R_{\pm}(z) = (H_{\pm} - z)^{-1}$. Definimos as *m-funções de Weyl-Titchmarsh* associadas a $H_{\pm}$ como sendo:

$$m_+(z) = \langle R_+(z)\delta_1, \delta_1 \rangle \qquad \text{e} \qquad m_-(z) = \langle R_-(z)\delta_0, \delta_0 \rangle. \tag{3.33}$$

Essas funções satisfazem a seguinte relação (para detalhes, veja [11]):

$$\langle R(z)\delta_1, \delta_n \rangle = \begin{cases} d(z)u_0(n,z) + b(z)u_1(n,z), & n \geq 1 \\ d(z)u_0(n,z) + c(z)u_1(n,z), & n < 1, \end{cases} \tag{3.34}$$

onde

$$d(z) = \frac{-m_+(z)m_-(z)}{m_+(z)+m_-(z)}, \quad b(z) = \frac{m_-(z)}{m_+(z)+m_-(z)} \quad e \quad c(z) = \frac{-m_+(z)}{m_+(z)+m_-(z)}. \tag{3.35}$$

Note que, tomando $n = 1$ e $n = 0$ em (3.34), obtemos respectivamente $d(z) = \langle R(z)\delta_1, \delta_1\rangle$ e $c(z) = \langle R(z)\delta_1, \delta_0\rangle$. Também temos $1 + c(z) = b(z)$. O fato de que $\|R(z)\delta_1\| \leq \|R(z)\|\|\delta_1\| < \varepsilon^{-1}$ juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, implica que

$$|d(z)| = |\langle R(z)\delta_1, \delta_1\rangle| \leq \|R(z)\delta_1\|\|\delta_1\| < \varepsilon^{-1},$$

$$|c(z)| = |\langle R(z)\delta_1, \delta_0\rangle| \leq \|R(z)\delta_1\|\|\delta_0\| < \varepsilon^{-1} \tag{3.36}$$

e

$$|b(z)| = |c(z)+1| \leq |c(z)| + 1 < \varepsilon^{-1} + 1 < 2\varepsilon^{-1}.$$

Considere os operadores $H_N^{\pm}$ definidos por (3.19)-(3.20) e defina $\phi^{\pm} = R_N^{\pm}(z)\delta_1$. Como $(H_N^{\pm} - z)\phi^{\pm} = \delta_1$, então a função $\phi^{\pm}(n) = \langle \phi^{\pm}, \delta_n\rangle$ é solução da equação $H_N^{\pm}u = zu$, para todo $n \geq 2$. Além disso, sendo $V_N^{\pm}(n) = \pm 2K$, $n \geq N+1$, segue que $\phi^{\pm}(n)$ também é solução da equação (3.24), para $n \geq N+1$. Nestas condições, podemos fazer uso de (3.27) e escrever:

$$\phi^{\pm}(N+k+1) = C_1^{\pm}\lambda_1^{\pm}(z)^{k+1} + C_2^{\pm}\lambda_2^{\pm}(z)^{k+1}, \quad k \geq 0. \tag{3.37}$$

Em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \phi^{\pm}(N+k+1) \\ \phi^{\pm}(N+k) \end{pmatrix} = C_1^{\pm}\lambda_1^{\pm}(z)^k e_1^{\pm} + C_2^{\pm}\lambda_2^{\pm}(z)^k e_2^{\pm}, \quad k \geq 0, \tag{3.38}$$

onde $e_{1,2}^{\pm} = [\lambda_{1,2}^{\pm}(z) \;\; 1]^t$ são os autovetores associados aos autovalores $\lambda_{1,2}^{\pm}$ do problema (3.24). Por (3.37), temos que

$$C_2^{\pm}\lambda_2^{\pm}(z)^{k+1} = \phi^{\pm}(N+k+1) - C_1^{\pm}\lambda_1^{\pm}(z)^{k+1}.$$

Logo, sendo $\phi^{\pm}$ um vetor de $\ell^2(\mathbb{Z})$, podemos concluir, usando (3.29), que

$$|C_2^{\pm}||\lambda_2^{\pm}(z)|^{k+1} \leq |\phi^{\pm}(N+k+1)| + |C_1^{\pm}||\lambda_1^{\pm}(z)|^{k+1} \longrightarrow 0,$$

quando $k \longrightarrow \infty$, mas $|\lambda_2^{\pm}(z)|^{k+1} \not\rightarrow 0$. Portanto, $C_2^{\pm} = 0$. Por (3.37),

$$\phi^{\pm}(N+k+1) = C_1^{\pm}\lambda_1^{\pm}(z)^{k+1}, \quad C_1^{\pm} \neq 0, k \geq 0. \tag{3.39}$$

Além disso, por (3.34), segue que

$$\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_{N+1}\rangle = \phi^{\pm}(N+1) = d_N^{\pm}(z)u_0(N+1,z) + b_N^{\pm}u_1(N+1,z) \tag{3.40}$$

e

$$\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_N\rangle = \phi^{\pm}(N) = d_N^{\pm}(z)u_0(N,z) + b_N^{\pm}u_1(N,z). \tag{3.41}$$

Pelo Teorema Espectral (ver [6]),

$$d_N^{\pm}(z) = \langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_1\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu_{\delta_1}^{\pm}(t),$$

onde $\mu_{\delta_1}^{\pm}$ é a medida espectral associada ao par $(H_N^{\pm}, \delta_1)$. Como $\varepsilon = Im(z) \neq 0$, então $d_N^{\pm}(z) \neq 0$. O mesmo argumento se aplica para $c_N^{\pm}(z)$. Sendo $b_N^{\pm}(z) = 1 + c_N^{\pm}(z)$, segue que $b_N^{\pm}(z)$ também é não-nulo.

Usando o fato que o determinante das matrizes de transferência é 1 e o fato que $u_0(1,z)u_1(0,z) - u_0(0,z)u_1(1,z) = 1$, temos válida a seguinte identidade (*constância do Wronskiano*):

$$u_0(n+1,z)u_1(n,z) - u_0(n,z)u_1(n+1,z) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.42}$$

Utilizando as relações (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42), podemos calcular explicitamente $C_1^{\pm} = C_1^{\pm}(z)$, escrevendo:

$$\begin{pmatrix} d_N^{\pm}(z)u_0(N+1,z) + b_N^{\pm}(z)u_1(N+1,z) \\ d_N^{\pm}(z)u_0(N,z) + b_N^{\pm}(z)u_1(N,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{\pm}(N+1) \\ \phi^{\pm}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{\pm}\lambda_1^{\pm}(z) \\ C_1^{\pm} \end{pmatrix},$$

o que implica no sistema

$$\begin{cases} d_N^{\pm}(z)u_0(N+1,z) + b_N^{\pm}(z)u_1(N+1,z) & = & C_1^{\pm}\lambda_1^{\pm}(z) \\ d_N^{\pm}(z)u_0(N,z) + b_N^{\pm}(z)u_1(N,z) & = & C_1^{\pm}. \end{cases}$$

Logo,

$$d_N^{\pm}(z) = -b_N^{\pm}(z)\frac{\lambda_1^{\pm}(z)u_1(N,z) - u_1(N+1,z)}{\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z) - u_0(N+1,z)}. \tag{3.43}$$

Substituindo (3.43) na segunda equação do sistema, obtemos:

$$C_1^{\pm}(z) = \frac{b_N^{\pm}(z)}{\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z) - u_0(N+1,z)}. \tag{3.44}$$

Por outro lado, isolando $b_N^{\pm}(z)$ em (3.43) e substituindo na segunda equação do sistema, obtemos:

$$C_1^{\pm}(z) = \frac{d_N^{\pm}(z)}{\lambda_1^{\pm}(z)u_1(N,z) - u_1(N+1,z)}. \tag{3.45}$$

Portanto, para todo $n \geq N$, usando (3.39) e (3.45),

$$\begin{aligned} |\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_n\rangle| &= |C_1^{\pm}(z)||\lambda_1^{\pm}(z)|^{n-N} \\ &= \frac{|d_N^{\pm}(z)|}{|\lambda_1^{\pm}(z)u_1(N,z) - u_1(N+1,z)|}|\lambda_1^{\pm}(z)|^{n-N} \\ &\leq \varepsilon^{-1}\frac{|\lambda_1^{\pm}(z)|^{n-N}}{|\lambda_1^{\pm}(z)u_1(N,z) - u_1(N+1,z)|} \end{aligned}$$

e, usando (3.44), concluímos de forma análoga que

$$|\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1, \delta_n\rangle| \leq 2\varepsilon^{-1}\frac{|\lambda_0^{\pm}(z)|^{n-N}}{|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z) - u_1(N+1,z)|},$$

o que demonstra o resultado.

■

Lema 11 *Sejam $E \in [-K,K]$, $0 < \varepsilon \leq 1$ e $N \geq 3$. Para $z = E + i\varepsilon$, existe uma constante $c_2(K) > 0$ de modo que vale a seguinte desigualdade:*

$$M_d(N,z) \leq c_2(K)\varepsilon^{-4}\left(\max_{3\leq n\leq N} \|M_n(z))\|^2\right)^{-1}.$$

Demonstração. Usando os Lemas 9 e 10 e a primeira relação em (3.30) temos:

$$\begin{aligned}
M_d(N,z) &\leq c_2(K)\varepsilon^{-2}S^{\pm}(N,z)\\
&= c_2(K)\varepsilon^{-2}\sum_{n>N}|\langle R_N^{\pm}(z)\delta_1,\delta_n\rangle|^2\\
&\leq c_2(K)\varepsilon^{-2}\sum_{n>N}\frac{4\varepsilon^{-2}|\lambda_1^{\pm}(z)|^{2(n-N)}}{|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z)-u_0(N+1,z)|^2}\\
&= 4c_2(K)\varepsilon^{-4}|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z)-u_0(N+1,z)|^{-2}\sum_{n>N}|\lambda_1^{\pm}(z)|^{2(n-N)}\\
&\leq 4c_2(K)\varepsilon^{-4}|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z)-u_0(N+1,z)|^{-2}\sum_{k\geq 0}[b(K)^2]^k\\
&= \frac{4c_2(K)}{1-b(K)^2}\varepsilon^{-4}|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z)-u_0(N+1,z)|^{-2}.
\end{aligned}$$

Desta forma, chamando $B(K)=4c_2(K)/(1-b(K)^2)$, obtemos

$$M_d(N,z)\leq B(K)\varepsilon^{-4}|\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z)-u_0(N+1,z)|^{-2}. \tag{3.46}$$

Denotemos por $U^{\pm}=\lambda_1^{\pm}(z)u_0(N,z)-u_0(N+1,z)$. Então,

$$|U^-|+|U^+|\geq|U^--U^+|=|(\lambda_1^-(z)-\lambda_1^+(z))u_0(N,z)|,$$

o que implica

$$|U^-|+|U^+|\geq|\lambda_1^-(z)-\lambda_1^+(z)||u_0(N,z)|. \tag{3.47}$$

Ademais, por $|\lambda_1^{\pm}(z)|<1$,

$$|U^-|+|U^+|\geq|\lambda_1^+(z)||U^-|+|\lambda_1^-(z)||U^+|\geq|\lambda_1^+(z)U^--\lambda_1^-(z)U^+|,$$

implicando em

$$|U^-|+|U^+|\geq|\lambda_1^-(z)-\lambda_1^+(z)||u_0(N+1,z)|. \tag{3.48}$$

Por (3.30), (3.47) e (3.48), temos:

$$2(|U^+|+|U^-|)\geq c(K)(|u_0(N,z)|+|u_0(N+1,z)|)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 4(|U^+|+|U^-|)^2 &\geq c(K)^2(|u_0(N,z)|+|u_0(N+1,z)|)^2\\
&= c(K)^2(|u_0(N,z)|^2+2|u_0(N,z)||u_0(N+1,z)|+|u_0(N+1,z)|^2)\\
&\geq c(K)^2(|u_0(N,z)|^2+|u_0(N+1,z)|^2).
\end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos de (3.46) o seguinte:

$$2M_d(N,z)^{-1}\geq B(K)^{-1}\varepsilon^4(|U^+|^2+|U^-|^2).$$

Como $4(|U^+|+|U^-|)^2\leq(|U^+|^2+|U^-|^2)$, então

$$M_d(N,z)^{-1}\geq\frac{B(K)^{-1}}{2}\varepsilon^4(|U^+|^2+|U^-|^2)\geq\frac{B(K)^{-1}}{2}\frac{c(K)^2}{8}(|u_0(N,z)|^2+|u_0(N+1,z)|^2).$$

Logo,

$$M_d(N,z)\leq C_2(K)\varepsilon^{-4}(|u_0(N,z)|^2+|u_0(N+1,z)|^2)^{-1}, \tag{3.49}$$

com $C_2(K) = 16B(K)c(K)^{-2}$. Prova-se de forma análoga uma limitação superior semelhante (a menos da constante) para $M_d(N,z)$ trocando-se u_0 por u_1. Como

$$\|M_N(z)\|^2 = |u_0(N+1,z)|^2 + |u_0(N,z)|^2 + |u_1(N+1,z)|^2 + |u_1(N,z)|^2,$$

segue que

$$M_d(N,z) \leq C_2(K)\varepsilon^{-4}\|M_N(z)\|^{-2}. \tag{3.50}$$

O resultado é obtido notando-se que, por $M_d(n,z)$ ser decrescente em n, então $M_d(N,z) \leq M_d(n,z)$, para todo $3 \leq n \leq N$.

■

Observação 6 *Podemos substituir o intervalo* $[3,N]$ *por* $[1,N]$ *no lema* 11. *Isto mudará apenas a constante* $c(K)$ *no resultado.*

Agora temos todas as informações necessárias para a demonstração do teorema 4.

Demonstração. (Teorema 4) Primeiramente, consideremos $C'(K) = \max\{C_1(K), C_2(K)\}$. Por (3.15), temos:

$$P_d(N,T) = \frac{\varepsilon}{\pi}\left[\int_{E:|E|\geq K} M_d(N,z)dE + \int_{-K}^{K} M_d(N,z)dE\right],$$

com $\varepsilon = 1/T$. Portanto, usando (3.18) e o Lema 11,

$$\begin{aligned} P_d(N,T) &\leq \frac{1}{\pi T}C'(K)e^{-cN} + \frac{1}{\pi T}T^4 C'(K)\int_{-K}^{K}\left(\max_{1\leq n\leq N}\|M_n(z)\|^2\right)^{-1} dE \\ &\leq C(K)\left[e^{-cN} + T^3\int_{-K}^{K}\left(\max_{1\leq n\leq N}\|M_n(z)\|^2\right)^{-1} dE\right], \end{aligned}$$

com $C(K) = \frac{C'(K)}{\pi}$ e $z = E + i/T$, como queríamos demonstrar.

■

3.2 Limitação Dinâmica Superior

Nesta seção apresentaremos a demonstração do Teorema 1. Tomaremos $N(T) = T^{\alpha}$, com

$$\alpha = \frac{2D}{\log(\frac{\lambda-8}{3})} \in (0,1),$$

onde $\lambda > 20$ e $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} < \infty$. Desta forma, $P(N(T),T) \longrightarrow 0$ mais rápido que qualquer inverso de potência de T e, como consequência, α será o limite superior não-trivial para α_u^+. Vejamos os detalhes abaixo:

Demonstração. (do Teorema 1) Sabemos que cada uma das q_{k-1} bandas de $\sigma_{k,0}^0$ possui exatamente um zero de x_k. Como $\sigma_{k,0}^0 \subset \mathbb{R}$, então os q_{k-1} zeros de x_k são reais. Além disso, pela Proposição 7, temos que

$$\sigma_{k,0}^{\delta} \subseteq \bigcup_{j=1}^{q_{k-1}} B(x_k^{(j)}, R_k).$$

Seja $z \in \sigma^{\delta}_{k,0}$. Então, existe pelo menos um j tal que $z \in B(x_k^{(j)}, R_k)$ e, daí:

$$|z - x_k^{(j)}| \leq R_k.$$

Como $|Im(z)| \leq |z - x_k^{(j)}|$, segue que

$$\sigma^{\delta}_{k,0} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < R_k\}.$$

Vamos limitar superiormente R_k. Note que R_k é o supremo de um produto contendo k elementos das matrizes P_n. Os maiores elementos presentes nas matrizes P_n existem quando $a_n = 1$. O pior caso possível de acontecer em produtos de elementos das matrizes P_n é quando uma banda tem um índice do tipo I contendo uma banda do tipo II. Neste caso, os coeficientes deveriam ser iguais a 1 (se $a_n = 1$). Mas a estrutura satisfeita no Lema 7 mostra que isso só pode ocorrer em até a metade dos elementos dos produtos. Portanto, $R_k \leq c_1^{k/2}$, onde $c_1 = \frac{3}{\lambda - 8}$.

Agora, queremos limitar R_k por $dq_k^{-\gamma(\lambda)}$, com $\gamma(\lambda) > 0$ adequado e d uma constante positiva. Para encontrar tal $\gamma(\lambda)$, apliquemos o log em $c_1^{k/2} \leq dq_k^{-\gamma(\lambda)}$ para obter:

$$-\frac{\log d}{\log q_k} + \frac{k}{2}\frac{\log c_1}{\log q_k} \leq -\gamma(\lambda).$$

Como $-\frac{\log d}{\log q_k} \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$, segue que

$$-\frac{k}{2}\frac{\log c_1}{\log q_k} \geq \gamma(\lambda),$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. À vista disso,

$$\gamma(\lambda) \leq \limsup_{k \longrightarrow \infty} \frac{-k}{2}\frac{\log c_1}{\log q_k}. \tag{3.51}$$

Logo, tomando $\gamma(\lambda)$ de forma que (3.51) é satisfeito, obtemos $R_k \leq dq_k^{-\gamma(\lambda)}$ e, portanto,

$$\sigma^{\delta}_{k,0} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < R_k\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < dq_k^{-\gamma(\lambda)}\}.$$

Pela Proposição 6, temos que

$$\sigma^{\delta}_{k,1} \subset \sigma^{\delta}_{k+1,0} \cup ((\sigma^{\delta}_{k+1,0})^c \cap \sigma^{\delta}_{k,0})$$

o que implica em

$$\sigma^{\delta}_{k,1} \subset \sigma^{\delta}_{k,0} \quad \text{ou} \quad \sigma^{\delta}_{k,1} \subset \sigma^{\delta}_{k+1,0}.$$

Desta forma

$$\sigma^{\delta}_{k,0} \cup \sigma^{\delta}_{k,1} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < dq_k^{-\gamma(\lambda)}\}. \tag{3.52}$$

Agora, consideremos $z = E + i\varepsilon$, com $E \in [-K, K]$ e $\varepsilon > 0$. Nestas condições, conseguimos limitar uniformemente e inferiormente a sequência $\{|x_k(E + i\varepsilon)|\}_k$ por 2. Então, fixado $\varepsilon = Im(z) > 0$, tomemos $k \in \mathbb{Z}$ de modo que se tenha $dq_k^{-\gamma(\lambda)} < \varepsilon$. Neste caso, temos que $z \notin \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < dq_k^{\gamma(\lambda)}\}$ e, por (3.52),

$$z \notin \sigma^{\delta}_{k,0} \qquad \text{e} \qquad z \notin \sigma^{\delta}_{k,1}.$$

Se $z \notin \sigma^{\delta}_{k,0}$, então $|x_k(z)| > 2 + \delta$. Se $z \notin \sigma^{\delta}_{k,1}$, então $|z_k(z)| > 2 + \delta$. Além disso, $|x_{-1}(z)| = 2 < 2 + \delta$. Logo, pelo Lema 5, $\{x_k(z)\}_k$ é não-limitada e

$$|x_j(z)| \geq e^{\log(1+\delta) G_{j-k}} + 1, \ \forall j > k.$$

Pelo lema 6, existe uma constante $d > 1$ tal que

$$|x_j(z)| \geq e^{\log(1+\delta)q_{j-k}^d} + 1, \ \forall j > k. \tag{3.53}$$

Para $\delta > 0$ e $T > 1$, denote por $k(T)$ o único inteiro que satisfaz

$$\frac{q_{k(T)-1}^{\gamma(\lambda)}}{d_\delta} \leq T \leq \frac{q_{k(T)}^{\gamma(\lambda)}}{d_\delta}, \tag{3.54}$$

onde $d_\delta > 0$ é a constante da Proposição 7 e seja $N(T) = q_{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}$. Para T suficientemente grande e para todo $\nu > 0$, existe uma constante $C_\nu > 0$ de modo que

$$N(T) \leq C_\nu T^{\frac{1}{\gamma(\lambda)}} T^\nu. \tag{3.55}$$

De fato,

$$\frac{\log N(T)}{\log T} = \frac{\log q_{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}}{\log T} = \frac{\log q_{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}}{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}.\frac{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}{\log T}.$$

Por (3.51), com $\gamma(\lambda) \geq -\frac{k(T)-1}{2}\frac{\log c_1}{\log q_{k(T)-1}}$ e por (3.54), temos:

$$\frac{q_{k(T)-1}^{\frac{-k(T)+1}{2}\frac{\log c_1}{\log q_{k(T)-1}}}}{d_\delta} \leq T,$$

o que implica em

$$\frac{-k(T)+1}{2}\frac{\log c_1}{\log q_{k(T)-1}}\log q_{k(T)-1} - \log d_\delta \leq \log T.$$

Sendo T suficientemente grande, $\log d_\delta$ torna-se insignificante na desigualdade acima. Logo,

$$\frac{1}{\log T} \leq \frac{1}{\frac{-k(T)+1}{2}\log c_1}.$$

Usando a desigualdade acima e a hipótese $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} < \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\log N(T)}{\log T} &= \frac{\log q_{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}}{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}.\frac{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}{\log T} \\
&\leq \frac{\log q_{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}}{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}.\frac{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}{\frac{-k(T)+1}{2}\log c_1} \\
&\leq 2D\frac{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}{(-k(T)+1)\log c_1}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Para $k(T)$ suficientemente grande, temos $\frac{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}{k(T)-1} \approx 1$, ou seja, para todo $\nu > 0$ pequeno, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $k(T) > k_0$ tem-se

$$\frac{k(T)+\left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor}{k(T)-1} \leq \nu + 1.$$

Logo, para $k(T)$ suficientemente grande, obtemos de (3.56) que

$$\frac{\log N(T)}{\log T} \leq \frac{2D}{-\log c_1}(\nu+1),$$

o que implica

$$N(T) \leq T^{\frac{2D}{-\log c_1}} T^{\frac{2D}{-\log c_1}\nu}.$$

Como $0 < \frac{1}{\gamma(\lambda)} = \frac{2D}{-\log c_1} < 1$ para T suficientemente grande e $\nu > 0$ arbitrariamente pequeno, existe uma constante $C_\nu > 0$ tal que

$$N(T) \leq C_\nu T^{\frac{1}{\gamma(\lambda)}} T^{\nu}.$$

Agora, vamos limitar $P_d(N(T),T)$, com $N(T) = q_{k(T)+\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}$. Pelo Teorema 4, temos:

$$P_d(N(T),T) \leq C(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3\int_{-K}^{K}\left(\max_{1\leq n\leq N(T)}\|M_n(E+i/T)\|^2\right)^{-1} dE\right].$$

Como

$$\left(\max_{1\leq n\leq N(T)}\|M_n(E+i/T)\|^2\right)^{-1} \leq \left(\max_{1\leq q_n\leq N(T)}\|M_n(E+i/T)\|^2\right)^{-1},$$

então,

$$P_d(N(T),T) \leq C(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3\int_{-K}^{K}\left(\max_{1\leq q_n\leq N(T)}\|M_n(E+i/T)\|^2\right)^{-1} dE\right].$$

Além disso,

$$\left(\max_{1\leq q_n\leq N(T)}\|M_n(E+i/T)\|^2\right)^{-1} \leq \left\|M_{k(T)+\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}(E+i/T)\right\|^{-2},$$

implicando em

$$P_d(N(T),T) \leq C(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3\int_{-K}^{K}\left\|M_{k(T)+\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}(E+i/T)\right\|^{-2} dE\right].$$

Seja uma matriz $A_{2\times 2} = (a_{ij})$. Consideremos a seguinte norma para A: $\|A\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2$. Como $|\operatorname{tr}(A)|^2 = (|a_{11}| + |a_{22}|)^2 \leq 2(|a_{11}|^2 + |a_{22}|^2) \leq 2\|A\|^2$, segue que $\|A\|^{-2} \leq 2|\operatorname{tr}(A)|^{-2}$. Logo,

$$P_d(N(T),T) \leq C(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3\int_{-K}^{K} 2\left|x_{k(T)+\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}(E+i/T)\right|^{-2} dE\right].$$

Por (3.53), $|x_j(E+i/T)|^2 \geq e^{2\log(1+\delta)q^d_{j-k(T)}}, \forall j > k(T)$. Sendo $k(T) + \left\lfloor\sqrt{k(T)}\right\rfloor > k(T)$, então

$$|x_{k(T)+\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}(E+i/T)|^{-2} \leq e^{-2\log(1+\delta)q^d_{\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}}.$$

À vista disso, temos:

$$\begin{aligned} P_d(N(T),T) &\leq 2C(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3\int_{-K}^{K} e^{-2\log(1+\delta)q^d_{\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}} dE\right] \\ &= 2C(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3 e^{-2\log(1+\delta)q^d_{\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}}\int_{-K}^{K} dE\right] \\ &\leq 4KC(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3 e^{-2\log(1+\delta)q^d_{\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}}\right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_d(N(T),T) \leq W(K)\left[e^{-cN(T)} + T^3 e^{\frac{-2\log(1+\delta)q_1^d}{\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}}\right], \tag{3.57}$$

sendo $W(K) = 4KC(K)$ e $C(K) > 0$ a constante do Teorema 4. Como consequência do Teorema 4, encontramos um limite superior análogo para $P_e(N(T),T)$. Desta forma, podemos concluir que

$$P(N(T),T) \lesssim e^{-cN(T)} + T^3 e^{\frac{-2\log(1+\delta)q_1^d}{\lfloor\sqrt{k(T)}\rfloor}}.$$

Sendo o decaimento exponencial menor do que qualquer decaimento polinomial, podemos dizer que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um T suficientemente grande de tal forma que

$$P(N(T),T) \leq T^{-m},$$

e isso mostra que $P(N(T),T) \longrightarrow 0$ mais rápido que qualquer inverso de potência de T. Como $N(T) \lesssim T^{\frac{1}{\gamma(\lambda)}+\nu}$, para todo $\nu > 0$, segue que

$$P(T^{\frac{1}{\gamma(\lambda)}+\nu},T) \leq P(N(T),T) \leq T^{-m}, \forall m \geq 1.$$

Desta forma, para $\alpha = \frac{1}{\gamma(\lambda)} + \nu$, a desigualdade $P(T^\alpha,T) \leq T^{-m}$ implica que

$$S^+(\alpha) = -\limsup_{T\longrightarrow\infty} \frac{\log P(T^\alpha,T)}{\log T} \geq m, \forall m \geq 1,$$

ou seja, $S^+(\alpha) = +\infty$. Logo,

$$\alpha_u^+ < \alpha = \frac{1}{\gamma(\lambda)} + \nu, \quad \forall \nu > 0.$$

Portanto,

$$\alpha_u^+ \leq \frac{1}{\gamma(\lambda)} = \frac{2D}{\log\left(\dfrac{\lambda-8}{3}\right)}$$

como queríamos demonstrar.

Para a segunda parte do teorema, note que a constante 2 vem da escolha de $\gamma(\lambda)$ considerando o pior caso no produto de elementos das matrizes P_n. Mas assumindo que a sequência de frações continuadas não possui nenhum elemento igual a 1, obtém-se

$$R_k \leq c_1^k$$

e

$$\gamma(\lambda) \leq \limsup_{k\longrightarrow\infty} -\frac{k\log c_1}{\log q_k},$$

donde

$$\alpha_u^+ \leq \frac{1}{\gamma(\lambda)} = \frac{D}{\log\left(\dfrac{\lambda-8}{3}\right)}.$$

■

3.3 Ocorrência de Transporte Balístico

A limitação $\alpha_u^+ \leq \alpha < 1$ obtida no Teorema 1 existe sempre que $D < +\infty$. Entretanto, ainda é um problema em aberto dizer que $\alpha_u^+ = 1$ sempre que $D = +\infty$ [16]. Nesta seção apresentaremos a construção de um caso particular desta situação feita em [16], ou seja, exibiremos um irracional ω com $D = +\infty$ de modo que $\alpha_u^+ = 1$.

Para isto, é necessário mostrar que os primeiros valores dos potenciais Sturmianos dos operadores $H_{\beta,\lambda}$ e $H_k = H_{\beta_k}$, com β irracional e $\beta_k = p_k/q_k$ as aproximações racionais de β, possuem os mesmos q_{k+1} primeiros valores.

Seja $\beta_k = [a_1, \ldots, a_k]$ e β qualquer número irracional satisfazendo $\beta = [a_1, \ldots, a_k, \ldots]$.

Lema 12 *Seja β um número irracional em* $(0, 1)$. *Os potenciais Sturmianos* (1.2) *dos operadores $H_{\beta,\lambda}$ e H_k possuem os mesmos q_{k+1} primeiros valores.*

Demonstração. Sejam as palavras Sturmianas definidas em (2.12):

$$W_0 = 0, \qquad W_1 = 0^{a_1-1}\lambda, \qquad W_{k+1} = W_k^{a_{k+1}} W_{k-1}, \forall k \geq 1.$$

Como foi discutido na Seção 2.2, estas palavras coincidem com o potencial Sturmiano de $H_{\beta,\lambda}$ e cada palavra W_k tem comprimento q_k. Como $H_{\beta,\lambda}$ e H_k tem os mesmos k primeiros termos, então as palavras $W_0, \ldots, W_k$ são as mesmas para estes dois operadores.

Para H_{β_k}, a palavra limite $W_\infty = \lim_k W_k$ é periódica com período q_k e repete W_k infinitas vezes. Como $W_k = W_{k-1}^{a_k} W_{k-2}$, então

$$\begin{aligned} W_\infty &= W_k^{a_{k+1}} W_{k-1}^{a_k} W_{k-2} (W_k)^\infty \\ &= (W_k^{a_{k+1}} W_{k-1})(W_{k-1}^{a_k-1} W_{k-2})(W_k)^\infty \\ &= W_{k+1} W_{k-1}^{a_k-1} W_{k-2} (W_k)^\infty, \end{aligned}$$

onde $(W_k)^\infty$ é a repetição da palavra W_k infinitas vezes. Isto mostra que o potencial do operador H_k começa com a palavra $W_k^{a_{k+1}} W_{k-1}$, que é a palavra W_{k+1} para $H_{\beta,\lambda}$. Como o comprimento de W_{k+1} é q_{k+1}, segue o resultado.

■

Para detalhes das próximas definições, veja [5, 14]. Para qualquer $p > 0$, consideremos os *momentos de ordem p do operador posição X* agindo em $\psi = (\psi(n)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$|X|^p \psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^p \langle \delta_n, \psi(n) \rangle \delta_n,$$

Nestes termos, dado um operador de Schrödinger $H = -\Delta + V$ com potencial V qualquer, denotamos:

$$\begin{aligned} \langle |X|_H^2 \rangle_T &= \left\langle \langle e^{-itH}\delta_0, |X|^2 e^{-itH}\delta_0 \rangle \right\rangle_T \\ &= \sum_n |n|^p a(n, T). \end{aligned}$$

Para $p > 0$, definimos o Pelo Teorema 4.1 de [9], tem-se que

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \beta_{\delta_1}^\pm(p) = \alpha_u^\pm$$

e, em particular, como $\beta_{\delta_1}^\pm(p)$ é não-decrescente, tem-se

$$\beta_{\delta_1}^\pm(p) \leq \alpha_u^\pm, \forall p > 0. \tag{3.58}$$

Note que $0 \leq \beta^-_{\delta_1}(p) \leq 1$, para todo $p > 0$ (ver [5] para detalhes).

Veremos agora que dois operadores de Schrödinger com potenciais limitados quaisquer têm dinâmicas próximas (em alguma escala de tempo) se seus potenciais estão suficientemente próximos.

Lema 13 *Sejam $H_1, H_2 : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ dois operadores de Schrödinger com potenciais V_1 e V_2, respectivamente, tais que $|V_1(k)|, |V_2(k)| < C$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para alguma constante C. Sejam $T > 0$ e $\varepsilon > 0$ fixos de modo que existem números $L = L(T, \varepsilon)$ e $\delta > 0$ tais que $|V_1(k) - V_2(k)| < \delta$, para todo $|k| < L$. Nestas condições, tem-se*

$$|\langle |X|^2_{H_1} \rangle_T - \langle |X|^2_{H_2} \rangle_T| < \varepsilon.$$

Demonstração. Mostremos que

$$A = |\langle e^{-itH_1}\delta_0, |X|^2 e^{-itH_1}\delta_0\rangle - \langle e^{-itH_2}\delta_0, |X|^2 e^{-itH_2}\delta_0\rangle| < \varepsilon, \tag{3.59}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. De fato,

$$\begin{aligned}
A &= \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{(e^{-itH_1}\delta_0)_n}(|X|^2 e^{-itH_1}\delta_0)_n - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{(e^{-itH_2}\delta_0)_n}(|X|^2 e^{-itH_2}\delta_0)_n \right| \\
&= \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left||X|^2 e^{-itH_1}\delta_0\right|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left||X|^2 e^{-itH_2}\delta_0\right|^2 \right| \\
&= \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left|\langle \delta_n, e^{-itH_1}\delta_0\rangle\delta_n\right|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left|\langle \delta_n, e^{-itH_2}\delta_0\rangle\delta_n\right|^2 \right| \\
&= \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left(\left|\langle \delta_n, e^{-itH_1}\delta_0\rangle\delta_n\right|^2 - \left|\langle \delta_n, e^{-itH_2}\delta_0\rangle\delta_n\right|^2 \right) \right| \\
&\leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left|\langle \delta_n, (e^{-itH_1} - e^{-itH_2})\delta_0\rangle\right| \\
&= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left| \left\langle \delta_n, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^k}{k!}(H_1^k - H_2^k)\delta_0 \right\rangle \right| \\
&\leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left|\langle \delta_n, (H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle\right| \\
&\leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \sum_{k\geq|n|}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \left|\langle \delta_n, (H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle\right|,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde em (3.60) foi usado o fato que os operadores H_1 e H_2 são tridiagonais, isto é, $\langle \delta_n, H_j^k \delta_0\rangle = 0$, para $k < |n|$ e $j = 1, 2$. Além disso, para $k \geq L$, $\langle \delta_n, H_j^k \delta_0\rangle$ depende de $V_j(m)$ apenas para $|m| < L$, então:

$$|\langle \delta_n, (H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle| \leq \|H_1^k - H_2^k\| \leq k\left(\sup_{j=1,2} \|H_j\|\right)^{k-1} \delta \leq k(2+C)^{k-1}\delta, \quad k \leq L \tag{3.61}$$

e

$$|\langle \delta_n, (H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle| \leq \|H_1^k - H_2^k\| \leq 2\left(\sup_{j=1,2} \|H_j\|\right)^{k} \leq 2(2+C)^k, \quad k > L. \tag{3.62}$$

Separando a somatória em (3.60) para $|n| \leq L$ e $|n| > L$ e aplicando (3.61) e (3.62), temos:

$$\begin{aligned}
A &\leq 2\sum_{|n|\leq L} n^2 \sum_{k\geq|n|}^{\infty} \frac{T^k}{k!}\left|\langle\delta_n,(H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle\right| + 2\sum_{|n|>L} n^2 \sum_{k\geq|n|}^{\infty} \frac{T^k}{k!}\left|\langle\delta_n,(H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle\right| \\
&\leq 2(2L+1)L^2\left(\sum_{k=0}^{L}\frac{T^k}{k!}|\langle\delta_n,(H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle| + \sum_{k>L}\frac{T^k}{k!}\left|\langle\delta_n,(H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle\right|\right) \\
&+ 2\sum_{|n|>L} n^2 \sum_{k\geq|n|}\frac{T^k}{k!}|\langle\delta_n,(H_1^k - H_2^k)\delta_0\rangle| \\
&\leq 2(2L+1)L^2\left(\sum_{k=0}^{L}\frac{T^k}{k!}k(2+C)^{k-1}\delta + \sum_{k>L}\frac{T^k}{k!}2(2+C)^k\right) \\
&+ 2\sum_{|n|>L} n^2 \sum_{k\geq|n|}\frac{T^k}{k!}2(2+C)^k \\
&\leq 2(2L+1)L^2\left(\delta T\sum_{k\geq 1}\frac{(T(2+C))^{k-1}}{(k-1)!} + 2\sum_{k>L}\frac{(T(2+C))^k}{k!}\right) \\
&+ 4\sum_{|n|>L} n^2 \sum_{k\geq L}\frac{(T(2+C))^k}{k!} \\
&= 2(2L+1)L^2\left(\delta T e^{T(2+C)} + 2\sum_{K>L}\frac{(T(2+C))^k}{k!}\right) + 4\sum_{|n|>L} n^2 \sum_{k\geq|n|}\frac{(T(2+C))^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Como o crescimento fatorial é superior ao crescimento polinomial, temos que

$$4(2L+1)L^2\sum_{k>L}\frac{(T(2+C))^k}{k!} + 4\sum_{|n|>L} n^2 \sum_{k\geq|n|}\frac{(T(2+C))^k}{k!} \longrightarrow 0,$$

quando $L \longrightarrow \infty$. Tomemos então $L > 0$ suficientemente grande de tal forma que a expressão acima seja menor que $\varepsilon/2$. Daí, escolhendo $\delta > 0$ de modo que

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4(2L+1)L^2 T e^{T(2+C)}},$$

concluímos que

$$A = |\langle e^{-itH_1}\delta_0, |X|^2 e^{-itH_1}\delta_0\rangle - \langle e^{-itH_2}\delta_0, |X|^2 e^{-itH_2}\delta_0\rangle| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Os Lemas 12 e 13 permitem uma construção recursiva de um número irracional ω que satisfaz $D = +\infty$ e que implica $\alpha_u^+ = 1$. Isto é descrito no seguinte resultado:

Teorema 6 *Existe um número irracional ω com $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} = \infty$ tal que, para todo $\lambda > 20$, tem-se $\alpha_u^+ = 1$.*

Demonstração. Dado $\beta = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, o Lema 12 nos diz que os potenciais Sturmianos de $H_{\beta,\lambda}$ e $H_{\beta_n,\lambda}$ têm os mesmos q_{n+1} primeiros valores, isto é,

$$V_{\beta,\lambda}(k) = V_{\beta_n,\lambda}(k), \forall 1 \leq k \leq q_{n+1}. \tag{3.63}$$

Além disso, como $H_{\beta_n,\lambda}$ é um operador periódico, segue do Teorema 6.1 de [14] que existe uma constante $C_n > 0$ de modo que

$$\langle |X|^2_{H_{\beta_n,\lambda}} \rangle_T > C_n T^2.$$

Tomemos $T_n > 0$ de forma que

$$C_n > \frac{1}{\log T_n}$$

e, daí,

$$\langle |X|^2_{H_{\beta_n,\lambda}} \rangle_T > \frac{T_n^2}{\log T_n}. \tag{3.64}$$

Suponhamos que $\omega = [a_1, \ldots, a_n]$ satisfaz as condições acima. Tomemos $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ de forma que, dado $T_n > 0$, se tenha $L(T_n, 1) \leq q_{n+1}$ ($L(T_n, 1)$ como no Lema 13). Por (3.63) temos $V_{\omega,\lambda}(k) = V_{\omega_n}(k)$, para todo $1 \leq k \leq q_{n+1}$, então podemos aplicar o Lema 13 para obter

$$\left| \langle |X|^2_{H_{\omega,\lambda}} \rangle_{T_n} - \langle |X|^2_{H_{\omega_n,\lambda}} \rangle_{T_n} \right| < 1.$$

Isto juntamente com (3.64) implica

$$\langle |X|^2_{H_{\omega,\lambda}} \rangle_{T_n} \geq \frac{T_n^2}{\log T_n} - 1.$$

Desta forma, construímos uma sequência $T_n \longrightarrow \infty$, quando $n \longrightarrow \infty$ e um número irracional $\omega = [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, com $D = \limsup_k \frac{\log q_k}{k} = \infty$, de forma que

$$\langle |X|^2_{H_{\omega,\lambda}} \rangle_{T_n} \geq \frac{T_n^2}{\log T_n} - 1 > T_n^{2-\varepsilon} - 1, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

pois $\log T_n < T_n^{\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$ e T_n suficientemente grande. Note que, para T_n suficientemente grande, podemos dizer que

$$T_n^{2-\varepsilon} - 1 > \frac{1}{2} T_n^{2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Logo,

$$\langle |X|^2_{H_{\omega,\lambda}} \rangle_{T_n} \geq \frac{1}{2} T_n^{2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Aplicando a definição de $\beta^-_{\delta_1}(2)$, temos:

$$\begin{aligned}
\beta^-_{\delta_1}(2) &= \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\log \langle |X|^2_{H_{\omega,\lambda}} \rangle_{T_n}}{2 \log T_n} \\
&\geq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{1}{2} T_n^{2-\varepsilon} \right)}{2 \log T_n} \\
&= \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{1}{2} \right)}{2 \log T_n} + \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{\log \left(T_n^{2-\varepsilon} \right)}{2 \log T_n} \\
&= \liminf_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{(2-\varepsilon)}{2} \frac{\log T_n}{\log T_n} \right) \\
&= 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\beta^-_{\delta_1}(2) \geq 1$. Como $0 \leq \beta^-_{\delta_1}(2) \leq 1$, segue que $\beta^-_{\delta_1}(2) = 1$. Portanto, por (3.58), $\alpha_u^+ \geq \beta^-_{\delta_1}(2) = 1$ e, assim, $\alpha_u^+ = 1$.

■

Capítulo 4

Limite Dinâmico Inferior

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do Teorema 2, enunciado na Introdução, o qual estabelece um limite inferior para os expoentes críticos α_u^-, definidos por (2.6). Isto será feito relacionando tais expoentes com a *dimensão box counting* (dimensão fractal) do espectro do operador de Schrödinger Sturmiano (1.1)-(1.2).

4.1 Dimensão Box Counting

Esta seção está baseada na referência [16]. Seja $H_{\beta,\lambda}$ o operador de Schrödinger definido por (1.1) com potencial Sturmiano $V_{\beta,\lambda}$, associado a um irracional $\beta \in (0,1)$.

Definição 3 *Seja $N(\varepsilon)$ o número mínimo de bolas, com diâmetro menor ou igual a ε, necessário para cobrir o espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$. Definimos a dimensão box counting superior do espectro de $H_{\beta,\lambda}$ por*

$$\dim_B^+(\sigma(H_{\beta,\lambda})) = \limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \ . \tag{4.1}$$

Pela Seção 2.5, sabemos que o espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ é coberto por bandas dos espectros das aproximações periódicas $H_{\beta_k,\lambda} = H_k$ de $H_{\beta,\lambda}$. Além disso, a Proposição 6 e o Lema 7 nos dão informações precisas sobre o número e comprimento de tais bandas. Isto permite que encontremos um limite inferior para a dimensão fractal $\dim_B^+(\sigma(H_{\beta,\lambda}))$ a partir do recobrimento do espectro de $H_{\beta,\lambda}$. A primeira possibilidade a se considerar na contagem das bandas que cobrirão o espectro, é tomar como escala o menor comprimento de banda. Entretanto, isto não seria efetivo, já que este comprimento mínimo decresce tão rápido quanto a quantidade de bandas cresce. A segunda possibilidade é considerar na contagem de bandas, aquelas que possuam um comprimento máximo em termos de potência inversa de λ. Esta técnica foi realizada inicialmente em [3] para o número de Fibonacci $\beta = [0, 1, 1, \ldots]$ e generalizada em [16] para qualquer irracional $\beta = [0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ em $(0, 1)$ que satisfaça

$$C = \limsup_{k \longrightarrow \infty} C_k < \infty,$$

onde $C_k = \frac{3}{k} \sum_{j=1}^{k} \log(a_j + 2)$. Apresentaremos aqui estes detalhes desta técnica. Mais precisamente, contaremos o número de bandas no nível k que possuem comprimento maior ou igual a $c_k \lambda^{-k}$, onde c_k é uma constante dependente de β, mas não de λ (ver (4.2)). Isto será feito através do seguinte lema:

Lema 14 *Denotemos por* $n_{k,I}, n_{k,II}$ *e* $n_{k,III}$ *o número de bandas dos tipos* I, II *e* III *de* $\sigma_{k,1}$*,* $\sigma_{k+1,0}$ *e* $\sigma_{k+1,0}$*, respectivamente, com comprimento maior ou igual a*

$$\varepsilon_k = 4\prod_{j=1}^{k}(\lambda+5)^{-1}(a_j+2)^{-3}. \tag{4.2}$$

Então, para todo k*, temos as seguintes relações:*

i) $n_{k+1,I} = (a_{k+1}+1)n_{k,II} + a_{k+1}n_{k,III}$,

ii) $n_{k+1,II} = 1_{\{a_{k+1}\le 2\}}n_{k,I}$, *onde* $1_{\{a_{k+1}\le 2\}} = 1$ *se* $a_{k+1} \le 2$ *e* $1_{\{a_{k+1}\le 2\}} = 0$ *caso contrário,*

iii) $n_{k+1,III} = a_{k+1}n_{k,II} + (a_{k+1}-1)n_{k,III}$,

com condições iniciais $n_{0,I} = 1$*,* $n_{0,II} = 0$ *e* $n_{0,III} = 1$*. Além disso, as três sequências acima satisfazem as propriedades:*

iv) ou $n_{k,II} \neq 0$ *ou* $n_{k,III} \neq 0$*;*

v) $n_{k,I} \neq 0$*;*

vi) $n_{k,I} > n_{k,III}$*;*

vii) $n_{k,II} + n_{k,III} > 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$.

Demonstração. *(i)* Pelo item (ii) do Lema 7, cada banda tipo *II* no nível k contém $(a_{k+1}+1)$ bandas do tipo I no nível $k+1$ e, pelo item (iii) do mesmo lema, cada banda tipo *III* no nível k contém a_{k+1} bandas tipo I no nível $k+1$. Portanto, o número de bandas tipo I no nível $k+1$ é $n_{k+1,I} = (a_{k+1}+1)n_{k,II} + a_{k+1}n_{k,III}$.

O item *(ii)* segue diretamente do item (i) do Lema 7. O item *(iii)* é análogo ao item *(i)*, como consequência do Lema 7.

Provemos os itens *(iv)* e *(v)* por indução. Para $k = 0$, as condições iniciais garantem o resultado. Suponhamos que, ou $n_{k,II} \neq 0$, ou $n_{k,III} \neq 0$. Como $a_{k+1} > 1$, então $a_{k+1} - 1 > 0$ e por *(iii)*, temos

$$n_{k+1,III} = a_{k+1}n_{k,II} + (a_{k+1}-1)n_{k,III} \neq 0.$$

Portanto, *(iv)* é válido para todo $k \in \mathbb{N}$. Para *(v)*, com $k = 0$, as condições iniciais garante que $n_{0,I} = 1 \neq 0$. Suponhamos que $n_{k,I} \neq 0$, para algum k. Por *(i)*,

$$n_{k+1,I} = (a_{k+1}+1)n_{k,II} + a_{k+1}n_{k,III}.$$

Se $a_{k+1} \le 2$, então por *(ii)*, $n_{k,II} = n_{k,I} \neq 0$. Caso contrário, $n_{k,III} \neq 0$. Em ambos os casos, $n_{k+1,I} \neq 0$. Portanto, $n_{k,I} \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Provemos *(vi)*. Para isso, por *(i)* e *(iii)*, temos

$$\begin{aligned} n_{k+1,I} - n_{k+1,III} &= (a_{k+1}+1)n_{k,II} + a_{k+1}n_{k,III} - a_{k+1}n_{k,II} - (a_{k+1}-1)n_{k,III} \\ &= n_{k,II} + n_{k,III}, \end{aligned}$$

o que implica em

$$n_{k+1,I} = n_{k+1,III} + n_{k,II} + n_{k,III} > n_{k+1,III},$$

como queríamos provar.

Por fim, provemos *(vii)*. Se mostrarmos que

$$n_{k,II} + n_{k,III} > 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}), \tag{4.3}$$

para todo k, teremos o resultado. De fato,

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &\geq (n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \geq 2^2(n_{k-4,II} + n_{k-4,III}) \\ &\geq 2^3(n_{k-6,II} + n_{k-6,III}) \geq \ldots \geq 2^{k/2}(n_{0,II} + n_{0,III}) \\ &= 2^{k/2}(0+1) > 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Para provarmos (4.3), note que, por *(i)*, *(ii)* e *(iii)*, temos

$$n_{k,II} = [(a_{k-1}+1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III}]1_{\{a_k \leq 2\}} \tag{4.4}$$

e

$$n_{k,III} = a_k n_{k-2,I} 1_{\{a_{k-1} \leq 2\}} + (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}). \tag{4.5}$$

Temos então quatro casos para analisar, usando (4.4) e (4.5).

Se $a_k > 2$ e $a_{k-1} > 2$, então $1_{\{a_{k-1} \leq 2\}} = 0$ e, daí,

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) \\ &\geq (a_k - 1)((a_{k-1}-1)n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) \\ &= (a_k - 1)(a_{k-1}-1)(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq 4(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &> 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

Se $a_k \leq 2$ e $a_{k-1} > 2$, então $1_{\{a_{k-1} \leq 2\}} = 0$ e $1_{\{a_k \leq 2\}} = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_{k-1}+1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III} \\ &+ (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) \\ &= ((a_{k-1}+1) + (a_k - 1)a_{k-1})n_{k-2,II} \\ &+ (a_{k-1} + (a_k - 1)(a_{k-1}-1))n_{k-2,III} \\ &= (a_k a_{k-1} + 1)(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq a_k a_{k-1}(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq 3(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &> 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

Se $a_k > 2$ e $a_{k-1} \leq 2$, então usando *(vi)*,

$$\begin{aligned} n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,I} \\ &> (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,III} \\ &= ((a_k - 1)a_{k-1})n_{k-2,II} + ((a_k - 1)a_{k-1} + 1)n_{k-2,III} \\ &\geq (a_{k-1}(a_k - 1))(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\ &\geq 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}). \end{aligned}$$

Por fim, se $a_k \leq 2$ e $a_{k-1} \leq 2$, então:

$$\begin{aligned}
n_{k,II} + n_{k,III} &= (a_{k-1}+1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III} \\
&+ (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,I} \\
&> (a_{k-1}+1)n_{k-2,II} + a_{k-1}n_{k-2,III} \\
&+ (a_k - 1)(a_{k-1}n_{k-2,II} + (a_{k-1}-1)n_{k-2,III}) + a_k n_{k-2,III} \\
&= (a_{k-1}(a_k - 1) + (a_{k-1}+1))n_{k-2,II} \\
&+ (a_{k-1} + (a_k - 1)(a_{k-1}-1) + a_k)n_{k-2,III} \\
&= (a_{k-1}a_k + 1)(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}) \\
&\geq 2(n_{k-2,II} + n_{k-2,III}).
\end{aligned}$$

Em todos os casos, temos provado (4.3) e, portanto, o lema está demonstrado.

■

O Lema 14 permite encontrar um limite inferior para $\dim_B^+(\sigma(H_{\beta,\lambda}))$, dado pelo

Teorema 7 *Seja* $C_k = \frac{3}{k}\sum_{j=1}^{k}\log(a_j+2)$. *Para qualquer irracional* β *tal que* $C = \limsup_k C_k < \infty$ *e qualquer* $\lambda > 20$, *tem-se*

$$\dim_\beta^+(\sigma(H_{\beta,\lambda})) \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log 2}{C + \log(\lambda+5)} \;.$$

Demonstração.

O Lema 14 nos dá uma limitação inferior para o número de bandas $n_{k,II} + n_{k,III}$ no nível k, de comprimento maior (ou pelo menos igual) à ε_k. De fato, para cada k, o número destas bandas necessário para cobrir $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ no nível k é $n_{k,II} + n_{k,III}$. Assim, pelo item (vii) do Lema 14 tem-se que

$$n_{k,II} + n_{k,III} > 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}. \tag{4.6}$$

Consideremos a metade deste número de bandas, de forma que cada banda contada se alterne com uma que não é. Isto garante que as bandas sejam disjuntas e cobrem $\sigma(H_{\beta,\lambda})$.

Por definição de $\dim_{\beta}^{+}(\sigma(H_{\beta,\lambda}))$, (4.6) e definição de $\varepsilon_k(Lema14)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\dim_{\beta}^{+}(\sigma(H_{\beta,\lambda})) &= \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \\
&\geq \limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log N(\varepsilon_k)}{\log(1/\varepsilon_k)} \\
&\geq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log(1/2(n_{k,II}+n_{k,III}))}{\log(1/\varepsilon_k)} \\
&\geq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log 2^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}2^{-1}}{\log(1/\varepsilon_k)} \\
&= \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{(\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1)\log 2}{\log(\frac{1}{4}\prod_{j=1}^{k}(\lambda+5)(a_j+2)^3)} \\
&\geq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor\log 2}{\log(\frac{1}{4})+k\log(\lambda+5)+3\sum_{j=1}^{k}\log(a_j+2)} \\
&\geq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{k}{2}\,\frac{\log 2}{k\log(\lambda+5)+3\sum_{j=1}^{k}\log(a_j+2)} \\
&= \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\log 2}{\log(\lambda+5)+\frac{3}{k}\sum_{j=1}^{k}\log(a_j+2)} \\
&= \liminf_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}\,\frac{\log 2}{\log(\lambda+5)+C_k} \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log(\lambda+5)+C}\ ,
\end{aligned}
$$

onde $C = \limsup_{k\longrightarrow\infty} C_k < \infty$.

■

4.2 Limitação Dinâmica Inferior

Nesta seção introduziremos o conceito de densidade limitada de um número irracional. Esta definição permite que estudemos um resultado que relaciona a *dimensão box counting* do espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ com os expoentes críticos α_u^- (veja Teorema 9). Deste resultado, juntamente com o Teorema 7 obteremos o Teorema 2. Considere a expansão em frações continuadas de um irracional $\beta \in (0,1)$, denotada por $\beta = [0, a_1, a_2, \ldots]$ (veja 2.9).

Definição 4 *Seja $\beta \in (0,1)$ um número irracional. Dizemos que β é um número de densidade limitada se, e somente se,*

$$d(\beta) := \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i < +\infty. \tag{4.7}$$

Foi mostrado em [10] que a norma das matrizes de transferência possui limitação polinomial sobre o espectro sempre que o irracional β, associado ao operador de Schrödinger Sturmiano $H_{\beta,\lambda}$, é de densidade limitada. Mais precisamente,

Teorema 8 *Se um número irracional $\beta \in (0,1)$ satisfaz*

$$d(\beta) < +\infty,$$

então

$$\|M_n(E)\| \leq Cn^{\gamma}, \quad \forall E \in \sigma(H_{\beta,\lambda}), \tag{4.8}$$

onde C e γ são constantes positivas.

Para detalhes e demonstração do Teorema acima, consultar [10].

Com isso, podemos enunciar o resultado obtido em [3, 20] que relaciona a dimensão box counting do espectro $\sigma(H_{\beta,\lambda})$ com os expoentes α_u^-.

Teorema 9 *Sejam $\lambda > 0$ e $\beta \in (0,1)$ irracional. Se a norma das matrizes de transferência possui limitação polinomial, como em (4.8), então*

$$\alpha_u^- \geq \dim_B^+(\sigma(H_{\beta,\lambda})).$$

Temos então todos os resultados necessários para demonstrarmos o Teorema 2:

Demonstração. (do Teorema 2)

Como $d(\beta) < +\infty$, então pelo Teorema 8, temos que a norma das matrizes de transferência tem limitação polinomial. Desta forma, o Teorema 9 implica que

$$\alpha_u^- \geq \dim_B^+(\sigma(H_{\beta,\lambda})).$$

Portanto, pelo Teorema 7, segue que

$$\alpha_u^- \geq \dim_B^+(\sigma(H_{\beta,\lambda})) \geq \frac{1}{2}\,\frac{\log 2}{C + \log(\lambda+5)},$$

como queríamos demonstrar.

■

Capítulo 5

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos técnicas que permitem encontrar limites dinâmicos superiores e inferiores para os operadores de Schrödinger com Potenciais Sturmianos que governa a dinâmica de uma função de onda $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Foi possível encontrar o limite dinâmico superior para os expoentes α_u^+ num conjunto de medida de Lebesgue total, enquanto que o limite dinâmico inferior é encontrado apenas para os parâmetros β irracionais de densidade limitada, um conjunto de medida de Lebesgue nula. Um ponto à se pensar é para quais parâmetros β vale a ambos os Teoremas 1 e 2.

Um possível estudo futuro, continuando na linha dinâmica de operadores Sturmianos é estudar a mesma técnica de limitar superiormente e inferiormente os operadores de Dirac, definidos em [18]. Além disso, um outro ponto para se pensar é generalizar as técnicas descritas nessa dissertação para modelos de operadores de Scrhödinger com Potenciais Sturmianos para quase-cristais multidimensionais.

Referências

[1] Bellissard, J., Iochum, B., Scoppola, E., and Testard, D. Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals. *Commun. Math. Phys. 125* (1989), 527–543.

[2] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable II.* Springer-Verlag New York Inc., 1995.

[3] Damanik, D., Embree, M., Gorodetski, A., and Tcheremchantsev, S. The Fractal Dimension of the Spectrum of the Fibonacci Hamiltonian. *Commun. Math. Phys. 280* (2008), 499–516.

[4] Damanik, D., Killip, R., and Lenz, D. Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, III. α-countinuity. *Commun. Math. Phys. 212* (2000), 191–204.

[5] Damanik, D., and Tcheremchantsev, S. Upper Bounds in Quantum Dynamics. *J. Amer. Math. Soc. 20* (2005), 799–827.

[6] De Oliveira, C. R. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics.* Progress in Mathematical Physics, 2008.

[7] Elon, L. L. *Curso de Análise, vol. 1.* IMPA, 1980. 6ed.

[8] Folland, G. B. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications, 2nd ed.* John Wiley and Sons, 1999.

[9] Germinet, F., Kiselev, A., and Tcheremchantsev, S. Transfer Matrices and Transport For Schrödinger Operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54* (2004), 787–830.

[10] Iochum, B., Raymond, L., and Testard, D. Resistance of One-Dimensional Quasicristals. *Physica A 187* (1992), 353–368.

[11] Killip, R., Kiselev, A., and Last, Y. Dynamical Upper Bounds on Wavepacket Spreading. *American Journal of Mathematics 125* (2003), 1165–1198.

[12] Kirsch, W. An Invitation to Random Schrödinger Operators. With an Appendix by Frèdèric Klopp. *Panor. Shynthèses 25* (2008), 1–119.

[13] Lang, S. *Introduction to Diophantine Approximations.* New York: Addison-Wesley, 1966.

[14] Last, Y. Quantum Dynamics and Decompositions of Singular Continuous Spectra. *J. of Functional Analysis 142* (1996), 406–445.

[15] Liu, q., and Wen, Z. Hausdorff Dimension of Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operator with Sturmian Potentials. *Potential Anal 20* (2004), 33–59.

[16] MARIN, L. Dynamical Bounds for Sturmian Schrödinger Operators. *Reviews in Math. Phys. 22* (2010), 859–879.

[17] RAYMOND, L. A Constructive Gap Labelling for the Discrete Schrödinger Operator on a Quasiperiodic Chain, preprint.

[18] ROBERTO, A. P. Dinâmica e Espectro de Hamiltonianos Quânticos Discretos Unidimensionais. UFSCar, 2005.

[19] SUTO, A. The Spectrum of a Quasiperiodic Schrödinger Operator. *Commun. Math. Phys. 111* (1987), 409–415.

[20] TCHEREMCHANTSEV, S. Mixed Lower Bound in Quantum Transport. *J. Funct. Anal. 197* (2003), 247–282.

[21] TCHEREMCHANTSEV, S., AND DAMANIK, D. Power-Law Bounds on Transfer Matrices and Quantum Dynamics in One Dimension. *Commun. Math. Phys. 236* (2003), 513–534.