UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Existência de Solução para Problemas Elípticos Envolvendo o Operador 1-Laplaciano

Marcos Antonio Viana Costa

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Março de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Existência de Solução para Problemas Elípticos Envolvendo o Operador 1-Laplaciano

Marcos Antonio Viana Costa

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Março de 2021

C837e

Costa, Marcos Antonio Viana

Existência de Solução para Problemas Elípticos Envolvendo o Operador 1-Laplaciano / Marcos Antonio Viana Costa. -- Presidente Prudente, 2021

62 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Problemas Elípticos. 2. Operador 1-Laplaciano. 3. Espaço das Funções de Variação Limitada. 4. Teorema do Passo da Montanha. 5. Método de Nehari. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Existência de Solução para Problemas Elípticos Envolvendo o Operador 1-Laplaciano

AUTOR: MARCOS ANTONIO VIANA COSTA

ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

VIDEOCONFERÊNCIA
Prof. Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / Universidade de Brasília

VIDEOCONFERÊNCIA
Prof. Dr. OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / Universidade Federal de São Carlos

Presidente Prudente, 02 de março de 2021

Aos meus pais, Antonio e Regina,
ao meu irmão Felipe.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por ter-me dado sabedoria e discernimento que possibilitou tomar escolhas corretas que fizeram obter essa grande conquista e por colocar, ao longo da minha formação, pessoas certas que me auxiliaram a não desviar dos meus objetivos.

A minha família, pelo apoio, sustento e incentivo que foram essencial e determinante para essa conquista. Em especial a minha mãe, Regina, que desde cedo mostrou a importância da educação na construção de uma vida justa, íntegra e de sucesso.

Aos amigos, que contribuíram de alguma maneira para a realização desse trabalho, em especial ao Adriano, Alex (Japa), Anderson, Bruno, Enrico, Gustavo (Bombinha), Izabella, Jéssica, José Vanterler (Animal), Juan, Leticia, Mayk, Patrick, Paulo (Paulão), Rafael (Pão), Sorrana e Wendy, os quais levarei em meu coração por toda minha vida. E aqueles não mencionados aqui que ajudaram, direta ou indiretamente, para minha formação como Pessoa.

Aos professores do Departamento de Matemática da FCT-UNESP, que tive o privilégio de ser aluno durante a graduação e o mestrado, pelo excelente trabalho na construção do conhecimento e por não medirem esforços para ensinar.

Ao Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pela excelente orientação durante a graduação e o mestrado, por toda disposição, paciência e maravilhosas sugestões que contribuíram na minha formação acadêmica e elaboração desse trabalho.

Por fim, a UNESP, por ser uma universidade pública, gratuita e de qualidade pela sua infraestrutura e recursos oferecidos para a realização dos meus estudos que possibilitou a construção desse trabalho.

"Every second is time to change everything forever."
Charlie Chaplin

Resumo

Neste trabalho é mostrado a existência de solução para um problema elíptico envolvendo o operador 1-Laplaciano com crescimento subcrítico em um domínio limitado. Para isso, foi empregado a técnica de aproximação que consiste em considerar, ao invés do operador 1-Laplaciano, o equivalente envolvendo o p-Laplaciano e analisar sequência de soluções obtida quando p converge a 1^+.

Palavras-Chave: *Problemas Elípticos, Operador* 1*-Laplaciano, Espaço das Funções de Variação Limitada, Teorema do Passo da Montanha, Método de Nehari.*

Abstract

This work shows the existence of a solution to an elliptical problem involving the 1-Laplacian operator with subcritical growth term in a bounded domain. For this, the approximation scheme technique was used, which consists of considering, instead of the 1-Laplacian operator, the equivalent involving the p-Laplacian and analyzing the sequence of solutions obtained when p converges to 1^+.

Keywords: *Elliptical Problems,* 1-*Laplacian Operator, Space of Functions of Bounded Variation, Mountain Pass Theorem, Nehari Method.*

Índice de Notações

$\lvert\Omega\rvert$	Medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Conjunto $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, com $\overline{\Omega'}$ compacto;
$\lvert Du\rvert$	Variação total da medida de u em $BV(\Omega)$;
$u_n \to u$	Convergência forte;
$u_n \rightharpoonup u$	Convergência fraca;
p'	$p' = \dfrac{p}{p-1}$;
p^*	$p^* = \dfrac{pN}{N-p}$;
$\Delta_p u$	$\Delta_p u = \operatorname{div}\big(\lvert\nabla u\rvert^{p-2}\,\nabla u\big)$;
$\lVert f\rVert_\infty$	$\lVert f\rVert_\infty = \sup\{\lvert f(x)\rvert\,;\ x \in \Omega\}$;
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} L^k(\Omega)$;
$C^\infty(\Omega)$	$C^\infty(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$;
$C_0^\infty(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega) = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega)$;
∇u	$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$;
$\operatorname{sign}(v)$	$\operatorname{sign}(v) = \begin{cases} \dfrac{v}{\lvert v\rvert}, & \text{se } v \neq 0 \\ 0\ , & \text{se } v = 0 \end{cases}$;
u^+	$u^+ = \max\{u, 0\}$;
u^-	$u^- = \min\{u, 0\}$.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano estão sendo amplamente estudado por especialistas na área de Equações Diferenciais Parciais. Dentre os motivos é possível citar suas aplicações em áreas como processamento de imagens, teoria dos jogos, matemática computacional entre outras.

Em [17, 18], os autores estudaram a relação entre a constante de *Cheeger* $h(\Omega)$ de um domínio Ω e o primeiro autovalor do operador 1-Laplaciano, quando considerado a condição de fronteira de Dirichlet sobre Ω. Eles mostraram que:

$$\lim_{p\to 1^+} \lambda_p(\Omega) = h(\Omega),$$

onde $\lambda_p(\Omega)$ é o primeiro autovalor do operador p-Laplaciano, com $1 < p < \infty$. Além disso, deram significado a problemas de autovalor como:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = \lambda \dfrac{u}{|u|}, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Uma grande dificuldade de trabalhar com o operador 1-Laplaciano é a maneira que é definido, a saber:

$$\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right).$$

De fato, $\dfrac{Du}{|Du|}$ nem sempre esta bem definida por se tratar de um quociente entre duas medida de Radon. Para contornar esse problema é utilizado a *Teoria de Anzellotti*, popularmente conhecido como *Pairing Theory*, decorrente de [6].

Em [4, 5], os autores, conhecidos por serem pioneiros no estudo do operador 1-Laplaciano, apresentaram um conceito de solução para problemas que o envolve definindo $\dfrac{Du}{|Du|}$ e a condição de fronteira em um sentido fraco através de um campo vetorial limitado. Por meio da Teoria de Anzellotti foi possível introduzir um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ que faz o papel de $\dfrac{Du}{|Du|}$ e satisfaz $(\mathbf{z}, Du)$ no sentido das medidas.

Ao considerar problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano o espaço ideal para trabalho é o *Espaço de Funções de Variação Limitada*, tradicionalmente conhecido por BV. Entretanto, apresenta diversos impedimentos por não ser separável e seu dual não ser conhecido, por isso não sendo possível afirmar que é um espaço reflexivo. Sendo assim abordagens variacionais para esse tipo de problema são trabalhados com dificuldades.

Em [10], os autores propuseram um modelo para remoção de ruído, aprimoramento e restauração de imagens, no qual funções de variação limitada apresentam grande importância por permitir descontinuidade. Nele uma imagem original, representada pela função u, é recuperada de outra com determinada "perturbação", representada por I. Assim, tais imagens, se relacionam por meio da expressão:

$$I = u + \text{noise}.$$

O modelo proposto estuda as forças das várias categorias de difusão decorrentes do seguinte problema de minimização:

$$\min \int_\Omega |Du|^p + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2$$

onde $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\lambda \geqslant 2$ e Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$.

Em [14], os autores provam resultados de existência de minimizante para funcionais localmente Lipschitz, sobre um conjunto cuja definição é inspirada na variedade de Nehari. Como aplicação é provado a existência de solução de variação limitada para um problema envolvendo o operador 1-Laplaciano, para isso o funcional energia do problema, dado por:

$$\begin{aligned} \Phi : BV(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \Phi(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

é decomposto em uma subtração de outros dois funcionais, I_0 um funcional Lipschitz contínuo e $I \in C^1(BV(\Omega))$, de modo que $\Phi(u) = I_0(u) - I(u)$. Assim é mostrado que o ínfimo desse funcional sobre o conjunto $\mathcal{N} = \{u \in BV(\Omega) \setminus \{0\}\,;\ I_0'(u)u = I'(u)u\}$ é alcançado e é um ponto crítico. Com isso é obtido um ponto crítico não-trivial para esse funcional com menor energia entre todos os não-triviais, então, tal solução será do tipo *ground state* para o problema envolvendo o operador 1-Laplaciano.

Em [13], os autores provam a existência de uma solução de variação limitada não-trivial e não-negativa utilizando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale para funcionais Lipschitz contínuos para o seguinte problema elíptico quasilinear envolvendo o operador 1-Laplaciano:

$$-\Delta_1 u + V(x)\frac{u}{|u|} = K(x)f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

cujo funcional Euler-Lagrange está definido no espaço $E = \left\{u \in L^{1^*}\left(\mathbb{R}^N\right);\ \int_{\mathbb{R}^N} |Du| < \infty\right\}$.

O objetivo principal neste trabalho é explicitar os argumentos contidos em dois artigos, [15, 20]. No primeiro, [20], é mostrado a existência de soluções não-negativas e não-positivas para o seguinte problema elíptico que envolve o operador 1-Laplaciano e um termo com crescimento subcrítico:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ \qquad u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}, \tag{P_1}$$

onde Ω é um domínio em $\mathbb{R}^N$, com $N \geqslant 2$, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Caratheódory que satisfaz o seguinte conjunto de hipótese:

(f_1) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\limsup_{s\to 0} \frac{|f(x,s)|}{|s|^{\alpha}} < \infty,$$

uniformemente em $x \in \Omega$.

(f_2) Existe $q \in \left(0, \dfrac{1}{N-1}\right)$ e $C > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leqslant C(1 + |s|^q),$$

onde $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$.

(f_3) Existe $\kappa > 1$ e $s_0 > 0$ tal que

$$0 < \kappa F(x,s) < sf(x,s),$$

onde $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, com $|s| \geqslant s_0$, e $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t$.

Assumindo tais hipóteses, é possível demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1. *Se forem satisfeitas as hipóteses (f_1) a (f_3) então existem ao menos duas soluções não-triviais $\overline{v}, \overline{w} \in BV(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ para o problema (P_1) tais que $\overline{v} \leqslant 0 \leqslant \overline{w}$ quase sempre em Ω.*

No segundo, [15], é mostrado a existência de solução nodal para o seguinte problema elíptico envolvendo o operador 1-Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = g(u), & \text{em } \Omega \\ \quad\;\; u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}, \tag{P_2}$$

onde Ω é um domínio em $\mathbb{R}^N$, com $N \geqslant 2$, e não-linearidade de $g : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

(g_1) $g \in C^0(\mathbb{R})$.

(g_2) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\limsup_{s\to 0} \frac{|g(s)|}{|s|^{\alpha}} < \infty.$$

(g_3) Existem $K_1, K_2 > 0$ e $q \in \left(1, \dfrac{N}{N-1}\right)$ tais que

$$g(s) \leqslant K_1 + K_2 |s|^{q-1}.$$

(g_4) Existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa G(s) \leqslant sg(s),$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)\mathrm{d}t$.

(g_5) g é crescente em $s \in \mathbb{R}$.

Assumindo tais hipóteses, é possível demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2. *Se forem satisfeitas as hipóteses* (g_1) *a* (g_5) *então existe uma solução nodal* $\overline{u} \in BV(\Omega)$ *para o problema* (P_2).

Em ambos os teoremas, utilizamos um método baseado na aproximação das soluções, por soluções dos respectivos problemas envolvendo operador p-Laplaciano. Nesse procedimento, é necessário uma cuidadosa análise para a obtenção de cotas, independentes de p, de forma a ser possível calcular o limite, quando p tende a 1, tanto das funções, quanto dos campos vetoriais envolvendo os seus gradientes.

Dividimos este trabalho da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresentamos definições e resultados fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 2 provamos a existência de um problema envolvendo o operador 1-Laplaciano e não-linearidade subcrítica via Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, original de [20]. No capítulo 3, de maneira análoga ao que foi feito no anterior, resolvemos o mesmo problema via Variedade de Nehari, original de [15].

Capítulo

1

Resultados Preliminares

Para o desenvolvimento deste trabalho é necessário conhecer o espaço $BV(\Omega)$ e a Teoria de Anzellotti, bem como suas propriedades. Para apresentar tais conceitos é necessário antes introduzir o que é medida, distribuições e pontos críticos. Considere nesse capítulo Ω um aberto não-vazio em $\mathbb{R}^N$.

1.1 Teoria da medida

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de teoria da medida que podem ser encontrados em [16].

Definição 1.1. *Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em Ω. Uma medida é uma função*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ E &\longmapsto \mu(E) \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$, *onde $\{E_j\}$ é uma família disjunta em $\mathcal{M}$.*

A terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é chamada de espaço de medida.

No decorrer desse trabalho utilizaremos a chamada medida de Lebesgue, na qual a σ-álgebra é formada pelos conjuntos Lebesgue mensuráveis. Além disso, uma função f é dita mensurável quando $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ para todo E boreliano.

De agora em diante Ω representará o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, onde $\mathcal{M}$ é esta σ-álgebra e μ é a medida de Lebesgue.

Definição 1.2. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos o suporte dessa função por*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}.$$

No caso em que esse conjunto for compacto diremos que f possui suporte compacto.

Outra medida importante para o desenvolvimento desse trabalho é a de Radon. Nela $\mu \in (\mathcal{C}_0(\Omega))'$, espaço dual de $\mathcal{C}_0(\Omega)$, é tal que para cada K em Ω, com K compacto, existe um $c = c(K) > 0$ tal que

$$|\mu(f)| \leqslant c \, \|f\|_\infty$$

para todo $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, com $\mathrm{supp}(f) \subset K$. Denotaremos o espaço dessa medida por $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.

Definição 1.3. *Seja Ω um espaço de medida e $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ por*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p} < \infty \right\},$$

onde $\|f\|_{L^p} = \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$.

Definição 1.4. *Seja Ω um espaço de medida. Definimos o espaço $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ por*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^\infty} < \infty \right\},$$

onde $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c;\ |f(x)| \leqslant c \text{ quase sempre em } \Omega\}$.

Teorema 1.1. (Lema de Fatou). *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis não-negativas em Ω. Então*

$$\int_\Omega \liminf f_n \, \mathrm{d}x \leqslant \liminf \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}x.$$

Demonstração. Ver [16], página 52. ■

Teorema 1.2. (Convergência Dominada). *Seja (f_n) uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ quase sempre em Ω e existe $g \in L^1(\Omega)$, com $g \geqslant 0$, onde $|f_n| \leqslant g$ quase sempre em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Então*

(A_1) $f \in L^1(\Omega)$.

(A_2) $\displaystyle\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = \lim \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}x$.

Demonstração. Ver [16], página 54. ■

1.2 Teoria das distribuições

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados envolvendo distribuições e derivada no sentido distribucional que podem ser encontrados em [19]. Tal teoria busca generalizar a noção de derivadas parciais mantendo as propriedades vistas em Cálculo Diferencial.

Definição 1.5. *Definimos o espaço das funções testes em Ω como sendo o seguinte conjunto*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \mathrm{supp}(\varphi) \text{ é compacto}\} = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Veremos no decorrer do trabalho que tal espaço de funções é muito utilizado para a resolução de problemas elípticos.

Definição 1.6. *Seja $x \in \mathbb{R}^N$. Definimos multi-índice como sendo uma N-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, com $\alpha_j \in \mathbb{N}$ para $1 \leqslant j \leqslant N$, a qual estão associados as seguintes operações*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N \qquad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_N! \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}.$$

A próxima definição trás como ocorre a convergência em sequências de funções testes.

Definição 1.7. *Seja (φ_n) uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ quando*

- *Existe um compacto K em Ω tal que $\varphi_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- *$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.*

Definição 1.8. *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que,*

$$T(\varphi_n) \to 0$$

para toda sequência (φ_n) com $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições em Ω será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para verificar se um funcional linear contínuo é uma distribuição, o qual é mais simples se comparado com a definição.

Proposição 1.1. *Um funcional linear contínuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma distribuição se, e somente se, para cada compacto K em Ω existir uma constante $c(K) > 0$ e $n(K) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|T(\varphi)| \leqslant c(K) \, \|\varphi\|_{n(K)}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, com $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ e $\|\varphi\|_{n(K)} = \max_{x \in \Omega} \{|D^\alpha(\varphi(x))| \, ; \ \|x\| \leqslant n(K)\}$.

Demonstração. Ver [19], página 8. ∎

Usualmente todos os funcionais lineares que conhecemos e que estão definidos em $\mathcal{D}'(\Omega)$ são automaticamente contínuos. Isso ocorre pois para construir funcionais lineares que não são contínuos em $\mathcal{D}'(\Omega)$ precisamos empregar o chamado Axioma de Zermelo.

Definição 1.9. *Seja (T_n) uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando*

$$\lim T_n(\varphi) = T(\varphi)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.10. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}^N$ um multi-índice e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Definimos o operador derivação de φ por*

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Tal operador pode ser visto como

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \bullet \cdots \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N},$$

em que $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \bullet \cdots \bullet \frac{\partial}{\partial x_j}$ é uma composição que ocorre α_j vezes.

Proposição 1.2. *Seja (T_n) uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T_m \to T$. Então*

$$D^\alpha T_m \to D^\alpha T$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ para todo multi-índice α.

Demonstração. Ver [19], página 12. ∎

1.3 Teoria dos pontos críticos

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados da teoria dos pontos críticos que podem ser encontrados em [1, 12].

Uma categoria de função de grande utilização dentro do estudo das equações diferenciais é a chamada *função de Carathéodory*, qual esta definida a seguir.

Definição 1.11. *Dizemos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory quando*

- *$f(\cdot, s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$.*
- *$f(x, \cdot)$ é contínua para todo $x \in \overline{\Omega}$.*

Definição 1.12. *Seja E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in E$ quando existir um funcional linear $T \in E'$ tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - T(v)}{\|v\|} = 0.$$

A Derivada de Fréchet no ponto u quando existir é única e denotaremos por $I'(u)$. Por meio dessa derivada é possível definir uma nova classe de funções, denotada por $C^1(E, \mathbb{R})$, a qual consiste nos funcionais Freche diferenciáveis I tais que $I' : A \to E'$ é contínua, com A um aberto.

Definição 1.13. *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que $c\mathbb{R}$ é um valor crítico de I quando existe $u \in X$ tal que $I'(u) = 0$ e $I(u) = c$.*

A próxima definição é utilizada para garantir a existência de pontos críticos.

Definição 1.14. *Seja E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ funcional, com $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

- *Dizemos que (u_n) em E é uma sequência de Palais-Smale no nível c para I, ou simplesmente $(PS)_c$, quando*

  $$I(u_n) \to c \qquad\qquad I'(u_n) \to 0 \text{ em } E'.$$

- *Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, ou simplesmente que I satisfaz a condição $(PS)_c$, quando toda sequência de Palais-Smale no nível c para I possuir uma subsequência convergente, para todo $c \in \mathbb{R}$.*

O próximo resultado é a principal ferramenta para demonstrar o popular Teorema do Passo da Montanha, o qual trataremos no Capítulo 2.

Proposição 1.3. (Lema de Deformação). *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Se $\|I'(u)\|_{X'} \leqslant 4\varepsilon$ para todo $u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ então existe $\eta \in C(X)$ tal que*

(D_1) *$\eta(u) = u$ para todo $u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$,*

(D_2) *$\eta(I^{c+\varepsilon}) = I^{c-\varepsilon}$, onde $I^d = I^{-1}(-\infty, d)$.*

Demonstração. Ver [12], página 95. ■

Tal resultado garante que para funcionais I, que satisfazem a condição de $(PS)_c$ no caso que c não for valor crítico de I, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o conjunto $I^{c+\varepsilon}$ pode ser deformado continuamente no nível $I^{c-\varepsilon}$.

1.4 Espaço das funções de variação limitada

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados do espaço denotado por $BV(\Omega)$ que podem ser encontrados em [7, 21]. Considere aqui Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$, ou seja, um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitziana.

Definição 1.15. *Dizemos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada quando $u \in L^1(\Omega)$ e $Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Com isso podemos definir o espaço*

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega);\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\},$$

onde Du denota o gradiente distribucional de u.

A observação a seguir garante afirmações necessárias e suficientes para verificar quando uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é um elemento de $BV(\Omega)$.

Observação 1.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(A_1) *$u \in BV(\Omega)$.*

(A_2) *$u \in L^1(\Omega)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{M}(\Omega)$ para todo $i = 1, \ldots, N$.*

(A_3) *$u \in L^1(\Omega)$ e $\|Du\| = \sup\left\{\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi) u \,\mathrm{d}x;\ \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ e } \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} < \infty$.*

(A_4) *$u \in L^1(\Omega)$ e $\|Du\| = \sup\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i D_i u \,\mathrm{d}x;\ \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ e } \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} < \infty$.*

O espaço $BV(\Omega)$ pode ser equipado com duas normas, as quais veremos que são equivalentes:

$$\|u\|_{BV} = \int_\Omega |u| \ \mathrm{d}x + \int_\Omega |Du| \qquad \|\!|u|\!\|_{BV} = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1},$$

onde $\mathcal{H}^{N-1}$ denota a medida de Hausdorff de dimensão $N-1$.

Teorema 1.3. (Desigualdade de Poincaré em $BV(\Omega)$). *Para todo $u \in BV(\Omega)$ existe $c = c(N, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leqslant c \, |||u|||_{BV}$$

onde $1 \leqslant p \leqslant 1^*$.

Demonstração. Ver [3], página 152. ∎

Proposição 1.4. *As normas $\|\cdot\|_{BV}$ e $|||\cdot|||_{BV}$ são equivalentes.*

Demonstração. Seja $u \in BV(\Omega)$. Pelo Teorema 10.2.1 em [7] existe $k > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} |u| \; \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant k \, \|u\|_{BV}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} |||u|||_{BV} &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \; \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leqslant \int_\Omega |Du| + k \, \|u\|_{BV} \\ &\leqslant (1+k) \int_\Omega |Du| + \int_\Omega |u| \; \mathrm{d}x \\ &\leqslant (1+k) \, \|u\|_{BV} \\ &\leqslant K \, \|u\|_{BV} \, . \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{BV} &= \int_\Omega |Du| + \int_\Omega |u| \; \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega |Du| + c \left(\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \; \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right) \\ &\leqslant (1+c) \, |||u|||_{BV} \\ &\leqslant C \, |||u|||_{BV} \, . \end{aligned}$$

Portanto as normas $\|\cdot\|_{BV}$ e $|||\cdot|||_{BV}$ são equivalentes. ∎

Introduziremos agora um processo de convergência em $BV(\Omega)$, o qual fornece uma convergência intermediária entre a fraca e a forte associada a norma.

Definição 1.16. *Dizemos que uma sequência (u_n) em $BV(\Omega)$ tem convergência fraca para $u \in BV(\Omega)$ quando*

- *$u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$.*
- *$Du_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.*

A proposição a seguir verifica a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito a topologia de $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.5. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $BV(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Então*

(A_1) $\displaystyle\int_\Omega |Du| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |Du_n|.$

(A_2) *$u \in BV(\Omega)$.*

(A_2) *$u_n \rightharpoonup u$ em $BV(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [7], página 372. ■

Pela maneira que o espaço $BV(\Omega)$ foi definido não é possível afirmar que contém $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ como um subconjunto denso com respeito à topologia da norma. Disso surge a necessidade de introduzir uma noção de convergência que torne o espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$ com respeito a topologia induzida.

Definição 1.17. *Dizemos que uma sequência (u_n) em $BV(\Omega)$ tem convergência intermediária para $u \in BV(\Omega)$ quando*

- *$u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$.*
- $\displaystyle\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|$.

Proposição 1.6. *O espaço $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ é denso em $BV(\Omega)$ com respeito a convergência intermediária.*

Demonstração. Ver [7], página 375. ■

Como consequência desse resultado para todo $u \in BV(\Omega)$ existe uma sequência (u_n) em $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$u_n \xrightarrow{L^1} u \qquad\qquad \int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|\,.$$

1.5 Teoria de Anzellotti

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados da Teoria de Anzellotti que podem ser encontrados em [6]. Um dos pontos centrais é o de generalizar o produto escalar para um campo vetorial limitado $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e Dv, onde $v \in BV(\Omega)$, através de um funcional linear $(\mathbf{z}, Dv)$, o qual define uma medida de Radon.

No próximo resultado introduziremos o parâmetro $\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\Omega}$, onde $\mathbf{z} \in X_N(\Omega) = \{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \operatorname{div}(\mathbf{z})$ é uma medida limitada em $\Omega\}$ e $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ e em seguida o traço fraco definido sobre $\partial\Omega$ da componente normal de $\mathbf{z}$.

Proposição 1.7. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e ν o vetor normal unitário a $\partial\Omega$. Então existe uma aplicação bilinear $\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\Omega} : X_N(\Omega) \times (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)) \to \mathbb{R}$ tal que*

(A_1) $\displaystyle\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u\mathbf{z}\cdot\nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$, *quando $\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.*

(A_2) $\displaystyle|\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\Omega}| \leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty} \int_{\partial\Omega} |u| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$, *para todo $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ e todo $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [6], página 294. ■

Proposição 1.8. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma aplicação linear $\gamma : X_N(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\partial\Omega)$ tal que*

(A_1) $\|\gamma(\mathbf{z})\|_{L^\infty} \leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty}$.

(A_2) $\langle \mathbf{z}, u\rangle_{\partial\Omega} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \gamma(\mathbf{z}) u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}$ *para todo* $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$.

(A_3) $\gamma(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\cdot\nu$ *em* $\partial\Omega$ *quando* $\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver [6], página 296. ■

A função $\gamma(\mathbf{z})$ denota traço fraco definido sobre $\partial\Omega$ da componente normal de $\mathbf{z}$, a qual representaremos simplesmente por ν. A partir de agora $\gamma(\mathbf{z})$ será representada por $[\mathbf{z}, \nu]$.

Definição 1.18. *Seja* Ω *um aberto em* $\mathbb{R}^N$, *com* $N \geqslant 2$, $u \in BV(\Omega)$ *e* $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$. *Definimos o funcional linear* $(\mathbf{z}, Du)$ *por*

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{z}, Du) : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\varphi &\longmapsto \langle(\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle = -\int_\Omega u\varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Proposição 1.9. *Seja* $u \in BV(\Omega)$ *e* $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$. *Então*

(A_1) *Para todo* $U \subset\subset \Omega$ *e todo* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$
|\langle(\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|.
$$

(A_2) *Para todo boreliano* B *e toda aberto* U *tal que* $B \subset U \subset \Omega$

$$
\left|\int_B (\mathbf{z}, Du)\right| \leqslant \int_B |(\mathbf{z}, Du)| \leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(A)} \int_U |Du|.
$$

(A_3) *As medidas* $(\mathbf{z}, Du)$ *e* $|(\mathbf{z}, Du)|$ *são absolutamente contínuas com respeito a* $|Du|$.

Demonstração. Seja $u \in BV(\Omega)$ e $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$. Considere U um aberto em Ω e note que

$$
u|_U \in BV(U).
$$

Como tal restrição é uma função de variação limitada existe uma sequência (u_n) em $BV(U) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$$
u_n \xrightarrow{L^1} u \qquad\qquad \int_U |Du_n| \to \int_U |Du|.
$$

Dado $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, pelo funcional definido na Definição 1.17, temos

$$
|\langle(\mathbf{z}, Du_n), \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du_n| \,\mathrm{d}x.
$$

Logo, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$
|\langle(\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|,
$$

mostrando o item (A_1). Consequentemente é possível identificar $(\mathbf{z}, Du)$ com uma medida de Radon em Ω. Com isso, por consequência das propriedades dessa medida, temos

$$
\left|\int_B (\mathbf{z}, Du)\right| \leqslant \int_B |(\mathbf{z}, Du)| \leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty(A)} \int_U |Du|
$$

para todo boreliano B em U, mostrando o item (A_2). Consequentemente $(\mathbf{z}, Du)$ e $|(\mathbf{z}, Du)|$ são absolutamente contínuas em relação a $|Du|$, mostrando o item (A_3). ■

Proposição 1.10. *Seja* $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$, $u \in BV(\Omega)$ *e* (u_n) *uma sequência em* $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ *tal* $u_n \to u$ *em* $L^1(\Omega)$ *e* $\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|$. *Então*

$$\int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla u_n \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega (\mathbf{z}, Du)\,.$$

Demonstração. Ver [6], página 298. ∎

Teorema 1.4. *Seja* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^N$. *Se* $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ *e* $u \in BV(\Omega)$ *então*

$$\int_\Omega (z, Du) + \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\mathbf{z})\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu]\, u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$

Demonstração. Ver [6], página 299. ∎

Capítulo

2

Existência de Solução via Teorema do Passo da Montanha

Nesse capítulo, estudaremos a existência de soluções não-negativa e não-positiva para o problema (P_1) quando forem satisfeitas as hipóteses (f_1) a (f_3).

Veremos no decorrer do capítulo que a hipótese (f_1) gera a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha; (f_2) implica que o crescimento do problema é subcrítico e implicará que o funcional associado a esse problema esta bem definido e (f_3) produz a condição de Ambrosseti-Rabinowitz, o qual é usado para provar a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Um modelo de problema subcrítico envolvendo 1-Laplaciano é o seguinte:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = |u|^{q-1} u, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{, sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde $1 < q < 1^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Definição 2.1. *Dizemos que $w \in BV(\Omega)$ é uma solução de variação limitada para o problema (P_1) quando existir um campo vetorial $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$, com $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty} \leqslant 1$, tal que:*

(S_1) $-\operatorname{div}(\mathbf{z}) = f(x, w)$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

(S_2) $(\mathbf{z}, Dw) = |Dw|$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$.

(S_3) $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-w)$ *sobre* $\partial\Omega$.

2.1 Teorema do Passo da Montanha

Para descrever o Teorema do Passo da Montanha, importante ferramenta na obtenção de pontos críticos para funcionais, considere X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. A "grosso modo" tal resultado minimax afirma: se existir um ponto x_0 a uma altura h_0, que encontrasse rodeado por uma cadeia de montanhas com alturas superiores ou iguais a h_0, caso desejarmos atingir um ponto x_1 situado fora dessa cadeia de montanhas a uma altura $h_1 < h_0$ então existirá um caminho γ passando pela cadeia de montanhas e que "liga" x_0 a x_1.

Apresentaremos duas versões do Teorema do Passo da Montanha, a primeira original de [22] e a segunda de [2].

Teorema 2.1. (Passo da Montanha de Willem, M.). *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, com $I(0) = 0$. Suponha que*

(M_1) *Existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $I(u) \geqslant \alpha$ para todo $u \in X$, com $\|u\|_X = \beta$,*

(M_2) *Existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \beta$ e $I(e) < 0$.*

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

(A_1) $c - 2\varepsilon \leqslant I(u_\varepsilon) \leqslant c + 2\varepsilon$,

(A_2) $\|I'(u_e)\|_{X'} < 4\varepsilon$,

onde $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$ *e* $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0$ *e* $\gamma(1) = e\}$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que c é finito. De fato, como $\gamma(0) = 0 \in B(0;\beta)$, $\gamma(1) = e \in X \setminus \overline{B(0,\beta)}$ e $\gamma([0,1])$ é conexo decorre que

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B(0,\beta) \neq \emptyset.$$

Da hipótese (M_1) decorre que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geqslant \alpha \Rightarrow c \geqslant \alpha > 0,$$

ou seja, c é um número real positivo. Suponhamos, por contradição, que para algum $\varepsilon > 0$ as afirmações (A_1) e (A_2) não ocorra, ou seja,

(A_1') $c - 2 <\leqslant I(u) < c + 2\varepsilon$ para todo $u \in X$,

(A_2') $\|I'(u)\|_{X'} \geqslant 4\varepsilon$ para todo $u \in X$.

Note que essas afirmações continuam válidas para todo $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Como $c > 0$, reduzindo ε se necessário, temos

$$\begin{aligned} I(v) &\leqslant I(0) \\ &\leqslant 0 \\ &\leqslant c - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Deformação, existe $\eta \in C(X)$ tal que

(D_1') $\eta(u) = u$, para todo $u \notin I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$,

(D_2') $\eta(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Assim, da maneira que c foi definida, existe $\overline{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leqslant x + \varepsilon.$$

Tome o seguinte caminho

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \hat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

e note que

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(0) &= \eta(\overline{\gamma}(0)) \\ &= \eta(0) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \hat{\gamma}(1) &= \eta(\overline{\gamma}(1)) \\ &= \eta(e). \end{aligned}$$

Logo $0, e \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ e, do Lema de Deformação,

$$\eta(0) = 0 \qquad\qquad \eta(e) = e,$$

consequentemente

$$\hat{\gamma}(0) = 0 \qquad\qquad \hat{\gamma}(1) = e.$$

Então $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Novamente pelo Lema de Deformação, para qualquer $t \in [0,1]$, decorre que

$$\hat{\gamma}(t) = \eta(\overline{\gamma}(t)) \subset I^{c-\varepsilon}$$

e então

$$c \leqslant \max_{t\in[0,1]} I(\overline{\gamma}(t)) \leqslant c - \varepsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto as afirmações (A_1) e (A_2) ocorrem. ■

Teorema 2.2. (Passo da Montanha de Ambrosetti, A. e Rabinowitz, P.). *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, com $I(0) = 0$. Suponha que*

(M_1) *Existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $I(u) \geqslant \alpha$ para todo $u \in X$, com $\|u\|_X = \beta$,*

(M_2) *Existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \beta$ e $I(e) < 0$.*

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ então c é um valor crítico de I, onde $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$ e $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Demonstração. Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, com $I(0) = 0$, um funcional que satisfaz a condição $(PS)_c$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ no teorema anterior existe uma sequência (u_n) em X tal que

$$I(u_n) \to c \qquad\qquad I'(u_n) \to 0.$$

Como I satisfaz a condição $(PS)_c$ existe uma subsequência (u_k) de (u_n) e $u \in X$ tal que

$$u_k \to u.$$

Da continuidade de I e I' decorre que

$$I(u) = c > 0 \qquad\qquad I'(u) = 0.$$

Portanto c é um valor crítico de I. ■

As hipóteses (M_1) e (M_2) dos Teoremas 2.1 e 2.2 são chamadas, respectivamente, de primeira e segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

2.2 Lemas preliminares

No estudo variacional encontramos a solução do problema (P_1) buscando pontos críticos de seu funcional energia associado, ou seja:

$$\begin{aligned} J : BV(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Definição 2.2. *Dizemos que $u_0 \in BV(\Omega)$ é um ponto crítico do funcional energia J quando existir um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, com $\|z\|_{L^\infty} \leqslant 1$, tal que:*

(C_1) $-\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z}) w \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x, u_0) w \, \mathrm{d}x$, *para todo* $w \in BV(\Omega)$.

(C_2) $(\mathbf{z}, Du_0) = |Du_0|$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$.

(C_3) $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-u_0)$ *sobre* $\partial\Omega$.

Seja $\widetilde{p} < \min\{1 + \alpha, \kappa, q + 1\}$. Para provar o resultado de existência de solução do problema (P_1) vamos considerar, para cada $1 < p < \widetilde{p}$, o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u), & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & , \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}. \tag{2.1}$$

Pelas hipóteses (f_1) a (f_3) e da escolha de $\widetilde{p}$, para cada $p \in (1, \widetilde{p})$, decorre que:

(a) $|f(x, s)| \leqslant C\,(1 + |s|^q)$, com $0 < q < p^* - 1$.

(b) $\displaystyle\limsup_{s \to 0} \frac{f(x, s)}{|s|^{p-2}\, s} = 0$, uniformemente com $x \in \Omega$.

(c) $0 < \kappa F(x, s) \leqslant s f(x, s)$, para $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$, com $|s| \geqslant s_0$ e $\kappa > p$.

Lema 2.1. *As afirmações (a), (b) e (c) são validas.*

Demonstração. Mostremos separadamente que cada uma das afirmações vistas anteriormente é verdadeira.

Afirmação (a): Pela hipótese (f_2) temos que $0 < q < \dfrac{1}{N-1}$ e, para cada $1 < p < \widetilde{p}$,

$$|f(x, s)| < C\,(1 + |s|^q)\,,$$

com $0 < q < p^* - 1$. Para que essa afirmação ocorra é necessário que a desigualdade $0 < q < p^* - 1 < \dfrac{1}{N-1}$ seja satisfeita. Em relação a $p^* - 1$ e $\dfrac{1}{N-1}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1} - (p^* - 1) &= \frac{1}{N-1} - \frac{N(p-1) + p}{N - p} \\ &= \frac{N - p - (N-1)[N(p-1) + p]}{(N-1)(N-p)} \\ &= \frac{N - p - N^2 p + N^2 - N + p}{(N-1)(N-p)} \\ &= \frac{N^2(1-p)}{(N-1)(N-p)}. \end{aligned}$$

Como $p > 1$ e $N > p$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{N^2(1-p)}{(N-1)(N-p)} > 0 &\Rightarrow \frac{1}{N-1} - (p^* - 1) > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{N-1} > p^* - 1, \end{aligned}$$

como queríamos.
Afirmação (b): Pela hipótese (f_1) existe $\alpha > 0$ tal que

$$\limsup_{s\to 0} \frac{|f(x,s)|}{|s|^{\alpha}} < \infty.$$

Dado $0 < p < \widetilde{p}$ decorrerá que $p < \alpha$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to 0} \frac{|f(x,s)|}{|s|^{\alpha}} &= \limsup_{s\to 0} \frac{|f(x,s)|}{|s|^{\alpha}} \frac{|s|^p}{|s|^p} \\ &< \limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^p} |s|^{p-\alpha} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

como queríamos.
Afirmação (c): Basta notar que $\kappa > 1$ e $1 < p < \widetilde{p}$. Com isso a hipótese (f_3) é satisfeita junto com a afirmação (c). ■

Como queremos obter duas soluções não-triviais, $v_p \leqslant 0 \leqslant w_p$, vamos empregar uma abordagem que consiste em "truncar" a não-linearidade da f em duas funções da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_+ : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,s) &\longmapsto f_+(x,s) = \begin{cases} 0 &, \ s \leqslant 0 \\ f(x,s), & s > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_- : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,s) &\longmapsto f_-(x,s) = \begin{cases} f(x,s), & s \leqslant 0 \\ 0 &, \ s > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Por meio dessa abordagem fica associado a (2.1) dois funcionais energias dados por:

$$\begin{aligned} J_p^{\pm} : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J_p^{\pm}(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} F_{\pm}(x,u)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

onde $F_{\pm}(x,s) = \displaystyle\int_0^s f_{\pm}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Tais soluções serão obtidas usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz.

Observação 2.1. *Ao considerar f_+ e o funcional J_p^+, a solução encontrada será estritamente positiva e, ao considerar f_- e o funcional J_p^- a encontrado será estritamente negativa.*

Vamos desenvolver os argumentos apenas para J_p^+, mas de maneira análoga pode-se fazer com J_p^-. Considere o seguinte funcional:

$$I_p(u) = J_p^+(u) + \frac{p-1}{p}|\Omega|,$$

onde um ponto crítico de I_p implica em ponto crítico de J_p^+, pois esses diferem a menos de uma constante.

Observação 2.2. *Pela Desigualdade de Young quando* $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$ *teremos:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,\mathrm{d}x + \frac{p_2 - p_1}{p_2}|\Omega|. \tag{2.2}$$

Lema 2.2. *Para todo* $p_1, p_2 \in (1, \widetilde{p})$*, com* $1 < p_1 \leqslant p_2$*, o funcional* I_p *é não-decrescente com respeito a* p*, ou seja, para todo* $u \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ *temos* $I_{p_1}(u) \leqslant I_{p_2}(u)$*.*

Demonstração. Considere $1 < p_1 \leqslant p_2$. Dado $u \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ temos que, pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
I_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x + \frac{p_1 - 1}{p_1}|\Omega| \\
&\leqslant \frac{1}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,\mathrm{d}x + \frac{p_2 - p_1}{p_2}|\Omega|\right) - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x + \frac{p_1 - 1}{p_1}|\Omega| \\
&\leqslant \frac{1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} + \frac{p_1 - 1}{p_1}\right)|\Omega| \\
&\leqslant \frac{1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x + \frac{p_2 - 1}{p_2}|\Omega| \\
&\leqslant I_{p_2}(u),
\end{aligned}$$

como queríamos. ∎

Lema 2.3. *Para cada* $p \in (1, \widetilde{p})$ *o funcional* I_p *satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração. Mostremos que para cada $p \in (1, \widetilde{p})$ o funcional I_p satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti e Rabinowitz.
<u>Primeira geometria</u>: Queremos mostrar que existe $\rho > 0$ e $\beta > I_p(0)$ tais que

$$I_p(u) \geqslant \beta$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \rho$. Note que, das condições (a) e (b), dado $\varepsilon > 0$ existe umas constante $A > 0$ tal que

$$|f_+(x,s)| \leqslant \varepsilon C |s|^{p-1} + A\varepsilon |s|^q$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, e então

$$F_+(x,s) \leqslant \varepsilon \frac{C}{p}|s|^p + \varepsilon \frac{A}{q+1}|s|^{q+1}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Dessa maneira, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
I_p(u) &= J_p^+(u) + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\varepsilon\frac{C}{p}|u|^p\,\mathrm{d}x + \varepsilon\frac{A}{q+1}|u|^{q+1}\,\mathrm{d}x\right) + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \varepsilon\frac{C}{p}\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x - \varepsilon\frac{A}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\geqslant \frac{1}{p}\|u\|_{W_0^{1,p}}^p - \varepsilon\frac{C}{p}\|u\|_{L^p}^p - \varepsilon\frac{A}{q+1}\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} + \frac{p-1}{p}|\Omega|.
\end{aligned}$$

Pelas imersões de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^s(\Omega)$, com $p \leqslant s \leqslant p^*$, temos $\|u\|_{L^s} \leqslant k \|u\|_{W_0^{1,p}}$, assim

$$\begin{aligned} I_p(u) &\geqslant \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - k\varepsilon \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - k \|u\|_{W_0^{1,p}}^{q+1} + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &\geqslant \|u\|_{W_0^{1,p}}^p \left(\frac{1}{p} - k\varepsilon - k \|u\|_{W_0^{1,p}}^{(q+1)-p} \right) + \frac{p-1}{p} |\Omega| . \end{aligned}$$

Logo, tomando $\varepsilon < \frac{1}{kp}$, se $\rho < \left(\left(\frac{1}{p} - k\varepsilon \right) \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{(q+1)-p}}$ então

$$I_p(u) \geqslant \beta$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \beta$. Portanto I_p satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Segunda geometria: Queremos mostrar que existe $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|e\|_{W_0^{1,p}} > \beta$ e $I_p(e) < 0$. Primeiramente observe que da afirmação (c), para $s \neq 0$,

$$\begin{aligned} \kappa F_+(x,s) \leqslant s f(x,s) &\Rightarrow \frac{\kappa}{s} \leqslant \frac{f_+(x,s)}{F_+(x,s)} \\ &\Rightarrow \int_{s_0}^{s} \frac{\kappa}{t} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_{s_0}^{s} \frac{f_+(x,t)}{F_+(x,t)} \,\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow \kappa \left[\ln(t)\right]_{s_0}^{s} \leqslant \left[\ln(F_+(x,t))\right]_{s_0}^{s} \\ &\Rightarrow \kappa \left(\ln(s) - \ln(s_0)\right) \leqslant \ln(F_+(x,s)) - \ln(F_+(x,s_0)) \\ &\Rightarrow \ln(s^\kappa) - \ln(s_0^\kappa) \leqslant \ln(F_+(x,s)) - \ln(F_+(x,s_0)) \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{s^\kappa}{s_0^\kappa}\right) \leqslant \ln\left(\frac{F_+(x,s)}{F_+(x,s_0)}\right) \\ &\Rightarrow \frac{s^\kappa}{s_0^\kappa} \leqslant \frac{F_+(x,s)}{F_+(x,s_0)} \\ &\Rightarrow \frac{s^\kappa}{s_0^\kappa} F_+(x,s_0) \leqslant F_+(x,s) \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ com $|s| \geqslant s_0$. Além disso, como F é contínua e o intervalo $[0, s_0]$ é compacto existe $c_1 > 0$ tal que

$$|F_+(x,s) - c_1 |s|^\kappa| \leqslant c_2$$

para todo $0 \leqslant s \leqslant s_0$. Assim, para $c_1, c_2 > 0$,

$$F_+(x,s) \geqslant c_1 s^\kappa - c_2,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, dado $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} I_{\widetilde{p}}(t\varphi) &= J_{\widetilde{p}}^+(t\varphi) + \frac{\widetilde{p}-1}{\widetilde{p}} |\Omega| \\ &= \frac{1}{\widetilde{p}} \int_\Omega |\nabla (t\varphi)|^{\widetilde{p}} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x, t\varphi) \,\mathrm{d}x + \frac{\widetilde{p}-1}{\widetilde{p}} |\Omega| \\ &\leqslant \frac{t^{\widetilde{p}}}{\widetilde{p}} \int_\Omega |\nabla\varphi|^{\widetilde{p}} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(c_1 |t\varphi|^\kappa - c_2\right) \,\mathrm{d}x + \frac{\widetilde{p}-1}{\widetilde{p}} |\Omega| \\ &\leqslant \frac{t^{\widetilde{p}}}{\widetilde{p}} \int_\Omega |\nabla\varphi|^{\widetilde{p}} \,\mathrm{d}x - c_1 t^\kappa \int_\Omega |\varphi|^\kappa \,\mathrm{d}x + c_2 |\mathrm{supp}(\varphi)| + \frac{\widetilde{p}-1}{\widetilde{p}} |\Omega| . \end{aligned}$$

Como $\kappa > \widetilde{p}$ quando $t \to +\infty$ implicará que $I_{\widetilde{p}}(t\varphi) \to -\infty$. Consequentemente existe $e = T\varphi$, com $T > 0$, tal que $I_{\widetilde{p}}(e) < 0$. Logo, pela monotonicidade, decorre que

$$I_p(e) < 0,$$

para todo $p \in (1, \widetilde{p})$. Portanto I_p satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha. ■

Lema 2.4. *Para cada $p \in (1, \widetilde{p})$ o funcional I_p satisfaz a condição de $(PS)_c$.*

Demonstração. Para cada $p \in (1, \widetilde{p})$ fixo, pelo Lema 2.3 existe uma sequência (u_n) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I_p(u_n) \to c \qquad\qquad I_p'(u_n) \to 0.$$

onde $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I_p(\gamma(t))$ com $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$. Pela afirmação (a) para n suficientemente grande temos

$$\begin{aligned}
c + O_n(1)\,\|u_n\|_{W_0^{1,p}} &\geqslant I_p(u_n) - \frac{1}{\kappa} I_p'(u_n)u_n \\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,u_n)\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| - \frac{1}{\kappa}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \right.\\
&\qquad\left. - \int_\Omega f_+(x,u_n)u_n\,\mathrm{d}x\right) \\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,u_n)\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| - \frac{1}{\kappa}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \right.\\
&\qquad\left. - \kappa\int_\Omega F_+(x,u_n)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{\kappa}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}} + \frac{p-1}{p}|\Omega|,
\end{aligned}$$

o implicando que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u$$

em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$u_n \to u$$

em $L^q(\Omega)$ para $1 \leqslant q \leqslant p^*$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u)u\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Logo, para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (Ver [12], página 116),

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente, para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u_n)\varphi\,\mathrm{d}x + O_n(1) \tag{2.4}$$

e, tomando o limite $n \to +\infty$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, \mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, u é ponto crítico de I_p. Tomando u_n como função teste em (2.27) e u em (2.30), por (2.26),

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p &= \int_\Omega f(x,u_n)u_n \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega f(x,u)u \, \mathrm{d}x + O_n(1) \\
&= \|u\|_{W_0^{1,p}}^p + O_n(1).
\end{aligned}$$

Como $u_n \to u$, $\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p \to \|u\|_{W_0^{1,p}}^p$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach uniformemente convexo, pelo Teorema 3.31 (Ver [9]),

$$u_n \to u$$

em $W_0^{1,p}(\Omega)$, como queríamos.

■

Como consequência do Lema 2.3 e 2.4 obtemos uma sequência de pontos críticos (w_p) em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $w_p \geqslant 0$ é um ponto crítico não trivial de I_p e

$$I_p(w_p) = \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} I_p(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma_p = \{\gamma \in \mathcal{C}\left([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)\right);\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Lema 2.5. *A sequência $(I_p(w_p))$ é não-decrescente para $p \in (1, \widetilde{p})$.*

Demonstração. Seja $1 < p_1 < p_2 < \widetilde{p}$. Note primeiramente que $\Gamma_{p_2} \subset \Gamma_{p_1}$ pois como $\mathrm{W}_0^{1,p_2}(\Omega) \subset \mathrm{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$ então os caminhos de $\mathcal{C}\left([0,1], \mathrm{W}_0^{1,p_2}(\Omega)\right)$ pertencem também a $\mathcal{C}\left([0,1], \mathrm{W}_0^{1,p_1}(\Omega)\right)$. Logo

$$\begin{aligned}
I_{p_1}(w_{p_1}) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_1}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_1}(\gamma(t)) \\
&= \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_1}} \max_{t \in [0,1]} \left(J_{p_1}^+(\gamma(t)) + \frac{p_1 - 1}{p_1} |\Omega| \right) \\
&= \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_1}} \max_{t \in [0,1]} \left(\frac{1}{p_1} \int_\Omega |\nabla \gamma(t)|^{p_1} \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x, \gamma(t)) \, \mathrm{d}x + \frac{p_1 - 1}{p_1} |\Omega| \right) \\
&\leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} \left(\frac{1}{p_1} \int_\Omega |\nabla \gamma(t)|^{p_1} \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x, \gamma(t)) \, \mathrm{d}x + \frac{p_1 - 1}{p_1} |\Omega| \right) \\
&\leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} \left(\frac{1}{p_2} \int_\Omega |\nabla \gamma(t)|^{p_2} \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x, \gamma(t)) \, \mathrm{d}x + \frac{p_2 - 1}{p_2} |\Omega| \right) \\
&\leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} \left(J_{p_2}^+(\gamma(t)) + \frac{p_2 - 1}{p_2} |\Omega| \right) \\
&\leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma_{p_2}} \max_{t \in [0,1]} I_{p_2}(\gamma(t)) \\
&\leqslant I_{p_2}(w_{p_2}).
\end{aligned}$$

Portanto a sequência $(I_p(w_p))_{p \in (1,\widetilde{p})}$ é não-decrescente. ■

Lema 2.6. *A sequência* $(I_p(w_p))_{p\in(1,\widetilde{p})}$ *é limitada e, consequentemente,* $\left(J_p^+(w_p)\right)_{p\in(1,\widetilde{p})}$ *também é.*

Demonstração. Pela monotonicidade do funcional I_p decorre para um certo $p_0 \in (1,\widetilde{p})$ fixo

$$I_p(w_p) \leqslant I_{p_0}(w_{p_0}) = c,$$

para todo $p \in (1, p_0)$ e, consequentemente, a sequência $(I_p(w_p))_{p\in(1,\widetilde{p})}$ é limitada. Consequentemente

$$\begin{aligned} I_p(w_p) \leqslant c &\Rightarrow \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \leqslant c \\ &\Rightarrow \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x \leqslant c - \frac{p-1}{p}|\Omega|. \end{aligned}$$

Como $\dfrac{p-1}{p}|\Omega| \to 0$ quando $p \to 1^+$ decorre que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x \leqslant c, \tag{2.6}$$

onde $c > 0$ depende somente de p_0. Portanto a sequência $\left(J_p^+(w_p)\right)_{p\in(1,\widetilde{p})}$ é limitada. ∎

Lema 2.7. *A sequência* $(w_p)_{p>1}$ *é limitada em* $BV(\Omega)$.

Demonstração. Considere para cada $p \in (1, p_0)$ o seguinte conjunto

$$\Omega_p = \{x \in \Omega;\ w_p(x) \leqslant s_0\}.$$

Pela condição (a) e da maneira que $F_+(x,s)$ foi definida temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} F_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x &\leqslant c\left(s_0 + \frac{s_0^{q+1}}{q+1}\right)|\Omega| \\ &\leqslant cs_0\left(1 + \frac{s_0^{q}}{q+1}\right)|\Omega| \\ &\leqslant cs_0(1+s_0^q)\,|\Omega| \\ &\leqslant c_1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $c_1 = c_1(c, s_0, q)$ e independe de p. Considere $\Omega\setminus\Omega_p$ e note que todo $x \in \Omega\setminus\Omega_p$ é tal que $w_p(x) > s_0$, ou seja, $\Omega\setminus\Omega_p = \{x\in\Omega;\ w_p(x) > s_0\}$. Assim, pela condição (c),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus\Omega_p} F_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{\kappa}\int_{\Omega\setminus\Omega_p} w_p f_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{\kappa}\int_\Omega w_p f_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Como w_p é um ponto crítico decorre que

$$\int_\Omega w_p f_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla w_p|^p \,\mathrm{d}x$$

e, então,

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_p} F_+(x,w_p)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\kappa}\int_\Omega |\nabla w_p|^p \,\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Assim, para todo $p \in (1, p_0)$,

$$\frac{1}{p_0} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade (2.6),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\kappa}\right) \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x &\leqslant c + \int_\Omega F_+(x, w_p) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\kappa} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant c + \int_{\Omega_p} F_+(x, w_p) \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega \setminus \Omega_p} F_+(x, w_p) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\kappa} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

e, pelas desigualdades (2.7) e (2.8),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\kappa}\right) \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x &\leqslant c + c_1 + \frac{1}{\kappa} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\kappa} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant c + c_1. \end{aligned}$$

Logo, como $\kappa \leqslant p_0$,

$$\int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x \leqslant \widetilde{C}, \tag{2.9}$$

para todo $p \in (1, p_0)$, onde $\widetilde{C} > 0$ depende somente de p_0. Então, pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \|w_p\|_{BV} &= \int_\Omega |\nabla w_p| \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |w_p| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_\Omega |\nabla w_p| \, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &\leqslant \widetilde{C} + \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &\leqslant \widetilde{C} + |\Omega| \, . \end{aligned}$$

Portando a sequência $(w_p)_{p>1}$ é limitada. ■

Pelas imersões compactas de $BV(\Omega)$ em $L^m(\Omega)$, para $1 \leqslant m < \frac{N}{N-1}$, existe $\overline{w} \in BV(\Omega)$ onde $\overline{w} \geqslant 0$, tal que

(A) $w_p \to \overline{w}$ em $L^m(\Omega)$, para $1 \leqslant m < \dfrac{N}{N-1}$;

(B) $w_p \to \overline{w}$ quase sempre em Ω;

(C) Existe $g \in L^m(\Omega)$, com $1 \leqslant m < \dfrac{N}{N-1}$, tal que $|w_p(x)| \leqslant g(x)$.

Lema 2.8. *Seja w_p uma solução para o problema* (2.1). *Então existe um campo vetorial limitado $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, com $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty} \leqslant 1$, tal que, a menos de uma subsequência,*

$$|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \tag{2.10}$$

em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leqslant r < \infty$, quando $p \to 1^+$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que $\left(|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\right)_{p>1}$ é limitada em $L^r(\Omega,\mathbb{R}^N)$, com $1 \leqslant r < \infty$. Dado $1 \leqslant r < \infty$ considere $1 < p < r'$ e note que

$$\begin{aligned}\left\||\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\right\|_{L^r}^r &= \int_\Omega \left||\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\right|^r \,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |\nabla w_p|^{r(p-1)} \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Empregando a Desigualdade de Holder para $\frac{p}{r(p-1)}$ e $\frac{p}{p-r(p-1)}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_p|^{r(p-1)}\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_\Omega \left(|\nabla w_p|^{\frac{p}{r(p-1)}}\right)^{r(p-1)} \mathrm{d}x\right)^{1/\frac{p}{r(p-1)}} \left(\int_\Omega |1|^{\frac{p}{p-r(p-1)}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\frac{p}{p-r(p-1)}}\\ &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla w_p|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r(p-1)}{p}} \left(\int_\Omega |1|^{\frac{p}{p-r(p-1)}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-r(p-1)}{p}}\\ &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla w_p|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r(p-1)}{p}} |\Omega|^{1-\frac{r(p-1)}{p}}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.9)

$$\int_\Omega |\nabla w_p|^{r(p-1)}\,\mathrm{d}x \leqslant \widetilde{C}^{\frac{r(p-1)}{p}} |\Omega|^{1-\frac{r(p-1)}{p}}.$$

Logo

$$\left\||\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\right\|_{L^r}^r \leqslant \widetilde{C}^{\frac{r(p-1)}{p}} |\Omega|^{1-\frac{r(p-1)}{p}} \tag{2.11}$$

e, consequentemente, a sequência $\left(|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\right)$ é limitada em $L^r(\Omega,\mathbb{R}^N)$, com $1 \leqslant r < \infty$. Com isso, da compacidade fraca em L^r e pelo Teorema 1.42 (Ver [11]), existe $\mathbf{z}_r \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de uma subsequência,

$$|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z}_r$$

em $L^r(\Omega,\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leqslant r < \infty$. Usando um argumento diagonal é possível provar que o limite $\mathbf{z}$ não depende de r, ou seja

$$|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z}$$

em $L^r(\Omega,\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leqslant r < \infty$. Além disso, utilizando o fato da norma em L^r ser fracamente semicontínua inferiormente, da desigualdade (2.11),

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\|_{L^r} &\leqslant \liminf_{p\to 1^+} \left\||\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\right\|_{L^r}\\ &\leqslant \liminf_{p\to 1^+} \widetilde{C}^{\frac{p-1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{p-1}{p}}\\ &\leqslant |\Omega|^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

para todo $1 \leqslant r < \infty$ e, consequentemente, $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty} \leqslant 1$. Portanto, existe um campo vetorial limitado $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de uma subsequência, (2.10) ocorre. ∎

2.3 Resultado de existência

Com os resultados obtidos na seção anterior podemos demonstrar o Teorema 1.

Demonstração do Teorema 1. Notemos que uma solução para o problema (P_1) é uma função $\overline{w} \in BV(\Omega)$ que satisfaz as condições (S_1) a (S_3) da Definição 2.1.
Condição (S_1): Mostremos que $-(\mathbf{z}) = f_+(x, \overline{w})$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_+(x, \overline{w})\varphi \,\mathrm{d}x \tag{2.12}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Note que, dado um funcional linear $g \in \big(L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)\big)'$, se $|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z}$ em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ então

$$g(|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p) \to f(\mathbf{z}).$$

Considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, o que implica que $\nabla\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Com isso, dado $w \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ a aplicação

$$w \longmapsto \int_\Omega w \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x$$

é um funcional contínuo. Como vale a convergência fraca (2.10), empregando tal aplicação no campo vetorial $|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p$ temos

$$\int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x, \tag{2.13}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Como $-\operatorname{div}(|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p) = f_+(x, w_p)$ mostrar a igualdade (2.12) é equivalente provar que as seguintes convergências ocorrem

$$f_+(x, w_p) \to f_+(x, \overline{w}) \qquad\qquad -\operatorname{div}(|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p) \to -\operatorname{div}(\mathbf{z})$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p \to 1^+$. Para a primeira convergência considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, como f_+ é uma função de Carathéodory, pela afirmação (B), decorre que

$$f_+(x, w_p)\varphi \to f_+(x, \overline{w})\varphi,$$

quase sempre em Ω. Além disso, pelas afirmações (a) e (C), temos

$$\begin{aligned} |f_+(x, w_p(x))\varphi| &\leqslant C(1 + |w_p(x)|^q)\varphi \\ &\leqslant C(1 + g(x)^q)\varphi. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizada, decorre que

$$\int_\Omega f_+(x, w_p)\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f_+(x, \overline{w})\varphi \,\mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Portanto

$$f_+(x, w_p) \to f_+(x, \overline{w}) \tag{2.14}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p \to 1^+$. Para a segunda convergência queremos que

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p)\varphi \,\mathrm{d}x \to -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\varphi \,\mathrm{d}x$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, pela Identidade de Green

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Note que dado $\mathbf{z}\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$, o qual é uma distribuição, e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{z})(\varphi) &= \sum_{i=1}^N\left(-\int_\Omega \mathbf{z}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -\int_\Omega \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim, pela convergência (2.13)

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p)\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x &= \mathrm{div}(\mathbf{z})(\varphi)\\ &= \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto

$$-\mathrm{div}(|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p)\to -\mathrm{div}(\mathbf{z}) \tag{2.15}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p\to 1^+$. Com isso, das expressões (2.14) e (3.10), decorre que

$$-\mathrm{div}(\mathbf{z}) = f_+(x,\overline{w}) \tag{2.16}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p\to 1^+$. Portando $\overline{w}$ satisfaz a condição (S_1).
Condição (S_2): Mostremos que $(\mathbf{z}, D\overline{w}) = |D\overline{w}|$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Como toda medida de Radon pode ser vista como um elemento de $(\mathcal{C}_0(\Omega))'$ e sendo $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ denso em $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é equivalente provar que para todo $\varphi\in\mathcal{C}_0^1(\Omega)$, com $\varphi \geqslant 0$,

$$\langle(\mathbf{z}, D\overline{w}),\varphi\rangle = \langle|D\overline{w}|,\varphi\rangle,$$

ou seja,

$$-\int_\Omega \overline{w}\mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{w}\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi\,|D\overline{w}|.$$

Como $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty}\leqslant 1$, pela consequência da Proposição 1.9, temos

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{z}, D\overline{w}),\varphi\rangle &\leqslant |\langle(\mathbf{z}, D\overline{w}),\varphi\rangle|\\ &\leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty}\int_\Omega\varphi\,|D\overline{w}|\\ &\leqslant \int_\Omega\varphi\,|D\overline{w}|\\ &\leqslant \langle|D\overline{w}|,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\langle(\mathbf{z}, D\overline{w}),\varphi\rangle \geqslant \langle|D\overline{w}|,\varphi\rangle$. Considere $w_p\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $w_p\varphi\geqslant 0$, uma função teste para o problema (2.1) e note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_+(x,w_p)w_p\varphi\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot\nabla(w_p\varphi)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot(\nabla w_p\varphi + w_p\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega w_p|\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Vamos analisar ambos termos da igualdade acima. Para o primeiro termo do lado direito, pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \left(\frac{1}{p}|\nabla w_p|^p + \frac{p-1}{p}\right)\varphi\,\mathrm{d}x \Rightarrow\\
\Rightarrow \int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^p\,\varphi\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}x \Rightarrow\\
\Rightarrow \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^p\,\varphi\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x - \frac{p-1}{p}\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}x \Rightarrow\\
\Rightarrow \int_\Omega |\nabla w_p|^p\,\varphi\,\mathrm{d}x \geqslant p\int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x - (p-1)\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

assim, pela semicontinuidade inferior do funcional, temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega |\nabla w_p|^p\,\varphi\,\mathrm{d}x &\geqslant \liminf_{p\to 1^+}\left(p\int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x - (p-1)\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}x\right)\\
&\geqslant \liminf_{p\to 1^+}\left(p\int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x\right) - \limsup_{p\to 1^+}\left((p-1)\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}x\right)\\
&\geqslant \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega |\nabla w_p|\,\varphi\,\mathrm{d}x\\
&\geqslant \int_\Omega \varphi\,|D\overline{w}|\,.
\end{aligned}$$

Já para o segundo termo do lado direito, note que (2.10) ocorre para todo $1 \leqslant r < \infty$, o que implica que

$$\liminf_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2}\,\nabla w_p\cdot\varphi\,\mathrm{d}x\right) \to \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\varphi\,\mathrm{d}x \tag{2.18}$$

para todo $\varphi \in L^r(\Omega)$, com $1 \leqslant r < \infty$ Em particular, a expressão anterior ocorre para todo $1 \leqslant m < \frac{N}{N-1}$ e, com isso,

$$|\nabla w_p|^{p-2}\,\nabla w_p \rightharpoonup \mathbf{z} \tag{2.19}$$

em $L^{m'}(\Omega)$, pois (3.13) ocorre para todo $\varphi \in L^m(\Omega)$. Consequentemente, por (A) e (3.14), empregando a Proposição 3.13 de [9],

$$\liminf_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega w_p\,|\nabla w_p|^{p-2}\,\nabla w_p\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\right) \to \int_\Omega \overline{w}\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Para a expressão do lado esquerdo da igualdade (2.17), pelas condições (a) e (c), temos

$$\begin{aligned}
|f_+(x,w_p)w_p\varphi| &= |f_+(x,w_p)|\,|w_p|\,|\varphi|\\
&\leqslant C\,(1+|w_p|^q)\,|w_p|\,|\varphi|\\
&\leqslant C\,(1+g(x)^q)\,g(x)m\\
&\leqslant mC\,(1+g(x)^q)\,g(x),
\end{aligned}$$

onde $m > 0$ é o limitante de φ e $mC\,(1+g(x)^q)\,g(x) \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega f_+(x,w_p)w_p\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\varphi\,\mathrm{d}x,$$

quando $p \to 1^+$, e por (2.16),

$$\int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\overline{w}\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Logo, fazendo $p \to 1^+$ em (2.17), temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega |\nabla w_p|^p \varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega w_p |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\right) &= \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega f_+(x,w_p)w_p \,\mathrm{d}x \Rightarrow\\
\Rightarrow \int_\Omega \varphi\,|D\overline{w}| + \int_\Omega \overline{w}\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi \,\mathrm{d}x &\geqslant -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\overline{w}\varphi \,\mathrm{d}x \Rightarrow\\
\Rightarrow \int_\Omega \varphi\,|D\overline{w}| &\geqslant -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\overline{w}\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{w}\mathbf{z}\cdot\nabla\varphi \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle(\mathbf{z}, D\overline{w}), \varphi\rangle \geqslant \langle|D\overline{w}|, \varphi\rangle.$$

Portanto, $\langle(\mathbf{z}, D\overline{w}), \varphi\rangle = \langle|D\overline{w}|, \varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ e, consequentemente,

$$(\mathbf{z}, D\overline{w}) = |D\overline{w}| \tag{2.20}$$

em $\mathcal{M}(\Omega)$. Portando $\overline{w}$ satisfaz a condição (S_2).
<u>Condição (S_3):</u> Mostremos que $[\mathbf{z},\nu] \in \operatorname{sign}(-\overline{w})$ sobre $\partial\Omega$. Note que é equivalente a provar que

$$\int_{\partial\Omega} \left(|\overline{w}| + \overline{w}\,[\mathbf{z},\nu]\right) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0, \tag{2.21}$$

pois como $|[\mathbf{z},\nu]| \leqslant 1$ temos $|[\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}| \leqslant |\overline{w}|$ e então

$$-|\overline{w}| \leqslant [\mathbf{z},\nu] \leqslant |\overline{w}| \Rightarrow [\mathbf{z},\nu]\,\overline{w} + |\overline{w}| \geqslant 0.$$

Consequentemente $|\overline{w}| + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{w} = 0$ sobre $\partial\Omega$ se, e somente se, ocorrer (2.21). Para a primeira desigualdade observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \left(|\overline{w}| + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}\right) \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &\geqslant \int_{\partial\Omega} \left(-[\mathbf{z},\nu]\,\overline{w} + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}\right) \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}\\
&\geqslant \int_{\partial\Omega} 0 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}\\
&\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Para a desigualdade contrária considere $w_p - \varphi$, com $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, como função teste no problema (2.1) e note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_+(x,w_p)\left(w_p - \varphi\right) \mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla\left(w_p - \varphi\right) \mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \left(\nabla w_p - \nabla\varphi\right) \mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega |\nabla w_p|^{p} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\int_\Omega |\nabla w_p|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2} \nabla w_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f_+(x,w_p)\left(w_p - \varphi\right) \mathrm{d}x. \tag{2.23}$$

Aplicando a Desigualdade de Young em (2.21) decorre que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w_p| \, \mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\ &\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega f_+(x,w_p)(w_p-\varphi)\, \mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| .\end{aligned}$$

Assim, pela afirmação (2.10), da expressão acima e da semicontinuidade inferior temos

$$\begin{aligned}\|\overline{w}\|_{BV} &= \int_\Omega |\nabla \overline{w}| \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\overline{w}| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leqslant \liminf_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega |\nabla w_p| \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}|w_p| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}\right) \\ &\leqslant \liminf_{p\to 1^+}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla w_p|^{p-2}\nabla w_p\cdot\nabla\varphi\, \mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega f_+(x,w_p)(w_p-\varphi)\, \mathrm{d}x + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{p-1}{p}|\Omega| + \int_{\partial\Omega}|w_p| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}\right) \\ &\leqslant \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\, \mathrm{d}x - \int_\Omega f_+(x,\overline{w})\varphi\, \mathrm{d}x + \int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\, \mathrm{d}x \\ &\leqslant -\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\, \mathrm{d}x + \int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\, \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla\overline{w}| \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}|\overline{w}| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant \int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\, \mathrm{d}x. \tag{2.24}$$

Além disso, por (2.16), (2.20) e da Formula de Green em $BV(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_+(x,\overline{w})\overline{w}\, \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\overline{w}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (\mathbf{z}, D\overline{w}) - \int_{\partial\Omega}[\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_\Omega |D\overline{w}| - \int_{\partial\Omega}[\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima em (2.24) temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D\overline{w}| + \int_{\partial\Omega}|\overline{w}| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant \int_\Omega |D\overline{w}| - \int_{\partial\Omega}[\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega}|\overline{w}| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega}[\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega}(|\overline{w}| + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{w}) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant 0\end{aligned} \tag{2.25}$$

Portanto, por (2.22) e (2.25),

$$[\mathbf{z},\nu] \in \mathrm{sign}(-\overline{w}) \tag{2.26}$$

sobre $\partial\Omega$. Portanto $\overline{w}$ satisfaz a condição (S_3).
Com isso mostramos, por (2.16), (2.20) e (2.26), que $\overline{w}$ é uma solução do problema (P_1) no sentido da Definição 2.1. ■

Proposição 2.1. *A solução $\overline{w}$ é não-trivial.*

Demonstração. Por meio da hipótese (f_1) temos que $f_+(x,0) = 0$ e existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $|f_+(x,s)| \leqslant k_1 |s|^\alpha$, para todo $|s| \in (0,\delta)$ e algum $k_1 > 0$. Assim

$$\begin{aligned}
F_+(x,s) &= \int_0^s f_+(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^s |f(x,s)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^s k_1 |s|^\alpha\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant k_1 \left[\frac{|s|^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^s \\
&\leqslant \frac{k_1}{\alpha+1}|s|^{\alpha+1},
\end{aligned}$$

para todo $|s| \in (0,\delta)$. Logo, para $u \in BV(\Omega)$, pela imersão contínua de $BV(\Omega)$ em $L^{\alpha+1}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
J(u) &= |||u|||_{BV} - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant |||u|||_{BV} - \int_\Omega \left(\frac{k_1}{\alpha+1}|u|^{\alpha+1}\right)\mathrm{d}x \\
&\geqslant |||u|||_{BV} - \frac{k_1}{\alpha+1}\int_\Omega |u|^{\alpha+1}\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant |||u|||_{BV} - \frac{k_1}{\alpha+1} k\,|||u|||_{BV}^{\alpha+1} \\
&\geqslant |||u|||_{BV} - k_2\,|||u|||_{BV}^{\alpha+1},
\end{aligned}$$

onde $k_2 > 0$ é a constante resultante da imersão contínua. Tomando $\rho < \min\left\{\delta, \left(\frac{1}{2k_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$ decorre que

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}|||u|||_{BV},$$

para $|||u|||_{BV} \leqslant \rho$. Dado $p \in (1,p_0)$, pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
J(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| + \int_{\partial\Omega} |u|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| - \int_\Omega F_+(x,u)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |u|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leqslant I_p(u) + \int_{\partial\Omega} |u|\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leqslant I_p(u),
\end{aligned}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando um caminho $\gamma \in \Gamma_p$, pela continuidade da aplicação $t \longmapsto I_p(\gamma(t))$, existe $t_0 > 0$ tal que $|\gamma(t_0)| = \rho$. Consequentemente

$$\begin{aligned} I_p(w_p) &= \inf_{\gamma \in \Gamma_p} \max_{t \in [0,1]} I_p(\gamma(t)) \\ &\geqslant \frac{\rho}{2}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Por outro lado, pela expressão (2.24) e da Formula de Green, temos

$$\begin{aligned} \lim_{p \to 1^+} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x &= \lim_{p \to 1^+} \frac{1}{p} \int_\Omega f_+(x, w_p) w_p \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f_+(x, \overline{w}) \overline{w} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (\mathbf{z}, D\overline{w}) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{w} \, [\mathbf{z}, \nu] \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_\Omega |D\overline{w}| + \int_{\partial\Omega} |\overline{w}| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Além disso, pela afirmação (C), temos

$$\begin{aligned} \kappa \, |F_+(x, w_p)| &\leqslant w_p \, |f_+(x, w_p)| \\ &\leqslant g(x) \, |f_+(x, g(x))| \\ &\leqslant C g(x)(1 + g(x)^q), \end{aligned}$$

em que $Cg(x)(1 + g(x)^q) \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, decorre que

$$\lim_{p \to 1^+} \int_\Omega F_+(x, w_p) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega F_+(x, \overline{w}) \, \mathrm{d}x. \tag{2.29}$$

Logo, por (2.28) e (2.29), temos

$$\begin{aligned} \lim_{p \to 1^+} I_p(w_p) &= \lim_{p \to 1^+} \left(\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F_+(x, w_p) \, \mathrm{d}x + \frac{p-1}{p} |\Omega| \right) \\ &= \lim_{p \to 1^+} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla w_p|^p \, \mathrm{d}x - \lim_{p \to 1^+} \int_\Omega F_+(x, w_p) \, \mathrm{d}x + \lim_{p \to 1^+} \frac{p-1}{p} |\Omega| \\ &= \int_\Omega |D\overline{w}| + \int_{\partial\Omega} |\overline{w}| \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F_+(x, \overline{w}) \, \mathrm{d}x \\ &= J(\overline{w}). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Portanto, por (2.27) e (2.24), $J(\overline{w}) \geqslant \dfrac{\rho}{2}$ e, consequentemente, $\overline{w}$ é uma solução não-trivial pois $J(0) = 0$. ■

De maneira análoga ao que foi feito nos dois resultados anteriores é possível provar a existência de uma solução negativa não-trivial $\overline{v}$ para o problema (P_1). Nesse caso basta utilizar o mesmo raciocínio aplicado ao funcional

$$\tilde{I}_p(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega F_-(x, u) + \frac{p-1}{p} |\Omega|,$$

obtendo $v_p \to \overline{v}$ com $p \to 1^+$. Aqui v_p é uma solução não-positiva para o problema envolvendo p-Laplaciano (2.1).

Capítulo

3

Existência de Solução via Método de Nehari

Nesse capítulo, estudaremos a existência de solução nodal para o problema (P_2) quando forem satisfeitas as hipóteses (g_1) a (g_5).

Definição 3.1. *Dizemos que $\overline{u} \in BV(\Omega)$ é uma solução de variação limitada para o problema (P_2) quando existir um campo vetorial $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$, com $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty} \leqslant 1$, tal que*

$(S_1)'$ $-\mathrm{div}(\mathbf{z}) = g(\overline{u})$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$(S_2)'$ $(\mathbf{z}, D\overline{u}) = |D\overline{u}|$ *em* $\mathcal{M}(\Omega)$.

$(S_3)'$ $[\mathbf{z}, \nu] \in \mathrm{sign}(-\overline{u})$ *sobre* $\partial\Omega$.

Para diferenciar os cálculos que faremos neste capítulo com o do anterior representaremos o funcional energia I por Φ.

3.1 Método de Nehari

Para descrever o método de Nehari considere E um espaço de Banach reflexivo e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. Dado $u \in E$ um ponto crítico de Φ temos $\Phi'(u) = 0$, o que é equivalente a $\Phi'(u)v = 0$, para todo $v \in E$, em particular $\Phi'(u)u = 0$. Com isso somos levados a definir o conjunto a seguir, o qual contém todos os pontos críticos de Φ.

Definição 3.2. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional. O conjunto:*

$$\mathcal{N} = \{u \in E \setminus \{0\};\ \Phi'(u)u = 0\}$$

é chamado de variedade de Nehari.

Embora chamado de "variedade" nem sempre $\mathcal{N}$ é uma. Note que todo $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de Φ e, com isso, somos levados a procurar nele pontos de mínimos para determinados problemas. Logo, o método de Nehari, se resume em minimizar o funcional Φ sobre $\mathcal{N}$, ou seja, obter $u \in \mathcal{N}$ tal que:

$$\Phi(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v)$$

e, em seguida, mostrar que o u é ponto crítico de Φ em todo espaço.

Quando $u \in BV(\Omega)$ decorre que $u^{\pm} \in BV(\Omega)$. Com isso, quando estivermos interessados em encontrar pontos críticos não-triviais de Φ com a propriedade de serem nodais o conjunto natural a se procurar é o definido a seguir.

Definição 3.3. *O conjunto*

$$\mathcal{N}^{\pm} = \left\{u \in E \setminus \{0\};\ \Phi'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\right\}$$

é chamado de conjunto de Nehari nodal.

3.2 Lemas preliminares

Considere, para $p > 1$, o problema envolvendo o operador p-Laplaciano associado a (P_2), ou seja:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(u), & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{, sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

ao qual tem relacionado a seguinte forma fraca:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} g(u)v \, \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim é possível associar ao problema (3.1) o seguinte funcional energia:

$$\begin{aligned} J_p : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto J_p(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} G(u) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t) \, \mathrm{d}t$. Considere o funcional:

$$\Phi_p(u) = J_p(u) + \frac{p-1}{p} |\Omega| . \tag{3.3}$$

Como Φ_p e J_p deferem a menos de uma constante podemos estudar os pontos críticos de (3.1) lidando com Φ_p ou J_p. Note que, para cada $p > 1$, $\Phi_p \in C^1\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$ e, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, sua derivada de Fréchet é definida por:

$$\Phi'(u)v = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} g(u)v \, \mathrm{d}x$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Com isso, juntamento com o fato de $W_0^{1,p}(\Omega)$ ser um espaço de Banach reflexivo, podemos definir, para cada $p > 1$, o conjunto de Nehari nodal associada a Φ_p por:

$$\mathcal{N}_p^{\pm} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\};\ \Phi_p'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\right\} .$$

Proposição 3.1. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u^{\pm} \neq 0$. Então existem $t, s > 0$ tais que:*

$$tu^+ + su^- \in \mathcal{N}_p^{\pm}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Ver [8], página 518. ∎

Note que, para cada $p > 1$, existe, pelos resultados em [8] $u_p \in \mathcal{N}_p^{\pm}$ que é uma solução nodal de (3.1) e:

$$\Phi_p(u_p) = \min_{v \in \mathcal{N}_p^{\pm}} \Phi_p(v). \tag{3.5}$$

Além disso:

$$\Phi_p(u_p) = \max_{t,s>0} \Phi_p(tu_p^+ + su_p^-). \tag{3.6}$$

Veremos alguns resultados a respeito do funcional Φ_p e da sequência (u_p) obtida acima.

Lema 3.1. *O funcional Φ_p é não-decrescente com respeito a p.*

Demonstração. Ver Lema 2.2. ∎

Lema 3.2. *A sequência $(\Phi_p(u_p))$ é não-decrescente para $p \in (1, N)$.*

Demonstração. Considere $1 < p_1 \leqslant p_2 < N$. Sejam $u_{p_1} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $u_{p_2} \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ satisfazendo (3.5). Pela maneira que u_{p_2} esta definido temos $u_{p_2}^{\pm} \neq 0$ e, consequentemente, existem $t, s > 0$ tais que

$$tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^- \in \mathcal{N}_{p_2}^{\pm}.$$

Como $W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$, pois $p_2 \geqslant p_1$, vale que

$$tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^- \in \mathcal{N}_{p_1}^{\pm}. \tag{3.7}$$

Logo, pelo Lema 2.2 e afirmações (3.5) a (3.7), decorre que

$$\begin{aligned}
\Phi_{p_2}(u_{p_2}) &= \max_{t,s>0} \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\
&\geqslant \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\
&\geqslant \Phi_{p_1}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\
&\geqslant \Phi_{p_1}(u_{p_1}).
\end{aligned}$$

Portanto a sequência $(\Phi_p(u_p))$ é não-decrescente para $p \in (1, N)$. ∎

Lema 3.3. *A sequência (u_p) é limitada em $BV(\Omega)$ para $p \in (1, \overline{p})$, onde $\overline{p} \in (1, N)$.*

Demonstração. Dado $\overline{p} \in (1, N)$, pelo Lema 3.2, temos

$$\Phi_p(u_p) \leqslant \Phi_{\overline{p}}(u_{\overline{p}}) \tag{3.8}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$, onde $\Phi_{\overline{p}}(u_{\overline{p}}) = c$. Note que $c > 0$ e é tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, \mathrm{d}x \leqslant c \tag{3.9}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$. De fato, por (g_4) e (3.8), vale que

$$\begin{aligned}
c &\geqslant \Phi_p(u_p) \\
&\geqslant \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \\
&\geqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| - \frac{1}{\kappa}\left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_p)u_p\,\mathrm{d}x\right) \\
&\geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa}g(u_p)u_p - G(u)\right)\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \left(\frac{1}{\overline{p}} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Como $\kappa \leqslant \overline{p}$ decorre (3.9). Logo, pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
|||u_p|||_{BV} &= \int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |u_p| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\leqslant C.
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência (u_p) é limitada em $BV(\Omega)$. ∎

Como consequência de (u_p) ser limitada em $BV(\Omega)$ e pelas imersões compactas de $BV(\Omega)$ em $L^m(\Omega)$, para $1 \leqslant m < \frac{N}{N-1}$, existe $\overline{u} \in BV(\Omega)$ tal que:

$(a_1)'$ $u_p \to \overline{u}$ em $L^m(\Omega)$, para $1 \leqslant m < \dfrac{N}{N-1}$;

$(a_2)'$ $u_p \to \overline{u}$ quase sempre em Ω.

$(a_3)'$ Existe $h \in L^m(\Omega)$, com $1 \leqslant m < \dfrac{N}{N-1}$, tal que $|u_p(x)| \leqslant h(x)$.

3.3 Resultado de existência

Demonstração do Teorema 2. Mostremos que a função $\overline{u} \in BV(\Omega)$ encontrada satisfaz as condições $(S_1)'$ a $(S_3)'$ da Definição 3.1.
Condição $(S_1)'$: Mostremos que $-\mathrm{div}(\mathbf{z}) = g(\overline{u})$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(\overline{u})\varphi\,\mathrm{d}x \tag{3.10}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Como vale a convergência fraca (2.10), empregando tal aplicação no campo vetorial $|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x, \tag{3.11}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Como $-\mathrm{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p) = g(u_p)$ mostrar a igualdade (3.10) é equivalente provar que as seguintes convergências ocorrem

$$g(u_p) \to g(u) \qquad\qquad -\mathrm{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p) \to -\mathrm{div}(\mathbf{z})$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p \to 1^+$. Para a primeira convergência considere $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, por (g_1), decorre que

$$g(u_p)\varphi \to g(\overline{u})\varphi,$$

quase sempre em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, pelas afirmações (g_3) e $(a_3)'$, temos

$$\begin{aligned}|g(u_p)\varphi| &\leqslant \left(K_1 + K_2\,|u_p|^{q-1}\right)\varphi\\ &\leqslant \left(K_1 + K_2 h(x)\right)\varphi.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizada, decorre que

$$\int_\Omega g(u_p)\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega g(\overline{u})\varphi\,\mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Portanto

$$g(u_p) \to g(\overline{u}) \tag{3.12}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p \to 1^+$. Para a segunda convergência queremos que

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)\varphi\,\mathrm{d}x \to -\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, pela Identidade de Green

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Assim, pela convergência (3.11)

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)\varphi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x &= \mathrm{div}(\mathbf{z})(\varphi)\\ &= \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto

$$-\mathrm{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p) \to -\mathrm{div}(\mathbf{z}) \tag{3.13}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p \to 1^+$. Com isso, das expressões (3.12) e (3.13), decorre que

$$-\mathrm{div}(\mathbf{z}) = g(\overline{u}) \tag{3.14}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $p \to 1^+$.

Condição $(S_2)'$: Mostremos que $(\mathbf{z}, D\overline{u}) = |D\overline{u}|$ em $\mathcal{M}(\Omega)$. Como $\|\mathbf{z}\|_{L^\infty} \leqslant 1$, pela consequência da Proposição 1.9, temos

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{z}, D\overline{u}), \varphi\rangle &\leqslant |\langle(\mathbf{z}, D\overline{u}), \varphi\rangle|\\ &\leqslant \|\mathbf{z}\|_{L^\infty}\int_\Omega \varphi\,|D\overline{u}|\\ &\leqslant \int_\Omega \varphi\,|D\overline{u}|\\ &\leqslant \langle|D\overline{u}|, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\langle(\mathbf{z}, D\overline{u}), \varphi\rangle \geqslant \langle|D\overline{u}|, \varphi\rangle$. Considere $u_p\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u_p\varphi \geqslant 0$, uma função teste para o problema (3.1) e note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(u_p)u_p\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla (u_p\varphi) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot (\nabla u_p\varphi + u_p\nabla\varphi) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Vamos analisar ambos termos da igualdade acima. Para o primeiro termo do lado direito, pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega \left(\frac{1}{p} |\nabla u_p|^p + \frac{p-1}{1}\right) \varphi \,\mathrm{d}x \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\varphi \,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}x \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\varphi \,\mathrm{d}x &\geqslant \int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x - \frac{p-1}{p}\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}x \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\varphi \,\mathrm{d}x &\geqslant p\int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x - (p-1)\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

assim, pela semicontinuidade inferior do funcional, temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega |\nabla u_p|^p \,\varphi \,\mathrm{d}x &\geqslant \liminf_{p\to 1^+} \left(p\int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x - (p-1)\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}x\right) \\
&\geqslant \liminf_{p\to 1^+} \left(p\int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x\right) - \limsup_{p\to 1^+} \left((p-1)\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}x\right) \\
&\geqslant \liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega |\nabla u_p| \,\varphi \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_\Omega \varphi \,|D\overline{u}|\,.
\end{aligned}$$

Já para o segundo termo do lado direito, notemos que (2.10) ocorre para todo $1 \leqslant r < \infty$, o que implica que

$$\liminf_{p\to 1^+} \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \varphi \,\mathrm{d}x\right) \to \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \varphi \,\mathrm{d}x \qquad (3.16)$$

para todo $\varphi \in L^r(\Omega)$, com $1 \leqslant r < \infty$ Em particular, a expressão anterior ocorre para todo $1 \leqslant m < \frac{N}{N-1}$ e, com isso,

$$|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z} \qquad (3.17)$$

em $L^{m'}(\Omega)$, pois (3.16) ocorre para todo $\varphi \in L^m(\Omega)$. Consequentemente, por (3.17) e $(a_1)'$, temos

$$\liminf_{p\to 1^+} \left(\int_\Omega u_p |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\right) \to \int_\Omega \overline{u}\mathbf{z} \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Para a expressão do lado esquerdo da igualdade (3.15), pelas condições (g_3) e (g_4), temos

$$\begin{aligned}
|g(u_p)u_p\varphi| &= |g(u_p)|\,|u_p|\,|\varphi| \\
&\leqslant \left(K_1 + K_2 |u_p|^{q-1}\right) |u_p|\,|\varphi| \\
&\leqslant \left(K_1 + K_2 h(x)^{q-1}\right) h(x)m
\end{aligned}$$

onde $m > 0$ é o limitante de φ e $\left(K_1 + K_2 h(x)^{q-1}\right) h(x) \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega g(u_p) u_p \varphi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\varphi \,\mathrm{d}x,$$

quando $p \to 1^+$, e por (3.14),

$$\int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\overline{u}\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Logo, fazendo $p \to 1^+$ em (3.15), temos

$$\int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{z})\overline{u}\varphi \,\mathrm{d}x.$$

ou seja,

$$\langle (\mathbf{z}, D\overline{u}), \varphi \rangle \geqslant \langle |D\overline{u}|, \varphi \rangle .$$

Portanto $\langle (\mathbf{z}, D\overline{u}), \varphi \rangle = \langle |D\overline{u}|, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, e, consequentemente,

$$(\mathbf{z}, D\overline{u}) = |D\overline{u}| \tag{3.18}$$

em $\mathcal{M}(\Omega)$.
Condição $(S_3)'$: Mostremos que $[\mathbf{z}, \nu] \in \operatorname{sign}(-\overline{u})$ sobre $\partial\Omega$. Para a primeira desigualdade observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \left(|\overline{u}| + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u}\right) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &\geqslant \int_{\partial\Omega} \left(-[\mathbf{z},\nu]\,\overline{u} + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u}\right) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\geqslant \int_{\partial\Omega} 0 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Para a desigualdade contrária considere $u_p - \varphi$, com $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$, como função teste no problema (3.1). Note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(u_p)\left(u_p - \varphi\right) \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla\left(u_p - \varphi\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \left(\nabla u_p - \nabla\varphi\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p} \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(u_p)\left(u_p - \varphi\right) \,\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

Então, pela a Desigualdade de Young decorre que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_p| \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega |\nabla u_p|^{p} \,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_\Omega g(u_p)(u_p - \varphi) \,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| .
\end{aligned}$$

Assim, pela afirmação (2.10), da expressão acima e da semicontinuidade inferior, temos

$$\begin{aligned}
\|\!|\overline{u}|\!\|_{BV} &= \int_\Omega |\nabla \overline{u}|\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\overline{u}|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leqslant \liminf_{p\to 1^+} \left(\int_\Omega |\nabla u_p|\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |u_p|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right) \\
&\leqslant \liminf_{p\to 1^+} \left(\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\, \nabla u_p \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \frac{1}{p} \int_\Omega g(u_p)(u_p - \varphi)\,\mathrm{d}x + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{p-1}{p} |\Omega| + \int_{\partial\Omega} |u_p|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \right) \\
&\leqslant \int_\Omega \mathbf{z}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g(\overline{u})\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant - \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} |\overline{u}|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant \int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

Além disso, por (3.14), (3.18) e da Formula de Green em $BV(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\,\mathrm{d}x &= - \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\overline{u}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, D\overline{u})\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega |D\overline{u}| - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima em (3.21) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |D\overline{u}| + \int_{\partial\Omega} |\overline{u}|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &\leqslant \int_\Omega |D\overline{u}| - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_{\partial\Omega} |\overline{u}|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} &+ \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \int_{\partial\Omega} & (|\overline{u}| + [\mathbf{z},\nu]\,\overline{u})\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \leqslant 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Portanto, por (3.19) e (3.22),

$$[\mathbf{z},\nu] \in \mathrm{sign}(-\overline{u})$$

sobre $\partial\Omega$. ■

Proposição 3.2. *A solução $\overline{u}$ é não-trivial.*

Demonstração. Mostremos que $\overline{u} \neq 0$. Considere o funcional energia

$$\begin{aligned}
\Phi : BV(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
u &\longmapsto \Phi(u) = \|\!|u|\!\|_{BV} - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Note que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\Phi(u) \leqslant \Phi_p(u)$$

De fato, pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= |||u|||_{BV} - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |u|\ \mathrm{d}x + \int_\Omega |Du| - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |Du| - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\ \mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega| - \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \Phi_p(u).
\end{aligned}$$

Note também que

$$\lim_{p\to 1^+} \Phi_p(u_p) = \Phi(\overline{u}). \tag{3.23}$$

De fato, considerando u_p como função teste para (3.1), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p\ \mathrm{d}x &= \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_\Omega g(u_p)u_p\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega g(\overline{u})\overline{u}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{z})\overline{u}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, D\overline{u}) - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}\nu]\,\overline{u}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega |D\overline{u}| + \int_{\partial\Omega} |\overline{u}|\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega |D\overline{u}|.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Além disso, pelas afirmações (g_3), $(a_1)'$ e do Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{p\to 1^+} \int_\Omega G(u_p)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega G(\overline{u})\,\mathrm{d}x. \tag{3.25}$$

Logo, por (3.24) e (3.25), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 1^+} \Phi_p(u_p) &= \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(u_p)\,\mathrm{d}x + \frac{p-1}{p}|\Omega|\right) \\
&= \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|\ \mathrm{d}x - \lim_{p\to 1^+}\int_\Omega G(u_p)\,\mathrm{d}x + \lim_{p\to 1^+}\frac{p-1}{p}|\Omega|\right) \\
&= \int_\Omega |D\overline{u}| - \int_\Omega G(\overline{u})\,\mathrm{d}x \\
&= \Phi(\overline{u}).
\end{aligned}$$

Dado $s \in \mathbb{R}$, pela afirmação (g_3), temos

$$\begin{aligned} |g(s)s| &\leqslant \left|K_1 s + K_2 \left|s\right|^{q-1} s\right| \\ &\leqslant K_1 \left|s\right| + K_2 \left|s\right|^q. \end{aligned}$$

Assim, pela afirmação (g_2), para todo $\varepsilon > 0$ existe $c > 0$, com c dependente de ε, tal que

$$|g(s)s| \leqslant \varepsilon \left|s\right| + c \left|s\right|^q$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Então

$$\Phi(u) \geqslant (1-\varepsilon) \left\|u\right\|_{BV} - c \left\|u\right\|_{BV}^q \tag{3.26}$$

para todo $u \in BV(\Omega)$. Assim, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon > \dfrac{1}{2}$, se $\left\|u\right\|_{BV} \leqslant \rho$, onde $0 < \rho < \left(\dfrac{(1-\varepsilon) - \frac{1}{2}}{c}\right)^{\frac{1}{q-1}}$, decorre que

$$\Phi(u) \leqslant \frac{\left\|u\right\|_{BV}}{2}. \tag{3.27}$$

Como $u_p \in \mathcal{N}_p^{\pm}$ segue que $u^{\pm} \in \mathcal{N}_p$. Com isso, quando $s = 1$, a função $s \longmapsto \Phi_p(su_p^{\pm})$ atinge seu valor de máximo. Logo

$$\begin{aligned} \Phi_p(u_p^{\pm}) &\leqslant \Phi_p\left(\frac{\rho u_p^{\pm}}{\left\|u_p^{\pm}\right\|}\right) \\ &\leqslant \Phi\left(\frac{\rho u_p^{\pm}}{\left\|u_p^{\pm}\right\|}\right) \\ &\leqslant \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\frac{\rho}{2} \leqslant \Phi_p(u_p^{\pm}) = \frac{1}{p}\int_\Omega g(u_p^{\pm})u_p^{\pm}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega G(u_p^{\pm})\,\mathrm{d}x \tag{3.28}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$. Como $u_p^{\pm} \to 0$ em $BV(\Omega)$ segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e da afirmação (g_3), que (3.28) não pode ocorrer. Portanto $\overline{u}^{\pm} \neq 0$ e, consequentemente, $\overline{u} \neq 0$. ■

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho mostramos a existência de três “categorias” de soluções para um problema elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano, um termo com crescimento subcrítico em um domínio limitado, a saber: não-positiva, não-negativa e nodal.

Para esse objetivo consideramos o problema envolvendo o operador p-Laplaciano e analisamos o que ocorre quando $p \to 1^+$. No Capítulo 2, obtemos soluções não-positiva e não-negativa para o problema (P_1) utilizando o Teorema do Passo da Montanha juntamente com a fato do funcional energia associado satisfazer a condição de Palais-Smale no nível c obtendo, com isso, uma família de pontos críticos. Já no Capítulo 3, obtemos uma solução nodal para o problema (P_2) minimizando seu funcional energia associado “em cima” da variedade nodal.

Em ambos casos foi necessário mostrar que a família de soluções é limitada em $BV(\Omega)$, a qual de demonstração é diferente em ambos os casos.

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti; A. Malchiodi. *Nonlinear Analysis with Applications to Semilinear Elliptic Problems.* Cambridge University Press, 2007.

[2] A. Ambrosetti; P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14:349–381, 1973.

[3] L. Ambrosio; N. Fusco; D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.* Oxford University Press, 2000.

[4] F. Andreu; C. Ballester; J. Mazón. Minimizing total variation flow. *Differential and Integral Equations*, 331(11), 2000.

[5] F. Andreu; C. Ballester; V. Caselles; J. Mazón. The dirichlet problem for the total variation flow. *Journal of Functional Analysis*, 180:347–403, 2000.

[6] G. Anzellotti. Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 135:293–318, 1983.

[7] H. Attouch; G. Buttazzo; G. Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization.* Mathematical Programming Society and Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[8] B. Barile; Figueiredo, G. M. Existence of least energy nodal solution for a class of $p\&q$-quasilinear elliptic equations. *Advanced Nonlinear Studies*, 14:511–530, 2014.

[9] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[10] Y. Chen; S. Levine; Murali, R. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(4):1383–1406, 2006.

[11] L. C. Evans; R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Taylor & Francis Group, 2015.

[12] G. M. Figueiredo. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos.* Notas de aula na UNB, 2016.

[13] G. M. Figueiredo; M. T. O. Pimenta. Existence of bounded variation solutions for a $1-$laplacian problem with vanishing potentials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 459(2), 2016.

[14] G. M. Figueiredo; M. T. O. Pimenta. Nehari method for locally lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 25(47), 2018.

[15] G. M. Figueiredo; M. T. O. Pimenta. Nodal solutions to quasilinear elliptic problems involving the 1-laplacian operator via variational and approximation methods. *Indiana University Mathematics Journal*, 2020.

[16] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 2 edition, 1999.

[17] B. Kawohl; F. Schuricht. Dirichlet problems for the 1-laplace operator, including the eigenvalue problem. *Communications in Contemporary Mathematics*, 9(4), 2007.

[18] B. Kawohl; V. Fridman. Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the laplace operator and the cheeger constant. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 44(4), 2003.

[19] S. Kesavan. *Topics in functional analysis and applications.* New Age International, 1989.

[20] A. Molina Salas; S. Segura de León. Elliptic equations involving the 1-laplacian and a subcritical source term. *Nonlinear Analysis*, 168:50–66, 2018.

[21] M. T. O. Pimenta. *Espaço das funções de variação limitada e aplicações a problemas quasilineares elípticos.* Notas de aula na UNESP, 2017.

[22] M. Willem. *Minimax Theorems.* Springer Science and Business Media, 1996.