RESSALVA

Atendendo solicitação do
autor, o texto completo desta tese
será disponibilizado somente a partir
de 26/04/2019.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

JOSÉ RENATO CAMPOS

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR E INTERVALAR FUZZY

Ilha Solteira
2018

JOSÉ RENATO CAMPOS

PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO INTERVALAR E INTERVALAR FUZZY

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção
Orientador

Ilha Solteira
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C198p

Campos, José Renato.
Problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy / José Renato Campos. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
105 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. Área de conhecimento: Automação, 2018

Orientador: Edvaldo Assunção
Inclui bibliografia

1. Problemas de controle ótimo intervalar. 2. Problemas de controle ótimo intervalar fuzzy. 3. Aritmética intervalar. 4. Programação dinâmica. 5. Incerteza generalizada. 6. Conjuntos fuzzy.

Sandra Maria Clemente de Souza
DSTBD/STRAUD
Supervisão de Seção
CRB 8-4740

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Problemas de Controle Ótimo Intervalar e Intervalar Fuzzy

AUTOR: JOSÉ RENATO CAMPOS
ORIENTADOR: EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. GERALDO NUNES SILVA
Departamento de Matemática Aplicada / Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Divisão de Engenharia Eletrônica / Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Prof. Dr. PAULO AUGUSTO VALENTE FERREIRA
Departamento de Sistemas e Energia / Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Ilha Solteira, 26 de outubro de 2018

A todos que acreditaram e estiveram comigo durante este trabalho.

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar eu agradeço à Deus por tudo. Agradeço também à Nossa Senhora Aparecida que sempre esteve ao meu lado.

Essa tese de doutorado foi um grande desafio. Desde a graduação almejava a obtenção do título e por uma série de razões desisti de cursar o doutorado tempos atrás. Para minha felicidade, o retorno ao doutorado e todos os muitos e longos anos de estudo para a conclusão foram todos bem aproveitados pois tive a oportunidade de conhecer e conviver com pessoas fantásticas. Era impressionante que todas elas sempre estavam dispostas a apoiar e ajudar. Elas estavam na USP de São Carlos, na FATEC de Jales, no IF de Birigui, na UNESP de São José do Rio Preto e de Ilha Solteira, e também no IF de Votuporanga. Agradeço particularmente à Ulcilea A. S. Leal e ao Gino G. M. Huamán pois sem eles essa tese não teria acontecido.

Essa tese também não seria possível sem a grande ajuda dos professores que sempre me acompanharam e auxiliaram. Todos eles sempre muito dispostos a ajudar e a contribuir nos momentos mais difícies. Agradeço ao professor Edvaldo Assunção por toda confiança, paciência e contribuição. Ao professor Geraldo N. Silva que sempre apoiou, ajudou e acreditou no meu trabalho desde a iniciação científica até o doutorado. Agradeço também ao professor Weldon A. Lodwick por estar sempre disposto a ajudar, e pela participação significativa em minha formação no doutorado. Ao professor Marcelo C. M. Teixeira agradeço pelas excelentes dicas e contribuições durante o desenvolvimento de todo o trabalho. Agradeço ao professor Valeriano A. Oliveira pelos questionamentos realizados nos muitos seminários apresentados na UNESP de São José do Rio Preto.

Agradeço especialmente à minha família, a minha esposa Lidiane e ao meu filho Lucas por todos os momentos maravilhosos e incentivo, a minha mãe Denir e ao meu irmão José Ricardo que sempre me apoiram e deram suporte desde à graduação. Agradeço também a minha avó Antonia por toda a preocupação dela com os meus estudos. À minha sogra Olivia e ao meu sogro Natalino por também terem contribuído para a realização desse trabalho.

Termino agradecendo ao IFSP, à UNESP e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

“A incerteza que nos cerca.”

José Renato Campos

“Acreditar é ter fé naquilo que ninguém prova, é dispensar certeza que geralmente comprova.”

Bráulio Bessa

RESUMO

Neste trabalho estudamos problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy. Em particular, propomos problemas de controle ótimo via teoria de incerteza generalizada e teoria dos conjuntos fuzzy. Dentre os vários tipos de incerteza generalizada utilizamos apenas a intervalar. Embora as abordagens do processo de solução dos problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy sejam similares, as premissas iniciais para o uso e identificação de aplicação delas em problemas práticos são distintas assim como é distinto o processo de tomada de decisão. Assim, propomos inicialmente o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto. A primeira proposta de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é construída usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples juntamente com a técnica de programação dinâmica. As respostas do problema de controle ótimo intervalar contêm as possibilidades de soluções viáveis, e para implementar uma solução viável para o usuário final usamos a solução que minimiza o arrependimento máximo nos exemplos numéricos. A segunda proposta de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é realizada com a aritmética intervalar restrita uma vez que essa aritmética intervalar é mais geral do que a aritmética intervalar restrita de níveis simples pois não considera os intervalos envolvidos nas operações variando de forma dependente. Exemplos numéricos também foram construídos e ilustram o método de solução. Por fim estudamos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto via aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Desta forma inicialmente definimos funções intervalares fuzzy para permitir lidar com a dinâmica de uma equação de diferença intervalar fuzzy. Além disso, a programação dinâmica intervalar fuzzy é desenvolvida para obter a solução intervalar fuzzy ótima. Alguns exemplos numéricos ilustram a teoria e fornecem ao usuário uma solução prática por meio do método de defuzzificação chamado centro de gravidade.

Palavras-chave: Problemas de controle ótimo intervalar. Problemas de controle ótimo intervalar fuzzy. Aritmética intervalar. Programação dinâmica. Incerteza generalizada. Conjuntos fuzzy.

ABSTRACT

In this work we study the interval optimal control problem and fuzzy interval optimal control problem. In particular, we propose optimal control problems via theory of generalized uncertainty and fuzzy set theory. Among the various types of generalized uncertainty we use only the interval uncertainty. Although the approaches to solve the interval optimal control problem and fuzzy interval optimal control problem are similar, the input data for problems with generalized uncertainty and flexibility are distinct as is distinct the decision-making process. Thus, we initially propose the discrete-time interval optimal control problem. The first solution method to solve the discrete-time interval optimal control problem is constructed using single-level constrained interval arithmetic coupled with a dynamic programming technique. The optimal interval solution contains the real-valued optimal solutions, and to implement a feasible solution to the user we use the minimax regret criterion in numerical examples. The second solution method to solve the discrete-time interval optimal control problem is done with the constrained interval arithmetic since this interval arithmetic is more general than the single-level constrained interval arithmetic because it does not have its intervals varying of dependent form in interval operations. Numerical examples have also been constructed and illustrate the method of solution. Finally, we study the discrete-time fuzzy interval optimal control problem via single-level constrained fuzzy arithmetic. Thus, fuzzy interval functions are established and allow us to evaluate the dynamic of the fuzzy interval difference equation. Moreover, the fuzzy interval dynamic programming is developed to obtain the optimal fuzzy interval solution. Some numerical examples illustrate the theory and provides the practical solution to the user using a defuzzification process called center of gravity.

Keywords: Interval optimal control problem. Fuzzy interval optimal control problem. Interval arithmetic. Dynamic programming. Generalized uncertainty. Fuzzy Sets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIAÇÕES

AI	Análise Intervalar
CIA	Constraint Interval Arithmetic
EPCOID	Exemplo de Problema de Controle Ótimo Intervalar em Tempo Discreto
EPCOID1	Exemplo de Problema de Controle Ótimo Intervalar em Tempo Discreto Associado
LMIs	Linear Matrix Inequalities
PCOID	Problema de Controle Ótimo Intervalar em Tempo Discreto
PCOID1	Problema de Controle Ótimo Intervalar em Tempo Discreto Associado Usando SLCIA
PCOID2	Problema de Controle Ótimo Intervalar em Tempo Discreto Associado Usando CIA
PD	Programação Dinâmica
SIA	Standard Interval Arithmetic
SLCIA	Single Level Constraint Interval Arithmetic

LISTA DE SÍMBOLOS

K_C^n	Espaço de conjuntos não-vazios compactos e convexos do $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{I}(\mathbb{R})$	Conjunto dos intervalos fechados e limitados da reta real
A, B	Elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})$
X, U	Elementos de $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$
$\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$	Operações aritméticas intervalares
$\leq_{SL}$	Relação de ordem conforme a aritmética intervalar restrita de níveis simples
F, G, C	Funções intervalares
D_F	Domínio de uma função intervalar F
CD_F	Contradomínio de uma função intervalar F
C_{ad}	Conjunto dos controles admissíveis em $\mathbb{R}^m$
S_{ad}	Conjunto dos estados admissíveis em $\mathbb{R}^n$
U_{ad}	Conjunto dos controles intervalares admissíveis em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^m$
X_{ad}	Conjunto dos estados intervalares admissíveis em $\mathbb{I}(\mathbb{R})^n$
Λ	Intervalos próprios presentes em um problema intervalar e que foram reescritos de acordo com a aritmética intervalar restrita
$\leq_{CIA}$	Relação de ordem conforme a aritmética intervalar restrita
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Conjunto de todos os números fuzzy
$\leq_F$	Relação de ordem conforme a aritmética intervalar fuzzy restrita de níveis simples
a, b	Elementos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$
x, u	Elementos de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$
f, g, c	Funções intervalares fuzzy
$\tilde{\oplus}, \tilde{\ominus}, \tilde{\otimes}, \tilde{\oslash}$	Operações aritméticas intervalares fuzzy
$U_{ad}^{\mathcal{F}}$	Conjunto dos controles intervalares fuzzy admissíveis em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^m$
$X_{ad}^{\mathcal{F}}$	Conjunto dos estados intervalares fuzzy admissíveis em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^n$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Problemas de otimização tiveram origem no cálculo das variações no final do século XVII com o problema da braquistócrona proposto por John Bernoulli (1667–1748) e a teoria de controle teve início nos anos 30 em estudos de problemas de Engenharia Elétrica e Mecânica (PINCH, 1997; CERDÁ, 2001). Nos anos 50, com os métodos de otimização de Bellman em 1957 (BELLMAN, 1957) e de Pontryagin em 1958 (PONTRYAGIN, 1958; PONTRYAGIN et al., 1962), temos hoje o que é chamado de teoria moderna de controle ou teoria de controle ótimo. As técnicas mais comuns para a solução dos problemas de controle ótimo são a programação dinâmica e o princípio do máximo de Pontryagin, e as aplicações desta teoria são as mais diversas.

Atualmente, para abordar problemas de controle ótimo com incerteza utilizamos a estocasticidade (BERTSEKAS, 1976; KENNEDY, 1986), a incerteza generalizada representada por intervalos (LEAL, 2015; CAMPOS et al., 2017) ou a teoria de conjuntos fuzzy (FILEV; ANGELOV, 1992; DINIZ; BASSANEZI, 2013; NAJARIYAN; FARAHI, 2013). Já o estudo de problemas de controle com incertezas paramétricas (BOYD et al., 1994) e, em particular, problemas de projeto de controladores para planta intervalar (LORDELO, 2004; LORDELO; FERREIRA, 2005; PRADO, 2006) são diferentes do estudo de problemas de controle ótimo propostos nesse trabalho.

Problemas envolvendo estocasticidade supõem conhecidas as funções de distribuição de probabilidade e são exaustivamente estudados na literatura (BELLMAN, 1957; BELLMAN; DREYFUS, 1962; BERTSEKAS, 1976; KENNEDY, 1986; BERTSEKAS, 1995).

Os problemas de controle ótimo intervalar foram propostos recentemente (LEAL, 2015; CAMPOS et al., 2016a; CAMPOS et al., 2017; CAMPOS et al., 2018) e consideram a ausência de informação nos parâmetros. Intervalos podem ser usados para representar essa ausência de informação nos modelos matemáticos. Segundo Phillips (1981) intervalos foram utilizados por Arquimedes para representar aproximações do número π, mas foi somente com o trabalho de Moore (1959) que as aritméticas intervalares ganharam destaque. Inicialmente Moore (1959) estudou intervalos como forma de realizar aproximações computacionais uma vez que os computadores empregam aritméticas chamadas de ponto flutuante. Em seguida diversos avanços ocorreram e aplicações da aritmética intervalar padrão, do inglês *Standard Interval Arithmetic*

(SIA), podem ser encontradas em Moore (1979), Rohn (1989), Hansen (1992) e Jaulin et al. (2001). Por outro lado, mesmo com o grande avanço, a aritmética intervalar padrão proposta por Moore (1959) apresenta alguns problemas quando realizamos operações entre intervalos. Um problema imediato é que a aritmética intervalar padrão não possui inverso aditivo e distributividade. Outro problema da SIA é a sobrestimação (CHALCO-CANO; LODWICK; BEDE, 2014).

Principalmente preocupados em ter uma álgebra de intervalos em que são válidas as propriedades de inverso aditivo, distributividade e ainda outras propriedades, alguns autores criaram novas aritméticas intervalares (MARKOV, 1977; KAUCHER, 1980); no entanto, outros problemas surgiram. A aritmética intervalar de Markov (1977) apresenta problema quando lidamos com intervalos simétricos. Já a aritmética intervalar proposta por Kaucher (1980) lida com intervalos impróprios ou intervalos podem ser interpretados como intervalos com comprimento negativo.

A aritmética intervalar proposta por Lodwick (1999) e Lodwick (2007) reescreve um intervalo como uma função real e assim, propriedades antes indesejadas em outras aritméticas como o inverso aditivo ou a distributividade, passam a ser válidas. Essa aritmética é conhecida como aritmética intervalar restrita, do inglês *Constraint Interval Arithmetic (CIA)*; e a CIA é uma aritmética intervalar próxima ao espaço dos números reais quando comparada com outras aritméticas intervalares existentes. Segundo Lodwick (2012), a CIA possui uma rica estrutura algébrica.

Recentemente, Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014) propuseram uma nova aritmética intervalar denominada aritmética intervalar restrita de níveis simples, do inglês *Single Level Constraint Interval Arithmetic (SLCIA)*. A SLCIA considera sempre o mesmo nível para todos os intervalos envolvidos nas operações, isto é, opera com os intervalos nível a nível. Logo, a SLCIA é uma particularização da CIA; além disso, a SLCIA é utilizada em Costa et al. (2017) e Fard e Ramezanzadeh (2017) e pode ser utilizada também para estudar os problemas práticos apresentados em Assunção et al. (2007) e Buzachero (2010). Portanto, nesse trabalho abordamos inicialmente o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples.

Para resolver o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto usamos a programação dinâmica. A Programação Dinâmica (PD), introduzida por Bellman, determina a solução ótima de um problema de multi-estágios decompondo-o em estágios, sendo que cada estágio corresponde a um subproblema. A vantagem dessa decomposição é que o processo de otimização em cada estágio se torna uma tarefa mais simples em termos de cálculo do que lidar com todos os estágios simultaneamente. Além disso, um modelo de PD é uma equação recursiva que liga os diferentes estágios do problema de maneira que garante que a solução ótima viável de cada estágio também é ótima e viável para o problema inteiro (TAHA, 2008). Segundo Taha

(2008), a natureza combinatória dos cálculos em programação dinâmica também impossibilita o desenvolvimento de um código geral de computador que possa lidar com todos os problemas, e isso talvez justifique a ausência de softwares comerciais. Além disso, o esforço computacional cresce exponencialmente em função do número de iterações e quantidade de variáveis do problema, e então para problemas complexos os cálculos computacionais podem ser excessivos (KENNEDY, 1986).

A solução intervalar ótima fornece a amplitude da incerteza e assim, para viabilizar uma implementação da solução por um usuário, propomos a solução que minimiza o arrependimento máximo (do inglês *minimax regret solution* ou *minimum of maximum regret*). Logo, encontramos o menor do maior arrependimento entre todas as soluções admissíveis ótimas e uma entrada de controle pontual é fornecida para o usuário realizar a tomada de decisão na prática.

Algumas aplicações do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto utilizando a aritmética intervalar restrita de níveis simples podem ser encontradas em Campos et al. (2015), Campos et al. (2016a), Campos et al. (2016b) e Campos et al. (2017). Por outro lado, a aritmética intervalar restrita de níveis simples nem sempre é adequada para a modelagem matemática de diversos problemas reais. Com o objetivo de estender a solução do problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto com uma aritmética intervalar mais geral do que a SLCIA, propomos também um método de solução para o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto utilizando CIA (CAMPOS et al., 2018). Na proposta de solução novamente utilizamos a técnica de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995; TAHA, 2008).

Assim, propomos a solução do problema de controle ótimo intervalar via aritmética intervalar restrita, sendo que essa abordagem via CIA é importante pois não considera o mesmo nível quando realizamos operações intervalares mas, ao mesmo tempo, exige grande esforço computacional.

Problemas de controle ótimo fuzzy supõem conhecidas as funções de pertinência e podem ser encontrados em Filev e Angelov (1992), Li et al. (2000), Zhao e Zhu (2010), Farhadinia (2014) e Najariyan e Farahi (2015). Em Filev e Angelov (1992) o problema de controle ótimo fuzzy considera o funcional e a condição de transversalidade incertos, sendo que a solução é realizada utilizando a programação matemática fuzzy (BELLMAN; ZADEH, 1970; ZIMMERMANN, 1983). Em Li et al. (2000) o problema de controle ótimo fuzzy considera o sistema realimentado e o processo de solução é feito por LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequality*). Já o problema de controle ótimo fuzzy apresentado em Zhao e Zhu (2010) usa o conceito de credibilidade (LIU; LIU, 2002; LIU, 2004) e obtém condições necessárias e suficientes para a existência do controle ótimo. O trabalho apresentado em Farhadinia (2014) obtém condições necessárias de otimalidade para o problema de controle ótimo fuzzy usando o princípio do mínimo de Pontryagin. Najariyan e Farahi (2015) usam a derivada generalizada de Hukuhara e o princípio do máximo de Pontryagin para resolver o problema de controle ótimo fuzzy com condições de contorno fuzzy e regido por uma equação diferencial fuzzy. Problemas de controle fuzzy também são encontrados na literatura. Teixeira, Assunção e Avellar (2003) consideram o modelo fuzzy de Takagi-Sugeno e obtém condições de estabilidade para sistemas não lineares. De modo mais geral, Driankov, Hellendoorn e Reinfrank (1996) e Passino e Yurkovich (1998) também abordam problemas de controle fuzzy.

Nesse trabalho propomos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto cuja solução é realizada com a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Esse estudo é possível pois a aritmética fuzzy restrita de níveis simples é uma aritmética intervalar sobre os seus r-níveis. Segundo Kaufmann e Gupta (1985) e Chalco-Cano, Lodwick e Bede (2014), uma vez que as operações algébricas fuzzy são funções contínuas, o princípio da extensão de Zadeh pode ser aplicado a essas operações para produzir a aritmética intervalar sobre os r-níveis uma vez que os r-níveis de números fuzzy são intervalos. Além disso, a aritmética fuzzy restrita de níveis simples permite calcular funções com todas as variáveis no contexto fuzzy.

A programação dinâmica intervalar fuzzy desenvolvida nesse trabalho torna o processo de otimização mais simples e permite obter a solução intervalar fuzzy ótima para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto.

O problema de controle ótimo intervalar fuzzy é importante pois considera a incerteza em seus parâmetros e variáveis, o que significa que ele é útil para descrever fenômenos naturais com incerteza e imprecisão intrínseca. A solução do problema de controle ótimo intervalar fuzzy também fornece ao usuário uma tomada de decisão realística, sendo que essa é obtida de acordo com a escolha do método de defuzzificação. Assim, o problema de controle ótimo intervalar fuzzy fornece uma alternativa para resolver problemas práticos e complexos do mundo real.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2 inicialmente apresentamos os conceitos preliminares para resolver o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto via SLCIA. Assim apresentamos conceitos da aritmética intervalar restrita de níveis simples, assim como de funções intervalares, de equações a diferenças intervalares e de conjuntos admissíveis. Em seguida o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto é proposto de forma inédita juntamente com o conceito de solução usando SLCIA. O algoritmo de programação dinâmica intervalar também é proposto e a demonstração via SLCIA é construída. Exemplos numéricos ilustram a teoria.

No Capítulo 3 mostramos os conceitos preliminares para resolver o problema de controle ótimo intervalar via CIA. Assim, definimos uma nova relação de ordem entre intervalos. O conceito de funções intervalares para essa aritmética também é exposto. As definições de equações a diferenças intervalares e de conjuntos admissíveis também são expostos para essa aritmética. O algoritmo de programação dinâmica intervalar também é avaliado e a apresentação de alguns exemplos numéricos ilustram o capítulo.

No Capítulo 4 propomos o problema de controle ótimo intervalar fuzzy em tempo discreto. A solução do PCOIFD é feita usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Assim, construímos o conceito de funções intervalares fuzzy que permite realizar operações com todas as variáveis no contexto fuzzy. Além disso, definimos uma relação de ordem entre números fuzzy assim como definimos equações a diferenças intervalares fuzzy e conjuntos admissíveis fuzzy. A programação dinâmica intervalar fuzzy é proposta e finalizamos o capítulo com alguns exemplos numéricos.

No último capítulo apresentamos as conclusões, as perspectivas de trabalhos futuros e as publicações decorrentes desse trabalho.

5 CONCLUSÕES

Problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy foram propostos sendo que o problema de controle ótimo intervalar em tempo discreto foi resolvido usando a aritmética intervalar restrita de níveis simples e a aritmética intervalar restrita. Já o problema de controle ótimo intervalar fuzzy foi resolvido usando a aritmética fuzzy restrita de níveis simples. Para a solução de todos os problemas propostos utilizamos a técnica de programação dinâmica, e todos os resultados necessários foram construídos para as situações apresentadas. Nos exemplos numéricos a aplicação dos resultados por um usuário final foi realizada com o método denominado mínimo arrependimento para o problema de controle ótimo intervalar e utilizamos o processo de defuzzificação chamado centro de gravidade para o problema de controle ótimo intervalar fuzzy. Mesmo considerando a grande dificuldade computacional que os problemas estudados exigem, os resultados apresentados nesse trabalho mostram viabilidade prática. Portanto, mostramos através de teorias, exemplos e aplicações uma nova forma de estudar problemas de controle ótimo com incerteza. Além disso, cabe destacar que embora as técnicas para resolver os problemas de controle ótimo intervalar e intervalar fuzzy sejam relativamente próximas (fazemos uso da Análise Intervalar em ambas), a utilização ou implementação prática do problema de controle ótimo intervalar e do problema de controle ótimo intervalar fuzzy são distintas. No contexto de otimização esses problemas se referem à otimização com incerteza generalizada e à teoria de otimização flexível.

5.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Para trabalhos futuros pretendemos estudar os problemas de controle ótimo com incerteza usando a aritmética fuzzy restrita e também analisar a estabilidade de sistemas intervalares fuzzy e a estabilidade de sistemas de controle intervalares.

5.2 PARTICIPAÇÃO EM TRABALHOS

A seguir apresentamos uma relação dos trabalhos desenvolvidos pelo autor e colaboradores.

5.2.1 Artigos em periódicos

- Discrete-time interval optimal control problem. *International Journal of Control*, 2017, 7 Páginas. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick e M. C. M. Teixeira.

- Biological control of sugarcane caterpillar (Diatraea saccharalis) using interval mathematical models. *International Journal on Mathematical Methods and Models in Biosciences*, 2016, 11 Páginas. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva e W. A. Lodwick.

- A programação dinâmica na solução de problemas de controle ótimo com incerteza intervalar. *Biomatemática*, 2016, 13 Páginas. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva e W. A. Lodwick.

5.2.2 Artigos em congressos

- Constrained interval arithmetic to solve the discrete-time interval optimal control problem. *V Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy.* CBSF, Fortaleza - CE, 2018. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick, M. C. M. Teixeira e U. A. S. Leal.

- Problemas de controle ótimo com incerteza intervalar: uma aplicação em Agricultura. *IX Congresso Latino Americano de Biomatemática.* SOLABIMA, Botucatu - SP, 2015. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva e W. A. Lodwick.

5.2.3 Apresentação em congresso

- Solution of interval optimal control problem in discrete time using the constrained interval arithmetic. *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações.* DINCON, São José do Rio Preto - SP, 2017. J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick, M. C. M. Teixeira e U. A. S. Leal.

5.2.4 Prêmio

- Prêmio Melhor Trabalho Estudante (2o. Colocado) no V Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (CBSF 2018) / 37th North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference (NAFIPS 2018).

REFERÊNCIAS

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback lmi-based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.

BARROS, L. C. **Sobre sistemas dinâmicos fuzzy:** teoria e aplicações. 1997. 103 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2010. 404 p.

BEDE, B. **Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic**. Berlin: Springer, 2013. 290 p.

BELLMAN, R. E. **Dynamic programming**. Princeton: Princeton University Press, 1957. 339 p.

BELLMAN, R. E.; DREYFUS, S. E. **Applied dynamic programming**. Princeton: Princeton University Press, 1962. 382 p.

BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, Catonsville, v. 17, n. 4, p. 141–164, 1970.

BERTSEKAS, D. P. **Dynamic programming and stochastic control**. New York: Academic Press, 1976. 397 p.

BERTSEKAS, D. P. **Dynamic programming and optimal control**. Belmont Massachusetts: Athena Scientific, 1995. v. 1, 387 p.

BHURJEE, A. K.; PANDA, G. Efficient solution of interval optimization problem. **Mathematical Methods of Operations Research**, Heidelberg, v. 76, n. 3, p. 273–288, 2012.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.

BUZACHERO, L. F. S. **Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais**. 2010. 72 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2010.

CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A. Problemas de controle ótimo com incerteza intervalar: uma aplicação em agricultura. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO DE BIOMATEMÁTICA, 9., 2015, Botucatu. **Anais...** Botucatu: SOLABIMA, 2015. p. 1–4. Disponível em: <http://www.inscricoes.fmb.unesp.br/upload/trabalhos-/2015410214735.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2018.

CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A. Biological control of sugarcane caterpillar (diatraea saccharalis) using interval mathematical models. **International Journal on Mathematical Methods and Models in Biosciences**, Sofia, v. 5, n. 1, p. 1–11, 2016.

CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A. A programação dinâmica na solução de problemas de controle ótimo com incerteza intervalar. **Biomatemática**, Campinas, v. 26, n. 1, p. 13–24, 2016.

CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Discrete-time interval optimal control problem. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 1, n. 1, p. 1–7, 2017.

CAMPOS, J. R.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, G. N.; LODWICK, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; LEAL, U. A. S. Constrained interval arithmetic to solve the discrete-time interval optimal control problem. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY, 5., 2018, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: SBMAC, 2018. p. 1–12. Disponível em: <https://sites.google.com/site/brazilianfuzzy/>. Acesso em: 7 nov. 2018.

CERDÁ, E. **Optimización dinámica**. Madri: Pearson Educación, 2001. 336 p.

CHALCO-CANO, Y.; LODWICK, W. A.; BEDE, B. Single-level constraint interval arithmetic. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 257, n. 1, p. 146–168, 2014.

COSTA, T. M.; BOUWMEESTER, H.; LODWICK, W. A.; LAVOR, C. Calculating the possible conformations arising from uncertainty in the molecular distance geometry problem using constraint interval analysis. **Information Sciences**, Amsterdam, v. 415–416, n. 1, p. 41–52, 2017.

DINIZ, M. M.; BASSANEZI, R. C. Problema de controle ótimo com equações de estado p-fuzzy: programação dinâmica. **Biomatemática**, Campinas, v. 23, n. 1, p. 33–42, 2013.

DRIANKOV, D.; HELLENDOORN, H.; REINFRANK, M. **An introduction to fuzzy control**. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 316 p.

FARD, O. S.; RAMEZANZADEH, M. On fuzzy portfolio selection problems: a parametric representation approach. **Complexity**, London, v. 2017, n. 1, p. 1–12, 2017.

FARHADINIA, B. Pontryagin´s minimum principle for fuzzy optimal control problems. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, Zahedan, v. 11, n. 2, p. 27–43, 2014.

FILEV, D.; ANGELOV, P. Fuzzy optimal control. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 47, n. 2, p. 151–156, 1992.

HANSEN, E. R. **Global optimization using interval arithmetic**. New York: Marcel Dekker, 1992. 230 p.

HUAMÁN, G. G. M. **Introdução à análise intervalar em níveis simples e extensão de Zadeh**. 2014. 105 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2014.

JAULIN, L.; KIEFFER, M.; DIDRIT, O.; WALTER, E. **Applied interval analysis**. New York: Springer, 2001. 379 p.

KAUCHER, E. Interval analysis in the extended space $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. **Computing**, Vienna, v. 2, n. 1, p. 33–49, 1980.

KAUFMANN, A.; GUPTA, M. M. **Introduction to fuzzy arithmetic:** theory and applications. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985. 351 p.

KENNEDY, J. O. S. **Dynamic programming:** applications to agriculture and natural resources. New York: Elsevier Applied Science Publishers, 1986. 341 p.

LEAL, U. A. S. **Incerteza intervalar em otimização e controle**. 2015. 162 f. Tese (Doutorado em Matemática) — Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2015.

LI, J.; WANG, H. O.; BUSHNELL, L.; HONG, Y.; TANAKA, K. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear systems. **International Journal of Fuzzy Systems**, Heidelberg, v. 2, n. 3, p. 153–163, 2000.

LIU, B. **Uncertainty theory:** an introduction to its axiomatic foundations. Berlin: Springer–Verlag, 2004. 411 p.

LIU, B.; LIU, Y. K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 10, n. 4, p. 445–450, 2002.

LODWICK, W. A. **Constrained interval arithmetic**. Denver: University of Colorado, 1999. 11 p.

LODWICK, W. A. Interval and fuzzy analysis: an unified approach. **Advances in Imagining and Electronic Physics**, Amsterdam, v. 148, n. 1, p. 75–192, 2007.

LODWICK, W. A. An overview of flexibility and generalized uncertainty in optimization. **Computational** & **Applied Mathematics**, São Carlos, v. 31, n. 3, p. 569–589, 2012.

LODWICK, W. A.; JENKINS, O. A. Constrained interval and interval spaces. **Soft Computing**, Heidelberg, v. 17, n. 8, p. 1393–1402, 2013.

LODWICK, W. A.; THIPWIWATPOTJANA, P. **Flexible and generalized uncertainty optimization:** theory and methods. Cham: Springer, 2017. 190 p.

LORDELO, A. D. S. **Análise e projeto de controladores robustos por alocação de pólos via análise intervalar**. 2004. 83 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

LORDELO, A. D. S.; FERREIRA, P. A. V. Análise intervalar e projeto de controladores robustos via programação alvo. **Revista Controle** & **Automação**, Campinas, v. 16, n. 2, p. 111–123, 2005.

MARKOV, S. M. Extended interval arithmetic. **Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.**, Sofia, v. 30, n. 9, p. 1239–1242, 1977.

MOORE, R. E. **Automatic error analysis in digital computation**. Sunnyvale: Missiles and Space Division, 1959. 59 p.

MOORE, R. E. **Interval analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1966. 145 p.

MOORE, R. E. **Methods and applications of interval analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979. 190 p.

MORRISON, T.; GREENBERG, H. J. Robust optimization. In: RAVINDRAN, A. R. (Ed.). **Operations Research and Management Science Handbook**. Boca Raton: CRC Press, 2008. p. 1–34.

NAJARIYAN, M.; FARAHI, M. H. Optimal control of fuzzy linear controlled system with fuzzy initial conditions. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, Zahedan, v. 10, n. 3, p. 21–35, 2013.

NAJARIYAN, M.; FARAHI, M. H. A new approach for solving a class of fuzzy optimal control systems under generalized hukuhara differentiability. **Journal of the Franklin Institute**, Amsterdam, v. 352, n. 5, p. 1836–1849, 2015.

NÓBREGA, G. A. S. **Integrais de linha intervalares:** fundamentos e aplicações. 2010. 58 f. Dissertação (Mestrado em Sistemas e Computação) — Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PASSINO, K. M.; YURKOVICH, S. **Fuzzy control**. California: Addison–Wesley, 1998. 502 p.

PHILLIPS, G. M. Archimedes the numerical analyst. **The American Mathematical Monthly**, Oxfordshire, v. 88, n. 3, p. 165–169, 1981.

PINCH, E. R. **Optimal control and the calculus of variations**. New York: Oxford University Press, 1997. 234 p.

PONTRYAGIN, L. S. Optimal processes of regulation. In: INTERNATIONAL CONGRESSES OF MATHEMATICIANS, 1., 1958, Cambridge. **Proceedings...** Cambridge: Cambridge University Press, 1958. p. 182–202. Disponível em: <https://www.mathunion.org/fileadmin-/ICM/Proceedings/ICM1958/ICM1958.ocr.pdf>. Acesso em: 6 nov. 2018.

PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKY, V. G.; GAMKRELIDZE, P. V.; MISCHENKO, E. F. **The mathematical theory of optimal processes**. New York: Interscience Publishers, 1962. 360 p.

PRADO, M. L. M. **Controle robusto por alocação de pólos via análise intervalar modal**. 2006. 102 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

ROHN, J. **Systems of linear interval equations**. New York: Elsevier Science Publishing, 1989. 40 p.

STEFANINI, L.; BEDE, B. Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. **Nonlinear Analysis**, Amsterdam, v. 71, n. 3–4, p. 1311–1328, 2009.

TAHA, H. A. **Pesquisa operacional**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 359 p.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed lmi-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

THIPWIWATPOTJANA, P. **Linear programming problems for generalized uncertainty**. 2010. 173 f. Tese (Doutorado em Matemática e Ciências Estatísticas) — Department of Mathematical and Statistical Sciences, University of Colorado, Denver, 2010.

ZHAO, Y.; ZHU, Y. Fuzzy optimal control of linear quadratic models. **Computers & Mathematics with Applications**, Amsterdam, v. 60, n. 1, p. 67–73, 2010.

ZIMMERMANN, H. J. Fuzzy mathematical programming. **Computers & Operations Research**, Amsterdam, v. 10, n. 4, p. 291–298, 1983.