



**Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Campus de São José do Rio Preto**

Osvaldo Teodoro da Silva Neto

Modelos Matemáticos para o Problema de Colheita da Cana-de-açúcar

**São José do Rio Preto - SP
2024**

Oswaldo Teodoro da Silva Neto

Modelos Matemáticos para o Problema de Colheita da Cana-de-açúcar

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

Financiadora: CAPES

**São José do Rio Preto - SP
2024**

N469m	Neto, Osvaldo Teodoro da Silva Modelos Matemáticos para o Problema de Colheita da Cana-de-açúcar / Osvaldo Teodoro da Silva Neto. -- São José do Rio Preto, 2024 72 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto Orientador: Silvio Alexandre de Araujo 1. Modelagem matemática. 2. colheita da cana-de-açúcar. 3. dados reais. I. Título.
-------	--

Osvaldo Teodoro da Silva Neto

Modelos Matemáticos para o Problema de Colheita da Cana-de-açúcar

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo (Orientador)
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto
UNICAMP - Câmpus de Limeira

São José do Rio Preto - SP
22 de Novembro de 2024

*Aos meus pais, Alessandra e João.
A minha avó Nair
e a minha namorada Júlia.*

Agradecimentos

Agradeço a todos que me motivaram a chegar até aqui, acima de tudo aqueles que estiverem ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Obrigado Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo pela orientação, por toda a paciência e compreensão.

Aos meus pais, João e Alessandra, por sempre me apoiarem e desejarem o meu melhor.

A minha avó, Nair, que sempre me apoiou e tratou como filho até o final de sua vida.

A minha amada namorada e futura esposa, Júlia, por sempre estar ao meu lado.

Aos meus sogros Dalton e Renata, e Luisa por ser uma cunhada excepcional.

Aos meus amigos que o IBILCE me deu: Ilis, Lucas, Ricardo, Tiago, entre outros.

A Deus, por me dar maturidade e forças para nunca desistir.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 88887.759412/2022-00.

*"A vida é uma peça de teatro que não permite ensaios. Por isso,
cante, chore, dance, ria e viva intensamente,
antes que a cortina se feche e a
peça termine sem aplausos."
(Charles Chaplin, 1936)*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo empregar o uso de três modelos matemáticos no problema de roteamento na colheita da cana-de-açúcar, setor de extrema importância para o país, uma vez que o Brasil é o país que mais produz açúcar e etanol no mundo. Os modelos propostos consideram a complexidade intrínseca à frente de colheita, incluindo aspectos como a capacidade da usina, a janela de tempo para realizar a colheita, entre outros. O objetivo fundamental durante a colheita é buscar modelos que minimizem o deslocamento das frentes de colheitas considerando a minimização da perda de matéria prima e maximização do lucro proveniente da colheita da cana-de-açúcar. Testes computacionais são apresentados, com base em instâncias teóricas e reais, para embasar qual desses modelos apresentaram o menor tempo computacional. Além disso, serão apresentados conclusões dos resultados computacionais.

Palavras-chave: Modelagem matemática, colheita da cana-de-açúcar, dados reais.

Abstract

This work aims to employ the use of three mathematical models in the routing problem of sugarcane harvesting, a sector of utmost importance for the country, given that Brazil is the largest producer of sugar and ethanol in the world. The proposed models take into account the intrinsic complexity of the harvesting front, including aspects such as the plant's capacity, the time window for harvesting, among others. The fundamental objective during harvesting is to seek models that minimize the movement of the harvesting fronts, considering the minimization of raw material loss and the maximization of profit from sugarcane harvesting. Computational tests are presented, based on theoretical and real instances, to support which of these models presented the shortest computational time. Furthermore, the conclusions of the computational results will be presented.

Keywords: Mathematical modeling, sugarcane harvesting, real data.

Sumário

1	Introdução	11
2	A colheita da cana-de-açúcar: contextualização e revisão bibliográfica	14
2.1	A colheita de cana-de-açúcar: revisão bibliográfica	19
3	Modelagem Matemática	21
3.1	Reformulação baseada em restrições de fluxo em redes	27
3.2	Reformulação baseada em redefinição de variáveis	29
4	Resultados Computacionais	31
4.1	Exemplo Ilustrativo	32
4.2	Dados reais aplicados para a colheita da cana-de-açúcar	40
4.3	Dados de grande magnitude gerados por intervalos aleatórios	47
5	Conclusão	57
	Referências	58

1 Introdução

Os países tropicais, com seu clima favorável ao cultivo de cana-de-açúcar, têm experimentado um crescimento exponencial na lavoura dessa cultura, trazendo desafios complexos para as decisões tomadas pelas usinas. Entre esses países, o Brasil destaca-se como líder na comercialização de açúcar e etanol. A produção de biocombustíveis a partir de fontes renováveis, além de contribuir para a redução das emissões de poluentes, incentivou vários governos a investirem em pesquisa e desenvolvimento de bioprodutos. Esses investimentos impulsionaram mudanças significativas na biotecnologia e na redução de custos associados a essas políticas públicas, conforme demonstrado em O'hara et al. (2016) [35] e Zhang et al. (2016) [45].

A cana-de-açúcar, com seu uso anual de aproximadamente 173,8 milhões de toneladas como bem de consumo (Udop, 2021) [43], representa uma *commodity* crucial no cenário agrícola global. Em 2018, foi considerada o segundo produto agrícola mais produzido no mundo, atrás apenas dos cereais, de acordo com a *Food and Agriculture Organization* (2020) [32]. O Brasil destaca-se como líder mundial na produção e exportação de açúcar, além de ser um pioneiro na geração de energia a partir da biomassa do bagaço de cana. Além disso, o Brasil ocupa o primeiro lugar na produção de etanol contribuindo substancialmente para o aumento do PIB agrícola do país e para a geração de empregos, como apontado por Florentino et al. (2018) [19]. Aproximadamente 610,1 milhões de toneladas de cana-de-açúcar foram produzidas (safra 2022/2023), crescimento de 5,4% comparado à temporada de safra anterior de acordo com a Conab [34]. Este aumento na produção ao longo dos anos levou a investimentos significativos em estudos que auxiliam o setor (Florentino et al., 2018) [19].

Contudo, a produção de açúcar e etanol a partir da cana-de-açúcar enfrenta diversos desafios, especialmente em relação ao plantio e à colheita. Os gestores das usinas precisam alinhar seus maquinários com uma logística eficiente para evitar custos desnecessários, considerando as pressões sociais para que os produtos sejam sustentáveis e atendam às necessidades atuais sem comprometer futuras produções (Borodin et al., 2016) [5]. Assim, um planejamento eficiente se faz necessário para manter a alta produtividade e sustentar o setor econômico do país. Diante da pressão para atender às demandas de alimentos e energia, diversas estratégias têm sido estudadas para superar os desafios encontrados, incluindo o cultivo de novas variedades de cana-de-açúcar (Ahumada e Villalobos, 2009; Florentino et al., 2020) [1] e [17].

Vários estudos e modelos matemáticos de otimização têm sido propostos para auxiliar nas decisões relacionadas à época de plantio, como os desenvolvidos por Florentino et al. (2003) [10], Tolentino et al. (2007) [42], Florentino et al. (2008)

[18], Colin et al. (2009) [8], Florentino et al. (2010) [11], Florentino et al. (2014) [9] e Ortiz et al. (2017) [36]. Esses modelos abordam desde a definição da área de plantio até a maximização da eficiência na utilização dos resíduos da cana para a produção de açúcar e energia. No entanto, cada problema apresenta suas especificidades, o que exige a adaptação e implementação de modelos matemáticos para auxiliar nas decisões no setor agropecuário.

A complexidade intrínseca à frente de colheita inclui aspectos como a programação da usina, uma vez que cada indústria segue um cronograma distinto que pode impactar a colheita. Contudo, a janela de tempo para realizar a colheita da cana-de-açúcar reduz a influência da usina nas decisões, tornando necessário considerar outros fatores que afetam a safra, tais como a variedade da cana, idade da plantação, risco de incêndio, tráfego de veículos, atenção à mão-de-obra e manutenção dos maquinários. Portanto, o objetivo fundamental durante a colheita é buscar modelos que minimizem o deslocamento das colheitadeiras entre as linhas de cana plantada, já que esse roteamento torna a colheita da cana-de-açúcar mais eficaz. Além disso, deve-se atentar à quantidade de cana-de-açúcar colhida. Se a quantidade de cana-de-açúcar disponível não atende às necessidades de moagem da usina, ou se a quantidade exceder a capacidade dos caminhões, a colheita pode ser prejudicada, gerando perdas significativas.

Atualmente, existem principalmente dois tipos de colheita: manual e mecanizada. A colheita manual, embora menos eficiente e mais trabalhosa, é uma realidade para muitos pequenos produtores que não têm acesso a maquinários avançados. Por outro lado, a colheita mecanizada oferece uma série de vantagens, incluindo maior rapidez e eficiência na colheita, o que se traduz em uma produtividade maior e custos operacionais reduzidos Junqueira et al. (2019) [25]. É possível aproveitar a cana não colhida em uma próxima temporada de safra, mesmo que resulte em alguma perda nos níveis de sacarose. Essa decisão deve ser alinhada ao cronograma da empresa, e caso a indústria busque maximizar rendimentos e reduzir custos, pode optar por suportar a perda de sacarose visando lucros futuros nas colheitas seguintes.

Essa abordagem é particularmente relevante para empresas de grande porte, enquanto usinas com áreas menores enfrentam desafios mais triviais devido à menor magnitude de operações. Independentemente do tamanho, é aconselhável que tanto os pequenos quanto os grandes agricultores utilizem modelos matemáticos para orientar as decisões durante a colheita. A aplicação de ferramentas matemáticas eficientes no planejamento da colheita é crucial, visando minimizar os custos e maximizar o lucro, permitindo que os agricultores direcionem a diferença de capital para investimentos estratégicos, como aumento de mão-de-obra ou aquisição de maquinários mais avançados.

Na abordagem de problemas com aplicabilidade prática em poucas localizações,

a utilização de programas algébricos, como o *Solver* no Excel, por exemplo, pode oferecer soluções viáveis para questões mais triviais. Porém, em situações mais complexas, como aquelas envolvendo múltiplas localizações de plantio de cana-de-açúcar por grandes empresas, o uso de planilhas pode ser inviável para fins de colheita. Nesses casos, a aplicação de outros métodos computacionais é necessário para resolver os desafios de modelagem de otimização matemática.

Portanto, o foco principal desta dissertação é a colheita da cana-de-açúcar, buscando minimizar os custos por meio de modelagem matemática adequada, considerando restrições específicas do problema e utilizando *solvers* para obter resultados computacionais. Esses *solvers* serão usados para resolver modelos matemáticos implementados que irão contribuir para o roteamento agrícola buscando maximizar o lucro na safra da Cana-de-açúcar gastando o mínimo possível.

Esta dissertação está dividida em 5 capítulos. No Capítulo 2 será feita uma revisão bibliográfica, bem como, uma contextualização da colheita da cana-de-açúcar. No Capítulo 3, será feita a modelagem e adaptações dos modelos de otimização matemática para o viés da colheita. No Capítulo 4, serão apresentados resultados computacionais além da análise destes a partir das implementações feitas dos modelos apresentados no Capítulo 3. Por fim, no Capítulo 5 é apresentada a conclusão do trabalho.

2 A colheita da cana-de-açúcar: contextualização e revisão bibliográfica

No setor agropecuário da cana-de-açúcar, a gestão da cadeia de suprimentos não apenas responde às demandas dos consumidores finais, mas também reflete a responsabilidade ambiental e social, promovendo a sustentabilidade e a resiliência ao longo de toda a cadeia produtiva. Por meio de um diagrama do tipo árvore, pode-se observar como a cadeia produtiva da cana-de-açúcar é longa na Figura 2.1.

Para aprimorar a eficácia da gestão, o planejamento de decisões na cadeia de suprimentos pode ser categorizado em uma hierarquia de três níveis, envolvendo tomada de decisão estratégica, tática e operacional, dependendo do período de aplicação dessas decisões. A forma como o planejamento é executado em cada um desses níveis tem impactos substanciais na rentabilidade e no êxito global da empresa. Em específico para empresas no setor agropecuário.

No plano operacional, a implementação de práticas agrícolas sustentáveis, a gestão eficiente de recursos hídricos e o uso adequado de tecnologias de colheita e processamento são aspectos centrais. A agilidade na tomada de decisões operacionais permite enfrentar desafios imprevistos, como variações climáticas abruptas ou mudanças nas condições do mercado, garantindo a adaptação contínua.

Este cenário destaca a importância de otimizar a colheita da cana-de-açúcar, visando a minimização dos custos operacionais e a maximização da eficiência. Nesse contexto, é importante que métodos de solução baseando-se em modelos matemáticos sejam desenvolvidos para aprimorar a produtividade e reduzir os custos com maquinários durante a época de colheita, sem que a demanda das usinas seja afetada (Grunow et al., 2007) [20].

Para a resolução dos modelos matemáticos, é comum o emprego de *solvers*, e é crucial que tais modelos atendam a critérios específicos relacionados ao processo de colheita. Como resultado, diversos estudos têm sido conduzidos com o objetivo de desenvolver modelos computacionais genéricos que possam contribuir para a praticidade das operações agrícolas, oferecendo suporte às decisões do agricultor de cana-de-açúcar.

A complexidade do gerenciamento da colheita se deve, em grande parte, às extensas áreas plantadas, variabilidade de condições de solo, clima, e a necessidade de transporte eficiente da cana até as usinas. Modelos matemáticos, como os desenvolvidos por Salassi et al. (2002) nos EUA [39] e por Higgins et al. (2004) na Austrália [23], têm sido fundamentais para enfrentar esses desafios, especialmente no que diz respeito à logística de colheita e transporte. A otimização da colheita da cana-de-açúcar, portanto, envolve uma abordagem holística que contempla a escolha da metodologia de colheita, a aplicação de modelos matemáticos para

eficiência logística e a consideração de fatores econômicos, ambientais e sociais. Essa abordagem integrada é essencial para enfrentar os desafios da produção de cana-de-açúcar, assegurando sustentabilidade e rentabilidade no longo prazo.

A transição da colheita manual para a mecanizada reflete um avanço tecnológico e operacional no setor agrícola, permitindo não apenas uma colheita mais ágil mas também a redução do impacto ambiental, minimizando as queimadas antes da colheita manual. No entanto, a implementação de técnicas de colheita mecanizada requer investimentos significativos em maquinários e treinamento de pessoas, além de adaptar as práticas agrícolas para compatibilidade com os equipamentos de colheita. A colheita mecanizada veio com o intuito de ajudar na maximização do lucro além de também ser usada para minimizar o impacto ambiental vindo da queima da palha, que é necessária na colheita manual.

A colheita dos talhões, no pico de sacarose, deve ser planejada com o auxílio da modelagem matemática e deve ser planejada para ter um melhor aproveitamento/rendimento. E isso é complexo pelas razões apresentadas: a quantidade de colheitadeiras disponíveis na fazenda; tempo de transporte destas de um campo para o outro e o custo desse transporte; custo para fazer a colheita em cada talhão; tempo necessário para colher cada talhão e o período máximo de trabalho diário definido pela usina. No Capítulo 3 serão expostos alguns modelos matemáticos que irão auxiliar no processo da colheita de cana-de-açúcar.

É imperativo que o agricultor esteja atento às decisões a serem tomadas em um horizonte de oportunidades, considerando a necessidade de alinhar rigorosamente o cronograma de colheita com o cronograma de processamento da usina. Evitar colheitas frequentes na mesma plantação é crucial, pois após o crescimento inicial da cana-de-açúcar (aproximadamente 12 a 18 meses), ocorre um novo ciclo de crescimento e amadurecimento da *commodity*.

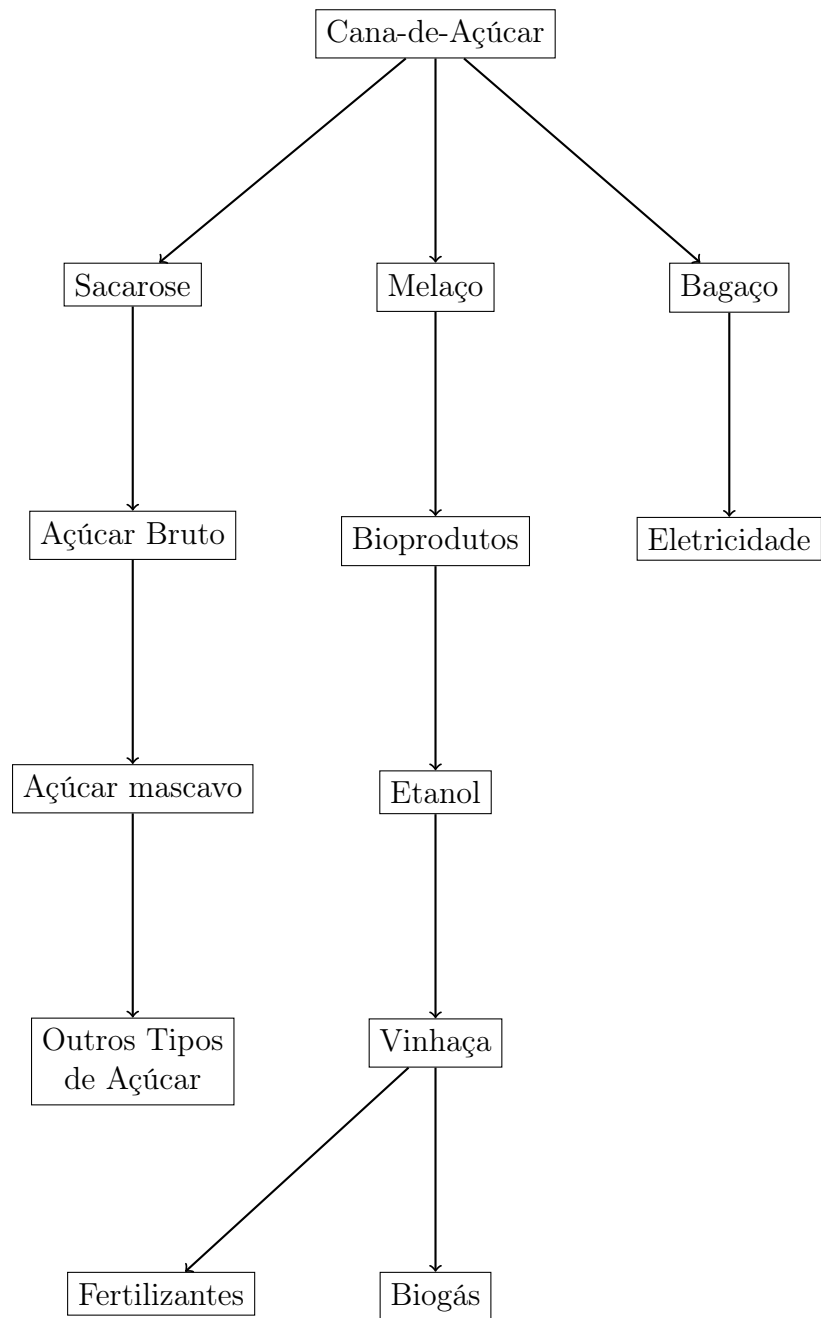


Figura 1: Diagrama da cadeia produtiva da cana-de-açúcar baseado no trabalho [41].

Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

Conforme indicado por Caixeta - Filho et al. (2018) [6] e Florentino et al. (2018) [18], a melhor época para a colheita é durante o pico de produção de açúcar, identificado pelo ponto mais alto na curva de concentração de sacarose. A Figura 2.2 ilustra esse conceito, evidenciando o momento ideal para a colheita, onde o agricultor maximizaria os lucros pela venda da cana-de-açúcar, aproveitando o período de maior concentração de açúcar durante a safra.

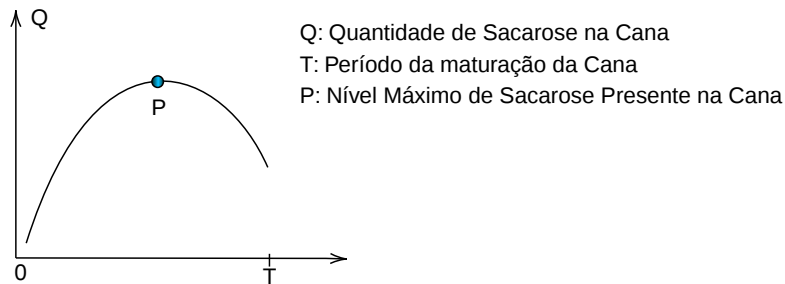


Figura 2: Curva do nível de sacarose no tempo.
Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

Na Figura 2.2, apresenta-se uma representação gráfica do período de maturação da cana-de-açúcar, abrangendo um intervalo de T meses, onde o ponto ótimo para a colheita é identificado como P . Basicamente, para começarmos a safra com esse período T , é dada a quantidade de sacarose presente nos talhões de Cana-de-açúcar (por período). Infelizmente a tendência desses níveis de sacarose presentes na tonelada por hectare de cana é decair, ou seja, caso houvesse colheita posterior ao ponto P , perderíamos receita na safra. Esse desafio surge quando os cronogramas das indústrias não coincidem com o ápice do teor de sacarose, resultando na possível perda dessa substância durante a colheita, como ilustrado pelo declínio na concentração de sacarose na cana, conforme observado ainda na Figura 2.2. Este cenário enfatiza a importância de direcionar o foco operacional para os campos durante a colheita, compreendendo as demandas específicas deste período na colheita.

Considerando que as usinas não podem interromper suas operações durante a safra, é crucial conhecer a necessidade mínima de processamento mensal da indústria. Além disso, diversos fatores interferem na colheita, como condições

climáticas adversas, falhas nos equipamentos e doenças que afetam os objetivos estabelecidos. Nesse sentido, é essencial um planejamento que minimize as perdas na produtividade da cana-de-açúcar, conforme destacado por Bezuidenhout e Baier em 2011 [4].

É relevante notar a implementação de leis que exigem maior cuidado por parte dos cultivadores. Um exemplo é a redução do uso de queimadas, impulsionada pela Lei n.º 11.241 do estado de São Paulo [2], que prevê a eliminação gradativa dessa prática. Essa mudança legislativa impactou significativamente a forma como a colheita é realizada, reduzindo a dependência de grandes grupos de cortadores manuais e promovendo o uso de maquinário mais eficiente. Esse movimento não apenas beneficia o meio ambiente, mas também minimiza o esforço humano associado à colheita manual em larga escala.

A adoção de maquinário em substituição à mão de obra manual, especialmente em locais com escassez de trabalhadores como alguns estados da região Centro-Oeste do Brasil (Goiás, Mato Grosso e Mato Grosso do Sul), representa uma mudança significativa no setor. Essa transição não só aumenta a eficiência da colheita, com colheitadeiras capazes de processar até 125 toneladas por dia, mas também implica desafios financeiros para pequenos produtores, que muitas vezes não conseguem arcar com os custos de equipamentos avançados (Kittilertpaissan et al., (2015) [28]).

2.1 A colheita de cana-de-açúcar: revisão bibliográfica

Para a resolução dos modelos matemáticos, é comum o emprego de *solvers*, e é crucial que tais modelos atendam a critérios específicos relacionados ao processo de colheita. Como resultado, diversos estudos têm sido conduzidos com o objetivo de desenvolver modelos computacionais genéricos que possam contribuir para a praticidade das operações de colheita, oferecendo suporte às decisões do agricultor de cana-de-açúcar. Para facilitar esse entendimento, o termo "talhão" será usado para se referir a uma unidade produtiva agrícola, frequentemente conhecida como "fazenda". Embora "talhão" seja comumente empregado para designar subdivisões de áreas agrícolas, aqui ele será tratado como sinônimo de "fazenda" devido ao contexto da pesquisa. Por exemplo, como mostra a Figura 2.3 abaixo, temos diversos talhões presentes em uma única fazenda. No entanto, como dito acima, a palavra "fazenda" será considerada apenas sendo um talhão (divisão de um terreno).



Figura 3: <https://chatgpt.com/c/67634fc4-bbb4-8000-afe5-0ce829041576> Imagem gerada usando DALL-E.

A eficiência na colheita da cana-de-açúcar, visando o aprimoramento da produção de sacarose e a redução de custos operacionais, tem sido uma área de interesse crescente na literatura agrícola. A segmentação das áreas de plantio em talhões menores é uma estratégia recomendada para sincronizar a colheita com o pico de maturação da sacarose, otimizando o uso de recursos e minimizando o deslocamento entre fazendas, o que por sua vez reduz os custos com maquinário, tempo e combustível. Esta abordagem não apenas visa a eficiência operacional, mas

também enfatiza a importância da sustentabilidade no processo agrícola.

A implementação de modelos matemáticos robustos, aliada ao uso de pacotes de otimização, tem sido evidenciada como solução viável para enfrentar os desafios da colheita (Grunow et al, 2007 [20], Kittilertpaisan et al, 2015 [28] e Sungnul et al., 2016 [40]). O trabalho de Sungnul et al. (2018) [40] demonstra a eficácia de um modelo que busca maximizar o lucro e minimizar os custos, apresentando soluções que superam práticas convencionais. Já [28] propõem uma estratégia de colheita dividida ao longo de três anos, visando equacionar as necessidades dos pequenos produtores. Grunow et al. (2007) [20] abordam a otimização da colheita sob a perspectiva do problema do caixeiro viajante, com o objetivo de maximizar lucros e minimizar custos.

O problema de roteamento de veículos com restrição de janela de tempo (Vehicle Routing Problem with Time Windows) tem sido aplicado como um modelo matemático fundamental para otimizar o roteamento e o tempo da colheita, considerando o pico de produção de sacarose. Diversos estudos, como [13] e [47], têm explorado a aplicabilidade deste modelo no contexto da colheita de cana-de-açúcar, mostrando sua eficácia na solução de desafios logísticos e operacionais complexos. Dito isso, podemos perceber com a literatura externa sobre a otimização da colheita de cana-de-açúcar é extensa e aborda uma gama de estratégias que incluem modelos matemáticos sofisticados, considerações econômicas e desafios logísticos. A integração de tecnologias avançadas e soluções de otimização não apenas promove a eficiência e a sustentabilidade agrícola, mas também sugere um caminho para uma distribuição mais equitativa de benefícios entre grandes e pequenos produtores, apesar dos desafios econômicos associados à adoção de tais tecnologias.

É relevante destacar que, dependendo da complexidade do problema, a consideração do tempo para obtenção dos resultados computacionais se torna crucial. Desta forma, estratégias heurísticas tem sido amplamente exploradas devido à demora potencial em modelos matemáticos extensos, que podem prejudicar a eficiência durante a safra. Para mitigar esse problema, neste trabalho, foram adaptados e modificados três modelos matemáticos a partir do trabalho de [24], visando minimizar a espera computacional. Os modelos adaptados são provenientes dos estudos de Clark et al. (2010) [7] e Wolsey et al. (1997) [44]. Essa abordagem não apenas trata as questões computacionais complexas, mas também viabiliza a pronta implementação dos maquinários na colheita, pois reduz significativamente o tempo de compilação do programa e a espera pela definição do roteiro. Por fim, vale ressaltar as contribuições de outras referências que fundamentaram a construção deste texto, incluindo [3], [12], [21], [25], [29], [31], [37], [38] e [41].

3 Modelagem Matemática

Neste capítulo, aprofundaremos nossa discussão sobre a aplicação de modelos matemáticos no setor agropecuário, destacando como essas ferramentas podem ser decisivas para empresas enfrentarem os desafios inerentes à colheita. A introdução anteriormente fornecida sobre o propósito e a importância dos modelos matemáticos na otimização do roteamento agrícola e na solução de problemas complexos serve de base para uma exploração mais detalhada sobre o desenvolvimento, a aplicação e o impacto desses modelos, com um foco especial na colheita da cana-de-açúcar.

Reconhecendo as limitações das abordagens tradicionais, como o uso de planilhas, que muitas vezes falham em capturar a complexidade e a dinâmica do planejamento agrícola eficaz, este capítulo visa elucidar como a modelagem matemática oferece uma alternativa robusta e confiável. Através de uma análise detalhada, demonstraremos como esses modelos podem fornecer *insights* valiosos e orientar decisões estratégicas para maximizar a eficiência e a lucratividade.

Para contextualizar a discussão, é essencial primeiro compreender a natureza do problema enfrentado durante a colheita da cana-de-açúcar. Isso envolve considerar não apenas a quantidade de cana plantada, mas também fatores críticos como o teor de sacarose, que desempenha um papel vital na determinação do momento ótimo de colheita. Assim sendo, os desafios enfrentados no setor agropecuário são substancialmente mais complexos do que se pode prever inicialmente. Portanto, a adoção de modelos matemáticos surge como a alternativa mais viável. Apesar de sua complexidade inerente, tais modelos representam uma boa alternativa, minimizando o tempo dedicado ao ajuste manual de dados em planilhas e maximizando a eficiência do processo de tomada de decisão, especialmente quando se utiliza ferramentas avançadas como os pacotes de otimização.

O uso de modelos matemáticos nesse contexto específico não apenas simplifica a análise da frente de colheita, mas também oferece um método sistemático para lidar com as variáveis dinâmicas e multifacetadas envolvidas no processo agrícola. Esses modelos matemáticos vão nos fornecer o melhor trajeto que as colheitadeiras devem fazer entre as fazendas, quantos hectares devem ser colhidos com o mínimo de gasto possível e a obtenção do maior lucro dado o preço da sacarose e o montante de cana-de-açúcar colhida. Mais uma vez voltamos a frisar que não é necessário colher todos os campos, mesmo que isso influencie na curva da sacarose (pico de açúcar desejado na cana). Dependendo da janela de oportunidade, compensa perder um pouco de açúcar num hectare não colhido e compensar a receita fazendo a colheita em outras fazendas, pois poderíamos compensar a receita tendo gastos menores em outros hectares.

Ao abordar desafios mais amplos no setor agrícola, vale a pena mencionar a

aplicação de ideias provenientes do estudo intitulado “*Maximum Power Delivery at Lower Cost*” [24]. Esse trabalho, originado de um problema enfrentado pela empresa Enalta, destacou a colaboração de um grupo diversificado, composto por coordenadores e alunos de diferentes formações, na busca por soluções inovadoras. Uma das abordagens foi a adaptação do modelo proposto por Junqueira [26], originalmente desenvolvido para dimensionamento de lotes em uma usina de cana-de-açúcar.

Assim, o objetivo principal desta dissertação é implementar o modelo adaptado pelos pesquisadores brasileiros com base na tese de Junqueira [26]. Além disso, serão apresentadas duas adaptações adicionais em modelos matemáticos, incorporando alterações que impactam na qualidade dos limitantes duais e, conseqüentemente, o tempo de espera computacional para a obtenção dos resultados desejados.

Destaca-se que a principal característica desses modelos é a minimização da perda de moagem, evitando a perda de matéria-prima durante o processo de colheita. Além disso, a otimização dos custos relacionados ao transporte de maquinários entre as fazendas é uma prioridade. Ou seja, num período T teremos uma janela de oportunidade para se fazer a safra. Nessa janela de oportunidade, teremos a quantidade exata dos níveis de sacarose presente em cada fazenda. Unido a isso com a capacidade de moagem da usina e os gastos operacionais da frente de colheita, os modelos nos fornecerá um roteamento nas fazendas minimizando os custos e maximizando os lucros com a colheita da Cana-de-açúcar.

Outro aspecto crítico abordado no contexto da colheita de cana-de-açúcar é o transporte eficiente da matéria-prima até a usina. O trabalho apresentado por Higgins em [22], intitulado “*Scheduling of road vehicles in sugarcane transport*”, oferece *insights* valiosos. Este modelo visa minimizar o tempo de transporte da cana-de-açúcar até a usina e foi aplicado com sucesso em uma canavieira australiana.

A combinação dos estudos de Higgins [22] e a adaptação do modelo de Junqueira [26], conforme apresentado no problema da Enalta [24], destaca a importância da sinergia entre diferentes abordagens para enfrentar os desafios complexos na indústria agrícola.

Dessa forma, apresentaremos a seguir os índices, parâmetros e variáveis do modelo matemático focado em otimizar a colheita dentro de uma janela de oportunidade, atendendo às demandas diárias da usina de cana-de-açúcar. Neste contexto, cada fazenda nada mais é do que um talhão, que tem como objetivo final ser colhido para a maximização dos lucros.

Índices

i representa a fazenda onde a frente de colheita se encontra;

j representa a fazenda destino (próximo campo que a frente de colheita vai se deslocar caso necessário);

s representa os subperíodos;

f_t representa o primeiro subperíodo do período t ;

l_t representa o último subperíodo do período t .

Parâmetros

N representa o número de fazendas;

T representa o número de períodos num horizonte de planejamento;

M_t representa o número máximo de subperíodos do período t , onde $l_t = f_t + M_t - 1$;

S representa o número de subperíodos no horizonte de planejamento;

V_t representa o preço da venda por tonelada de cana-de-açúcar no período t ($R\$.Ton^{-1}$);

Pol_{it} representa a quantidade de sacarose por hectare de cana colhida na fazenda i no período t ($Ton.Hec^{-1}$);

Cf_{ij} representa o custo do transporte da colheitadeira na fazenda i até a fazenda j (em $R\%$);

P_{it} representa a quantidade em toneladas de cana por hectare na fazenda i no período t ($Ton.Hec^{-1}$);

Ca_i representa o custo do transporte por tonelada de cana-de-açúcar da fazenda i até a usina ($R\$.Ton^{-1}$);

Cm_i representa o custo do transporte dos caminhões que estão voltado da usina até a fazenda i ($R\$.Ton^{-1}$);

D_{min_t} representa a demanda mínima em tonelada de cana-de-açúcar da usina no período t (em Ton.);

D_{max_t} representa a demanda máxima em tonelada de cana-de-açúcar da usina no período t (em Ton.);

Tc representa o tempo que se gasta em horas para fazer a colheita em um hectare de cana-de-açúcar (em horas);

Td_{ij} representa o tempo em horas do transporte da frente de colheita que está na fazenda i até a fazenda j ;

Cap representa o tempo máximo da jornada de trabalho por período (em horas);

L_i representa a área disponível em hectare para se fazer a colheita na fazenda i (em Hec.).

Variáveis

x_{is} representa se a frente de colheita está na fazenda i no subperíodo s (variável binária);

z_{ijs} representa o deslocamento da frente de colheita da fazenda i para a fazenda j no subperíodo s (variável contínua);

w_{is} representa o montante de cana-de-açúcar colhida na fazenda i no subperíodo s (em Hec.) (variável contínua).

Definidos os índices, parâmetros e variáveis podemos ir para o modelo que foi proposto para resolver o problema da safra de cana-de-açúcar. Voltamos a frisar que este modelo é uma alteração do modelo do Junqueira [26]. Esta mudança foi

feita para se enquadrar no problema agrícola em questão. Essa diferença se dá ao fato de que agora não será obrigatório a colheita de todos os campos, apenas se necessário. Pois, o intuito será buscar maximizar o lucro com quantidade de fazendas colhidas, de forma a atender a demanda estipulada pela usina. Somado a isso, serão postos aqui outros dois modelos que foram modificados visando aumentar a eficiência na resolução das instâncias.

Segue abaixo o modelo matemático **(I)**, que foi uma reformulação do modelo **General Lotsizing and Scheduling Problem (GLSP)** (Fleischmann & Meyr, 1997, 2002, 2000) [15], [14], [16] modificado pelo grupo de pesquisa brasileiro para resolver o problema da Enalta [24].

Modelo

Maximizar

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \sum_{s=f_t}^{l_t} \sum_{i=1}^N V_t Pol_{it} w_{is} - \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C f_{ij} z_{ijs} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=f_t}^{l_t} \sum_{i=1}^N C a_i P_{it} w_{is} \\ - \sum_{i=1}^N C m_i x_{i1} - \sum_{i=1}^N C m_i x_{iS} \end{aligned} \quad (1)$$

Sujeito a

$$D_{min_t} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{s=f_t}^{l_t} P_{it} w_{is} \leq D_{max_t}, \quad \forall t = 1, \dots, T; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{s=f_t}^{l_t} T_c w_{is} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{s=f_t}^{l_t} T d_{ij} z_{ijs} \leq Cap, \quad \forall t = 1, \dots, T; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{is} = 1, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^S w_{is} \leq L_i, \quad \forall i = 1, \dots, N; \quad (5)$$

$$w_{is} \leq L_i x_{is}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (6)$$

$$z_{ijs} \geq x_{i,s-1} + x_{j,s} - 1, \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (7)$$

$$w_{is}, z_{ijs} \geq 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (8)$$

$$x_{is} \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S. \quad (9)$$

A função objetivo (1) visa maximizar o lucro na colheita da cana-de-açúcar e minimizar os custos operacionais na frente de colheita. As restrições (2) representam que a moagem da cana-de-açúcar na fazenda i tem que atender o intervalo da demanda da usina, ou seja, não deve-se atender menos que a demanda mínima da usina ao mesmo tempo que não se deve ultrapassar a demanda máxima. Já (3) garantem que o tempo da colheita nos campos não ultrapasse o tempo máximo da jornada de trabalho. As restrições (4) e (5) definem o local em que a frente de colheita está operando e que cada montante de cana-de-açúcar colhida, em cada campo, não pode exceder o número máximo de cana plantada em cada campo, respectivamente. As restrições (6) e (7) visam garantir o movimento contínuo da frente de colheita entre os campos. Por fim, as restrições (8) nos dizem que as variáveis w_{is} e z_{ijs} são contínuas, enquanto que a variável x_{is} é binária, como posto em (9).

Exemplo: consideremos 4 fazendas e um total de 3 períodos divididos em 6 subperíodos, o modelo, após implementado, terá que ter um roteiro hipotético como segue abaixo na Figura 3.1.

O percurso acima pode ser visto como um gráfico direcionado, onde os campos x_{is} representam os nós (fazendas) que são conectados por cada arco que a frente z_{ijs} se move. Sendo mais específico, percebe na Figura 3.1 que o início da colheita começa na fazenda 1, no subperíodo 1, e os maquinários continuam trabalhando (colhendo) ainda por lá até o subperíodo 3. Após isso, no subperíodo 4, a frente de colheita se move da fazenda 1 para para a fazenda 4. Posteriormente, as colheitadeiras continuam a trabalhar na fazenda 4 até o subperíodo 6, isto é, até o fim do expediente. Ademais, não foi necessário fazer a colheita nas fazendas 2 e 3.

Perceba que no modelo não temos a obrigação de colher todos os campos, apenas manter o intervalo de demanda desejado da usina de modo que garantimos lucro na safra, como dito anteriormente. Além disso, não é necessário que a variável

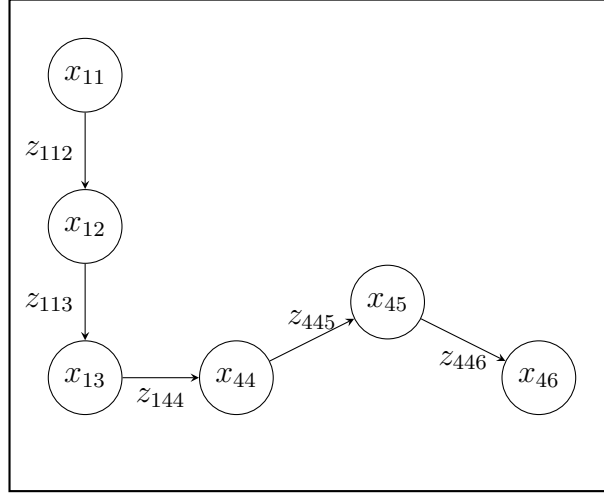


Figura 4: Percurso realizado pela frente de colheita.
Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

z_{ijs} seja binária uma vez que a variável x_{is} já é. Toda vez que a frente de colheita esteja numa fazenda, o valor de z_{ijs} será mantido igual a 1 já que a variável x_{is} também irá obter valor igual a 1 por causa do deslocamento da frente de colheita de um campo para outro (restrição 7). Caso a variável x_{ijs} obtenha valor zero (isto é, quando a frente de colheita não estiver na fazenda i), o valor da variável z_{ijs} continua sendo forçado a ser mantido em zero. Além de que, caso uma fazenda obtenha o montante máximo desejado pela usina, e caso a sua trajetória com os maquinários seja viável, apenas essa fazenda será colhida. Fora isso, as colheitas nos campos devem ser feitas em subperíodos distintos para que o problema de roteamento faça sentido, já que o intuito desse modelo é forçar todas as colheitadeiras fazerem um trabalho mútuo na mesma fazenda.

3.1 Reformulação baseada em restrições de fluxo em redes

No artigo Guimarães et al. (2014) [26], são analisados modelos matemáticos para problemas de dimensionamento de lotes. Além desses modelos serem eficazes, o tempo de espera computacional é menor, já que estes tendem a resolverem problemas mais rápido devido a melhor qualidade dos limitantes inferiores. A ideia básica consiste em substituir a restrição (7) pelas restrições (10) e (11).

Como mostrado por (Wolsey et al., 1997) [44], a mudança em questão produz um modelo substancialmente mais eficaz. Esse modelo modificado abrevia-se como (GLSPNF). As siglas **NF** significa **fluxo de rede**, (*network flow*, em Inglês).

$$\sum_{j=1}^N z_{ijs} - x_{i,s-1} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N z_{ijs} - x_{j,s} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S. \quad (11)$$

As restrições (10) forçam o deslocamento da frota de trabalho no subperíodo anterior para o início do subperíodo atual. Analogamente, (11) forçam que a frente de colheita avance para outra fazenda (se necessário) em cada subperíodo.

Vale ressaltar que a frente de colheita não se obriga a deslocar-se para outra fazenda. Se necessário, a frente de colheita pode permanecer apenas na fazenda i em quantos subperíodos s forem necessários até o último subperíodo estipulado. Apenas é obrigatório respeitar o horário da jornada de trabalho definida pela usina.

Enfim, o segundo modelo reformulado que será usado **(II)** lê-se de (1)-(6), (8)-(11).

3.2 Reformulação baseada em redefinição de variáveis

Seguindo a mesma ideia, o modelo matemático apresentado por (Clark e Clark, 2010) [7], **(CC)** relaciona-se com os modelos **(I)** (primeiro modelo apresentado neste capítulo) e ao **(II)** (segundo modelo apresentado). O modelo **(CC)** apresenta algumas mudanças. Entre elas, a variável x_{is} , que representa onde a frente de colheita está operando, é descartada. Já a variável z_{ijs} (deslocamento da frente de colheita de uma fazenda para outra), passa a ser binária representando o deslocamento de uma fazenda para outra em cada subperíodo. Segue o modelo matemático (III) abaixo, que é uma reformulação do modelo **(CC)**.

Maximizar

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \sum_{s=f_t}^{l_t} \sum_{i=1}^N V_t Pol_{it} w_{is} - \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C f_{ij} z_{ijs} - \sum_{t=1}^T \sum_{s=f_t}^{l_t} \sum_{i=1}^N C a_i P_{it} w_{is} \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C m_i z_{ji1} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C m_i z_{jiS} \end{aligned} \quad (12)$$

Sujeito a (2) - (3)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ji0} = 1; \quad (13)$$

$$w_{is} \leq L_i \sum_{j=1}^N z_{jis}, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^N z_{ji,s-1} - \sum_{j=1}^N z_{ijs} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall s = 1, \dots, S; \quad (15)$$

$$w_{is} \geq 0; \quad (16)$$

$$z_{ijs} \in \{1, 0\}. \quad (17)$$

A função objetivo (12) visa maximizar o lucro na colheita da cana-de-açúcar. A restrição (13) diz que as máquinas operam no subperíodo inicial zero ($s = 0$).

Já as restrições (14) dizem respeito a área total disponível para colheita da cana-de-açúcar. As restrições (15) garantem um fluxo entre as mudanças que a frente de colheita fará de uma fazenda para outra, semelhantemente como as restrições (10) e (11) do modelo (II). Por fim, a variável w_{is} é contínua, como posto em (16). Agora a variável z_{ijs} se torna binária, como escrito em (17).

4 Resultados Computacionais

Neste capítulo serão apresentados os resultados computacionais obtidos para avaliar o desempenho dos três modelos propostos. Será comparado o tempo computacional de cada modelo na resolução de um conjunto de instâncias condizentes com o problema da colheita da cana-de-açúcar. Esse conjunto nos permite testar o desempenho dos modelos matemáticos **(I)**, **(II)** e **(III)** para que possamos fazer uma conclusão prática dos seus resultados computacionais obtidos.

Os modelos foram implementados em Python e resolvidos usando o pacote de otimização Gurobi 10.0.1, pela máquina LAPTOP-EKT7L7EA de processador Intel(R) Celeron(R) N4000 CPU @ 1.10GHz 1.10 GHz, com RAM de 4GB. Inicialmente, serão usadas instâncias fictícias de um exemplo pequeno, depois instâncias para um exemplo real e, por fim, instâncias geradas aleatoriamente, com base nos dados reais.

4.1 Exemplo Ilustrativo

Consideremos os seguintes dados:

- Trabalharemos com um total de três períodos ($T = 3$);
- Cada período será dividido em 2 subperíodos totalizando $S = 6$ subperíodos ($s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

As instâncias usadas neste exemplo possuem $N = 24$ fazendas a serem colhidas. Na Tabela 4.1 são apresentados alguns dados sobre a quantidade (em toneladas) de cana-de-açúcar plantada por fazenda. Podemos observar a quantidade de cana-de-açúcar maturada por fazenda nos períodos $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$ (P_{it}). Ainda na Tabela 4.1, podemos observar o volume de sacarose presente na cana maturada, ou seja, a quantidade de açúcar por fazenda presente na cana-de-açúcar também nos 3 períodos (Pol_{it}). A maturação da cana-de-açúcar aumenta a cada período que se passa. Isso ocorre pelo fato de que a planta cresce ao longo do tempo quando bem irrigada. No entanto, o contrário acontece com a sacarose contida nela. Como podemos observar na Tabela 4.1, temos o aumento da sacarose no período $t = 2$. Porém, no período $t = 3$, temos que os níveis de açúcar presente na cana-de-açúcar começam a cair. Isso ocorre pelo fato de que o nível de açúcar presente na cana é representado por uma curva, isto é, a partir de um tempo os níveis de sacarose tendem a cair, como estudado anteriormente no Capítulo 2. Logo, há de se pensar que a colheita deva ocorrer nos talhões no período $t = 2$, já que é nele que o nível de sacarose está mais elevado. É claro que o objetivo da colheita é lucrar o máximo possível, contudo, temos que pensar nas demandas da usina, pois é ela que fará o processamento da cana-de-açúcar colhida. Dependendo do horário de trabalho diário, compensa lucrar colhendo os talhões com um pouco menos de sacarose, desde que as demandas sejam supridas e que a receita seja sustentável para a empresa.

	Toneladas de cana (P_{it})			Nível de açúcar na cana (Pol_{it})		
Fazenda	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	62,5	100	112,5	4,5	4,75	4,5
2	89,3	105	126	4,6	4,7	4,6
3	100,5	107,5	129,45	4,65	4,7	4,5
4	117,5	121,5	132,6	4,7	4,8	4,55
5	117,65	118	139,1	4,75	4,85	4,45
6	118	120	146,1	4,9	5	4,6
7	62,5	100	112,5	4,5	4,75	4,35
8	89,3	105	126	4,6	4,65	4,25
9	100,5	107,5	129,4	4,65	4,85	4,35
10	117,5	121,5	132,6	4,7	4,9	4,5
11	117,65	118	139,1	4,75	4,9	4,35
12	118	120	146,1	4,9	4,95	4
13	62,5	100	112,5	4,5	4,75	4,5
14	89,3	105	126	4,6	4,7	4,6
15	100,5	107,5	129,45	4,65	4,7	4,5
16	117,5	121,5	132,6	4,7	4,8	4,55
17	117,65	118	139,1	4,75	4,85	4,45
18	118	120	146,1	4,9	5	4,6
19	62,5	100	112,5	4,5	4,75	4,35
20	89,3	105	126	4,6	4,65	4,25
21	100,5	107,5	129,45	4,65	4,85	4,3
22	117,5	121,5	132,6	4,7	4,9	4,5
23	117,65	118	139,1	4,75	4,9	4,35
24	118	120	146,1	4,9	4,95	4

Tabela 1: Trata-se do P_{it} e Pol_{it} , respectivamente, para $t = 1, 2, 3$.

Dos 24 campos e 3 períodos não há diferença no preço do deslocamento da cana colhida até a usina (Ca_i), e nem no transporte da usina para o próximo campo que será colhido (Cm_i). Em ambos os casos, o preço desse deslocamento é de R\$ 24,00 por tonelada de cana-de-açúcar transportada. Porém, o mesmo não acontece no deslocamento das colheitadeiras que estão na fazenda i e vão para a fazenda j (Cf_{ij}). Isso se dá pelo fato de que cada origem i tem distâncias diferentes do destino j (vide Tabela 4.1). Já o tempo de transporte dos maquinários que estão na fazenda i e vão se deslocar para a fazenda j (Td_{ij}) também é diferente, dado que as fazendas têm distâncias diferentes entre elas (vide Figura 4.2). Além disso, cada fazenda tem 20 hectares de cana-de-açúcar plantada para serem colhidos (L_i). Por fim, foi considerado que nos períodos $t = 1, 2, 3$ o preço da sacarose (V_t) se manteve o mesmo no valor de R\$ 2.143,00 por tonelada, o tempo da jornada de trabalho (Cap) é de 360 horas e volume mínimo (D_{min_T}) e máximo (D_{max_T}) de cana-de-açúcar que deve ser colhida é igual a 10 e 30 toneladas, respectivamente. Já o Tc foi considerado igual à 1 (uma hora para se colher um hectare).

O modelo GLSP foi resolvido e obtivemos como resposta um lucro de R\$ 916.057,00. Esse valor se dá pelo lucro proveniente da venda da sacarose presente no montante de cana-de-açúcar colhida nos talhões 1, 6, 7, 13, 18 e 19, sendo colhidas um total de 120 toneladas de cana-de-açúcar nos subperíodos 1 ao 6.

Todavia, além de buscarmos lucro, é importante também sabermos o quão eficaz é o rendimento dos modelos matemáticos que estamos empregando para otimizar o nosso problema. Seguindo esse raciocínio, segue alguns resultados computacionais sobre o desempenho do modelo (**GLSP**) na Tabela 4.2.

Tabela 2: Desempenho do modelo (**I**)

Resultado da relaxação linear	777.037,00
Gap_{RL}	1,79%
Resultado Ótimo Encontrado	916.057,00
Gap_{SO}	0,00%

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	110	165	218	111	230	191	121	187	177	182	138	158	147	183	244	180	215	179	203	112	178	113	143
2	110	0	185	196	236	203	155	220	169	175	212	195	242	177	212	136	209	147	127	125	142	209	151	152
3	165	185	0	157	209	131	125	231	162	160	226	174	192	152	146	148	156	123	167	244	192	202	164	164
4	218	196	157	0	152	179	130	243	160	119	236	141	168	138	238	140	214	218	219	152	124	219	166	211
5	111	236	209	152	0	202	146	181	173	240	241	134	205	250	190	153	181	232	249	144	188	161	156	142
6	230	203	131	179	202	0	211	139	114	237	250	209	195	156	190	112	230	148	207	185	162	121	242	192
7	191	155	125	130	146	211	0	226	221	239	114	182	118	241	223	229	137	155	144	179	188	195	111	210
8	121	220	231	243	181	139	226	0	192	164	225	122	116	127	169	156	181	151	213	208	209	242	126	227
9	187	169	162	160	173	114	221	192	0	145	147	203	198	163	147	170	237	183	153	115	249	113	212	122
10	177	175	160	119	240	237	239	164	145	0	198	117	131	128	148	228	125	245	183	136	209	119	226	167
11	182	212	226	236	241	250	114	225	147	198	0	128	121	167	221	210	201	157	221	193	247	175	201	222
12	138	195	174	141	134	209	182	122	203	117	128	0	193	131	124	205	114	173	190	224	240	224	144	118
13	158	242	192	168	205	195	118	116	198	131	121	193	0	181	209	223	167	118	163	241	190	125	212	206
14	147	177	152	138	250	156	241	127	163	128	167	131	181	0	131	224	237	185	116	153	215	240	121	215
15	183	212	146	238	190	190	223	169	147	148	221	124	209	131	0	193	128	224	177	114	193	228	192	148
16	244	136	148	140	153	112	229	156	170	228	210	205	223	224	193	0	204	229	121	141	242	244	143	214
17	180	209	156	214	181	230	137	181	237	125	201	114	167	237	128	204	0	115	198	175	236	245	140	183
18	215	147	123	218	232	148	155	151	183	245	157	173	118	185	224	229	115	0	166	141	219	167	154	142
19	179	127	167	219	249	207	144	213	153	183	221	190	163	116	177	121	198	166	0	177	187	172	113	169
20	203	125	244	152	144	185	179	208	115	136	193	224	241	153	114	141	175	141	177	0	214	197	222	245
21	112	142	192	124	188	162	188	209	249	209	247	240	190	215	193	242	236	219	187	214	0	166	124	204
22	178	209	202	219	161	121	195	242	113	119	175	224	125	240	228	244	245	167	172	197	166	0	217	126
23	113	151	164	166	156	242	111	126	212	226	201	144	212	121	192	143	140	154	113	222	124	217	0	125
24	143	152	164	211	142	192	210	227	122	167	222	118	206	215	148	214	183	142	169	245	204	126	125	0

Figura 5: Preço do Transporte da Fazenda i Para a Fazenda j (Cf_{ij}).
Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	3	4	2	4	1	3	2	2	2	5	4	2	4	2	2	3	2	3	3	3	5	4	2
2	3	0	1	1	1	4	4	3	4	2	1	5	4	1	4	2	3	1	3	3	5	4	2	1
3	4	1	0	5	1	1	3	2	1	4	5	3	1	5	3	5	2	2	5	3	2	1	2	4
4	2	1	5	0	5	5	1	5	1	4	1	1	1	5	1	4	4	5	4	2	2	5	5	3
5	4	1	1	5	0	5	3	2	4	1	4	1	1	2	5	1	2	2	2	1	3	2	1	4
6	1	4	1	5	5	0	1	2	2	5	5	1	3	3	1	1	1	3	4	2	5	1	3	3
7	3	4	3	1	3	1	0	2	5	3	4	4	2	3	1	1	3	1	3	2	2	4	3	4
8	2	3	2	5	2	2	0	0	2	2	5	3	1	2	1	2	1	1	2	3	5	5	4	5
9	2	4	1	1	4	2	5	2	0	4	5	3	3	5	5	1	2	2	1	5	2	4	4	2
10	2	2	4	4	1	5	3	2	4	0	1	2	5	3	5	5	2	3	2	3	2	4	2	4
11	5	1	5	1	4	5	4	5	5	1	0	2	2	4	4	5	4	3	4	2	4	2	3	3
12	4	5	3	1	1	1	4	3	3	2	2	0	1	3	1	2	3	2	3	5	5	1	5	3
13	2	4	1	1	1	3	2	1	3	5	2	1	0	5	1	3	4	5	3	5	5	1	1	1
14	4	1	5	5	2	3	3	2	5	3	4	3	5	0	5	5	1	3	5	4	4	4	1	1
15	2	4	3	1	5	1	1	1	5	5	4	1	1	5	0	3	1	2	1	3	4	4	2	4
16	2	2	5	4	1	1	1	2	1	5	5	2	3	5	3	0	1	5	2	1	3	1	2	1
17	3	3	2	4	2	1	3	1	2	2	4	3	4	1	1	1	0	4	1	4	4	3	4	5
18	2	1	2	5	2	3	1	1	2	3	3	2	5	2	5	4	0	4	4	5	2	5	2	2
19	3	3	5	4	2	4	1	2	1	2	4	3	3	5	1	2	1	4	0	2	5	4	3	4
20	3	3	3	2	1	2	3	3	5	3	2	5	5	4	3	1	4	5	2	0	3	3	2	1
21	3	5	2	2	3	5	2	5	2	2	4	3	5	4	4	3	4	2	5	3	0	3	4	3
22	5	4	1	5	2	1	4	5	4	4	2	5	1	4	4	1	3	5	4	3	0	5	5	1
23	4	2	2	5	1	3	3	4	4	2	3	5	1	1	2	2	4	2	3	2	4	5	0	2
24	2	1	4	3	4	3	4	5	2	4	3	3	1	1	4	1	5	2	4	1	3	1	2	0

Figura 6: Tempo de Transporte da Fazenda i para a Fazenda j (Td_{ij}).
Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

Foram feitas um total 372 iterações para a obtenção da solução ótima, sendo gasto 0,01 segundos por iteração. Ademais, o Gap_{RL} é o GAP da relaxação linear, enquanto que o Gap_{SO} é o Gap fornecido pelo GUROBI ao final do processo de resolução. O Gap_{RL} é dado pela fórmula $Gap_{RL} = \frac{LS - LI}{LI}$, onde LS é o limitante superior e LI é o limitante inferior obtido pela relação linear.

Tabela 3: Detalhes sobre a resolução usando o modelo (I)

Linhas Removidas	723
Colunas Removidas	720
Total de Linhas Resolvidas	3.493
Total de Colunas Resolvidas	3.624
Nós Diferentes de Zero	14.136

Como podemos ver na Tabela 4.3, do total de linhas e colunas da matriz trabalhada pelo algoritmo, foram removidas 723 linhas e 720 colunas, além de que foram pesquisados um total de 14.736 nós diferentes de zero. Do total de variáveis, 3.456 são contínuas e 168 são binárias.

Modelo Reformulado (II):

Esse modelo é substancialmente mais forte [44], já que o modelo reformulado deriva do fato de que, na ausência de quaisquer outras restrições, os pontos extremos da relaxação linear são soluções inteiras. Logo, o intuito da implementação do modelo matemático reformulado (II) é analisarmos a sua eficácia comparado ao modelo (I). A qualidade da relaxação linear do modelo II é comprovada nos resultados apresentados na Tabela 4.4, que também mostra que ambos os modelos encontraram a solução ótima.

Como mostra a Tabela 4.5, foram colhidas 120 toneladas de cana-de-açúcar nos 6 subperíodos. No entanto, o método executou um total de 349 iterações. Desse total de iterações, foram removidas 51 linhas e 48 colunas da matriz gerada pelo problema, onde houveram 144 variáveis contínuas e 3.600 binárias e, a partir disso, resultou-se em um Gap igual a 0,00%, sendo este proveniente do lucro de R\$ 916.057,00, que é a nossa solução ótima. Além disso, podemos observar que, comparado ao modelo anterior (I), houve o trabalho de 23 iteração a menos. No entanto, foram trabalhadas menos linhas e colunas da matriz do problema, com o

intuito de ter uma solução mais otimizada das instâncias fornecidas.

Por fim, a seguir, vamos analisar como o modelo **(III)** se sai com a mesma instância fornecida na implementação dos modelos **(I)** e **(II)**, com o intuito de compara-lo com esses modelos matemáticos.

Tabela 4: Desempenho do modelo **(II)**

Resultado da relaxação linear	862.750,00
Gap_{RL}	6,23%
Resultado ótimo Encontrado	916.057,00
Gap_{SO}	0,00%

Tabela 5: Detalhes sobre a resolução usando o modelo **(II)**

Linhas Removidas	51
Colunas Removidas	48
Total de Linhas Resolvidas	468
Total de Colunas Resolvidas	3.744
Nós Diferentes de Zero	11.352

Como podemos ver na Tabela 4.5, do total de linhas e colunas da matriz trabalhada pelo algoritmo, foram removidas 51 linhas e 48 colunas, além de que foram pesquisados um total de 11.352 nós diferentes de zero. Perceba que houve uma diferença de 672 linhas e colunas removidas comparando com o modelo **(I)**. Isso se dá pois o modelo **(II)** foi mais preciso na resolução do problema.

Modelo Reformulado (III):

No modelo (III) ocorre uma simplificação notável em que as variáveis x_{is} são completamente eliminadas. Isso se dá com o intuito de que o modelo deva rodar instâncias complexas no menor tempo possível para a obtenção dos dados. Além disso, a abordagem de (III) impõe rigorosamente a condição de integrabilidade sobre as variáveis z_{ijs} , um procedimento que é essencial para as alterações feitas nesse modelo. Dito isso, segue os resultados da colheita obtidos por esse modelo (Tabela 4.6).

Tabela 6: Desempenho do modelo (III)

Resultado da relaxação linear	916.032,00
Gap_{RL}	0,03%
Resultado ótimo Encontrado	916.057,00
Gap_{SO}	0,00%

Tabela 7: Detalhes sobre a resolução usando o modelo (III)

Linhas Removidas	65
Colunas Removidas	860
Total de Linhas Resolvidas	305
Total de Colunas Resolvidas	3.340
Nós Diferentes de Zero	12.620

De acordo com a Tabela 4.6, os resultados obtidos demonstraram consistência com os modelos anteriores, o (I) e (II). No decorrer dos subperíodos 1 ao 6, foram colhidas 20 toneladas de cana-de-açúcar em cada um desses subperíodos, totalizando 120 toneladas colhidas. Esse desempenho resultou em um lucro significativa de R\$ 916.057,00. O processo de otimização envolveu um total de 1.407 iterações, durante as quais 65 linhas e 860 colunas foram removidas da matriz do problema. A matriz compreendia 144 variáveis contínuas e 3.196 variáveis binárias.

Ao comparar com o modelo anterior (II), observou-se uma redução notável no número de iterações necessárias. Foi possível processar menos linhas e colunas

da matriz do problema, indicando uma resolução mais eficiente das instâncias fornecidas.

Nesse contexto, o modelo de otimização matemática **(III)** demonstrou ser eficaz em seu emprego, simplificando o problema e otimizando a resolução dos dados para sua aplicação prática. Esses resultados sugerem não apenas uma solução satisfatória, mas também uma melhoria quantitativa em relação aos modelos anteriores, destacando a eficiência do **(III)** no contexto dessa otimização.

Portanto, podemos concluir que os três modelos matemáticos reformulados foram eficazes para resolver esse problema pequeno com instâncias teóricas. A seguir, vamos refazer os testes e análises para um problema com instâncias reais em sete talhões.

4.2 Dados reais aplicados para a colheita da cana-de-açúcar

Como dito anteriormente, será testada uma instância real nos três modelos matemáticos. Para isso, iremos considerar um total 12 meses, sendo cada período um total de 15 dias, ou seja, $t = 1, \dots, 24$ (1 ano) com um total de $S = 72$ subperíodos, onde cada subperíodo é um total de 5 dias. Além disso, a capacidade mínima e máxima de moagem da usina é de 6.500 e 8.300 (D_{min_t} e D_{max_t}) toneladas de cana-de-açúcar, respectivamente. Já o período de trabalho da usina é de 24 horas diárias, ou seja, $Cap = 360$, que é exatamente a quantidade de horas no final do período t (15×24). O preço da tonelada de sacarose nesse período foi de R\$1.417,16 (V_t) fixo. Já os níveis de sacarose presente na variedade da cana usada (Pol_{it}) estão descritos nas Tabelas A.1 à A.3. A quantidade em toneladas de cana-de-açúcar plantada nos talhões (P_{it}), nos períodos $t = 1, 2, \dots, 24$, são dados pelas Tabelas A.4 a A.6, no **Apêndice**. Além disso, a quantidade de cana-de-açúcar maturada em cada fazenda num período de 1 ano e a quantidade de açúcar presente nelas, foi dada por uma função construída em Python, seguindo os dados presentes na dissertação [30]. Nesse trabalho, é possível calcular o volume de maturação da cana-de-açúcar num total de 21 talhões, num período de 1 ano, que é o nosso caso. Ademais, ainda em [30] é possível calcular o nível de sacarose nesse período de 12 meses (Tabelas A.1 à A.6). Além disso, os custos relacionados ao transporte dos maquinários (Cf_{ij}), e tempo gasto de transporte (Td_{ij}), estão representados pelas Figuras 4.4 e 4.5, respectivamente. Já o Tc é igual à 2,5, ou seja, a frente de colheita demorou em média 2,5 horas para colher cada fazenda. Já o Ca_i foi considerado igual à R\$30,00 por tonelada de cana-de-açúcar transportada da fazenda até a usina (média do mercado), enquanto que o Cm_i foi considerado igual à R\$20,00 por km percorrido da usina até a fazenda (média do mercado). Por fim, a área em hectares na fazenda é de 4.200 ($L_i = 4.200$).

Ao implementar a instância desse exemplo real, obtemos, a partir do modelo reformulado **(I)**, que ao longo de 360 horas ($Cap = 360$), trabalhando num período

de 1 ano, foram colhidos um total de 6.335,29 toneladas de cana-de-açúcar nos talhões 1, 3, 4, 7 e 18, que totalizou um lucro de R\$ 533.991,50. Além disso, no modelo **(I)**, foram feitas um total de 219.282 iterações em 42 minutos e 27 segundos.

Tabela 8: Desempenho do modelo reformulado **(I)**

Resultado da relaxação linear	523.391,59
Gap_{RL}	2,02%
Solução ótima Encontrado	533.991,50
Gap_{SO}	0,00%
Tempo de processamento	42 min e 27 seg

0	14.90	4.87	5.19	8.30	11.06	9.71	126.17	120.80	12822	30038	305.77	304.02	305.11	310.58	315.44	318.15	11.06	142.85	298.89	295.97
14.90	0	17.44	12.50	18.12	189.0	9.77	135.39	130.43	138.95	316.06	322.92	320.75	322.35	327.33	332.50	335.30	16.80	153.67	316.90	313.42
4.87	17.44	0	5.62	4.32	7.61	10.67	138.70	133.36	142.06	349.84	357.26	355.34	356.87	363.22	368.24	370.91	14.40	158.33	342.81	339.76
5.19	12.50	5.62	0	6.76	8.90	5.59	144.22	138.75	138.68	359.03	366.77	365.46	366.89	373.50	378.86	381.42	5.49	149.15	323.64	321.82
8.30	18.12	4.32	6.76	0	3.03	9.12	124.59	119.47	127.43	325.98	333.68	331.99	333.17	339.95	345.05	347.40	20.54	144.66	328.43	319.46
11.06	18.90	7.61	8.90	3.03	0	10.47	135.90	130.38	139.17	335.46	346.67	344.84	346.07	353.47	358.68	361.58	23.41	141.81	326.68	325.68
9.71	9.77	10.67	5.59	9.12	10.47	0	142.33	136.52	146.05	358.90	366.86	362.77	365.20	373.32	378.88	382.53	16.58	142.07	310.38	310.38
126.17	135.39	138.70	144.22	124.59	135.90	142.33	0	1.79	2.57	473.08	484.57	485.23	486.27	496.03	504.97	509.22	141.38	353.47	345.79	345.79
120.80	130.43	133.36	138.75	119.47	130.38	136.52	1.79	0	2.31	468.94	479.33	479.88	481.09	490.95	500.66	505.86	144.85	345.80	345.80	345.80
128.22	138.95	142.06	138.68	127.43	139.17	146.05	2.57	2.31	0	470.94	481.07	480.63	481.76	492.44	501.81	507.47	144.85	345.80	345.80	345.80
300.38	316.06	349.84	359.03	325.98	335.46	358.90	473.08	468.94	470.94	0	8.57	9.86	8.97	12.90	15.98	17.75	299.56	505.51	61.63	67.41
305.77	322.92	357.26	366.77	333.68	346.67	366.86	484.57	479.33	481.07	8.57	0	12.48	2.41	17.30	20.25	22.00	304.79	510.63	54.52	60.13
304.02	320.75	355.34	365.46	331.99	344.84	362.77	485.23	479.88	480.63	9.86	12.48	0	10.90	3.61	6.56	8.32	302.05	507.55	60.27	65.80
305.11	322.35	356.87	366.89	333.17	346.07	365.20	486.27	481.09	481.76	8.97	2.41	10.90	0	13.78	16.89	18.64	302.97	509.02	55.52	61.11
310.58	327.33	363.22	373.50	339.95	353.47	373.32	496.03	490.95	492.44	12.90	17.30	3.61	13.78	9.58	13.11	15.98	306.90	514.31	58.82	64.44
315.44	332.50	368.24	378.86	345.05	358.68	378.88	504.97	500.66	501.81	15.98	20.25	6.56	16.89	9.58	0	4.15	309.73	518.77	62.22	67.93
318.15	335.30	370.91	381.42	347.40	361.58	382.53	509.22	505.86	507.47	17.75	22.00	8.32	18.64	13.11	4.15	0	312.88	522.10	65.00	70.76
11.06	16.80	14.40	5.49	20.54	23.41	16.58	141.38	144.85	152.67	299.56	304.79	302.05	302.97	306.90	309.73	312.88	0	171.47	297.47	295.86
142.85	153.67	158.33	149.15	144.66	141.81	142.07	353.47	26.39	31.76	505.51	510.63	507.55	509.02	514.31	518.77	522.10	171.47	0	72.26	42.58
298.89	316.90	342.81	323.64	321.82	328.43	313.60	345.80	457.12	455.00	61.63	54.52	60.27	55.52	58.82	62.22	65.00	297.47	72.26	0	3.40
295.97	313.42	339.76	321.51	319.46	325.68	310.38	345.79	451.43	448.78	67.41	60.13	65.80	61.11	64.44	67.93	70.76	295.86	42.58	3.40	0

Figura 7: Trata-se do preço de deslocamento dos maquinários Cf_{ij} .
Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

0	0.08	0.03	0.03	0.05	0.06	0.05	0.70	0.67	0.71	1.68	1.72	1.71	1.71	1.75	1.78	1.79	0.06	0.80	1.68	1.66
0.08	0	0.10	0.07	0.10	0.10	0.05	0.74	0.71	0.76	1.74	1.77	1.76	1.77	1.80	1.83	1.85	0.09	0.84	1.74	1.73
0.03	0.10	0	0.03	0.02	0.04	0.05	0.67	0.64	0.69	1.69	1.73	1.72	1.73	1.76	1.79	1.80	0.09	0.77	1.68	1.67
0.03	0.07	0.03	0	0.03	0.04	0.03	0.69	0.66	0.66	1.71	1.74	1.74	1.74	1.78	1.81	1.82	0.08	0.79	1.70	1.69
0.05	0.10	0.02	0.03	0	0.02	0.05	0.66	0.63	0.67	1.71	1.74	1.74	1.74	1.78	1.81	1.82	0.11	0.76	1.70	1.68
0.06	0.10	0.04	0.04	0.02	0	0.05	0.65	0.62	0.66	1.71	1.76	1.75	1.76	1.79	1.82	1.84	0.12	0.75	1.71	1.70
0.05	0.05	0.05	0.03	0.05	0.05	0	0.69	0.66	0.71	1.73	1.77	1.76	1.77	1.80	1.83	1.85	0.10	0.79	1.73	1.72
0.70	0.74	0.67	0.69	0.66	0.65	0.69	0	0.03	0.04	2.03	2.06	2.06	2.07	2.10	2.12	2.14	0.76	1.91	1.88	1.88
0.67	0.71	0.64	0.66	0.63	0.62	0.66	0.03	0	0.06	2.02	2.05	2.05	2.06	2.09	2.11	2.13	0.73	1.93	1.90	1.88
0.71	0.76	0.69	0.66	0.67	0.66	0.71	0.04	0.06	0	2.01	2.04	2.04	2.04	2.08	2.10	2.12	0.77	0.12	1.88	1.85
1.68	1.74	1.69	1.71	1.71	1.71	1.73	2.03	2.02	2.01	0	0.04	0.04	0.04	0.07	0.10	0.11	1.64	2.12	0.34	0.37
1.72	1.77	1.73	1.74	1.74	1.76	1.77	2.06	2.05	2.04	0.04	0	0.04	0.02	0.04	0.06	0.08	1.68	2.15	0.34	0.38
1.71	1.76	1.72	1.74	1.74	1.75	1.76	2.06	2.05	2.04	0.04	0.04	0	0.02	0.04	0.07	0.09	1.67	2.16	0.38	0.41
1.71	1.77	1.73	1.74	1.74	1.76	1.77	2.07	2.06	2.04	0.04	0.02	0.02	0	0.03	0.06	0.08	1.68	2.16	0.36	0.40
1.75	1.80	1.76	1.78	1.78	1.79	1.80	2.10	2.09	2.08	0.07	0.04	0.04	0.03	0	0.03	0.05	1.71	2.23	0.38	0.41
1.78	1.83	1.79	1.81	1.82	1.82	1.83	2.12	2.11	2.10	0.10	0.06	0.07	0.06	0.03	0	0.02	1.76	2.23	0.38	0.42
1.79	1.85	1.80	1.82	1.82	1.84	1.85	2.14	2.13	2.12	0.11	0.08	0.09	0.08	0.05	0.02	0	1.76	2.23	0.38	0.42
0.06	0.09	0.09	0.08	0.11	0.12	0.10	0.76	0.73	0.77	1.64	1.68	1.67	1.68	1.71	1.75	1.76	0	0.86	1.65	1.64
0.80	0.84	0.77	0.79	0.76	0.75	0.79	1.91	0.13	0.12	2.12	2.15	2.16	2.16	2.19	2.23	2.23	0.86	0	0.03	1.97
1.68	1.74	1.68	1.70	1.70	1.71	1.73	1.88	1.90	1.88	0.34	0.34	0.38	0.36	0.38	0.38	0.38	1.65	0.03	0	0.03
1.66	1.73	1.67	1.69	1.68	1.70	1.72	1.88	1.88	1.85	0.37	0.38	0.41	0.40	0.41	0.42	0.42	1.64	1.97	0.03	0

Figura 8: Trata-se do tempo de deslocamento dos maquinários Td_{ij} em horas.
Fonte: Teodoro, Osvaldo (2024).

Como podemos observar nas Tabelas 4.8 e 4.9, com o método Branch-And-Bound utilizado pelo *Solver*, obtemos um Gap de 0% no lucro R\$ 533.991,50. Ou seja, essa receita obtida é a solução ótima encontrada pelo algoritmo. Além disso, a colheita da cana-de-açúcar foi da seguinte forma: a colheita começou na fazenda 18, sendo que até o quinto dia ($w_{18,1}$) foram colhidas 187,29 toneladas de cana-de-açúcar. Depois a frente de colheita foi para a fazenda 7 e por lá foram colhidos um total de 1.450 toneladas até o dia 155. Posterior a isso, os maquinários partiram para a fazenda 1 e até o dia 185 foram colhidas 389,53 toneladas ($w_{1,37}$). Posteriormente, até o dia 215, na fazenda 4 ($w_{4,43}$), foram colhidas um total de 1.450 toneladas de cana-de-açúcar. Ademais, os maquinários deslocaram-se novamente para a fazenda 1 e até o dia 295 ($w_{1,59}$), foram colhidas 1.053,66 toneladas de cana. Além disso, agora na fazenda 3, até o dia 320 ($w_{3,64}$), foram colhidas um total de 542,11 toneladas de cana. Até o dia 355 foram colhidas 1.262,70 toneladas na fazenda 18.

Tabela 9: Detalhes sobre a resolução usando o modelo (I)

Linhas Removidas	1.953
Colunas Removidas	1.953
Nós Diferentes de Zero	131.565

Como mostra a Tabela 4.9, o problema em questão foi resolvido pelo programa usando o método Branch-And-bound com fim de remover linhas e colunas irrelevantes. Já os nós diferentes de zero foram resolvidos pelo *Solver* com o fim de melhorar a eficiência computacional. Ainda na Tabela 4.9, do total de linhas e colunas da matriz trabalhada pelo algoritmo, foram removidas 1.953 linhas e 1.953 colunas, além de que foram pesquisados um total de 131.565 nós diferentes de zero.

Modelo Reformulado (II):

Em relação ao lucro obtido pelo modelo (I), nada mudou ao implementar as instâncias no modelo reformulado (II). Ou seja, continuamos com o mesmo lucro e quantidade de cana-de-açúcar colhida nos mesmos subperíodos. No entanto, temos menos iterações na resolução do problema em questão.

Tabela 10: Desempenho do modelo reformulado (II)

Resultado da relaxação linear	533.682,91
Gap_{RL}	0,05%
Resultado ótimo Encontrado	533.991,50
Gap_{SO}	0.00%
Tempo de processamento	3 min e 26 seg

Tabela 11: Detalhes sobre a resolução usando o modelo (II)

Linhas Removidas	42
Colunas Removidas	21
Total de Linhas Resolvidas	4.701
Total de Colunas Resolvidas	34.797
Nós Diferentes de Zero	107.352

Como pode-se observar na Tabela 4.11, foram removidas apenas 42 linhas e 21 colunas, além de que foram pesquisados um total de 107.352 nós diferentes de zero. Além disso, também podemos observar nas Tabelas 4.10 e 4.11, ao aplicarmos as instâncias no modelo reformulado (II), foram removidas menos colunas e linhas da matriz gerada pelo problema. Além disso, o modelo reformulado (II) levou 3 minutos e 26 segundos para resolver esse problema, fazendo um total de 2.931 iterações, ou seja, um diferença de 216.351 iterações ao compararmos com o modelo reformulado base (I). Além de que o programa optou usar o método Branch-And-Bound como de praxe para resolver o problema em questão.

Modelo Reformulado (III):

Por fim, falta comparar os modelos utilizados acima com o modelo reformulado (III). O modelo (III) tem que nos fornecer a mesma resposta, porém com um tempo computacional mais rápido.

Tabela 12: Desempenho do modelo reformulado **(III)**

Resultado do relaxamento linear	533.969,80
Gap_{RL}	0,00%
Resultado ótimo Encontrado	533.991,50
Gap_{SO}	0,00%
Tempo de processamento	1 min e 13 seg

Tabela 13: Detalhes sobre a resolução usando o modelo **(III)**

Linhas Removidas	45
Colunas Removidas	465
Total de Linhas Resolvidas	3.115
Total de Colunas Resolvidas	33.261
Nós Diferentes de Zero	132.567

Como pode-se observar na Tabela 4.13, foram removidas apenas 45 linhas e 465 colunas, além de que foram pesquisados um total de 132.567 nós diferentes de zero. Ou seja, foram resolvidas uma quantidade significativa de linhas e colunas usando o método Branch-And-Bound pelo programa. No entanto, os modelos reformulados **(I)** e **(II)** gastaram um total 42 min e 3 min, respectivamente, enquanto que o modelo reformulado **(III)** gastou um total de 1 minuto e 13 segundos para resolver os resultados dos modelos em questão. Portanto, o modelo matemático reformulado **(III)** trabalhou mais que os demais em menos tempo (resolveu mais iterações em menos tempo). Ademais, percebamos que os modelos **(II)** e **(III)** trabalharam de forma quase iguais, já que a partir do modelo matemático **(II)**, já tínhamos encontrado um Gap_{RL} bem próximo do Gap_{SO} . No entanto, mais um vez o modelo **(III)** obteve a melhor solução relaxada, sendo que o seu Gap_{RL} ficou em 0,00%.

Enfim, é notório que num exemplo real, os modelos matemáticos reformulados foram bem empregados. Apesar de obtermos o mesmo resultado do lucro, podemos ver que o diferencial de cada modelo é o tempo computacional gasto para resolver a implementação de cada instância usada.

Agora, para validar a eficácia dos modelos matemáticos reformulados apresentados, iremos submete-los à instâncias maiores, para analisarmos minuciosamente o comportamento desses modelos.

4.3 Dados de grande magnitude gerados por intervalos aleatórios

Nesta subseção, os modelos matemáticos serão testados com instâncias aleatórias de grande magnitude. Para isso, foram considerados vários valores para N , já que o intuito é medir o desempenho dos modelos matemáticos para problema com várias fazendas a serem colhidas. Foi assumido para N os seguintes valores: 50, 80 e 100. Além disso, serão considerados $T = 18$ e 24, sendo que para cada período será considerado um total de 15 dias de trabalho da frente de colheita. Além disso, cada subperíodo será considerado um total de 5 dias, onde para $T = 18$, teremos $S = 54$ subperíodos ($s = 1, \dots, 54$). Já para $T = 24$, teremos um total de $S = 72$ subperíodos ($s = 1, \dots, 72$).

Ademais, para a capacidade mínima e máxima de moagem da usina, foram considerados $D_{min_t} = \{6.500, 8.500\}$ e $D_{max_t} = \{8.300, 10.500\}$ (quantidade mínima é máxima de cana-de-açúcar em toneladas). O valor gerado é fixado para todos os períodos $t = 1, \dots, T$.

Serão considerados $Tc = 0, 5$ e $Tc = 1$ e $Cap = 270$ e $Cap = 360$, ou seja, para $T = 18$ teremos $Cap = 270$ e para $T = 24$ teremos $Cap = 360$. Além disso, a quantidade de sacarose em cada fazenda (Pol_{it}) será representado por uma matriz que foi gerada a partir de uma função que estima a quantidade de açúcar em cada talhão. A quantidade de cana-de-açúcar maturada em cada fazenda (P_{it}), também será representada por uma matriz criada a partir de uma função. Esses números serão mantidos para todas as instâncias e tais funções foram incentivadas pelos trabalhos [27], [33] e [46].

O preço da sacarose (V_t) será igual para todas as instâncias (R\$2.143,00). Já os tempos de transporte das colheitadeiras (Td_{ij}) que saem do talhão i e vão para j , são dados descritos por uma matriz quadrada simétrica, já que a distância da fazenda 1 para a fazenda 2 é a mesma de 2 para 1, por exemplo. Analogamente para os valores gastos desses transportes (Cf_{ij}). Os dados dependerão da quantidade de talhões escolhidos pelo programa. Por exemplo, se $N = 50$, teremos uma matriz de ordem 50. Se $N = 100$, então a matriz será 100×100 e assim por diante. Além disso, esses dados serão disponibilizados no [Matrizes.TXT](#), no *GitHub*.

A área disponível para a colheita (L_i), será a mesma do exemplo ilustrativo, apenas seguirá o tamanho da quantidade de fazendas escolhidas ($N = 50, 80$ ou 100). O preço do transporte da tonelada da cana-de-açúcar colhida em cada fazenda até a usina (Ca_i) será mantido em R\$ 24,00 por tonelada de cana transportada, independente da quantidade de fazendas escolhidas pelo programa. Já o transporte da usina até a fazenda (Cm_i) será mantido em R\$ 24,00/km percorrido sem carga de cana-de-açúcar.

Observe que teremos $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ combinações. Isso pois temos as seguintes combinações: $N = 50, 80, 100$ (3 possibilidades), $(D_{min_t}, D_{max_t}) = (6.500, 8.300)$

e $(D_{min_t}, D_{max_t}) = (8.500, 10.500)$ (2 possibilidades), $Cap = 270$ e 360 (2 possibilidades), $Tc = 0, 5$ e 1 (2 possibilidades) e $t = 18, 24$ (2 possibilidades). Como temos um total de 8 instâncias aleatórias para cada combinação, então teremos $48 \times 8 = 384$ instâncias geradas no nosso problema de colheita da cana-de-açúcar. Portanto, o intuito será analisar o desempenho de cada modelo dada essa quantidade de instâncias.

Modelos Reformulados (I), (II), (III):

Vamos analisar as seguintes tabelas abaixo cujo valores são a média de todos os dados obtidos para cada instância rodada pelo programa.

Como podemos ver na Tabela 4.14, os valores ótimos para $N = 50, 80$ e 100 mudam uma vez que estamos rodando instâncias aleatórias. Ou seja, para cada instância, o programa irá nos devolver valores diferentes para RL (Relaxação Linear), SO (Solução Ótima), GAP_{RL} (Gap da Relaxação Linear), GAP_{SO} (Gap da Solução Ótima) e tempo computacional para a obtenção dos resultados. Dito isto, ainda na Tabela 4.14 podemos observar que quanto mais campos tivermos para trabalhar, o modelo **I** demandará mais tempo computacional do que os demais. Além disso, tirando como base os $Gap's$ da solução ótima em comparação com os $Gap's$ da relaxação linear, mais uma vez o modelo **III** se mostrou eficiente. Enquanto para $N = 100$ temos um GAP_{RL} de 68,21% para o modelo **I**, para o modelo **III** temos um GAP_{RL} de apenas 8,58%. Uma grande diferença para a aproximação da solução ótima. Isso se dá pois a relaxação linear encontrada pelo modelo **III** é melhor do que a encontrada pelo modelo **I**. Já modelo **II** acaba sendo melhor do que o modelo **I**, já que este resultou num Gap menor, porém maior que o encontrado pelo **III**, como esperado.

É importante fazermos uma análise com vários dados justamente para deixarmos a safra mais lucrativa. Por exemplo, dado as soluções ótimas, podemos perceber que a usina teria lucrado mais com a safra em apenas 50 fazendas, como pode-se observar ainda na Tabela 4.14. Isso se dá justamente porque com quanto mais fazendas a frente de colheita tiver para trabalhar, mais gastos existiriam e, portanto, menos lucro a usina teria no final. É claro que muitos fatores influenciariam nisso, como por exemplo, o preço do açúcar cotado no ano. Ademais, a empresa poderia usar uma estratégia no final do período de maturação da cana-de-açúcar para colher 80 ou 100 fazendas, caso ela estivesse pensando num planejamento estratégico de longo prazo, já que o preço do açúcar ou do etanol no mercado também é um fator crítico. Se os preços estiverem altos, pode valer a pena colher mais fazendas, mesmo que a lucratividade por fazenda seja menor, pois o volume total de produção pode vir a compensar. Além de que riscos como pragas ou doenças podem influenciar a decisão também, já que diversificar a colheita em mais

fazendas pode reduzir o risco de perda total em caso de adversidades climáticas ou outros problemas.

A Tabela 4.15 representa a média dos valores obtidos por cada modelo matemático com $Cap = 270$ e $Cap = 360$. Como pode-se observar, o modelo **III** mais uma vez foi o mais eficiente para resolver as instâncias para valores diferentes da jornada de trabalho (em horas) por período. Isso se dá porque a relaxação linear mais próxima do resultado ótimo encontrado se dá pelo modelo **III**. Por exemplo, ao compararmos o GAP_{RL} do modelo **II** com o GAP_{RL} do modelo **III**, vemos uma diferença de 22,80% com o $Cap = 360$. Além disso, o modelo **I** mais uma vez foi o que teve maior tempo computacional para compilar todos os dados para a obtenção das soluções ótimas para $Cap = 270$ e $Cap = 360$.

Sobre a lucratividade da empresa, podemos perceber que quanto maior o tempo de trabalho executado pela usina por período, maior é o lucro. Isso podemos observar ainda na Tabela 4.15 para os modelos **I**, **II** e **III** para $Cap = 360$. Portanto, caso a empresa trabalhasse num período maior de tempo ($T = 24$), seria mais eficiente do que a frente de colheita trabalhasse num período menor ($T = 18$), já que teríamos mais horas de trabalho executado pela frente de colheita.

Colher um talhão de cana-de-açúcar em menos tempo ao longo de mais dias, pode ser mais vantajoso, como mostra a Tabela 4.16. Nela podemos perceber que a solução ótima (lucro) de cada modelo, é melhor ao trabalharmos com um $Tc = 0,5$ do que com o $Tc = 1$. Isso pois, espalhar a colheita ao longo de mais dias pode facilitar a logística e evitar sobrecarga nos sistemas de transporte. Isso ajuda a manter um processo mais eficiente na safra. Logo, unindo as Tabelas 4.15 e 4.16, o mais vantajoso seria colher um campo em menos tempo e continuar com o trabalho em mais dias, de acordo com essas instâncias.

Sobre o volume de cana-de-açúcar que a usina deveria processar, podemos tirar como base a Tabela 4.17. Nela podemos perceber que, se caso a usina processasse mais cana, maior seria o lucro no final do período T . Ainda na tabela 4.17, podemos ver que se usarmos um intervalo maior, obteríamos um lucro maior com a produção de sacarose. Isso se dá pois ao processar mais quantidade de cana-de-açúcar, a usina reduz os custos fixos com salários e infraestrutura, por exemplo. Logo, a margem de lucro seria melhor, caso a produção de moagem fosse maior. Além disso, como a cana-de-açúcar gera outros subprodutos como etanol e energia (vide Figura 2.1), processando mais cana ampliaria o lucro da usina uma vez que a produção desses subprodutos também iria aumentar.

Na Tabela 4.18, podemos observar mais uma vez que ao considerarmos um período maior de tempo de trabalho, teríamos um lucro mais maximizada. Isso se dá pois o Cap está intrínseco à T , ou seja, quanto maior o T , maior poderia ser o tempo de trabalho, em horas, (Cap) da frente de colheita nesse período, para que pudesse ser evitado gastos desnecessários. No entanto, ao prolongar a colheita

aumentaria a exposição da cana-de-açúcar à mudanças climáticas que poderiam afetar a qualidade da cana, além de que a equipe de logística pode ficar impactada levando a um rendimento menor na colheita da cana. Logo, é essencial que a frente de colheita analise cada detalhe das tabelas acima para que a usina possa ter mais lucro no final da safra.

	N=50			N=80			N=100		
Modelos	I	II	III	I	II	III	I	II	III
RL	12.254,08	17.152,69	48.021,53	7.027,63	13.803,55	45.232,87	6.992,93	11.974,58	50.482,96
SO	497.393,08	497.393,08	497.393,08	497.321,05	497.321,05	497.321,05	484.028,72	484.028,72	484.028,72
GAP_{RL}	39,58%	27,99%	9,35%	68,05%	35,02%	9,99%	68,21%	39,42%	8,58%
GAP_{SO}	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tempo	667 min	362 min	47 min	1.500 min	680 min	101 min	3.071 min	805 min	213 min

Tabela 14: Trata-se de como cada modelo matemático resolveu os valores diferentes de N .

	$Cap = 270$			$Cap = 360$		
Modelos	I	II	III	I	II	III
RL	8.216,41	13.752,75	49.351,75	11.025,18	14.902,03	46.984,96
SO	407.759,77	407.759,77	407.759,77	497.607,41	497.607,41	497.607,41
GAP_{RL}	48,62%	28,64%	7,26%	44,13%	32,39%	9,59%
GAP_{SO}	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tempo	966 min	631 min	107 min	2.569 min	614 min	132 min

Tabela 15: Trata-se de como cada modelo matemático resolveu os valores diferentes de Cap .

	$T_c = 0,5$			$T_c = 1$		
Modelos	I	II	III	I	II	III
RL	9.242,15	14.257,03	46.177,02	8.415,92	13.987,44	49.752,89
SO	497.393,02	497.393,02	497.393,02	488.541,10	488.541,10	488.541,10
GAP_{RL}	50,81%	33,88%	9,77%	57,04%	33,92%	8,81%
GAP_{SO}	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tempo	1.899 min	615 min	115 min	1.621 min	628 min	125 min

Tabela 16: Trata-se de como cada modelo matemático resolveu os valores diferentes de T_c .

	$(D_{min_t}, D_{max_t}) = (6.500, 8.300)$			$(D_{min_t}, D_{max_t}) = (8.500, 10.500)$		
Modelos	I	II	III	I	II	III
RL	8.985,09	14.215,48	47.514,20	8.112,42	14.034,14	48.307,73
SO	403.255,17	403.255,17	403.255,17	497.607,41	497.607,41	497.607,41
GAP_{RL}	54,38%	34,00%	9,47%	60,33%	34,45%	9,30%
GAP_{SO}	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tempo	1.744 min	602 min	120 min	2.022 min	589 min	110 min

Tabela 17: Trata-se de como cada modelo matemático resolveu os valores diferentes num intervalo de moagem (D_{min_t}, D_{max_t}) .

	$T = 18$			$T = 24$		
Modelos	I	II	III	I	II	III
RL	8.201,54	13.748,51	44.947,94	9.556,02	14.847,98	51.023,41
SO	493.049,32	493.049,32	493.049,32	493.305,24	493.305,24	493.305,24
GAP_{RL}	59,11%	34,86%	9,96%	50,62%	32,22%	8,66%
GAP_{SO}	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tempo	1.587 min	571 min	106 min	1.928 min	667 min	135 min

Tabela 18: Trata-se de como cada modelo matemático resolveu os períodos T diferentes.

Assim sendo, ainda que os dados apresentem variações a cada compilação do programa, o modelo **(III)** demonstrou novamente a maior eficácia, considerando que esse modelo usa uma demanda menor no tempo computacional para a obtenção dos resultados desejados. Ou seja, em menos tempo o modelo fez mais iterações para resolver o problema.

5 Conclusão

Neste trabalho, foi proposta uma abordagem para determinar qual o melhor modelo matemático que visa maximizar os lucros na colheita da cana-de-açúcar de uma usina. Foram considerados três testes: exemplo ilustrativo, exemplo real e um exemplo de grande magnitude (várias instâncias). Tanto para o exemplo real e o fictício, os três modelos matemáticos em questão (**I**, **II** e **III**) se saíram bem na maximização do lucro (R\$). No entanto, o modelo matemático (**III**) se mostrou mais eficiente no quesito tempo computacional em relação aos outros dois modelos nos testes de grande magnitude. Já o modelo **II**, por ser uma variação aperfeiçoada do modelo **I**, se mostrou mais eficiente, perdendo apenas para o modelo **III**. Em relação ao exemplo real, os algoritmos foram testados usando *shapes* reais de uma usina no Estado do Paraná.

O fato de ter utilizado dados reais e fictícios em várias instâncias, comprova que os modelos matemáticos são eficientes em cenários distintos que podem ser comparados na prática em problemas reais em diversas usinas, o que pode incentivar demais pesquisadores a realizar estudos semelhantes em diversas regiões e condições no Brasil.

Para concluir, espera-se que os resultados desta dissertação possam contribuir para o avanço na criação de modelos matemáticos, ou aperfeiçoamento destes, nos problemas que as grandes usinas vêm passando na colheita da cana-de-açúcar.

Para trabalhos futuros, pode-se pensar no desenvolvimento de modelos que, agregados a esses presentes nesta dissertação, incorpore decisões de transporte da cana até a usina utilizando caminhões.

Referências

- [1] AHUMADA, OMAR e VILLALOBOS, J RENE. “Application of planning models in the agri-food supply chain: A review”. Em: *European journal of Operational research* 196.1 (2009), pp. 1–20.
- [2] ARONI, RAFAEL. “A queima da palha da cana e os riscos da modernização ecológica: tentativas de regulação no estado de São Paulo, período de 1980 a 2011”. Em: *Cadernos Ceru* 24.1 (2013), pp. 65–89.
- [3] BAZARAA MOKHTAR S E JARVIS, JOHN J E SHERALI HANIF D. *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons, 2011.
- [4] BEZUIDENHOUT CN E BAIER, TJA. “An evaluation of the literature on integrated sugarcane production systems: a scientometrical approach”. Em: *Outlook on Agriculture* 40.1 (2011), pp. 79–88.
- [5] BORODIN VALERIA E BOURTEMBOURG, JEAN E HNAIEN FAICEL E LABADIE NACIMA. “Handling uncertainty in agricultural supply chain management: A state of the art”. Em: *European Journal of Operational Research* 254.2 (2016), pp. 348–359.
- [6] CAIXETA-FILHO JOSÉ VICENTE E MIYASHITA, ANDRÉ EIDI. “Continuous periods for harvesting schedules: a numerical application for the Brazilian sugarcane industry”. Em: *Pesquisa Operacional* 38 (2018), pp. 535–554.
- [7] CLARK, ALISTAIR R e CLARK, SIMON J. “Rolling-horizon lot-sizing when set-up times are sequence-dependent”. Em: *International Journal of Production Research* 38.10 (2000), pp. 2287–2307.
- [8] COLIN, EMERSON C. “Mathematical programming accelerates implementation of agro-industrial sugarcane complex”. Em: *European Journal of Operational Research* 199.1 (2009), pp. 232–235.
- [9] DE OLIVEIRA FLORENTINO, HELENICE e PATO, MARGARIDA VAZ. “A bi-objective genetic approach for the selection of sugarcane varieties to comply with environmental and economic requirements”. Em: *Journal of the Operational Research Society* 65.6 (2014), pp. 842–854.
- [10] DE OLIVEIRA FLORENTINO, HELENICE e SARTORI, MARIA MÁRCIA PEREIRA. “Game theory in sugarcane crop residue and available energy optimization”. Em: *Biomass and Bioenergy* 25.1 (2003), pp. 29–34.
- [11] DE OLIVEIRA FLORENTINO, HELENICE et al. “Multiobjective 0-1 integer programming for the use of sugarcane residual biomass in energy co-generation”. Em: *International Transactions in Operational Research* 18.5 (2011), pp. 605–615.

- [12] DIAS, SAMARA FERREIRA, SAVINIEC, LANDIR e CONSTANTINO, ADEMIR APARECIDO. “Algoritmos para Traçar Rotas de Máquinas Autônomas em Operações Agrícolas com Demanda Determinística.” Em: *Universidade Estadual de Maringá Dissertação de Mestrado* (2023), pp. 1–99.
- [13] EL-SHERBENY, NASSER A. “Vehicle routing with time windows: An overview of exact, heuristic and metaheuristic methods”. Em: *Journal of King Saud University-Science* 22.3 (2010), pp. 123–131.
- [14] FLEISCHMANN, BERNHARD e MEYR, H. “Planning hierarchy, modeling and advanced planning”. Em: *Supply Chain Management Series Handbooks in Operations Research and Management Science North-Holland, Amsterdam* (2002).
- [15] FLEISCHMANN, BERNHARD e MEYR, HERBERT. “The general lotsizing and scheduling problem”. Em: *Operations-Research-Spektrum* 19 (1997), pp. 11–21.
- [16] FLEISCHMANN, BERNHARD, MEYR, HERBERT e WAGNER, MICHAEL. “Advanced planning”. Em: *Supply Chain Management and Advanced Planning: Concepts, Models, Software and Case Studies* (2000), pp. 57–71.
- [17] FLORENTINO, HELENICE DE O et al. “An optimization model for combined selecting, planting and harvesting sugarcane varieties”. Em: *Annals of Operations Research* (2020), pp. 1–19.
- [18] FLORENTINO, HELENICE DE OLIVEIRA, MORENO, EDMUNDO VERGARA e SARTORI, MARIA MÁRCIA PEREIRA. “Multiobjective optimization of economic balances of sugarcane harvest biomass”. Em: *Scientia Agricola* 65 (2008), pp. 561–564.
- [19] FLORENTINO, HELENICE DE OLIVEIRA et al. “A multiple objective methodology for sugarcane harvest management with varying maturation periods”. Em: *Annals of Operations Research* 267 (2018), pp. 153–177.
- [20] GRUNOW, MARTIN, GÜNTHER, H-O e WESTINNER, R. “Supply optimization for the production of raw sugar”. Em: *International Journal of Production Economics* 110.1-2 (2007), pp. 224–239.
- [21] GUIMARÃES, LUIS, KLABJAN, DIEGO e ALMADA-LOBO, BERNARDO. “Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups”. Em: *European Journal of Operational Research* 239.3 (2014), pp. 644–662.
- [22] HIGGINS, ANDREW. “Scheduling of road vehicles in sugarcane transport: A case study at an Australian sugar mill”. Em: *European journal of operational research* 170.3 (2006), pp. 987–1000.

- [23] HIGGINS, ANDREW et al. “A framework for integrating a complex harvesting and transport system for sugar production”. Em: *Agricultural Systems* 82.2 (2004), pp. 99–115.
- [24] JORGE, ALFREDO et al. “Maximum power delivery at lower cost.” Em: *Universidade de São Paulo Workshop de soluções matemáticas para problemas industriais* (2015), pp. 1–15.
- [25] JUNQUEIRA, ROGERIO DE ÁVILA RIBEIRO e MORABITO, REINALDO. “Modeling and solving a sugarcane harvest front scheduling problem”. Em: *International Journal of Production Economics* 213 (2019), pp. 150–160.
- [26] JUNQUEIRA, ROGÉRIO DE ÁVILA RIBEIRO. “Programação das frentes de colheita de cana-de-açúcar: uma modelagem visando o equilíbrio das capacidades de colheita e transporte.” Em: *Universidade Federal de São Carlos Tese de Doutorado* (2014), pp. 1–257.
- [27] KEATING, B.A et al. “Modelling sugarcane production systems I. Development and performance of the sugarcane module”. Em: *Field Crops Research* 61.3 (1999), pp. 253–271. ISSN: 0378-4290. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4290\(98\)00167-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4290(98)00167-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378429098001671>.
- [28] KITTLERTPAISAN, KALLAYA e PATHUMNAKUL, SUPACHAI. “Sugarcane harvester planning based on the vehicle routing problem with time window (VRPTW) approach”. Em: *Toward Sustainable Operations of Supply Chain and Logistics Systems* (2015), pp. 335–344.
- [29] KITTLERTPAISAN, KALLAYA e PATHUMNAKUL, SUPACHAI. “Integrating a multiple crop year routing design for sugarcane harvesters to plant a new crop”. Em: *Computers and Electronics in Agriculture* 136 (2017), pp. 58–70.
- [30] LEITE, GLAUBER HENRIQUE PEREIRA. “Maturação induzida, alterações fisiológicas, produtividade e qualidade tecnológica da cana-de-açúcar (*Saccharum officinarum* L.).” Em: *Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências Agrônomicas*. xii,141 f. Dissertação (mestrado) (2005), pp. 1–156.
- [31] MACHADO, R.L. e ABREU, M.R. “Multi-objective optimization of the first and second-generation ethanol supply chain in Brazil using the water-energy-food-land nexus approach”. Em: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 193 (2024), p. 114299. ISSN: 1364-0321. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2024.114299>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032124000224>.

- [32] MARTINI, ALINE Fachin et al. “Is soil quality a concern in sugarcane cultivation? A bibliometric review”. Em: *Soil and Tillage Research* 204 (2020), p. 104751.
- [33] MEHDI, FAISAL et al. “Current perspectives on the regulatory mechanisms of sucrose accumulation in sugarcane”. Em: *Heliyon* 10.5 (2024), e27277. ISSN: 2405-8440. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e27277>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844024033085>.
- [34] NACIMENTO, MAYRA ALVES DO. “Eficiência produtiva e econômica de variedades de cana-de-açúcar submetidas a diferentes épocas de adubação foliar.” Em: *Universidade Federal da Paraíba Tese de Doutorado* (2023), pp. 1–53.
- [35] O’HARA, IAN e MUNDREE, SAGADEVAN. *Sugarcane-based biofuels and bioproducts*. John Wiley & Sons, 2016.
- [36] ORTIZ, PEDRO FS et al. “Physical qualities of an Ultisol under sugarcane and Atlantic forest in Brazil”. Em: *Geoderma regional* 11 (2017), pp. 62–70.
- [37] PHUONG, HOA NGUYEN et al. “Solving the clustered traveling salesman problem with d-relaxed priority rule”. Em: *arXiv preprint arXiv:1810.03981* (2018).
- [38] Pornprakun, Wisanlaya et al. “An Application of Optimal Control to Sugarcane Harvesting in Thailand”. Em: *Computation* 9.3 (2021), p. 36.
- [39] SALASSI, ME, BREAUX, JB e NAQUIN, CJ. “Modeling within-season sugarcane growth for optimal harvest system selection”. Em: *Agricultural Systems* 73.3 (2002), pp. 261–278.
- [40] SUNGNUL, S et al. “Optimal time of sugarcane harvesting for sugar factories in Thailand”. Em: *ICMA-MU 2016 Book on the Conference Proceedings: International Conference in Mathematics and Applications*. 2016, pp. 185–194.
- [41] TEIXEIRA, EDUARDO DOS SANTOS et al. “A review of mathematical optimization models applied to the sugarcane supply chain”. Em: *International Transactions in Operational Research* 30.4 (2023), pp. 1755–1788.
- [42] TOLENTINO, GILMAR, FLORENTINO, HELENICE DE OLIVEIRA e SARTORI, MARIA MÁRCIA PEREIRA. “Modelagem matemática para o aproveitamento da biomassa residual de colheita da cana-de-açúcar com menor custo”. Em: *Bragantia* 66 (2007), pp. 729–735.
- [43] VASANTHA, S et al. “Physiology of sucrose productivity and implications of ripeners in sugarcane”. Em: *Sugar Tech* (2021), pp. 1–17.

- [44] WOLSEY, LAURENCE A. “MIP modelling of changeovers in production planning and scheduling problems”. Em: *European Journal of Operational Research* 99.1 (1997), pp. 154–165.
- [45] ZHANG, ZHANYING et al. “Biofuels from food processing wastes”. Em: *Current opinion in biotechnology* 38 (2016), pp. 97–105.
- [46] ZHAO, YU et al. “Dynamics modeling for sugar cane sucrose estimation using time series satellite imagery”. Em: *ResearchGate* 10 (2016), 99980J.
- [47] ZIROUR, MOURAD. “Vehicle routing problem: models and solutions”. Em: *Journal of Quality Measurement and Analysis JQMA* 4.1 (2008), pp. 205–218.

Apêndice A

As tabelas que representam a quantidade de açúcar presente na cana e a quantidade de cana maturada em cada talhão, da subseção 0.4.2, estão presentes neste apêndice.

Talhão	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$
1	15,83	30,88	45,15	58,64	71,36	83,3	94,45	104,83
2	8,69	16,95	24,79	32,2	39,18	45,73	51,86	57,56
3	12,31	24,01	35,1	45,59	55,48	64,76	73,43	81,5
4	5,59	10,9	15,94	20,7	25,19	29,4	33,34	37
5	10,79	21,04	30,76	39,96	48,62	56,76	64,36	71,43
6	7,81	15,23	22,27	28,92	35,19	41,08	46,58	51,7
7	24,52	47,83	69,94	90,84	110,54	129,03	146,31	162,39
8	15,98	31,18	45,59	59,22	72,06	84,11	95,38	105,86
9	6,94	13,53	19,79	25,7	31,27	36,5	41,39	45,94
10	7,43	14,5	21,2	27,54	33,51	39,12	44,36	49,23
11	12,09	23,58	34,48	44,79	54,5	63,62	72,14	80,06
12	6,25	12,2	17,84	23,17	28,19	32,91	37,32	41,42
13	8,43	16,44	24,04	31,22	37,99	44,34	50,28	55,81
14	6,63	12,93	18,9	24,55	29,87	34,87	39,54	43,89
15	8,18	15,95	23,33	30,3	36,87	43,04	48,8	54,16
16	5,04	9,84	14,39	18,69	22,74	26,54	30,1	33,4
17	4,8	9,35	13,68	17,77	21,62	25,23	28,61	31,76
18	6,08	11,87	17,35	22,54	27,42	32,01	36,3	40,29
19	15,94	31,09	45,46	59,05	71,85	83,87	95,1	105,55
20	10,27	20,04	29,3	38,06	46,31	54,06	61,3	68,04
21	6,49	12,65	18,5	24,03	29,24	34,13	38,71	42,96

Tabela 19: Trata-se da quantidade de açúcar presente na cana para $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Talhão	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$	$t = 12$	$t = 13$	$t = 14$	$t = 15$	$t = 16$
1	114,43	123,26	131,3	138,57	145,05	150,76	155,69	159,84
2	62,83	67,67	72,09	76,08	79,64	82,77	85,48	87,76
3	88,97	95,83	102,08	107,73	112,77	117,21	121,04	124,27
4	40,39	43,5	46,34	48,91	51,2	53,21	54,95	56,42
5	77,97	83,98	89,46	94,42	98,84	102,73	106,08	108,91
6	56,43	60,78	64,75	68,33	71,53	74,35	76,78	78,83
7	177,26	190,93	203,39	214,64	224,69	233,53	241,17	247,6
8	115,56	124,47	132,59	139,93	146,48	152,24	157,22	161,41
9	50,15	54,02	57,54	60,72	63,57	66,07	68,23	70,05
10	53,74	57,88	61,66	65,07	68,12	70,8	73,11	75,06
11	87,4	94,13	100,28	105,83	110,78	115,14	118,91	122,08
12	45,21	48,7	51,88	54,75	57,31	59,57	61,51	63,15
13	60,92	65,62	69,9	73,77	77,22	80,26	82,88	85,09
14	47,91	51,6	54,97	58,01	60,72	63,11	65,18	66,92
15	59,12	63,68	67,84	71,59	74,94	77,89	80,44	82,59
16	36,46	39,27	41,84	44,15	46,22	48,04	49,61	50,93
17	34,67	37,34	39,78	41,98	43,94	45,67	47,17	48,42
18	43,98	47,37	50,46	53,25	55,75	57,94	59,83	61,43
19	115,22	124,1	132,2	139,52	146,05	151,8	156,76	160,94
20	74,27	80	85,22	89,93	94,14	97,85	101,05	103,74
21	46,9	50,51	53,81	56,79	59,44	61,78	63,8	65,5

Tabela 20: Trata-se da quantidade de açúcar presente na cana para $t = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$.

Talhão	$t = 17$	$t = 18$	$t = 19$	$t = 20$	$t = 21$	$t = 22$	$t = 23$	$t = 24$
1	163,22	165,81	167,63	168,67	168,93	168,41	167,11	165,03
2	89,61	91,03	92,03	92,6	92,74	92,46	91,75	90,61
3	126,89	128,91	130,32	131,13	131,33	130,93	129,92	128,31
4	57,61	58,52	59,16	59,53	59,62	59,44	58,98	58,25
5	111,21	112,98	114,22	114,93	115,1	114,75	113,86	112,45
6	80,49	81,77	82,66	83,18	83,3	83,05	82,41	81,38
7	252,83	256,85	259,66	261,27	261,67	260,87	258,86	255,64
8	164,82	167,44	169,27	170,32	170,58	170,06	168,75	166,65
9	71,53	72,67	73,46	73,92	74,03	73,8	73,23	72,32
10	76,65	77,87	78,72	79,21	79,33	79,09	78,48	77,5
11	124,65	126,64	128,02	128,82	129,01	128,62	127,63	126,04
12	64,49	65,51	66,23	66,64	66,74	66,54	66,02	65,2
13	86,89	88,27	89,24	89,79	89,93	89,65	88,96	87,86
14	68,33	69,41	70,17	70,61	70,72	70,5	69,96	69,09
15	84,33	85,67	86,61	87,14	87,28	87,01	86,34	85,27
16	52,01	52,83	53,41	53,74	53,82	53,66	53,25	52,58
17	49,45	50,23	50,78	51,1	51,17	51,02	50,62	50
18	62,73	63,72	64,42	64,82	64,92	64,72	64,22	63,42
19	164,34	166,95	168,78	169,82	170,09	169,56	168,26	166,17
20	105,93	107,62	108,79	109,47	109,64	109,3	108,46	107,11
21	66,89	67,95	68,7	69,12	69,23	69,01	68,48	67,63

Tabela 21: Trata-se da quantidade de açúcar presente na cana para $t = 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$.

Talhão	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$
1	64,26	128,52	192,78	257,04	321,3	385,56	449,82	514,08
2	35,28	70,56	105,84	141,12	176,4	211,68	246,96	282,24
3	49,96	99,92	149,88	199,84	249,79	299,75	349,71	399,67
4	22,68	45,36	68,04	90,72	113,4	136,08	158,76	181,44
5	43,78	87,57	131,35	175,14	218,92	262,71	306,5	350,28
6	31,69	63,38	95,07	126,76	158,44	190,13	221,82	253,51
7	99,54	199,08	298,62	398,16	497,7	597,24	696,78	796,32
8	64,89	129,78	194,67	259,56	324,45	389,34	454,23	519,12
9	28,16	56,32	84,48	112,64	140,8	168,97	197,13	225,29
10	30,18	60,35	90,53	120,71	150,88	181,06	211,24	241,42
11	49,08	98,15	147,23	196,31	245,38	294,46	343,54	392,62
12	25,39	50,78	76,17	101,56	126,94	152,33	177,72	203,11
13	34,21	68,42	102,63	136,84	171,04	205,25	239,46	273,67
14	26,9	53,8	80,7	107,6	134,5	161,41	188,31	215,21
15	33,2	66,4	99,6	132,8	166	199,21	232,41	265,61
16	20,47	40,95	61,42	81,9	102,37	122,85	143,32	163,8
17	19,47	38,93	58,4	77,87	97,33	116,8	136,27	155,74
18	24,7	49,39	74,09	98,78	123,48	148,18	172,87	197,57
19	64,7	129,4	194,1	258,8	323,5	388,21	452,91	517,61
20	41,71	83,41	125,12	166,82	208,53	250,24	291,94	333,65
21	26,33	52,67	79	105,34	131,67	158	184,34	210,67

Tabela 22: Trata-se da quantidade (Ton.) de cana-de-açúcar maturada para $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Talhão	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$	$t = 12$	$t = 13$	$t = 14$	$t = 15$	$t = 16$
1	578,34	642,6	706,86	771,12	835,38	899,64	963,9	1028,16
2	317,52	352,8	388,08	423,36	458,64	493,92	529,2	564,48
3	449,63	499,59	549,55	599,51	649,47	699,43	749,38	799,34
4	204,12	226,8	249,48	272,16	294,84	317,52	340,2	362,88
5	394,06	437,85	481,63	525,42	569,2	612,99	656,77	700,56
6	285,2	316,89	348,58	380,27	411,96	443,65	475,33	507,02
7	895,86	995,4	1094,94	1194,48	1294,02	1393,56	1493,1	1592,64
8	584,01	648,9	713,79	778,68	843,57	908,46	973,35	1038,24
9	253,45	281,61	309,77	337,93	366,09	394,25	422,41	450,58
10	271,59	301,77	331,95	362,12	392,3	422,48	452,65	482,83
11	441,69	490,77	539,85	588,92	638	687,08	736,15	785,23
12	228,5	253,89	279,28	304,67	330,06	355,45	380,83	406,22
13	307,88	342,09	376,3	410,51	444,72	478,93	513,13	547,34
14	242,11	269,01	295,91	322,81	349,71	376,61	403,51	430,42
15	298,81	332,01	365,21	398,41	431,61	464,81	498,01	531,22
16	184,27	204,75	225,22	245,7	266,17	286,65	307,12	327,6
17	175,2	194,67	214,14	233,6	253,07	272,54	292	311,47
18	222,26	246,96	271,66	296,35	321,05	345,74	370,44	395,14
19	582,31	647,01	711,71	776,41	841,11	905,81	970,51	1035,22
20	375,35	417,06	458,77	500,47	542,18	583,88	625,59	667,3
21	237,01	263,34	289,67	316,01	342,34	368,68	395,01	421,34

Tabela 23: Trata-se da quantidade (Ton.) de cana-de-açúcar maturada para $t = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$.

Talhão	$t = 17$	$t = 18$	$t = 19$	$t = 20$	$t = 21$	$t = 22$	$t = 23$	$t = 24$
1	1092,42	1156,68	1220,94	1285,2	1349,46	1413,72	1477,98	1542,24
2	599,76	635,04	670,32	705,6	740,88	776,16	811,44	846,72
3	849,3	899,26	949,22	999,18	1049,14	1099,1	1149,06	1199,02
4	385,56	408,24	430,92	453,6	476,28	498,96	521,64	544,32
5	744,34	788,13	831,91	875,7	919,48	963,27	1007,05	1050,84
6	538,71	570,4	602,09	633,78	665,47	697,16	728,85	760,54
7	1692,18	1791,72	1891,26	1990,8	2090,34	2189,88	2289,42	2388,96
8	1103,13	1168,02	1232,91	1297,8	1362,69	1427,58	1492,47	1557,36
9	478,74	506,9	535,06	563,22	591,38	619,54	647,7	675,86
10	513,01	543,19	573,36	603,54	633,72	663,89	694,07	724,25
11	834,31	883,39	932,46	981,54	1030,62	1079,69	1128,77	1177,85
12	431,61	457	482,39	507,78	533,17	558,56	583,95	609,34
13	581,55	615,76	649,97	684,18	718,39	752,6	786,81	821,02
14	457,32	484,22	511,12	538,02	564,92	591,82	618,72	645,62
15	564,42	597,62	630,82	664,02	697,22	730,42	763,62	796,82
16	348,07	368,55	389,02	409,5	429,97	450,45	470,92	491,4
17	330,94	350,41	369,87	389,34	408,81	428,27	447,74	467,21
18	419,83	444,53	469,22	493,92	518,62	543,31	568,01	592,7
19	1099,92	1164,62	1229,32	1294,02	1358,72	1423,42	1488,12	1552,82
20	709	750,71	792,41	834,12	875,83	917,53	959,24	1000,94
21	447,68	474,01	500,35	526,68	553,01	579,35	605,68	632,02

Tabela 24: Trata-se da quantidade (Ton.) de cana-de-açúcar maturada para $t = 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$.