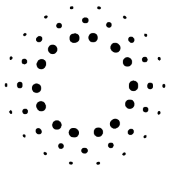

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.003/22

Teoria de perturbação causal no plano nulo

Oscar Adán Acevedo Sánchez

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Julho de 2022

Acevedo Sánchez, Oscar Adán.
A174t Teoria de perturbação causal no plano nulo / Oscar Adán Acevedo Sánchez. – São Paulo, 2022
244 f.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar

1. Teoria quântica de campos. 2. Causalidade (Física). 3. Campos de calibre (Física). I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

Agradecimentos

«Gratidão», do latim *gratitūdo*, é o «sentimento que obriga uma pessoa a estimar o benefício ou favor que outra lhe tem feito ou tem querido fazer, e a lhe corresponder de alguma maneira». Há, como não?, muitas pessoas por quem sinto gratidão. Esta pagina tem a missão –é claro que incumprível– de lhes «corresponder de alguma maneira».

As primeiras dessas pessoas se encontram em minha família. Meus pais, Diego e Erika, que orientaram minha vida para o bem, me inculcaram a disciplina ademais de valores cruciais como a responsabilidade e o respeito, e me apoiaram sempre. Jamais poderei lhes agradecer o suficiente. Meu irmão, Diego, e a bela família que começou formar durante este tempo. Meu avô, Alberto, que partiu no decorrer destes meus estudos.

Gostaria de agradecer muito especialmente a meu orientador, o professor Dr. Bruto Pimentel, quem me deu a oportunidade de fazer pesquisa, me ensinou bastante de física, e se tornou um muito apreciado amigo.

Estes anos, sem dúvida, não teriam sido tão felizes e inspirados sem a presença de quem agora é minha amada esposa, Evelyn, cuja luz, paciência e carinho foram essenciais para meu crescimento espiritual.

Ainda desejo fazer menção a essas pessoas que, sem conhecê-las pessoalmente, tiveram um grande impacto em minha vida. Entre eles se destacam Aristocles, chamado Platão, Leibniz e Kierkegaard. Muito obrigado por falar conosco, através dos séculos, por meio de suas grandes obras.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento, e ao Instituto de Física Teórica pelo acolhimento.

«Fazer contabilidade com uma grandeza infinita é impossível,
pois calcular é exatamente tornar finito.»

Søren Aabye Kierkegaard, «As obras do amor»

Resumo

A teoria do campo quantizado na dinâmica do plano nulo é uma ferramenta amplamente usada na física hadrônica por permitir a aplicação de técnicas e aproximações cuja implementação prática na dinâmica instantânea é inviável. Contudo, ela não está isenta de dificuldades: Questões relativas à regularização e renormalização das amplitudes que envolvem os termos instantâneos que aparecem tipicamente nesta forma dinâmica permanecem sem resposta definitiva, o que se manifesta já no regime perturbativo. A tese que agora se submete à consideração visa esclarecer estes pontos a partir da perspectiva da teoria de perturbação causal. Essa é uma teoria para a construção perturbativa do operador de espalhamento, entendido como um mapa no espaço de Fock dos estados assintoticamente livres e que, por isso, utiliza somente os bem definidos campos livres. Ela foi originalmente formulada na dinâmica instantânea e se assenta sobre a teoria das distribuições, devido ao qual os resultados a que leva são todos finitos, livres das divergências ultra-violetas, não requerendo, por isto, processos de regularização.

Nesta tese, a teoria de perturbação causal é formulada na dinâmica da frente de luz, tendo em mente os pontos acima referidos e permitindo, como outrora na dinâmica instantânea, resolver as ambiguidades decorrentes da multiplicidade dos procedimentos de regularização, frequentemente apontadas na literatura do plano nulo. A teoria assim obtida é aplicada ao modelo de Yukawa e, após um estudo ao redor da implementação da invariância de gauge quântica, à eletrodinâmica fermiônica. Estudamos estes modelos à segunda ordem na constante de acoplamento, estabelecendo suas densidades lagrangianas de interação e calculando as correções radiativas; provamos, também, a normalizabilidade do operador de espalhamento físico que lhes corresponde. Por último, no caso da eletrodinâmica provamos que é possível satisfazer às identidades de Ward-Takahashi em todas as ordens da série perturbativa.

Palavras Chaves: Teoria quântica do campo; Teoria de perturbação causal; Dinâmica da frente de luz.

Áreas do conhecimento: Física; Teoria quântica do campo.

Abstract

The theory of quantized fields on the null-plane is a commonly used tool for the study of hadron physics, as it allows the application of techniques and approximations whose usage in instant dynamics is almost impracticable. Nonetheless, it is not free of difficulties: Questions about the regularization and renormalization of the amplitudes involving the instantaneous terms that typically appear in this dynamical form stay without a definitive answer, which is already manifest at the perturbative regime. The thesis now being submitted to consideration intends to shed light on these points from the perspective of causal perturbation theory. It is a perturbation theory for the construction of the scattering operator, understood as a map between Fock's spaces of the asymptotically free states, and which, as a consequence, uses the well-defined free fields only. It was originally formulated in instant form dynamics and rests on distribution theory, because of which it leads to finite results free of ultra-violet divergences, requiring no regularization procedure.

In this thesis, causal perturbation theory is formulated in light-front dynamics, keeping in mind the above points and allowing, as erstwhile in instant dynamics, to clarify the ambiguities that come from the diversity of regularization procedures, frequently pointed out in the null-plane literature. The theory so obtained is applied to Yukawa's model and, after a study around the implementation of quantum gauge invariance, to the fermion quantum electrodynamics. We study these models at the second order in the coupling constant, establishing their interaction Lagrangian densities and calculating their radiative corrections; we also prove the normalizability of their corresponding physical scattering operators. At last, for the electrodynamics we show that it is possible to satisfy Ward-Takahashi's identities at all orders of perturbation theory.

Key-words: Quantum field theory; Causal perturbation theory; Light-front dynamics.

Areas of knowledge: Physics; Quantum field theory.

Índice

1 Introdução **1**

1.1 Forma dinâmica da frente de luz (do plano nulo) 1

1.2 Teoria de perturbação causal 4

2 Dinâmica da frente de luz na teoria clássica **9**

2.1 Problema dos valores iniciais para a equação de Klein-Gordon-Fock 9

2.2 Formas dinâmicas 22

2.3 «Coordinalização» invariante no plano nulo 25

2.4 Teoria lagrangiana do campo clássico no plano nulo 28

2.5 Campo escalar 31

2.6 Campo de Dirac 33

2.7 Campo eletromagnético 39

3 Quantização do campo no plano nulo **45**

3.1 Espaço de Fock dos estados quânticos e definição do campo quantizado . . . 45

3.2 Quantização do campo escalar 64

3.3 Quantização do campo de Dirac 69

3.4 Quantização do campo vetorial sem massa 72

4 Teoria de perturbação causal no plano nulo **75**

4.1 Axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov 76

4.2 Teoria perturbativa do operador de espalhamento 79

4.3 Construção indutiva das distribuições de transição 83

4.4 Teoremas de causalidade 85

4.5 Divisão da distribuição causal no espaço real 94

4.6 Divisão da distribuição causal no espaço dos momentos 102

4.7 Normalização das soluções ao problema da divisão 108

4.8 Unitariedade do operador de espalhamento 112

4.9 Fatorização de polinômios na distribuição causal 114

4.10 Propagadores de Feynman dos campos quantizados livres 117

5 Modelo de Yukawa **122**

5.1 Distribuição causal da segunda ordem 124

5.2 Espalhamento de um férmion por um bóson 126

5.3 Auto-energia do méson 127

5.4 Auto-energia do núcleon 134

5.5 Normalizabilidade e termos de auto-interação 143

6 Invariância de gauge quântica para campos de gauge sem massa **149**
6.1 Extensão do espaço de Fock . . . 149
6.2 Prova da invariância de Poincaré do subespaço físico . . . 152
6.3 Pseudo-unitariedade da transformação de Poincaré no espaço de Fock estendido . . . 155
6.4 Definição da transformação de gauge quântica . . . 159
6.5 Invariância de gauge quântica do operador de espalhamento . . . 166
6.6 Unitariedade do operador de espalhamento no subespaço físico . . . 173

7 Eletrodinâmica quântica fermiônica **175**
7.1 Construção do primeiro termo pela invariância de gauge quântica . . . 175
7.2 Distribuição causal da segunda ordem . . . 179
7.3 Processos de espalhamento . . . 181
7.4 Polarização do vácuo . . . 185
7.5 Auto-energia do férmion . . . 190
7.6 Interação luz-luz . . . 195
7.7 Normalizabilidade . . . 196
7.8 Identidades de Ward-Takahashi . . . 199

8 Epílogo **211**

A Definição algébrica das formas dinâmicas **218**

B Matrizes de Dirac no plano nulo **228**

C Causalidade e valores limite de funções analíticas **229**

Referências **232**

Capítulo 1

Introdução

A teoria quântica do campo –doravante QFT por suas siglas em inglês– é uma das teorias mais precisas já criadas para a descrição dos fenômenos que têm lugar nas microescalas: Desde seu início, os cientistas descrevem com ela o espalhamento das partículas fundamentais como das compostas, calculam a razão giromagnética dos léptons, reproduzem os desdobramentos no espectro de energia do átomo, *et cetera*. Muitos desses problemas são solucionados com o uso da denominada «forma instantânea» da QFT, na qual o parâmetro de evolução dinâmica é a coordenada x^0. Alguns outros, como o estudo do laser e da estrutura interna dos hádrons, têm se mostrado mais simples na chamada «forma da frente de luz» ou do «plano nulo», na qual o parâmetro de evolução é a coordenada $x^+ \sim x^0 + x^3$. Por outro lado, a formulação mais conhecida e utilizada da QFT, aquela devida a Tomonaga, Schwinger, Feynman e Dyson, entre outros, exibe divergências ultra-violetas nas amplitudes correspondentes aos diagramas em que estão presentes *loops*; embora essas divergências possam ser removidas com o uso das técnicas de regularização e de renormalização, resulta insatisfatório desenvolver uma teoria que está mal definida desde o início, e que, por isso, leva ao aparecimento de determinadas ambiguidades. Uma alternativa a essa formulação é a «teoria de perturbação causal» –doravante TPC–, cuja forma quase-final na dinâmica instantânea é devida a Epstein e Glaser. A tese que agora iniciamos tem como primeiríssimo objetivo reformular essa teoria axiomática do operador de espalhamento na dinâmica do plano nulo. Com o intuito de salientar a importância de semelhante tarefa, oferecemos nesta Introdução um breve resumo da história e do trabalho que tem sido desenvolvido, tanto na QFT no plano nulo quanto na TPC.

1.1 Forma dinâmica da frente de luz (do plano nulo)

No ano 1949, Dirac [1] começou o estudo das possíveis formas dinâmicas compatíveis com a teoria da relatividade [2, 3, 4] no contexto da formulação hamiltoniana –vide também as Refs. [5, 6]–. Ele encontrou três possibilidades: (a) *Forma instantânea:* aquela em que as superfícies isocrônicas são as superfícies com valor constante da variável x^0; (b) *forma-ponto:* com superfícies isocrônicas os ramos superiores dos hiperbolóides $a^2 = x^2$, com o tempo definido pelo parâmetro a^2; (c) *forma da frente de luz:* as superfícies isocrônicas são planos nulos de valor constante da coordenada x^+. Além delas, em 1978 Leutwyler e Stern [7] encontraram mais duas, com as seguintes superfícies isocrônicas: (d) os ramos superiores dos hiperbolóides $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = a^2$, e (e) os ramos superiores dos hiperbolóides $(x^0)^2 - (x^3)^2 = a^2$; nos dois casos, o tempo é definido pelo valor de a^2. Estes autores mostraram também, se apoiando na classificação dos subgrupos do grupo de Poincaré então

recentemente feita [8, 9, 10, 11], que essas cinco formas dinâmicas são as únicas possíveis uma vez que seja imposta a transitividade do grupo de estabilidade das superfícies isocrônicas[1], e nenhuma outra pode existir. Impera fazer notar que no limite newtoniano em que a velocidade da luz adota o valor infinito, $c \to +\infty$, as cinco formas dinâmicas relativísticas degeneram na dinâmica instantânea, motivo pelo qual o limite newtoniano não é motivo de preferência da forma instantânea na teoria relativísitica: A finitude da velocidade da luz não faz aparecer novas formas dinâmicas, mas levanta sua degenerescência.

É justo dizer que as cinco formas dinâmicas merecem atenção, pois é bem possível que sejam adequadas para a resolução de determinados problemas específicos. Quanto à forma do plano nulo, ela é especial: Dirac [1] mostrou que nela o número de geradores do grupo de Poincaré independentes da interação é máximo; também, os planos nulos são as superfícies características da equação de Klein-Gordon-Fock [12, 13]. Há ainda uma vantagem prática na quantização do campo no plano nulo, que foi apontada por Brodsky, Pauli e Pinsky [14]: Especificar a função de onda inicial de um átomo composto por n elétrons na dinâmica instantânea requer a medição simultânea das posições de todos os elétrons; para determinar tal função de onda inicial a tempo x^+ constante, por outro lado, requer-se apenas um experimento de espalhamento de uma onda plana de laser. Quer dizer, a especificação experimental das condições iniciais se simplifica na adoção da forma dinâmica do plano nulo.

Após o referido artigo de Dirac, muito pouco trabalho foi feito em relação às recém descobertas formas dinâmicas. A dinâmica da frente de luz, nada obstante, re-apareceu independentemente na física como uma ferramenta útil para o estudo de dois problemas. Primeiro, em 1965 nos trabalhos de Fubini e Furlan [15] na área da álgebra de correntes, como o limite de um sistema inercial de referência movendo-se com velocidade próxima à da luz; eles chamaram tal referencial «sistema de referência de momento infinito»; nessa linha de pesquisa se encontram, por exemplo, os trabalhos de Weinberg [16] e de Bebié e Leutwyler [17]. Mais tarde, porém independentemente, a dinâmica do plano nulo se mostrou vantajosa no estudo dos campos de laser em 1967 durante os estudos de doutorado de Neville sob a orientação de Rohrlich –essa história é relatada nas Refs. [13, 18, 19]–. Como vemos, a dinâmica do plano nulo, sem referência alguma ao trabalho de Dirac, renasceu na física como uma ferramenta fenomenológica. Mas a relação com o estudo de Dirac não tardou em ser reconhecido: Chang e Ma [20], em 1969, publicaram um artigo devotado ao estudo do modelo com interação φ^3 e ao da eletrodinâmica quântica –doravante QED por suas siglas em inglês– nas novas variáveis da frente de luz. Além de mostrar que a utilização dessas variáveis facilita o cálculo das auto-energias em segunda ordem e do momento magnético do elétron, estabeleceram pela primeira vez, se bem que de forma um tanto imprecisa, a relação entre o sistema de referência de momento infinito e a forma da frente de luz de Dirac. Em 1970, também, Kogut e Soper [21] estabeleceram que o limite de momento infinito pode ser reinterpretado como uma mudança de variáveis, identificando essa abordagem com a quantização no plano nulo de Rohrlich e Neville. É interessante notar que Kogut e Soper, o

[1] Isto é, que todo ponto da superfície possa ser mapeado em qualquer outro pela aplicação de algum elemento do grupo de estabilidade.

mesmo que muitos dos artigos que vieram à luz nos anos seguintes, não citaram o artigo de Dirac, mas o de Chang e Ma, de forma que é bem possível que já estivessem cientes do trabalho de Dirac. Concluindo, podemos dizer com justiça que a dinâmica do plano nulo foi independentemente descoberta três vezes: Em 1949 por Dirac, em 1965 por Fubini e Furlan, e em 1967 por Neville e Rohrlich, e que as diversas abordagens foram identificadas como correspondentes a uma e a mesma teoria por Chang e Ma e por Kogut e Soper. Semelhante situação não é incomum na história intelectual.

Com o renascimento do estudo das formas dinâmicas impulsionado pela física no plano nulo e a correspondente re-descoberta das idéias de Dirac, advieram igualmente trabalhos de pesquisa na forma dinâmica da forma-ponto –uma revisão relativamente recente pode ser encontrada na Ref. [22]–. Desde então o trabalho na forma dinâmica do plano nulo intensificou-se. O problema dos valores iniciais sobre o plano nulo, para os campos escalar, de Dirac e eletromagnético foi estudado por Rohrlich e Neville [13, 23], que estabeleceram teoremas de existência e unicidade das soluções; em particular, para o campo eletromagnético introduziram a condição de gauge do plano nulo, $A^+ = 0$, que então tornou-se a escolha natural nessa forma dinâmica. Uma contribuição importante para a quantização do campo no plano nulo foi dada por Leutwyler, Klauder e Streit [24]; entre os diversos resultados teóricos que estes pesquisadores obtiveram, foi estabelecido de forma precisa o significado da independência da massa nessa forma dinâmica: Dois espaços de Fock correspondentes a partículas com massas diferentes são unitariamente equivalentes. A propósito de equivalências, Ten Eyck e Rohrlich [25, 26], por um lado, e Chang, Root e Yan [27, 28, 29, 30] pelo outro, estudaram a equivalência entre a QFT no plano nulo e a QFT na forma instantânea comumente usada. Na Ref. [31], Brodsky, Roskies e Suaya consideraram a renormalização da QED no plano nulo. Na área fenomenológica, Drell, Levy e Yan [32, 33, 34, 35] usaram a QFT na frente de luz como a linguagem natural para formular o modelo a pártons. Uma ferramenta importante para o cálculo das funções de onda e o espectro dos hádrons é a «quantização discreta no cone de luz», inventada por Maskawa e Yamawaki[2] [39] e explorada na prática por Pauli e Brodsky [40, 41]. No regime não-perturbativo, um método muito relevante é a «abordagem hamiltoniana no cone de luz» (*light-cone Hamiltonian approach*) [14], amplamente usado nos estudos da física hadrônica e que explora as propriedades únicas da dinâmica da frente de luz, as quais permitem usar técnicas computacionais cuja implementação prática na dinâmica instantânea é inviável, *exempli gratia*, *basis light-front quantization* [42, 43], a aproximação de Tamm-Dancoff [44], *et cetera*. Um compêndio das importantes contribuições e perspectivas da cromodinâmica quântica –doravante QCD por suas siglas em inglês– no plano nulo pode ser lido na Ref. [45].

Voltando à área teórica, a formulação das teorias de gauge não-abelianas no plano nulo foi feita pela primeira vez por Tomboulis [46] na ausência de matéria, e por Casher [47] na presença de férmions. Contudo, as amplitudes de Feynman a um *loop* exibiam

[2]Estes autores introduziram a mencionada técnica para solucionar o assim chamado «problema dos modos zero». Uma importante revisão do problema e sua solução mediante a discretização do momento encontra-se na Ref. [36]. O problema, contudo, pode também ser solucionado na formulação contínua; quando o caráter distribucional dos campos é levado em consideração, os modos zero podem ser removidos por simples restrição do espaço das funções de teste [37, 38].

singularidades de pólo duplo como consequência de um tratamento inconsistente dos pólos do propagador do campo de gauge; este problema foi solucionado por Pimentel e Suzuki [48], que propuseram uma prescrição de deslocamento dos pólos apoiada no princípio da causalidade. Também, a estrutura de vínculos da teoria de gauge não-abeliana na forma dinâmica da frente de luz, sob a condição de gauge do plano nulo, foi estudada por Pimentel, Suzuki e Zambrano na Ref. [49].

Apesar dos resultados antes referidos, há ainda alguns aspectos da QFT no plano nulo que esperam esclarecimento. Por exemplo, até agora a equivalência entre a QFT no plano nulo e a convencional é assunto de discussão –*exempli gratia*, vide as Refs. [50, 51] a respeito da QED–. Isto está relacionado ao ponto, também ainda obscuro, da importância e efeitos do termo instantâneo do propagador do campo de Dirac e os do campo eletromagnético; o *status quo* do propagador do campo de gauge é revisado nas Refs. [52, 53]. Ainda, o cumprimento das identidades de Ward-Takahashi a um *loop* na QED no plano nulo é estudado na Ref. [54]. Ocorre que esses assuntos têm sido abordados sempre desde a ótica da formulação hamiltoniana da QFT –em particular, fazendo uso da assim chamada «teoria de perturbações *old-fashioned*», como na Ref. [55]–, e algumas poucas vezes desde a abordagem funcional; pretendemos dar respostas a estas questões a partir de uma nova perspectiva.

1.2 Teoria de perturbação causal

A história da QFT é bem conhecida. Ela foi inventada por Born e Jordan em 1925 [56] sob o nome «eletrodinâmica matricial» no espírito da mecânica matricial de Heisenberg. Nesse trabalho foi feita a quantização do campo eletromagnético como um conjunto de osciladores desacoplados. Artigos muito importantes foram publicados naqueles anos, mostrando, além de promissores resultados, os primeiros grandes problemas da teoria; por exemplo, em 1928 Jordan e Pauli [57] reconsideraram a quantização do campo eletromagnético, introduzindo a agora chamada «distribuição de Jordan-Pauli», e colocando pela primeira vez o problema da energia infinita do ponto zero. No mesmo ano, Jordan e Wigner [58] mostraram que o princípio de exclusão de Pauli requer a quantização com anti-comutadores. Também, o método geral de quantização canônica foi desenvolvido por Heinseberg e Pauli em 1929 [59]. Todos esses resultados –e muitos outros, concernentes, por exemplo, à teoria do campo de Dirac e sua quantização, história que pode ser encontrada, por exemplo, na Ref. [60]– deram origem às duas famosas contribuições de Pauli: Seu artigo de 1940 sobre a relação entre spin e estatística [61] e sua excelente revisão, publicada em 1941, da quantização dos campos [62].

O seguinte tópico na história da QFT foi a construção da teoria em interação. A tentativa mais difundida foi aquela devida a Tomonaga, Koba, Tati e Kanesawa [63, 64, 65, 66, 67], que publicaram uma série de artigos entre 1946 e 1948, Schwinger [68, 69, 70] entre os anos 1948 e 1949, e Feynman [71] em 1949; a equivalência entre estes trabalhos foi provada por Dyson [72] em 1949. Foi o mesmo Dyson, e no mesmo ano, o primeiro a regularizar as integrais da QED e a renormalizar a teoria mediante a absorção dos infinitos nos termos de carga e massa [73].

Por esses anos, a noção de campo quantizado como um operador agindo sobre um es-

paço de Hilbert estava sendo questionado. Especialmente importante é a contribuição de Friedrichs em 1951 [74], que estabeleceu que os campos quantizados devem ser funcionais lineares, definidos sobre funções de alguma classe a ser determinada, com a finalidade de poderem ter uma representação espectral. Este autor já nomeia tais campos como «distribuições», citando o trabalho de Schwartz, as primeiras edições das Refs. [75, 76], publicadas nos anos 1950 a primeira parte e 1951 a segunda –embora Friedrichs apenas menciona a primeira parte, sem dúvida devido à novidade do trabalho–. A respeito dos primeiros anos da história do desenvolvimento da teoria das distribuições pode-se consultar, por exemplo, a Ref. [77]. Esta noção foi rapidamente aeita pela comunidade axiomática e originou importantíssimas contribuições: Permitiu a Cook [78] formalizar, em 1953, a construção do espaço de Fock, recentemente proposto por este [79], como o espaço de Hilbert sobre o que age o operador de campo livre. Tal construção evita o aparecimento do problema da energia do ponto zero, que então pode considerar-se apenas um efeito indesejado do uso, não rigoroso, da correspondência clássico-quântica. Também, foi utilizado por Haag [80] em 1955 ao estabelecer o famoso teorema que leva seu nome, e segundo o qual todo campo quantificado local e covariante relativístico, conectado unitariamente com um campo quantificado livre, é livre também –uma exposição das diversas variantes desse teorema, assim como suas interpretações, se encontra na Ref. [81]–. Disto conclui-se que, contrariamente ao que ocorre na mecânica quântica de finitos graus de liberdade, a descrição de interação não existe, pois não existe operador unitário que a realize. Este ponto crucial é motivo suficiente para que a comunidade axiomática frequentemente faça uso da descrição de Heisenberg –nesta direção apontam, por exemplo, as abordagens de Källén [82] e de Nakanishi e Ojima [83]–. Por outro lado, já em 1956, Wightman [84] estudava as propriedades dos campos quantizados como distribuições. No ano seguinte, em 1957, Bogoliubov e Parasiuk [85] identificavam a fonte das divergências ultra-violetas que apareciam usualmente nas teorias quânticas do campo no produto de distribuições no mesmo ponto, ou de uma distribuição por uma função descontínua. Mais tarde, em 1964, Wightman [86] provou definitivamente que os campos não podem ser definidos nos pontos do espaço-tempo, mas apenas como distribuições.

Essas discussões originaram as assim chamadas «abordagens axiomáticas». Uma delas foi iniciada por Garding, Streater e Wightman [87, 88], considerando como objetos básicos os campos quantizados na descrição de Heisenberg e seus valores esperados no vácuo –chamadas funções de Wightman ou funções de correlação–; embora matematicamente consistente, somente têm sido construídos modelos não-triviais satisfazendo aos axiomas de Wightman em baixas dimensões [89] –vide também a Ref. [90]–. Outra abordagem axiomática é aquela de Lehmann, Symanzik e Zimmermann –comumente denominada «formalismo LSZ»– [91], em que os objetos básicos são os produtos cronológicos dos campos e seus valores esperados no vácuo (funções de Green). Essa abordagem não é bem definida do ponto de vista matemático, pois contém produtos dos campos com as funções descontínuas de Heaviside, levando a divergências semelhantes àquelas presentes na abordagem hamiltoniana. Mencionamos também a abordagem algébrica de Haag, Araki e Kastler [92, 93], baseada na observação, feita por Segal em 1947 [94], de que é a álgebra dos observáveis limitados,

e não sua representação explícita, o principal objeto matemático da teoria quântica –uma importante referência para esta proposta axiomática é o já clássico livro de Haag [95]–.

A abordagem que seguir-se-á nessa tese, chamada «programa da matriz S», foi iniciada por Heisenberg [96] em 1943 como uma tentativa de ir além da teoria lagrangiana, e em boa medida motivou as abordagens axiomáticas que antes comentamos, as quais consideraram a proposta de Heisenberg de uma forma não tão radical. Heisenberg compreendeu que o objeto observável básico na física das partículas é a matriz S, propondo por isso que a teoria seja diretamente construída em função de seus elementos. A ideia foi adotada por Stückelberg, cujo desenvolvimento é exposto em detalhe no capítulo 7 da Ref. [97]. Particularmente, foi em 1946 que Stückelberg anunciou que uma condição de causalidade é necessária para determinar univocamente a matriz S perturbativamente, para o qual a unitariedade e a invariância relativística não são suficientes. Ele trabalhou nessa ideia com seu estudante Rivier [98] e obteve uma teoria em que as integrais infinitas são substituídas por termos finitos indeterminados. Adicionalmente, estes pesquisadores argumentaram que, como a matriz de espalhamento é um mapa entre espaços de estados livres, ela só deveria ser construída utilizando os operadores de campo livre.

Estes resultados foram o ponto de partida no esquema axiomático de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov [99, 100, 101]. Usando da linguagem da teoria das distribuições, simplificaram a condição de causalidade de Stückelberg e Rivier pela introdução de uma «função de comutação» g (*switching function*), da qual o operador de espalhamento torna-se um funcional, $S = S(g)$, que pode então ser construído só com os bem definidos campos livres.

Sobre esta base axiomática trabalhou Stepanov[3] [102], que em 1965 estabeleceu um método indutivo para construir a matriz S perturbativamente, baseado principalmente no axioma da causalidade. Ele levou em consideração o caráter distribucional do campo ao estudar cuidadosamente o espaço das funções de teste em que estão definidas as diversas distribuições numéricas que aparecem nos termos perturbativos da matriz S, usando posteriormente o teorema de Hahn-Banach para estender as ditas distribuições a um espaço de funções mais geral. Contudo, Stepanov utilizou uma formulação do axioma da causalidade em que a função de comutação de Bogoliubov não aparece, do qual é possível inferir que seu trabalho ainda teria problemas de divergências infra-vermelhas. O trabalho de Stepanov, finalmente, não encontrou resposta da comunidade.

A solução perturbativa completa dos axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov foi detalhadamente desenvolvida em 1973 por Epstein e Glaser [103], que evitaram o uso dos mal definidos produtos cronológicos, e assim o aparecimento das divergências ultra-violetas, substituindo os produtos mencionados por um processo indutivo baseado na causalidade semelhante ao utilizado por Stepanov, e que, diferentemente deste, fazia uso tanto da função de comutação de Bogoliubov, permitindo controlar adequadamente as divergências infra-vermelhas, como de uma cuidadosa divisão da distribuição causal em suas partes retardada e avançada, este último possível graças à teoria de divisão de distribuições desenvolvida por Łojasiewicz e Malgrange [104, 105, 106]. Nessa teoria é extremamente importante determinar

[3] Um resumo do trabalho de Stepanov se encontra também na Seç. 29.2 da Ref. [100].

corretamente a ordem singular da distribuição causal a ser dividida; Epstein e Glaser introduziram complexas definições dela no espaço real como no espaço dos momentos, que resultaram ser não completamente equivalentes. Apesar dessa complicação, Scharf aplicou satisfatoriamente o processo indutivo de Epstein e Glaser à QED –numa monografia que é a primeira edição da Ref. [107], publicada em 1989–, na qual garante que as ordens singulares no espaço real e no espaço dos momentos são equivalentes para as distribuições causais da QED. Em 1991, Fassari e Scharf [108] solucionaram definitivamente as dificuldades envolvidas no cálculo da ordem singular das distribuições aplicando o conceito de quasi-assíntotas de Vladimirov, Drozzinov e Zavialov [109].

Essa é a teoria que agora se chama «teoria de perturbação causal», e que tem sido aplicada a uma variedade de problemas: Dütsch, Krahe e Scharf [110] a aplicaram à QED escalar (que chamaremos SQED), mostrando que na TPC é bastante começar o procedimento indutivo com o mero conhecimento do termo de interação da primeira ordem na constante de acoplamento, e que o «vértice» da segunda ordem da abordagem convencional é automaticamente gerada como um termo de normalização no seguinte passo do procedimento indutivo pela imposição da invariância de gauge. Dütsch, Hurth, Krahe e Scharf [111, 112, 113, 114] desenvolveram também a técnica de construção das teorias de gauge quânticas, formalismo esse que foi então usado por Dütsch, Scharf e Aste [115, 116, 117] para a construção de teorias de gauge não-abelianas, incluindo à teoria eletro-fraca, e mostrando que nessa teoria a quebra espontânea de simetria não cumpre *rôle* algum –veja também a Ref. [118]–. Adicionalmente, Dütsch [119] provou as identidades de Slavnov e Taylor como produto da invariância de gauge quântica. Em relação à unicidade das teorias de Yang-Mills que decorrem do princípio de invariância de gauge quântica encontram-se os trabalhos de Dütsch [120] e Grigore [121]. Este último estudou também os aspectos co-homológicos da invariância de gauge quântica [122], assim como a estrutura das anomalias nessas teorias [123]. Há também um resultado de impossibilidade para teorias super-simétricas devido a Grigore e Scharf [124]. A TPC foi usada para estudar a QED tridimensional por Scharf, Wreszinski, Pimentel e Tomazelli [125], que ressaltaram a importância da subtração mínima para obter sem ambiguidade a massa dinâmicamente gerada do fóton, assim como ao modelo de Thirring por Manzoni, Pimentel e Tomazelli [126, 127]. Lunardi, Pimentel, Valverde, Manzoni, Beltrán e Soto [128, 129] usam a TPC para estudar a equivalência entre as teorias escalares de Klein-Gordon-Fock e de Duffin-Kemmer-Petiau em acoplamento com o campo eletromagnético. Também a eletrodinâmica da segunda ordem de Podolsky foi considerada desse ponto de vista por Bufalo, Pimentel e Soto [130, 131], estabelecendo sua super-normalizabilidade. Mais recentemente, Acevedo, Beltrán, Pimentel e Soto estudaram o modelo de Yukawa *à la* TPC [132]. Finalmente, as modificações necessárias para a extensão desse formalismo ao estudo do campo quantizado no espaço-tempo curvo (globalmente hiperbólico) foram determinadas por Brunetti, Dütsch, Fredenhagen e Rejzner [133, 134, 135, 136, 137, 138], e trabalhadas também por Hollands e Wald [139, 140].

Quanto à formulação da TPC na forma dinâmica do plano nulo, os únicos trabalhos prévios ao desenvolvimento dessa tese foram referentes a Bufalo, Pimentel e Soto [141, 142].

Há, contudo, diferenças importantes entre o enfoque que aqui seguiremos e aquele adotado nos trabalhos recém citados[4]: Na filosofia da forma dinâmica da frente de luz, escreveremos o axioma da causalidade de forma mais fraca, envolvendo apenas à coordenada temporal x^+; nos trabalhos prévios dito axioma era referido ainda à coordenada x^0, levando a uma teoria diferente daquela na dinâmica instantânea apenas por uma mudança de coordenadas, sem haver uma verdadeira mudança da forma dinâmica. A escolha que aqui fizemos é a que comumente se adota na QFT no plano nulo, em que os produtos cronológicos são escritos com o uso da função de Heaviside da coordenada x^+; desejamos obter um ordenamento cronológico matematicamente bem definido segundo essa variável[5]. Uma consequência notável dessa escolha é o aparecimento dos «termos instantâneos» dos propagadores de Feynman do campo de Dirac e do eletromagnético, cuja regularização é motivo de frequentes esforços na comunidade de pesquisadores na área da QFT no plano nulo [145, 146].

A tese que agora se lê organiza-se da forma seguinte. No Cap. 2 –que deu origem ao artigo da Ref. [147]– apresentamos a teoria do campo clássico na forma dinâmica do plano nulo, cuja quantização é objeto de estudo do Cap. 3. O marco teórico em que se assentam os seguintes capítulos, isto é, o desenvolvimento da TPC no plano nulo, é exposto no Cap. 4 [148, 149]. A primeira aplicação dessa formulação é mostrada no Cap. 5, em que estudamos o modelo de Yukawa neutro [150]. Com a finalidade de continuar o estudo das teorias de gauge, formulamos no Cap. 6 a teoria invariante de gauge quântica [151], que permite a construção das teorias de gauge com ajuda dos assim chamados «campos fantasma». Em seguida aplicamos estes resultados à QED fermiônica no Cap. 7 [152, 151]. Nossas conclusões e perspectivas são finalmente apresentadas no Cap. 8.

[4]Há diferença também quanto ao método de quantização do campo: Nas Refs. [141, 142] ela é substituída pela representação analítica dos propagadores, que no caso eletromagnético usa do formalismo lagrangiano com a introdução de fatores indeterminados (multiplicadores de Lagrange). Isto leva a algumas diferenças entre a distribuição de comutação desse campo obtida na referência anterior e a que obtivemos nessa tese. Contudo, tal diferença não é essencial, devido à invariância de gauge quântica que desenvolvemos no Cap. 6.

[5]A construção indutiva da TPC pode ser considerada uma definição rigorosa do ordenamento cronológico de Wick, conceito este introduzido por Sukhanov nas Refs. [143, 144].

Capítulo 2

Dinâmica da frente de luz na teoria clássica

Neste capítulo será introduzida a dinâmica da frente de luz, as ferramentas que serão necessárias para nela trabalhar e será estudada a teoria lagrangiana do campo clássico nessa forma dinâmica. Dirac a introduziu em 1949 [1] a partir do formalismo hamiltoniano, mas como estamos interessados em definir a teoria do campo nela para logo prosseguir a sua quantização –o que será feito no seguinte capítulo–, necessitaremos apenas as equações do movimento dos campos e a definição algébrica de Dirac não aparecerá; contudo, oferecemos uma breve revisão das idéias de Dirac, acrescentadas com as duas formas dinâmicas descobertas por Leutwyler e Stern, no Ap. A.

2.1 Problema dos valores iniciais para a equação de Klein-Gordon-Fock

É bem sabido que a imposição dos princípios da relatividade[1] leva ao resultado de que todos os campos, e ainda mais explicitamente, todas as componentes de todos os campos, que denotaremos por u^A, devem satisfazer à equação de Klein-Gordon-Fock:

$$\left(\Box + m^2\right) u^A = 0 \quad , \tag{2.1}$$

com algum valor do parâmetro m^2, associado à massa da partícula cujo movimento é descrito ondulatoriamente pelo campo. Lembramos que a obtenção dessa equação obedece ao fato de que os campos se transformam segundo determinadas representações irredutíveis do grupo de Poincaré, sendo que um dos operadores de Casimir é o quadrado do operador de momento, P^2, que é então proporcional à identidade (com fator de proporcionalidade que tem-se denotado por m^2), como o garante o lema de Schur.

Porém, a teoria da relatividade é uma teoria causal no seguinte sentido: Como a velocidade da propagação da informação não pode nunca superar à da luz no vazio, o valor que o campo adota num dado ponto P do espaço-tempo é determinado por um certo conjunto de dados dele e, possivelmente, de suas derivadas, contidos no cone de luz passado em relação ao ponto P e em seu interior. Vê-se claramente, assim, que a impossibilidade de superar à

[1] Usar-se-á a palavra «relatividade» no sentido em que usualmente se diz «relatividade restrita» ou «especial», atendendo ao fato de que, como tem sido devidamente elucidado por Fock, uma «relatividade geral» não pode ser definida no espaço-tempo tetradimensional, visto que um espaço dessa dimensionalidade já é máximamente uniforme quando é invariante sob um grupo de dez parâmetros, como o é o grupo de Poincaré: A uniformidade –e então tampouco a relatividade– desse espaço podem ser «generalizados». A este respeito, consultar a Introdução da Ref. [154].

velocidade da luz é consequência dos axiomas da relatividade, mas a direção de propagação da informação do passado para o futuro não o é; ela tem de ser introduzida como um novo axioma [153]:

Axioma *(da invariância da causalidade): O sentido de «futuro» ao longo de qualquer trajetória de mundo é a mesma em todos os sistemas de referência.*

Determinar quais dados precisa-se conhecer para poder antecipar o valor do campo em um ponto futuro é o problema dos valores iniciais, que para as equações diferenciais da segunda ordem pode ser precisamente formulado da seguinte forma [155]:

Problema dos valores iniciais: Seja

$$\phi\left(u; x_i; \frac{\partial u}{\partial x_i}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) = 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{2.2}$$

uma equação diferencial parcial da segunda ordem, linear em u e em suas derivadas com coeficientes que são funções quaisquer das variáveis x_i. Quer-se encontrar uma solução tal que na «superfície inicial» $x_m = 0$:

$$u(x_1; \cdots; x_{m-1}; 0) = u_0(x_1; \cdots; x_{m-1}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1; \cdots; x_{m-1}; 0) = u_1(x_1; \cdots; x_{m-1}) \quad . \tag{2.3}$$

Esse é o problema dos valores iniciais (de Cauchy) com respeito à superficie inicial $x_m = 0$ e com «dados de Cauchy» ou «condições iniciais» u_0 e u_1.

Sabe-se que toda equação diferencial, quer ordinária, quer parcial, admite um número infinito de soluções, que são escritas como uma «integral geral» contendo um determinado número de parâmetros ou funções desconhecidas. O problema dos valores iniciais inclui em seu enunciado um conjunto de condições adicionais –os dados de Cauchy– que visam determinar os elementos arbitrários da integral geral, mas não é, em princípio, claro que seja possível com elas encontrar uma, e só uma, solução, pois pode acontecer que os dados de Cauchy sejam incompatíveis com a integral geral ou que não sejam suficientes para fixar todos os elementos arbitrários. Assim, dir-se-á que o problema dos valores iniciais está bem definido se ele (i) tem solução, e (ii) dita solução é única. As condições sob as quais isto acontece são estabelecidas no seguinte teorema, que apresenta-se aqui para o caso de duas variáveis independentes x e y –o que é suficiente para ilustrar o procedimento de solução e suas dificuldades–:

Teorema 2.1 (*de Cauchy-Kovalevskaya*)**:** *Seja o problema de Cauchy para a equação diferencial parcial da segunda ordem e de duas variáveis*

$$\phi\left(u; x; y; \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \quad , \tag{2.4}$$

com dados de Cauchy

$$u(0;y) = u_0(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0;y) = u_1(y) \quad . \tag{2.5}$$

O problema de Cauchy está bem definido se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \left(\partial^2 u/\partial x^2\right)} \neq 0 \quad , \tag{2.6}$$

de tal forma que pode-se escrever a Eq. (2.4) *na forma:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(u; x; y; \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \quad , \tag{2.7}$$

com f uma função holomórfica na vizinhança de $x = 0$.

Caso haja interesse nos detalhes técnicos desse teorema, pode-se consultar as Refs. [155, 156]. O que aqui exporemos é a construção da solução, que tem como consequência direta a unicidade da mesma. Escrevamos a função incógnita $u(x;y)$ como série de potências na variável x, ao redor do ponto $x = 0$ em que são definidos os dados de Cauchy:

$$u = u_0 + u_1 x + \cdots + \frac{u_h}{h!}x^h + \cdots \quad ; \quad u_h = u_h(y) \equiv \left.\frac{\partial^h u}{\partial x^h}\right|_{x=0} \quad . \tag{2.8}$$

Nesta série, os dados de Cauchy já estão introduzidos como os elementos u_0 e u_1; portanto, o objetivo é encontrar u_h para $h \geq 2$ em função deles. Notando que, em geral:

$$\left.\frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k}\right|_{x=0} = \frac{\partial^k u_h}{\partial y^k} \quad , \tag{2.9}$$

pode-se obter a solução desejada mediante o seguinte conjunto de passos: Tomando $x = 0$ na Eq. (2.7), obtém-se:

$$u_2 = f\left(u_0; 0; y; u_1; \frac{\partial u_0}{\partial y}; \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}; \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \quad , \tag{2.10}$$

de forma que u_2 está determinado pelo conhecimento de u_0 e u_1. Que apareçam também suas derivadas na Eq. (2.10) não é motivo de preocupação, pois elas estão tomadas em relação à variável y com $x = 0$, e portanto podem ser obtidas a partir dos dados de Cauchy. Derivemos agora a Eq. (2.7) em relação a x, então coloquemos $x = 0$; obteremos:

$$u_3 = \frac{\partial f}{\partial u}u_1 + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \left(\partial u/\partial x\right)}u_2 + \frac{\partial f}{\partial \left(\partial u/\partial y\right)}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \left(\partial^2 u/\partial x \partial y\right)}\frac{\partial u_2}{\partial y} \quad . \tag{2.11}$$

Todas as derivadas nessa equação estão avaliadas nos argumentos de f na Eq. (2.10). A Eq. (2.11) indica que a função u_3 está determinada pelos dados de Cauchy e a função u_2 previamente obtida. Também, a condição de f ser holomórfica na vizinhança de $x = 0$ tem sido usada para tomar sua derivada e avaliá-la nesse ponto. E é da mesma forma que os

seguintes termos na seqüência da Eq. (2.8) são obtidos por derivação sucessiva da Eq. (2.7) e posterior avaliação em $x = 0$: o resultado será sempre que a função u_h é um polinômio de u_0, u_1, ..., u_{h-1} e suas derivadas, assim como de f e suas derivadas avaliadas nos argumentos da Eq. (2.10).

Uma vez que se conhece as funções u_h, pode-se expressá-las como séries de potências na variável y ao redor do ponto y_0 fixo:

$$u_h(y) = \sum_k \frac{u_{hk}}{k!}(y - y_0)^k \quad , \tag{2.12}$$

e então a solução completa ao problema dos valores iniciais é:

$$u(x; y) = \sum_{h,k} \frac{u_{hk}}{h!k!} x^h (y - y_0)^k \quad , \tag{2.13}$$

com todos os coeficientes u_{hk} determinados pelos dados de Cauchy. Como aqueles são únicos, o problema dos valores iniciais não admite mais de uma solução holomórfica, representada pela série da Eq. (2.13). Essa é a unicidade da solução. Sua existência depende do fato da série da Eq. (2.13) ser convergente para $|x|$ e $|y - y_0|$ limitados por certos valores apropriados. Mas, em síntese, o que temos aprendido é que uma equação diferencial parcial da segunda ordem tem problema dos valores iniciais bem definido se se especifica a função e sua primeira derivada em relação a uma de suas variáveis numa superfície em que a mesma adota um valor fixo e que, além disso, se a solução existe, então ela é única.

Apliquemos então este conhecimento à equação de Klein-Gordon-Fock [Eq. (2.1)]. Como estamos interessados na evolução temporal da solução, escolheremos a variável t para enunciar o problema dos valores iniciais: Seja $u(x) = u(t; \boldsymbol{x})$ uma função que satisfaz à equação da segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x) = (\nabla^2 - m^2)u(x) \quad , \tag{2.14}$$

sujeita aos seguintes dados de Cauchy na superfície espacial tridimensional $t = 0$:

$$u(0; \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{e} \quad \partial_t u(0; \boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{2.15}$$

Logo se vê que a Eq. (2.14) tem a forma da Eq. (2.7) e, portanto, a tese do teorema de Cauchy-Kovalevskaya lhe é aplicável. Para solucionar tal equação, passamos ao espaço dos momentos por meio da transformação de Fourier aplicada à função u. Exigindo que satisfaça à Eq. (2.14), passa a ter a forma:

$$u(x) = (2\pi)^{-2} \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) u(p) e^{-ipx} \tag{2.16}$$

$$= (2\pi)^{-2} \int \frac{d^4p}{|2p_0|} \left[\delta(p_0 - \omega_p) + \delta(p_0 + \omega_p)\right] u(p) e^{-ipx} \quad , \tag{2.17}$$

com: $\omega_p \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Integrando na variável p_0 com o uso das distribuições delta de Dirac,

obtém-se a separação em partes de frequência positiva e de frequência negativa:

$$u(x) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\omega_p} \left[u_+(\boldsymbol{p})\, e^{-ipx}\Big|_{p_0=\omega_p} + u_-(\boldsymbol{p})\, e^{-ipx}\Big|_{p_0=-\omega_p} \right] \quad . \tag{2.18}$$

Coloquemos aqui os dados de Cauchy da Eq. (2.15). Primeiro:

$$u_0(\boldsymbol{x}) = u(0;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\omega_p} [u_+(\boldsymbol{p}) + u_-(\boldsymbol{p})] e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad . \tag{2.19}$$

Mas é possível escrever:

$$u_0(\boldsymbol{x}) = \int d^3\boldsymbol{y} u_0(\boldsymbol{y}) \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-3} \int d^3\boldsymbol{p} \left(\int d^3\boldsymbol{y} u_0(\boldsymbol{y}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}} \right) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad , \tag{2.20}$$

obtendo-se, via uma comparação das Eqs. (2.19) e (2.20) e a independência linear das funções exponenciais $e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$, que:

$$u_+(\boldsymbol{p}) + u_-(\boldsymbol{p}) = 2\omega_p (2\pi)^{-1} \int d^3\boldsymbol{y} u_0(\boldsymbol{y}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}} \quad . \tag{2.21}$$

Em segundo lugar, dos dados de Cauchy referidos à derivada de u,

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \partial_t u(0;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\omega_p} (-i\omega_p) [u_+(\boldsymbol{p}) - u_-(\boldsymbol{p})] e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad , \tag{2.22}$$

e novamente reescrevendo o lado esquerdo com o auxílio da distribuição delta de Dirac tridimensional e comparando com a Eq. (2.22), encontra-se que:

$$u_+(\boldsymbol{p}) - u_-(\boldsymbol{p}) = 2i(2\pi)^{-1} \int d^3\boldsymbol{y} u_1(\boldsymbol{y}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}} \quad . \tag{2.23}$$

As Eqs. (2.21) e (2.23) permitem encontrar explicitamente as funções $u_\pm(\boldsymbol{p})$ em dependência com os dados de Cauchy u_0 e u_1:

$$u_\pm(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-1} \int d^3\boldsymbol{y} [\omega_p u_0(\boldsymbol{y}) \pm i u_1(\boldsymbol{y})] e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}} \quad . \tag{2.24}$$

Substituindo-as na Eq. (2.18) e completando $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y} = py|_{y^0=0}$, o que serve para escrever a integração com medida $d^3\boldsymbol{y}$ explicitamente na superfície $y^0 = 0$ onde são dados os dados de Cauchy:

$$\begin{aligned} u(x) &= (2\pi)^{-3} \int\limits_{y^0=0} d^3\boldsymbol{y} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\omega_p} \Big[(\omega_p u_0(\boldsymbol{y}) + i u_1(\boldsymbol{y}))\, e^{-ip(x-y)}\Big|_{p_0=\omega_p} \\ &\qquad + (\omega_p u_0(\boldsymbol{y}) - i u_1(\boldsymbol{y}))\, e^{-ip(x-y)}\Big|_{p_0=-\omega_p} \Big] \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \int\limits_{y^0=0} d^3\boldsymbol{y} \left[\omega_p u_0(\boldsymbol{y}) + i\,\mathrm{sgn}(p_0) u_1(\boldsymbol{y}) \right] e^{-ip(x-y)} \quad . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Nada obstante, é possível escrever:

$$\omega_p e^{-ip(x-y)} = p_0 \mathrm{sgn}(p_0) e^{-ip(x-y)} = i \mathrm{sgn}(p_0) \partial_0^x e^{-ip(x-y)} \quad , \tag{2.26}$$

com o qual:

$$u(x) = \int\limits_{y^0=0} d^3\boldsymbol{y} \left[u_0(\boldsymbol{y}) \partial_0^x D(x-y) + D(x-y) u_1(\boldsymbol{y}) \right] \quad . \tag{2.27}$$

Tem-se introduzido aqui a «distribuição de Jordan-Pauli»:

$$D(x) := i(2\pi)^{-3} \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) \mathrm{sgn}(p_0) e^{-ipx} \quad . \tag{2.28}$$

Essa distribuição tem duas propriedades imediatas: Por causa da distribuição delta de Dirac que aparece em seu integrando, ela satisfaz à equação de Klein-Gordon-Fock com massa m, isto é, à mesma equação diferencial que rege a evolução do campo u:

$$(\Box + m^2) D(x) = 0 \quad . \tag{2.29}$$

Também, de sua forma integral explícita dada na Eq. (2.28) segue a propriedade de antissimetria:

$$D(x) = -D(-x) \quad . \tag{2.30}$$

Fazendo uso, precisamente, desta última propriedade, pode-se escrever a Eq. (2.27) com a derivada que age sobre $D(x-y)$ não sendo já em relação à variável x^0, mas em relação à y^0:

$$u(x) = \int\limits_{y^0=0} d^3\boldsymbol{y} \left[u_0(\boldsymbol{y}) \partial_0^y D(y-x) - D(y-x) u_1(\boldsymbol{y}) \right] \quad . \tag{2.31}$$

Essa mudança é útil porque, lembremos: $u_1(\boldsymbol{y}) = \partial_0^y u(0;\boldsymbol{y})$; mas o fato de ser $y^0 = 0$ já está indicado na integral. Daí que é possível escrever, dentro dela, $u_1(\boldsymbol{y}) = \partial_0^y u(y)$ e $u_0(\boldsymbol{y}) = u(y)$. Assim, usando mais uma vez a Eq. (2.30), obtém-se finalmente:

$$u(x) = \int\limits_{y^0=0} d^3\boldsymbol{y} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_0^y u(y) \quad . \tag{2.32}$$

Essa é a solução da equação de Klein-Gordon-Fock com dados de Cauchy na superfície $y^0 = 0$, que, existindo, é única, como o demonstra a construção anteriormente exposta. A causalidade relativística se reflete no fato de ser, explicitamente –vide, por exemplo, as Refs. [100] e [107]–:

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{sgn}(x^0) \left[\delta(x^2) - \Theta(x^2) \frac{m}{2\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \right] \quad , \tag{2.33}$$

com J_1 a função de Bessel da primeira ordem, o que implica que:

$$\mathrm{supp}(D(x)) = V^+(0) \cup V^-(0) \quad , \tag{2.34}$$

com:

$$V^+(x) := \left\{ y \in \mathbb{M} \mid (y-x)^2 \geq 0 \ \wedge \ y^0 \geq x^0 \right\} \tag{2.35}$$

o «cone de luz futuro em relação ao ponto x», e

$$V^-(x) := \left\{ y \in \mathbb{M} \mid (y-x)^2 \geq 0 \ \wedge \ y^0 \leq x^0 \right\} \tag{2.36}$$

o «cone de luz passado em relação ao ponto x». Para finalizar a introdução da nomenclatura, a união $V^+(x) \cup V^-(x)$ é o «cone de luz com vértice no ponto x». Isto é: $D(x)$ tem suporte causal em relação à origem do sistema de coordenadas. À luz da Eq. (2.32), a Eq. (2.34) implica que, transladando a origem até o ponto x em que se quer conhecer o valor do campo u, como $D(x-y)$ tem suporte no cone de luz com vértice em x, $u(x)$ não é afetado pelos valores que no passado o campo adotou fora do cone de luz de x, nem afetará aos valores que adotará fora dele no futuro.

Consideremos agora o assunto que segue. A solução obtida, embora satisfatória, não é geral como gostaríamos, pois precisa do conhecimento dos dados de Cauchy numa superfície de tempo constante. Mas, o que aconteceria se os dados nos fossem conhecidos numa superfície diferente? Voltando ao problema dos valores iniciais como enunciado na Eq. (2.2), suponhamos que o espaço m-dimensional é submetido à transformação de coordenadas:

$$X_1 = G_1(x_1; \cdots ; x_m) \quad , \quad \cdots \quad , \quad X_m = G_m(x_1; \cdots ; x_m) \quad , \tag{2.37}$$

de tal forma que $X_m = G_m(x_1; \cdots ; x_m) = 0$ seja a superfície onde são conhecidos os dados iniciais. A equação diferencial é substituída por uma análoga para as novas coordenadas, com $u(x_1; \cdots ; x_m) = U(G_1(x_1; \cdots ; x_m); \cdots ; G_m(x_1; \cdots ; x_m))$:

$$\Phi \left(U; X_i; \frac{\partial U}{\partial X_i}; \frac{\partial^2 U}{\partial X_i^2}; \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_k} \right) = 0 \quad . \tag{2.38}$$

Esta simples transformação de coordenadas, poderia parecer, não tem maiores implicações na teoria, pois, aparentemente, poder-se-ia aplicar o teorema de Cauchy-Kovalevskaya à nova equação diferencial. Suponhamos, contudo, que a Eq. (2.4) é linear, isto é, que tem a seguinte forma geral:

$$\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f \quad , \tag{2.39}$$

com $A_{ik} = A_{ki}$, B_i, C e f funções das variáveis x_i. Uma vez que as transformações da Eq. (2.37) sejam feitas, usando a regra de derivação em cadeia obtém-se que a Eq. (2.39) é, em relação às variáveis X_i:

$$\sum_{j,l} \left(\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \frac{\partial G_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial X_j \partial X_l} + \sum_l \left(\sum_i B_i \frac{\partial G_l}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U}{\partial X_l} + CU = f \quad . \tag{2.40}$$

Como temos aprendido, o teorema de Cauchy-Kovalevskaya tem por hipótese o cumprimento da Eq. (2.6), isto é, ele será aplicável só se $\partial^2 U / \partial X_m^2$ aparecer na Eq. (2.40). Isto coloca

em primeiro plano a «forma característica» **A** definida como[2]:

$$\mathbf{A}(\gamma_1;\cdots;\gamma_m) := \sum_{i,k} \gamma_i A_{ik} \gamma_k \quad . \tag{2.41}$$

Da Eq. (2.40) observamos que a hipótese do teorema de Cauchy-Kovalevskaya não se satisfaz se:

$$\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial G_m}{\partial x_i} \frac{\partial G_m}{\partial x_k} = 0 \quad . \tag{2.42}$$

Este é o único caso em que a generalização para superfícies iniciais quaisquer não pode ser feita trivialmente. As superfícies $G_m(x_1;\cdots;x_m) = 0$ para as que isto acontece são nomeadas «superfícies características» da equação diferencial. O estudo do problema dos valores iniciais com superfície inicial uma superfície característica, chamado «problema de Goursat» [157], é tema de consideração da seguinte subseção.

2.1.1 Problema de Goursat

Consideremos uma equação diferencial em que a segunda derivada em relação à variável x_m não pode ser isolada, pois não aparece. Especificamente, seja uma equação diferencial escrita em função de coordenadas tais que a superfície $x_m = 0$ é uma superfície característica:

$$\sum_{i\neq k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m-1} A_{ii} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad ; \quad A_{mm} = 0 \quad . \tag{2.43}$$

O primeiro propósito desta discussão será ver se os dados de Cauchy que são suficientes no problema fora de superfícies características o são também nesse caso. Suponhamos, pois, que sejam conhecidos:

$$u(x_1;\cdots;x_{m-1};0) = u_0(x_1;\cdots;x_{m-1}) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1;\cdots;x_{m-1};0) = u_1(x_1;\cdots;x_{m-1}) \quad . \tag{2.44}$$

Façamos, como anteriormente, a expansão ao redor do ponto $x_m = 0$:

$$u = u_0 + u_1 x_m + \cdots + \frac{u_h}{h!} x_m^h + \cdots \quad ; \quad u_h = u_h(x_1;\cdots;x_m) \equiv \left.\frac{\partial^h u}{\partial x_m^h}\right|_{x_m=0} \quad . \tag{2.45}$$

Colocando essa expansão na Eq. (2.43), então pondo $x_m = 0$, obtém-se já não uma expressão

[2]Recordemos, *en passant*, que a forma característica define o tipo da equação diferencial parcial [157]: (i) Se ela contém m autovalores diferentes não nulos do mesmo sinal, como acontece, por exemplo, com a equação de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$, se denomina «elíptica»; (ii) se tem menos de m autovalores não nulos, como acontece com a equação de Schrödinger $\partial_t\psi + \nabla^2\psi = 0$, «parabólica»; (iii) se ela tem m autovalores não nulos, não todos do mesmo sinal, como acontece com a equação de Klein-Gordon-Fock [Eq. (2.14)], então a equação diferencial recebe o nome de «hiperbólica». Particularmente, se na equação hiperbólica a forma característica tem todos os autovalores do mesmo sinal, exceto um, então ela é denominada «hiperbólica normal»; é a esse tipo que pertence a equação de Klein-Gordon-Fock.

para u_2, senão uma equação diferencial para u_1:

$$2\sum_{i\neq m} A_{im}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + B_m u_1 + H_1 = 0 \quad , \tag{2.46}$$

com H_1 dependendo somente de u_0 e suas derivadas:

$$H_1 = \sum_{i\neq m, k\neq m, i\neq k} A_{ik}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i\neq m} A_{ii}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i^2} + \sum_{i\neq m} B_i \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + C u_0 - f \quad . \tag{2.47}$$

Vê-se, dessarte, que se u_1 não fosse dado de forma a satisfazer a essa equação diferencial, então o problema dos valores iniciais com os dados iniciais da Eq. (2.44) não teria solução. Isto já é diferente do que ocorre quando os dados iniciais são dados fora das superfícies características: naquele caso o problema com valores iniciais da função e sua primeira derivada tem solução quaisquer que sejam estes. Portanto, é preciso oferecer outros dados iniciais, a saber, os necessários para que as equações diferenciais que se obtém para as funções u_h possam ser univocamente solucionadas.

A Eq. (2.46) é uma equação diferencial parcial da primeira ordem para u_1. Que as equações para os outros u_h são também desse tipo o demonstra a seguinte análise. Derivando a Eq. (2.43) em relação a x_m e colocando depois $x_m = 0$, encontra-se a seguinte equação diferencial para u_2:

$$2\sum_{i\neq m} A_{im}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + B_m u_2 + H_2 = 0 \quad , \tag{2.48}$$

com:

$$H_2 = \sum_{i\neq m, k\neq m, i\neq k} A_{ik}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i\neq m} A_{ii}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} + \sum_{i\neq m} B_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + C u_1 - \frac{\partial f}{\partial x_m} \quad . \tag{2.49}$$

E, em geral, derivando a Eq. (2.43) $h-1$ vezes em relação a x_m, então tomando $x_m = 0$, obtém-se a equação diferencial para u_h:

$$2\sum_{i\neq m} A_{im}\frac{\partial u_h}{\partial x_i} + B_m u_h + H_h = 0 \quad , \tag{2.50}$$

com:

$$H_h = \sum_{i\neq m, k\neq m, i\neq k} A_{ik}\frac{\partial^2 u_{h-1}}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i\neq m} A_{ii}\frac{\partial^2 u_{h-1}}{\partial x_i^2} + \sum_{i\neq m} B_i \frac{\partial u_{h-1}}{\partial x_i} + C u_{h-1} - \frac{\partial^{h-1} f}{\partial x_m^{h-1}} \quad . \tag{2.51}$$

Assim, todas as equações diferenciais que regem o comportamento das funções u_h são da primeira ordem. Para solucioná-las, estudaremos o método das características para esse tipo de equações, e com o intuito de simplificar a exposição, consideremos o problema de resolver a equação diferencial de duas variáveis:

$$A(x;y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x;y)\frac{\partial u}{\partial y} - C(x;y;u) = 0 \quad . \tag{2.52}$$

As Eqs. (2.50) são todas desse tipo, com a particularidade de ser $A(x;y) = 0$; colocaremos ao final essa condição para examinar suas consequências. Solucionar a Eq. (2.52) significa, geométricamente falando, encontrar uma superfície solução $u = z(x;y)$, a qual tem vetor normal $\boldsymbol{n} = (\partial z/\partial x; \partial z/\partial y; -1)$; portanto, definindo o campo vetorial $\boldsymbol{F} = (A;B;C)$, a Eq. (2.52) pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad . \tag{2.53}$$

Isto é, $\boldsymbol{F}$ é tangente à superfície solução $u = z(x;y)$, o que tem como consequência que essa é constituída por curvas integrais daquela; ditas curvas integrais são denominadas «curvas características». Isto leva imediatamente à seguinte estratégia de solução: Sejam dados os valores de $u(x;y)$ numa curva γ no plano $x-y$; o uso deles permite estabelecer a curva Γ sobre a superfície $z(x;y)$ que lhe corresponde. Então a partir de cada ponto de Γ pode ser gerada uma curva integral de $\boldsymbol{F}$, construindo assim a superfície $z(x;y)$. Levando a ideia à prática, pode-se parametrizar, para a em algum domínio de variação:

$$\Gamma(a) = (x = x_0(a); y = y_0(a); z = z_0(a)) \quad . \tag{2.54}$$

Encontrar para cada valor de a uma curva integral de $\boldsymbol{F}$ que passe por $\Gamma(a)$ significa resolver, para cada valor de a, o sistema de equações diferenciais de Lagrange-Charpit: Para um parâmetro s:

$$\frac{dx}{ds} = A(x;y) \quad ; \quad x(0) = x_0(a) \quad , \tag{2.55}$$

$$\frac{dy}{ds} = B(x;y) \quad ; \quad y(0) = y_0(a) \quad , \tag{2.56}$$

$$\frac{dz}{ds} = C(x;y;z) \quad ; \quad z(0) = z_0(a) \quad . \tag{2.57}$$

As soluções desse sistema,

$$x = X(a;s) \quad , \quad y = Y(a;s) \quad , \quad z = Z(a;s) \quad , \tag{2.58}$$

são já uma representação paramétrica da superfície solução. Para obtê-la na forma $u = z(x;y)$, precisa-se inverter:

$$a = \Lambda(x;y) \quad \text{e} \quad s = S(x;y) \quad , \tag{2.59}$$

com o qual a solução buscada será:

$$u(x;y) = Z\left(\Lambda(x;y); S(x;y)\right) \quad . \tag{2.60}$$

Um comentário é imprescindível: Para que possa ser gerada a superfície solução a partir da curva Γ por ação do campo vetorial $\boldsymbol{F}$, é necessário que a curva Γ não seja já uma curva característica (uma curva integral de $\boldsymbol{F}$), pois então ela seria invariante pela ação de $\boldsymbol{F}$. No caso em estudo, as Eqs. (2.50) dão lugar a equações de Lagrange-Charpit com o lado direito

da Eq. (2.55) nulo:

$$\frac{dx}{ds} = 0 \quad ; \quad x(0) = x_0(a) \quad . \tag{2.61}$$

Isto é, x é independente do parâmetro s. Se os dados de Cauchy fossem dados numa linha de $x =$ constante, então x seria também independente de a; logo não poderia obter-se a solução do sistema senão únicamente para o valor constante de x. Conclui-se: Os dados iniciais que são necessários para solucionar univocamente as Eqs. (2.50) não podem ser dados na superfície $x_m = 0$, mas têm de ser dados em uma outra superfície. Por exemplo, os valores iniciais podem ser dados na linha de y constante:

$$\Gamma = (x = x_0(a); y = y_0; z = z_0(a)) \quad , \tag{2.62}$$

com y_0 independente de a. A Eq. (2.61) tem a solução: $x = x_0(a)$. Subsituindo-a na Eq. (2.56), como x é independente de s, a integração torna-se elementar:

$$s = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{B(x_0(a); y)} \quad . \tag{2.63}$$

Finalmente, a Eq. (2.57) será:

$$\frac{dz}{ds} = C\left(x_0(a); y(a; s); z\right) \quad ; \quad z(0) = z_0(a) \quad , \tag{2.64}$$

que é uma equação bem definida e com condições iniciais, portanto solúvel e com solução única.

A análise recém feita demonstra que as Eqs. (2.50) que determinam as funções u_h poderão ser resolvidas univocamente se são fornecidos dados iniciais para u numa superfície, por exemplo, com $x_k =$constante, $k \neq m$. Em conclusão, quando o problema dos valores iniciais está definido sobre uma superfície característica da equação diferencial, os dados iniciais não podem ser os valores da função e de sua primeira derivada normal à superfície característica, pois em tal caso o problema pode, ou não ter solução, ou ter infinitas soluções; em seu lugar, devem ser fornecidos os valores da função na superfície característica e numa superfície diferente.

2.1.2 Superfícies características da equação de Klein-Gordon-Fock: Coordenadas no plano nulo

Uma vez que temos visto que o problema dos valores iniciais pode ser bem definido sobre superfícies características, apliquemos o conhecimento adquirido ao estudo da equação de Klein-Gordon-Fock com que iniciamos essa discussão [Eq. (2.1)]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m^2 u = 0 \quad . \tag{2.65}$$

Comparando com a Eq. (2.39), reconhece-se que para essa equação são[3]:

$$A_{\mu\nu} = \widetilde{\eta}_{\mu\nu} \quad , \quad B_\mu = 0 \quad , \quad C = m^2 \quad \text{e} \quad f = 0 \quad . \tag{2.66}$$

Aqui, $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}$ são as componentes cartesianas do tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski: $\left(\widetilde{\eta}_{\mu\nu}\right) = \text{diag}(+1; -1; -1; -1)$. A forma característica [vide a Eq. (2.41)] é $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu$, que se anula para γ^μ um vetor do tipo-luz:

$$(\gamma^0)^2 = \boldsymbol{\gamma}^2 \quad . \tag{2.67}$$

Assim sendo, a transformação de coordenadas $X_\mu = G_\mu(t; x; y; z)$ será tal que $X_0 =$ constante é uma superfície característica se –vide a Eq. (2.42)– a função G_0 satisfaz à equação diferencial:

$$\left(\frac{\partial G_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial G_0}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial G_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial G_0}{\partial z}\right)^2 = 0 \quad , \tag{2.68}$$

cuja solução é:

$$G_0 = at + bx + cy + dz \quad ; \quad a = \pm\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \quad . \tag{2.69}$$

Quer dizer, as superfícies características da equação de Klein-Gordon-Fock são as superfícies $X_0 = 0$, com:

$$X_0 \sim t \pm \frac{bx + cy + dz}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \quad , \tag{2.70}$$

ou seja, planos nulos, com as constantes b, c e d, assim como o fator de proporcionalidade com a coordenada X_0, números reais arbitrários. Façamos uma escolha:

Definição: *Sejam $(x^0; x^1; x^2; x^3)$ coordenadas cartesianas no espaço-tempo de Minkowski tais que o tensor métrico adota sua forma diagonal normalizada $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}$. O conjunto de coordenadas $(x^+; x^1; x^2; x^-)$, com:*

$$x^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3) \quad , \quad x^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3) \quad , \tag{2.71}$$

é chamado conjunto de coordenadas do plano nulo.

A eleição da superfície característica em que os dados iniciais serão dados, quer $x^+ = 0$, quer $x^- = 0$, é um assunto puramente convencional, mas importante por causa de ser, implicitamente, uma escolha do parâmetro de evolução dos campos, ao que doravante chamar-se-á «tempo». Escolhemos x^+ como coordenada temporal; a seguinte nomenclatura é usada: x^- é a coordenada «longitudinal» e $x^\perp = (x^1; x^2)$, as coordenadas «transversais». As coordenadas cartesianas $(x^0; x^1; x^2; x^3)$ passarão a ser chamadas «coordenadas instantâneas» por óbvias razões. O fator de proporcionalidade escolhido na definição de $x^\pm$ na Eq. (2.71) tem a virtude de que, com ele, o determinante jacobiano da transformação de coordenadas é

[3] Colocamos agora índices gregos por se tratar de índices do espaço-tempo.

igual à unidade, de forma que o elemento de volume não muda:

$$d^4x = dx^+dx^-d^2x^\perp \quad . \tag{2.72}$$

Também, chamando η_{ab} a métrica nas coordenadas do plano nulo, ela tem a seguinte representação matricial:

$$[\eta_{ab}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\eta^{ab}] \quad . \tag{2.73}$$

Estabelecer-se-á agora a solução ao problema dos valores iniciais no plano nulo. Para isso, lembremos a Eq. (2.32): Em coordenadas instantâneas:

$$u(x) = \int\limits_{y^0=0} d^3\boldsymbol{y} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}^y_0 u(y) \quad . \tag{2.74}$$

Denotemos por $N^\mu(x;y)$ à generalização covariante do integrando:

$$N^\mu(x;y) = D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}^\mu_y u(y) \quad . \tag{2.75}$$

Tomando a divergência dele em relação à variável y, vê-se que:

$$\partial^y_\mu N^\mu(x;y) = D(x-y)\Box_y u(y) - \Box_y D(x-y)u(y) = 0 \quad , \tag{2.76}$$

pois tanto u como D satisfazem à equação de Klein-Gordon-Fock com massa m [vide a Eq. (2.29)]. Portanto, sendo de divergência nula, pode-se usar o teorema de Gauss no volume Ω limitado pelo sólido $A-B-C-D$ na Fig. 2.1, em que o ponto P, vértice do cone de luz, representa ao ponto x em que se deseja conhecer o valor do campo u. Então ter-se-á que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_\Omega \partial^y_\mu N^\mu(x;y) = \int\limits_{\partial\Omega} d\sigma_\mu(y) N_\mu(x;y) \\ &= \left(\int\limits_{A-B} + \int\limits_{B-C} + \int\limits_{C-D} + \int\limits_{D-A} \right) D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}^\mu_y u(y) d\sigma_\mu(y) \quad . \end{aligned} \tag{2.77}$$

Porém, $B-C$ está fora do cone de luz do ponto P, e a integral nessa superfície se anula, pois $D(x-y)$ tem suporte causal. Assim sendo e identificando a integral sobre $A-B$ como a solução da Eq. (2.74), bem como que os vetores normais às superfícies $C-D$ e $D-A$ são, respectivamente, nas coordenadas do plano nulo, $(0;0;0;-1)$ e $(-1;0;0;0)$, obter-se-á que:

$$u(x) = \int\limits_{D-A} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}^y_- u(y) d^2y^\perp dy^- + \int\limits_{C-D} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}^y_+ u(y) d^2y^\perp dy^+ \quad , \tag{2.78}$$

visto que a superfície $D-A$ é de $x^+ =$ constante e a $C-D$ é de $x^- =$ constante. Isto

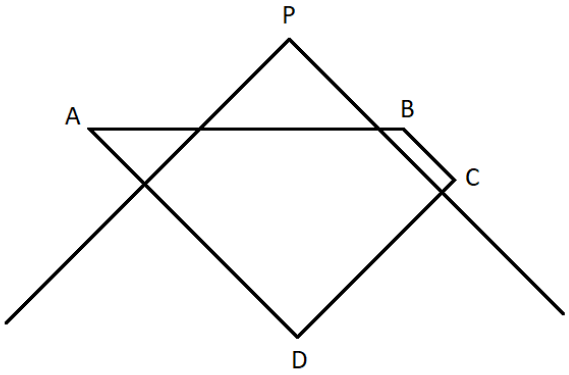

Figura 2.1: Volume de integração para a obtenção da solução do problema de Goursat da equação de Klein-Gordon-Fock.

concorda com nossos estudos prévios: A solução ao problema dos valores iniciais é única e bem definida se os dados iniciais são os valores do campo na superfície característica e numa superfície diferente dela. Em outras palavras, tem-se substituído o valor de u e $\partial_0 u$ em um plano do tipo-espaço pelo conhecimento de u em dois planos nulos. Em particular, podemos tomar o limite em que a superfície $C - D$ encontra-se em $x^- \to -\infty$, e os dados iniciais nessa superfície são substituídos pela «condição assintótica»:

$$\lim_{x^- \to -\infty} u(x) = 0 \quad . \tag{2.79}$$

Nessas condições, a solução da Eq. (2.78) se simplifica a:

$$u(x) = \int\limits_{y^+ = y_0^+} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}^y_- u(y) d^2y^\perp dy^- \quad , \tag{2.80}$$

que precisa do conhecimento só do valor do campo na superfície isocrônica $x^+ = x_0^+$.

O estudo da equação de Klein-Gordon-Fock apresentado indica a possibilidade real de construir uma física sobre o plano nulo. Até aqui, uma tal física seria equivalente à física instantânea, mas, é claro, tal equivalência, encontrada no caso particular estudado, não pode ser simplesmente extrapolada para outros fenômenos físicos, senão que tem de ser provada.

2.2 Formas dinâmicas

Quando se fala da descrição física de um fenômeno entendemos o conhecimento da evolução das grandezas observáveis do sistema. Evolução em relação a algum parâmetro ao que se dá o nome de «tempo». Mas, para que essa descrição seja bem determinada, a cada tempo só pode corresponder um único valor dos observáveis, ou, em outras palavras, a trajetória de evolução –«linha de mundo» no caso da mecânica do ponto material– do sistema só pode atravessar uma superfície isocrônica uma única vez [1]. Deseja-se ver quais formas dinâmicas são possíveis atendendo a essa restrição.

2.2.1 Regime não-relativístico

O regime não-relativístico tem a peculiaridade de que as partículas podem ter velocidades quaisquer. Logo, num diagrama t *versus* $\boldsymbol{x}$, a linha de mundo da partícula pode adotar coeficiente angular (inclinação) não negativa qualquer –o fato dela ter de ser não negativa tem origem no axioma da invariância da causalidade: seu sentido de futuro não pode mudar qualquer que seja sua velocidade–. Portanto, é possível que uma partícula atravesse uma superfície inclinada no espaço $t - \boldsymbol{x}$ mais de uma vez caso fosse acelerada suficientemente, como se mostra na Fig. 2.2-(b), e isto acontecerá sem importar quão pequena seja a inclinação do plano. Concluindo, no regime não-relativístico a única forma dinâmica possível é a «dinâmica instantânea», na qual as superfícies isocrônicas são superfícies de tempo (newtoniano) constante, como mostrado na Fig. 2.2-(a).

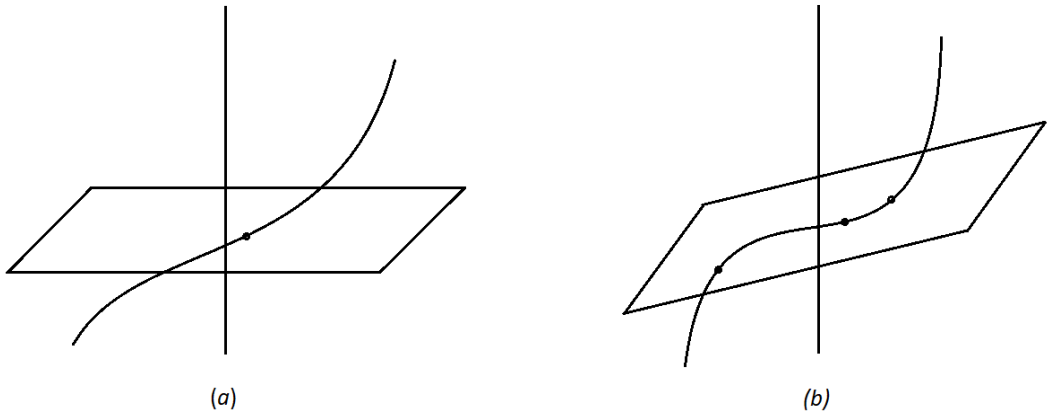

Figura 2.2: (a) Superfície de tempo constante. (b) Superfície inclinada.

2.2.2 Regime relativístico

No regime relativístico não aparece o problema das velocidades infinitas que limitava as possíveis descrições no caso não-relativístico. Com efeito, agora a linha de mundo das partículas está restrita pela causalidade a se encontrar sempre dentro do cone de luz, em cada ponto dela; ou seja, num diagrama $t - \boldsymbol{x}$, o coeficiente angular da linha de mundo, em cada ponto, não pode ser menor do que a unidade –ou menor do que $1/c$, onde c é a velocidade da luz no espaço vazio–. O problema de determinar as possíveis formas dinâmicas no regime relativístico foi estudado pela primeira vez por Dirac em 1949 [1], que colocou o problema do ponto de vista da compatibilidade da formulação hamiltoniana da mecânica quântica com o axioma de relatividade; este enfoque tem sido detalhadamente estudado nas Refs. [5, 6] – vide também o Ap. A–, e pode se resumir no problema de encontrar soluções inequivalentes para os generadores das transformações infinitesimais, que obedecem à algebra do grupo de Poincaré. Dirac conseguiu encontrar três formas dinâmicas relativísticas, a saber:

(a) *Dinâmica instantânea:* Aquela em que as superfícies isocrônicas são superfícies de coordenada x^0 constante, essa coordenada sendo o tempo. Esta é a mesma forma

dinâmica que a do regime não-relativístico, e é aquela na qual a física tem sido mais estudada. Ela se mostra na Fig. 2.3-(a).

(b) *Dinâmica forma-ponto:* Nessa forma dinâmica, cujo nome lhe é dado por apresentar superfícies isocrônicas invariantes sob transformações de rotação em torno a um ponto fixo (a origem, por exemplo), ditas superfícies são os ramos superiores do hiperbolóide $a^2 = x^2$, o parâmetro a^2 sendo então o tempo da teoria, que se mostra na Fig. 2.3-(b). A dificuldade especial nessa forma dinâmica se apresenta quando quer-se descrever uma partícula cuja linha de mundo se encontra precisamente sobre o cone de luz, então não atravessando nunca os hiperbolóides isocrônicos. Esta dificuldade pode ser parcialmente superada tomando, por exemplo, $a^2 = 0$, caso no qual os hiperbolóides degeneram no cone de luz.

(c) *Dinâmica da frente de luz:* Aqui as superfícies isocrônicas são planos nulos de coordenada x^+ constante, essa coordenada sendo o tempo da teoria, como se mostra na Fig. 2.3-(c). A dificuldade nessa teoria acontece na descrição de linhas de mundo ao longo de, exatamente, o eixo x^-, pois tal linha de mundo encontra-se sobre a superfície isocrônica, «atravessándo-a» em todos os pontos.

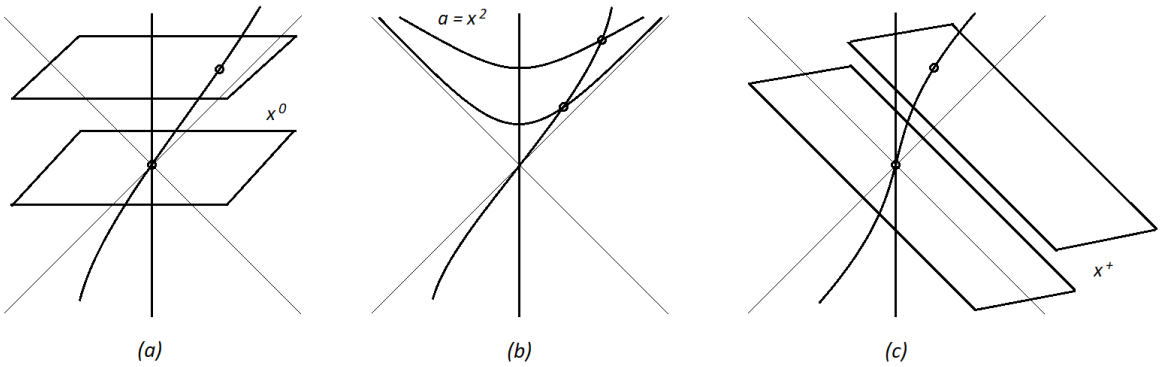

Figura 2.3: (a) Dinâmica instantânea. (b) Dinâmica forma-ponto. (c) Dinâmica da frente de luz.

Retornando ao estudo feito na Sec. 2.1, vimos que a dinâmica dos campos, atendendo pelo menos ao fato de obedecerem à equação de Klein-Gordon-Fock, apresenta verdadeira dificuldade –no sentido de que a equivalência com a dinâmica instantânea não é trivial– somente no caso em que as superfícies onde são fornecidos os dados iniciais são superfícies características. Com a definição dada das coordenadas no plano nulo, identifica-se o que se corresponde ao problema de se definir uma física na dinâmica da frente de luz.

Alguns comentários são requeridos. Em primeiro lugar, além das três formas dinâmicas encontradas por Dirac, encontrou-se posteriormente mais duas formas dinâmicas possíveis [7], que têm superfícies isocrônicas: (d) os ramos superiores do hiperbolóide $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = a^2$, e (e) os do hiperbolóide $(x^0)^2 - (x^3)^2 = a^2$; nos dois casos, sendo o parâmetro a^2 o tempo. Em segundo lugar, a discussão recém feita a respeito da possibilidade de definir novas formas dinâmicas baseia-se na descrição unívoca da linha de mundo da partícula.

No entanto, na teoria do campo isto não é suficiente, pois é necessário também estabelecer a unicidade da descrição da evolução do campo, isto é, do problema dos valores iniciais para as diferentes equações de campo. Em terceiro lugar, o limite não-relativístico das novas formas dinâmicas é a dinâmica instantânea, pois as superfícies isocrônicas, quer os hiperbolóides, quer as frentes de luz, se aproximam às superficies de x^0 constante no limite $c \to +\infty$, visto que o próprio cone de luz se abre infinitamente, fazendo os hiperbolóides perderem sua curvatura na dinâmica forma-ponto e os planos nulos perderem sua inclinação na dinâmica da frente de luz; por isso, o limite não-relativístico não constitui um motivo de preferência da dinâmica instantânea sobre as outras formas dinâmicas: No regime não-relativístico é impossível diferenciar uma da outra; a finitude de c não «faz aparecer» novas formas dinâmicas, mas levanta a degenerescência entre elas.

2.3 «Coordinalização» invariante no plano nulo

Como temos estabelecido, a relação entre uma forma dinâmica e outra vai além de uma simples transformação de coordenadas[4]: A verdadeira diferença fundamental é que com essa mudança tem-se um novo conjunto de dados iniciais, que evoluem causalmente de uma superfície para outra segundo os geradores dinâmicos da forma particular.

Assim, é possível usar, em qualquer forma dinâmica, qualquer conjunto de coordenadas. Por exemplo, é perfeitamente possível usar coordenadas no plano nulo e ainda assim estar na dinâmica instantânea, caso os dados iniciais fossem dados numa superfície de x^0 constante. Isto porque uma transformação das coordenadas não implica uma transformação da superfície inicial. Por isso, para recuperar a covariância da teoria e assim explicitar que o sistema de coordenadas nada tem a ver com a forma dinâmica, Rohrlich [12, 13] introduziu um conjunto de campos vetoriais tais que seja sempre possível levar as quantidades covariantes à forma «própria» do plano nulo. Consideremos um sistema inercial de referência, o qual define sua origem O e seus eixos cartesianos instantâneos segundo a escolha de quatro campos vetoriais $\widetilde{e}^{(0)}$, $\widetilde{e}^{(1)}$, $\widetilde{e}^{(2)}$ e $\widetilde{e}^{(3)}$, de modo que as coordenadas cartesianas instantâneas de um ponto P qualquer são obtidas por projeção[5]:

$$x^{(a)}(P) =: \int_O^P \widetilde{e}^{(a)}{}_\mu dx^\mu \; ; \; (a) = (0), (1), (2), (3) \; , \tag{2.81}$$

expressão esta que é invariante frente a qualquer substituição das coordenadas. Portanto, uma transformação de coordenadas muda a x^μ, e, claro, às componentes $\widetilde{e}^{(a)}{}_\mu$, mas o campo vetorial $\widetilde{e}^{(a)}$, assim como as coordenadas $x^{(a)}$, se mantêm as mesmas. Uma transformação de

[4]Uma transformação de coordenadas não oferece nenhuma diferença importante, pois as equações do movimento na teoria da relatividade tem caráter tensorial e são, portanto, covariantes frente a toda e qualquer substituição.

[5]A forma integral aqui é devida a que, no caso geral de se utilizar coordenadas curvas, o simples produto $\widetilde{e}^{(a)}{}_\mu x^\mu$ pode não fornecer a informação desejada. Tal produto será suficiente, por outro lado, se as coordenadas x^μ estão definidas ao longo de eixos retos.

sistema de referência, por outro lado, muda aos campos vetoriais $\widetilde{e}^{(a)}$ e, como consequência, às coordenadas $x^{(a)}$. Os campos $\widetilde{e}^{(a)}$ são chamados «campos de tétradas», e as coordenadas $x^{(a)}$, «coordenadas invariantes». Mais em geral, também outras grandezas podem ser projetadas com o campo de tétradas para obter sua forma invariante. Em particular, a métrica $g_{\mu\nu}$ se relaciona com a métrica invariante $\widetilde{\eta}_{(a)(b)}$ por:

$$g_{\mu\nu}(x)\widetilde{e}_{(a)}{}^{\mu}(x)\widetilde{e}_{(b)}{}^{\nu}(x) = \widetilde{\eta}_{(a)(b)} \quad , \tag{2.82}$$

ou, inversamente:

$$\widetilde{\eta}_{(a)(b)}(x)\widetilde{e}^{(a)}{}_{\mu}(x)\widetilde{e}^{(b)}{}_{\nu}(x) = g_{\mu\nu} \quad . \tag{2.83}$$

Agora, como mencionado (vide a Ref. [161]): «[...] *a eleição da base de tétradas depende das simetrias subjacentes do espaço-tempo e é, em boa medida, parte do problema*». É claro, quando o autor se refere às «simetrias do espaço-tempo», deve-se entender que entre elas estão também as simetrias do problema a se resolver. E como temos insistido em que alguns problemas se simplificam com o uso da forma dinâmica do plano nulo, algumas vezes será vantajoso escolher a base de tétradas exigindo que a métrica invariante dessa dinâmica seja igual à métrica nesse conjunto de coordenadas [vide a Eq. (2.73)]:

$$[\eta_{(a)(b)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.84}$$

Porém, as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ dependem unicamente do sistema de coordenadas, e não da base de tétradas, de forma que, denotando por $e^{(+)}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ e $e^{(-)}$ os campos de tétradas correspondentes ao plano nulo, ter-se-á a relação:

$$\begin{aligned} &\widetilde{e}^{(0)}{}_{\mu}\widetilde{e}^{(0)}{}_{\nu} - \widetilde{e}^{(1)}{}_{\mu}\widetilde{e}^{(1)}{}_{\nu} - \widetilde{e}^{(2)}{}_{\mu}\widetilde{e}^{(2)}{}_{\nu} - \widetilde{e}^{(3)}{}_{\mu}\widetilde{e}^{(3)}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \\ &= e^{(+)}{}_{\mu}e^{(-)}{}_{\nu} + e^{(-)}{}_{\mu}e^{(+)}{}_{\nu} - e^{(1)}{}_{\mu}e^{(1)}{}_{\nu} - e^{(2)}{}_{\mu}e^{(2)}{}_{\nu} \, , \end{aligned} \tag{2.85}$$

da qual uma solução é[6]:

$$e^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{e}^{(0)} + \widetilde{e}^{(3)}\right) \, , \; e^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{e}^{(0)} - \widetilde{e}^{(3)}\right) \, , \; e^{(1)} = \widetilde{e}^{(1)} \, , \; e^{(2)} = \widetilde{e}^{(2)} \, . \tag{2.86}$$

E, correspondentemente:

$$e_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{e}_{(0)} + \widetilde{e}_{(3)}\right) \, , e_{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widetilde{e}_{(0)} - \widetilde{e}_{(3)}\right) \, , \; e_{(1)} = \widetilde{e}_{(1)} \, , \; e_{(2)} = \widetilde{e}_{(2)} \, . \tag{2.87}$$

Os campos de tétradas da dinâmica da frente de luz, por sua definição, apresentam as

[6] A solução escolhida reflete a eleição feita das coordenadas no plano nulo dada na Eq. (2.71), com a qual é compatível.

seguintes propriedades –usar-se-á doravante $\alpha, \beta \in \{1;2\}$–:

$$e_{(+)} \cdot e_{(+)} = 0 = e_{(-)} \cdot e_{(-)} \quad , \quad e_{(+)} \cdot e_{(-)} = 1 \quad ,$$

$$e_{(\alpha)} \cdot e_{(\beta)} = -\delta_{\alpha\beta} \quad , \quad e_{(+)} \cdot e_{(\alpha)} = 0 = e_{(-)} \cdot e_{(\alpha)} \, . \tag{2.88}$$

Particularmente, é fácil verificar que quando as tétradas assumem seus valores canônicos, isto é, com componentes $e_{(+)} = (1;0;0;0)$, $e_{(1)} = (0;1;0;0)$, $e_{(2)} = (0;0;1;0)$ e $e_{(-)} = (0;0;0;1)$, a métrica $g_{\mu\nu}$ se iguala com a métrica invariante dada na Eq. (2.84), $[g_{\mu\nu}] = [\eta_{(a)(b)}]$, o que significa que as coordenadas invariantes coincidem com as coordenadas no plano nulo, como deve ser por consistência.

Sendo o conjunto $\left\{e_{(a)}\right\}$, $a \in \{+;1;2;-\}$, uma base do espaço-tempo de Minkowski, pode-se decompor qualquer vetor A como combinação linear de seus elementos. Escrevamos: $\mathsf{A} = \sum\limits_{(a)} A^{(a)} e_{(a)}$. Multiplicando por um elemento da base dual –base de co-tétradas– $e^{(b)}$:

$$e^{(b)} \cdot \mathsf{A} = \sum_{(a)} A^{(a)} e^{(b)} \cdot e_{(a)} = \sum_{(a)} A^{(a)} \delta^{(b)}{}_{(a)} = A^{(b)} \, .$$

Portanto, o vetor A tem componentes invariantes:

$$A^{(+)} := \mathsf{A} \cdot e^{(+)} \, , A^{(\alpha)} := \mathsf{A} \cdot e^{(\alpha)} \, , \; A^{(-)} := \mathsf{A} \cdot e^{(-)} \, , \tag{2.89}$$

e decomposição na base de tétradas:

$$\mathsf{A} = A^{(+)} e_{(+)} + A^{(\perp)} e_{(\perp)} + A^{(-)} e_{(-)} \, , \quad A^{(\perp)} e_{(\perp)} \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} A^{(\alpha)} e_{(\alpha)} \, . \tag{2.90}$$

O produto escalar de dois vetores A e B pode agora ser escrito em função de suas componentes invariantes no plano nulo:

$$\mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = A^{(+)} B^{(-)} + A^{(-)} B^{(+)} - A^{(\perp)} B^{(\perp)} \, . \tag{2.91}$$

Em particular, o vetor posição[7], x, tem decomposição: $\mathsf{x} = x^{(+)} e_{(+)} + x^{(-)} e_{(-)} + x^{(\perp)} e_{(\perp)}$, e também o operador derivada: $\partial = e_{(+)} \partial_{(-)} + e_{(-)} \partial_{(+)} - e_{(\perp)} \partial_{(\perp)}$, cujas componentes invariantes são dadas pela definição de derivadas direcionais:

$$\partial_{(+)} = e_{(+)} \cdot \partial = \frac{\partial}{\partial x^{(+)}} \quad , \quad \partial_{(-)} = e_{(-)} \cdot \partial = \frac{\partial}{\partial x^{(-)}} \quad , \quad \partial_{(\perp)} = e_{(\perp)} \cdot \partial = \frac{\partial}{\partial x^{(\perp)}} \quad . \tag{2.92}$$

Finalmente, como escolhemos a coordenada $x^{(+)}$ como sendo o tempo, $\partial_{(+)}$ será a derivada temporal. Cada plano nulo de $x^{(+)}$ constante é gerado pelos vetores $e_{(\perp)}$ e $e_{(-)}$, e tem elemento de volume que denotar-se-á por $d^3\boldsymbol{x} := dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(-)} \equiv d^2x^{(\perp)} dx^{(-)}$.

[7]Este é um vetor no espaço-tempo de Minkowski uma vez que a origem –por exemplo, a posição do observador ou um evento particularmente escolhido– tem sido fixado. Isso é devido a seu caráter afim e não simplesmente linear. A respeito deste ponto, consultar a Ref. [158].

2.4 Teoria lagrangiana do campo clássico no plano nulo

Fixaremos agora a consideração na teoria do campo clássico, ou seja, na descrição ondulatória da partícula individual por suas equações do movimento, sem sujeitar ainda suas soluções aos axiomas da teoria quântica –isto é, desconsiderando as exigências da interpretação probabilística, a possibilidade de mudança do número e identidade das partículas, *et cetera*–. Para tal fim, aproveitar-se-á a possibilidade introduzida pela «coordinalização» invariante para trabalhar com equações e grandezas escritas em linguagem covariante; os objetos correspondentes no plano nulo serão então obtidos por projeção com a base de tétradas. A abordagem que utilizaremos, quiçá a mais habitual para o estudo dos campos, é a lagrangiana. Como ela é bem conhecida e, por outro lado, existem excelentes referências para seu estudo –por exemplo, as Refs. [100, 162, 160]–, nos limitaremos aqui apenas a oferecer um brevíssimo resumo com o intuito de fixar a notação.

Seja $u^A(x)$ $(A = 1, \cdots, N)$ a componente A-ésima de um conjunto de campos. Estas componentes são genéricas, quer dizer, podem pertencer a campos de diferente natureza. A integral de ação definida na região espaço-temporal $\Omega \subseteq \mathbb{M}$ é definida como:

$$\mathscr{A}[u] := \int_\Omega d^4x \mathscr{L}[u; \partial u](x) \quad , \tag{2.93}$$

com $\mathscr{L}$ a densidade lagrangiana da primeira ordem –isto é, que depende da derivada dos campos de até primeira ordem–. Aplicando uma transformação cujos efeitos nas coordenadas e campos são dados, infinitesimalmente, pelas equações:

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad , \quad u'^A(x') = u^A(x) + \delta u^A(x) \quad , \tag{2.94}$$

a integral de ação tem variação:

$$\delta\mathscr{A}[u] := \int_{\Omega'} d^4x' \mathscr{L}[u'; \partial' u'](x') - \int_\Omega d^4x \mathscr{L}[u; \partial u](x) = \int_\Omega d^4x \left(\delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\partial_\mu \delta x^\mu\right) \quad . \tag{2.95}$$

Essa expressão pode ser escrita em forma conveniente definindo a derivada de Euler da densidade lagrangiana,

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^A} := \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u^A} - \partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u^A)} \quad , \tag{2.96}$$

e a quantidade:

$$\Theta^\mu{}_\nu := \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u^A)}\partial_\nu u^A - \delta^\mu{}_\nu \mathscr{L} \quad . \tag{2.97}$$

Então a Eq. (2.95) é equivalente a:

$$\delta\mathscr{A}[u] = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^A}\left(\delta u^A - \partial_\mu u^A \delta x^\mu\right) - \partial_\mu \left[\Theta^\mu{}_\nu \delta x^\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u^A)}\delta u^A\right]\right\} \quad . \tag{2.98}$$

Escrita nessa forma, é possível a aplicação direta de princípios variacionais à integral de ação.

Princípio de ação estacionária de Ostrogradskii-Hamilton: Campo físico é aquele cuja forma funcional ($\delta x^\mu = 0$) é de tal sorte que, entre duas configurações fixas do sistema ($\delta u^A(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$), a integral de ação adota um valor estacionário ($\delta\mathscr{A}[u] = 0$) qualquer que seja a região Ω.

As equações de Euler-Lagrange são consequência do princípio de ação estacionária, pois na Eq. (2.98) ele implica que:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^A} = 0 \quad ; \quad A = 1, \cdots, N \quad . \tag{2.99}$$

Teorema 2.2 *(Primeiro teorema de Nöther): Se a integral de ação de um dado sistema físico é invariante, módulo termos de superfície, em relação a um determinado grupo de Lie G_r de r parâmetros, então r combinações linearmente independentes de certas derivadas de Euler da densidade lagrangiana são iguais a divergências.*

Prova: Denotemos por ϵ^a ($a = 1, \cdots, r$) os parâmetros do grupo G_r, e consideremos que a transformação age sobre as coordenadas e campos mediante as representações X_a e I_a, respectivamente:

$$\delta x^\mu = \epsilon^a [X_a x]^\mu \quad , \quad \delta u^A = \epsilon^a [I_a u]^A \quad . \tag{2.100}$$

Por hipótese do teorema, a ação é invariante, módulo termos de superfície, frente às transformações da Eq. (2.100): $\int\limits_{\partial\Omega} d^4x \partial_\mu(\epsilon^a \delta_a \Omega^\mu)$. Portanto, na Eq. (2.98):

$$\int\limits_\Omega d^4x \left\{ \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^A} \left([I_a u]^A - \partial_\mu u^A [X_a x]^\mu \right) - \partial_\mu J^\mu{}_a \right\} \epsilon^a = 0 \quad , \tag{2.101}$$

com:

$$J^\mu{}_a := \Theta^\mu{}_\nu [X_a x]^\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u^A)} [I_a u]^A - \delta_a \Omega^\mu \quad . \tag{2.102}$$

Logo, a independência linear dos parâmetros do grupo G_r, ϵ^a, permite escrever a tese do teorema:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^A} \left([I_a u]^A - \partial_\mu u^A [X_a x]^\mu \right) = \partial_\mu J^\mu{}_a \quad ; \quad a = 1, \cdots, r \quad , \tag{2.103}$$

quod erat demonstrandum. ■

Para os campos físicos, que satisfazem às equações de Euler-Lagrange, as identidades da Eq. (2.103) se tornam r leis de conservação das densidades de corrente $J^\mu{}_a$, pois o lado esquerdo das mencionadas identidades se anula. Nesse caso, as correspondentes cargas conservadas, chamadas «cargas de Nöther», são obtidas por integração da densidade de corrente sobre uma superfície Σ com elemento de área $d^3\sigma_\mu = d^3\sigma n_\mu$, com n_μ o vetor normal a Σ:

$$Q_a := \int\limits_\Sigma d^3\sigma(x) n_\mu J^\mu{}_a(x) \quad . \tag{2.104}$$

Na dinâmica da frente de luz a superfície Σ é o plano nulo $x^{(+)} = x_0^{(+)}$ constante, com vetor

normal[8] $\mathbf{n} = e_{(-)}$. Assim:

$$Q_a = \int\limits_{x^{(+)}=x_0^{(+)}} d^3\boldsymbol{x} e_{(-)\mu} J^{\mu}{}_a(x) = \int\limits_{x^{(+)}=x_0^{(+)}} d^3\boldsymbol{x} J^{(+)}{}_a(x) \quad ; \quad \frac{dQ_a}{dx^{(+)}} = 0 \quad . \tag{2.105}$$

Típicamente, as densidades de corrente são formas bilineares dos campos, então as cargas de Nöther existirão (a integral que as define converge) se os campos, assim como suas derivadas transversais e longitudinal, são de quadrado integrável no plano nulo. Essas condições incluem naturalmente à condição assintótica da Eq. (2.79) que substitui aos dados iniciais na superfície de $x^{(-)}$ constante.

Consideremos, particularmente, o gerador das translações temporais no plano nulo, isto é, o hamiltoniano. Para a translação por um vetor constante ϵ^μ, ou seja, para a transformação $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$, $u'^A(x') = u^A(x)$, ter-se-á que:

$$[X_\nu x]^\mu = \delta^\mu{}_\nu \quad , \quad [I_\nu u]^A = 0 \quad . \tag{2.106}$$

Como a densidade lagrangiana é escalar frente às transformações do grupo de Poincaré, deverá ser $\delta\mathscr{L} = 0$, o que na Eq. (2.95) implica que a integral de ação é invariante sob translações, pois os parâmetros ϵ^μ são constantes, e assim $\delta_\nu \Omega^\mu = 0$. Substituindo a Eq. (2.106) na (2.102), obtém-se a densidade de corrente conservada:

$$J^\mu{}_\nu = \Theta^\mu{}_\sigma [X_\nu x]^\sigma = \Theta^\mu{}_\nu \quad , \tag{2.107}$$

que é chamado «tensor de energia-momento». A carga de Nöther que lhe corresponde, com respeito ao plano nulo, é o «vetor de energia-momento», com componentes [vide a Eq. (2.105)]:

$$P_\nu = \int\limits_{x^{(+)}=x_0^{(+)}} d^3\boldsymbol{x} \Theta^{(+)}{}_\nu \quad . \tag{2.108}$$

As componentes invariantes desse vetor são obtidas projetando seu índice ν com o campo de tétradas da dinâmica da frente de luz:

$$P_{(a)} = e_{(a)}{}^\nu P_\nu = \int d^3\boldsymbol{x} e_{(a)}{}^\nu \Theta^{(+)}{}_\nu = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta^{(+)}{}_{(a)} \quad . \tag{2.109}$$

Assim, o momento invariante no plano nulo possui as componentes:

$$P_{(\perp)} = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta^{(+)}{}_{(\perp)} \quad , \quad P_{(-)} = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta^{(+)}{}_{(-)} \quad , \tag{2.110}$$

enquanto que o hamiltoniano invariante tem expressão:

$$P_{(+)} = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta^{(+)}{}_{(+)} = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta^{(+)(-)} = \int d^3\boldsymbol{x} \Theta_{(-)(+)} \quad . \tag{2.111}$$

[8] Note-se que o vetor $e_{(+)}$, que poder-se-ia pensar inicialmente que seja o vetor normal, falha, pois não é ortogonal a $e_{(-)}$, localizado sobre o plano nulo, segundo a Eq. (2.88).

E sobre a teoria lagrangiana geral do campo clássico basta o que foi dito. A partir desse ponto, estudar-se-á os diversos campos particulares usados na modelagem da matéria. E uma vez clara a ideia subjacente às coordenadas invariantes, não escreveremos mais os índices entre parênteses.

2.5 Campo escalar

Seja φ um campo escalar complexo, cujas equações do movimento são as de Klein-Gordon-Fock:

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0 \quad ; \quad (\Box + m^2)\varphi^*(x) = 0 \quad . \tag{2.112}$$

Como não há outras equações além dessas, o problema de Goursat para o campo escalar é simplesmente aquele que já estudou-se na seção 2.1. A densidade lagrangiana que deriva nessas equações é:

$$\mathscr{L}_\varphi = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \quad . \tag{2.113}$$

Com ela pode-se obter o tensor de energia-momento desse campo:

$$\begin{aligned} \Theta^\mu{}_\nu &= \frac{\partial \mathscr{L}_\varphi}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi + \frac{\partial \mathscr{L}_\varphi}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \partial_\nu \varphi^* - \delta^\mu{}_\nu \mathscr{L}_\varphi \\ &= \partial^\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\nu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \delta^\mu{}_\nu \partial_\sigma \varphi^* \partial^\sigma \varphi + m^2 \delta^\mu{}_\nu \varphi^* \varphi \quad . \end{aligned} \tag{2.114}$$

O hamiltoniano invariante do plano nulo será, portanto:

$$P_+ = \int d^3\boldsymbol{x} \left[\partial_\perp \varphi^* \partial_\perp \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \right] \ . \tag{2.115}$$

Consideremos agora a equação de Klein-Gordon-Fock [Eq. (2.112)] à que o campo escalar obedece. Nas coordenadas do plano nulo:

$$\Box = 2\partial_+ \partial_- - (\partial_\perp)^2 \ ; \ (\partial_\perp)^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad . \tag{2.116}$$

A solução dela será facilmente encontrada tomando a transformada de Fourier do campo:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dp_+ dp_- d^2 p_\perp \hat{\varphi}(p) e^{-i\left(p_+ x^+ + p_- x^- + p_\perp x^\perp\right)} \quad , \tag{2.117}$$

do qual:

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = -(2\pi)^{-3/2} \int dp_+ dp_- d^2 p_\perp \left(2p_+ p_- - \omega_p^2\right) \hat{\varphi}(p) e^{-ipx} = 0 \, , \tag{2.118}$$

com: $\omega_p^2 := m^2 + (p_\perp)^2$. Logo, deve ser satisfeita a relação distribucional $\left(2p_+ p_- - \omega_p^2\right)\hat{\varphi}(p) = 0$, cuja solução é dada por [159]:

$$\hat{\varphi}(p) = \delta\left(2p_+ p_- - \omega_p^2\right) \varphi(p) = \frac{1}{|2p_-|} \delta\left(p_+ - \frac{\omega_p^2}{2p_-}\right) \varphi(p) \quad , \tag{2.119}$$

com $\varphi(p)$ uma função arbitrária. Substituindo na Eq. (2.117) e separando a região de integração da variável p_+ no domínio positivo e no negativo:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^2p_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dp_- \left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{dp_+}{|2p_-|} \delta\left(p_+ - \frac{\omega_p^2}{2p_-}\right) \varphi(p) e^{-ipx} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dp_+}{|2p_-|} \delta\left(p_+ - \frac{\omega_p^2}{2p_-}\right) \varphi(p) e^{-ipx} \right\} \quad . \tag{2.120}$$

Façamos na primeira integral a substituição $p \to -p$; usando então a propriedade de simetria da distribuição delta de Dirac, isto é, que $\delta(x) = \delta(-x)$, obtém-se que:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^2p_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dp_- \int_{0}^{+\infty} \frac{dp_+}{|2p_-|} \delta\left(p_+ - \frac{\omega_p^2}{2p_-}\right) \left[\varphi(-p) e^{ipx} + \varphi(p) e^{-ipx}\right] . \tag{2.121}$$

Como é indicado pelos limites de integração, aqui é $p_+ > 0$. Mas o suporte da distribuição delta de Dirac exige que seja $p_+ = \omega_p^2/2p_-$, e como $\omega_p^2 > 0$, é forçoso que seja $p_- > 0$. Assim é que deve-se introduzir a função de Heaviside $\Theta(p_-)$, e então escrever:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^2p_\perp \int dp_- \int_{0}^{+\infty} \frac{dp_+}{|2p_-|} \Theta(p_-) \, \delta\left(p_+ - \frac{\omega_p^2}{|2p_-|}\right) \left[\varphi(-p) e^{ipx} + \varphi(p) e^{-ipx}\right] . \tag{2.122}$$

Integrando finalmente na variável p_+:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{|2p_-|} \Theta(p_-) \left[\varphi(-p) e^{ipx} + \varphi(p) e^{-ipx}\right]\Big|_{p_+ = E} \, , \; E := \frac{\omega_p^2}{|2p_-|} > 0 \, , \tag{2.123}$$

em que escrevemos: $d^3\boldsymbol{p} := d^2p_\perp dp_-$. Note-se que essa expressão é relativísticamente correta, pois a medida de integração é invariante sob transformações de Poincaré:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2p_\perp dp_-}{|2p_-|} \Theta(p_-) &= \int \frac{d^4p}{|2p_-|} \Theta(p_-) \, \delta(p_+ - E) \\ &= \int d^4p \Theta(p_-) \, \delta(p^2 - m^2) \, . \end{aligned} \tag{2.124}$$

É habitual realizar a normalização seguinte[9] [100]:

$$\varphi(\boldsymbol{p}) := \frac{\varphi(p)}{\sqrt{|2p_-|}} \quad , \quad \varphi(-\boldsymbol{p}) := \frac{\varphi(-p)}{\sqrt{|2p_-|}} \quad , \tag{2.125}$$

[9] O motivo é a simplificação dos geradores do grupo de Poincaré quando escritos em função das amplitudes $\varphi(p)$; tal normalização se torna importante na teoria ondulatória, pois determina as relações de comutação dos operadores de emissão e absorção, como se verá no seguinte capítulo.

com a qual:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{|2p_-|}} \Theta(p_-) \left[\varphi(\boldsymbol{p})\, e^{-ipx} + \varphi(-\boldsymbol{p})\, e^{ipx} \right] \Big|_{p_+ = E} \quad . \tag{2.126}$$

Finalmente, se o campo clássico é real, isto é, se $\varphi(x) = \varphi^*(x)$, então às amplitudes dos diferentes modos deve ser imposta a condição:

$$\varphi(-p)^* = \varphi(p) \quad , \quad \varphi(p)^* = \varphi(-p) \, . \tag{2.127}$$

Assim, a expansão como integral de Fourier do campo escalar real é:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{|2p_-|}} \Theta(p_-) \left[\varphi(\boldsymbol{p})\, e^{-ipx} + \varphi(\boldsymbol{p})^*\, e^{ipx} \right] \Big|_{p_+ = E} \quad . \tag{2.128}$$

2.6 Campo de Dirac

Seja ψ o campo fermiônico de Dirac. As equações de Dirac são[10]:

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0 \quad , \quad \overline{\psi}(x)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m) = 0 \quad , \tag{2.129}$$

as quais provêm da densidade lagrangiana:

$$\mathscr{L}_\psi = \overline{\psi} \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/} - m \right) \psi \, . \tag{2.130}$$

O tensor de energia-momento desse campo é:

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{i}{2} \left(\overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - \delta^\mu{}_\nu \overline{\psi} \left(\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/} - m \right) \psi \, , \tag{2.131}$$

e, particularmente, o hamiltoniano invariante do plano nulo é:

$$P_+ = \int d^3\boldsymbol{x} \left[-\frac{i}{2} \overline{\psi} \left(\gamma^- \overleftrightarrow{\partial}_- + \gamma^\perp \overleftrightarrow{\partial}_\perp \right) \psi + m \overline{\psi} \psi \right] \, . \tag{2.132}$$

[10] A definição do adjunto de Dirac $\overline{\psi}$ é obtida da forma que segue: A equação de Dirac nas coordenadas do plano nulo é:

$$[i(\gamma^+ \partial_+ + \gamma^- \partial_- + \gamma^\perp \partial_\perp) - m]\psi(x) = 0 \quad .$$

Tomando o adjunto no espaço das matrizes (isto é, tomando o complexo conjugado seguido pela transposição), as derivadas, sendo reais as coordenadas, não mudam, enquanto que: $(\gamma^a)^\dagger = \gamma^0 \gamma^a \gamma^0$, de forma que a equação muda para (fatorando o sinal negativo, então removendo-o):

$$\psi(x)^\dagger [i(\gamma^0\gamma^+\gamma^0\partial_+ + \gamma^0\gamma^-\gamma^0\partial_- + \gamma^0\gamma^\perp\gamma^0\partial_\perp) + m] = 0 \quad .$$

Multiplicando pela direita por γ^0 e usando que $(\gamma^0)^2 = 1$:

$$\psi(x)^\dagger \gamma^0 [i(\gamma^+ \partial_+ + \gamma^- \partial_- + \gamma^\perp \partial_\perp) + m] = 0 \quad ,$$

do qual concluímos que o espinor adjunto de Dirac na dinâmica da frente de luz continúa a ser $\overline{\psi}(x) := \psi(x)^\dagger \gamma^0$.

2.6.1 Componentes dinâmicas e não-dinâmicas

Investiguemos em detalhe a equação de Dirac [Eq. (2.129)]. Nas coordenadas do plano nulo, separando a derivada temporal ∂_+:

$$i\gamma^+\partial_+\psi = \left(m - i\gamma^-\partial_- - i\gamma^\perp\partial_\perp\right)\psi \quad . \tag{2.133}$$

A matriz γ^+ não pode ser invertida[11], pois ela tem determinante nulo –o qual pode ser visto diretamente pelo fato de que seu quadrado é nulo devido à relação de anti-comutação a que as matrizes de Dirac satisfazem (o que indica também que a matriz γ^- é não invertível)–. Portanto, poder-se-á isolar a derivada temporal, com a finalidade de escrever a Eq. (2.133) na forma da equação de Schrödinger, somente pela definição dos projetores:

$$\Lambda_\pm := \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^0\gamma^3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0\gamma^\pm \quad , \tag{2.134}$$

os quais exibem as propriedades seguintes:

$$\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm \; ; \; \Lambda_\pm\Lambda_\mp = 0 \; ; \; \Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \, , \tag{2.135}$$

como é possível provar por cálculo direto. Da mesma forma podem ser mostradas as igualdades que seguem:

$$\Lambda_\pm\gamma^0 = \gamma^0\Lambda_\mp \quad , \quad \Lambda_+\gamma^0\gamma^- = 0 \quad , \quad \Lambda_-\gamma^0\gamma^- = \gamma^0\gamma^-\Lambda_- \quad , \quad \Lambda_\pm\gamma^0\gamma^\perp = \gamma^0\gamma^\perp\Lambda_\mp \quad . \tag{2.136}$$

Finalmente, definimos as duas projeções do campo de Dirac segundo:

$$\psi_\pm := \Lambda_\pm\psi \quad ; \quad \psi = \psi_+ + \psi_- \quad . \tag{2.137}$$

Com isto, multiplicando a Eq. (2.133) por γ^0 pela esquerda e usando a definição de Λ_+, obtém-se:

$$i\sqrt{2}\partial_+\psi_+ = \gamma^0\left(m - i\gamma^-\partial_- - i\partial^\perp\partial_\perp\right)\psi \quad . \tag{2.138}$$

Multiplicando pela esquerda por Λ_+ e usando as propriedades mostradas na Eq. (2.136), chega-se a:

$$i\sqrt{2}\partial_+\psi_+ = \gamma^0\left(m - i\gamma^\perp\partial_\perp\right)\psi_- \quad . \tag{2.139}$$

Analogamente, multiplicando a Eq. (2.138) por Λ_- pela esquerda e usando a Eq. (2.136):

$$i\sqrt{2}\partial_-\psi_- = \gamma^0\left(m - i\gamma^\perp\partial_\perp\right)\psi_+ \quad . \tag{2.140}$$

A Eq. (2.139) é uma equação dinâmica para a componente ψ_+, a qual é, portanto, chamada «componente dinâmica» do campo de Dirac. A Eq. (2.140), por outro lado, não é uma equação dinâmica para ψ_-, visto que nenhuma derivada temporal aparece nela; ψ_- é chamada, por

[11] A expressão das matrizes de Dirac no plano nulo e na representação de Weyl é mostrada no Ap. B.

esse motivo, «componente não-dinâmica», e a Eq. (2.140) é uma equação de vínculo, a qual pode ser invertida da seguinte forma, explicitando o fato de que ψ_- é automaticamente conhecida uma vez que o é ψ_+:

$$\psi_- = \frac{1}{i\sqrt{2}\partial_-}\gamma^0\left(m - i\gamma^\perp\partial_\perp\right)\psi_+ \quad . \tag{2.141}$$

Este vínculo pode ser usado para eliminar ψ_- na Eq. (2.139). Encontra-se que a equação do movimento da componente dinâmica do campo de Dirac não é outra senão a equação de Klein-Gordon-Fock:

$$\left(\Box + m^2\right)\psi_+ = 0 \quad . \tag{2.142}$$

2.6.2 Problema de Goursat

O problema de Goursat para o campo de Dirac pode ser abordado da mesma forma que na Seç. 2.1: Solucionando primeiro o problema de Cauchy (na dinâmica instantânea) e passando depois à dinâmica do plano nulo por aplicação do teorema de Gauss num volume convenientemente escolhido. Como, no entanto, este caminho já foi percorrido anteriormente –e não há dificuldades em percorrê-lo para o caso presente se assim for desejado–, é mais instrutivo oferecer uma outra forma de obter a desejada solução. Tal será feito explorando a divisão recém feita entre as componentes dinâmicas e as não-dinâmicas. Devido a que as componentes dinâmicas satisfazem à equação de Klein-Gordon-Fock [Eq. (2.142)], o problema de Goursat tem a solução dada na Eq. (2.80), que por uma integração por partes pode ser escrita da seguinte forma:

$$\psi_+(x) = \int\limits_{y^+=y_0^+} d^3\boldsymbol{y}\, 2\partial_-^x D(x-y)\psi_+(y)\,. \tag{2.143}$$

As componentes não-dinâmicas são então determinadas pela substituição da Eq. (2.143) na (2.141), da qual obtém-se:

$$\psi_-(x) = -i\sqrt{2}\int\limits_{y^+=y_0^+} d^3\boldsymbol{y}\gamma^0\left(m - i\gamma^\perp\partial_\perp^x\right)D(x-y)\psi_+(y)\,. \tag{2.144}$$

E pelo uso das definições mostradas na Eq. (2.137):

$$\psi(x) = \int\limits_{y^+=y_0^+} d^3\boldsymbol{y}\left[2\partial_-^x - i\sqrt{2}\gamma^0\left(m - i\gamma^\perp\partial_\perp^x\right)\right]D(x-y)\Lambda_+\psi(y)\,. \tag{2.145}$$

Usando então as Eqs. (2.134)-(2.136), assim como o fato já mencionado de ser $(\gamma^+)^2 = 0$, vê-se que é possível escrever a Eq. (2.145) na forma sucinta:

$$\psi(x) = -i\int\limits_{y^+=y_0^+} d^3\boldsymbol{y}S(x-y)\gamma^+\psi(y) \quad , \tag{2.146}$$

com a distribuição $S(x)$ definida como:

$$S(x) := (i\partial\!\!\!/ + m)\, D(x) \quad . \tag{2.147}$$

Tendo encontrado a solução, o que implica que ela é única, pode-se afirmar que o problema de Goursat para o campo de Dirac está bem definido. Por outro lado, no problema de Cauchy é necessário conhecer o campo $\psi(0;\boldsymbol{x})$, ou seja, quatro funções –suas derivadas não são necessárias porque a equação de Dirac é da primeira ordem–; o mesmo número de dados é indispensável na solução apresentada: a Eq. (2.143) requer o conhecimento de ψ_+ em $x^+ = 0$ e $x^- = x_0^-$, fazendo igualmente um total de quatro funções –ter substituído essa última por uma condição assintótica não muda o número de dados iniciais–.

2.6.3 Espinores de polarização

Como cada uma das componentes do campo de Dirac, $\psi_a(x)$, satisfaz à equação de Klein-Gordon-Fock,

$$(\Box + m^2)\psi_a(x) = 0\,, \tag{2.148}$$

cada uma dessas componentes irá ter uma expressão semelhante àquela da Eq. (2.126):

$$\psi_a(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{|2p_-|}} \Theta(p_-) \left[\psi_a(\boldsymbol{p})\, e^{-ipx} + \psi_a(-\boldsymbol{p})\, e^{ipx}\right]\Big|_{p_+=E} . \tag{2.149}$$

As amplitudes espinoriais $\psi_a(\boldsymbol{p})$ que aqui aparecem devem ser tais que $\psi_a(x)$ satisfaçam à equação de Dirac [Eq. (2.129)]: Elas carregam a informação «adicional» não contida na equação de Klein-Gordon-Fock, isto é, a informação dos vínculos, definindo os possíveis estados de polarização do campo de Dirac. Substituindo a Eq. (2.149) na (2.129):

$$0 = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{|2p_-|}} \Theta(p_-) \left[(\not{p} - m)\psi(\boldsymbol{p})\, e^{-ipx} - (\not{p} + m)\psi(-\boldsymbol{p})\, e^{ipx}\right]\Big|_{p_+=E} , \tag{2.150}$$

do qual conclui-se que, uma vez que a solução de frequência positiva e a de frequência negativa são linearmente independentes, deverão ser verificadas as equações:

$$(\not{p} - m)\psi(\boldsymbol{p}) = 0 \quad ; \quad (\not{p} + m)\psi(-\boldsymbol{p}) = 0 \quad . \tag{2.151}$$

Apresentamos à continuação, inspirados na Ref. [21], suas soluções. Partimos de:

$$(\not{p} - m)u(\boldsymbol{p}) = 0 \quad . \tag{2.152}$$

De forma semelhante a como foram obtidas as Eqs. (2.139) e (2.140), encontra-se que:

$$\sqrt{2}p_+ u_+ = \gamma^0 \left(m - \gamma^\perp p_\perp\right) u_- \quad , \tag{2.153}$$

$$\sqrt{2}p_- u_- = \gamma^0 \left(m - \gamma^\perp p_\perp\right) u_+ \quad , \tag{2.154}$$

lembrando que é $p_+ = E$ [vide a Eq. (2.150)]. A estratégia para solucionar essas equações será escrever uma base para uma das projeções do espinor e usar então a Eq. (2.153) ou a Eq. (2.154) para encontrar a outra. No Ap. B se mostra a forma explícita dos projetores [Eq. (B.5)]; dela observa-se que uma base para u_- será:

$$u_-^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_-^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.155}$$

Os espinores u_+ correspondentes são obtidos usando a Eq. (2.153):

$$u_+^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}E} \begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad u_+^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}E} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.156}$$

Ora a Eq. (2.137) revela que a solução completa é obtida somando as componentes u_- e u_+, o que leva a obter:

$$u_1 = \frac{a_0}{\sqrt{2}E} \begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ \sqrt{2}E \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad u_{-1} = \frac{a_0}{\sqrt{2}E} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ \sqrt{2}E \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.157}$$

Escolhemos, convenientemente, o fator de normalização a_0 como sendo[12]:

$$a_0 = \sqrt{\frac{E}{\sqrt{2}\,|p_-|}} \quad . \tag{2.158}$$

Com isto:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2E}\sqrt{\sqrt{2}\,|p_-|}} \begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ \sqrt{2}E \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad u_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2E}\sqrt{\sqrt{2}\,|p_-|}} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ \sqrt{2}E \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.159}$$

[12] O mesmo que na normalização das amplitudes do campo escalar na Eq. (2.125), essa escolha é livre. Seu valor se refletirá, por exemplo, nas regras de soma que estamos prestes a obter [vide as Eqs. (2.161) e (2.166)].

Assim, é possível calcular diretamente:

$$u_1 u_1^\dagger + u_{-1} u_{-1}^\dagger = \frac{1}{2E\sqrt{2}\,|p_-|} \begin{pmatrix} p_\perp^2 + m^2 & -\sqrt{2}E\,(p_1 - ip_2) & \sqrt{2}mE & 0 \\ -\sqrt{2}E\,(p_1 + ip_2) & 2E^2 & 0 & \sqrt{2}mE \\ \sqrt{2}mE & 0 & 2E^2 & \sqrt{2}E\,(p_1 - ip_2) \\ 0 & \sqrt{2}mE & \sqrt{2}E\,(p_1 + ip_2) & p_\perp^2 + m^2 \end{pmatrix} .$$

Multiplicando pela direita por γ^0:

$$u_1 \overline{u}_1 + u_{-1} \overline{u}_{-1} = \frac{1}{|2p_-|} \begin{pmatrix} m & 0 & \sqrt{2}\,|p_-| & -(p_1 - ip_2) \\ 0 & m & -(p_1 + ip_2) & \sqrt{2}E \\ \sqrt{2}E & p_1 - ip_2 & m & 0 \\ p_1 + ip_2 & \sqrt{2}\,|p_-| & 0 & m \end{pmatrix} . \tag{2.160}$$

Daí que, lembrando da representação de Weyl das matrizes de Dirac –vide o Ap. B–, reconhece-se que a equação anterior se iguala a:

$$\sum_{s=\pm 1} u_s \overline{u}_s = \frac{E\gamma^+ + |p_-|\,\gamma^- + p_\perp \gamma^\perp + m}{|2p_-|} \quad . \tag{2.161}$$

Dar-se-á agora, por método análogo, solução à segunda das Eqs. (2.151), quer dizer:

$$(\not{p} + m)v = 0 \quad , \tag{2.162}$$

da qual se segue, após projeção com $\Lambda_\pm$, que as componentes do espinor v se relacionam por:

$$v_+ = -\frac{\gamma^0\,(m + p_\perp \gamma^\perp)}{\sqrt{2}E} v_- \quad . \tag{2.163}$$

Usando a mesma base apresentada na Eq. (2.155) e usando a relação da Eq. (2.163), obtém-se:

$$v_+^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}E} \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad v_+^{(-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}E} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ -p_1 - ip_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.164}$$

A Eq. (2.137) implica por sua vez que a solução completa é:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2E}\sqrt{\sqrt{2}\,|p_-|}} \begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ \sqrt{2}E \\ 0 \\ -m \end{pmatrix} \quad , \quad v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2E}\sqrt{\sqrt{2}\,|p_-|}} \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ \sqrt{2}E \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.165}$$

O cálculo direto mostra também que a seguinte regra de soma rege para os espinores de

polarização v_s:

$$\sum_{s=\pm 1} v_s \overline{v}_s = \frac{E\gamma^+ + |p_-|\,\gamma^- + p_\perp \gamma^\perp - m}{|2p_-|} \,. \tag{2.166}$$

2.7 Campo eletromagnético

As equações do campo eletromagnético são as equações de Maxwell, que no espaço vazio se leem [160] (em unidades com $c = 1$, como tem sido determinado de início):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \quad ; \quad \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \,. \tag{2.167}$$

Em função do «tensor de Faraday» $F_{\mu\nu}$, definido da forma seguinte:

$$[F_{\mu\nu}] := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = -[F_{\nu\mu}] \,, \tag{2.168}$$

as equações de Maxwell no vácuo se escrevem:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \,, \tag{2.169}$$

essa última conhecida como «identidade de Bianchi». Essas equações permitem a introdução do «potencial eletromagnético», $A_\mu(x)$, segundo:

$$F_{\mu\nu} =: \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{2.170}$$

A esse campo chamar-se-á doravante «campo eletromagnético», ou às vezes –para explicitar que ele será considerado livre– «campo da radiação». Enquanto que a identidade de Bianchi se mantém idênticamente satisfeita pela introdução do potencial eletromagnético, sua equação do movimento [primeira das Eqs. (2.169)] se reescreve:

$$\Box A^\nu(x) - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu(x)\right) = 0 \,. \tag{2.171}$$

E essa pode ser obtida da densidade lagrangiana:

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,. \tag{2.172}$$

2.7.1 Componentes dinâmicas e não-dinâmicas. Condição de gauge do plano nulo

Poderia parecer, da Eq. (2.171), que o campo da radiação não é obrigado a satisfazer à equação de Klein-Gordon-Fock. No entanto, o termo adicional pode ser removido pela imposição de uma condição subsidiária (condição de *gauge* ou de calibre) cuja possibilidade

se manifesta pela não unicidade da relação entre o potencial e os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$: Estes não são modificados se o potencial é re-definido pela adição de um termo de divergência, $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$ [13]. Para tal remoção bastará exigir que seja $\partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu\right) = 0$, que é o mesmo que dizer $\partial_\mu A^\mu =$ constante; impondo então que o campo se anula no infinito, a anterior constante deve por força ser nula e, assim, a equação de Klein-Gordon-Fock é satisfeita sob a «condição de gauge de Lorenz»[14]:

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \partial_+ A^+ + \partial_\perp A^\perp + \partial_- A^- = 0 \quad . \tag{2.173}$$

Essa condição de gauge elimina um grau de liberdade da teoria, mas não elimina por completo a liberdade de gauge, pois a equação de Klein-Gordon-Fock e a condição de gauge de Lorenz ainda são satisfeitas se se opera uma transformação de gauge adicional com uma função harmônica[15], $\Box f = 0$. Essa última liberdade pode ser suprimida impondo uma condição adicional; a simplificação máxima na dinâmica da frente de luz consiste em tornar a condição de gauge de Lorenz numa relação puramente cinemática, eliminando nela toda dependência temporal; para o que é suficiente exigir que seja $\partial_+ A^+ = 0$, mas então a equação $\Box A^+ = 0$ será igual a $\partial_\perp^2 A^+ = 0$, cuja solução, sob as condições assintóticas de desvanecimento no infinito, é a nula. A essa se chama a «condição de gauge do plano nulo»[16]:

$$A^+(x) = 0 \quad . \tag{2.174}$$

Isto elimina toda a liberdade de gauge, mostrando, além do mais, que o campo eletromagnético possui dois graus de liberdade. Efetivamente, toda a informação está contida nas equações dinâmicas para as componentes transversais:

$$\Box A^\alpha(x) = 0 \quad , \tag{2.175}$$

e nas equações de vínculo que provêm das condições de gauge [Eqs. (2.173) e (2.174)]:

$$A^+ = 0 \, , \; A^- = -\frac{1}{\partial_-} \partial_\alpha A^\alpha \, . \tag{2.176}$$

As componentes transversais A^α são chamadas as «componentes dinâmicas» do campo da radiação, enquanto que A^+ e A^- são as «não-dinâmicas», por estarem totalmente determinadas pelos vínculos.

É útil mencionar, adicionalmente, que, como afirmado nas Refs. [12, 13, 23], a análise feita do problema de Goursat [vide a Seç. 2.1] pode ser fácilmente estendida para um campo

[13] Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, na Seç. 18 da Ref. [160].

[14] Essa condição de gauge é sempre atingível: Seja $g(x) = \partial_\mu A^\mu(x)$. O campo $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$ satisfará à condição de gauge de Lorenz se a função $f(x)$ é escolhida de forma a satisfazer a equação: $\Box f(x) = -g(x)$.

[15] Na nota de rodapé anterior, a função $f(x)$ está determinada módulo soluções à equação homogênea $\Box f(x) = 0$.

[16] É mister mencionar também que ela é sempre atingível: Se o campo $A^a(x)$ não a satisfaz, operamos a transformação $A'^a(x) = A^a(x) + \partial^a f(x)$, com: $f(x) = -\frac{1}{\partial_-} A^+(x)$. Então a Eq. (2.174) rege para o campo $A'^a(x)$.

$\Phi(x)$ que obedece a equações do tipo:

$$\partial_+\partial_-\Phi(x) = L\Phi(x) + \Psi(x) \quad , \tag{2.177}$$

com L um operador diferencial linear que não contém derivadas temporais, ∂_+, e $\Psi(x)$ um campo diferente do $\Phi(x)$. As Eqs. (2.171) são desse tipo para $\nu = 1,2$ somente sob a condição de gauge do plano nulo. A equação para $\nu = +$ equivale então à condição de gauge de Lorenz com $A^+ = 0$ –sob as condições assintóticas empregadas–, e esta torna uma identidade a equação para $\nu = -$. As duas condições de gauge, de qualquer forma, são compatíveis –no caso livre– e devem ser usadas simultaneamente.

No gauge do plano nulo, a densidade lagrangiana da Eq. (2.172) se simplifica a:

$$\mathscr{L}_A = \partial_+ A^\perp \partial_- A^\perp + \partial_- A^\perp \partial_\perp A^- - \frac{1}{2}\left(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_- A^-\right)^2 . \tag{2.178}$$

Ou ainda, em função das componentes dinâmicas só:

$$\mathscr{L}_A = \partial_+ A^\perp \partial_- A^\perp + \left(A^\alpha \partial_\alpha\right)\left(\partial_\beta A^\beta\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\perp A^\perp\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1\right)^2 . \tag{2.179}$$

O tensor de energia-momento é:

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial(\partial_\mu A^\sigma)}\partial_\nu A^\sigma - \delta^\mu_\nu \mathscr{L}_A = F_\sigma{}^\mu \partial_\nu A^\sigma + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\nu F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} \quad . \tag{2.180}$$

Particulamente, o hamiltoniano invariante no gauge do plano nulo é, escrito somente em função das componentes dinâmicas:

$$P_+ = \int d^3\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}\left(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\perp A^\perp\right)^2\right] . \tag{2.181}$$

2.7.2 Problema de Goursat

O problema de Goursat para o campo eletromagnético sujeito à condição de gauge do plano nulo possui uma consequência notável (ao mesmo tempo que essencial): Ele garante a preservação no tempo das condições de gauge. Com efeito, dada a Eq. (2.175), as componentes transversais têm a solução:

$$A^\alpha(x) = \int\limits_{y^+=y_0^+} d^3\boldsymbol{y} D_0(x-y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^y_- A^\alpha(y) , \tag{2.182}$$

com o subíndice «0» sob a distribuição de Jordan-Pauli indicando que nela a massa é nula: $m = 0$. Escrevamos a solução completa da forma:

$$A^a(x) = \int\limits_{y^+=y_0^+} d^3\boldsymbol{y} D^a{}_b(x-y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^y_- A^b(y) . \tag{2.183}$$

A Eq. (2.182) é recuperada sob a condição de ser:

$$D^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} D_0 \, , \; D^{\alpha}{}_{-} = 0 \, , \tag{2.184}$$

enquanto que as condições de vínculo da Eq. (2.176) são satisfeitas, uma vez impostas no plano nulo $y^+ = y_0^+$, se:

$$D^{+}{}_{\alpha} = 0 \, , \; D^{+}{}_{-} = 0 \, , \; D^{-}{}_{-} = 0 \, , \; D^{-}{}_{\alpha} = -\frac{1}{\partial_-} \partial_\alpha D_0 \, . \tag{2.185}$$

Nota-se que não é preciso exigirmos valores particulares de $D^{a}{}_{+}$, uma vez que impor-se-á que seja $A^+ = 0$ no plano nulo inicial. Todas essas condições são satisfeitas com a escolha:

$$D^{a}{}_{b} = \left(\delta^{a}_{b} - \frac{\eta^a \partial_b + \eta_b \partial^a}{\partial_-} \right) D_0(x) \quad , \quad (\eta^a) = \left(0; 0^{\perp}; 1 \right) \, . \tag{2.186}$$

Assim, se no plano $y^+ = y_0^+$ são exigidas as condições de gauge de Lorenz e do plano nulo, então elas se manterão vigentes na evolução dinâmica do campo.

2.7.3 Vetores de polarização

Já dissemos repetidamente que sob a condição de gauge de Lorenz cada componente do campo da radiação satisfaz à equação de Klein-Gordon-Fock:

$$\Box A^a(x) = 0 \, . \tag{2.187}$$

Conseqüentemente, cada uma dessas componentes poderá ser expandida como uma integral de Fourier como na Eq. (2.123):

$$\begin{aligned} A^a(x) = & (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3 \boldsymbol{p}}{\sqrt{|2p_-|}} \Theta(p_-) \sum_{\lambda} \Big(\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^{a*} \, A(\lambda; \boldsymbol{p}) \, e^{-ipx} \\ & + \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^{a} \, A(\lambda; \boldsymbol{p})^{*} \, e^{ipx} \Big) \Big|_{p_+ = E} \, , \end{aligned} \tag{2.188}$$

com $\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a$ os vetores de polarização do campo ($\lambda = +, \perp, -$). Se eles são escolhidos reais, então a equação anterior se reduz à:

$$A^a(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3 \boldsymbol{p}}{\sqrt{|2p_-|}} \Theta(p_-) \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(A(\lambda; \boldsymbol{p}) \, e^{-ipx} + A(\lambda; \boldsymbol{p})^{*} \, e^{ipx} \right) \Big|_{p_+ = E} \, . \tag{2.189}$$

O caráter vetorial do campo eletromagnético está então contido nos vetores de polarização e, portanto, da mesma forma que acontecia com os espinores de polarização do campo de Dirac, eles devem carregar também a informação relativa aos vínculos impostos. Ora, como somente dois graus de liberdade possui este campo, também serão só dois os vetores de polarização dinâmicos; diremos que estes são aqueles com $\lambda = 1, 2$. As duas condições de

gauge explicitadas na Eq. (2.176) são obtidas pelo uso dos vetores de polarização:

$$\varepsilon_1\left(\boldsymbol{p}\right)^a = \left(0;1;0;-\frac{p_1}{p_-}\right) \quad , \quad \varepsilon_2\left(\boldsymbol{p}\right)^a = \left(0;0;1;-\frac{p_2}{p_-}\right) \quad , \tag{2.190}$$

cuja norma é:

$$\eta_{ab}\varepsilon_\alpha\left(\boldsymbol{p}\right)^a\varepsilon_\beta\left(\boldsymbol{p}\right)^b = -\delta^\alpha_\beta \quad , \tag{2.191}$$

o que indica que eles estão normalizados e são do tipo-espaço. O cálculo direto mostra que estes vetores de polarização físicos seguem a regra de soma:

$$\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\lambda\left(\boldsymbol{p}\right)^a\varepsilon_\lambda\left(\boldsymbol{p}\right)^b = -\eta^{ab} + \frac{p^a\eta^b + \eta^a p^b}{p_-} - \frac{p^2}{p_-^2}\eta^a\eta^b \, . \tag{2.192}$$

Isto estabelece uma relação importante com o problema de Goursat: Devido à igualdade $p^2\delta(p^2) = 0$ [159], as Eqs. (2.192) e (2.186) implicam que, no espaço dos momentos:

$$\widehat{D}^{ab}(p) = -\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\lambda\left(\boldsymbol{p}\right)^a\varepsilon_\lambda\left(\boldsymbol{p}\right)^b\widehat{D}_0(p) \, . \tag{2.193}$$

Devemos finalmente nos ocupar da definição dos outros dois vetores de polarização, embora eles não se manifestem fisicamente. Como os quatro vetores hão de formar uma base para o espaço-tempo de Minkowski, requereremos sua ortonormalidade –que é uma extensão da Eq. (2.191)–:

$$\eta_{ab}\varepsilon_\lambda\left(\boldsymbol{p}\right)^a\varepsilon_{\lambda'}\left(\boldsymbol{p}\right)^b = \eta_{\lambda\lambda'} \, , \tag{2.194}$$

equivalente à relação de completeza:

$$\sum_{\lambda\lambda'}\eta_{\lambda\lambda'}\varepsilon_\lambda\left(\boldsymbol{p}\right)^a\varepsilon_{\lambda'}\left(\boldsymbol{p}\right)^b = \eta^{ab} \, . \tag{2.195}$$

Digamos que sejam, de forma genérica:

$$\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)^a = (a;b;c;d) \, , \; \varepsilon_-\left(\boldsymbol{p}\right)^a = (e;f;g;h) \, . \tag{2.196}$$

As condições $\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)_a\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)^a = 0$, $\varepsilon_1\left(\boldsymbol{p}\right)_a\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)^a = 0$ e $\varepsilon_2\left(\boldsymbol{p}\right)_a\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)^a = 0$ levam a que, ou $a \neq 0$ e

$$\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)^a = a\left(1;-\frac{p_1}{p_-};-\frac{p_2}{p_-};\frac{p_\perp^2}{2p_-^2}\right) \, , \tag{2.197}$$

ou $a = 0$ e

$$\varepsilon_+\left(\boldsymbol{p}\right)^a = (0;0;0;d) \, . \tag{2.198}$$

Analogamente, as condições $\varepsilon_-\left(\boldsymbol{p}\right)_a\varepsilon_-\left(\boldsymbol{p}\right)^a = 0$, $\varepsilon_1\left(\boldsymbol{p}\right)_a\varepsilon_-\left(\boldsymbol{p}\right)^a = 0$ e $\varepsilon_2\left(\boldsymbol{p}\right)_a\varepsilon_-\left(\boldsymbol{p}\right)^a = 0$ implicam que, ou $e \neq 0$ e

$$\varepsilon_-\left(\boldsymbol{p}\right)^a = e\left(1;-\frac{p_1}{p_-};-\frac{p_2}{p_-};\frac{p_\perp^2}{2p_-^2}\right) \, , \tag{2.199}$$

ou $e = 0$ e

$$\varepsilon_{-}\left(\boldsymbol{p}\right)^{a} = \left(0;0;0;h\right) . \tag{2.200}$$

Evidentemente, somente poderá ser $a \neq 0$ e $e = 0$, ou $a = 0$ e $e \neq 0$, pois de outra forma os vetores serão proporcionais um ao outro. Qual dessas duas possibilidades deve ser usada é impossível dizê-lo; é matéria de escolha. Optar-se-á pela primeira. Então a condição de ser $\varepsilon_{+}\left(\boldsymbol{p}\right)_{a}\varepsilon_{-}\left(\boldsymbol{p}\right)^{a} = 1$ implica que $ah = 1$, cuja mais simples solução é: $a = 1 = h$. Os vetores de polarização não-dinâmicos serão, portanto:

$$\varepsilon_{+}\left(\boldsymbol{p}\right)^{a} = \left(1;-\frac{p_1}{p_{-}};-\frac{p_2}{p_{-}};\frac{p_{\perp}^{2}}{2p_{-}^{2}}\right) , \tag{2.201}$$

$$\varepsilon_{-}\left(\boldsymbol{p}\right)^{a} = \left(0;0;0;1\right) . \tag{2.202}$$

Capítulo 3

Quantização do campo no plano nulo

Uma vez que temos estabelecido detalhadamente a teoria clássica do campo no plano nulo, é preciso lidar com as modificações que a teoria quântica apresenta nessa forma dinâmica. O primeiro passo nesse estudo será o próprio procedimento da quantização do campo, focando nossa atenção nos campos escalar, fermiônico e vetorial sem massa. Ademais, a quantização do campo pode ser inicialmente definida somente quando ele é livre, pois o próprio conceito da partícula, no qual se baseia a construção do espaço dos estados assintóticos, existe somente quando ela é livre, como se evidencia do fato de que, num processo de interação, as partículas podem mudar sua identidade e número de uma forma a que não temos acesso. Outro ponto: Geralmente, quando se trabalha na mecânica quântica com partículas em interação, usa-se a descrição de interação; mas isto não é possível de se fazer agora, pois um teorema devido a Haag, que pode ser consultado, por exemplo, na Seç. 4-5 da Ref. [88], estabelece que a descrição de interação na teoria do campo quântico relativístico existe somente quando o campo é livre, caso em que a dita descrição se equivale com a de Heisenberg. Assim sendo, todos os campos considerados nesse capítulo –e também nos seguintes– serão campos livres.

3.1 Espaço de Fock dos estados quânticos e definição do campo quantizado

Consideremos inicialmente, por simplicidade, a existência de um único tipo de partícula, e denotemos por $\mathcal{H}_1$ o espaço de Hilbert que a esta lhe corresponde. Seus estados são representados por funções de onda, φ_1, que são os campos clássicos estudados no Cap. 2. Mas nem todos os campos clássicos serão adequados para a descrição da partícula, pois estão restringidos pelo:

Axioma *(de não-negatividade da energia)***:** *Os estados do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ são caracterizados por funções de onda cuja energia é não negativa; elas são dadas pela parte de frequência positiva do campo clássico.*

A necessidade de impor este axioma é evidente: Se existissem partículas com energía negativa, seria energeticamente favorável uma configuração na qual se gerassem um número infinito delas; porém, não se observa na natureza configurações semelhantes. Prosseguindo, como estamos construindo a teoria livre, isto é, de partículas não interagentes, o espaço de estados de um número finito n de partículas é obtido pelo produto tensorial de n espaços de

Hilbert de uma partícula[1]:

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_1^{\otimes n} \equiv \overbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}^{n} \quad . \tag{3.1}$$

Os estados que correspondem a esse espaço de Hilbert são da forma –considera-se-os independentes do tempo, pois trabalhar-se-á na descrição de Heisenberg–:

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}_1; \cdots ; \boldsymbol{x}_n) \quad ; \quad \boldsymbol{x} \equiv (x^{\perp}; x^{-}) \quad , \tag{3.2}$$

e são combinações lineares gerais de produtos tensoriais de estados de uma partícula. Mas, como as partículas são idênticas, uma permutação de duas quaisquer delas não se manifesta no significado físico do estado; logo, a aplicação de um operador de permutação de duas partículas só pode mudar a fase do estado, a qual apenas pode tomar um dos valores 0 ou π para que uma nova aplicação da permutação leve o estado de volta a sua expressão original. Dessa asseveração decorre que a troca de duas partículas só pode mudar um estado físico pela multiplicação de um fator que pode ser, ou $+1$, ou -1. Denotando por π_{jk} o operador de permutação das partículas j e k, suponhamos que o estado φ_n satisfaz, simultâneamente:

$$\pi_{jk}\varphi_n = \varphi_n \quad \text{e} \quad \pi_{rs}\varphi_n = -\varphi_n \quad , \tag{3.3}$$

isto é, que o estado φ_n é simétrico em relação à troca das partículas j e k, e antissimétrico em relação à troca das r e s. Como pode-se escrever $\pi_{rs} = \pi_{jr}\pi_{sk}\pi_{jk}\pi_{sk}\pi_{jr}$, ter-se-á que:

$$-\varphi^n = \pi_{rs}\varphi_n = (-1)^{\pi_{jr}}(-1)^{\pi_{sk}}(-1)^{\pi_{jk}}(-1)^{\pi_{sk}}(-1)^{pi_{jr}}\varphi_n = \varphi_n \quad \Rightarrow \quad \varphi_n = 0\,. \tag{3.4}$$

Logo, as funções de onda dos estados físicos podem ser, ou completamente simétricas, ou completamente antissimétricas[2]. Este tipo de estados pode ser obtido a partir de estados gerais φ_n, não necessariamente físicos, por meio dos operadores de simetrização e antissimetrização de n partículas:

$$\left(S_n^{\pm}\varphi_n\right)(\boldsymbol{x}_1; \cdots ; \boldsymbol{x}_n) := \frac{1}{n!}\sum_{\pi}(\pm 1)^{\pi}\varphi_n\left(\boldsymbol{x}_{\pi(1)}; \cdots ; \boldsymbol{x}_{\pi(n)}\right) \quad . \tag{3.5}$$

Estes operadores satisfazem às seguintes propriedades:

(1) *Ortogonalidade:* Usando o fato de que o grupo de permutações de n elementos é igual a qualquer uma de suas classes laterais, assim como o fato de que os números de

[1]Mais propriamente [163, 166, 164], o completamento (topológico) do mencionado produto, em relação à norma induzida pelo produto interno. De outro modo, o espaço não será completo, e então não será um espaço de Hilbert, como exigido pelos axiomas da teoria quântica. Algumas vezes, o produto tensorial cuja completamento não tem sido realizado chama-se «produto tensorial algébrico» para diferenciá-lo do «produto tensorial de Hilbert», em que o completamento é efetuado [163].

[2]Sublinhamos o fato de que esse resultado é consequência de estarmos considerando um único tipo de partícula, isto é, que todas as partículas do estado φ_n são idênticas. No caso mais geral, é claro, a completa simetrização ou a completa antissimetrização é imposta às coordenadas que descrevem os conjuntos de partículas idênticas.

permutações pares e de permutações ímpares no grupo são iguais –e iguais a $n!/2$, embora esse número particular não seja relevante–, pode-se provar que:

$$S_n^+ S_n^- = 0 = S_n^- S_n^+ \quad . \tag{3.6}$$

(2) *Nilpotência:* Outra vez usa-se o fato de que o grupo é igual a suas classes laterais, assim como que o número total de permutações de n pontos é $n!$ Disto decorre a nilpotência dos operadores $S_n^\pm$:

$$(S_n^\pm)^2 = S_n^\pm \quad . \tag{3.7}$$

(3) *Auto-adjuntez:* Como as permutações de dois elementos têm autovalores reais (± 1), elas são auto-adjuntas, e têm quadrado a identidade; disto pode-se provar que uma permutação geral π de n pontos é um operador unitário: $\pi^\dagger = \pi^{-1}$, assim como que $(-1)^\pi = (-1)^{\pi^{-1}}$. Com este conhecimento é possível estabelecer a auto-adjuntez dos operadores de simetrização e antissimetrização:

$$\left(S_n^\pm \varphi_n; \psi_n\right)_n = \left(\varphi_n; S_n^\pm \psi_n\right)_n \quad . \tag{3.8}$$

Aqui, $(\bullet;\bullet)_n$ é o produto interno em $\mathcal{H}_n$, cuja definição é consequência direta da definição de $\mathcal{H}_n$ dada na Eq. (3.1) pela construção usual do espaço produto tensorial.

Introduziremos agora o seguinte axioma, que generaliza a independência do estado físico com a ordem em que aparecem as coordenadas das partículas idênticas nas funções de onda[3]:

Axioma *(das partículas idênticas)***:** *Se o operador de n partículas $\mathcal{O}$ está associado a um observável físico, então ele comuta com todos os operadores de permutação de n pontos:*

$$[\mathcal{O}; \pi] = 0 \quad . \tag{3.9}$$

Por definição dos operadores $S_n^\pm$ dada na Eq. (3.5), a Eq. (3.9) implica que:

$$\left[\mathcal{O}; S_n^\pm\right] = 0 \quad . \tag{3.10}$$

Assim sendo, usando a Eq. (3.9) e depois a (3.7), pode-se observar que os elementos de matriz dos operadores $\mathcal{O}$ entre estados simétricos e antissimétricos são nulos:

$$\left(S_n^\pm \varphi_n; \mathcal{O} S_n^\mp \psi_n\right)_n = \left(\varphi_n; S_n^\pm \mathcal{O} S_n^\mp \psi_n\right)_n = \left(\varphi_n; \mathcal{O} S_n^\pm S_n^\mp \psi_n\right)_n = 0 \quad . \tag{3.11}$$

Disso conclui-se que os espaços de Hilbert de n partículas são redutíveis aos espaços $\mathcal{H}_n^+$ e $\mathcal{H}_n^-$ de estados simétricos e antissimétricos, respectivamente: Eles descrevem sistemas físicos

[3] Este axioma tem sido relacionado com o princípio da identidade dos indiscerníveis enunciado por Leibniz em seu *Discurso de metafísica*, e que estabelece que duas coisas diferentes não podem ter todas suas propriedades iguais, ou equivalentemente, que duas coisas com todas suas propriedades iguais devem ser idênticas. Uma discussão interessante a este respeito pode ser encontrada na Ref. [167].

diferentes, ou seja, de partículas instrinsecamente diferentes. Partículas descritas no espaço $\mathcal{H}_n^+$ se denominam «bósons», enquanto partículas descritas no espaço $\mathcal{H}_n^-$ recebem o nome de «férmions». Um vetor de $\mathcal{H}_n$ que seja superposição de um elemento do subespaço $\mathcal{H}_n^+$ e outro do $\mathcal{H}_n^-$ não pode descrever um estado físico; esta é uma regra de super-seleção conhecida com o nome de «univalência» [88, 101]. Como, para mais, os subespaços $\mathcal{H}_n^+$ e $\mathcal{H}_n^-$ são ortogonais –vide a Eq. (3.6)–, eles são «subespaços coerentes», e assim haverá operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$ que não sejam observáveis –*verbi gratia*, o projetor sobre o vetor não-físico antes descrito–. Por esses motivos, na construção do espaço de estados físicos é mister restringir a consideração a um dos subespaços coerentes $\mathcal{H}_n^\pm$ só, como faremos a seguir. Claramente, na construção de operadores agindo sobre tais espaços coerentes, é preciso garantir que eles se mantenham invariantes; isto se obtém utilizando o produto tensorial simétrico dos operadores de uma partícula [163]; doravante assumiremos implícita esta operação.

Se finalmente introduz-se o espaço de Hilbert unidimensional de zero partículas,

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{C} \quad , \tag{3.12}$$

então já é possível definir o espaço de Fock[4]:

Definição: *O espaço de Fock $\mathcal{F}^\pm$ dos bósons e férmions, respectivamente, é a soma direta dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_n^\pm$ estendida a todos os valores não negativos de n:*

$$\mathcal{F}^\pm := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n^\pm \quad . \tag{3.13}$$

Seus elementos são:

$$\Phi \equiv (\varphi_0; \varphi_1; \cdots; \varphi_n; \cdots) \quad ; \quad \varphi_n \in \mathcal{H}_n^\pm \quad . \tag{3.14}$$

Particularmente, o estado de vazio (de zero partículas) é:

$$\Omega := (1; 0; \cdots) \quad . \tag{3.15}$$

O espaço de Fock $\mathcal{F}^\pm$ está dotado do produto interno $(\bullet;\bullet)$ definido como:

$$(\Phi; \Psi) := \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi_n; \psi_n)_n \quad , \tag{3.16}$$

e norma induzida por ele:

$$\|\Phi\|^2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi_n\|_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi_n; \varphi_n)_n \quad , \tag{3.17}$$

com a restrição –sobre os estados– de que seu valor seja finito.

[4] Introduzido pela primeira vez por Fock em 1932 na Ref. [79] e desenvolvido em todo detalhe matemático por Cook [78].

Neste ponto, acreditamos conveniente trazer à memória os seguintes fatos: Se o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ é separável, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, o produto tensorial finito $\mathcal{H}_n$ é separável também. Como, além do mais, a soma direta contável de espaços de Hilbert separáveis é ele mesmo um espaço de Hilbert separável, conclui-se que o espaço de Fock é um espaço de Hilbert separável. Como todos estes fatos são demonstráveis, a definição anterior é, a um tempo, um teorema; os detalhes das provas correspondentes encontram-se, por exemplo, na Ref. [163].

Introduziremos agora os operadores no espaço de Fock. Eles serão diferenciados pelo estilo da fonte, por exemplo: $\mathbf{A}$.

Definição: *O operador de número,* $\mathbf{N} : \mathrm{Dom}(\mathbf{N}) \subseteq \mathcal{F}^{\pm} \to \mathcal{F}^{\pm}$ *é definido no domínio*

$$\mathrm{Dom}(\mathbf{N}) := \left\{ \Phi \in \mathcal{F}^{\pm} \;\middle|\; \|\mathbf{N}\Phi\|^2 = \sum_n n^2 \|\varphi_n\|_n^2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.18}$$

pela seguinte regra:

$$(\mathbf{N}\Phi)_n := n\varphi_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N}\Phi := (0; \varphi_1; 2\varphi_2; \cdots; n\varphi_n; \cdots) \quad . \tag{3.19}$$

Dessa definição decorrem as seguintes propriedades:

(1) *Positividade:* Para todo $\Phi \in \mathrm{Dom}(\mathbf{N})$:

$$(\mathbf{N}\Phi; \Phi) = \sum_n n \|\varphi_n\|_n^2 \geq 0 \quad . \tag{3.20}$$

(2) *Auto-adjuntez:* Para todos $\Phi, \Psi \in \mathrm{Dom}(\mathbf{N})$:

$$(\Phi; \mathbf{N}\Psi) = \sum_n (\varphi_n; n\psi_n)_n = \sum_n (n\varphi_n; \psi_n)_n = (\mathbf{N}\Phi; \Psi) \quad . \tag{3.21}$$

(3) Seja $\mathbf{A} : \mathrm{Dom}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{F}^{\pm} \to \mathcal{F}^{\pm}$. Se $[\mathbf{A}; \mathbf{N}] = 0$, então $\mathbf{A}$ preserva o número de partículas. Com efeito, seja $\Phi(n) \in \mathrm{Dom}(\mathbf{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathbf{N})$ um estado de n partículas, isto é, da forma: $\Phi(n) = (0; \cdots; 0; \varphi_n; 0; \cdots)$. Por definição [Eq. (3.19)]: $\mathbf{N}\Phi(n) = n\Phi(n)$. Então: $\mathbf{N}(\mathbf{A}\Phi(n)) = \mathbf{A}(\mathbf{N}\Phi(n)) = \mathbf{A}(n\Phi(n)) = n(\mathbf{A}\Phi(n))$, isto é: $\mathbf{A}\Phi(n)$ ainda é autovetor de $\mathbf{N}$ com autovalor n.

Definição: *O operador de emissão de uma partícula com função de onda* $f \in \mathcal{H}_1$ *é o operador* $a^*(f) : \mathrm{Dom}(a^*(f)) \subseteq \mathcal{F}^{\pm} \to \mathcal{F}^{\pm}$ *definido segundo:*

$$(a^*(f)\Phi)_0 := 0 \quad ; \quad (a^*(f)\Phi)_n := \sqrt{n} S_n^{\pm}(f \otimes \varphi_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad . \tag{3.22}$$

Aqui, os operadores de simetrização ou antissimetrização têm sido incluídos com o objetivo de manter o estado $a^*(f)\Phi$ no espaço de Fock dos bósons ou férmions, respectivamente.

Também, mencionaremos sem provar[5] que $a^*(f)$ é ilimitado em $\mathcal{F}^+$, então seu domínio não cobre todo o espaço de Fock dos bósons; porém, ele é limitado em $\mathcal{F}^-$, então o operador de emissão é definido na totalidade do espaço de Fock dos férmions. Analogamente:

Definição: *O operador de absorção de uma partícula com função de onda $f \in \mathcal{H}_1$ é o operador $a(f) : \mathcal{F}^\pm \to \mathcal{F}^\pm$ definido segundo:*

$$a(f)\Omega := 0 \quad ; \quad (a(f)\Phi)_n(\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_n) := \sqrt{n+1}\,(f(\boldsymbol{x});\varphi_{n+1}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_n))_{1,\boldsymbol{x}} \quad . \tag{3.23}$$

Nota-se que nessa definição é explícito que o domínio do operador de absorção $a(f)$ é o espaço de Fock completo; isto é consequência de que $f \in \mathcal{H}_1$ e $\varphi_n \in \mathcal{H}_n$, assim como que $\Phi \in \mathcal{F}^\pm$ –quer dizer, de que os produtos interiores estão bem definidos, com resultado finito, e também sua soma [vide a Eq. (3.17)]–. Também, observa-se que, por ter sido definido em relação ao produto interno, que é anti-linear no primeiro argumento, $a(f)$ é anti-linear em seu argumento: $a(\alpha f) = \alpha^* a(f)$. A relação entre os operadores de emissão e absorção é encontrada da seguinte maneira: Como $\varphi_{n+1} \in \mathcal{H}^\pm_{n+1}$, pode-se escrever $\varphi_{n+1} = S^\pm_{n+1}\varphi_{n+1}$, então usar a auto-adjuntez de $S^\pm_{n+1}$ [Eq. (3.8)]. Calculando o operador adjunto de $a(f)$, usando as definições das Eqs. (3.22) e (3.23):

$$(\Psi; a(f)\Phi) = \sum_n \left(\sqrt{n+1}S^\pm_{n+1}(f\otimes\psi_n);\varphi_{n+1}\right)_n = (a^*(f)\Psi;\Phi) \quad , \tag{3.24}$$

sempre que seja $\Psi \in \mathrm{Dom}(a^*(f))$, do qual se deduz que:

$$a^*(f) = a(f)^\dagger \equiv a^\dagger(f) \quad , \tag{3.25}$$

notação essa última que usar-se-á doravante.

As relações de comutação ou anti-comutação dos operadores de emissão e absorção são derivadas usando as definições destes operadores dadas nas Eqs. (3.22) e (3.23). Sejam $f, g \in \mathcal{H}_1$, $\Phi \in \mathrm{Dom}\left([a(f);a^\dagger(g)]_\mp\right) \subset \mathcal{F}^\pm$. O cálculo direto mostra que:

$$\left[a(f);a^\dagger(g)\right]_\mp \Phi = (f;g)_1\Phi \quad . \tag{3.26}$$

Também por cálculo direto pode-se provar que:

$$[a(f);a(g)]_\mp \Phi = 0 \quad ; \quad \left[a^\dagger(f);a^\dagger(g)\right]_\mp \Phi = 0 \quad . \tag{3.27}$$

Vê-se que nestas relações deve-se usar o comutador em $\mathcal{F}^+$ (espaço dos bósons) e o anti-comutador em $\mathcal{F}^-$ (espaço dos férmions). O teorema que à continuação apresentaremos prova que as relações das Eqs. (3.26) e (3.27) são as que permitem a construção do espaço de Fock de forma única.

[5] Pode-se consultar, a esse respeito, a Seção 2.1 da Ref. [107].

Teorema 3.1: *Todas as representações irredutíveis das relações de (anti-)comutação das Eqs.* (3.26) *e* (3.27)*, com estado de vazio* Ω*, são equivalentes à representação de Fock.*

Prova: Seja $f \in \mathcal{H}_1$. Das relações de (anti-)comutação que são hipóteses do teorema tem-se que:

$$\left(a^\dagger(f)\Omega; a^\dagger(g)\Omega\right) = \left(\Omega; a(f)a^\dagger(g)\Omega\right) = (f;g)_1 \pm \left(\Omega; a^\dagger(g)a(f)\Omega\right) = (f;g)_1 \quad , \tag{3.28}$$

donde decorre que o espaço de vetores $a^\dagger(f)\Omega$ é unitariamente equivalente ao setor de uma partícula da representação de Fock, de estados da forma $(0; f; 0; \cdots)$. Das mesmas relações de (anti-)comutação, e pelo mesmo procedimento:

$$\frac{1}{2!}\left(a^\dagger(f_1)a^\dagger(f_2)\Omega; a^\dagger(g_1)a^\dagger(g_2)\Omega\right) = \left(S_2^\pm(f_1 \otimes f_2); S_2^\pm(g_1 \otimes g_2)\right)_2 \quad , \tag{3.29}$$

e o espaço de vetores $a^\dagger(f_1)a^\dagger(f_2)\Omega/\sqrt{2!}$ é unitariamente equivalente ao setor de duas partículas da representação de Fock, que contém aos estados da forma $\left(0; 0; S_2^\pm(f_1 \otimes f_2); 0; \cdots\right)$. Claramente, o argumento pode ser generalizado, então o espaço de vetores gerados pela aplicação de n operadores de emissão no estado de vazio, $a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega/\sqrt{n!}$, é unitariamente equivalente ao setor de n partículas da representação de Fock. Como isto é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, a equivalência das representações está provada.

Demonstraremos agora a irredutibilidade das representações construídas. Do exposto se deriva que, se $\{f_j\}$ é base[6] de $\mathcal{H}_1$, então o conjunto:

$$\mathcal{F}_0^\pm = \{\Omega\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^{n} a_j^\dagger \Omega \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.30}$$

é uma base de $\mathcal{F}^\pm$. A introdução desta base é possível devido a que o espaço de Fock é separável[7], o que se deve ao fato de que o espaço de Hilbert de uma partícula o é –vide a Eq. (3.60) embaixo, e lembre que, como foi provado por von Neumann, o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert separável [168] (a prova pode ser encontrada também na Ref. [163]), enquanto que a construção subseqüente do espaço de Fock não muda essa característica, como já o dissemos[8]–. Provaremos, para começar, que todo estado $\Phi \in \mathcal{F}^\pm$ tal que, para todo $f \in \mathcal{H}_1$: $a(f)\Phi = 0$, é proporcional ao estado de vazio. Com efeito, $a(f)\Phi = 0$ significa

[6] Certamente, estamos nos referindo a uma base no sentido de Schauder, pois a base no sentido de Hamel de um espaço vetorial de dimensão infinita é em geral não contável [165].

[7] De fato, a separabilidade e a possibilidade de introduzir tal base se equivalem –vide, por exemplo, o Ap. B da Ref. [166]–.

[8] Por outro lado, se, como comumente se faz, fosse feita a quantização do campo como uma infinitude de osciladores harmônicos, então o espaço de Hilbert de uma partícula seria um produto tensorial infinito dos espaços de Hilbert do oscilador em cada ponto, e, como consequência, seria não-separável, segundo argumentado na Seç. 2-6 da Ref. [88]. Entretando, uma recente revisão das possibilidades e dificuldades de trabalhar em espaços de Hilbert não-separáveis pode ser encontrada na Ref. [169].

que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \equiv \mathbb{N}_0$:

$$(a(f)\Phi)_n = \sqrt{n+1}\,(f(\boldsymbol{x}); \varphi_{n+1}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}_1; \cdots; \boldsymbol{x}_n))_{1,\boldsymbol{x}} = 0 \quad ; \tag{3.31}$$

mas como isto é válido para todo $f \in \mathcal{H}_1$, só pode ser: $\varphi_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Assim, só φ_0 poderia ser não nulo, e então: $\Phi = c\Omega$, $c \in \mathbb{C}$. Como irredutibilidade significa que não existe subespaço de $\mathcal{F}^{\pm}$ que seja invariante sob $a(f)$ e $a^{\dagger}(f)$ para todo $f \in \mathcal{H}_1$, suponhamos que existe um operador $\mathbf{A}$, fechado em $\mathcal{F}^{\pm}$ –que seria o projetor sobre o subespaço invariante, caso ele existisse–, tal que:

$$\forall f \in \mathcal{H}_1 \; : \quad [\mathbf{A}; a(f)] = 0 = [\mathbf{A}; a^{\dagger}(f)] \quad . \tag{3.32}$$

Da comutatividade de $\mathbf{A}$ com $a(f)$: $a(f)(\mathbf{A}\Omega) = \mathbf{A}(a(f)\Omega) = 0$; o enunciado recém provado implica que $\mathbf{A}\Omega$ é proporcional ao estado de vazio: $\mathbf{A}\Omega = \alpha\Omega$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Usando este resultado e a comutatividade de $\mathbf{A}$ com $a^{\dagger}(f)$: $\mathbf{A}(a^{\dagger}(f)\Omega) = a^{\dagger}(f)(\mathbf{A}\Omega) = \alpha a^{\dagger}\Omega$. E assim por diante, $\mathbf{A} = \alpha 1$ no conjunto $\mathcal{F}_0^{\pm}$. Mas, como $\mathcal{F}_0^{\pm}$ é base e $\mathbf{A}$ é fechado, o mesmo é válido para todos os estados de $\mathcal{F}^{\pm}$. Decorre disto que $\mathbf{A} = \alpha 1$ em todo $\mathcal{F}^{\pm}$, então as representações construídas são irredutíveis. ■

Como corolário do Teorema 3.1 tem-se o seguinte resultado, cuja importância é evidente:

Corolário 3.1-1: *Todo operador limitado no espaço de Fock $\mathcal{F}^{\pm}$ pode ser expresso em função dos operadores de emissão e absorção $a^{\dagger}(f)$ e $a(f)$.*

Prova: Na prova do Teorema 3.1 vimos que um operador fechado em $\mathcal{F}^{\pm}$ que satisfaz à Eq. (3.32) é proporcional à identidade. Portanto, o comutante $\mathcal{A}'$ da álgebra $\mathcal{A}$ gerada por $a(f)$ e $a^{\dagger}(f)$ é trivial: $\mathcal{A}' = \alpha 1$. O duplo comutante $\mathcal{A}''$, então, é a álgebra de todos os operadores limitados que agem em $\mathcal{F}^{\pm}$. Mas [95] $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, do qual segue a tese do corolário. ■

Vejamos como levar à prática a tese do Corolário 3.1-1, para o qual precisamos introduzir uma base numerável e ortonormal de funções f_j para o espaço de Hilbert, $\mathcal{H}_1$, novamente na hipótese, já justificada, de que ele é separável:

$$(f_j; f_k)_1 = \delta_{jk} \quad , \tag{3.33}$$

na qual qualquer função $f \in \mathcal{H}_1$ expande-se como:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_j (f_j; f)_1 f_j(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{3.34}$$

Assim, definindo os operadores de emissão e absorção nas funções dessa base,

$$a_j^{\dagger} := a^{\dagger}(f_j) \quad , \quad a_j := a(f_j) \quad , \tag{3.35}$$

obter-se-á que a_j e $a_k^\dagger$ satisfazem às seguintes relações de (anti-)comutação [vide as Eqs. (3.26), (3.27) e (3.33)]:

$$[a_j; a_k^\dagger]_\mp = \delta_{jk} \quad , \quad [a_j; a_k]_\mp = 0 = \left[a_j^\dagger; a_k^\dagger\right]_\mp \quad . \tag{3.36}$$

Em virtude do Corolário 3.1-1, expressemos o operador número de partículas em função dos a_j e $a_j^\dagger$. Usando as Eqs. (3.19) e (3.34) e as definições dos operadores de emissão e absorção, ter-se-á que, para qualquer $\Phi \in \mathrm{Dom}(\mathbf{N})$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}\Phi)_n &= nS_n^\pm \left\{\varphi_n(\boldsymbol{x}_1; \cdots; \boldsymbol{x}_n)\right\} \\ &= \sum_j \sqrt{n} S_n^\pm \left\{f_j(\boldsymbol{x}_1)\sqrt{n}\left(f_j(\boldsymbol{x}); \varphi_n(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}_2; \cdots; \boldsymbol{x}_n)\right)_{1,\boldsymbol{x}}\right\} \\ &= \left(\sum_j a_j^\dagger a_j \Phi\right)_n \quad ,\end{aligned} \tag{3.37}$$

a partir do qual obtém-se a expressão desejada:

$$\mathbf{N} = \sum_j a_j^\dagger a_j \quad . \tag{3.38}$$

Consideremos agora um operador definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e que representa uma grandeza aditiva quando é aplicado a partículas livres; por exemplo, a energia de um conjunto de partículas livres é igual à soma das energias das partículas individuais (mas não assim quando as partículas interagem, pois a própria interação possue uma energia, situação que fica fora da presente discussão), *et cetera*. A extensão mais natural desse operador corresponde a aplicá-lo a cada partícula independentemente e então somar os resultados.

Definição: *Seja $A = A(\boldsymbol{x})$ um operador aditivo que atúa no espaço de Hilbert de uma partícula, $\mathcal{H}_1$. A elevação ao espaço de Fock, $\mathbf{A}$, é definida tal que, para $\Phi \in \mathcal{F}^\pm$:*

$$(\mathbf{A}\Phi)_0 := 0 \quad , \quad (\mathbf{A}\Phi)_n := \sum_{m=1}^{n} A(\boldsymbol{x}_m)\varphi_n(\boldsymbol{x}_1; \cdots; \boldsymbol{x}_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad , \tag{3.39}$$

em que $A(\boldsymbol{x}_m)$ age sobre a coordenada $\boldsymbol{x}_m$ da função de onda $\varphi_n(\boldsymbol{x}_1; \cdots; \boldsymbol{x}_n)$.

Por um procedimento idêntico ao da Eq. (3.37) é possível provar que a definição da Eq. (3.39) é equivalente a escrever:

$$\mathbf{A} = \sum_{j,k} (f_k; Af_j)_1 a_k^\dagger a_j \quad , \tag{3.40}$$

então todo operador que provém da elevação de um operador que age em $\mathcal{H}_1$ é expressível em função dos operadores de emissão e absorção, como clamado pelo Corolário 3.1-1. Mais em geral:

Definição: *Seja $A = A(\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_s)$ um operador aditivo que atua no espaço de Hilbert de s partículas, $\mathcal{H}_s$. A elevação ao espaço de Fock, $\mathbf{A}$, é definida tal que, para $\Phi \in \mathcal{F}^{\pm}$:*

$$(\mathbf{A}\Phi)_{0,\cdots,s-1} := 0 \quad , \quad (\mathbf{A}\Phi)_n := \sum_{j<\cdots<k} A(\boldsymbol{x}_j;\cdots;\boldsymbol{x}_k)\varphi_n(\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_n) \;\; (n \in \{s; s+1;\cdots\}) \,, \tag{3.41}$$

em que $A(\boldsymbol{x}_j;\cdots;\boldsymbol{x}_k)$ age sobre as coordenadas $\boldsymbol{x}_j,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ contidas na função de onda $\varphi_n(\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_n)$.

Em função dos operadores de emissão e absorção, encontra-se:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{s!}\sum_{j,\cdots,k,j',\cdots,k'} (f_j\otimes\cdots\otimes f_k; Af_{j'}\otimes\cdots\otimes f_{k'})_s a_j^\dagger\cdots a_k^\dagger a_{k'}\cdots a_{j'} \quad . \tag{3.42}$$

Como pode-se ver, o ordenamento normal dos operadores que agem no espaço de Fock decorre naturalmente das definições dadas, o que implica, em particular, que o valor de qualquer observável físico no estado de vazio é nulo.

Finalmente, uma palavra a respeito do domínio de aplicação dos operadores elevados ao espaço de Fock. Suponhamos que A é um operador limitado em $\mathcal{H}_s$; isto significa que existe $\|A\|_s$ tal que, para todo $\varphi_s \in \mathcal{H}_s$: $\|A\varphi_s\|_s \leq \|A\|_s$. Então sua elevação ao espaço de Fock está limitado por:

$$\|\mathbf{A}\Phi\|^2 \leq \|A\|_s^2 \sum_n \binom{n}{s}^2 \|\varphi_n\|_n^2 \sim \|A\|_s^2 \sum_n n^{2s}\|\varphi_n\|_n^2 \quad , \tag{3.43}$$

donde decorre que $\mathrm{Dom}(\mathbf{A})$ é tanto mais restrito quando maior for o valor de s. Em particular, quando $s = 1$, o lado direito da Eq. (3.43) é igual a: $\|A\|_1^2\|\mathbf{N}\Phi\|^2$, então:

$$s = 1 \;: \quad \mathrm{Dom}(\mathbf{N}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathbf{A}) \quad . \tag{3.44}$$

Entre os operadores da mecânica quântica que não são aditivos encontram-se aqueles que correspondem a «transformações», *verbi gratia*, as transformações de Poincaré, transformações discretas, conformes, *et cetera*. Elas têm de ser aplicadas a todas as funções de onda que compõem φ_n simultaneamente. Sua elevação ao espaço de Fock, portanto, tem de ser feita da seguinte forma.

Definição: *Seja U uma transformação no espaço de Hilbert de uma partícula, $\mathcal{H}_1$. Sua elevação ao espaço de Fock $\mathcal{F}^{\pm}$ é o operador $\mathbf{U}$ tal que:*

$$\mathbf{U}\Omega := \Omega \quad , \quad (\mathbf{U}\Phi)_n := \bigotimes_{k=1}^n U_k\varphi_n(\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_n) = \left(\bigotimes_{k=1}^n U\right)\varphi_n \quad , \tag{3.45}$$

com U_k significando que a transformação age sobre a coordenada $\boldsymbol{x}_k$.

Uma transformação de especial importância é a evolução temporal, gerada pelo hamiltoniano P_+. É sabido que na mecânica quântica não relativística a equação do movimento da função de onda é sempre um axioma [163, 166], quer seja ela a equação de Schrödinger, quer a de Heisenberg. E o mesmo acontece na teoria do campo quantizado. A alternativa que seguiremos aqui será «supor» que exista uma equação de Schrödinger para a função de onda de uma partícula e então elevar o operador de evolução temporal seguindo a Eq. (3.45). Veremos que esta suposição está bem fundamentada, e poder-se-á sempre encontrar uma equação de Schrödinger no plano nulo, embora o hamiltoniano seja não local; isto não é possível na dinâmica instantânea, em que a equação de Klein-Gordon-Fock, por exemplo, não pode ser colocada na forma hamiltoniana na classe dos operadores diferenciais. Suponhamos que existe um hamiltoniano de uma partícula, P_+, auto-adjunto, que determina a evolução temporal das funções de onda por meio da «equação de Schrödinger»[9]:

$$i\partial_+ f(x) = P_+ f(x) \quad . \tag{3.46}$$

Como as partículas são livres –elas constituem, cada uma, um sistema isolado–, considera-se P_+ independente do tempo x^+. Digamos, ainda, que existe a possibilidade de que seja P_+ dependente da posição $\boldsymbol{x} = (x^\perp; x^-)$ se considerarmos a quantização do campo em presença de um campo clássico exterior estático; isto não altera de forma alguma os resultados que seguem caso o campo externo seja um «campo regular»[10], pois só tem relevância na escolha da base de funções do espaço de Hilbert de uma partícula; quando o campo externo é dependente do tempo, por outro lado, a elevação ao espaço de Fock do operador de evolução temporal em geral não existe [170, 107] –no caso dos campos quantizados em interação isto último se relaciona com o teorema de Haag: Não é possível usar o espaço de Fock como o espaço de Hilbert da teoria em interação (o que constitui uma outra forma de expressar a afirmação mais comum de que a descrição de interação não existe)–. A Eq. (3.46) tem solução:

$$f(x^+; \boldsymbol{x}) = U(x^+; x_0^+) f(x_0^+; \boldsymbol{x}) \quad , \tag{3.47}$$

com

$$U(x^+; x_0^+) := e^{-iP_+(x^+ - x_0^+)} \quad , \quad U(x^+; x_0^+)^{-1} = U(x^+; x_0^+)^\dagger = U(x_0^+; x^+) \tag{3.48}$$

o operador unitário de evolução temporal. Elevando-o ao espaço de Fock segundo a Eq.

[9] Ocorre costumeiramente que o operador hamiltoniano é ilimitado, o que implica que $\mathrm{Dom}(P_+)$ é um subespaço próprio de $\mathcal{H}_1$. Este é um problema porque o teorema de Hellinger-Toeplitz proíbe que um operador auto-adjunto definido sobre todo $\mathcal{H}_1$ seja ilimitado, donde decorre que o operador hamiltoniano não pode ser estendido de $\mathrm{Dom}(P_+)$ para $\mathcal{H}_1$ como um operador auto-adjunto [166]. Como consequência, a equação de Schrödinger somente é capaz de descrever a evolução temporal das funções de onda em $\mathrm{Dom}(P_+)$, enquanto que a evolução temporal do restante delas permanece desconhecido pela mencionada equação. Semelhante dificuldade é superada passando à descrição pelo operador de evolução temporal, que é unitário e reproduz a equação de Schrödinger para todo $f \in \mathrm{Dom}(P_+)$ [163].

[10] Esta nomenclatura provém da eletrodinâmica, estudada por Nenciu e Scharf [170] em que um campo externo é regular se a quantização do campo de Dirac em sua presença pode ser feita no espaço de Fock. É notável o resultado, obtido por estes autores, de que um campo magnético estático não pode ser regular, mas somente um campo elétrico estático.

(3.45) e derivando em relação ao tempo x^+:

$$\partial_+ \left(\mathbf{U}(x^+;x_0^+)\Phi\right)_n = \left(\sum_{j=1}^{n} U(x^+;x_0^+)\otimes\cdots\otimes\partial_+ U_j(x^+;x_0^+)\otimes\cdots\otimes U(x^+;x_0^+)\right)\varphi_n(x_0^+)$$
$$= -i\left(\bigotimes_{k=1}^{n} U(x^+;x_0^+)\right)\sum_{j=1}^{n} P_+(\boldsymbol{x}_j)\varphi_n(x^+;\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_n) \quad . \tag{3.49}$$

Reconhece-se aqui a elevação do hamiltoniano de uma partícula. Usando o fato que P_+ e $U(x^+;x_0^+)$ comutam devido à forma explícita deste último, a Eq. (3.49) é igual a:

$$i\partial_+\mathbf{U}(x^+;x_0^+) = \mathbf{U}(x^+;x_0^+)\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_+\mathbf{U}(x^+;x_0^+) \quad . \tag{3.50}$$

Na passagem à descrição de Heisenberg, consideraremos $x_0^+ = 0$ o tempo no qual as representações de Heisenberg e de Schrödinger se igualam, escrevendo, portanto: $\mathbf{A}(x_0^+) \equiv \mathbf{A}$. Então os operadores $\mathbf{A}$ que agem no espaço de Fock seguem à «equação do movimento de Heisenberg»:

$$i\partial_+\mathbf{A}(x^+) = \left[\mathbf{A}(x^+);\mathbf{P}_+\right] \quad , \tag{3.51}$$

cuja solução é:

$$\mathbf{A}(x^+) = \mathbf{U}(x^+)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}(x^+) \quad , \tag{3.52}$$

com $\mathbf{U}(x^+)$ o «operador de evolução temporal», que é unitário, e que tem expressão:

$$\mathbf{U}(x^+) := e^{-ix^+\mathbf{P}_+} \quad . \tag{3.53}$$

Em, particular, da Eq. (3.52), os operadores de emissão e absorção evoluem segundo:

$$a^\dagger(f)(x^+) = \mathbf{U}(x^+)^{-1}a^\dagger(f)\mathbf{U}(x^+) \quad , \quad a(f)(x^+) = \mathbf{U}(x^+)^{-1}a(f)\mathbf{U}(x^+) \quad . \tag{3.54}$$

Uma consequência direta disto é que as relações de (anti-)comutação dos operadores de emissão e absorção são preservadas na evolução temporal:

$$\left[a(f)(x^+);a^\dagger(g)(x^+)\right]_\mp = \mathbf{U}(x^+)^{-1}\left[a(f);a^\dagger(g)\right]_\mp\mathbf{U}(x^+) = (f;g)_1 \quad . \tag{3.55}$$

Assim sendo, e pelo Teorema 3.1, as representações irredutíveis da álgebra de (anti-)comutação desses operadores são equivalentes à representação de Fock para todo tempo x^+. Em outras palavras, a base $\mathcal{F}_0^\pm$ da Eq. (3.30) pode ser usada em qualquer tempo x^+. Calculando explicitamente a ação no estado Φ:

$$\left(a^\dagger(f)(x^+)\Phi\right)_n = \left(\mathbf{U}(x^+)^{-1}a^\dagger(f)\mathbf{U}(x^+)\Phi\right)_n$$
$$= \sqrt{n}S_n^\pm\left\{U(x^+)^{-1}f\otimes\left(\mathbf{U}(x^+)^{-1}\mathbf{U}(x^+)\Phi\right)_{n-1}\right\}$$
$$= \sqrt{n}S_n^\pm\left\{U(x^+)^{-1}f\otimes\varphi_{n-1}\right\} \quad .$$

E analogamente para o operador $a(f)(x^+)$. Como resultado tem-se:

$$a^\dagger(f)(x^+) = a^\dagger\left(U(x^+)^{-1}f\right) \quad , \quad a(f)(x^+) = a\left(U(x^+)^{-1}f\right) \quad . \tag{3.56}$$

Esse resultado pareceria contradizer à Eq. (3.47), porém a justifica: Como f evolui com $U(x^+)$, a criação do estado com função de onda f no tempo x^+ se equivale com a criação da função de onda $U(x^+)^{-1}f$ em $x^+ = 0$. Também esse resultado concorda com a Eq. (3.55), pois $U(x^+)$ é unitário.

Consideremos agora a seguinte questão: Como poder-se-á saber se a evolução temporal é concordante com a covariância relativística? Responderemos a essa pergunta em duas etapas. (1) De volta ao Teorema 3.1, já que a representação de Fock dos estados quânticos é construído a partir das regras de (anti-)comutação das Eqs. (3.26) e (3.27), ela terá caráter relativístico se o produto interno do qual elas dependem é invariante relativístico, uma vez que a dependência temporal das funções de onda é introduzida. Pareceria que esta operação é irrelevante, pois já vimos que a representação de Fock independe do produto interno: Com efeito, mas especificar o produto interno significa especificar a forma explícita da ação dos operadores de emissão e absorção, $a^\dagger(f)$ e $a(f)$, e portanto especificar a forma dos estados emitidos na aplicação de $a^\dagger(f)$ ao estado de vazio.

Como já conhecemos, da análise clássica feita no Cap. 2, a medida invariante no espaço dos momentos, definiremos o produto interno do espaço de Hilbert de uma partícula nesse espaço:

Definição: *Seja $\mathcal{H}_1$ o espaço de Hilbert de uma partícula de funções de onda dependentes do tempo, como na Eq. (3.47). Sejam $f, g \in \mathcal{H}_1$, e sejam $\hat{f}$ e $\hat{g}$ suas transformadas de Fourier tetradimensionais. O produto interno delas é definido por:*

$$(f;g)_1 := \int d\mu_m(p)\hat{f}(p)^*\hat{g}(p) \quad , \tag{3.57}$$

com $\mu_m(p)$ a medida invariante relativística:

$$d\mu_m(p) := \delta(p^2 - m^2)\Theta(p_-)d^4p = \Theta(p_-)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p_-}\bigg|_{p_+=E} \; ; \; E := \frac{\omega_p^2}{|2p_-|} = \frac{p_\perp^2 + m^2}{|2p_-|} \; . \tag{3.58}$$

A medida $\mu_m(p)$ está definida na «camada de massa superior»

$$\mathcal{M}^+ := \left\{p \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; p^2 = m^2 \;\wedge\; p_- > 0\right\} \quad , \tag{3.59}$$

então identifica-se o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ com o espaço de (classes de equivalência das) funções (iguais quase-em-todas-partes) de quadrado integrável[11] em $\mathcal{M}^+$ segundo a medida μ_m:

$$\mathcal{H}_1 := L^2(\mathcal{M}^+;\mu_m) \quad . \tag{3.60}$$

[11] Claramente, a integração é no sentido de Lebesgue [163, 166], o que explica as precisões feitas interparentéticamente no texto principal.

O espaço de Hilbert assim definido é separável porque o espaço $\mathbb{R}^4$, que contém à camada de massa superior, $\mathcal{M}^+$, é σ-finito segundo a medida μ_m, condição que é suficiente [163].

Vejamos mais de perto o produto interno da Eq. (3.57). Integrando na variável p_+ e denotando $\hat{f}(E;\boldsymbol{p}) \equiv \hat{f}(\boldsymbol{p})$, tem-se que:

$$(f;g)_1 = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p_-}\Theta(p_-)\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\hat{g}(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{3.61}$$

Em particular, esta equação prova a concordância com a unitariedade do operador de evolução temporal, pois o produto interno definido é independente do tempo. Assim sendo, pode-se definir a medida:

$$d\mu(\boldsymbol{p}) := \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p_-}\Theta(p_-) \quad , \tag{3.62}$$

e expressar o produto interno das funções de onda independentes do tempo como:

$$(f;g)_1 = \int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\hat{g}(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{3.63}$$

Chega-se assim ao seguinte resultado [24]:

Teorema 3.2: *Sejam $\mathcal{F}_\nu^\pm$ ($\nu = 1, 2$) dois espaços de Fock correspondentes a partículas de massas m_ν, com $m_1 \neq m_2$. Os espaços de Fock $\mathcal{F}_1^\pm$ e $\mathcal{F}_2^\pm$ são unitariamente equivalentes.*

Prova: A tese do Teorema 3.2 equivale a dizer que existe um operador unitário $\mathbf{V} : \mathcal{F}_1^\pm \to \mathcal{F}_2^\pm$. Com efeito, como o produto interno da Eq. (3.63) independe da massa [vide a medida na Eq. (3.62)], então:

$$\left(a_1^\dagger(f)\Omega; a_1^\dagger(g)\Omega\right) = (f;g)_1 = \left(a_2^\dagger(f)\Omega; a_2^\dagger(g)\Omega\right) \quad , \tag{3.64}$$

donde decorre a existência do operador $\mathbf{V}$ tal que:

$$\mathbf{V}a_1^\dagger(f)\mathbf{V}^\dagger = a_2^\dagger(f) \quad . \tag{3.65}$$

Isto é suficiente, pois os estados de maior número de partículas são gerados por aplicação sucessiva dos operadores de emissão, como o afirma o Teorema 3.1. ■

Este resultado formaliza a observação intuitiva de que na dinâmica da frente de luz a massa das partículas é pouco relevante [13], e é um resultado que não pode –em princípio– ser atingido na dinâmica instantânea, na qual a medida do produto interno depende explicitamente da massa da partícula. É inevitável lembrar agora do teorema de Haag e nos perguntarmos se o teorema que leva seu nome é violado na teoria do campo quântico no plano nulo, como o resultado anterior pareceria sugerir –com efeito, o próprio Haag considerou o exemplo da interação do tipo $(m_2^2 - m_1^2)\varphi^2$ para mostrar um caso explícito em que a descrição de interação não existe na teoria do campo quantizado [80] (vide também a exposi-

ção de Duncan na Seç. 10.5 da Ref. [171])–. Este ponto tem sido devidamente esclarecido por Schlieder e Seiler na Ref. [172]. Como estes autores mostraram, também na dinâmica instantânea seria possível construir um operador unitário relacionando os espaços de Hilbert de partículas de massas diferentes se o espaço das funções de teste for restringido o suficiente; contudo, semelhante restrição impede a caracterização completa das propriedades locais dos operadores de campo quântico[12], a menos que as equações do movimento sejam utilizadas para estender o espaço ao $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^4\right)$. Semelhantemente, não há dificuldade em reconhecer que a medida da Eq. (3.62) não está bem definida sobre o espaço $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ completo, senão somente sobre o subconjunto deste caracterizado pelo anulamento da função para $p_- = 0$ [159]. Desta forma, a restrição do campo ao plano nulo tampouco permite a caracterização completa das propriedades locais dos operadores de campo quantizado, mas somente sua extensão, via as equações do movimento, ao espaço $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^4\right)$, em que a medida é a da Eq. (3.58), bem definida e dependente da massa. Nestas circunstâncias, na dinâmica da frente de luz como na instantânea, o teorema de Haag ainda rege. Schlieder e Seiler mostraram isto definitivamente usando da formulação baseada nas distribuições de Wightman [172].

(2) O segundo passo para garantir a covariância relativística da teoria quântica construída é a escolha adequada da base de funções de onda de uma partícula: $\{f_j\} \subset \mathcal{H}_1$. Se a base é escolhida de forma a satisfazer às equações e vínculos da teoria do campo clássico, então não haverá dificuldade nenhuma em reconhecer que a evolução das funções de onda segundo o hamiltoniano P_+ é relativística. Vê-se, pois, que é essencial para isto estabelecer primeiro a base de funções de onda dependentes do tempo. Lembrando do axioma da positividade da energia, poderia parecer apropriado assumir a base de ondas planas de frequência positiva:

$$f_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\Theta(p_-)e^{ipx} \quad . \tag{3.66}$$

Contudo, se as ondas planas da Eq. (3.66) fossem tomadas como base –a qual seria, além do mais, não numerável–, então chegar-se-ia à relação de completeza: $\int f_p(x)f_p^*(x_1)d^4p = \delta(x - x_1)$. Porém, esta não seria uma boa base, pois não satisfaz à condição assintótica da Eq. (2.79); o espaço gerado pelas ondas planas é grande demais para os fins presentes. Veremos que uma eleição adequada da base leva a uma relação de completeza diferente. Lembremos agora das soluções que obtivemos para o problema de Goursat dos campos clássicos, pois essas soluções serão, sim, boas funções de onda. Obtiveram-se, nos diferentes casos, distribuições –por exemplo, a de Jordan-Pauli $D(x)$, ou a $S(x)$ para os campos fermiônicos, *et cetera*– descrevendo a propagação causal do campo; denotaremos genéricamente essas distribuições por $\Delta(x)$. E como em $\mathcal{H}_1$ estão somente as partes de frequência positiva, elas são propagadas pela parte de frequência positiva de Δ: Δ_+, pois sendo P_+ auto-adjunto, os subespaços de frequência positiva e de frequência negativa são ortogonais. Vimos que toda

[12]Com efeito, a possibilidade de se usar o espaço de Schwartz como espaço das funções de teste, sendo que os argumentos das distribuições de emissão e absorção pertencem ao espaço $\mathcal{H}_1 = L^2$, é devida a que $\mathscr{S}$ é denso em L^2 [163]. Mas se o espaço de Schwartz for restringido com alguma condição adicional, nem toda função em $\mathcal{H}_1$ poderá ser aproximada por uma sucessão de funções do espaço restrito, o que se identifica com a perda de informação sobre as propriedades do campo.

função de onda (campo clássico de frequência positiva) satisfaz [vide o Cap. 2]:

$$f(x) = \langle -i\Delta_+(x-y); f(y)\rangle_y \quad , \tag{3.67}$$

com $\langle \bullet; \bullet \rangle$ significando que a distribuição é aplicada à função segundo a regra formal dada pelo produto interno $(\bullet;\bullet)_1$, diferenciando a notação para explicitar que $\langle \bullet; \bullet \rangle$ não é um produto interno, mas a aplicação de uma distribuição a uma função[13]. A expansão da função f na base $\{f_j\}$ –semelhante àquela da Eq. (3.34), mas agora dependente do tempo– implica então a relação de completeza:

$$\sum_j f_j(x) f_j(y)^* = -i\Delta_+(x-y) \quad . \tag{3.68}$$

As funções de onda independentes do tempo são então geradas pelas funções $f_j(x)|_{x^+=0}$. Claro, existe uma ambiguidade na definição da distribuição Δ: Conhece-se somente a expressão (3.67) em forma explícita, mas não se sabe que parte dessa expressão corresponde à definição de Δ e qual outra à definição do produto interno; a decomposição deve ser tal que, uma vez no espaço dos momentos, o produto interno no espaço real seja compatível com a Eq. (3.57), pois é essa que garante a covariância das relações de (anti-)comutação. Que esta compatibilidade pode sempre ser atingida não tem sido provado, mas dever-se-á constatá-lo em cada caso. Veremos que bastará fazê-lo para o caso escalar, pois como vimos no Cap. 2, todos os outros campos podem ser decompostos em componentes dinâmicas e não-dinâmicas, as primeiras satisfazendo únicamente à equação de Klein-Gordon-Fock, as segundas, obtidas delas pelo uso das equações de vínculo.

O mapeamento da função f para os operadores $a(f)$ e $a^\dagger(f)$ é feito por:

Definição: *Seja $f \in \mathcal{H}_1$ uma função de onda. Os operadores de campo de emissão e absorção no espaço real, $a^\dagger(\boldsymbol{x})$ e $a(\boldsymbol{x})$, respectivamente, são as distribuições operador-valuadas que levam f aos operadores $a^\dagger(f)$ e $a(f)$, respectivamente, por meio das regras formais:*

$$a^\dagger(f) := \left\langle f; a^\dagger(\boldsymbol{x}) \right\rangle \quad ; \quad a(f) := \langle f^*; a(\boldsymbol{x})\rangle \quad , \tag{3.69}$$

Os operadores de campo de emissão e absorção no espaço dos momentos, $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ e $a(\boldsymbol{p})$, respectivamente, são definidos como as transformadas de Fourier distribuicionais dos correspondentes operadores de campo no espaço real.

Estes operadores de campo são bem definidos: Sem perda de generalidade, $a(\boldsymbol{x})$ e $a^\dagger(\boldsymbol{x})$ podem ser consideradas distribuições agindo no espaço de Schwartz $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$, pois este espaço é denso em $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. Particularmente, em virtude desta propriedade, todos os elementos da base $\{f_j\}$ podem ser escolhidos em $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Como elementos de $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$, as transformadas de Fourier distribucionais existem. Finalmente, como a transformação

[13] Além disto, na notação distribucional é dispensado o complexo conjugado que na regra do produto interno se aplica a seu primeiro argumento.

de Fourier em $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ é uma isometria nesse espaço e esse é denso em $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$, aquela pode ser estendida de forma única a um operador unitário e limitado agindo no espaço $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ –algumas vezes chamada «transformação de Fourier-Plancherel» para indicar que, propriamente, se trata da extensão da transformação de Fourier [163]–.

As Eqs. (3.34) e (3.69) implicam que é possível escrever os operadores de campo de emissão e absorção como:

$$a^\dagger(\boldsymbol{x}) = \sum_j a_j^\dagger f_j(\boldsymbol{x})^* \quad , \quad a(\boldsymbol{x}) = \sum_j a_j f_j(\boldsymbol{x}) \quad , \tag{3.70}$$

e no espaço dos momentos:

$$a^\dagger(\boldsymbol{p}) = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{f}_j(\boldsymbol{p})^* \quad , \quad a(\boldsymbol{p}) = \sum_j \hat{a}_j \hat{f}_j(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{3.71}$$

E destas relações, junto com as expansões da Eq. (3.36) e a relação de completeza da base $\{f_j\}$ mostrada na Eq. (3.68):

$$\left[a(\boldsymbol{x}); a^\dagger(\boldsymbol{y})\right]_\mp = -i\Delta_+(0; \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad , \quad [a(\boldsymbol{x}); a(\boldsymbol{y})]_\mp = 0 = \left[a^\dagger(\boldsymbol{x}); a^\dagger(\boldsymbol{y})\right]_\mp \quad . \tag{3.72}$$

Se evidencia assim a grande importância da relação de completeza da base de $\mathcal{H}_1$: O (anti-)comutador dos operadores de campo de absorção e emissão adota sua forma usual $[a(\boldsymbol{x}); a^\dagger(\boldsymbol{y})] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ somente se Δ_+ se reduz a essa distribuição no plano nulo $x^+ = 0$. Ocorrerá, no entanto, que em geral não será isso o que aconteça, senão que Δ_+ será não local na coordenada x^-, como esperaríamos: O campo a tempo nulo está ainda causalmente conetado com o eixo x^-.

Definição: *O operador de campo quantizado é a distribuição operador-valuada $u(x)$ definida como:*

$$u(x) := a(x) + a^\dagger(x) \quad . \tag{3.73}$$

A parte correspondente ao operador de campo de absorção se denomina sua «parte de frequência negativa», denotada u_-; a correspondente ao operador de campo de emissão, sua «parte de frequência positiva», denotada u_+.

A definição recém dada pode parecer arbitrária, mas existe uma razão de fundo de absoluta importância para a natureza manifestar suas leis por meio da peculiar combinação da Eq. (3.73). Essa é a causalidade –o digamos já, protagonista dessa tese–. Com efeito, as relações de (anti-)comutação das partes de frequência positiva e de frequência negativa do operador de campo quantizado levam sempre ao aparecimento da parte de frequência positiva, ou a de frequência negativa, da distribuição Δ –vide a Eq. (3.78) embaixo–. Mas estas não podem, por si só, descrever leis causais, pois seu suporte não é causal. Somente a combinação $u(x) = a(x) + a^\dagger(x)$ leva a relações de (anti-)comutação cujo suporte é causal; por isso, uma das partes não pode ter predominância sobre a outra, mas devem sempre

aparecer na combinação mencionada, o que justifica a introdução do operador de campo quantizado.

A essa definição podem ser dadas diversas formas. Apresentar-se-á três delas. A primeira se obtém pela expansão da Eq. (3.70):

$$u(x) = \sum_j \left(a_j f_j(x) + a_j^\dagger f_j(x)^* \right) \quad . \tag{3.74}$$

Aqui, a dependência com as coordenadas está contida nas funções $f_j(x)$. Logo, como $\{f_k\}$ é base do espaço de Hilbert de uma partícula, $\mathcal{H}_1$, a Eq. (3.74) implica que o operador de campo quantizado satisfaz à equação do movimento do campo clássico.

Também, escrevendo as funções $f_j(x)$ que aparecem na Eq. (3.74) em função de suas transformadas de Fourier,

$$f_j(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \hat{f}_j(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} \quad , \tag{3.75}$$

obtém-se a seguinte expressão para o operador de campo quantizado:

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_j \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(a_j \hat{f}_j(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a_j^\dagger \hat{f}_j(\boldsymbol{p})^* e^{ipx} \right) \quad ; \quad p_+ = \frac{\omega_p}{|2p_-|} \quad . \tag{3.76}$$

Essa é, explicitamente, uma expansão em pacotes de onda. Ela deriva na expansão em ondas planas como as da Eq. (3.66) quando o momento dos pacotes está bem definido: $\hat{f}_j(\boldsymbol{p}) \to p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_j)$, mas já foi dito que tais funções não são apropriadas.

Finalmente, a forma mais usual de apresentar o operador do campo quantizado é obtida aplicando a transformação de Fourier diretamente aos operadores de campo $a(x)$ e $a^\dagger(x)$ na Eq. (3.73):

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.77}$$

E também aqui os operadores de campo $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ e $a(\boldsymbol{p})$ podem ser expandidos segundo a Eq. (3.71), com o mesmo resultado que a Eq. (3.76), o que prova que, em geral: $\hat{a}_j = a_j$ e $\hat{a}_j^\dagger = a_j^\dagger$; isto não é surpreendente, pois a_j e $a_j^\dagger$ são operadores que independem das coordenadas e momentos. Em qualquer caso, as formas dadas nas Eqs. (3.73), (3.74), (3.76) e (3.77) são todas equivalentes.

A propriedade mais importante dos operadores de campo quantizado é a relação de (anti-)comutação de sua parte de frequência negativa com sua parte de frequência positiva. Ela é mais fácilmente obtida usando a expressão da Eq. (3.74) em conjunto com as Eqs. (3.36) e (3.68), das quais é imediato ver que:

$$[u_-(x); u_+(y)]_\mp = -i\Delta_+(x-y) \quad . \tag{3.78}$$

Este (anti-)comutador aparecerá em uma função central na teoria de perturbação causal com o nome de «contração de Wick». O que tem sido provado aqui é que ele provém, qualquer que seja o campo de que se trate, da solução do problema de Goursat na teoria do campo

clássico. Se o mesmo fosse calculado a partir da Eq. (3.77), então obter-se-ia:

$$[u_-(x);u_+(y)]_\mp = (2\pi)^{-3}\int d\mu(\boldsymbol{p})d\mu(\boldsymbol{q})\left[a(\boldsymbol{p});a^\dagger(\boldsymbol{q})\right]_\mp e^{-i(px-qy)}\Big|_{p_+=E_p,q_+=E_q} \quad . \tag{3.79}$$

A comparação das Eqs. (3.78) e (3.79) permite obter $\left[a(\boldsymbol{p});a^\dagger(\boldsymbol{q})\right]_\mp$.

Finalmente, mencionaremos que o operador de campo quantizado pode ser testado bem por integração sobre o plano nulo, caso em que usa-se a notação:

$$u(x^+;f) := \int\limits_{x^+=\text{const.}} u(x)f(x)^* d^3\boldsymbol{x} \quad , \tag{3.80}$$

bem por integração no espaço-tempo tetradimensional, em cujo caso utiliza-se a notação:

$$u(f) := \int u(x)f(x)^* d^4x \quad . \tag{3.81}$$

Cada uma dessas formas tem uma utilidade. A primeira delas permite a construção de operadores de emissão e absorção de pacotes de onda modulados pela função $\hat{f}(\boldsymbol{p})$ evoluindo no tempo:

$$u(x^+;f) = \int d\mu(\boldsymbol{p})\left(a(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})^* e^{-iE_p x^+} + a^\dagger(\boldsymbol{p})\hat{f}(-\boldsymbol{p})^* e^{iE_p x^+}\right) \quad . \tag{3.82}$$

A segunda tem relevância na análise da covariância de Poincaré do operador de campo quantizado, como veremos mais adiante.

Veremos, finalmente, qual é a expressão do operador hamiltoniano $\mathbf{P}_+$ no espaço de Fock. Devido a que, como já foi dito, o operador P_+ existe sempre em $\mathcal{H}_1$ no plano nulo no sentido de cumprir a equação de Schrödinger, $\mathbf{P}_+$ pode ser obtido por elevação. Segundo a Eq. (3.40):

$$\mathbf{P}_+ = \sum_{j,k}(f_j;P_+f_k)_1 a_j^\dagger a_k \quad . \tag{3.83}$$

Usando a Eq. (3.46), então o produto interno em $\mathcal{H}_1$ dado na Eq. (3.63):

$$(f_j;P_+f_k)_1 = (f_j;i\partial_+ f_k)_1 = \int d\mu(\boldsymbol{p})p_+\hat{f}_j(\boldsymbol{p})^*\hat{f}_k(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{3.84}$$

Substituindo na Eq. (3.83) e usando a Eq. (3.71), chega-se finalmente a:

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p})p_+ a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \quad , \tag{3.85}$$

que é definido não-negativo.

Concluímos esta primeira seção do capítulo com o seguinte comentário: A teoria desenvolvida é válida, como mencionado de início, para uma única partícula. Quando estiverem presentes na teoria mais tipos de partículas tereamos de introduzir correspondentes operadores de emissão e absorção para cada um deles, e o espaço de Fock completo será igual ao produto tensorial dos espaços de Fock de cada tipo de partícula [100]. A generalização

dos procedimentos aqui descritos é conceitualmente óbvia, mas não o é assim sua aplicação explícita. Veremos portanto em detalhe a construção dos campos quantizados escalar, fermiônico e vetorial sem massa.

3.2 Quantização do campo escalar

3.2.1 Campo escalar neutro

Façamos primeiro o estudo do campo escalar neutro; esse é o único caso em que existe na teoria um único tipo de partícula, e é, portanto, aquele em que a teoria desenvolvida é mais facilmente implementável; ainda mais, todos os outros campos podem ser quantizados a partir do caso presente, como veremos nas próximas subseções.

Um único tipo de partícula significa que deve introduzir-se apenas um par de operadores de emissão e absorção, $a^\dagger(f)$ e $a(f)$. O operador de campo quantizado será então:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.86}$$

Ele terá distribuição de comutação igual à distribuição de Jordan-Pauli, pois é ela que soluciona o problema de Goursat na teoria clássica, suficiente, portanto, para a relação de completeza da base de funções de onda de uma partícula. Assim:

$$[\varphi_-(x); \varphi_+(y)] = -iD_+(x-y) \quad . \tag{3.87}$$

Esta escolha implica, segundo as Eqs. (2.80) e (3.67), que o produto interno no espaço real seja:

$$(f;g)_1 = i \int_{x^+} d^3\boldsymbol{x} f(x)^* \overleftrightarrow{\partial}_- g(x) \quad , \tag{3.88}$$

que é compatível com o da Eq. (3.63), pois aplicando a transformação de Fourier:

$$\begin{aligned} (f;g)_1 &= i(2\pi)^{-3} \int d^3\boldsymbol{x} d\mu(\boldsymbol{p}) d\mu(\boldsymbol{q}) \hat{f}(\boldsymbol{p})^* \hat{g}(\boldsymbol{q}) e^{i(p-q)x} (-i)(p_- + q_-) \\ &= \int d\mu(\boldsymbol{p}) \hat{f}(\boldsymbol{p})^* \hat{g}(\boldsymbol{p}) \quad , \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. Como:

$$D(x) = i(2\pi)^{-3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \mathrm{sgn}(p_-) e^{-ipx} \quad , \tag{3.89}$$

ter-se-á sua parte de frequência positiva e a de frequência negativa iguais, respectivamente, a:

$$D_+(x) = i(2\pi)^{-3} \int d\mu_m(p) e^{-ipx} \quad , \quad D_-(x) = -D_+(-x) \quad , \tag{3.90}$$

de forma que:

$$[\varphi(x); \varphi(y)] = -iD(x-y) \quad . \tag{3.91}$$

Das Eqs. (3.87), (3.90) e (3.79) obtém-se a relação:

$$\int d\mu(\boldsymbol{p})\, e^{-ip(x-y)}\Big|_{p_+=E_p} = \int d\mu(\boldsymbol{p})d\mu(\boldsymbol{q})\left[a(\boldsymbol{p}); a^\dagger(\boldsymbol{q})\right] e^{-i(px-qy)}\Big|_{p_+=E_p, q_+=E_q} \quad , \tag{3.92}$$

que é satisfeita se os operadores de campo de emissão e absorção no espaço dos momentos seguirem à relação de comutação:

$$\left[a(\boldsymbol{p}); a^\dagger(\boldsymbol{q})\right] = 2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad . \tag{3.93}$$

Particularmente, da Eq. (3.91) pode-se obter a relação de comutação a tempos iguais. Da Eq. (3.89) tem-se, integrando nas variáveis p_+ e $p_\perp$, que:

$$D(0;\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\delta(x^\perp)\int_0^{+\infty} dp_- \frac{\sin(p_-x^-)}{p_-} = \frac{1}{4}\mathrm{sgn}(x^-)\delta(x^\perp) \quad , \tag{3.94}$$

portanto:

$$\left[\varphi(x^+;\boldsymbol{x}); \varphi(x^+;\boldsymbol{y})\right] = -\frac{i}{4}\mathrm{sgn}(x^- - y^-)\delta(x^\perp - y^\perp) \quad . \tag{3.95}$$

Esta é uma expressão evidente da não comutatividade do campo na direção do eixo x^- que haviamos antecipado. Adicionalmente, tomando a derivada em relação à coordenada y^- na Eq. (3.95), obtém-se:

$$\left[\varphi(x^+;\boldsymbol{x}); \partial_-\varphi(x^+;\boldsymbol{y})\right] = -\frac{i}{2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad . \tag{3.96}$$

Numa análise hamiltoniana, o momento conjugado ao campo φ é $\pi = \partial_-\varphi$, o que significa que a Eq. (3.96) é a relação de comutação canônica a tempos iguais. Mas ela não é a relação de comutação canônica a tempos iguais usual, senão que está multiplicada por um fator de $1/2$. O aparecimento deste fator deve-se a que φ e π não são dinamicamente independentes no plano nulo, pois π independe de $\partial_+\varphi$. A relação aqui obtida é a mesma que a que se encontra numa análise canônica por meio do procedimento de Dirac-Bergmann para os sistemas vinculados, como pode ser verificado, por exemplo, na Ref. [198]. O procedimento desenvolvido reproduz este resultado porque o espaço de Fock tem sido construído a partir de uma base apropriada de funções de onda de uma partícula: Ela já respeita aos vínculos da teoria, o que se reflete na relação de completeza da base do espaço $\mathcal{H}_1$. Da mesma equação pode-se notar que as relações de comutação a tempos iguais estão definidas apenas com o conhecimento do campo no plano nulo, tal como acontecia no problema de Goursat na teoria clássica; isto, outra vez, é diferente do que acontece na dinâmica instantânea, em que as relações canônicas de comutação requerem o conhecimento não só de φ mas também de $\partial_0\varphi$ no plano $x^0 =$ constante, este último não podendo ser deduzido do primeiro.

A equação de Klein-Gordon-Fock no plano nulo pode ser colocada na forma hamiltoniana de Schrödinger:

$$i\partial_+\varphi(x) = P_+\varphi(x) \quad , \tag{3.97}$$

com o hamiltoniano[14]:

$$P_+ = \frac{i}{2}\partial_-^{-1}(\partial_\perp^2 - m^2) = \frac{i}{4}\int dv \mathrm{sgn}(x^- - v)(\partial_\perp^2 - m^2) \quad , \tag{3.98}$$

que é não local na variável x^-. Em qualquer caso, a mera existência deste operador já torna válida a Eq. (3.85):

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{3.99}$$

Com a relação de comutação da Eq. (3.93), o operador de campo quantizado da Eq. (3.86) satisfaz à equação do movimento de Heisenberg [Eq. (3.51)].

3.2.2 Campo escalar carregado

Introduziremos agora um outro tipo de partícula, também escalar, na teoria anterior. Precisa-se para isto introduzir um outro conjunto de operadores de emissão e absorção, $b^\dagger(f)$ e $b(f)$. Os dois campos escalares, φ_a e φ_b, terão correspondentes operadores de campo quantizado:

$$\varphi_a(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mu(\boldsymbol{p})\left(a(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad , \tag{3.100}$$

$$\varphi_b(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mu(\boldsymbol{p})\left(b(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad . \tag{3.101}$$

O espaço de Fock da teoria que contém esses dois tipos de partículas é:

$$\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}_a^+ \otimes \mathcal{F}_b^+ = \bigoplus_{n_1,n_2=0}^{+\infty}\left(\mathcal{H}_{n_1}^{a+} \otimes \mathcal{H}_{n_2}^{b+}\right) \quad . \tag{3.102}$$

E o hamiltoniano, a soma dos hamiltonianos dos dois tipos de partículas. No caso em que a massa dos dois campos é a mesma –caso ao qual essa discussão será restringida–:

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ \left(a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + b^\dagger(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p})\right) \quad . \tag{3.103}$$

Os operadores de campo escalar quantizado $\varphi_a(x)$ e $\varphi_b(x)$ satisfazem a todas as propriedades recém estudadas para o campo escalar neutro; em particular, às relações de comutação das Eqs. (3.91) e (3.93).

Resulta conveniente definir a combinação complexa[15]:

$$\varphi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_a + i\varphi_b) \quad , \quad \varphi^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_a^\dagger - i\varphi_b^\dagger\right) \quad . \tag{3.104}$$

[14] A definição do hamiltoniano P_+ da Eq. (3.98) não é válida no caso bi-dimensional –em que não existem coordenadas $x^\perp$– para campos sem massa, pois a mencionada equação levaria ao resultado de ser $P_+ = 0$. O referido caso deve ser tratado separadamente; nele, o hamiltoniano é $P_+ = i\partial_-^{-1}$. O caso bidimensional, contudo, não será abordado nessa tese.

[15] Lembremos que a combinação aqui apresentada é obtida na teoria clássica ao exigir que o conjunto de campos escalares φ_a e φ_b se transforme por uma representação diagonal do grupo de gauge $U(1)$, isto para que as combinações lineares obtidas representem campos associados a partículas de cargas elétricas opostas.

Usando as Eqs. (3.100) e (3.101), encontra-se os correspondentes operadores de campo:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(c(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + d^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{3.105}$$

$$\varphi^\dagger(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(d(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{3.106}$$

com:

$$c(\boldsymbol{p}) := \frac{1}{\sqrt{2}} (a(\boldsymbol{p}) + ib(\boldsymbol{p})) \quad , \quad d(\boldsymbol{p}) := \frac{1}{\sqrt{2}} (a(\boldsymbol{p}) - ib(\boldsymbol{p})) \quad . \tag{3.107}$$

Com as relações de comutação dadas na Eq. (3.93) para $a(\boldsymbol{p})$ e $b(\boldsymbol{p})$ e as definições da Eq. (3.107), encontra-se que os novos operadores de campo seguem às mesmas relações que os anteriores:

$$\left[c(\boldsymbol{p}); c^\dagger(\boldsymbol{q}) \right] = 2p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \quad \text{e} \quad \left[d(\boldsymbol{p}); d^\dagger(\boldsymbol{q}) \right] = 2p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \quad . \tag{3.108}$$

E também, da Eq. (3.91), válida para os campos φ_a e φ_b, assim como da Eq. (3.104), obtém-se que o campo carregado satisfaz:

$$\left[\varphi(x); \varphi^\dagger(y) \right] = -iD(x - y) \quad . \tag{3.109}$$

Em particular, este resultado implica a seguinte relação de comutação canônica a tempos iguais:

$$\left[\varphi(x^+; \boldsymbol{x}); \partial_- \varphi^\dagger(x^+; \boldsymbol{y}) \right] = -\frac{i}{2} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \quad , \tag{3.110}$$

lembrando que o momento conjugado ao campo escalar carregado é $\pi = \partial_- \varphi^\dagger$. Como no caso neutro [Eq. (3.96)], esta é diferente daquela na dinâmica instantânea por um fator de $1/2$, como resultado da teoria ser vinculada no plano nulo.

Finalmente, usando as Eqs. (3.103) e (3.107), o hamiltoniano é:

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ \left(c^\dagger(\boldsymbol{p}) c(\boldsymbol{p}) + d^\dagger(\boldsymbol{p}) d(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{3.111}$$

3.2.3 Campo escalar fermiônico

Consideremos, por último, a possibilidade de que um campo escalar tenha caráter fermiônico. Este ponto terá importância imediata na seção seguinte, e também a terá no Cap. 6. É mister examinar o seguinte teorema, enunciado, por exemplo, na Ref. [88]:

Teorema *(de spin-estatística)*: *Seja $u(x)$ um operador de campo quantizado espinorial geral irredutível. Se a conexão entre spin e estatística dele é dado pelas regras de (anti-)comutação:*

$$\left\{ u(x); u^\dagger(y) \right\} = 0 \quad \textit{para spin inteiro, ou} \quad ,$$
$$\left[u(x); u^\dagger(y) \right] = 0 \quad \textit{para spin semi-inteiro} \quad ,$$

para todos os intervalos tipo-espaço –isto é: $(x-y)^2 < 0$*–, então* $u(x)$ *é idênticamente nulo.*

Como o spin do campo escalar é zero (inteiro), segundo o teorema, este só poderá ter caráter fermiônico se seu anti-comutador com o campo adjunto for diferente de zero para alguns intervalos do tipo-espaço. Suponhamos, então, que um campo escalar neutro, com expressão

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(c(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{3.112}$$

apresenta caráter fermiônico, de forma que seus operadores de campo de emissão e absorção verificam às relações de anti-comutação:

$$\left\{ c(\boldsymbol{p}); c^\dagger(\boldsymbol{q}) \right\} = 2p_- \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad . \tag{3.113}$$

Como $u^\dagger(x) = u(x)$, deve-se calcular, pelo teorema:

$$\begin{aligned} \{u(x); u(y)\} &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(\boldsymbol{p}) d\mu(\boldsymbol{q}) 2q_- \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \left(e^{-i(px-qy)} + e^{i(px-qy)} \right) \\ &= -iD_+(x-y) + iD_-(x-y) \\ &= -iD(x-y) + 2iD_-(x-y) \quad . \end{aligned} \tag{3.114}$$

A distribuição de Jordan-Pauli, $D(x-y)$, tem suporte causal, e é nulo para todo intervalo espacial $(x-y)^2 < 0$; mas não o é sua parte de frequência negativa, $D_-(x-y)$, que pode ser não nulo para os mesmos intervalos. Assim, a hipótese do teorema de spin-estatística não se satisfaz, e sua tese não se aplica. O teorema não impede a existência de campos escalares fermiônicos, senão o uso do adjunto «†», pois ao usá-lo se perde a causalidade das relações de anti-comutação –ou, melhor dizendo, os campos escalares fermiônicos precisam de uma modificação da definição da Eq. (3.73) para a obtenção de leis causais–. Qual seja a combinação dos operadores de campo de emissão e absorção que deve-se definir como o campo quantizado adjunto, para recuperar a causalidade das relações de anti-comutação, é sugerido pela Eq. (3.114); a distribuição de Jordan-Pauli é obtida trocando o sinal de $c(\boldsymbol{p})$ no campo adjunto, então definimos:

$$\widetilde{u}(x) := (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(-c(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.115}$$

Com ele:

$$\{u(x); \widetilde{u}(y)\} = -iD(x-y) \quad . \tag{3.116}$$

Finalmente, com o hamiltoniano definido não-negativo

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ c^\dagger(\boldsymbol{p}) c(\boldsymbol{p}) \tag{3.117}$$

se satisfazem as equações do movimento dos campos:

$$i\partial_+ u(x) = [u(x); \mathbf{P}_+] \quad \text{e} \quad i\partial_+ \widetilde{u}(x) = [\widetilde{u}(x); \mathbf{P}_+] \quad . \tag{3.118}$$

A partir desse ponto é fácil escrever também o operador de campo do campo escalar carregado fermiônico:

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(c_2(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{3.119}$$

e seu adjunto:

$$\widetilde{u}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(-c_1(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c_2^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.120}$$

Eles satisfazem à regra de anticomutação da Eq. (3.116), e seus operadores de campo de emissão e absorção associados às partículas «1» e «2», as das Eqs. (3.113). O hamiltoniano para este conjunto de campos quantizados é:

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ \left(c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) c_1(\boldsymbol{p}) + c_2^\dagger(\boldsymbol{p}) c_2(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{3.121}$$

3.3 Quantização do campo de Dirac

Consideremos à continuação o campo fermiônico de Dirac. Por ser fermiônico, segundo aprendemos, as relações entre os operadores de campo serão de anti-comutação, e os estados, antissimétricos; e por ser de Dirac, ele descreve a duas partículas, por exemplo, o elétron e o pósitron, cada uma das quais, por ter spin $1/2$, tem duas possíveis polarizações, em razão do qual se prevê que será preciso usar quatro conjuntos de operadores de emissão e absorção: um conjunto para cada polarização de cada partícula[16]. É útil lembrar, para começar, que o campo de Dirac clássico é decomposto em duas partes pelos operadores de projeção $\Lambda_{(\pm)}$[17]:

$$\psi(x) = \psi_{(+)}(x) + \psi_{(-)}(x) \quad ; \quad \psi_{(\pm)} := \Lambda_{(\pm)} \psi \quad , \quad \Lambda_{(\pm)} := \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^0 \gamma^\pm \quad . \tag{3.122}$$

Dessas duas partes, somente a $\psi_{(+)}$ é dinâmica, e segue à equação de Schrödinger:

$$i\partial_+ \psi_{(+)} = P_+ \psi_{(+)} \quad , \tag{3.123}$$

com hamiltoniano não local[18]:

$$P_+ = -(m + i\gamma^\perp \partial_\perp) \frac{i}{2\partial_-} (m - i\gamma^\perp \partial_\perp) = \frac{i}{2} \left(\partial_\perp^2 - m^2 \right) \partial_-^{-1} \quad , \tag{3.124}$$

[16] O campo fermiônico de uma só partícula é o campo fermiônico de Majorana. Em tal caso, precisar-se-ia apenas introduzir dois conjuntos de operadores de emissão e absorção, um conjunto para cada polarização da partícula.

[17] Não se confunda a estes índices com os que denotam às partes de frequência positiva e de frequência negativa, denotadas por subíndices sem parênteses: $\psi_\pm(x)$. Por exemplo, a parte de frequências negativa da parte $\Lambda_{(+)}\psi$ é denotada por $\psi_{(+)-}$.

[18] Também aqui se apresentam as dificuldades que antes se apresentaram para o campo escalar não massivo no espaço-tempo bidimensional –vide a nota de rodapé 14–; esse caso deve ser tratado separadamente.

que é o hamiltoniano da equação de Klein-Gordon-Fock [compare com a Eq. (3.98)]. A projeção $\psi_{(-)}$, por outro lado, é obtida da $\psi_{(+)}$ por meio da relação vinculante:

$$\psi_{(-)} = \frac{1}{i\sqrt{2}\partial_-}\gamma^0(m - i\gamma^\perp\partial_\perp)\psi_{(+)} \quad . \tag{3.125}$$

Como anteriormente dissemos, as componentes da projeção $\psi_{(+)}(x)$ estão sujeitas a satisfazer unicamente à equação de Klein-Gordon-Fock, de forma que, expandindo-a na base do espaço projetado por $\Lambda_{(+)}$:

$$\psi_{(+)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta(x) \quad , \tag{3.126}$$

poder-se-á considerar aos campos $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ como sendos campos escalares carregados fermiônicos, em virtude do qual os correspondentes operadores de campo quantizado terão a expressão:

$$\alpha(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mu(\boldsymbol{p})\left(b_1(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + d_1^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad , \tag{3.127}$$

$$\beta(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d\mu(\boldsymbol{p})\left(b_{-1}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + d_{-1}^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad . \tag{3.128}$$

Estes estão sujeitos às relações de anti-comutação:

$$\{\alpha(x);\widetilde{\alpha}(y)\} = -iD(x-y) \quad , \quad \left\{\beta(x);\widetilde{\beta}(y)\right\} = -iD(x-y) \quad , \tag{3.129}$$

e, consequentemente, também o estão seus correspondentes operadores de campo de emissão e absorção ($s = \pm 1$):

$$\left\{b_s(\boldsymbol{p});b_s^\dagger(\boldsymbol{q})\right\} = 2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad , \quad \left\{d_s(\boldsymbol{p});d_s^\dagger(\boldsymbol{q})\right\} = 2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad . \tag{3.130}$$

A evolução temporal destes campos é definida pelo operador hamiltoniano:

$$\mathbf{P}_+ = \sum_{s=\pm 1}\int d\mu(\boldsymbol{p})p_+\left(b_s^\dagger(\boldsymbol{p})b_s(\boldsymbol{p}) + d_s^\dagger(\boldsymbol{p})d_s(\boldsymbol{p})\right) \quad . \tag{3.131}$$

O campo fermiônico de Dirac então já está quantizado. Contudo, é conveniente usar o vínculo da Eq. (3.125) para reconstruir o campo $\psi(x)$ completo, e escrever a relação de anti-comutação em função dele. Este procedimento é semelhante àquele seguido no estudo clássico: Substituindo as Eqs. (3.127) e (3.128) na Eq. (3.126), obtém-se o operador de campo quantizado $\psi_{(+)}$. Depois, usa-se a Eq. (3.125) para encontrar o operador de campo quantizado $\psi_{(-)}$; a soma deles –como na Eq. (3.122)– é o operador de campo quantizado $\psi(x)$. Como pode-se ver, neste procedimento nenhum grau de liberdade adicional tem sido introduzido, e o campo inteiro está implicitamente escrito só em função dos graus de

liberdade dinâmicos da teoria, isto é, em função de $\alpha(x)$ e $\beta(x)$. Obtém-se:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d\mu(\boldsymbol{p}) \sqrt{2p_-} \left(u_s(\boldsymbol{p}) b_s(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + v_s(\boldsymbol{p}) d_s^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.132}$$

E o campo adjunto de Dirac:

$$\overline{\psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d\mu(\boldsymbol{p}) \sqrt{2p_-} \left(\overline{v}_s(\boldsymbol{p}) d_s(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + \overline{u}_s(\boldsymbol{p}) b_s^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{3.133}$$

com as funções $u, \overline{u}$ e $v, \overline{v}$ normalizadas como no caso clássico, isto é, tais que satisfaçam às regras de soma:

$$\sum_s u_s(\boldsymbol{p}) \overline{u}_s(\boldsymbol{p}) = \frac{E\gamma^+ + |p_-|\gamma^- + p_\perp \gamma^\perp + m}{|2p_-|} \quad , \tag{3.134}$$

$$\sum_s v_s(\boldsymbol{p}) \overline{v}_s(\boldsymbol{p}) = \frac{E\gamma^+ + |p_-|\gamma^- + p_\perp \gamma^\perp - m}{|2p_-|} \quad . \tag{3.135}$$

Com as expressões das Eqs. (3.132) e (3.133) e usando as regras de anti-comutação da Eq. (3.130), encontra-se que o anti-comutador da parte de frequência negativa do campo de Dirac, $\psi_-(x)$, com a parte de frequência positiva de seu adjunto de Dirac, $\overline{\psi}_+(y)$, é:

$$\begin{aligned} \{\psi_-(x)_a; \overline{\psi}_+(y)_b\} &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(\boldsymbol{p}) 2|p_-| \sum_s u_s(\boldsymbol{p})_a \overline{u}_s(\boldsymbol{p})_b e^{-ip(x-y)} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p \Theta(p_-) \delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \quad , \end{aligned} \tag{3.136}$$

e, analogamente:

$$\begin{aligned} \{\psi_+(x)_a; \overline{\psi}_-(y)_b\} &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(\boldsymbol{p}) 2|p_-| \sum_s v_s(\boldsymbol{p})_a \overline{v}_s(\boldsymbol{p})_b e^{ip(x-y)} \\ &= -(2\pi)^{-3} \int d^4p \Theta(-p_-) \delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \quad . \end{aligned} \tag{3.137}$$

Assim, desde que $\Theta(p_-) - \Theta(-p_-) = \mathrm{sgn}(p_-)$, o anti-comutador do campo de Dirac com seu adjunto de Dirac é:

$$\{\psi(x); \overline{\psi}(y)\} = (2\pi)^{-3} \int d^4p (\not{p} + m) \mathrm{sgn}(p_-) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)} \quad . \tag{3.138}$$

Identificando a distribuição $S(x)$ que no caso clássico soluciona o problema de Goursat da equação de Dirac,

$$S(x) = i(2\pi)^{-3} \int d^4p (\not{p} + m) \mathrm{sgn}(p_-) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} = (i\not{\partial} + m) D(x) \quad , \tag{3.139}$$

escrever-se-á, finalmente:

$$\{\psi(x); \overline{\psi}(y)\} = -iS(x-y) \quad . \tag{3.140}$$

3.4 Quantização do campo vetorial sem massa

Estudaremos por último ao campo vetorial sem massa, A^a. Como estabelecido no estudo clássico efetuado no Cap. 2, este campo só tem dois graus de liberdade, correspondentes às componentes transversais A^α ($\alpha = 1, 2$), que estão sujeitas à equação de Klein-Gordon-Fock:

$$\Box A^\alpha = 0 \quad . \tag{3.141}$$

A componente A^+ é nula –essa é a condição de gauge do plano nulo, imposta para que o problema de Goursat esteja bem definido–, enquanto que a componente A^- pode ser obtida da condição de gauge de Lorenz, implicada pela condição de gauge do plano nulo no caso livre:

$$A^+ = 0 \quad , \quad A^- = -\partial_-^{-1}\partial_\alpha A^\alpha \quad . \tag{3.142}$$

Por construção, o espaço de Fock inclui somente aos estados físicos, de forma que só os potenciais A^a que satisfaçam às Eqs. (3.141) e (3.142) poderão ser funções de onda de uma partícula. Sem embargo, uma vez que a condição de gauge do plano nulo não é invariante de Poincaré, poder-se-ia pôr em dúvida a invariância do procedimento de quantização perante essas transformações. Este problema pode ser colocado na seguinte forma: Será que o espaço de Fock dos estados físicos é o mesmo para todos os sistemas inerciais de referência? Nesta seção responderemos a essa pergunta só de forma qualitativa: Quando é aplicada uma transformação de sistema de referência, a condição de gauge de Lorenz se mantém válida, pois ela é covariante, mas a condição de gauge do plano nulo já não é satisfeita. Contudo, ainda é possível fazer uma transformação de gauge de forma que dita condição seja recuperada. Este procedimento implica que o vetor inicial tem um vetor correspondente no novo sistema de referência, mas ainda é possível que ele não seja único. Acontece que esse não é o caso e a correspondência entre estados nos diferentes sistemas de referência é biunívoca, pois o gauge do plano nulo é único. Com efeito, a condição de gauge do plano nulo e a de Lorenz, respectivamente, são mantidas na transformação de gauge $A'^a = A^a + \partial^a f$ se, e só se, a função f satisfaz às equações:

$$\partial_- f = 0 \quad \text{e} \quad \Box f = 0 \quad . \tag{3.143}$$

Da substituição da primeira dessas condições na segunda, obtém-se que, necessáriamente, deve ser: $\partial_\perp^2 f = 0$. A condição assintótica de que f seja nula no infinito espacial então implica que $f = 0$, isto é, que não existe nenhum outro potencial que seja, a um tempo, físicamente equivalente e que satisfaça às mesmas condições de gauge. Em outras palavras, as transformações de gauge e as de Poincaré podem se combinar de forma tal que os espaços de estados físicos observados em diferentes sistemas de referência sejam os mesmos. Uma prova completa disto será dada no Cap. 6, onde estenderemos o espaço de Fock para incluir também estados não físicos com o objetivo de obter uma formulação explicitamente covariante das teorias de gauge, o que simplificará considerávelmente os cálculos.

De acordo com o programa de quantização desenvolvido, os operadores de campo das componentes A_1 e A_2 do campo vetorial sem massa são:

$$A_1(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(a_1(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a_1^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{3.144}$$

$$A_2(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(a_2(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a_2^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.145}$$

Como eles só estão sujeitos a obedecer à equação de Klein-Gordon-Fock, satisfarão às regras de comutação:

$$[A_{1-}(x); A_{1+}(y)] = -iD_+(x-y) \quad , \quad [A_{2-}(x); A_{2+}(y)] = -iD_+(x-y) \quad . \tag{3.146}$$

Aqui tem-se usado regras de comutação, e não de anti-comutação, porque estamos interessados em descrever partículas bosônicas, por exemplo, o fóton. Da Eq. (3.146) decorrem as relações de comutação dos operadores de campo completos:

$$[A_1(x); A_1(y)] = -iD(x-y) \quad , \quad [A_2(x); A_2(y)] = -iD(x-y) \quad , \tag{3.147}$$

e as dos operadores de campo de emissão e absorção no espaço dos momentos:

$$\left[a_1(\boldsymbol{p}); a_1^\dagger(\boldsymbol{q}) \right] = 2p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \quad , \quad \left[a_2(\boldsymbol{p}); a_2^\dagger(\boldsymbol{q}) \right] = 2p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \quad . \tag{3.148}$$

Finalmente, o hamiltoniano do campo vetorial não massivo será a soma dos hamiltonianos associados a estas componentes dinâmicas:

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ \left(a_1^\dagger(\boldsymbol{p}) a_1(\boldsymbol{p}) + a_2^\dagger(\boldsymbol{p}) a_2(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{3.149}$$

Como no caso do campo fermiônico de Dirac, embora o já dito seja, própriamente, suficiente, resulta conveniente escrever uma expressão para o campo vetorial completo. Para tal tarefa, usa-se a segunda das Eqs. (3.142), que permite encontrar a componente longitudinal $A^-(x)$:

$$A^-(x) = -(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d\mu(\boldsymbol{p})}{p_-} \left[\left(p_1 a_1(\boldsymbol{p}) + p_2 a_2(\boldsymbol{p}) \right) e^{-ipx} + \left(p_1 a_1^\dagger(\boldsymbol{p}) + p_2 a_2^\dagger(\boldsymbol{p}) \right) e^{ipx} \right] \quad , \tag{3.150}$$

na qual identifica-se a componente longitudinal dos vetores de polarização, $\varepsilon_{1,2}(\boldsymbol{p})^-$. Desta sorte, pode-se escrever o operador de campo quantizado em forma compacta como:

$$A^a(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\lambda=1,2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{3.151}$$

Mediante o uso das relações de comutação da Eq. (3.148) e a soma dos vetores de polarização transversais encontrada na análise clássica, já é uma tarefa fácil calcular a relação

de comutação do operador de campo quantizado da Eq. (3.151):

$$\begin{aligned}\left[A^a(x);A^b(y)\right] &= (2\pi)^{-3}\int d\mu(\boldsymbol{p})\sum_{\lambda=1,2}\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^b\left(e^{-ip(x-y)}-e^{ip(x-y)}\right)\Big|_{p_+=E}\\ &= (2\pi)^{-3}\int d^4p\delta(p^2)\Theta\left(p_-\right)\left(-g^{ab}+\frac{p^a\eta^b+\eta^ap^b}{p_-}\right)\left(e^{-ip(x-y)}-e^{ip(x-y)}\right)\\ &= -(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\mathrm{sgn}\left(p_-\right)\delta(p^2)\left(g^{ab}-\frac{p^a\eta^b+\eta^ap^b}{p_-}\right)e^{-ip(x-y)} \quad . \end{aligned} \tag{3.152}$$

Ou seja, definindo a distribuição $D^{ab}(x)$ por:

$$D^{ab}(x) = i(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\mathrm{sgn}\left(p_-\right)\delta(p^2)\left(g^{ab}-\frac{p^a\eta^b+\eta^ap^b}{p_-}\right)e^{-ipx} \quad . \tag{3.153}$$

ter-se-á que ela é:

$$\left[A^a(x);A^b(y)\right] =: iD^{ab}(x-y) \quad , \tag{3.154}$$

Terminamos mencionando que, caso tenhamos interesse no campo vetorial carregado, a generalização dos resultados obtidos é imediata seguindo os mesmos passos percorridos para ir do campo escalar neutro ao carregado, e o próprio é válido para a construção do campo vetorial fermiônico sem massa. Contudo, como estes campos não aparecerão nesta tese, não os escreveremos explicitamente.

Capítulo 4

Teoria de perturbação causal no plano nulo

Definida a dinâmica da frente de luz e os campos quantizados nela, precisamos desenvolver uma forma de utilizar o conhecimento adquirido para fazer predições físicas. Note-se que tudo que é observado e medido só pode sê-lo devido à existência das interações, donde decorre a necessidade de formular uma teoria dos campos quantizados interagentes. Contudo, já o dissemos, a definição do campo quantizado em interação é um assunto muito longe de ser trivial, e, de fato, o ponto de partida para uma tal formulação ainda é a «teoria da matriz S».

Com o intuito de exemplificar o acima dito, reproduzimos aqui as seguintes palavras proferidas por Scharf, que constam no Prefácio da Ref. [107], a respeito das dificuldades da teoria em interação e como elas são solucionadas na TPC, e que em tradução livre afirmam: «O fato de que a teoria causal seja perturbativa não é somente uma questão técnica, mas tem uma origem física profunda. Em qualquer teoria quântica do campo deve ser feita uma distinção precisa entre os campos fundamentais que aparecem na interação elementar e os estados assintóticos que descrevem as partículas reais incidentes e resultantes. Isto é bem conhecido atualmente na teoria das interações fortes (QCD), em que os campos de quark são os campos fermiônicos fundamentais, enquanto que os mésons e núcleons são estados ligados complicados. Mas também o elétron, que carrega consigo o campo de Coulomb, pode ser considerado um estado ligado em que fótons escalares estão confinados ao campo de Dirac. Os estados ligados são o normal. Somente o fóton e os neutrinos parecem ser elementares no sentido de serem gerados pelos campos fundamentais. Na teoria causal o difícil problema dos estados assintóticos é claramente separado do resto da teoria pelo método de "comutação adiabática": A interação é multiplicada por uma função $g(x)$, e o limite adiabático $g \to 1$ é tomado no final nas quantidades observáveis. Isto significa que o confinamento é desligado na região assintótica num experimento mental, de forma que são os campos livres os que interagem, e não as complicadas partículas físicas reais. A comutação então é removida no limite adiabático. Do estudo desse limite podemos aprender algumas coisas da estrutura dos estados assintóticos reais: Acontece que o limite não sempre existe, senão que ele é finito e único somente quando seções de choque inclusivas específicas são consideradas. Nesse sentido, a própria matriz S determina a estrutura das partículas físicas, como deve ser.»

Neste capítulo formularemos a teoria de perturbação causal de forma consistente com a dinâmica da frente de luz. Esta será a ferramenta que nos permitirá calcular amplitudes de transição nos processos de espalhamento, assim como as correções radiativas aos propagadores do campo livre; sua importância é central na presente tese.

4.1 Axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov

O ponto de partida para qualquer teoria da matriz S é estabelecer as propriedades gerais deste operador. No caso da TPC, elas estão inseparavelmente ligadas à operação de comutação adiabática, cuja definição é como segue [100]:

Definição: *Seja $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ uma função com valores no intervalo $[0;1]$. A operação de comutação adiabática da interação consiste em multiplicar a constante de acoplamento[1] da teoria de interação pela função g, então chamada função de comutação.*

A função de comutação regula a intensidade da interação: Nas regiões em que $g(x) = 0$ a interação está ausente, nas regiões em que $g(x) = 1$, adota sua completa intensidade, e naquelas em que $0 < g(x) < 1$, manifesta-se com uma intensidade parcial. Assim, a comutação adiabática da interação elimina toda influência desta nos confins do espaço e possibilita a escrituração da teoria em função dos bem definidos campos livres: os estados assintóticos são gerados pelos campos quantizados livres, isto é, são vetores do espaço de Fock em que se representam as relações de (anti-)comutação dos operadores de campo livre. Uma primeira e imediata consequência disto é que na TPC os parâmetros que caracterizam aos campos livres, como sua massa, são os parâmetros físicos (reais).

Definição: *Seja uma teoria de interação na qual se opera a comutação adiabática com a função de comutação g. O operador de espalhamento $S(g)$ é a forma quadrática cujo elemento de matriz entre os estados $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$,*

$$\langle \Psi; S(g)\Phi \rangle \quad , \tag{4.1}$$

é igual à amplitude de probabilidade de que, num processo de espalhamento, o estado inicial Φ no infinito passado –no sentido do tempo x^+ do plano nulo– se torne o estado final Ψ no infinito futuro.

A interação real, é claro, corresponde a considerar o «limite adiabático» $g \to 1$. O valor funcional ao qual se faz tender a função de comutação neste procedimento de limite não se encontra em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$; sua existência, portanto, não é trivial, senão que tem de ser provada em cada teoria estudada. Em mais de um caso, ainda, a existência do mencionado limite considera-se uma condição segundo a qual termos indeterminados são fixados[2]. Porém, o limite adiabático só tem de ser tomado no final de todas as contas, razão pela qual, na construção da teoria e em um primeiro estudo, como este que faremos no capítulo presente, não precisaremos nos preocupar com ele. Por outro lado, da definição decorre que, se considerarmos a função de comutação nula, $g \equiv 0$, isto é, na ausência de interação,

[1] Na concepção de Epstein e Glaser (Ref. [103]), de fato, a função de comutação «é» a constante de acoplamento da teoria.

[2] Vide, por exemplo, a Sec. 3.11 da Ref. [107], em que se utiliza a imposição de existência do limite adiabático para normalizar a auto-energia do elétron na QED na dinâmica instantânea.

chegaremos à conclusão de que o operador $S(g)$ está sujeito à seguinte «condição inicial»:

$$S(0) = 1 \quad . \tag{4.2}$$

Definidos os elementos primários da teoria, passaremos a indicar as propriedades às quais o operador de espalhamento $S(g)$ tem de respeitar. Elas constituem o conjunto de axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov[3]; porém, seguindo a Epstein e Glaser [103], somente consideraremos aqueles axiomas que servem de primórdios para a TPC.

Axioma *(da invariância sob translações)***:** *Seja* $\mathbf{U}(a;1)$ *o operador unitário que realiza as translações* $x \to x + a$, $a \in \mathbb{R}^4$, *no espaço de Fock* $\mathcal{F}$. *O operador de espalhamento se transforma segundo:*

$$\mathbf{U}(a;1)S(g)\mathbf{U}(a;1)^{-1} = S(g_a) \quad ; \quad g_a(x) := g(x-a) \quad . \tag{4.3}$$

A seguir, introduziremos a causalidade na dinâmica da frente de luz. Para isso, começaremos estabelecendo, como em toda dinâmica, que «dois pontos $x, y \in \mathbb{M}$ estão causalmente conectados se o vetor que os une, $x - y$, é um vetor do tipo-tempo ou do tipo-luz». A ordem cronológica no plano nulo, contudo, não é tão simples de se estabelecer. Da definição das coordenadas invariantes no plano nulo tem-se que dentro do cone de luz é satisfeita a igualdade: $\mathrm{sgn}\,(x^+) = \mathrm{sgn}(x^0)$. Portanto, nessa região adotar-se-á a definição de ordem cronológica: «Sejam $x, y \in \mathbb{M}$ dois pontos tais que x encontra-se no interior do cone de luz com origem em y; se $x^+ < y^+$, então x é um ponto no passado de y; se $x^+ > y^+$, então x é um ponto no futuro de y». Tenha-se cuidado, pois as coordenadas invariantes, por serem tais, não podem ser mudadas por transformações de coordenadas, nem sequer por transformações de reversão do eixo coordenado temporal: O sinal de x^+, assim como seu valor, é fixo. Esta é uma consequência do fato de que o sistema de referência é fixado uma vez que a base de tétradas é escolhida, como já foi explicado no Cap. 2.

Em relação aos comentários recém feitos, lembramos da definição do cone de luz futuro do ponto $x \in \mathbb{M}$, assim como o cone de luz passado dele, como os conjuntos:

$$V^{\pm}(x) := \left\{ y \in \mathbb{M} \;\middle|\; (y-x)^2 > 0\,;\, y^+ \gtrless x^+ \right\} \quad , \tag{4.4}$$

respectivamente. Essa definição traz consigo a seguinte dificuldade: Na superfície isocrônica $x^+ = 0$ existem pontos com diferente coordenada longitudinal x^- que estão causalmente conectados; eles são os pontos $\left(0; 0^{\perp}; x^-\right)$ que cuja união é o eixo x^-. A existência dessa região, instantânea mas causalmente conectada, diferencia a dinâmica da frente de luz da instantânea: Naturalmente, desde que a causalidade o permite, as interações bem podem se propagar no eixo x^-.

Estendamos a definição dada da ordem cronológica para subconjuntos de pontos no espaço-tempo de Minkowski. Sejam $X, Y \subset \mathbb{M}$ dois conjuntos de pontos. Definimos as

[3] O trabalho original é a Ref. [99]; sem embargo, os axiomas também são expostos no capítulo 10 da Ref. [100] e no capítulo 14 da Ref. [101], de mais fácil acesso. Eles são recopilados também na Ref. [173].

seguintes relações entre eles:

$$X < Y :\Leftrightarrow \ \forall x \in X, y \in Y : \ x^+ < y^+ \quad ; \tag{4.5}$$

$$X \sim Y :\Leftrightarrow \ \forall x \in X, y \in Y : \ (x-y)^2 < 0 \quad . \tag{4.6}$$

O significado dos simbolos «<» e «∼» é claro: $X < Y$ significa que os conjuntos X e Y podem ser separados por um plano nulo de tempo constante, com os pontos de X no passado dos pontos de Y; $X \sim Y$ quer dizer que os pontos de X estão espacialmente separados daqueles de Y. A causalidade é implementada por meio do seguinte enunciado.

Axioma (da causalidade)**:** *Sejam $g_1, g_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ duas funções de comutação cujos suportes satisfazem: $supp(g_1) < supp(g_2)$. Cumpre-se a igualdade:*

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1) \quad . \tag{4.7}$$

Se, por outro lado, se satisfaz a relação: $supp(g_1) \sim supp(g_2)$, então a decomposição da Eq. (4.7) ainda é válida, e os operadores $S(g_1)$ e $S(g_2)$ comutam.

O sistema axiomático de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov inclui também aos seguintes axiomas, os quais não se usarão na construção da TPC no plano nulo.

Axioma (da unitariedade)**:** *Para toda função de comutação $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ o operador de espalhamento é unitário:*

$$S(g)^\dagger S(g) = 1 = S(g)S(g)^\dagger \quad . \tag{4.8}$$

Este axioma está claramente ligado à interpretação probabilística dos elementos de matriz do operador de espalhamento. É útil mencionar, ademais, que ele se refere ao espaço de Fock construído com os estados físicos, como até agora temos feito. No Cap. 6 estenderemos o espaço de Fock para conter estados não-físicos; naquela circunstância, o axioma da unitariedade se satisfaz somente no subespaço físico, e tem de ser substituído por uma condição de pseudo-unitariedade no espaço de Fock completo.

Axioma (da invariância de Lorentz)**:** *Seja $\mathbf{U}(0;\Lambda)$ o operador unitário que realiza as transformções de Lorentz $x \to \Lambda x$, $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, no espaço de Fock $\mathcal{F}$. O operador de espalhamento se transforma segundo:*

$$\mathbf{U}(0;\Lambda)S(g)\mathbf{U}(0;\Lambda)^{-1} = S(g_\Lambda) \quad ; \quad g_\Lambda(x) := g\left(\Lambda^{-1}x\right) \quad . \tag{4.9}$$

Este axioma não é necessário para a construção da TPC, embora seu uso simplificaria a prova dos teoremas de causalidade que apresentaremos mais adiante neste capítulo[4]. Nós não o utilizaremos, precisamente, para mostrar explicitamente que também na dinâmica da frente de luz tal axioma não é requerido pela TPC.

[4] A dispensabilidade da invariância de Lorentz na dinâmica instantânea é afirmada por Epstein e Glaser na Ref. [103], não obstante o qual, eles mesmos, e também Scharf na Ref. [107], a usam para simplificar as provas.

Axioma *(da estabilidade do vazio e do setor de uma partícula)*: *Para toda função de comutação adiabática $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$, o operador de espalhamento deixa invariantes aos estados de vazio e de uma partícula:*

$$\Phi = \Omega \vee \Phi = (0; \varphi; 0; \cdots) \Rightarrow S(g)\Phi = \Phi \quad . \tag{4.10}$$

Embora este seja um requisito razoável, não constitui um elemento fundamental para a TPC. Ademais, a análise da estabilidade do setor de uma partícula no limite adiabático permite extrair resultados em relação a se, em uma dada teoria, os campos fundamentais podem também ser os estados assintóticos reais.

4.2 Teoria perturbativa do operador de espalhamento

A teoria perturbativa do operador de espalhamento consiste em construir uma série formal em potências do parâmetro de acoplamento da interação compatível com a condição inicial da Eq. (4.2) e os axiomas recém estabelecidos. Formalmente, o operador $S(g)$ é expresso então como a seguinte série perturbativa:

$$S(g) =: 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T_n(x_1; \cdots; x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) \quad . \tag{4.11}$$

A Eq. (4.11) define às distribuições operador-valuadas $T_n(x_1; \cdots; x_n) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, denominadas «distribuições de transição da ordem n» ou, também, «distribuições de n pontos». Note-se, adicionalmente, que essa definição utiliza já do «teorema nuclear» de Schwartz [75] –vide também a Ref. [88]–, que diz:

Teorema *(nuclear de Schwartz)*: *Seja U um funcional de argumentos $f_1, \cdots, f_k \in \mathscr{S}$, contínua em cada um deles. Existe uma única distribuição $V \in \mathscr{S}'$, nas mesmas variáveis, tal que: $U(f_1; f_2; \cdots; f_k) = V(f_1 f_2 \cdots f_k)$.*

Evidentemente, a definição da Eq. (4.11) está escrita já em função da distribuição dependente não das diversas funções, mas do produto delas. Mas, porque o produto de funções $g(x_1) \cdots g(x_n)$ é simétrico em seus argumentos $x_1, \cdots, x_n$, as distribuições de transição, cujas funções de teste são $g^{\otimes n}$, têm também de ser simétricas em seus argumentos. Assim sendo, pode-se definir um conjunto de n pontos no espaço-tempo de Minkowski, $\mathbb{M}$, por $X := \{x_j \in \mathbb{M} \mid j = 1, \cdots, n\}$, e introduzir a notação seguinte:

$$T_n(X) \equiv T_n(x_1; \cdots; x_n) \quad , \quad g(X) \equiv g(x_1) \cdots g(x_n) \quad , \quad dX \equiv d^4x_1 \cdots d^4x_n \quad , \tag{4.12}$$

com a qual o operador $S(g)$ se escreve sucintamente:

$$S(g) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \int dX T_n(X) g(X) \quad . \tag{4.13}$$

O operador inverso de $S(g)$, $S(g)^{-1}$, cuja interpretação é a de conectar os estados finais

do processo de espalhamento com os iniciais, em sentido contrário ao operador $S(g)$, é também formalmente expresso como uma série perturbativa:

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \int dX \widetilde{T}_n(X) g(X) \quad . \tag{4.14}$$

As distribuições $\widetilde{T}_n$ estão relacionadas com as distribuições de transição; tal relação se obtém comparando a série da Eq. (4.14) que define a $S(g)^{-1}$ com a inversa formal da série da Eq. (4.13), que é:

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{r\in I_n} (-1)^r \sum_{\substack{X_1,\cdots,X_r\neq\emptyset \\ X_1\cup\cdots\cup X_r = X \\ X_j\cap X_k=\emptyset, \forall j\neq k}} \int dX T_{n_1}(X_1)\cdots T_{n_r}(X_r) g(X) \quad . \tag{4.15}$$

Introduzimos aqui a notação $I_n := \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$. Da comparação das Eqs. (4.14) e (4.15) decorre a desejada expressão:

$$\widetilde{T}_n(X) = \sum_{r\in I_n} (-1)^r \sum_{\substack{X_1,\cdots,X_r\neq\emptyset \\ X_1\cup\cdots\cup X_r = X \\ X_j\cap X_k=\emptyset, \forall j\neq k}} T_{n_1}(X_1)\cdots T_{n_r}(X_r) \quad . \tag{4.16}$$

Outras relações entre as distribuições T_n e $\widetilde{T}_m$ podem obter-se usando o fato de que $S(g)^{-1}$ é a inversa de $S(g)$. Definindo as distribuições

$$T_0(\emptyset) = 1 = \widetilde{T}_0(\emptyset) \quad , \tag{4.17}$$

ter-se-á que:

$$1 = S(g)S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{X\cup Y=Z \\ X\cap Y=\emptyset}} \int dZ T_{n_1}(X) \widetilde{T}_{n-n_1}(Y) g(Z) \quad . \tag{4.18}$$

Como a Eq. (4.18) é satisfeita qualquer que seja a função de comutação g, dela se segue que:

$$\forall Z \neq \emptyset \; : \quad \sum_{\substack{X\cup Y=Z \\ X\cap Y=\emptyset}} T_{n_1}(X) \widetilde{T}_{n-n_1}(Y) = 0 \quad . \tag{4.19}$$

Analogamente, se na Eq. (4.18) se escrevesse $1 = S(g)^{-1}S(g)$ em lugar de $S(g)S(g)^{-1}$, obter-se-ia a relação:

$$\sum_{\substack{X\cup Y=Z \\ X\cap Y=\emptyset}} \widetilde{T}_{n-n_1}(X) T_{n_1}(Y) = 0 \quad . \tag{4.20}$$

As Eqs. (4.19) e (4.20) serão importantes na prova dos teoremas de causalidade.

Passemos a derivar a expressão dos axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov na teoria perturbativa do operador de espalhamento, e, assim, as restrições que eles impõem sobre as distribuições de transição.

(1) *Invariância sob translações:* Inserindo a série perturbativa da Eq. (4.13) em ambos os lados da Eq. (4.3), chega-se à relação:

$$\mathbf{U}(a;1)T_n(x_1;\cdots;x_n)\mathbf{U}(a;1)^{-1} = T_n(x_1+a;\cdots;x_n+a) \quad . \tag{4.21}$$

(2) *Causalidade:* Consideremos duas funções de comutação g_1 e g_2, cujos suportes satisfazem à relação de ordem $\mathrm{supp}(g_1) < \mathrm{supp}(g_2)$, de tal forma que a Eq. (4.7) é satisfeita. O lado esquerdo dessa equação tem a seguinte série perturbativa:

$$S(g_1+g_2) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \int dX T_n(X)(g_1+g_2)(X) \quad , \tag{4.22}$$

em que, lembremos: $(g_1+g_2)(X) \equiv (g_1(x_1)+g_2(x_2))\cdots(g_1(x_n)+g_2(x_n))$, então –denotamos $I_{n,0} := I_n \cup \{0\}$–:

$$(g_1+g_2)(X) = \sum_{m I_{n,0}} \frac{n!}{m!(n-m)!} g_2(X_2)g_1(X_1) \quad ; \tag{4.23}$$

$$|X_2| = m \quad , \quad X = X_1 \cup X_2 \quad , \quad X_1 \cap X_2 = \varnothing \quad , \quad g_j(\varnothing) := 1 \quad .$$

Aqui, a notação «$|\bullet|$» significa o «cardinal do conjunto $\bullet$», isto é, o número de elementos contidos nele. Assim:

$$S(g_1+g_2) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in I_{n,0}} \frac{1}{m!(n-m)!} \int dX T_n(X) g_2(X_2) g_1(X_1) \quad . \tag{4.24}$$

Por outro lado, o lado direito da Eq. (4.7) possui a seguinte expressão perturbativa:

$$S(g_2)S(g_1) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in I_{n,0}} \frac{1}{m!(n-m)!} \int dX T_m(X_2) T_{n-m}(X_1) g_2(X_2) g_1(X_1) \quad . \tag{4.25}$$

Da comparação das Eqs. (4.24) e (4.25), e lembrando que $\mathrm{supp}(g_1) < \mathrm{supp}(g_2)$, deduz-se que o axioma da causalidade do operador $S(g)$ se traduz na condição de que as distribuições de transição sejam «cronologicamente ordenadas»:

$$T_n(X) = T_m(X_2)T_{n-m}(X_1) \quad ; \quad X_1 < X_2 \quad . \tag{4.26}$$

Aplicando repetidamente a mesma fórmula encontra-se que, quando todos os pontos podem ser temporalmente ordenados –ou seja, quando não existam pontos com iguais coordenadas temporais x^+–, pode-se escrever a distribuição de n pontos como o «produto temporalmente ordenado» ou «produto cronológico» de n distribuições de um ponto:

$$T_n(x_1;\cdots;x_n) = \mathfrak{T}_+ \{T_1(x_1)\cdots T_1(x_n)\} \quad . \tag{4.27}$$

Este já é um primeiro indício de que a série perturbativa completa poderia ser gerada com o mero conhecimento do termo da primeira ordem, $T_1(x)$, se um procedimento de ordenamento cronológico adequado pudesse ser definido.

Caso seja $\mathrm{supp}(g_1) \sim \mathrm{supp}(g_2)$, o mesmo procedimento é válido, com a conclusão:

$$T_n(X) = T_m(X_2)T_{n-m}(X_1) = T_{n-m}(X_1)T_m(X_2) \quad ; \quad X_1 \sim X_2 \quad . \tag{4.28}$$

Em outras palavras, as distribuições de transição correspondentes a conjuntos de pontos espacialmente separados comutam:

$$[T_n(X); T_m(Y)] = 0 \quad ; \quad X \sim Y \quad . \tag{4.29}$$

A Eq. (4.28) estende a validade da Eq. (4.27) para pontos isocrônicos sempre que eles não estejam causalmente conectados. Assim, se houver alguma indeterminação na construção de T_n à partir de T_1, ela estará restrita à região instantânea mas causalmente conectada do eixo x^-. Tais indeterminações não podem ser fixadas pela condição de causalidade, como daqui decorre. Outrossim, a Eq. (4.29) aponta para um fato crucial: A distribuição de um ponto, T_1, deve ser construída de forma a respeitar à mencionada equação. Ora, ela poderia ser, em princípio, um polinômio de Wick geral dos operadores de campo de emissão e absorção; porém, como os (anti-)comutadores destes são as partes de frequência positiva ou de frequência negativa das distribuições de (anti-)comutação dos operadores de campo quantizado, e como essas não têm suporte no cone de luz, eles não podem aparecer em T_1 em combinações arbitrárias, mas em combinações muito específicas. As combinações que, já o sabemos, levam a (anti-)comutadores com suporte no cone de luz são os operadores de campo quantizado. Donde a distribuição de um ponto, T_1, e assim também, como consequência da Eq. (4.27), as de maior número de pontos, serão geralmente funções dos operadores de campo quantizado.

Finalmente, extraíndo a inversa da Eq. (4.7) obtém-se uma condição de causalidade para o operador $S(g)^{-1}$: Se $\mathrm{supp}(g_1) < \mathrm{supp}(g_2)$, então:

$$S(g_1 + g_2)^{-1} = S(g_1)^{-1}S(g_2)^{-1} \quad , \tag{4.30}$$

donde, por um procedimento idêntico ao mostrado para o operador $S(g)$, conclui-se que as distribuições $\widetilde{T}_n$ são «anti-cronológicamente ordenadas»:

$$\widetilde{T}_n(X) = \widetilde{T}_m(X_1)\widetilde{T}_{n-m}(X_2) \quad ; \quad X_1 < X_2 \quad . \tag{4.31}$$

(3) *Unitariedade:* Como a função de comutação é real, a substituição das Eqs. (4.13) e (4.14) na Eq. (4.8) leva diretamente à condição:

$$\widetilde{T}_n(X) = T_n(X)^\dagger \quad . \tag{4.32}$$

Repetimos que este axioma não será utilizado na construção da TPC, mas como uma condição para o estabelecimento da forma explícita do primeiro termo da série perturbativa em cada teoria de interação particular, propriedade que poderá então ser mantida na construção das seguintes ordens da série perturbativa, como mostraremos na Seç. 4.8.

(4) *Invariância de Lorentz:* Introduzindo a série da Eq. (4.13) nos dois membros da Eq. (4.9) chega-se à relação:

$$\mathbf{U}(0;\Lambda)T_n(x_1;\cdots;x_n)\mathbf{U}(0;\Lambda)^{-1} = T_n(\Lambda x_1;\cdots;\Lambda x_n) \quad . \tag{4.33}$$

(5) *Estabilidade do vazio e do setor de uma partícula:* Colocando a Eq. (4.13) na Eq. (4.10) obtém-se que:

$$\Phi = \Omega \ \vee \ \Phi = (0;\varphi;0;\cdots) \ \Rightarrow \ \int dX T_n(X) g(X) \Phi = 0 \quad . \tag{4.34}$$

4.3 Construção indutiva das distribuições de transição

Nesta seção apresentaremos brevemente a ideia da construção indutiva das distribuições de transição. A prova de que ela pode ser efetivamente implementada será tema da seção seguinte.

A Eq. (4.26), isto é, a condição de causalidade, implica que a expressão

$$T_{n_1}(X_1 \cup X_2) - T_m(X_2) T_{n_1-m}(X_1)$$

é nula quando X_2 está no futuro de X_1 ou quando está causalmente desconectado dele. Em outras palavras, a expressão recém escrita é «avançada» em relação aos pontos do conjunto X_1. Pelo mesmo motivo, também a expressão

$$\begin{aligned} &T(X_3 \cup X_2 \cup X_1) - T(X_3 \cup X_2) T(X_1) + T(X_3) T(X_2) T(X_1) \\ &- T(X_3) T(X_2 \cup X_1) + T(X_2) T(X_3) T(X_1) - T(X_2) T(X_3 \cup X_1) \end{aligned}$$

é avançada em relação a X_1, qualquer que seja a relação entre X_2 e X_3, e assim por diante pode-se escrever uma vasta coleção de distribuições avançadas em relação a um determinado conjunto. Vê-se que a regra para essas construções é que o conjunto ou ponto a respeito do qual se quer construir a distribuição avançada esteja na distribuição à direita, e que o sinal na frente de cada produto de distribuições seja alternado toda vez que uma partição segundo a Eq. (4.26) seja feita; este último, em particular, significa que o sinal de cada termo pode ser relacionado com o número de fatores contidos nele. Daqui é claro que a distribuição mais geral, módulo um fator global, que pode ser construída com as distribuições de transição até de ordem n, tal que seja avançada em relação ao ponto x_n, é –usamos $Y = \{x_1;\cdots;x_{n-1}\}$–:

$$A_n(Y;x_n) := \sum_{r\in I_n} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{X_1,\cdots,X_r\neq\emptyset \\ X_1\cup\cdots\cup X_r = Y\cup\{x_n\} \\ X_j\cap X_k=\emptyset, \forall j\neq k \\ x_n\in X_r}} T_{n_1}(X_1)\cdots T_{n_r}(X_r) \quad . \tag{4.35}$$

Essa distribuição é denominada «distribuição avançada da ordem n». A essa definição pode ser dada uma forma mais simples usando a Eq. (4.16): Fixando o conjunto X_r, o resto da

soma é igual à distribuição de transição inversa $\widetilde{T}_{n_1+\cdots+n_{r-1}}(X_1 \cup \cdots \cup X_{r-1})$; assim:

$$A_n(Y;x_n) = \sum_{\substack{X\cup X'=Y \\ X\cap X'=\emptyset}} \widetilde{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \quad . \tag{4.36}$$

De forma análoga, pode-se procurar por distribuições «retardadas» em relação a um dado ponto, isto é, que se anulem quando os outros pontos estejam em seu passado. Encontra-se que a definição apropriada para a «distribuição retardada da ordem n» é:

$$R_n(Y;x_n) := \sum_{r\in I_n} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{X_1,\cdots,X_r\neq\emptyset \\ X_1\cup\cdots\cup X_r = Y\cup\{x_n\} \\ X_j\cap X_k=\emptyset, \forall j\neq k \\ x_n\in X_1}} T_{n_1}(X_1)\cdots T_{n_r}(X_r) \quad . \tag{4.37}$$

Desta vez, fixando o conjunto X_1, identifica-se o resto da soma como uma distribuição de transição inversa:

$$R_n(Y;x_n) = \sum_{\substack{X\cup X'=Y \\ X\cap X'=\emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \widetilde{T}_m(X) \quad . \tag{4.38}$$

Nas somas das Eqs. (4.36) e (4.38) a distribuição de n pontos aparece uma única vez. Separando-a do resto de termos:

$$A_n(Y;x_n) = T_n(Y\cup\{x_n\}) + A'_n(Y;x_n)\,,\; R_n(Y;x_n) = T_n(Y\cup\{x_n\}) + R'_n(Y;x_n)\,, \tag{4.39}$$

com a «distribuição subsidiária avançada» e a «distribuição subsidiária retardada» definidas como:

$$A'_n(Y;x_n) := \sum_{\substack{X\cup X'=Y \\ X\cap X'=\emptyset \\ X\neq\emptyset}} \widetilde{T}_m(X) T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \quad , \tag{4.40}$$

$$R'_n(Y;x_n) := \sum_{\substack{X\cup X'=Y \\ X\cap X'=\emptyset \\ X\neq\emptyset}} T_{n-m}(X' \cup \{x_n\}) \widetilde{T}_m(X) \quad , \tag{4.41}$$

respectivamente. As distribuições subsidiárias não contêm a T_n, mas somente às distribuições de transição T_m com $m \leq n-1$. A distribuição de transição da ordem n é portanto igual a:

$$T_n(Y\cup\{x_n\}) = A_n(Y;x_n) - A'_n(Y;x_n) = R_n(Y;x_n) - R'_n(Y;x_n) \quad . \tag{4.42}$$

Assim, a distribuição de n pontos pode ser determinada se se conhecem: (1) As distribuições T_m com $m \leq n-1$, o que permite construir as distribuições subsidiárias, e (2) a distribuição avançada ou a retardada da ordem n. O ponto (1) é hipótese do procedimento indutivo da TPC. Para resolver o ponto (2), define-se a «distribuição causal»:

$$D_n(Y;x_n) := R_n(Y;x_n) - A_n(Y;x_n) = R'_n(Y;x_n) - A'_n(Y;x_n) \quad , \tag{4.43}$$

que é conhecida uma vez que o são as distribuições subsidiárias [a segunda igualdade da

Eq. (4.43) decorre da Eq. (4.39)]. Logo, como A_n é avançada enquanto que R_n, retardada, a obtenção delas pode ser feita pelo método de divisão da distribuição causal, método cuja formulação geral foi desenvolvida por Łojasiewicz e Malgrange [104, 105, 106][5].

4.4 Teoremas de causalidade

Os seguintes teoremas fundamentam rigorosamente o uso da ideia apresentada na seção prévia. É assumido como hipótese indutiva que as distribuições de transição T_m, com $m \leq n-1$, são conhecidas, sendo o alvo do método determinar a distribuição T_n.

Teorema 4.1: *Seja $Y \subset \mathbb{M}$ um conjunto de $n_1 \leq n-1$ pontos, e sejam $P, Q \subseteq Y$ dois subconjuntos disjuntos de Y: $P \cap Q = \emptyset$, com $P \neq \emptyset$, $|Q| = n_2$, tais que $P \cup Q = Y$. Seja $x \notin Y$.*

(i) *Se $P < Q \cup \{x\}$, então:*

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = -T_{n_2+1}(Q \cup \{x\})T_{n_1-n_2}(P) \quad . \tag{4.44}$$

(ii) *Se $P > Q \cup \{x\}$, então:*

$$A'_{n_1+1}(Y;x) = -T_{n_1-n_2}(P)T_{n_2+1}(Q \cup \{x\}) \quad . \tag{4.45}$$

Prova: Apresentaremos aqui a prova de (i), então assumindo que se satisfaz: $P < Q \cup \{x\}$; a prova do ponto (ii) segue com modificações óbvias. Por definição [vide a Eq. (4.41)]:

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} T_{n_1+1-m}\left(X' \cup \{x\}\right) \widetilde{T}_m(X) \quad . \tag{4.46}$$

Mas, por hipótese, as seguintes relações de ordem cronológica são satisfeitas:

$$X \cap P < X \cap Q \quad , \quad X' \cap P < (X' \cap Q) \cup \{x\} \quad .$$

Portanto, usando a causalidade –como expressa nas Eqs. (4.26) e (4.31)– na Eq. (4.46):

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} T\left((X' \cap Q) \cup \{x\}\right) T(X' \cap P)\widetilde{T}(X \cap P)\widetilde{T}(X \cap Q) \quad . \tag{4.47}$$

[5]Contudo, o nosso problema não é exatamente do tipo estudado por Łojasiewicz e Malgrange. Com efeito, estes autores estudaram o problema da divisão de distribuições com suportes «regularmente separáveis», com a definição seguinte: *Os conjuntos fechados A e B são regularmente separáveis pelo conjunto compacto Λ se: (1) $\Lambda = \emptyset$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, ou (2) $\exists C > 0, \rho > 0$: $\forall x \in A$: $d(x;B) \geq C d(x;\Lambda)^\rho$.* Segundo essa definição, o suporte da distribuição avançada e o da retardada, na dinâmica da frente de luz, não são regularmente separáveis –como o são, sim, na dinâmica instantânea–, uma vez que eles são separados pela reta do eixo x^-, que não é um conjunto compacto; este é o único motivo pelo qual a definição dada não se aplica, pois todos os outros requerimentos são satisfeitos. Veremos, porém, que isto não impede fazer a divisão da distribuição causal e implementar o procedimento indutivo da TPC, embora será formalmente necessário, para tal fim, restringir o suporte da distribuição causal de forma a fazê-lo compacto na variável x^-; isto o veremos na Seç. 4.5.

Isto pode também ser escrito em função de partições dos conjuntos P e Q, como:

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = \sum_{\substack{K\cup K'=Q,\ K\cap K'=\emptyset \\ J\cup J'=P,\ J\cap J'=\emptyset \\ J\cup K\neq\emptyset}} T(K'\cup\{x\})T(J')\widetilde{T}(J)\widetilde{T}(K) \quad . \tag{4.48}$$

Nos adendos em que $K \neq \emptyset$, J poderá ser o conjunto vazío e a Eq. (4.19) é aplicável, levando a que esses adendos tenham uma contribuição nula a $R'_{n_1+1}(Y;x)$. Por isto, é suficiente manter, na Eq. (4.48), aqueles adendos com $K = \emptyset, J \neq \emptyset$, e em consequência $K' = Q$. Desta forma, usando a Eq. (4.17):

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = T(Q\cup\{x\}) \sum_{\substack{J\cup J'=P \\ J\cap J'=\emptyset \\ J\neq\emptyset}} T(J')\widetilde{T}(J) \quad . \tag{4.49}$$

Mas a Eq. (4.19) implica também que:

$$\sum_{\substack{J\cup J'=P \\ J\cap J'=\emptyset \\ J\neq\emptyset}} T(J')\widetilde{T}(J) = \sum_{\substack{J\cup J'=P \\ J\cap J'=\emptyset}} T(J')\widetilde{T}(J) - T(P)\widetilde{T}(\emptyset) = -T(P) \quad . \tag{4.50}$$

A substituição da Eq. (4.50) na (4.49) tem como resultado a Eq. (4.44). ■

Para estabelecer os seguintes resultados, recordamos as definições de $V^{\pm}(x)$ dadas na Eq. (4.4). Definimos também os conjuntos:

$$\widetilde{V}^{+}(x) := \left\{ y\in\mathbb{M} \;\middle|\; (y-x)^2 \geq 0 \ \wedge\ y^+ \geq x^+ \right\} \quad , \tag{4.51}$$

$$\widetilde{V}^{-}(x) := \left\{ y\in\mathbb{M} \;\middle|\; (y-x)^2 \geq 0 \ \wedge\ y^+ \leq x^+ \right\} \quad . \tag{4.52}$$

É claro que os conjuntos $\widetilde{V}^{\pm}(x)$ não são iguais às fechaduras $\overline{V^{\pm}}(x)$ de $V^{\pm}(x)$, mas que relacionam-se com eles da forma seguinte:

$$\widetilde{V}^{\pm}(x) = \overline{V^{\pm}}(x) \cup \left\{ x + \mathbb{R}e^{-} \right\} \quad . \tag{4.53}$$

Isto é, $\widetilde{V}^{\pm}(x)$ é a união da fechadura $\overline{V^{\pm}}(x)$ com a região instantânea e causalmente conectada que é o eixo $x^- = \{x + \mathbb{R}e^-\}$ –na dinâmica instantânea esses dois conjuntos são iguais, pois a região instantânea e causalmente conectada contém somente à origem $x = 0$, já contida na fechadura $\overline{V^{\pm}}(x)$–. Finalmente, definimos os conjuntos de n pontos:

$$\begin{aligned} \Gamma^{+}_{n} := \Big\{ (x_1;\cdots;x_n)\in\mathbb{M}^n \;\Big|\; & \forall j = 1,\cdots,n-1 : \\ & x^+_j \geq x^+_n \ \wedge\ \Big(\exists x_k \in \overline{V^{+}}(x_n)(k\neq j) : x_j \in \widetilde{V}^{+}(x_k)\Big)\Big\} \end{aligned} \quad . \tag{4.54}$$

Esse é conjunto de n pontos, cada um dos quais se encontra, quer em $\widetilde{V}^{+}(x_n)$, quer no

eixo x^- correspondente a um outro ponto em $\overline{V^+}(x_n)$ que também pertence a Γ_n^+. Uma formulação equivalente é:

$$\Gamma_n^+ = \Big\{(x_1;\cdots;x_n)\in\mathbb{M}^n \,\Big|\, \forall j=1,\cdots,n-1: \\ x_j\in\widetilde{V}^+(x_n)\ \vee\ \Big(\exists x_k\in\widetilde{V}^+(x_n)(k\neq j): x_j\in\{x_k+\mathbb{R}e^-\}\Big)\Big\}\quad .$$

Analogamente definimos:

$$\Gamma_n^- := \Big\{(x_1;\cdots;x_n)\in\mathbb{M}^n \,\Big|\, \forall j=1,\cdots,n-1: \\ x_j^+\leq x_n^+\ \wedge\ \Big(\exists x_k\in\overline{V^-}(x_n)(k\neq j): x_j\in\widetilde{V}^-(x_k)\Big)\Big\}\quad . \tag{4.55}$$

O seguinte teorema garante que a distribuição R é, efetivamente, retardada, e a A, avançada.

Teorema 4.2: *Seja $Y\subset\mathbb{M}$ um conjunto de n_1 pontos. Se $n_1\leq n-2$, então:*

$$\mathrm{supp}\,(R_{n_1+1})\subseteq\Gamma^+_{n_1+1}\quad ,\quad \mathrm{supp}\,(A_{n_1+1})\subseteq\Gamma^-_{n_1+1}\quad . \tag{4.56}$$

Prova: Apresentaremos, como no Teorema 4.1, a prova concernente à distribuição retardada, pois a prova para a avançada segue com modificações evidentes. Dividiremos a prova em três partes, atendendo às regiões em que os pontos de Y podem encontrar-se em relação ao ponto $x\equiv x_n$ de tal forma que $(Y;x)\notin\Gamma^+_{n_1+1}$, mostrando então que $R_{n_1+1}(Y;x)=0$.

(I) Suponhamos que haja em Y pelo menos um ponto no passado de x. Y pode então ser particionado como $Y=P\cup Q$, com $P\cap Q=\emptyset$, $P<Q\cup\{x\}$ e $P\neq\emptyset$. Pelo Teorema 4.1:

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = -T_{n_2+1}(Q\cup\{x\})T_{n_1-n_2}(P)\quad . \tag{4.57}$$

Também, aplicando a condição de causalidade da Eq. (4.26) à distribuição T_{n_1+1} –note-se que é nesse ponto que precisamos que seja $n_1\leq n-2$, pois não pode usar-se a causalidade sobre T_n, a qual deve ser uma consequência do procedimento indutivo–:

$$T_{n_1+1}(Y\cup\{x\}) = T_{n_2+1}(Q\cup\{x\})T_{n_1-n_2}(P)\quad . \tag{4.58}$$

Substituindo as Eqs. (4.57) e (4.58) na Eq. (4.39), isto é, na relação: $R_{n_1+1}=R'_{n_1+1}+T_{n_1+1}$, chega-se à conclusão de que: $R_{n_1+1}(Y;x)=0$. Ora, o suporte de $R_{n_1+1}(Y;x)$ somente pode conter pontos no futuro de x ou simultâneos com ele.

(II) Suponhamos agora que haja em Y ao menos um ponto espacialmente separado de x e em seu futuro. Executamos a seguinte partição de Y em quatro subconjuntos. Definimos:

$$P=\Big\{y\in Y\,\Big|\, y\sim x\ \wedge\ \forall y'\in Y\ ,\ y'\sim x\ :\ y^+\leq y'^+\Big\}\quad ,$$

que é o conjunto de pontos em Y, espacialmente separados de x, com o menor valor da coordenada temporal. O plano nulo em que se encontra P é completado com

$$O' = \left\{ y \in Y \;\middle|\; (y-x)^2 \geq 0 \;\wedge\; y \sim P \;\wedge\; \forall y' \in P \;:\; y^+ = y'^+ \right\} \quad ,$$

que é o conjunto de pontos em Y, causalmente conetados a x, simultâneos a P mas espacialmente separados dele –note-se que, como consideramos conjuntos $(Y;x) \notin \Gamma^+_{n_1+1}$, não pode haver pontos em Y simultâneos e causalmente conectados a P–. Os conjuntos de pontos em Y anteriores a P e posteriores a ele são, respectivamente:

$$\begin{aligned} O &= \left\{ y \in Y \;\middle|\; (y-x)^2 \geq 0 \;\wedge\; y < P \right\} \quad , \\ Q &= \left\{ y \in Y \;\middle|\; y > P \right\} \quad . \end{aligned}$$

Como estes quatro conjuntos esgotam todas as possibilidades, eles constituem uma partição de Y. Note-se, em particular, que, já que se está assumindo a existência de pelo menos um ponto espacialmente separado de x, necessáriamente ter-se-á que $P \neq \emptyset$. Com essas definições, as seguintes relações cronológicas são satisfeitas:

$$O \cup \{x\} < P < Q \;,\; O' \sim P \;,\; O' < Q \;,\; O < O' \;,\; O \cup \{x\} \sim P \;. \tag{4.59}$$

Elas são necessárias para poder aplicar o axioma da causalidade. Por definição:

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} T(X' \cup \{x\}) \widetilde{T}(X) \quad . \tag{4.60}$$

Usando as relações da Eq. (4.59), o axioma da causalidade implica que:

$$T(X' \cup \{x\}) = T(X' \cap Q) T(X' \cap P) T(X' \cap O') T((X' \cap O) \cup \{x\}) \quad , \tag{4.61}$$

e também:

$$\widetilde{T}(X) = \widetilde{T}(X \cap O) \widetilde{T}(X \cap O') \widetilde{T}(X \cap P) \widetilde{T}(X \cap Q) \quad . \tag{4.62}$$

Efetuando as comutações necessárias para ter $T(X' \cap P)$ à direita na expressão para $T(X' \cup \{x\})$ e $\widetilde{T}(X \cap P)$ à esquerda naquela para $\widetilde{T}(X)$, e substituindo na Eq. (4.60):

$$\begin{aligned} R'_{n_1+1}(Y;x) = \sum_{\substack{X \cup X' = Y \\ X \cap X' = \emptyset \\ X \neq \emptyset}} & T(X' \cap Q) T(X' \cap O') T((X' \cap O) \cup \{x\}) \\ & \times T(X' \cap P) \widetilde{T}(X \cap P) \widetilde{T}(X \cap O) \widetilde{T}(X \cap O') \widetilde{T}(X \cap Q) \quad . \end{aligned} \tag{4.63}$$

Para efeito de clareza na exposição, é conveniente reescrever a Eq. (4.63) em função de

partições dos conjuntos Q, O', O e P:

$$R'_{n_1+1}(Y;x) = \sum_{\substack{J\cup J'=Q,\ J\cap J'=\emptyset \\ K\cup K'=O',\ K\cap K'=\emptyset \\ E\cup E'=O,\ E\cap E'=\emptyset \\ F\cup F'=P',\ F\cap F'=\emptyset \\ F\cup E\cup K\cup J\neq\emptyset}} T(J')T(K')T(E'\cup\{x\})\left\{T(F')\widetilde{T}(F)\right\}\widetilde{T}(E)\widetilde{T}(K)\widetilde{T}(J)\,. \tag{4.64}$$

Essas partições são todas independentes, uma vez que todos os subconjuntos são disjuntos por definição. Assim sendo, a expressão entre chaves na Eq. (4.64) remete de volta à Eq. (4.19) e força a considerar somente aqueles termos nos quais, necessariamente, $F \neq \emptyset$, pois os termos em que seja possível adotar $F = \emptyset$ são nulos, como o indica a citada equação. Daí deve-se escrever $E = K = J = \emptyset$, ou seja: $E' = O$, $K' = O'$ e $J' = Q$. A Eq. (4.64) é assim igual a:

$$\begin{aligned} R'_{n_1+1}(Y;x) &= T(Q)T(O')T(O\cup\{x\}) \sum_{\substack{F\cup F'=P \\ F\cap F'=\emptyset \\ F\neq\emptyset}} T(F')\widetilde{T}(F) \\ &= -T(Q)T(O')T(O\cup\{x\})T(P) \\ &= -T(Q)T(O')T(P)T(O\cup\{x\}) \quad . \end{aligned} \tag{4.65}$$

Aqui, a passagem da primeira à segunda linha é feita em virtude da Eq. (4.19); para ir da segunda à terceira usa-se a comutatividade das distribuições de transição avaliadas em conjuntos de pontos espacialmente separados.

Por outro lado, do axioma da causalidade –vide a Eq. (4.59)–:

$$T_{n_1+1}(Y\cup\{x\}) = T(Q)T(O')T(P)T(O\cup\{x\}) \quad . \tag{4.66}$$

As Eqs. (4.65) e (4.66) implicam o resultado desejado:

$$R_{n_1+1}(Y;x) = R'_{n_1+1}(Y;x) + T_{n_1+1}(Y\cup\{x\}) = 0 \quad . \tag{4.67}$$

(III) A última possibilidade é aquela na qual Y contém pelo menos um ponto espacialmente separado de x e simultâneo com ele, constituindo tais pontos o conjunto P. Neste caso o argumento é semelhante àquele utilizado na parte (II), com $O = \emptyset$; também, $P \sim \{x\}$, de forma que a decomposição por causalidade continua a ser válida, e deve-se reter $O'\cup\{x\}$ da mesma forma em que outrora se tinha $O\cup\{x\}$.

Nas partes (I) a (III) tem-se considerado todos os casos em que $(Y;x)$ está fora de $\Gamma^+_{n_1+1}$. Conclui-se, portanto, que $\mathrm{supp}(R_{n_1+1}) \subseteq \Gamma^+_{n_1+1}$. ■

Note-se, em particular, que se a covariância de Lorentz fosse requerida, na prova do Teorema 4.2 somente a parte (I) seria necessária, pois qualquer ponto espacialmente separado

poderia ser colocado no passado de x por alguma transformação de Lorentz. E não só, mas também qualquer ponto no semi-eixo x^- negativo poderia ser colocado no passado de x e então removido do suporte da distribuição retardada. Essa é a base sobre a qual se assenta a normalização pela covariância de Lorentz, como será discutido na Sec. 4.7.

Do Teorema 4.2 decorre imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 4.2-1: *Se $n_1 \leq n-2$, então:*

$$\text{supp}\,(D_{n_1+1}) \subseteq \Gamma^+_{n_1+1} \cup \Gamma^-_{n_1+1} \quad . \tag{4.68}$$

Na base destes resultados pode já estabelecer-se o seguinte enunciado.

Teorema 4.3: *Se $n \geq 3$, então:*

$$\text{supp}\,(D_n) \subseteq \Gamma^+_n \cup \Gamma^-_n \quad . \tag{4.69}$$

Ainda mais, $D_n(X)$ pode ser não nula somente se $X \in \Gamma^+_n$ ou $X \in \Gamma^-_n$.

Prova: Como na prova do teorema anterior, para considerar todos os casos proceder-se-á por partes.

(I) Suponhamos que o conjunto $X = \{x_1; \cdots ; x_n\}$ pode ser particionado nos conjuntos disjuntos e não vazios P', S e Q' –três conjuntos não vazios implicam a existência de pelo menos três pontos; daí a condição $n \geq 3$ no enunciado do teorema– tais que S é simultâneo com o ponto x_n e $Q' < S < P'$. Sob essas condições, o Teorema 4.1 pode ser usado, com $n_1 = n-1$, donde:

$$R'_n(x_1; \cdots ; x_n) = -T(P' \cup S)T(Q') \quad , \quad A'_n(X) = -T(P')T(Q' \cup S) \quad . \tag{4.70}$$

Mas, como $P', Q' \neq \emptyset$, as distribuições de transição que aparecem na Eq. (4.70) são de menos de n pontos, e, portanto, satisfazem às condições de causalidade por hipótese. Assim, usando a Eq. (4.26):

$$R'_n(x_1; \cdots ; x_n) = -T(P')T(S)T(Q') = A'_n(x_1; \cdots ; x_n) \quad , \tag{4.71}$$

e a distribuição causal, sendo a diferença entre essas duas distribuições, se anula: $D_n(x_1; \cdots ; x_n) = R'_n(x_1; \cdots ; x_n) - A'_n(x_1; \cdots ; x_n) = 0$. Em outras palavras, a distribuição causal se anula se existem em X alguns pontos no passado de x_n e outros no futuro de x_n.

(II) Suponhamos agora que nenhum dos pontos contidos em X está no passado de x_n. Existem duas formas em que isto pode acontecer; nessa parte suporemos que X contém pontos espacialmente separados de x_n e no futuro dele –a outra possibilidade será examinada na parte (III)–. Então, como foi provado na parte (II) da prova do Teorema

4.2 –vide a Eq. (4.65)–:

$$R'_n(x_1;\cdots;x_n) = -T(Q)T(O')T(P)T(O\cup\{x_n\}) \quad . \tag{4.72}$$

Também, do Teorema 4.1 decorre que:

$$A'_n(x_1;\cdots;x_n) = -T(Q\cup P\cup O')T(O\cup\{x_n\}) \quad . \tag{4.73}$$

À vista disso, e usando o axioma da causalidade para escrever $T(Q\cup P\cup O') = T(Q)T(O')T(P)$ na distribuição subsidiária avançada, chega-se, novamente, a que $A'_n(X) = R'_n(X)$, e também no caso aqui considerado a distribuição causal é nula: $D_n(x_1;\cdots;x_n) = 0$.

(III) Nesta parte far-se-á a suposição de que X contém alguns pontos simultâneos com x_n, mas espacialmente separados dele. Como foi encontrado na parte (III) da prova do Teorema 4.2 [vide a Eq. (4.65) sob a igualdade $O = \emptyset$]:

$$R'_n(x_1;\cdots;x_n) = -T(Q)T(O')T(P)T(\{x_n\}) \quad . \tag{4.74}$$

Por outro lado, a definição da distribuição subsidiária avançada dada na Eq. (4.40) permite escrever:

$$A'_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{X_1\cup X_2 = X\setminus\{x_n\}\\ X_1\cap X_2=\emptyset\\ X_1\neq\emptyset}} \widetilde{T}(X_1)T(X_2\cup\{x_n\}) \quad . \tag{4.75}$$

Mais uma vez, o fato de ser $X_1 \neq \emptyset$ significa que as distribuições de transição que aqui aparecem são de menos de n pontos, e a condição de causalidade pode usar-se por hipótese. Fazendo-o:

$$\begin{aligned} A'_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{X_1\cup X_2 = X\setminus\{x_n\}\\ X_1\cap X_2=\emptyset\\ X_1\neq\emptyset}} & \widetilde{T}(X_1\cap O')\widetilde{T}(X_1\cap P)\widetilde{T}(X_1\cap Q)T(X_2\cap Q) \\ & \times T(X_2\cap P)T(X_2\cap O')T(\{x_n\}) \quad . \end{aligned} \tag{4.76}$$

Reescrevendo essa mesma equação em função de partições dos conjuntos O', P e Q:

$$A'_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{J\cup J'=O',\ J\cap J'=\emptyset\\ K\cup K'=P,\ K\cap K'=\emptyset\\ L\cup L'=Q,\ L\cap L'=\emptyset\\ J\cup K\cup L\neq\emptyset}} \widetilde{T}(J)\widetilde{T}(K)\left\{\widetilde{T}(L)T(L')\right\}T(K')T(J')T(\{x_n\}) \,. \tag{4.77}$$

A parte entre chaves na Eq. (4.77) leva à Eq. (4.20), da qual observa-se que os termos no somatório da Eq. (4.77) não nulos são aqueles em que $L \neq \emptyset$; isto é garantido se $K = J = \emptyset$, ou seja, se $K' = P$ e $L' = Q$. Comutando então $T(O')$ com $T(P)$, o que é

possível porque O' e P estão espacialmente separados, obtém-se o seguinte resultado:

$$A'_n(x_1;\cdots;x_n) = -T(Q)T(O')T(P)T(\{x_n\}) \quad . \tag{4.78}$$

Comparando as Eqs. (4.74) e (4.78) observa-se que também nesse caso se cumpre a igualdade: $R'_n(x_1;\cdots;x_n) = A'_n(x_1;\cdots;x_n)$, e a distribuição causal é nula.

Em suma, provamos que se o conjunto X não tem pontos no passado de x_n, então D_n pode ser não nula somente se $X \in \Gamma_n^+$. A prova para X contendo pontos no futuro de x_n é análoga, e tem por resultado que D_n pode ser não nula somente se $X \in \Gamma_n^-$. Isto prova o Teorema 4.3. ■

A importância do Teorema 4.3 não pode ser subestimada, pois é ele o que diz que a distribuição causal D_n pode ser dividida em sua parte retardada, R_n, e sua parte avançada, A_n, com $\mathrm{supp}(R_n) \subseteq \Gamma_n^+$ e $\mathrm{supp}(A_n) \subseteq \Gamma_n^-$, sempre que seja $n \geq 3$. Quando $n = 2$, no entanto, o suporte causal de $D_2(x_1;x_2)$ deve ser provado explicitamente, se bem que os argumentos apresentados na Seç. 4.3 já adiantam que sempre o será.

Finalmente, deve-se verificar que o procedimento proposto para a construção indutiva da distribuição de n pontos é consistente, ou seja, que a distribuição assim obtida mantém as virtudes requeridas pelo axioma da causalidade. Esse resultado está contido no seguinte enunciado.

Teorema 4.4: *Seja $D_n(x_1;\cdots;x_n)$ uma distribuição causal com suporte causal, então divisível em suas partes retardada, $R_n(x_1;\cdots;x_n)$, e avançada, $A_n(x_1;\cdots;x_n)$, com suportes em Γ_n^+ e Γ_n^-, respectivamente. A distribuição $T_n(x_1;\cdots;x_n)$ construída com ela pelo procedimento indutivo satisfaz às condições de causalidade, Eqs.* (4.26) *e* (4.29).

Prova: Em primeiro lugar, note-se que estabelecemos como hipótese do teorema que a distribuição $D_n(x_1;\cdots;x_n)$ tem suporte causal. Isto é asegurado pelo Teorema 4.3 para $n \geq 3$; está-se assumindo aqui, adicionalmente, que tal asseveração foi provada válida também para $n = 2$. A estratégia para a prova do Teorema 4.4 será usar os suportes das distribuições $R_n(x_1;\cdots;x_n)$ e $A_n(x_1;\cdots;x_n)$, assim como as seguintes expressões para a distribuição de transição $T_n(x_1;\cdots;x_n)$ –vide a Eq. (4.42)–:

$$\begin{aligned} T_n(x_1;\cdots;x_n) &= R_n(x_1;\cdots;x_n) - R'_n(x_1;\cdots;x_n) \\ &= A_n(x_1;\cdots;x_n) - A'_n(x_1;\cdots;x_n) \quad . \end{aligned} \tag{4.79}$$

Usar-se-á também algumas expressões para $R'_n(x_1;\cdots;x_n)$ e $A'_n(x_1;\cdots;x_n)$ encontradas nas provas dos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 nos diferentes casos analisados. Denotando por X o conjunto $\{x_1;\cdots;x_n\}$ de argumentos em consideração, mais uma vez proceder-se-á por partes:

(I) Seja que o conjunto X pode ser particionado segundo $X = P \cup Q$, com $P < Q$ e $x_n \in Q$. Nesse caso, $A_n(x_1;\cdots;x_n) = 0$, pois ele tem suporte avançado; daí que:

$T_n(x_1;\cdots;x_n) = -A'_n(x_1;\cdots;x_n)$. O Teorema 4.1 então implica a fatorização da distribuição de transição: $T_n(x_1;\cdots;x_n) = T(P)T(Q)$.

(II) Seja agora que $X = P \cup Q$, com $P > Q$ e $x_n \in Q$. Então $R_n(x_1;\cdots;x_n) = 0$, pois ela tem suporte retardado, e em consequência: $T_n(x_1;\cdots;x_n) = -R'_n(x_1;\cdots;x_n)$. Do Teorema 4.1 se segue que também neste caso a distribuição de transição é fatorizável: $T_n(x_1;\cdots;x_n) = T(Q)T(P)$.

(III) Suponhamos desta vez que $X = P \cup Q$, com $P \sim Q$ e $x_n \in Q$. Pelo Teorema 4.3: $D_n(x_1;\cdots;x_n) = 0$, então $R_n(x_1;\cdots;x_n) = 0$ e $T_n(x_1;\cdots;x_n) = -R'_n(x_1;\cdots;x_n)$. Usando primeiro a definição da distribuição subsidiária retardada, então a propriedade de causalidade das distribuições de transição de menos de n pontos:

$$\begin{aligned} R'_n(x_1;\cdots;x_n) &= \sum_{\substack{X_1\cup X_2 = X\setminus\{x_n\} \\ X_1\cap X_2 = \emptyset \\ X_1 \neq \emptyset}} T(X_2\cup\{x_n\})\widetilde{T}(X_1) \\ &= \sum_{\substack{X_1\cup X_2 = X\setminus\{x_n\} \\ X_1\cap X_2 = \emptyset \\ X_1 \neq \emptyset}} T(X_2\cap Q)\left\{T(X_2\cap P)\widetilde{T}(X_1\cap P)\right\}\widetilde{T}(X_2\cap P) \quad . \end{aligned} \tag{4.80}$$

Devido ao termo entre chaves, a única contribuição na soma anterior provém do termo em que $X_2 \cap P = \emptyset$, o que implica que $X_2 \cap Q = Q$, e, portanto:

$$R'_n(x_1;\cdots;x_n) = -T(Q)T(P) = -T(P)T(Q) \quad . \tag{4.81}$$

Na última igualdade usamos a Eq. (4.29) nas distribuições de transição de menos de n pontos $T(P)$ e $T(Q)$, o que é válido por hipótese . Assim: $T_n(x_1;\cdots;x_n) = T(P)T(Q) = T(Q)T(P)$.

(IV) Finalmente, consideremos o produto $T_n(x_1;\cdots;x_n)T_m(Y)$, com $X \sim Y$ e $m \leq n$. Os conjuntos X e Y podem ser particionados em qualquer um dos casos estudados [partes (I) a (III) da prova]; suponhamos que as partições são: $X = P \cup Q$ e $Y = P' \cup Q'$, tais que: $T_n(x_1;\cdots;x_n) = T(Q)T(P)$ e $T_m(Y) = T(Q')T(P')$. Como $X \sim Y$, as seguintes relações são válidas: $P \sim P', Q'$, $Q \sim P', Q'$. Portanto, usando a propriedade de causalidade nessas distribuições de menos de n pontos, obtém-se que:

$$\begin{aligned} T_n(x_1;\cdots;x_n)T_m(Y) &= T(Q)T(P)T(Q')T(P') \\ &= T(Q')T(P')T(Q)T(P) \\ &= T_m(Y)T_n(x_1;\cdots;x_n) \quad . \end{aligned} \tag{4.82}$$

Isto é, $T_n(x_1;\cdots;x_n)$ comuta com $T_m(Y)$ ($m \leq n$) para $X \sim Y$. Há, entretanto, um caso em que a prova geral recém dada não se aplica; este é aquele em que $x_1,\cdots,x_{n-1} \in \{x_n + \mathbb{R}e^-\}$, pois então a decomposição causal não é possível. Nessas circunstâncias é necessário incluir mais formalismo: A comutatividade para conjuntos espacialmente

separados rege como consequência da expansão das distribuições de transição em produtos de Wick –vide a Eq. (4.84)– e devido à comutatividade dos produtos destes para pontos espacialmente separados. Isto é, em parte, originado no fato de que as distribuições de transição são construídas com os operadores de campo quantizado, o que se deduz da condição de causalidade –vide a discussão após a Eq. (4.29)–.

Pelos motivos assim expostos, conclui-se que a distribuição $T_n(x_1;\cdots;x_n)$ construída pelo método indutivo satisfaz a todas as condições requeridas para ser chamada causal. ■

Note-se que na prova do Teorema 4.4 escrevemos a distribuição de n pontos como $T_n(x_1;\cdots;x_n)$, e não como $T_n(X)$. Isto é assim porque o procedimento indutivo não garante que a distribuição de transição construída seja simétrica em seus argumentos. Não obstante, isto não representa problema algum, pois seja qual for a propriedade de simetria da distribuição obtida, uma vez que ela é colocada na expressão da série perturbativa do operador de espalhamento, Eq. (4.11), somente sua parte simétrica contribuirá para tal. É assim que, se denotarmos por $T'_n(x_1;\cdots;x_n)$ a distribuição obtida pelo método indutivo, sempre poderemos definir sua correspondente parte simétrica como a desejada distribuição de n pontos:

$$T_n(X) := S_n^+ T'_n(x_1;\cdots;x_n) = \frac{1}{n!}\sum_\pi T'_n(x_{\pi(1)};\cdots;x_{\pi(n)}) \quad . \tag{4.83}$$

É essa distribuição simetrizada a que deve ser usada na construção dos seguintes termos perturbativos.

Os teoremas apresentados estabelecem a possibilidade real da construção indutiva do operador de espalhamento $S(g)$, se for possível efetuar a divisão da distribuição causal em sua parte retardada e sua parte avançada. Na seção que segue passaremos a fixar a consideração no desenvolvimento prático desse ponto crucial. Finalmente, pode-se ver que nenhuma transformação de Lorentz foi realizada nas provas dos teoremas de causalidade; isto constitui, por si mesmo, uma prova explícita de que a invariância de Lorentz não é necessária na construção da TPC, e que poderá, portanto, ser usada *a posteriori* como uma condição adicional para a fixação das distribuições de transição na região instantânea –vide o comentário que segue à Eq. (4.29)–.

4.5 Divisão da distribuição causal no espaço real

Suponhamos que a distribuição causal da ordem n, $D_n(x_1;\cdots;x_n)$, já tenha sido construída como parte do procedimento indutivo, e que o suporte dela é causal. Em geral, ela terá a forma:

$$D_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_k d_n^k(x_1;\cdots;x_n) \;:C_k(u^A):\quad , \tag{4.84}$$

com $d_n^k(x_1;\cdots;x_n)$ uma distribuição numérica e $:C_k(u^A):$ um monômio de Wick dos operadores de campo quantizado u^A, livres, presentes na teoria. Tal expansão em produtos de Wick é explicada na Seç. 4 da Ref. [103] –vide também a Seç. 1.9 da Ref. [118]–, e é baseada

no teorema de Wick em conjunto com o procedimento indutivo causal. Seja k um quadri-índice [6]; uma função com contradomínio no conjunto dos números inteiros, $r : k \to r(k)$ com $r(k) \geq 0$ para todo k e $r(k) = 0$ para k suficientemente grande é chamada um «super-quadri-índice» [103]. Então denotamos:

$$:u(x)^r: = :\prod_k \Big(D^k u(x)\Big)^{r(k)}: \quad . \tag{4.85}$$

O primeiro termo, $T_1(x)$, cujo conhecimento é hipótese do procedimento[7], é «definido» como uma expansão em produtos de Wick da forma:

$$F^0(x) = \sum_{\substack{r \\ |r|\leq M}} c_r \ :u(x)^r: \quad , \quad F^r(x) = \sum_{\substack{s \\ s\geq r \\ |s|\leq M}} :\frac{s!}{(s-r)!} c_s u(x)^{s-r}: \quad . \tag{4.86}$$

O teorema de Wick então implica a seguinte fórmula para os produtos gerais desses termos:

$$F^{r_1}(x_1)\cdots F^{r_n}(x_n) = \sum_{s_1,\cdots,s_n} \left\langle \Omega; F^{r_1+s_1}(x_1)\cdots F^{r_n+s_n}(x_n)\Omega \right\rangle \frac{:u(x_1)^{s_1}\cdots u(x_n)^{s_n}:}{s_1!\cdots s_n!} \quad . \tag{4.87}$$

Como o procedimento indutivo causal baseia-se em produtos da distribuição T_1, as distribuições subsidiárias R' e A' manterão a mesma forma da Eq. (4.87), o mesmo que a distribuição causal. Por outro lado, os operadores de campo não restringem o suporte da distribuição completa –eles são definidos no espaço-tempo de Minkowski completo–, donde é suficiente considerar a divisão da distribuição numérica d_n^k, cujo suporte é assim causal por hipótese –pois ela é o valor esperado no vácuo da distribuição causal–. Portanto, a distribuição avançada e também a retardada manterão a estrutura dos operadores de campo quantizado da distribuição causal:

$$A_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_k a_n^k(x_1;\cdots;x_n) \ :C_k(u^A): \quad , \tag{4.88}$$

$$R_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_k r_n^k(x_1;\cdots;x_n) \ :C_k(u^A): \quad , \tag{4.89}$$

com a_n^k e r_n^k as partes avançada e retardada, respectivamente, da distribuição numérica d_n^k:

$$d_n^k(x_1;\cdots;x_n) = r_n^k(x_1;\cdots;x_n) - a_n^k(x_1;\cdots;x_n) \quad ; \tag{4.90}$$

[6] Os multi-índices de Schwartz são definidos, por exemplo, na Ref. [159]: Um multi-índice $k \in \mathbb{R}^N$ é uma sequência de números inteiros não-negativos, $k = (k_1;\cdots;k_N)$, $k_j \geq 0$, sobre as quais regem as seguintes notações:

$$|k| \equiv \sum_{j=1}^N k_j \quad , \quad x^k \equiv \prod_{j=1}^N x_j^{k_j} \quad , \quad k! \equiv \prod_{j=1}^N k_j! \quad , \quad D^k f(x) \equiv \prod_{j=1}^N \partial_{x_j}^{k_j} f(x) \quad .$$

[7] Ele deve ser construído fenomenologicamente da mesma forma que o é a densidade lagrangiana da teoria convencional: Pela imposição das simetrias da teoria; porém, devemos nos restringir nela aos termos lineares na constante de acoplamento só. Por exemplo, a construção baseada na invariância de gauge quântica abordar-se-á no Cap. 6.

$$\mathrm{supp}(r_n^k) \subseteq \Gamma_n^+ \quad , \quad \mathrm{supp}(a_n^k) \subseteq \Gamma_n^- \quad . \tag{4.91}$$

Ou bem, usando a invariância sob translações, definimos a distribuição numérica $d \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{4n-4})$ como:

$$d(x) := d_n^k(x_1 - x_n; \cdots; x_{n-1} - x_n; 0) \quad ; \quad \mathrm{supp}(d) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0) \cup \Gamma_{n-1}^-(0) \quad , \tag{4.92}$$

a qual será dividida segundo:

$$d = r - a \quad ; \quad \mathrm{supp}(r) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0) \quad , \quad \mathrm{supp}(a) \subseteq \Gamma_{n-1}^-(0) \quad . \tag{4.93}$$

Estamos denotando aqui, e o faremos doravante:

$$\Gamma_n^+(0) := \Big\{ (x_1; \cdots; x_n) \in \mathbb{M}^n \;\Big|\; \forall j = 1, \cdots, n : \\ x_j^+ \geq 0 \;\wedge\; \Big(\exists x_k \in \overline{V^+}(0)(k \neq j) : x_j \in \widetilde{V}^+(x_k) \Big) \Big\} \quad ,$$

e analogamente para $\Gamma_n^-(0)$. Na Eq. (4.92) escrevemos $d(x)$; x significa: $(x_1 - x_n; \cdots; x_{n-1} - x_n)$, em que está em uso a notação de Schwartz dos multi-índices. Usaremos também a notação: $x^a \equiv (x_1^a - x_n^a; \cdots; x_{n-1}^a - x_n^a)$.

Passemos a considerar o problema da divisão da distribuição $d(x)$. Devido aos suportes das distribuições procuradas, uma primeira proposta para efetuar a divisão de d seria tomar o produto dela com a função de Heaviside; por exemplo, para obter a distribuição retardada:

$$r(x) = \chi(x) d(x) \,, \quad \text{com} \quad \chi(x) := \prod_{j=1}^{n-1} \Theta\left(x_j^+ - x_n^+\right) \equiv \Theta(x^+) \quad . \tag{4.94}$$

Duas observações a respeito dessa proposta: (1) Ela pode garantir a igualdade de $r(x)$ e $d(x)$ somente para $x^+ > 0$, mas os valores que r adota no eixo x^- não são especificados; (2) a função $\chi(x)$, como definida na Eq. (4.94), é descontínua em $x^+ = 0$, motivo esse pelo qual, por regra geral, a distribuição $r(x)$ obtida da maneira proposta não seria uma distribuição bem definida. Em ambos os casos (1) e (2), vê-se, as dificuldades surgem no eixo x^-, que é a intersecção entre a superfície de descontinuidade de $\chi(x)$ e $\mathrm{supp}(d)$. Logo, o comportamento da distribuição $d(x)$ na vizinhança do eixo x^- é essencial para o procedimento de divisão. Tal comportamento será estudado à luz da seguinte definição, que é um caso particular da «quase-assíntota por variável selecionada» de Vladimirov, Drozzinov e Zavialov [109]:

Definição: *Seja $d \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ uma distribuição, e seja ρ uma função contínua definida positiva. Se o limite*

$$\lim_{s \to 0^+} \rho(s) s^{3m/4} d\left(sx^+; sx^\perp; x^-\right) = d_-(x) \tag{4.95}$$

existe em $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ e é não nulo, então a distribuição d_- é chamada a quase-assíntota de d no eixo x^-, em relação à função ρ.

É claro, o limite na Eq. (4.95) deve ser entendido no sentido distribucional. Com essa definição, a função $\rho(s)$, pode ser provado, é uma «função regularmente variável na origem», também chamada «função de auto-modelo» (*auto-model function*) [109, 107], o que significa que para todo $a > 0$:

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\rho(as)}{\rho(s)} = a^{\alpha} \quad , \tag{4.96}$$

para algum número $\alpha \in \mathbb{R}$, chamado «ordem de auto-modelamento» da função ρ. Em particular, é possível usar $\rho(s) = s^{\alpha}\rho_0(s)$, com ρ_0 uma função lentamente variável em zero –ou seja, que tem ordem de auto-modelamento nula–, na definição de quase-assíntota, então o auto-modelamento de ρ serve como um parâmetro característico da distribuição. Comumente, ademais, será possível usar simplesmente a função de auto-modelo $\rho(s) = s^{\omega_-}$. Isto posto, sob as mesmas hipóteses da definição anterior:

Definição: *Se a quase-assíntota da distribuição $d \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ no eixo x^- é obtida com a função $\rho(s) = s^{\omega_-}\rho_0(s)$, então o número ω_- é a ordem singular da distribuição d no eixo x^-.*

Salientamos que o valor da ordem singular $\omega_-[d]$ de uma determinada distribuição causal d é tal que a quase-assíntota $d_-(x)$ é não nula «como distribuição», quer dizer:

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \;:\; \lim_{s\to 0^+} \left\langle s^{\omega_-} s^{3m/4} d\left(sx^+; sx^{\perp}; x^-\right); \varphi(x)\right\rangle = \langle d_-; \varphi\rangle \quad . \tag{4.97}$$

Desta sorte, a ordem singular $\omega_-[d]$ é um número único caracterizando o comportamento da distribuição causal nas proximidades do eixo x^-. Neste sentido, a ordem singular no eixo x^- é independente da coordenada x^-.

Atendendo às dificuldades apontadas, uma nova proposta, mais cuidadosa, para efetuar a divisão da distribuição numérica $d(x)$, é a seguinte:

(i) Devido ao Teorema 4.3, $d(x)$ é não nulo somente se os pontos de x estão quer todos em $\Gamma^+_{n-1}(0)$, quer todos em $\Gamma^-_{n-1}(0)$. Consideremos, portanto, a $(n-1)$-upla de vetores tipo-luz: $v := (e^+; \cdots; e^+)$ e definamos o plano $v \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{M}^{n-1}$. Explicitamente, a equação do plano é:

$$v \cdot x = (x_1^+ - x_n^+) + \cdots + (x_{n-1}^+ - x_n^+) = 0 \quad . \tag{4.98}$$

Como $v \cdot x > 0$ para x tais que $x_j - x_n \in V^+(0)$, enquanto que $v \cdot x < 0$ para x tais que $x_j - x_n \in V^-(0)$, o plano recém definido pode ser usado para dividir a distribuição causal em suas partes avançada e retardada, deixando sem especificar seus valores no eixo x^-[8].

(ii) O produto $v \cdot x$ definido na parte (i) usar-se-á como argumento de uma função contínua

[8] A respeito disto, na dinâmica instantânea o plano pode ser qualquer plano tipo-espaço. Aqui tal ambigüidade não é possível: O plano deve ser o definido na Eq. (4.98); um outro plano, cuja interseção com o cone de luz não fosse o eixo x^-, não respeitaria o fato de que, na dinâmica da frente de luz, as distribuições retardada e avançada estão definidas em relação à coordenada x^+, e por isso podem assumir valores também no eixo x^-.

e monótona não-decrescente tal que:

$$\chi(t) := \begin{cases} 0 & ; \quad t \leq 0 \\ < 1 & ; \quad 0 < t < 1 \\ 1 & ; \quad t \geq 1 \end{cases} \quad . \tag{4.99}$$

Essa função substituirá à função descontínua de Heaviside, permitindo que as distribuições obtidas por multiplicação com ela estejam bem definidas.

(iii) Introduzimos uma função $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{m/4}\right)$ tal que $\forall x^- \in \mathbb{R}^{m/4} : \mathfrak{b}(x^-) \in [0;1]$, e definimos a distribuição causal auxiliar com suporte compacto na variável x^-:

$$d_{\mathfrak{b}}(x) := d(x)\mathfrak{b}(x^-) \quad . \tag{4.100}$$

Claramente, a distribuição causal original (real) se corresponde com a auxiliar no limite em que $\mathfrak{b} \to 1$.

(iv) A distribuição auxiliar retardada e a avançada, respectivamente, são definidas pelos limites:

$$r_{\mathfrak{b}}(x) := \lim_{s \to 0^+} \chi\left(\frac{v \cdot x}{s}\right) d_{\mathfrak{b}}(x) \quad , \quad a_{\mathfrak{b}}(x) := -\lim_{s \to 0^+} \chi\left(-\frac{v \cdot x}{s}\right) d_{\mathfrak{b}}(x) \quad . \tag{4.101}$$

Com essas definições, os suportes das distribuições $r_{\mathfrak{b}}$ e $a_{\mathfrak{b}}$ são consequência do suporte de χ [vide a Eq. (4.99)] e do Teorema 4.3.

(v) A distribuição retardada e a avançada são respectivamente definidas pelos limites:

$$r(x) := \lim_{\mathfrak{b} \to 1} r_{\mathfrak{b}}(x) \quad , \quad a(x) := \lim_{\mathfrak{b} \to 1} a_{\mathfrak{b}}(x) \quad . \tag{4.102}$$

Incontestável que as definições dadas na Eq. (4.101) somente podem ser consideradas satisfatórias se tais limites de fato existem. Para examinar a mesma usar-se-á a condição de Cauchy para a convergência de uma família de distribuições, que pode ser consultada, por exemplo, nas Refs. [159, 174]: *A família de distribuições* $\{f_\lambda\} \subset \mathscr{S}'$ *é convergente no limite* $\lambda \to 0$ *se e somente se:*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S} \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |\lambda_1|, |\lambda_2| < \delta \ \Rightarrow \ |(f_{\lambda_1}; \varphi) - (f_{\lambda_2}; \varphi)| < \varepsilon \quad . \tag{4.103}$$

Consideremos um dado número pequeno ε; podemos fixar $\lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon)$ e escolher $\lambda_1 = \lambda_2/k$ para algum número $k > 0$ arbitrário mas fixo. Ainda mais, é possível restringir a análise ao caso de $k \geq 1$, pois se $0 < k < 1$ bem poder-se-ia fixar λ_1 e escrever $\lambda_2 = \lambda_1/k$ com $k > 1$. A condição de Cauchy pode então ser escrita como:

$$\forall \varphi \in \mathscr{S} \ : \ \forall k \geq 1 \ : \ \forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta > 0 \ : \quad \lambda \in \,]-\delta; \delta[\ \Rightarrow \ |(f_{\lambda/k} - f_\lambda; \varphi)| < \varepsilon \quad . \tag{4.104}$$

Ou seja, a convergência da família de distribuições está garantida se se satisfaz ao seguinte

limite:

$$\forall k \geq 1 \ : \quad \lim_{\lambda \to 0} \left(f_{\lambda/k} - f_{\lambda} \right) = 0 \quad . \tag{4.105}$$

Aplicando esse critério aos limites de nosso interesse [Eq. (4.101)], o que devemos examinar é a validade do enunciado:

$$\forall k \geq 1 \ : \quad \lim_{s \to 0^{+}} \psi \left(\frac{v \cdot x}{s} \right) d_{\mathfrak{b}}(x) = 0 \quad ; \quad \psi(t) := \chi(kt) - \chi(t) \quad , \tag{4.106}$$

no sentido distribucional. Por sua definição, a função ψ é suave e tem suporte compacto na variável x^{+}. Consideremos agora uma função $\psi_1 \in C^{+\infty}(\mathbb{R}^m)$ tal que é igual a 1 numa vizinhança de $\Gamma^{+}_{n-1}(0) \cup \Gamma^{-}_{n-1}(0)$, e igual a 0 fora dela. Pelas propriedades geométricas de $\Gamma^{+}_{n-1}(0) \cup \Gamma^{-}_{n-1}(0)$, e como $\mathfrak{b} \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{m/4}\right)$, o produto $\psi\psi_1\mathfrak{b}$ terá suporte compacto, e pertencerá então ao espaço $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, isto é, será uma função de teste num sub-espaço denso de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ –este é o motivo fundamental pelo qual é imprescindível incluir a função $\mathfrak{b}$–. Seja $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ uma função de teste; tem-se que:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi \left(\frac{v \cdot x}{s} \right) d_{\mathfrak{b}}(x); \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle \psi \left(\frac{v \cdot x}{s} \right) d_{\mathfrak{b}}(x); \psi_1 \left(\frac{x}{s} \right) \varphi(x) \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi(x) d(x); \psi \left(\frac{v \cdot x}{s} \right) \psi_1 \left(\frac{x}{s} \right) \mathfrak{b}(x^{-}) \right\rangle \\
&= s^{3m/4} \left\langle \varphi \left(sx^{+}; sx^{\perp}; x^{-} \right) d \left(sx^{+}; sx^{\perp}; x^{-} \right); \psi(v \cdot x) \psi_1(x) \mathfrak{b}(x^{-}) \right\rangle \quad .
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Assumir-se-á agora que a distribuição causal d tem quase-assíntota d_{-} no eixo x^{-}, de forma que o seguinte limite existe –vide a Eq. (4.95)–:

$$\lim_{s \to 0^{+}} s^{\omega_{-}} s^{3m/4} \varphi \left(sx^{+}; sx^{\perp}; x^{-} \right) d \left(sx^{+}; sx^{\perp}; x^{-} \right) = \varphi_{-}(x^{-}) d_{-}(x) \quad , \tag{4.108}$$

com $\varphi_{-}(x^{-}) := \varphi(0; 0^{\perp}; x^{-})$. Sendo dessa maneira, pode-se reformular a condição de existência dos limites da Eq. (4.101) como –vide as Eqs. (4.106), (4.107) e (4.108)–:

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \ : \quad \lim_{s \to 0^{+}} \left\langle \psi \left(\frac{v \cdot x}{s} \right) d_{\mathfrak{b}}(x); \varphi(x) \right\rangle = \lim_{s \to 0^{+}} \frac{\langle \varphi_{-} d_{-}; \psi\psi_1\mathfrak{b} \rangle}{s^{\omega_{-}}} = 0 \quad . \tag{4.109}$$

Então se observa com claridade que essa condição é sempre satisfeita quando $\omega_{-} < 0$, mas que poderia não sê-lo quando $\omega_{-} \geq 0$; logo, é mister estudar essas duas possibilidades separadamente.

Antes de passar aos ditos casos, desejamos reforçar a necessidade de introduzir a função $\mathfrak{b}$, que fica clara ao considerarmos a Eq. (4.109). Como mostrado na Fig. 4.1, se a função $\mathfrak{b}$ não tivesse sido introduzida, então o segundo argumento do «produto interno» que aparece na mencionada equação não seria uma função de teste, pois não se anularia no infinito. Quando a função auxiliar é introduzida, em câmbio, o suporte do segundo argumento torna-se compacto e a expressão é bem definida; isto corresponde à segunda imagem na Fig. 4.1. Por comparação, mostramos, na terceira imagem, o caso da dinâmica instantânea, em que as características geométricas do cone de luz fazem com que o produto $\psi_1\psi$ já tenha

suporte compacto e nenhuma função auxiliar seja requerida. Finalmente, a função $\mathfrak{b}$ não leva a mudança alguma caso se considere apenas funções de teste com suporte compacto na variável x^-: Efetivamente, se restringirmos a classe de funções de teste àquelas com suporte em determinado intervalo I finito na variável x^-, sempre podemos escrevê-la como $\varphi = \varphi\mathfrak{b}$, com $\mathfrak{b} = 1$ numa vizinhança de I e $\mathfrak{b} = 0$ fora dela. Há modificação, sem embargo, quando não restringimos a classe de funções de teste permitidas, modificação essa que é removida no final ao tomar o limite $\mathfrak{b} \to 1$. Consideramos esta segunda opção porque desejaremos utilizar a transformação de Fourier posteriormente, cujo tratamento é simples ao se utilizar o espaço de Schwartz completo.

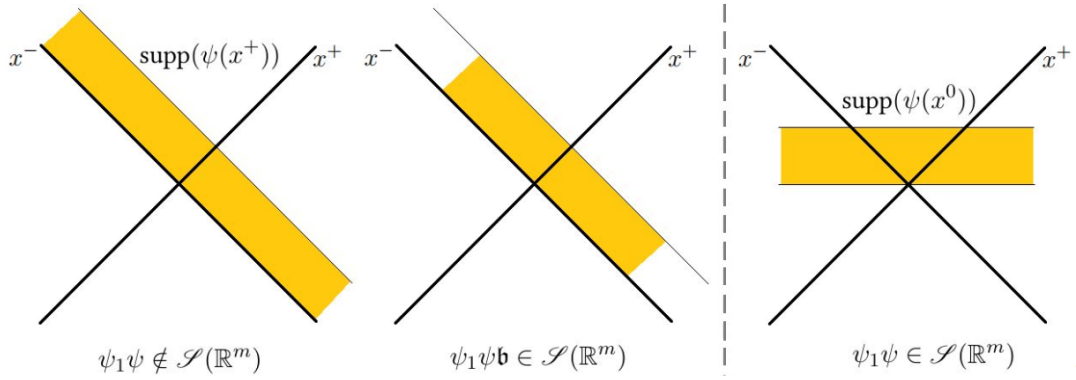

Figura 4.1: Necessidade da função $\mathfrak{b}$ na dinâmica do plano nulo.

4.5.1 Distribuição causal com ordem singular negativa

Como vimos na Eq. (4.109), neste caso a divisão é «trivial», pois os limites da Eq. (4.101) existem, então dita definição é admissível:

$$r_{\mathfrak{b}}(x) = \lim_{s\to 0} \chi\left(\frac{v\cdot x}{s}\right) d_{\mathfrak{b}}(x) \equiv \Theta\left(v\cdot x\right) d_{\mathfrak{b}}(x) \quad ; \tag{4.110}$$

$$a_{\mathfrak{b}}(x) = -\lim_{s\to 0} \chi\left(-\frac{v\cdot x}{s}\right) d_{\mathfrak{b}}(x) \equiv -\Theta\left(-v\cdot x\right) d_{\mathfrak{b}}(x) = \left(\Theta\left(v\cdot x\right) - 1\right) d_{\mathfrak{b}}(x) \quad . \tag{4.111}$$

Portanto, a aplicação dessas distribuições à função de teste $\varphi \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$ tem resultado:

$$\langle r_{\mathfrak{b}}; \varphi\rangle = \langle \Theta d_{\mathfrak{b}}; \varphi\rangle = \langle d_{\mathfrak{b}}; \Theta\varphi\rangle \quad ; \quad \langle a_{\mathfrak{b}}; \varphi\rangle = \langle (\Theta - 1) d_{\mathfrak{b}}; \varphi\rangle = \langle d_{\mathfrak{b}}; (\Theta - 1)\varphi\rangle \quad . \tag{4.112}$$

4.5.2 Distribuição causal com ordem singular não-negativa

No caso de ser $\omega_- \geq 0$, o limite da Eq. (4.109) em geral não existe, então em princípio a definição dada na Eq. (4.101) não é apropriada para tratar com esse tipo de distribuições causais. Entretanto, ele existe, sim, sob determinadas condições impostas à função de teste $\varphi \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$: Suponhamos que ela é do tipo $\varphi(x) = \left(x^+\right)^{b_1} \left(x^\perp\right)^{b_2} \widetilde{\varphi}(x)$, com $\widetilde{\varphi}(x) \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^m\right)$

e $b_1 + b_2 = |b|$:

$$\left\langle \psi\left(\frac{v\cdot x}{s}\right) d_{\mathfrak{b}}(x); \left(x^{+}\right)^{b_1}\left(x^{\perp}\right)^{b_2}\widetilde{\varphi}(x)\right\rangle$$
$$= s^{3m/4+|b|}\left\langle \widetilde{\varphi}\left(sx^{+}; sx^{\perp}; x^{-}\right) d\left(sx^{+}; sx^{\perp}; x^{-}\right); \left(x^{+}\right)^{b_1}\left(x^{\perp}\right)^{b_2}\psi\left(v\cdot x\right)\psi_1(x)\mathfrak{b}(x^{-})\right\rangle \quad . \tag{4.113}$$

Sob a condição de existência da quase-assíntota da distribuição causal no eixo x^{-} –vide a Eq. (4.108)–, quando $s \to 0^{+}$ a Eq. (4.113) se comporta como:

$$s^{3m/4+|b|}\frac{\left\langle \widetilde{\varphi}_{-} d_{-}; \left(x^{+}\right)^{b_1}\left(x^{\perp}\right)^{b_2}\psi\psi_1\mathfrak{b}\right\rangle}{s^{3m/4}s^{\omega_{-}}} = s^{|b|-\omega_{-}}\left\langle \widetilde{\varphi}_{-} d_{-}; \left(x^{+}\right)^{b_1}\left(x^{\perp}\right)^{b_2}\psi\psi_1\mathfrak{b}\right\rangle \quad . \tag{4.114}$$

E esse limite é nulo, como o requer a Eq. (4.109), quando $|b| > \omega_{-}$, caso no qual, então, a definição da Eq. (4.101) ainda é aplicável. O maior espaço de funções de teste no qual a divisão da distribuição causal é trivial é assim aquele constituído pelas funções da forma:

$$\varphi(x) = \left(x^{+,\perp}\right)^{b}\widetilde{\varphi}(x) \;\; ; \;\; |b| = \lfloor \omega_{-} \rfloor + 1 \;\; , \;\; \widetilde{\varphi} \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{m}\right) \quad . \tag{4.115}$$

Nessa equação, o símbolo «$\lfloor \bullet \rfloor$» significa «o maior número inteiro menor ou igual a $\bullet$». Uma função de teste é da forma definida na Eq. (4.115) se e somente se ela satisfizer à condição de anulamento de suas primeiras $\lfloor \omega_{-} \rfloor$ derivadas em relação às variáves x^{+} e $x^{\perp}$, no eixo x^{-}:

$$D^{b}_{+,\perp}\varphi\left(0; 0^{\perp}; x^{-}\right) = 0 \quad \text{para} \quad |b| \leq \lfloor \omega_{-} \rfloor \quad . \tag{4.116}$$

Esse resultado aponta o caminho que deve ser seguido para estender a definição da distribuição retardada e a da avançada a todo o espaço $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{m}\right)$ –possibilidade esta que existe em virtude to teorema de Hahn-Banach[9]–: Deve-se subtrair às funções de teste gerais seus primeiros $\lfloor \omega_{-} \rfloor$ termos da série de Taylor nas variáveis x^{+} e $x^{\perp}$ ao redor do ponto $(0; 0^{\perp}; x^{-})$. Porém, devemos ser cuidadosos ao fazer tal subtração, pois o polinômio diverge no infinito, donde a simples subtração de um polinômio faria a função sair do espaço $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{m}\right)$. Antes, devemos multiplicar o polinômio a ser subtraído por uma função auxiliar $w \in \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^{3m/4}\right)$, de forma que este produto seja ainda uma função de teste. A subtração é portanto feita por meio do operador de projeção W definido segundo:

$$(W\varphi)(x) := \varphi(x) - w\left(x^{+}; x^{\perp}\right)\sum_{|b|=0}^{\lfloor \omega_{-} \rfloor}\frac{\left(x^{+,\alpha}\right)^{b}}{b!}D^{b}_{+,\alpha}\varphi\left(0; 0^{\perp}; x^{-}\right) \quad . \tag{4.117}$$

[9] O teorema de Hahn-Banach afirma que [199] *toda funcional linear contínua f definida num subespaço m de um espaço linear normado M pode ser estendida por uma funcional linear contínua F em M tal que, para toda função $\varphi \in m$: $\langle F; \varphi\rangle = \langle f; \varphi\rangle$, e $\|F\|_{M} = \|f\|_{m}$.* Este teorema pode ser aplicado no caso em estudo porque as funções que satifazem à Eq. (4.116) constituem um subespaço do espaço de Schwartz, que é um espaço linear normado. A este respeito, lembre-se que a norma no espaço de Schwartz pode ser definida, entre outras possibilidades, por $\|\varphi\|_{n} := \sup_{x, |\alpha| \leq n}(1 + |x|)^{n}|D^{\alpha}\varphi(x)|$, com $n \in \mathbb{N}_{0}$.

A função auxiliar não é qualquer uma, mas está restrita de forma que $W\varphi$ satisfaça à Eq. (4.116); calculando as primeiras $\lfloor\omega_-\rfloor$ derivadas de $W\varphi$:

$$D^c_{+,\alpha}(W\varphi)\left(0;0^\perp;x^-\right) = D^c_{+,\alpha}\varphi\left(0;0^\perp;x^-\right) - \sum_{a=0}^{c}\frac{c!}{a!(c-a)!}D^{c-a}_{+,\alpha}w\left(0;0^\perp\right)D^a_{+,\alpha}\varphi\left(0;0^\perp;x^-\right) \quad ; \quad |c|\leq\lfloor\omega_-\rfloor \quad , \tag{4.118}$$

e W é o projetor requerido se a função w é escolhida tal que:

$$w\left(0;0^\perp\right)=1 \quad , \quad D^c_{+,\alpha}w\left(0;0^\perp\right)=0 \text{ para } 1\leq|c|\leq\lfloor\omega_-\rfloor \quad . \tag{4.119}$$

Evidentemente, a segunda condição deve ser imposta apenas quando $\lfloor\omega_-\rfloor\geq 1$; se $\lfloor\omega_-\rfloor=0$, então a primeira condição é suficiente.

Com essas considerações, a distribuição retardada é (bem) definida pela fórmula:

$$\langle r_{\mathfrak{b}};\varphi\rangle := \left\langle \lim_{s\to0^+}\chi\left(\frac{v\cdot x}{s}\right)d_{\mathfrak{b}}(x);(W\varphi)(x)\right\rangle \equiv \langle d_{\mathfrak{b}};\Theta W\varphi\rangle \quad . \tag{4.120}$$

E a distribuição avançada o é pela equação:

$$\langle a_{\mathfrak{b}};\varphi\rangle := \left\langle -\lim_{s\to0^+}\chi\left(\frac{v\cdot x}{s}\right)d_{\mathfrak{b}}(x);(W\varphi)(x)\right\rangle = \langle d_{\mathfrak{b}};(\Theta-1)W\varphi\rangle \quad . \tag{4.121}$$

É importante perceber que a introdução do operador W não destrói a igualdade da distribuição retardada com a causal na região $\Gamma^+_{n-1}(0)\setminus\left(\mathbb{R}e^-\right)^{\times(n-1)}$. Para verificar isto, considere uma função φ com suporte naquela região; tanto a função quanto suas derivadas são nulas no eixo x^-: $D^{b_1}_+D^{b_2}_\alpha\varphi\left(0;0^\perp;x^-\right)=0$, para quaisquer números não-negativos b_1, b_2, e as correções introduzidas pelo projetor W são todas nulas [vide a Eq. (4.117)]: Os termos adicionais permitem a aplicação da distribuição retardada a funções de teste arbitrárias, sem por isso modificar o resultado que se obteria com o uso de uma função de teste apropriadamente escolhida. Um argumento semelhante rege para a distribuição avançada.

4.6 Divisão da distribuição causal no espaço dos momentos

De forma geral, os cálculos na teoria do campo quantizado são mais simples no espaço dos momentos, motivo pelo qual é conveniente, para a aplicação futura da teoria, obter fórmulas para a divisão da distribuição causal nesse espaço. Como é bem conhecido, o passar do espaço real ao dos momentos é levado a cabo mediante a transformação de Fourier; a aplicação dela à Eq. (4.95) permite escrever a definição de quase-assíntota na seguinte forma:

Definição: *Seja $\hat{d}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ uma distribuição, e seja ρ uma função contínua definida positiva. Se o limite*

$$\lim_{s\to0^+}\rho(s)\left\langle\hat{d}\left(\frac{p_+}{s};\frac{p_\perp}{s};p_-\right);\check{\varphi}(p)\right\rangle=\left\langle\hat{d}_-;\check{\varphi}\right\rangle \tag{4.122}$$

existe para toda função de teste $\check{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$*, então* $\hat{d}_-$ *é a quase-assíntota da distribuição* $\hat{d}$ *em* $p_+, p_\perp \to +\infty$*, em relação à função* ρ*.*

Como a definição recém escrita obtém-se daquela oferecida no espaço real, a função $\rho(s)$ em ambas as definições pode ser considerada a mesma, donde decorre que a ordem singular da distribuição, ω_-, bem pode ser calculada no espaço dos momentos como no espaço real, obtendo-se sempre o mesmo valor.

4.6.1 Distribuição causal com ordem singular negativa

Pela própria definição da transformada de Fourier de uma distribuição, da Eq. (4.112) tem-se que:

$$\langle r_{\mathfrak{b}}; \varphi \rangle = \langle \hat{r}_{\mathfrak{b}}; \check{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-m/2} \left\langle \widehat{\Theta} * \hat{d}_{\mathfrak{b}}; \check{\varphi} \right\rangle \quad , \tag{4.123}$$

a partir do qual identifica-se que a distribuição retardada no espaço dos momentos é:

$$\hat{r}_{\mathfrak{b}}(p) = (2\pi)^{-m/2} \widehat{\Theta} * \hat{d}_{\mathfrak{b}}(p) = (2\pi)^{-m/2} \left\langle \widehat{\Theta}(q); \hat{d}_{\mathfrak{b}}(p-q) \right\rangle_q \quad . \tag{4.124}$$

Como pode-se ver, precisar-se-á conhecer a transformada de Fourier da função de Heaviside $\Theta(v \cdot x)$, com $v \cdot x$ dado na Eq. (4.98). Simplificando a notação, consideremos que precisamos obter a transformada de Fourier da função $\Theta(x + y + \cdots + z)$, com l variáveis x, y, $\cdots$, z. Por definição ela é:

$$\widehat{\Theta}(p; q; \cdots; r) = (2\pi)^{-l/2} \int dx dy \cdots dz e^{ipx + iqy + \cdots + irz} \Theta(x + y + \cdots + z) \quad . \tag{4.125}$$

Seja feita a mudança de variável $w = x + y + \cdots + z$ em substituição da x. Como o jacobiano dessa transformação é a unidade, tem-se:

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}(p; q; \cdots; r) &= (2\pi)^{-l/2} \int dw dy \cdots dz e^{ipw + i(q-p)y + \cdots + i(r-p)z} \Theta(w) \\ &= (2\pi)^{l/2-1} \delta(q-p) \cdots \delta(r-p) \int dw e^{ipw} \Theta(w) \quad , \end{aligned} \tag{4.126}$$

e o problema foi reduzido ao cálculo da transformada de Fourier da função de Heaviside unidimensional. Como é sabido, ela não existe *stricto sensu*, mas segundo o teorema de Titchmarsh [178, 179], existe, sim, no sentido do limite seguinte:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dw e^{i(p+i\epsilon)w} \Theta(w) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{+\infty} dw e^{(ip-\epsilon)w} = \frac{i}{p + i0^+} \quad . \tag{4.127}$$

Com as Eqs. (4.126) e (4.127), e voltando à notação de multi-índices, obtém-se o resultado procurado:

$$\widehat{\Theta}(q) = (2\pi)^{m/2-1} \delta(\boldsymbol{q}_1) \delta(q_{2+} - q_{1+}) \delta(\boldsymbol{q}_2) \cdots \delta(q_{n-1+} - q_{1+}) \delta(\boldsymbol{q}_{n-1}) \frac{i}{q_{1+} + i0^+} \quad . \tag{4.128}$$

Substituindo esse resultado na Eq. (4.124):

$$\hat{r}_{\mathfrak{b}}(p) = \frac{i}{2\pi}\int \frac{dq\delta(\boldsymbol{q}_1)\delta(q_{2+}-q_{1+})\delta(\boldsymbol{q}_2)\cdots\delta(q_{n-1+}-q_{1+})\delta(\boldsymbol{q}_{n-1})}{q_{1+}+i0^+}\hat{d}_{\mathfrak{b}}\left(p-q\right) \quad . \tag{4.129}$$

Integrando nas variáveis q_{ia}, exceto em q_{1+}, e renomeando essa variável como k, obtém-se a fórmula de divisão:

$$\begin{aligned}\hat{r}_{\mathfrak{b}}(p) &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{d}_{\mathfrak{b}}\left((p_{1+}-k;\boldsymbol{p}_1);\cdots;(p_{n-1+}-k;\boldsymbol{p}_{n-1})\right)}{k+i0^+}dk \\ &\equiv \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{d}_{\mathfrak{b}}(p_+-k;\boldsymbol{p})}{k+i0^+}dk \quad .\end{aligned} \tag{4.130}$$

Finalmente, pelo teorema da convolução, a transformada de Fourier de $d_{\mathfrak{b}}$ é dada por:

$$\hat{d}_{\mathfrak{b}}(p) = (2\pi)^{-m/8}\int \hat{d}(p_+;p_\perp;q)\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)d^{m/4}q \quad . \tag{4.131}$$

O limite $\mathfrak{b}(x^-)\to 1$ deve agora ser tomado segundo: $\hat{\mathfrak{b}}(p_-)\to(2\pi)^{m/8}\delta(p_-)$.

4.6.2 Distribuição causal com ordem singular não-negativa

Passemos a considerar o caso não trivial da distribuição causal com ordem singular não-negativa. Da Eq. (4.120) tem-se que:

$$\langle r_{\mathfrak{b}};\varphi\rangle = \langle \hat{r}_{\mathfrak{b}};\check{\varphi}\rangle = (2\pi)^{-m/2}\left\langle \widehat{\Theta}*\hat{d}_{\mathfrak{b}};\widetilde{W\varphi}\right\rangle \quad . \tag{4.132}$$

O primeiro argumento dentro do «produto interno» da última igualdade, $\widehat{\Theta}*\hat{d}_{\mathfrak{b}}$, é a mesma que já calculou-se no caso de ordem singular negativa. Precisa-se agora calcular o segundo argumento:

$$\widetilde{W\varphi}(p) = \check{\varphi}(p) - \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor}\frac{1}{b!}\left\{w\left(x^+;x^\perp\right)\left(x^{+,\alpha}\right)^b D^b_{+,\alpha}\varphi\left(0;0^\perp;x^-\right)\right\}^\vee(p) \quad . \tag{4.133}$$

O termo entre as chaves é:

$$\begin{aligned}&\left\{w\left(x^+;x^\perp\right)\left(x^{+,\alpha}\right)^b D^b_{+,\alpha}\varphi\left(0;0^\perp;x^-\right)\right\}^\vee(p) \\ &\quad= (2\pi)^{-m/2}\int d^m x e^{-ipx}w\left(x^+;x^\perp\right)(x^{+,\alpha})^b D^b_{+,\alpha}\varphi(0;0^\perp;x^-) \\ &\quad= (2\pi)^{-m/2}(iD_p)^b_{+,\alpha}\left\{w\left(x^+;x^\perp\right)D^b_{+,\alpha}\varphi(0;0^\perp;x^-)\right\}^\vee(p) \\ &\quad= (2\pi)^{-m/2}(iD_p)^b_{+,\alpha}\breve{w}*\left\{D^b_{+,\alpha}\varphi(0;0^\perp;x^-)\right\}^\vee(p) \\ &\quad= (2\pi)^{-m/2}(iD_p)^b_{+,\alpha}\int d^m q\breve{w}(p-q)\left\{D^b_{+,\alpha}\varphi(0;0^\perp;x^-)\right\}^\vee(q) \quad .\end{aligned} \tag{4.134}$$

Tem-se que, desde que w não depende de x^-:

$$\breve{w}(p-q) = (2\pi)^{-m/4}\delta(p_- - q_-)\breve{w}(p_+ - q_+; p_\perp - q_\perp) \quad . \tag{4.135}$$

E o termo entre chaves na última linha da Eq. (4.134) é igual a:

$$\begin{aligned}
&\left\{D^b_{+,\alpha}\varphi(0;0^\perp;x^-)\right\}^\smile(q) \\
&\qquad = (2\pi)^{-m/2}\int d^m x e^{-iqx}\int d^{3m/4}y^{+,\perp}\delta(y^{+,\perp})D^b_{+,\alpha}\varphi(y^+;y^\perp;x^-) \\
&\qquad = (2\pi)^{m/4}\delta(q_{+,\perp})\int d^m y e^{-iq_-y^-}\delta(y^{+,\perp})D^b_{+,\alpha}\varphi(y) \\
&\qquad = (2\pi)^{m/4}\delta(q_{+,\perp})\int d^m y e^{-iqy}\delta(y^{+,\perp})D^b_{+,\alpha}\varphi(y) \\
&\qquad = (-1)^b(2\pi)^{m/4}\delta(q_{+,\perp})\int d^m y D^b_{+,\alpha}\left(e^{-iqy}\delta(y^{+,\perp})\right)\varphi(y) \quad .
\end{aligned} \tag{4.136}$$

Mas essa quantidade será integrada na variável q [vide a Eq. (4.134)], de forma que pode-se usar o suporte da distribuição $\delta(q_{+,\perp})$. Particularmente, quando algumas das derivadas contidas em $D^b_{+,\alpha}$ afetam à função exponencial e^{-iqy}, aparecerá sempre pelo menos um fator $q_{+,\perp}$, que será nulo por causa do referido suporte. Assim, será suficiente considerar a ação de $D^b_{+,\alpha}$ sobre $\delta(y^{+,\perp})$:

$$\begin{aligned}
\left\{D^b_{+,\alpha}\varphi(0;0^\perp;x^-)\right\}^\smile(q) &= (-1)^b(2\pi)^{m/4}\delta(q_{+,\perp})\int d^m y e^{-iqy}D^b_{+,\alpha}\left(\delta(y^{+,\perp})\right)\varphi(y) \\
&= (-1)^b(2\pi)^{m/4}\delta(q_{+,\perp})\int d^m p'\left[D^b_{+,\alpha}\delta(y^{+,\perp})\right]^\smile(q-p')\breve{\varphi}(p') \quad .
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Aqui tem de ser calculado:

$$\begin{aligned}
\left[D^b_{+,\alpha}\delta(y^{+,\perp})\right]^\smile(q-p') &= (2\pi)^{-m/2}\int d^m y e^{-i(q-p')y}D^b_{+,\alpha}\delta(y^{+,\perp}) \\
&= (-1)^b(2\pi)^{-m/4}\delta(q_- - p'_-)\int d^{3m/4}D^b_{+,\alpha}e^{-i(q-p')_{+,\perp}y^{+,\perp}}\delta(y^{+,\perp}) \\
&= i^b(2\pi)^{-m/4}\delta(q_- - p'_-)(q-p')^b_{+,\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Substituindo a Eq. (4.138) na (4.137), então na Eq. (4.134):

$$\begin{aligned}
&\left\{w\left(x^+;x^\perp\right)\left(x^{+,\alpha}\right)^b D^b_{+,\alpha}\varphi\left(0;0^\perp;x^-\right)\right\}^\smile(p) \\
&\qquad = (2\pi)^{-3m/4}(D_p)^b_{+,\alpha}\int d^m q\delta(p_- - q_-)\breve{w}(p_+ - q_+;p_\perp - q_\perp)\delta(q_{+,\perp}) \\
&\qquad\quad \times\int d^m p'\delta(q_- - p'_-)(q-p')^b_{+,\alpha}\breve{\varphi}(p') \\
&\qquad = (2\pi)^{-3m/4}\int d^m p'(-p')^b_{+,\alpha}(D_p)^b_{+,\alpha}\breve{w}(p_+;p_\perp)\delta(p'_- - p_-)\breve{\varphi}(p') \quad .
\end{aligned} \tag{4.139}$$

Dessa forma, substituindo a Eq. (4.139) na (4.133), obtém-se finalmente a transformada de Fourier inversa de $W\varphi$:

$$\widetilde{W\varphi}(p) = \breve{\varphi}(p) - \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor} \frac{1}{b!}(2\pi)^{-3m/4} \int d^m p' (-p')^b_{+,\alpha} \delta(p'_- - p_-)(D_p)^b_{+,\alpha} \breve{w}(p_+; p_\perp)\breve{\varphi}(p') \quad . \tag{4.140}$$

Com as Eqs. (4.130) e (4.140) substituídas na Eq. (4.132):

$$\begin{aligned}
\langle \hat{r}_\mathfrak{b}; \breve{\varphi}\rangle &= \int d^m p \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\hat{d}_\mathfrak{b}(p_+ - k; \boldsymbol{p})}{k + i0^+} \Bigg\{ \breve{\varphi}(p) - \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor} \frac{1}{b!}(2\pi)^{-3m/4} \\
&\quad \times \int d^m p' (-p')^b_{+,\alpha} \delta(p'_- - p_-)(D_p)^b_{+,\alpha} \breve{w}(p_+; p_\perp)\breve{\varphi}(p') \Bigg\} \\
&= \int d^m p \Bigg\{ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\hat{d}_\mathfrak{b}(p_+ - k; \boldsymbol{p})}{k + i0^+} - (2\pi)^{-3m/4} \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor} \frac{1}{b!}(-p)^b_{+,\alpha} \\
&\quad \times \int d^m p' \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\hat{d}_\mathfrak{b}(p'_+ - k; \boldsymbol{p}')}{k + i0^+} \delta(p'_- - p_-)(D_{p'})^b_{+,\alpha} \breve{w}(p'_+; p'_\perp) \Bigg\} \breve{\varphi}(p) \quad . \qquad (4.141)
\end{aligned}$$

Daí decorre que a distribuição retardada auxiliária é dada pela expressão:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_\mathfrak{b}(p) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\hat{d}_\mathfrak{b}(p_+ - k; \boldsymbol{p})}{k + i0^+} - (2\pi)^{-3m/4} \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor} \frac{1}{b!}(-p)^b_{+,\alpha} \\
&\quad \times \int d^m p' \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\hat{d}_\mathfrak{b}(p'_+ - k; \boldsymbol{p}')}{k + i0^+} \delta(p'_- - p_-)(D_{p'})^b_{+,\alpha} \breve{w}(p'_+; p'_\perp) \quad . \qquad (4.142)
\end{aligned}$$

Ou, ainda, fazendo uma integração por partes na integral da variável p':

$$\begin{aligned}
\hat{r}_\mathfrak{b}(p) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\hat{d}_\mathfrak{b}(p_+ - k; \boldsymbol{p})}{k + i0^+} - (2\pi)^{-3m/4} \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor} \frac{1}{b!} p^b_{+,\alpha} \\
&\quad \times \int d^m p' \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{(D_{p'})^b_{+,\alpha} \hat{d}_\mathfrak{b}(p'_+ - k; \boldsymbol{p}')}{k + i0^+} \delta(p'_- - p_-) \breve{w}(p'_+; p'_\perp) \quad . \qquad (4.143)
\end{aligned}$$

Integrando por fim na variável p'_-:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_\mathfrak{b}(p) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k + i0^+} \Bigg\{ \hat{d}_\mathfrak{b}(p_+ - k; \boldsymbol{p}) - (2\pi)^{-3m/4} \sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor} \frac{1}{b!} p^b_{+,\alpha} \\
&\quad \times \int d^{3m/4} p'_{+,\perp} (D_{p'})^b_{+,\alpha} \hat{d}_\mathfrak{b}(p'_+ - k; p'_\perp; p_-) \breve{w}(p'_+; p'_\perp) \Bigg\} \quad . \qquad (4.144)
\end{aligned}$$

Essa é uma solução ao problema da divisão, e é finita por construção. Inobstante ela ainda exibir uma dependência explícita com a função auxliar $\breve{w}$, note-se que a segunda linha na Eq. (4.144) é uma distribuição da variável p_- só, e está multiplicada por fatores $p_{+,\alpha}$; isto significa que os termos de subtração, que são aqueles que dependem da função w, são termos instantâneos. Como por enquanto somente é possível afirmar a igualdade de $r_\mathfrak{b}$ e $d_\mathfrak{b}$ no cone de luz futuro, exceto, precisamente, no eixo x^-, estes termos instantâneos podem modificar-se sem isto trazer implicações físicas, pois em qualquer caso os termos instantâneos fixar-se-ão por condições diferentes da causalidade. Porém, os termos instantâneos na Eq. (4.144) não podem ser simplesmente desconsiderados, pois sua função, já o dissemos, é remover as divergências que aparecem quando a ordem singular é não-negativa. Isto nos leva à seguinte conclusão: Com a finalidade de evitar precisar definir sempre uma função w apropriada para cada ordem singular da distribuição causal e efetuar os cálculos explícitos com ela, tentaremos eliminar a dependência com ela da Eq. (4.144), sem destruir a finitude do resultado, adicionando para isso somente termos instantâneos finitos.

Assumindo que exista um ponto $q \in \mathbb{R}^m$ em que as derivadas $D^c_{+,\alpha}\hat{r}_\mathfrak{b}(q)$ existem para todo $|c| \leq \lfloor \omega_- \rfloor$, da Eq. (4.144) tem-se que:

$$\begin{aligned} D^c_{+,\alpha}\hat{r}_\mathfrak{b}(q) =& \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{D^c_{+,\alpha}\hat{d}_\mathfrak{b}(q_+ - k; \boldsymbol{q})}{k + i0^+} - (2\pi)^{-3m/4}\sum_{|b|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor}\frac{1}{b!}D^c_{+,\alpha}q^b_{+,\alpha} \\ & \times \int d^{3m/4}p'_{+,\perp}\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{(D_{p'})^b_{+,\alpha}\hat{d}_\mathfrak{b}(p'_+ - k; p'_\perp; q_-)}{k + i0^+}\breve{w}(p'_+; p'_\perp) \quad . \end{aligned} \tag{4.145}$$

Mas:

$$D^c_{+,\alpha}q^b_{+,\alpha} = \frac{b!}{(b-c)!}q^{b-c}_{+,\alpha} \quad (c \leq b) \quad ; \quad D^c_{+,\alpha}q^b_{+,\alpha} = 0 \quad (c > b) \quad , \tag{4.146}$$

em que as relações de ordem «$\leq$» e «$>$» entre multi-índices são definidas como:

$$c \leq b \;:\Leftrightarrow\; \forall i:\; c_i \leq b_i \quad ; \quad c > b \;:\Leftrightarrow\; \exists i:\; c_i > b_i \quad . \tag{4.147}$$

Por outro lado, sempre é possível escrever:

$$\frac{1}{b!}p^b_{+,\alpha} = \frac{1}{b!}[q_{+,\alpha} + (p_{+,\alpha} - q_{+,\alpha})]^b = \sum_{c\leq b}\frac{(p_{+,\alpha} - q_{+,\alpha})^c q^{b-c}_{+,\alpha}}{c!(b-c)!} \quad . \tag{4.148}$$

Substituindo a Eq. (4.146) na (4.145) e usando a Eq. (4.148):

$$\begin{aligned} \sum_{|c|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor}\frac{(p_{+,\alpha} - q_{+,\alpha})^c}{c!}D^c_{+,\alpha}\hat{r}_\mathfrak{b}(q) =& \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \sum_{|c|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor}\frac{(p_{+,\alpha} - q_{+,\alpha})^c}{c!}\frac{D^c_{+,\alpha}\hat{d}_\mathfrak{b}(q_+ - k; \boldsymbol{q})}{k + i0^+} \\ & - (2\pi)^{-3m/4}\sum_{|b|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor}\frac{1}{b!}p^b_{+,\alpha}\int d^{3m/4}p'_{+,\perp}\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{(D_{p'})^b_{+,\alpha}\hat{d}_\mathfrak{b}(p'_+ - k; p'_\perp; q_-)}{k + i0^+}\breve{w}(p'_+; p'_\perp) \quad . \end{aligned} \tag{4.149}$$

A comparação das Eqs. (4.144) e (4.149) revela que os termos nelas contendo a dependência explícita com a função auxiliar w são os mesmos se $q_- = p_-$. Ademais, a Eq. (4.149) somente contém termos instantâneos, pelo qual a «distribuição retardada auxiliar com linha de normalização $(q_+; q_\perp; p_-)$», definida como:

$$\hat{r}_{\mathfrak{b},q}(p) := \hat{r}_{\mathfrak{b}}(p) - \sum_{|c|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor} \frac{(p_{+,\alpha} - q_{+,\alpha})^c}{c!} D^c_{+,\alpha} \hat{r}_{\mathfrak{b}}(q_+; q_\perp; p_-) \quad , \tag{4.150}$$

é também uma solução ao problema da divisão. Ela é muito conveniente porque a dependência com a função w tem desaparecido explicitamente, como é possível ver pela substituição das Eqs. (4.144) e (4.149) na Eq. (4.150):

$$\hat{r}_{\mathfrak{b},q}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k + i0^+} \left\{ \hat{d}_{\mathfrak{b}}(p_+ - k; \boldsymbol{p}) - \sum_{|c|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor} \frac{1}{c!} (p_{+,\alpha} - q_{+,\alpha})^c D^c_{+,\alpha} \hat{d}_{\mathfrak{b}}(q_+ - k; q_\perp; p_-) \right\} . \tag{4.151}$$

Claramente, esta nova distribuição retardada auxiliar satisfaz à seguinte «condição de normalização»:

$$D^b_{+,\alpha} \hat{r}_{\mathfrak{b},q}(q_+; q_\perp; p_-) = 0 \quad ; \quad |b| \leq \lfloor \omega_- \rfloor \quad . \tag{4.152}$$

A distribuição da Eq. (4.151) é a solução geral ao problema da divisão da distribuição causal, válida para qualquer momento p, módulo a adição de termos instantâneos finitos. Um caso particular –e de também particular importância– de linha de normalização é $(0; 0_\perp; p_-)$; a solução normalizada nela é denominada «solução central», e é dada por:

$$\hat{r}_{\mathfrak{b},0}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k + i0^+} \left\{ \hat{d}_{\mathfrak{b}}(p_+ - k; \boldsymbol{p}) - \sum_{|c|=0}^{\lfloor \omega_- \rfloor} \frac{1}{c!} p^c_{+,\alpha} D^c_{+,\alpha} \hat{d}_{\mathfrak{b}}(-k; 0_\perp; p_-) \right\} \quad . \tag{4.153}$$

A solução central, contudo, nem sempre existe, e em alguns casos somos forçados a utilizar de uma linha de normalização diferente.

Finalmente, como no caso da ordem singular negativa, nessas equações deve-se colocar a Eq. (4.131), e no final dos cálculos o limite $\hat{\mathfrak{b}}(p_-) \to (2\pi)^{m/8} \delta(p_-)$ deve ser considerado.

4.7 Normalização das soluções ao problema da divisão

Que a igualdade entre a distribuição causal e a retardada que se obtém do procedimento indutivo pode apenas ser afirmada na região $\Gamma^+_{n-1}(0) \setminus (\mathbb{R}e^-)^{\times(n-1)}$, já o dissemos, e também a igualdade entre a distribuição avançada e a causal pode apenas ser afirmada em $\Gamma^-_{n-1}(0) \setminus (\mathbb{R}e^-)^{\times(n-1)}$. É mister considerar agora o problema da definição dessas distribuições no eixo x^-. Em primeiro lugar, deve-se notar que é impossível que ambas as distribuições retardada e avançada sejam iguais à causal em tal eixo; certamente, se fosse $r|_{\text{eixo } x^-} = d|_{\text{eixo } x^-}$, então forçosamente seria $a|_{\text{eixo } x^-} = 0$, uma vez que $d = r - a$; isto ocorre em cada ponto do conjunto $\text{supp}(r) \cap \text{supp}(a)$, enquanto que fora dele é, sim, possível que as distribuições

retardada e avançada sejam iguais à causal. Suponhamos agora que $(r_1; a_1)$ e $(r_2; a_2)$ são duas soluções ao problema da divisão, *i.e.*, são verificadas: $r_1 - a_1 = d = r_2 - a_2$. Dessas igualdades tem-se que:

$$r_1 - r_2 = a_1 - a_2 \quad . \tag{4.154}$$

Mas o suporte do lado esquerdo dessa equação está contido em $\Gamma^+_{n-1}(0)$, enquanto que o suporte do seu lado direito o está em $\Gamma^-_{n-1}(0)$: A igualdade da Eq. (4.154) só pode ser verdadeira se:

$$\mathrm{supp}(r_1 - r_2)\ ,\ \mathrm{supp}(a_1 - a_2) \subseteq \Gamma^+_{n-1}(0) \cap \Gamma^-_{n-1}(0) = \left(\mathbb{R}e^-\right)^{\times(n-1)} \quad . \tag{4.155}$$

Isto é evidente: Se r_1 e r_2 são iguais a d em todo seu suporte, exceto pelo eixo x^-, então eles podem ser diferentes somente no mencionado eixo; e outro tanto vale para a distribuição avançada. Destarte, as distribuições retardadas r_1 e r_2 podem diferir por «termos de normalização» que são distribuições com suporte no eixo x^-:

$$r_1(x) - r_2(x) = \sum_{|b|=0}^{M} C_b\left(x^-\right) D^b_{+,\perp}\delta\left(x^{+,\perp}\right) \quad , \tag{4.156}$$

com $C_b\left(x^-\right)$ certas distribuições da variável x^-. A ordem singular de cada um desses termos é $|b|$, independentemente de qual seja a distribuição $C_b(x^-)$, pois a variável x^- não é escalada no cálculo da ordem singular. Estes termos de normalização afetam também à distribuição avançada, como estabelecido pela Eq. (4.154): Os mesmos termos de normalização adicionados à distribuição retardada devem ser adicionados também à avançada. No espaço dos momentos, estes termos de normalização são:

$$\hat{r}_1(p) - \hat{r}_2(p) = \sum_{|b|=0}^{M} \widehat{C}_b\left(p_-\right) p^b_{+,\perp} \quad . \tag{4.157}$$

Quanto ao limite superior, M, nas somas das Eqs. (4.156) e (4.157), pode-se apenas dizer o seguinte: Que o processo indutivo causal não o determina, pois, como dissemos alhures, estes termos não modificam o fato das distribuições retardada e avançada serem uma (outra) solução ao problema da divisão. Os termos de normalização devem ser fixados pela imposição de condições físicas adicionais, como a covariância de Lorentz, as propriedades da teoria em relação às transformações discretas, a invariância de calibre, *et cetera*, e pela imposição de que a ordem singular da distribuição retardada seja menor ou igual à da distribuição causal: $\omega_-[r] \leq \omega_-[d]$. A este respeito enunciamos o seguinte:

Teorema 4.5: *Se a distribuição causal é covariante de Lorentz e sua ordem singular no eixo x^- é maior ou igual a sua ordem singular na origem*[10]*, $\omega_-[d] \geq \omega_0[d]$, então as condições de normalização de covariância de Lorentz da distribuição retardada e de preservação da ordem singular podem ser*

[10] A definição da ordem singular na origem é similar à daquela no eixo x^-, exceto pelo fato de que no primeiro caso são as quatro variáveis que são escaladas. No espaço dos momentos [107]: *Seja $\hat{d} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ uma distribuição,*

atingidas simultâneamente.

Prova: Desde que $r = d$ em $\Gamma^+_{n-1}(0) \setminus (\mathbb{R}e^-)^{\times(n-1)}$, para qualquer função de teste $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ com $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Gamma^+_{n-1}(0) \setminus (\mathbb{R}e^-)^{\times(n-1)}$ ter-se-á que:

$$\langle r; \varphi \rangle = \langle d; \Theta W \varphi \rangle = \langle d; \varphi \rangle \tag{4.158}$$

(o projector W, é claro, é igual à unidade se $\omega_-[d] < 0$). Daí que, como, por hipótese, d é covariante de Lorentz, qualquer possível não-covariância de r deve estar contida em termos instantâneos, isto é, com suporte em $(\mathbb{R}e^-)^{\times(n-1)}$. Adicionalmente, efetuando o escalamento da Eq. (4.158) vê-se que a ordem singular no eixo x^- de r e de d são as mesmas para as funções de teste consideradas; logo $\omega_-[r] = \omega_-[d]$ exceto, outra vez, pelo possível aparecimento de termos com suporte em $(\mathbb{R}e^-)^{\times(n-1)}$. Dessa forma, a covariância de Lorentz e a preservação da ordem singular são, verdadeiramente, condições de normalização, pois afetam à escolha dos termos de normalização apenas. Que estas duas condições podem ser simultâneamente atingidas pode ver-se da seguinte forma: Desde que d é covariante de Lorentz, ele não pode conter termos instantâneos; eis que todos os termos instantâneos contidos em r têm origem no procedimento de divisão da distribuição causal; porém, eles não podem ser covariantes de Lorentz a menos que seu suporte esteja na origem das coordenadas. Aplique-se então a seguinte prescrição: Remova-se da distribuição r obtida todos os termos instantâneos não-covariantes –isto pode ser facilmente realizado no espaço dos momentos: Remova-se [porque a normalização o permite, vide a Eq. (4.157)] todos os termos em $\hat{r}$ da forma $P(p_+; p_\perp)R(p_-)$, com P um polinômio e R uma distribuição qualquer, de forma que a distribuição retardada remanescente não possua termos que possam ser escritos daquela forma–. Agora a distribuição retardada não contém termos instantâneos e sua ordem singular é a mesma que a da distribuição causal: $\omega_-[r] = \omega_-[d]$. Para obter a covariância de Lorentz de r, resta apenas realizar uma normalização na origem, $x = 0$. Semelhante normalização é feita com as derivadas de $\delta(x)$ de ordem até a ordem singular na origem da distribuição causal, ω_0, como é mostrado, por exemplo, na Seç. 4.5 da Ref. [107] –vide também a Ref. [176]–. Conclui-se que, se $\omega_-[d] \geq \omega_0[d]$, então a covariância de Lorentz e a preservação da ordem singular no eixo x^- podem ser simultâneamente atingidas. ■

A desigualdade $\omega_-[d] \geq \omega_0[d]$ requerida para a aplicação do Teorema 4.5 rege como uma igualdade para qualquer distribuição causal covariante de Lorentz. Com efeito, pelo procedimento indutivo se constrói a distribuição causal como o produto das partes de frequência positiva ou de frequência negativa das distribuições de comutação dos campos. No espaço dos momentos, tal produto (tensorial) vira uma convolução, de forma que, como

e seja ρ uma função contínua e positiva. Se o limite

$$\lim_{s \to 0^+} \rho(s) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{s}\right); \check{\varphi}(p) \right\rangle = \left\langle \hat{d}_0; \check{\varphi} \right\rangle$$

existe qualquer que seja a função de teste $\check{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, então $\hat{d}_0$ é a quasi-assíntota da distribuição $\hat{d}$ em $p \to +\infty$, em relação à função ρ. A ordem de auto-modelamento da função ρ é então a ordem singular da distribuição d na origem.

toda distribuição de comutação, da variável de momento p_j, diga-se, tem em geral uma estrutura da forma $\sigma_j(p_{j-})P_j(p_{ja})d_{1j}(p_j)$, com $\sigma_j(p_{j-}) = \Theta(\pm p_{j-})$, $P_j(p_{ja})$ um polinômio de p_{ja} e $d_{1j}(p_j)$ uma distribuição invariante de Lorentz construída com p_j^2, $\not{p}_j$, então a convolução de n de tais distribuições terá a seguinte forma geral:

$$\hat{d}(p) = \sigma(p_-)P(p_a)d_1(p) \quad , \tag{4.159}$$

com $P(p_a)$ um polinômio de $p_a = (p_{1a}; \cdots ; p_{na})$ e d_1 uma distribuição invariante de Lorentz, construída com termos invariantes da forma p_j^2, $p_i \cdot p_j$, e $\not{p}_j$. Pelas definições das ordens singulares no eixo x^- e na origem, é fácil ver que: $\omega_-[\sigma(p_-)] = 0 = \omega_0[\sigma(p_-)]$; $\omega_-[p_i \cdot p_j] = \omega_-[p_j^2] = 2 = \omega_0[p_i \cdot p_j] = \omega_0[p_j^2]$ e $\omega_-[\not{p}_j] = 1 = \omega_0[\not{p}_j]$, pelo que teremos por regra geral que $\omega_-[d_1] = \omega_0[d_1]$. Tem-se também que $\omega_-[P(p_a)] = \deg(P) = \omega_0[P(p_a)]$, com $\deg(P)$ o grau do polinômio P. Finalmente, uma vez que a ordem singular de um produto de distribuições é igual à soma das ordens singulares dos termos individuais, enquanto que a ordem singular de uma soma de distribuições é igual à maior ordem singular dos adendos, será válido em geral que $\omega_-[d] = \omega_0[d]$ e o Teorema 4.5 será aplicável.

É justo indicar, a despeito disto, que nem todas as distribuições causais são covariantes de Lorentz –vide, por exemplo, o caso (3) na Seç. 4.10–. Em tais distribuições um termo da forma $1/p_{j-}^r$ está presente. Embora para tais termos tem-se que $\omega_- = 0 > -r = \omega_0$, e será sempre válido que $\omega_-[d] > \omega_0[d]$, não deve-se pensar por isto que o Teorema 4.5 possa ser-lhes aplicado, pois em tais circunstâncias a covariância de Lorentz não pode ser uma condição de normalização para as distribuições de transição, uma vez que ela não poderá ser atingida. Nesses casos, a condição de normalização anterior deve ser substituída pela condição de invariância (perturbativa) do operador S físico, isto é, dos elementos de matriz do operador S entre estados físicos. Um exemplo de teoria com este comportamento é a QED no gauge do plano nulo, em que as distribuições causais não são covariantes de Lorentz; a matriz S física, sem embargo, é invariante de Lorentz devido à invariância de gauge quântica. À sustentação do proferido dedicaremos o Cap. 6.

Finalmente, o problema da normalizabilidade de uma teoria particular significa examinar a conexão entre a ordem singular das distribuições de transição e a ordem do termo perturbativo a que pertencem. Para tal basta, certamente, considerar a ordem singular da distribuição causal no lugar da da distribuição de transição, pois todos os termos com $\omega_-[r] > \omega_-[d]$ são removidos com a única condição de preservação da ordem singular (que é uma condição técnica mais bem que física). Assim, precisar-se-á de condições físicas para fixar os termos $C_b(x^-)$ até a ordem $\omega_-[d]$ só. A seguinte classificação é aplicada [100, 107, 180]:

(i) *Não-normalizãvel*: Se um número infinito de condições físicas é requerido para fixar por completo o operador de espalhamento. Isto ocorre se a ordem singular da distribuição causal se incrementa sem limite com a ordem perturbativa n.

(ii) *Normalizável*: Se um número finito de condições físicas basta para fixar todos os termos de normalização, isto é, se a ordem singular da distribuição causal é uma função limitada da ordem n do termo perturbativo. Isto pode acontecer de duas formas:

(ii-1) Se $\omega_-[d]$ não depende da ordem perturbativa n, então a teoria se chama simplesmente *normalizável*.

(ii-2) Se somente um número finito de distribuições causais de baixa ordem têm ordem singular não-negativa, *id est*, se $\omega_-[d_n]$ é uma função decrescente de n, então a teoria se denomina *super-normalizável*.

4.8 Unitariedade do operador de espalhamento

Prosseguimos este capítulo centrando nossa atenção no axioma da unitariedade do operador de espalhamento, cuja versão não-perturbativa está enunciada na Eq. (4.8), e a perturbativa, na Eq. (4.32). Essa última forma será a que adotaremos na filosofia da TPC. O que desejamos averiguar é se o processo indutivo descrito nas seções prévias respeita este axioma, isto é, se a distribuição de transição T_n construída pelo procedimento indutivo satisfaz à Eq. (4.32).

Teorema 4.6: *Seja $T_1(x)$ a distribuição de um ponto de uma teoria de interação. Se T_1 satisfaz à condição de unitariedade perturbativa, Eq. (4.32), então as distribuições de n pontos podem ser construídas pelo procedimento indutivo da TPC de forma a satisfazer à mesma condição de unitariedade.*

Prova: A prova desse teorema será dada pelo método da indução matemática completa. Como o primeiro passo do procedimento indutivo é hipótese, suponhamos agora que, para todo $m \leq n-1$:

$$\widetilde{T}_m = T_m^\dagger \quad . \tag{4.160}$$

Queremos provar a mesma tese como válida para n. Denotaremos os conjuntos $X = \{x_1; \cdots ; x_n\}$ e $Y = \{x_1; \cdots ; x_{n-1}\}$. A distribuição avançada da ordem n é definida na Eq. (4.36), e pode também escrever-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_n(Y; x_n) &= \sum_{\substack{I\cup J = X \\ I\cap J = \emptyset \\ x_n \in J}} \widetilde{T}(I) T(J) \\ &= \sum_{\substack{I\cup J = X \\ I\cap J = \emptyset}} \widetilde{T}(I) T(J) - \sum_{\substack{I\cup J = X \\ I\cap J = \emptyset \\ x_n \in I}} \widetilde{T}(I) T(J) \\ &= - \sum_{\substack{I\cup J = X \\ I\cap J = \emptyset}} \widetilde{T}(I) T(J) \\ &= -\widetilde{T}_n(X) - \sum_{\substack{I\cup J = X \\ I\cap J = \emptyset \\ x_n \in I \\ J \neq \emptyset}} \widetilde{T}(I) T(J) \quad . \end{aligned} \tag{4.161}$$

Aqui, para passar da segunda igualdade à terceira tem-se usado a Eq. (4.20), e na separação do termo $\widetilde{T}_n(X)$ para passar da terceira à quarta linha, a Eq. (4.17). No último termo da Eq. (4.161) somente aparecem distribuições de menos de n pontos, nas quais a hipótese da Eq.

(4.160) é válida; aplicando-a e comparando com a Eq. (4.40), vê-se que a citada soma é igual ao adjunto da distribuição avançada subsidiária, $A'_n(Y;x_n)^\dagger$. Portanto, obteve-se que:

$$A_n(Y;x_n) = -\widetilde{T}_n(X) - A'_n(Y;x_n)^\dagger \quad . \tag{4.162}$$

Analogamente, obtém-se para a distribuição retardada:

$$R_n(Y;x_n) = -\widetilde{T}_n(X) - R'_n(Y;x_n)^\dagger \quad . \tag{4.163}$$

Essas duas equações são completadas com as Eqs. (4.39), repetidas aqui por claridade:

$$A_n(Y;x_n) = T_n(X) + A'_n(Y;x_n) \quad , \quad R_n(Y;x_n) = T_n(X) + R'_n(Y;x_n) \quad . \tag{4.164}$$

Das Eqs. (4.162)-(4.164) obtém-se:

$$D_n(Y;x_n) = R'_n(Y;x_n) - A'_n(Y;x_n) = -R'_n(Y;x_n)^\dagger + A'_n(Y;x_n)^\dagger = -D_n(Y;x_n)^\dagger \, , \tag{4.165}$$

e a distribuição causal é antissimétrica. Essa propriedade pode ser mantida após o procedimento de divisão. Com efeito, seja $(R_{n,1}; A_{n,1})$ uma solução qualquer ao problema da divisão, suas partes antissimétricas,

$$R_{n,2} := \frac{1}{2}(R_{n,1} - R^\dagger_{n,1}) = -R^\dagger_{n,2} \quad \text{e} \quad A_{n,2} := \frac{1}{2}(A_{n,1} - A^\dagger_{n,1}) = -A^\dagger_{n,2} \quad , \tag{4.166}$$

constituem também uma solução, pois devido à Eq. (4.165):

$$R_{n,2} - A_{n,2} = \frac{1}{2}(R_{n,1} - A_{n,1}) - \frac{1}{2}(R^\dagger_{n,1} - A^\dagger_{n,1}) = \frac{1}{2}D_n - \frac{1}{2}D^\dagger_n = D_n \quad . \tag{4.167}$$

Assim, se for usada a solução antissimétrica, da Eq. (4.162) decorre que:

$$\widetilde{T}_n(X)^\dagger = -A_{n,2}(Y;x_n)^\dagger - A'_n(Y;x_n) = A_{n,2}(Y;x_n) - A'_n(Y;x_n) = T_n(X) \quad , \tag{4.168}$$

que é a tese do teorema. ■

Devido ao Teorema 4.6, poder-se-ia relegar a condição da unitariedade a uma consequência do procedimento indutivo. Porém, se assim fosse feito, não teriamos motivos para exigir que o primeiro termo satisfaça à Eq. (4.32), nem para considerar especialmente a solução antissimétrica ao problema da divisão: O axioma da unitariedade tem importância *per se* na construção de uma teoria com significado físico. Adicionalmente, o fato de que a parte antissimétrica das soluções gerais ao problema da divisão seja também uma solução significa que a dita antissimetria somente pode ser destruída por termos instantâneos; em outras palavras, o procedimento de levar a solução arbitrária à solução antissimétrica é um procedimento de normalização em que a unitariedade é exigida como condição física adicional.

Mais ainda, pela construção mostrada na prova do Teorema 4.6, a unitariedade é compa-

tível com as condições de covariância de Lorentz e preservação da ordem singular, o que pode ser compreendido simplesmente tomando, no procedimento anterior, $R_{n,1}$ e $A_{n,1}$ como as distribuições obtidas após a imposição das outras condições, as quais, evidentemente, não são perdidas no procedimento subsequente.

Como resultado da análise até aqui feita, pode-se afirmar que na dinâmica da frente de luz existe uma solução bem definida aos axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov.

4.9 Fatorização de polinômios na distribuição causal

Embora as fórmulas de divisão da distribuição causal possam parecer de difícil implementação prática, uma simplificação muito importante dos cálculos pode obter-se de um resultado geral que se segue das mesmas, e que será motivo de discussão na presente seção, estabelecendo de passo o método de cálculo que usaremos nos capítulos seguintes. O mencionado resultado, inspirado na técnica conhecida como «regularização diferencial» – introduzida por Freedman na Ref. [181]–, é o seguinte.

Teorema 4.7: *Para qualquer polinômio $P(p)$, se $\hat{r}_1(p)$ é uma distribuição retardada correspondente à distribuição causal $\hat{d}_1(p)$, então $P(p)\hat{r}_1(p)$ o é em relação à distribuição $\hat{d}(p) = P(p)\hat{d}_1(p)$.*

Prova: Sem perda de generalidade, pode-se considerar o caso em que $P(p)$ é um monômio, pois as fórmulas de divisão da distribuição causal são lineares nessa. Seja, pois:

$$\hat{d}(p) = (p^2)^n \hat{d}_1(p) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad . \tag{4.169}$$

A prova do teorema recém enunciado se simplifica notavelmente realizando uma rotação no espaço $\mathbb{R}^m$ de tal sorte que se tenha $p = ((p_+; 0_\perp; p_-); 0 \cdots ; 0)$. Nestas coordenadas, a distribuição da Eq. (4.169) adota a forma:

$$\hat{d}(p_+; 0_\perp; p_-) = 2^n p_-^n p_+^n \hat{d}_1(p_+; 0_\perp; p_-) \quad . \tag{4.170}$$

Mas no processo de divisão a variável p_- não intervém, então para essa operação pode considerar-se o fator p_-^n como uma constante; como consequência, não leva a nenhuma perda de generalidade considerar distribuições causais da forma:

$$\hat{d}(p_+) = p_+^n \hat{d}_1(p_+) \quad , \tag{4.171}$$

em que usa-se a notação $\hat{d}(p_+) \equiv \hat{d}(p_+; 0_\perp; p_-)$. Suponhamos agora que a ordem singular de $\hat{d}_1(p_+)$ é ω_-^1, então a ordem singular da distribuição completa $\hat{d}(p_+)$ é:

$$\omega_- = \omega_-^1 + n \quad . \tag{4.172}$$

Tem de ser distinguidos três casos, pois as fórmulas de divisão para ordem singular negativa e não-negativa são diferentes.

(1) $\omega_-^1 < 0$ e $\omega_- < 0$: Nesse caso a distribuição retardada é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p_+) &= \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}(p_+-k)^n \hat{d}_1(p_+-k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!(-1)^l}{l!(n-l)!}p_+^{n-l}k^l\hat{d}_1(p_+-k) \quad .\end{aligned} \tag{4.173}$$

Separando na soma o termo com $l=0$:

$$\hat{r}(p_+) = p_+^n\frac{i}{2\pi}\int\frac{dk}{k+i0^+}\hat{d}_1(p_+-k) + \sum_{l=1}^{n}\frac{n!(-1)^l}{l!(n-l)!}p_+^{n-l}\frac{i}{2\pi}\int dk k^{l-1}\hat{d}_1(p_+-k)\,. \tag{4.174}$$

O primeiro termo nessa equação é $p_+^n\hat{r}_1(p_+)$. Efetuando, nas integrais dentro da soma, a mudança de variável $p_+-k=-q$:

$$k^{l-1} = \sum_{u=0}^{l-1}\frac{(l-1)!}{u!(l-1-u)!}p_+^{l-1-u}q^u \quad , \tag{4.175}$$

com o qual, finalmente:

$$\hat{r}(p_+) = p_+^n\hat{r}_1(p_+) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{u=0}^{l-1}\frac{n!(l-1)!(-1)^l}{l!(n-l)!u!(l-1-u)!}p_+^{n-1-u}\frac{i}{2\pi}\int dq q^u\hat{d}_1(-q) \quad . \tag{4.176}$$

Agora todas as integrais dentro da soma são independentes de p_+ –elas são, ao máximo, distribuições da variável p_-–. Portanto, todos os termos na soma têm a forma de termos de normalização, os quais, então, podem ser escolhidos de forma a cancelá-los, do qual segue que $p_+^n\hat{r}_1(p_+)$ é uma solução ao problema da divisão de $\hat{d}(p_+)$.

(2) $\omega_1^1 < 0$ e $\omega_- \geq 0$: Nesse caso a divisão é feita segundo a fórmula:

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi}\int\frac{dk}{k+i0^+}\left\{(p_+-k)^n\hat{d}_1(p_+-k) - \sum_{l=0}^{\lfloor\omega_-\rfloor+n}\frac{(-1)^l}{l!}p_+^l D_k^l\left[(-k)^n\hat{d}_1(-k)\right]\right\} \quad . \tag{4.177}$$

No primeiro termo usa-se a fórmula do binômio de Newton para escrever:

$$(p_+-k)^n = \sum_{u=0}^{n}\frac{n!}{u!(n-u)!}p_+^u(-k)^{n-u} \quad , \tag{4.178}$$

enquanto que a fórmula de Leibniz pode ser usada para calcular a derivada requerida:

$$D_k^l\left[(-k)^n\hat{d}_1(-k)\right] = \sum_{u=0}^{l}\frac{l!(-1)^n}{u!(l-u)!}(D^u k^n)\left(D_k^{l-u}\hat{d}_1(-k)\right) \quad . \tag{4.179}$$

Entretanto:

$$D^u k^n = \frac{n!}{(a-u)!}k^{a-u} \quad \text{para} \quad u\leq n \quad ; \quad D^u k^n = 0 \quad \text{para} \quad u > n \quad . \tag{4.180}$$

Substituindo as Eqs. (4.178)-(4.180) na (4.177) chega-se a:

$$\hat{r}(p_+) = \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\left\{ \sum_{u=0}^{n} \frac{n!}{u!(n-u)!} p_+^u (-k)^{n-u} \hat{d}_1(p_+ - k) \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{\lfloor \omega_-^1 \rfloor + n} (-1)^{n+l} p_+^l \sum_{u=0}^{\min\{l;n\}} \frac{n!}{u!(l-u)!(n-u)!} k^{n-u} D_k^{l-u} \hat{d}_1(-k) \right\} \quad . \tag{4.181}$$

Desde que $\omega_-^1 < 0$, a soma sobre l termina em $\lfloor \omega_-^1 \rfloor + n < n$, então $\min\{l;n\} = l$; também, separando o termo com $u = n$ na primeira soma da Eq. (4.181):

$$\hat{r}(p_+) = p_+^n \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\hat{d}_1(p_+ - k) \\ + \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\left\{ \sum_{u=0}^{n-1} \frac{n!}{u!(n-u)!} p_+^u (-k)^{n-u} \hat{d}_1(p_+ - k) \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{\lfloor \omega_-^1 \rfloor + n} (-1)^{n+l} p_+^l \sum_{u=0}^{l} \frac{n!}{u!(l-u)!(n-u)!} k^{n-u} D_k^{l-u} \hat{d}_1(-k) \right\} \quad . \tag{4.182}$$

O primeiro termo é reconhecido como sendo $p_+^n \hat{r}_1(p_+)$, pois $\omega_-^1 < 0$. Por outro lado, nas somas entre as chaves todos os termos contêm potências não nulas de k, pois nessas somas é $u < n$; assim, o denominador $k + i0^+$ é cancelado na integral da segunda linha:

$$\hat{r}(p_+) = p_+^n \hat{r}_1(p_+) + \frac{i}{2\pi}\int dk \left\{ \sum_{u=0}^{n-1} \frac{n!(-1)^{n-u}}{u!(n-u)!} p_+^u k^{n-u-1} \hat{d}_1(p_+ - k) \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{\lfloor \omega_-^1 \rfloor + n} (-1)^{n+l} p_+^l \sum_{u=0}^{l} \frac{n!}{u!(l-u)!(n-u)!} k^{n-u-1} D_k^{l-u} \hat{d}_1(-k) \right\} \quad . \tag{4.183}$$

Fazendo a mudança de variável $k = p_+ + q$ na primeira soma, pode-se escrever:

$$k^{n-u-1} = \sum_{l=0}^{n-u-1} \frac{(n-u-1)!}{l!(n-u-1-l)!} p_+^{n-u-1-l} q^l \quad , \tag{4.184}$$

de modo que obtemos, finalmente:

$$\hat{r}(p_+) = p_+^n \hat{r}_1(p_+) + \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-u-1} \frac{n!(n-u-1)!(-1)^{n-u}}{u!(n-u)!l!(n-u-1-l)!} p_+^{n-1-l} \frac{i}{2\pi}\int dq q^l \hat{d}_1(-q) \\ - \sum_{l=0}^{\lfloor \omega_-^1 \rfloor + n} (-1)^{n+l} p_+^l \sum_{u=0}^{l} \frac{n!}{u!(l-u)!(n-u)!} \frac{i}{2\pi}\int dk k^{n-u-1} D_k^{l-u} \hat{d}_1(-k) \, . \tag{4.185}$$

Como no caso (1), todas as integrais nas somas são distribuições da variável p_- só, e têm, como consequência, a forma de termos de normalização: A distribuição $p_+^n \hat{r}_1(p_+)$ é uma distribuição retardada para $\hat{d}(p_+)$.

(3) $\omega_-^1 \geq 0$ e $\omega_- \geq 0$: Para estudar esse último caso, voltemos à Eq. (4.181). Agora é

$\lfloor\omega_-^1\rfloor + n \geq n$, de forma que pode-se separar a soma sobre l em duas partes, a uma desde $l = 0$ até $l = n-1$, em que $\min\{l;n\} = l$, e a outra desde $l = n$ até $l = \lfloor\omega_-^1\rfloor + n$, em que $\min\{l;n\} = n$; nessa última parte, além disso, é útil redefinir o índice da soma segundo: $l \to l - n$. Se adicionalmente separa-se o termo com $u = n$ na primeira soma da Eq. (4.181), chegar-se-á à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p_+) =& \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\Bigg\{ p_+^n \hat{d}_1(p_+ - k) + \sum_{u=0}^{n-1} \frac{n!(-1)^{n-u}}{u!(n-u)!} p_+^u k^{n-u} \hat{d}_1(p_+ - k) \\ &- \sum_{l=0}^{\lfloor\omega_-^1\rfloor} (-1)^l p_+^{l+n} \sum_{u=0}^{n} \frac{n!}{u!(l+n-u)!(n-u)!} k^{n-u} D_k^{l+n-u} \hat{d}_1(-k) \\ &- \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-l} p_+^l \sum_{u=0}^{l} \frac{n!}{u!(l-u)!(n-u)!} k^{n-u} D_k^{l-u} \hat{d}_1(-k) \Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{4.186}$$

Na soma da primeira linha aplicamos a mudança de variável $k = p_+ + q$ e usamos a fórmula do binômio de Newton como o temos feito nos casos anteriores. Também, na soma da segunda linha separamos o termo com $u = n$ e o agrupamos com o primeiro termo da primeira linha. Obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p_+) =& p_+^n \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\left\{ \hat{d}_1(p_+ - k) - \sum_{l=0}^{\lfloor\omega_-^1\rfloor} (-1)^l \frac{p_+^l}{l!} D_k^l \hat{d}_1(-k) \right\} \\ &+ \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-u-1} \frac{n!(n-u-1)!(-1)^{n-u}}{u!l!(n-u)!(n-u-1-l)!} p_+^{n-l-1} \frac{i}{2\pi}\int dq q^l \hat{d}_1(-q) \\ &- \sum_{l=0}^{\lfloor\omega_-^1\rfloor} (-1)^l p_+^{l+n} \sum_{u=0}^{n-1} \frac{n!}{u!(l+n-u)!(n-u)!} \frac{i}{2\pi}\int dk k^{n-u} D_k^{l+n-u} \hat{d}_1(-k) \\ &- \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-l} p_+^l \sum_{u=0}^{l} \frac{n!}{u!(l-u)!(n-u)!} \frac{i}{2\pi}\int dk k^{n-u} D_k^{l-u} \hat{d}_1(-k) \Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{4.187}$$

Na primeira linha da Eq. (4.187) reconhece-se a fórmula de divisão de $\hat{d}_1(p_+)$, a qual tem ordem singular $\omega_-^1 \geq 0$, então dita linha é exatamente $p_+^n \hat{r}_1(p_+)$. As outras linhas contêm somente termos de normalização. Sendo este o último caso, concluímos que uma distribuição retardada de $\hat{d}(p_+)$ pode sempre ser obtida por divisão de $\hat{d}_1(p_+)$, *quod erat demonstrandum*. ■

O Teorema 4.7 é conveniente para propósitos práticos porque, sendo suficiente efetuar a divisão de $\hat{d}_1(p_+)$ –menos singular que $\hat{d}(p_+)$, segundo a Eq. (4.172)–, um menor número de subtrações precisa ser calculado.

4.10 Propagadores de Feynman dos campos quantizados livres

Finalizamos este capítulo com a aplicação das fórmulas de divisão obtidas para a obtenção da parte retardada das distribuições de (anti-)comutação dos operadores de campo

quantizado escalar, fermiônico e vetorial sem massa, primeiro, e os correspondentes propagadores de Feynman depois. Essas distribuições de (anti-)comutação foram obtidas no Cap. 3 [vide as Eqs. (3.89), (3.139) e (3.153), respectivamente], e serão de utilidade nas aplicações que estudaremos nos seguintes capítulos.

(1) Campo escalar. A distribuição de comutação do operador de campo escalar quantizado livre é:

$$\widehat{D}(p) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{sgn}\,(p_-)\,\delta(p^2 - m^2) \quad . \tag{4.188}$$

Utilizando a definição que contém à Eq. (4.122) é fácil corroborar que a ordem singular dessa distribuição é $\omega_- = -2 < 0$, então a fórmula da Eq. (4.130) deve ser usada para obter sua parte retardada; considerando também a Eq. (4.131):

$$\widehat{D}^{\mathrm{ret}}_{\mathfrak{b}}(p) = -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{dkdq}{k+i0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\mathrm{sgn}(q)\delta\left(2p_+q - 2kq - \omega_p^2\right) \quad . \tag{4.189}$$

Efetuando a mudança $s = -2kq$, encontra-se:

$$\begin{aligned}\widehat{D}^{\mathrm{ret}}_{\mathfrak{b}}(p) &= (2\pi)^{-5/2}\int \frac{\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)}{s - iq0^+}\delta(s + 2p_+q - \omega_p^2)dsdq \\ &= -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)dq}{2p_+q - p_\perp^2 - m^2 + iq0^+} \\ &\xrightarrow{\mathfrak{b}\to 1} -(2\pi)^{-2}\frac{1}{p^2 - m^2 + ip_-0^+} \quad .\end{aligned} \tag{4.190}$$

Por outro lado, a parte de frequência negativa da distribuição de comutação do campo escalar é, no espaço dos momentos:

$$\widehat{D}_-(p) = -\frac{i}{2\pi}\Theta\,(-p_-)\,\delta(p^2 - m^2) \quad , \tag{4.191}$$

de forma que, usando a formula de Sokhotskiy [175], o propagador de Feynman do campo escalar será:

$$\widehat{D}^F(p) := \widehat{D}^{\mathrm{ret}}(p) - \widehat{D}_-(p) = -(2\pi)^{-2}\frac{1}{p^2 - m^2 + i0^+} \quad . \tag{4.192}$$

Esse resultado é igual àquele obtido na dinâmica instantânea.

(2) Campo fermiônico. A distribuição de anti-comutação do campo fermiônico tem a expressão seguinte:

$$\widehat{S}(p) = \frac{i}{2\pi}(\not{p} + m)\mathrm{sgn}\,(p_-)\,\delta(p^2 - m^2) \quad . \tag{4.193}$$

Essa distribuição tem a ordem singular $\omega_- = -1 < 0$. Para sua divisão a substituímos pela distribuição causal auxiliar:

$$\widehat{S}_{\mathfrak{b}}(p) = i(2\pi)^{-3/2}\int dq\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)(p_+\gamma^+ + q\gamma^- + p_\perp\gamma^\perp + m)\mathrm{sgn}(q)\delta(2p_+q - \omega_p^2) \quad , \tag{4.194}$$

cuja parte retardada é dada por:

$$\widehat{S}^{\rm ret}_{\mathfrak{b}}(p) = -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{dkdq}{k+i0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\left[(p_+ - k)\gamma^+ + p_\perp\gamma^\perp + q\gamma^- + m\right] \times \mathrm{sgn}(q)\delta(2p_+q - 2kq - \omega_p^2) \quad . \tag{4.195}$$

Como outrora, usar-se-á a variável $s = -2kq$, em função da qual a integral anterior é igual a:

$$\begin{aligned}\widehat{S}^{\rm ret}_{\mathfrak{b}}(p) &= (2\pi)^{-5/2}\int \frac{dsdq}{s - iq0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\delta(s + 2p_+q - \omega_p^2) \\ &\quad\times\left(p_+\gamma^+ + p_\perp\gamma^\perp + q\gamma^- + m + \frac{s}{2q}\gamma^+\right) \\ &= -(2\pi)^{-5/2}\int dq\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\frac{\not{p} - (p_- - q)\gamma^- + m - \dfrac{2p_+q - \omega_p^2}{2q}\gamma^+}{2p_+q - \omega_p^2 + iq0^+}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -(2\pi)^{-5/2}\int dq\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\left(\frac{\not{p} - (p_- - q)\gamma^- + m}{p^2 - m^2 - 2p_+(p_- - q) + iq0^+} - \frac{\gamma^+}{2q}\right) \\ &\xrightarrow{\mathfrak{b}\to 1} -(2\pi)^{-2}\left(\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + ip_-0^+} - \frac{\gamma^+}{2p_-}\right) \quad .\end{aligned} \tag{4.196}$$

Finalmente, desde que a parte de frequência negativa da distribuição de anti-comutação do campo de Dirac é igual a

$$\widehat{S}_-(p) = -\frac{i}{2\pi}\Theta(-p_-)(\not{p} + m)\delta(p^2 - m^2) \quad , \tag{4.197}$$

o propagador de Feynman fermiônico será:

$$\widehat{S}^F(p) := \widehat{S}_-(p) - \widehat{S}^{\rm ret}(p) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0^+} - \frac{\gamma^+}{2p_-}\right) \quad . \tag{4.198}$$

Observa-se que no processo de divisão da distribuição causal, a distribuição retardada adquire um termo instantâneo, que é herdado pelo propagador de Feynman, e que é conhecido na literatura do plano nulo já desde o trabalho de Kogut e Soper [21].

(3) Campo vetorial sem massa. A distribuição de comutação a ser dividida é:

$$\widehat{D}_{ab}(p) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{sgn}(p_-)\,\delta(p^2)\left(g_{ab} - \frac{p_a\eta_b + \eta_a p_b}{p_-}\right) \quad . \tag{4.199}$$

Algumas de suas componentes têm ordem singular $\omega_- = -2$, enquanto que outras, $\omega_- = -1$. Em qualquer caso, a ordem singular é negativa, e a distribuição retardada deve ser obtida pelo uso da Eq. (4.130). Para fazer a divisão é conveniente definir as seguintes distribuições:

$$\hat{d}_1(p) := \frac{i}{2\pi}\mathrm{sgn}(p_-)\,\delta(p^2) \quad , \quad \hat{d}_{2a}(p) := \frac{i}{2\pi}\mathrm{sgn}(p_-)\,\delta(p^2)\frac{p_a}{p_-} \quad ; \tag{4.200}$$

em função das quais a distribuição de comutação do campo vetorial sem massa se escreve:

$$\widehat{D}_{ab}(p) = g_{ab}\hat{d}_1(p) - \left[\hat{d}_{2a}(p)\eta_b + \eta_a\hat{d}_{2b}(p)\right] \quad . \tag{4.201}$$

Então obter a parte retardada de $\widehat{D}_{ab}$ se reduz a calcular as partes retardadas de $\hat{d}_1$ e $\hat{d}_{2a}$, com o uso da Eq. (4.130). Encontra-se –como nos outros casos, usa-se a variável $s = -2kq$–:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_{1,\mathfrak{b}}(p) &= -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{dkdq}{k+i0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\mathrm{sgn}(q)\delta(2p_+q - 2kq - p_\perp^2) \\
&= (2\pi)^{-5/2}\int \frac{dsdq}{s-iq0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\delta(s + 2p_+q - p_\perp^2) \\
&= -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{dq\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)}{2p_+q - p_\perp^2 + iq0^+} \\
&\xrightarrow{\mathfrak{b}\to 1} -(2\pi)^{-2}\frac{1}{p^2 + ip_-0^+} \quad .
\end{aligned} \tag{4.202}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_{2\{+;\alpha;-\},\mathfrak{b}}(p) &= -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{dkdq}{k+i0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\mathrm{sgn}(q)\delta(2p_+q - 2kq - p_\perp^2)\frac{1}{q}\{p_+ - k; p_\alpha; q\} \\
&= (2\pi)^{-5/2}\int \frac{dsdq}{s-iq0^+}\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)\delta(s + 2p_+q - p_\perp^2)\frac{1}{q}\left\{p_+ + \frac{s}{2q}; p_\alpha; q\right\} \\
&= -(2\pi)^{-5/2}\int \frac{dq\hat{\mathfrak{b}}(p_- - q)}{2p_+q - p_\perp^2 + iq0^+}\left\{\frac{p_+}{q} - \frac{2p_+q - p_\perp^2}{2q^2}; \frac{p_\alpha}{q}; 1\right\} \\
&\xrightarrow{\mathfrak{b}\to 1} -(2\pi)^{-2}\frac{1}{p^2 + ip_-0^+}\left\{\frac{p_+}{p_-} - \frac{p^2}{2p_-^2}; \frac{p_\alpha}{p_-}; 1\right\} \quad .
\end{aligned} \tag{4.203}$$

As Eqs. (4.201)-(4.203) implicam que a parte retardada da distribuição de comutação do campo vetorial sem massa é [vide a Eq. (4.201)]:

$$\widehat{D}^{\mathrm{ret}}_{ab}(p) = -\frac{(2\pi)^{-2}}{p^2 + ip_-0^+}\left\{g_{ab} - \frac{p_a\eta_b + \eta_a p_b}{p_-} + \frac{p^2}{2p_-^2}\left[\delta_{a+}\eta_b + \eta_a\delta_{b+}\right]\right\} \quad . \tag{4.204}$$

Mas δ_{a+} são precisamente as componentes de η_a, donde:

$$\widehat{D}^{\mathrm{ret}}_{ab}(p) = -\frac{(2\pi)^{-2}}{p^2 + ip_-0^+}\left\{g_{ab} - \frac{p_a\eta_b + \eta_a p_b}{p_-} + \frac{p^2}{p_-^2}\eta_a\eta_b\right\} \quad . \tag{4.205}$$

Subtraindo a parte de frequência negativa da distribuição de comutação, que no caso é

$$\widehat{D}_{ab-}(p) = -\frac{i}{2\pi}\Theta(-p_-)\delta(p^2)\left\{g_{ab} - \frac{p_a\eta_b + \eta_a p_b}{p_-}\right\} \quad , \tag{4.206}$$

obtém-se o propagador de Feynman do campo da radiação:

$$\widehat{D}^{F}_{ab}(p) = -\frac{(2\pi)^{-2}}{p^2 + i0^+}\left\{g_{ab} - \frac{p_a\eta_b + \eta_a p_b}{p_-} + \frac{p^2}{p_-^2}\eta_a\eta_b\right\} \quad . \tag{4.207}$$

Outra vez, obtivemos uma parte instantânea no processo da divisão da distribuição causal. O resultado encontrado é conhecido na literatura como o «propagador de gauge duplamente transversal», nome esse dado porque $\widehat{D}^F_{ab}(p)$ é transversal tanto a p^a como a η^a [25, 26, 182], e ao que chegamos aqui de forma natural.

Observamos, finalmente, que as ordens singulares das distribuições retardadas obtidas são as mesmas que as correspondentes às distribuições causais das quais elas provêm, exceto pelos termos instantâneos obtidos nos casos fermiônico e vetorial, que em ambos casos têm ordem singular nula. Presentemente, não existem argumentos para modificar esses termos instantâneos, pois as condições físicas do processo de normalização devem ser impostas às distribuições de transição T; os propagadores não são observáveis físicos. É mister então voltar-nos ao estudo de processos reais.

Capítulo 5

Modelo de Yukawa

O primeiro modelo a que aplicaremos nossas conclusões no que se refere à TPC no plano nulo será o modelo de Yukawa. Este foi inicialmente proposto para descrever a interação entre mésons (partículas bosônicas, quer escalares, quer pseudo-escalares) e núcleons (férmions considerados «elementais» para os fins dessa teoria), os quais experimentam as forças nucleares de curto alcance que mantêm os prótons e néutrons juntos no núcleo do átomo. A história do seu desenvolvimento é narrada nas Refs. [183, 184, 185, 186]. O primeiro passo foi dado por Heisenberg, que propôs considerar prótons e néutrons como dois estados de uma mesma e só partícula, chamada «núcleon»; tais estados se diferenciavam em sua teoria por uma propriedade interna a que se deu o nome de «iso-spin». Clássicamente, em 1935 Yukawa [189] observou que um potencial de curto alcance, da forma

$$\varphi \sim \frac{e^{-\varkappa r}}{r} \quad , \tag{5.1}$$

pode ser obtido como a solução estática e esféricamente simétrica da equação $(\Box + \varkappa^2)\varphi = 0$. Ainda mais, da informação experimental ele conseguiu estimar o valor do parâmetro $\varkappa \sim 5 \times 10^{-12}\ \mathrm{cm}^{-1}$. A equação de potencial de Yukawa, reconhece-se, não é senão a equação de Klein-Gordon-Fock em que o parâmetro $\varkappa$ identifica-se com a massa da partícula por ela descrita: $\varkappa = mc/\hbar$, donde a partícula de Yukawa, a que ele deu o nome de «*U-quantum*» ou também «*heavy quantum*», teria massa aproximada de $m \approx 200\ m_e$, com m_e a massa do elétron. Analogamente à interação eletromagnética, cuja origem quântica se encontra no «intercâmbio» de fótons entre partículas carregadas, Yukawa propôs que a interação entre núcleons fosse o resultado de certas combinações dos processos virtuais $N \leftrightarrow N' + \pi$, com $N,\ N'$ núcleons e π o méson de Yukawa. Ele propôs o acoplamento:

$$H_{\mathrm{int}} \sim \overline{N} N \pi \quad . \tag{5.2}$$

Assumindo este como válido, a conservação do momento angular implica que o spin do *U-quantum* deve ser inteiro, e a partícula, portanto, bosônica, mas não estava claro se o spin seria zero ou um. O seguinte passo no desenvolvimento do modelo foi dado por Kemmer em 1938 [190], que estabeleceu a independência da carga das interações nucleares, isto é, que o potencial nuclear é independente dos tipos de núcleon considerados: $V_{pp} = V_{nn} = V_{np}$. O argumento de Wick [191] para estimar o alcance dessa interação usando as desigualdades de Heisenberg implica que não há somente mésons carregados –necessários para a explicação da desintegração nuclear–, mas também há um méson neutro, pois sem ele o alcance do

potencial entre dois núcleons iguais seria por volta da metade daquele existente entre núcleons diferentes, violando a independência da carga. Semelhante teoria com três mésons recebeu o nome de «teoria simétrica». Foi também Kemmer [192] que apontou para a possibilidade dos mésons de Yukawa serem pseudo-escalares; a teoria assim construída se mostrava mais simples para o tratamento do momento magnético anômalo dos núcleons [183]. Experimentalmente, as partículas de Yukawa foram primeiro procuradas nos raios cósmicos. Após uma confusão com o assim chamado «méson μ» –que posteriormente identificou-se como sendo um férmion–, foi finalmente descoberto que os *U-quanta* são as partículas às que hoje se denomina píons: π^+, π^- e π^0.

O modelo de Yukawa assim completado pode já ser matematicamente inscrito no formalismo do iso-spin [100, 183]: Os núcleons constituem um dubleto de espinores sob rotações no espaço de iso-spin, Ψ, enquanto que os píons formam um tripleto no mesmo, $\boldsymbol{\pi}$. As rotações no espaço de iso-spin no caso bi-dimensional são geradas pelas matrizes de Pauli τ_1, τ_2 e τ_3. Portanto, a densidade lagrangiana de interação, invariante sob rotações no espaço de iso-spin, é[1]

$$\mathscr{L} = i\mathfrak{g} \ :\overline{\Psi}\gamma^5\boldsymbol{\tau}\Psi\cdot\boldsymbol{\pi}: \quad . \tag{5.3}$$

Por simplicidade, considerar-se-á neste trabalho o denominado «modelo neutro»[2]:

$$\mathscr{L} = i\mathfrak{g} \ :\overline{\psi}\gamma^5\psi\varphi: \quad , \tag{5.4}$$

com $\overline{\psi}$ e ψ espinores de quatro componentes, e φ um campo pseudo-escalar real de uma só componente. Como dito na Ref. [100], este modelo simplificado mantém os elementos principais daquele mais geral.

É útil mencionar, por outro lado, que na literatura na dinâmica da frente de luz é comum encontrar análises do modelo neutro em que a matriz γ^5 é substituída pela matriz unidade, 1, sob o mesmo nome de «modelo de Yukawa»; obviamente, em tais estudos o méson é escalar mais bem que pseudo-escalar –vide, por exemplo, as Refs. [14, 145, 146]–. Semelhante escolha se justifica pelo aparecimento do acoplamento de Yukawa no modelo padrão da física das partículas como a interação responsável pelas massas dos férmions. Além disso, ela vem sendo estudada nos laboratórios: o acoplamento de Yukawa entre o lépton l_τ e o bóson de Higgs H é estudado na busca por violações CP no acoplamento entre as partículas de Higgs e os férmions, acessíveis ao experimento por colisões próton-próton [193]. Este acoplamento é decomposto em duas partes, uma delas par frente à transformação CP, a outra ímpar:

$$\mathscr{L} \sim H(\kappa_{l_\tau}\overline{l_\tau}l_\tau + \widetilde{\kappa}_{l_\tau}\overline{l_\tau}i\gamma^5 l_\tau) \ ;$$

e o «ângulo de mistura efetivo» $\phi_{\overline{l_\tau}l_\tau} = \tan^{-1}(\widetilde{\kappa}_{l_\tau}/\kappa_{l_\tau})$ é medido, com resultado ao redor de $4 \pm 17^\circ$. Adicionalmente, acoplamentos de Yukawa tri-dimensionais não-massivos a temperatura finita têm sido estudados recentemente por Benghi [194]; particularmente, os

[1] Usamos como definição: $\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

[2] Este tem sido estudado também por Chang e Yan nas Refs. [27, 28] usando o método funcional de Schwinger.

modelos de Gross-Neveau-Yukawa e Nambu–Jona-Lasinio–Yukawa.

No capítulo presente estudaremos o modelo de Yukawa neutro com densidade lagrangiana de interação:

$$\mathscr{L}_{\psi\varphi} = -\mathfrak{g}\ :\overline{\psi}\Gamma\psi:\ \varphi \quad ; \quad \Gamma = \begin{cases} 1 & ; \text{ se } \varphi \text{ é escalar} \\ i\gamma^5 & ; \text{ se } \varphi \text{ é pseudo-escalar} \end{cases} , \tag{5.5}$$

com $\mathfrak{g}$ a constante de acoplamento da teoria. A teoria assim construída, é claro, é invariante sob as transformações discretas de paridade[3] e conjugação de carga[4] –e, de acordo ao teorema CPT (vide, por exemplo, a Ref. [88]), também o é sob transformações de reversão temporal–.

5.1 Distribuição causal da segunda ordem

Na linha com o exposto, estudaremos a interação entre o campo neutro de spin zero φ com massa m_2 e o campo fermiônico ψ com massa m_1, tomando a distribuição de transição da primeira ordem, $T_1(x)$, como sendo:

$$T_1(x) = -i\mathfrak{g}\ :\overline{\psi}(x)\Gamma\psi(x):\ \varphi(x) \quad . \tag{5.8}$$

A condição da unitariedade do operador de espalhamento à primeira ordem implica que a constante $\mathfrak{g}$ seja real.

Como estabelecido na exposição da teoria geral, a construção dos seguintes termos na série perturbativa é indutiva. Para a distribuição de dois pontos (da segunda ordem) precisa-se encontrar a distribuição causal da segunda ordem, que é igual a:

$$D_2(x_1;x_2) = R'_2(x_1;x_2) - A'_2(x_1;x_2) \quad , \tag{5.9}$$

com:

$$A'_2(x_1;x_2) = \widetilde{T}_1(x_1)T_1(x_2) \quad \text{e} \quad R'_2(x_1;x_2) = T_1(x_2)\widetilde{T}_1(x_1) \quad . \tag{5.10}$$

Usando que $\widetilde{T}_1(x) = -T_1(x)$ e a Eq. (5.8) chega-se a:

$$A'_2(x_1;x_2) = \mathfrak{g}^2\ :\psi(x_1)\Gamma\psi(x_1):\ :\overline{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2):\ \varphi(x_1)\varphi(x_2) \quad ; \quad R'_2(x_1;x_2) = A'_2(x_2;x_1) \quad . \tag{5.11}$$

[3]No caso quântico, a transformação de paridade é implementada através de um operador linear e unitário $\mathbf{U}_P$ que age sobre os operadores de campo dos campos quantizados segundo [107]:

$$\mathbf{U}_P\psi(x')\mathbf{U}_P^{-1} = i\gamma^0\psi(x)\ ,\ \mathbf{U}_P\overline{\psi}(x')\mathbf{U}_P^{-1} = -i\psi^\dagger(x)\ ,\ \mathbf{U}_P\varphi(x')\mathbf{U}_P^{-1} = \epsilon\varphi(x)\ . \tag{5.6}$$

Aqui, $\epsilon = +1$ se φ é um campo escalar e $\epsilon = -1$ se ele é pseudo-escalar. Ademais, $x' = Px$, com P denotando a transformação de paridade.

[4]Esta transformação é realizada pelo operador linear e unitário $\mathbf{U}_C$, que age nos operadores de campo segundo:

$$\mathbf{U}_C\psi(x)\mathbf{U}_C^{-1} = C\overline{\psi}(x)^T\ ,\ \mathbf{U}_C\overline{\psi}(x)\mathbf{U}_C^{-1} = -\psi(x)^TC^{-1}\ ,\ \mathbf{U}_C\varphi(x)\mathbf{U}_C^{-1} = \varphi(x)\ . \tag{5.7}$$

Nessas equações, C é uma matriz unitária ($C^\dagger C = 1$) com as seguintes propriedades: $C^T = -C$, $C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$.

Estas distribuições são levadas a sua forma normalmente ordenada por aplicação do teorema de Wick, com as seguintes contrações de Wick:

$$\overbrace{\psi_a(x)\overline{\psi}_b}(y) = -iS_{ab+}(x-y) \quad , \quad \overbrace{\overline{\psi}_a(x)\psi_b}(y) = -iS_{ba-}(y-x) \quad , \tag{5.12}$$

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = -iD_+(x-y) \quad . \tag{5.13}$$

Recordamos que as distribuições D e S estão associadas às massas m_2 e m_1, respectivamente. Encontra-se que (usamos a coordenada relativa $y := x_1 - x_2$):

$$\begin{aligned} A_2'(x_1;x_2) = \mathfrak{g}^2 \{ &:\overline{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2): \; + i \; :\overline{\psi}(x_2)\Gamma S_-(-y)\Gamma\psi(x_1): \\ &- i \; :\overline{\psi}(x_1)\Gamma S_+(y)\Gamma\psi(x_2): \; - \mathrm{Tr}\left[S_-(-y)\Gamma S_+(y)\Gamma\right]\} \left[:\varphi(x_1)\varphi(x_2): \; - iD_+(y)\right] \quad , \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} R_2'(x_1;x_2) = \mathfrak{g}^2 \{ &:\overline{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2): \; + i \; :\overline{\psi}(x_1)\Gamma S_-(y)\Gamma\psi(x_2): \\ &- i \; :\overline{\psi}(x_2)\Gamma S_+(-y)\Gamma\psi(x_1): \; - \mathrm{Tr}\left[S_-(y)\Gamma S_+(-y)\Gamma\right]\} \left[:\varphi(x_1)\varphi(x_2): \; - iD_+(-y)\right] \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Portanto, substituindo na Eq. (5.9), agrupando termos e usando que $D_+(-y) = -D_-(y)$, obtém-se a distribuição causal da segunda ordem:

$$D_2(x_1;x_2) = \left(D_2^{(NN)} + D_2^{(MN)} + D_2^{(M)} + D_2^{(N)} + D_2^{(V)}\right)(x_1;x_2) \quad , \tag{5.16}$$

com

$$D_2^{(NN)}(x_1;x_2) = i\mathfrak{g}^2 \; :\overline{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\Gamma\psi(x_2): \; D(y) \tag{5.17}$$

que descreve o espalhamento de dois núcleons,

$$D_2^{(MN)}(x_1;x_2) = i\mathfrak{g}^2 \left(:\overline{\psi}(x_1)\Gamma S(y)\Gamma\psi(x_2): \; - \; :\overline{\psi}(x_2)\Gamma S(-y)\Gamma\psi(x_1): \right) \; :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \tag{5.18}$$

que descreve o espalhamento de um méson por um núcleon, e

$$D_2^{(M)}(x_1;x_2) = -\mathfrak{g}^2 \; :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \; \mathrm{Tr}\left[S_-(y)\Gamma S_+(-y)\Gamma - S_-(-y)\Gamma S_+(y)\Gamma\right] \quad , \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} D_2^{(N)}(x_1;x_2) = &\mathfrak{g}^2 \; :\overline{\psi}(x_1)\Gamma\left(S_+(y)D_+(y) - S_-(y)D_-(y)\right)\Gamma\psi(x_2): \\ &- \mathfrak{g}^2 \; :\overline{\psi}(x_2)\Gamma\left(S_+(-y)D_+(-y) - S_-(-y)D_-(-y)\right)\Gamma\psi(x_1): \end{aligned} \tag{5.20}$$

descrevendo a auto-energia do méson e a do núcleon, respectivamente. Finalmente,

$$D_2^{(V)}(x_1;x_2) = -i\mathfrak{g}^2\mathrm{Tr}\left[S_-(y)\Gamma S_+(-y)\Gamma D_-(y) + S_-(-y)\Gamma S_+(y)\Gamma D_+(y)\right] \tag{5.21}$$

não representa processo físico nenhum, pois não contém em sua expressão operadores de campo assintoticamente livres.

5.2 Espalhamento de um férmion por um bóson

O espalhamento de um férmion por um bóson à segunda ordem é representada pela distribuição causal da Eq. (5.18):

$$D_2^{(MN)}(x_1;x_2) = i\mathfrak{g}^2 \left(:\overline{\psi}(x_1)\Gamma S(y)\Gamma\psi(x_2): - :\overline{\psi}(x_2)\Gamma S(-y)\Gamma\psi(x_1): \right) :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \quad . \tag{5.22}$$

As distribuições numéricas que aqui aparecem são, no espaço real:

$$d(y) := i\mathfrak{g}^2\Gamma S(y)\Gamma \quad \text{e} \quad -d(-y) \quad , \tag{5.23}$$

e no espaço dos momentos:

$$\hat{d}(p) := i\mathfrak{g}^2\Gamma\widehat{S}(p)\Gamma \quad \text{e} \quad -\hat{d}(-p) \quad , \tag{5.24}$$

com $\widehat{S}(p)$ dado na Eq. (4.193). Essa distribuição tem a ordem singular $\omega_- = -1 < 0$, a qual não é alterada pela multiplicação pela matriz constante Γ. Em consequência, a distribuição retardada é simplesmente $\widehat{S}^{\text{ret}}(p)$, e a distribuição numérica da segunda ordem é:

$$\hat{t}(p) = \hat{r}(p) - \hat{r}'(p) = -i\mathfrak{g}^2\Gamma\widehat{S}^F(p)\Gamma \quad , \tag{5.25}$$

com $\widehat{S}^F(p)$ dado pela Eq. (4.198):

$$\widehat{S}^F(p) = (2\pi)^{-2}\left(\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i0^+} - \frac{\gamma^+}{2p_-}\right) \quad . \tag{5.26}$$

Introduzindo a Eq. (5.26) na Eq. (5.25) e usando que $\Gamma\gamma^+ = \epsilon\gamma^+\Gamma$, com $\epsilon = 1$ se $\Gamma = 1$ (φ escalar) e $\epsilon = -1$ se $\Gamma = \gamma^5$ (φ pseudo-escalar), assim como que $\Gamma^2 = \epsilon$:

$$\hat{t}(p) = -i(2\pi)^{-2}\mathfrak{g}^2\Gamma\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i0^+}\Gamma + i(2\pi)^{-2}\mathfrak{g}^2\frac{\gamma^+}{2p_-} + \widehat{C}\,(p_-) \quad , \tag{5.27}$$

com $\widehat{C}\,(p_-)$ uma distribuição de normalização com ordem singular $\omega_- = 0$ no eixo x^-. A exigência da invariância de Lorentz requer a seguinte escolha:

$$\widehat{C}\,(p_-) = -i(2\pi)^{-2}\mathfrak{g}^2\frac{\gamma^+}{2p_-} \quad , \tag{5.28}$$

pois com ela o termo instantâneo da distribuição de transição cancela-se. A contribuição deste termo ao operador de espalhamento da segunda ordem é, no limite adiabático:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 \;& :\varphi(x_1)\overline{\psi}(x_1)\mathfrak{g}^2\delta(y)\frac{\gamma^+}{2\partial_-}\varphi(x_2)\psi(x_2): \\ &= \int d^4x_1 \;:\varphi(x_1)\overline{\psi}(x_1)\mathfrak{g}^2\frac{\gamma^+}{4\partial_-}\varphi(x_1)\psi(x_1): \quad ,\end{aligned} \tag{5.29}$$

com a derivada inversa definida segundo [13]:

$$\frac{1}{\partial_-} f(x^-) := \frac{1}{2}\int dy^- \mathrm{sgn}(x^- - y^-) f(y^-) \quad .$$

Isto é, o termo de interação instantânea na densidade lagrangiana do formalismo padrão –vide as Refs. [28, 195]– é gerado como um termo de normalização na TPC no plano nulo após exigir a invariância de Lorentz. O mesmo acontece quando se considera o termo com $-\hat{t}(-p)$, de forma que a contribuição total dos termos de normalização é:

$$\int d^4x_1 \ :\varphi(x_1)\overline{\psi}(x_1)\mathfrak{g}^2\frac{\gamma^+}{2\partial_-}\varphi(x_1)\psi(x_1): \quad . \tag{5.30}$$

Substituindo a Eq. (5.28) na (5.27), também, observa-se que a parte numérica da distribuição de dois pontos $T_2^{(MN)}$ é a mesma que a da dinâmica instantânea [132], o que estabelece a equivalência das duas formas dinâmicas para este processo.

5.3 Auto-energia do méson

Nesta seção estudaremos a auto-energia do méson, focando a atenção na teoria em que este é pseudo-escalar. Assim sendo, $\Gamma = i\gamma^5$, e a distribuição de um ponto é:

$$T_1(x) = \mathfrak{g}\ :\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x): \ \varphi(x) \quad . \tag{5.31}$$

A distribuição causal da segunda ordem correspondente pode-se escrever como –vide a Eq. (5.19)–:

$$D_2^{(M)}(x_1;x_2) = :\varphi(x_1)d(y)\varphi(x_2): \quad , \tag{5.32}$$

com as seguintes definições:

$$d(y) := P(y) - P(-y) \quad \text{e} \quad P(y) := -\mathfrak{g}^2\mathrm{Tr}\left[S_+(y)\gamma^5 S_-(-y)\gamma^5\right] \quad . \tag{5.33}$$

Para ir ao espaço dos momentos, aplica-se a $P(y)$ a transformação de Fourier; obtém-se:

$$\begin{aligned}\widehat{P}(q) &= -(2\pi)^{-2}\mathfrak{g}^2\int d^4p \mathrm{Tr}\left[\widehat{S}_+(p)\gamma^5\widehat{S}_-(p-q)\gamma^5\right] \\ &= -(2\pi)^{-2}\mathfrak{g}^2\int d^4p \mathrm{Tr}\left[(\not{p}+m_1)\gamma^5(\not{p}-\not{q}+m_1)\gamma^5\right]\widehat{D}_+(p)\widehat{D}_-(p-q) \quad .\end{aligned} \tag{5.34}$$

Usando que $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$, o traço na Eq. (5.34) é:

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{p}+m_1)\gamma^5(\not{p}-\not{q}+m_1)\gamma^5\right] = 4\left(m_1^2 - p^2 + pq\right) \quad , \tag{5.35}$$

de forma que, lembrando que $\widehat{D}_\pm(p) = \pm i(2\pi)^{-1}\Theta\left(\pm p_-\right)\delta(p^2 - m_1^2)$:

$$\widehat{P}(q) = \frac{-4\mathfrak{g}^2}{(2\pi)^4}\int d^4p \left(m_1^2 - p^2 + pq\right)\Theta\left(p_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\delta(p^2 - m_1^2)\delta\left((p-q)^2 - m_1^2\right) \ .$$

Os suportes das distribuições delta de Dirac que aparecem no integrando da equação anterior implicam as igualdades:

$$p^2 = m_1^2 \quad \text{e} \quad q^2 = 2pq \quad . \tag{5.36}$$

Assim, a Eq. (5.34) é igual a:

$$\widehat{P}(q) = -2(2\pi)^{-4}\mathfrak{g}^2 q^2 I(q) \quad , \tag{5.37}$$

com:

$$I(q) = \int d^4p \Theta\left(p_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\delta(p^2 - m_1^2)\delta(q^2 - 2pq) \quad . \tag{5.38}$$

Calcular-se-á essa integral em um sistema inercial de referência conveniente. Como $p, q-p \in V^+$, também será: $q = p + (q-p) \in V^+$, donde decorre a existência de um sistema inercial de referência no qual $q = (q_+; 0_\perp; q_-)$. Nele:

$$\begin{aligned} I(q) &= \int d^4p \Theta\left(p_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\frac{1}{|2p_-|}\delta\left(p_+ - \frac{\omega_p^2}{2p_-}\right) \times \delta\left(2q_+q_- - 2q_-p_+ - 2q_+p_-\right) \\ &= \int dp_- d^2p_\perp \Theta\left(p_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\frac{1}{|4q_+|}\delta\left(\left(p_- \frac{q_-}{2}\right)^2 - A^2\right) \quad , \end{aligned} \tag{5.39}$$

com:

$$A := \sqrt{\frac{q_-^2}{4} - \frac{q_-\omega_p^2}{2q_+}} \quad . \tag{5.40}$$

Realizando a integração:

$$\begin{aligned} I(q) &= \int dp_- d^2p_\perp \frac{\Theta\left(p_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)}{|4q_+||2A|}\left\{\delta\left(p_- - \left[\frac{q_-}{2} - A\right]\right) + \delta\left(p_- - \left[\frac{q_-}{2} + A\right]\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{|4q_+|}\Theta(q_-)\Theta(2q_+q_- - 4m_1^2)\int_{m_1^2}^{q_+q_-/2} \frac{d(\omega_p^2)}{\sqrt{\frac{q_-^2}{4} - \frac{q_-\omega_p^2}{2q_+}}} \\ &= \frac{\pi}{2}\Theta(q_-)\Theta(2q_+q_- - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{2q_+q_-}} \quad . \end{aligned} \tag{5.41}$$

Em forma covariante de Lorentz essa integral é:

$$I(q) = \frac{\pi}{2}\Theta\left(q_-\right)\Theta(q^2 - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} \quad , \tag{5.42}$$

e substituindo na Eq. (5.37):

$$\widehat{P}(q) = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-3}\mathfrak{g}^2 q^2 \Theta\left(q_-\right)\Theta(q^2 - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} \quad . \tag{5.43}$$

Logo, a transformada de Fourier da parte numérica da distribuição causal é [vide a Eq. (5.33)]:

$$\hat{d}(q) = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-3}\mathfrak{g}^2 q^2 \mathrm{sgn}\,(q_-)\,\Theta(q^2 - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} \quad . \tag{5.44}$$

Essa é a distribuição cuja parte retardada precisa-se encontrar. Porém, graças ao teorema de fatorização de polinômios (Teorema 4.7 na Seç. 4.9), será suficiente realizar a divisão da distribuição –retornando ao sistema de referência com $q = (q_+; 0_\perp; q_-)$–:

$$\hat{d}_1(q) = \mathrm{sgn}\,(q_-)\,\Theta(2q_+q_- - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{2q_+q_-}} \quad , \tag{5.45}$$

cuja ordem singular no eixo x^- é:

$$\omega_-^1 = 0 \quad , \tag{5.46}$$

facilitando grandemente o cálculo –a ordem singular da distribuição causal completa é $+2$, e sua divisão requeriria um número maior de subtrações–. A parte retardada de $\hat{d}_1$ é então:

$$\hat{r}_1(q) = \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k + i0^+}\left\{\hat{d}_1\,(q_+ - k; 0_\perp; q_-) - \hat{d}_1\,(-k; 0_\perp; q_-)\right\} \quad . \tag{5.47}$$

Substituindo a Eq. (5.45) na (5.47) ter-se-á, usando a variável $s = -2q_-k$:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(q) = -\frac{i}{2\pi}\int \frac{ds}{s - iq_-0^+}\Bigg\{&\Theta(s + 2q_+q_- - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s + 2q_+q_-}} \\ &-\Theta(s - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}}\Bigg\} \quad .\end{aligned} \tag{5.48}$$

Aplicando a fórmula de Sokhotskiy [199] na primeira integral e então fazendo nela a substituição $s + 2q_+q_- \to s$, o que permite juntá-la com o segundo termo da Eq. (5.48), obtém-se:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(q) = &-\frac{i}{2\pi}2q_+q_-\,\mathrm{V.p.}\int_{4m_1^2}^{+\infty}\frac{ds}{s(s - 2q_+q_-)}\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}} \\ &+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(q_-)\,\Theta(2q_+q_- - 4m_1^2)\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{2q_+q_-}} \quad ,\end{aligned} \tag{5.49}$$

em que «V.p.» denota ao «valor principal de Cauchy» da integral escrita à sua direita. Logo, re-inserindo o termo imaginário pelo uso da fórmula de Sokhotskiy e escrevendo já em forma covariante de Lorentz –a qual é obtida pela troca de $2q_+q_-$ por q^2–:

$$\hat{r}_1(q) = -\frac{i}{2\pi}q^2\int_{4m_1^2}^{+\infty}\frac{ds}{s(s - q^2 + iq_-0^+)}\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{s}} \quad . \tag{5.50}$$

Como é provado no Ap. C, esta distribuição retardada pode obter-se como o valor limite da função analítica definida pela substituição do impulso q pela variável complexa $\tilde{q} = q + i\varepsilon\eta \in \mathbb{R}^4 + i\mathbb{R}_0^+ e^-$, com $\varepsilon > 0$ e η o vetor definido na Eq. (2.186). Isto é:

$$\hat{r}_1(\tilde{q}) = -\frac{i}{2\pi}\tilde{q}^2 \int_{4m_1^2}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-\tilde{q}^2)} \sqrt{1-\frac{4m_1^2}{s}} \quad . \tag{5.51}$$

A distribuição retardada correspondente a $\hat{d}(q)$ na Eq. (5.44) é portanto o valor limite da função analítica:

$$\hat{r}(\tilde{q}) = \frac{i\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4}\tilde{q}^4 \int_{4m_1^2}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-\tilde{q}^2)} \sqrt{1-\frac{4m_1^2}{s}} \quad . \tag{5.52}$$

A integral restante pode-se calcular utilizando a seguinte substituição de Euler [196]:

$$\frac{s}{m_1^2} = \frac{(1+x)^2}{x} \quad (0<x<1) \quad ; \quad \frac{ds}{m_1^2} = -\frac{1-x^2}{x^2}dx \quad ; \quad \sqrt{1-\frac{4m_1^2}{s}} = \frac{1-x}{1+x} \quad . \tag{5.53}$$

Definimos também o parâmetro $\tilde{\xi}$ como:

$$\frac{\tilde{q}^2}{m_1^2} = -\frac{(1-\tilde{\xi})^2}{\tilde{\xi}} \quad ; \quad \tilde{\xi} = \frac{\sqrt{1-4m_1^2/\tilde{q}^2}-1}{\sqrt{1-4m_1^2/\tilde{q}^2}+1} \quad . \tag{5.54}$$

Portanto:

$$\int_{4m_1^2}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-\tilde{q}^2)} \sqrt{1-\frac{4m_1^2}{s}} = \frac{1}{m_1^2} \int_0^1 \frac{dx(1-x)^2}{(1+x)^2(x+\tilde{\xi})(x+1/\tilde{\xi})} \quad . \tag{5.55}$$

Como $\tilde{\xi}$ é um número complexo, o integrando não apresenta pólos sobre o eixo real. Ademais, ele é racional, de maneira que pode ser calculada pela técnica de decomposição em frações parciais. Com tal técnica encontra-se que a Eq. (5.55) é igual a:

$$-\frac{1}{m_1^2}\frac{1}{(1-\tilde{\xi})^3}\left[\tilde{\xi}(1+\tilde{\xi})\log(\tilde{\xi}) + 2\tilde{\xi}(1-\tilde{\xi})\right] \quad , \tag{5.56}$$

cuja substituição na Eq. (5.52) leva a:

$$\hat{r}(\tilde{q}) = \frac{i\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4}\tilde{q}^2\left[\frac{1+\tilde{\xi}}{1-\tilde{\xi}}\log(\tilde{\xi}) + 2\right] \quad . \tag{5.57}$$

A partir deste ponto, tomar-se-á o valor limite de $\hat{r}(\tilde{q})$ para $\varepsilon \to 0^+$ (isto é, para $\tilde{q} = q + i\varepsilon\eta \to q$) de forma a obter a distribuição retardada. Como tal limite depende do valor assumido pelo quadrado do momento, q^2, é mister considerarmos as seguintes três regiões de variação dele separadamente:

(I) $q^2 < 0$: Para q do tipo-espaço, a variável $\xi := \lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\xi}$ é real e positiva, de forma que o

limite na Eq. (5.57) pode ser tomado sem complicação nenhuma:

$$\hat{r}(q) = \frac{i\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4} q^2 \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \log(\xi) + 2 \right] \quad . \tag{5.58}$$

(II) $0 < q^2 < 4m_1^2$: Neste caso, o parâmetro ξ é um número complexo com módulo unidade, e pode então ser representado na forma:

$$\xi = e^{i\theta} \quad , \quad q^2 = 4m_1^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad . \tag{5.59}$$

Portanto:

$$\frac{1+\xi}{1-\xi} \log(\xi) = 2\sqrt{\frac{4m_1^2}{q^2} - 1} \cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{4m_1^2}{q^2} - 1} \right) \quad , \tag{5.60}$$

e a distribuição retardada adota a forma:

$$\hat{r}(q) = \frac{i\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4} q^2 \left\{ 2\sqrt{\frac{4m_1^2}{q^2} - 1} \cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{4m_1^2}{q^2} - 1} \right) + 2 \right\} \, . \tag{5.61}$$

(III) $q^2 > 4m_1^2$: Agora $\xi \in \mathbb{R}$, mas $\xi < 0$. Por isto, nesta região aparece um termo imaginário que provém do logaritmo. Para conhecer sua fase, é preciso ver que, para $\varepsilon \ll 1$: $\tilde{\xi} \approx \xi + i\varepsilon \mathrm{sgn}(q_-)$. Assim:

$$\hat{r}(q) = \frac{i\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4} q^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} \log\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4m_1^2/q^2}}{\sqrt{1 - 4m_1^2/q^2} + 1} \right) + 2 + i\pi \mathrm{sgn}(q_-) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} \right\} . \tag{5.62}$$

A distribuição de transição obtém-se da subtração $\hat{r}(q) - \hat{r}'(q)$, com $\hat{r}'(q)$ a parte numérica da distribuição subsidiária retardada no espaço dos momentos. Das Eqs. (5.15) e (5.33) vê-se que esta última é:

$$R'^{(M)}_2(x_1; x_2) = -P(-y) \; : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : \quad . \tag{5.63}$$

Junto com a Eq. (5.43), o anterior implica que:

$$\hat{r}'(q) = -(2\pi)^{-4} \pi \mathfrak{g}^2 q^2 \Theta(-q_-) \Theta(q^2 - 4m_1^2) \sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}} \quad . \tag{5.64}$$

Logo, ela somente modifica à distribuição retardada quando $q^2 > 4m_1^2$. Seu efeito, o vemos das Eqs. (5.62) e (5.64), é o de modificar a parte imaginária da distribuição retardada, trocando o $\mathrm{sgn}(q_-)$ pela unidade, pois $\mathrm{sgn}(q_-) + 2\Theta(-q_-) = \Theta(q_-) + \Theta(-q_-) = 1$. Desta forma, definindo a «auto-energia do méson» como a distribuição Π tal que:

$$\hat{r}(q) - \hat{r}'(q) := -i\widehat{\Pi}(q) \quad , \quad T^{(M)}_2(x_1; x_2) = -i \; : \varphi(x_1)\Pi(x_1 - x_2)\varphi(x_2) : \quad , \tag{5.65}$$

obtém-se:

(I) Para $q^2 < 0$:

$$\widehat{\Pi}(q) = -\frac{\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4} q^2 \left[\frac{1+\xi}{1-\xi}\log(\xi) + 2\right] \quad . \tag{5.66}$$

(II) Para $0 < q^2 < 4m_1^2$:

$$\widehat{\Pi}(q) = -\frac{\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4} q^2 \left\{2\sqrt{\frac{4m_1^2}{q^2} - 1}\,\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{4m_1^2}{q^2} - 1}\right) + 2\right\} \quad . \tag{5.67}$$

(III) Para $q^2 > 4m_1^2$:

$$\widehat{\Pi}(q) = -\frac{\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4} q^2 \left\{\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}}\log\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4m_1^2/q^2}}{\sqrt{1 - 4m_1^2/q^2} + 1}\right) + 2 - i\pi\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{q^2}}\right\} . \tag{5.68}$$

Mas a distribuição $\widehat{\Pi}(q)$ tem a ordem singular $\omega_- = +2$, o que significa que sua forma mais geral é:

$$\widetilde{\Pi}(q) = \widehat{\Pi}(q) + C_0 + c_a q^a + C_2 q^2 \quad ; \quad C_0, c_a, C_2 \in \mathbb{R} \quad . \tag{5.69}$$

Entretanto, o modelo de Yukawa é invariante sob transformações de paridade, o que proíbe a existência do termo linear proporcional a q^a. Assim sendo:

$$\widetilde{\Pi}(q) = \widehat{\Pi}(q) + C_0 + C_2 q^2 \equiv \hat{\Pi}(q) + b + C_2(q^2 - m_2^2) \quad . \tag{5.70}$$

A fixação dos coeficientes indeterminados b e C_2 far-se-á pela imposição de condições físicas adicionais. Com este objetivo, estudar-se-á a dispersão de dois núcleons com inserções de auto-energia do méson. Escrevamos a distribuição de dois pontos desse processo como:

$$T_2^{(NN)}(x_1; x_2) = i\mathfrak{g}^2 \ :j(x_1)t_2^{(NN)}(x_1 - x_2)j(x_2): \quad ; \quad j(x) = \overline{\psi}(x)i\gamma^5\psi(x) \quad . \tag{5.71}$$

Pelo procedimento indutivo da TPC constrói-se a contribuição a esse processo na quarta ordem da série perturbativa, que resulta ser:

$$\begin{aligned} D_4^{(NN)}(x_1; x_2; x_3; x_4) &= T_2^{(NN)}(x_1; x_3)T_2^{(NN)}(x_4; x_2) - T_2^{(NN)}(x_2; x_4)T_2^{(NN)}(x_1; x_3) \\ &= \mathfrak{g}^2 \ :j(x_1)t_2^{(NN)}(x_1 - x_3)d(x_3 - x_4)t_2^{(NN)}(x_4 - x_2)j(x_2): \quad , \end{aligned} \tag{5.72}$$

com $d(y)$ a distribuição causal da auto-energia do méson dada na Eq. (5.33). Desde que $t_2^{(NN)}$ tem ordem singular negativa, será suficiente efetuar a divisão de $d(y)$ e não por isso surgirão divergências. Assim:

$$T_4^{(NN)}(x_1; x_2; x_3; x_4) = -i\mathfrak{g}^2 \ :j(x_1)t_2^{(NN)}(x_1 - x_3)\Pi(x_3 - x_4)t_2^{(NN)}(x_4 - x_2)j(x_2): \quad . \tag{5.73}$$

Uma análise semelhante é válida para as seguintes ordens da série. Em consequência, definindo o «propagador total do méson» D_{tot} como a soma dessa série:

$$T^{(NN)}(x_1;x_2) = i\mathfrak{g}^2 \ :j(x_1)D_{\text{tot}}(x_1-x_2)j(x_2): \quad , \tag{5.74}$$

ter-se-á que no espaço dos momentos sua expressão é:

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{\text{tot}} &= \hat{t}_2^{(NN)} - (2\pi)^4\hat{t}_2^{(NN)}\widetilde{\Pi}\hat{t}_2^{(NN)} + (2\pi)^8\hat{t}_2^{(NN)}\widetilde{\Pi}\hat{t}_2^{(NN)}\widetilde{\Pi}\hat{t}_2^{(NN)} - \cdots \\ &= \hat{t}_2^{(NN)}\left(1-(2\pi)^4\widetilde{\Pi}\widehat{D}_{\text{tot}}\right) \quad .\end{aligned} \tag{5.75}$$

Mas a distribuição de transição de dois pontos é dada por:

$$\hat{t}_2^{(NN)}(p) = -(2\pi)^{-2}\frac{1}{p^2-m_2^2+i0^+} = \widehat{D}^F(p) \quad , \tag{5.76}$$

de forma que a solução da Eq. (5.75) é:

$$\widehat{D}_{\text{tot}}(q) = -(2\pi)^{-2}\frac{1}{q^2-\left(m_2^2+(2\pi)^2\widetilde{\Pi}(q)\right)+i0^+} \quad . \tag{5.77}$$

As condições físicas que se requererá são as seguintes: (1) A massa física do méson é m_2, o que significa que $\widehat{D}_{\text{tot}}(q)$ tem um pólo nesse valor de q^2. Isto acontece se:

$$\lim_{q^2\to m_2^2}\widetilde{\Pi}(q) = 0 \quad ; \tag{5.78}$$

(2) o valor físico da constante de acoplamento é $\mathfrak{g}$. Como $\widehat{D}_{\text{tot}}(q)$ aparece multiplicando à corrente $\mathfrak{g}\overline{\psi}i\gamma^5\psi$, o coeficiente de q^2 em $\widehat{D}_{\text{tot}}(q)$ dividirá efetivamente o valor de $\mathfrak{g}$; a segunda condição de normalização é destarte:

$$\lim_{q^2\to m_2^2}\frac{d\widetilde{\Pi}(q)}{dq^2} = 0 \quad . \tag{5.79}$$

Para simplificar a implementação dessas condições de normalização, consideraremos o modelo de Yukawa como uma descrição fenomenológica da interação entre núcleons e píons, de modo que a massa m_2 é a massa dos píons, cujo valor é muito menor àquela dos núcleons, m_1 –com efeito: $m_N \approx 940$ MeV/c^2, e $m_\pi \approx 140$ MeV/c^2–. Por essa razão, as condições de normalização devem ser estudadas com a Eq. (5.67). Como não há divergências infravermelhas no modelo de Yukawa, os limites nas Eqs. (5.78) e (5.79) são iguais à simples avaliação em $q^2 = m_2^2$. Obtém-se:

$$b = \frac{\mathfrak{g}^2m_2^2}{2(2\pi)^4}\left\{2\sqrt{\frac{4m_1^2}{m_2^2}-1}\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{4m_1^2}{m_2^2}-1}\right)+2\right\} \quad , \tag{5.80}$$

$$C_2 = \frac{\mathfrak{g}^2}{2(2\pi)^4}\left\{\left(1-\frac{m_2^2}{4m_1^2-m_2^2}\right)\sqrt{\frac{4m_1^2}{m_2^2}-1}\,\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{4m_1^2}{m_2^2}-1}\right)+3\right\} \quad . \tag{5.81}$$

Com essa normalização, os resultados obtidos são idênticos àqueles encontrados na dinâmica instantânea –compare-se com a Ref. [132]–.

5.4 Auto-energia do núcleon

Estudemos agora a auto-energia do núcleon, a qual é descrita pela distribuição causal da Eq. (5.20) –colocando, novamente, $\Gamma = i\gamma^5$–:

$$\begin{aligned} D_2^{(N)}(x_1;x_2) = &-\mathfrak{g}^2\ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^5\left(S_+(y)D_+(y)-S_-(y)D_-(y)\right)\gamma^5\psi(x_2):\\ &+\mathfrak{g}^2\ :\overline{\psi}(x_2)\gamma^5\left(S_+(-y)D_+(-y)-S_-(-y)D_-(-y)\right)\gamma^5\psi(x_1): \quad . \end{aligned} \tag{5.82}$$

Definindo as distribuições:

$$d(y) := -\mathfrak{g}^2\gamma^5\left(d_+(y)+d_-(y)\right)\gamma^5 \quad , \quad d_\pm(y) := \pm S_\pm(y)D_\pm(y) \quad , \tag{5.83}$$

a Eq. (5.82) pode escrever-se como:

$$D_2^{(N)}(x_1;x_2) = :\overline{\psi}(x_1)d(y)\psi(x_2): - :\overline{\psi}(x_2)d(-y)\psi(x_1): \quad . \tag{5.84}$$

Como pode-se ver, o segundo termo obtém-se do primeiro pela troca de x_1 e x_2. Porém, no operador de espalhamento aparece a soma das distribuições de transição correspondentes aos dois termos da Eq. (5.84) integradas nas variáveis x_1 e x_2 em conjunto com o produto $g(x_1)g(x_2)$; desde que dentro da integral é sempre possível renomear as variáveis x_1 e x_2, um com o nome do outro, sem isso trazer nenhuma consequência, a contribuição ao operador de espalhamento dos dois termos é idêntico. Por isto, apenas nos ocuparemos em estudar o primeiro termo.

A passagem ao espaço dos momentos é efetuada por meio da transformação de Fourier. Começando com d_-:

$$\begin{aligned} \hat{d}_-(p) &= -(2\pi)^{-2}\int d^4y e^{ipy}S_-(y)D_-(y)\\ &= -(2\pi)^{-6}\int d^4y d^4q d^4k e^{i(p-q-k)y}\widehat{S}_-(q)\widehat{D}_-(k) \quad . \end{aligned} \tag{5.85}$$

Integrando na variável y, então na variável k:

$$\hat{d}_-(p) = -(2\pi)^{-2}\int d^4q\widehat{S}_-(q)\widehat{D}_-(p-q) \quad . \tag{5.86}$$

Mas:

$$\widehat{S}_-(q) = (\not{q}+m_1)\widehat{D}_{-,m_1}(q) \quad , \quad \widehat{D}_{-,m}(q) = -\frac{i}{2\pi}\Theta\left(-q_-\right)\delta(q^2-m^2) \quad , \tag{5.87}$$

o que substituído na Eq. (5.86) leva à seguinte expressão:

$$\hat{d}_-(p) = (2\pi)^{-4}\left[\gamma^a I_{2a}(p) + m_1 I_1(p)\right] \quad , \tag{5.88}$$

com as integrais:

$$I_1(p) := \int d^4q\Theta\left(-q_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\delta(q^2 - m_1^2)\delta\left((p-q)^2 - m_2^2\right) \quad , \tag{5.89}$$

$$I_{2a}(p) := \int d^4q q_a\Theta\left(-q_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\delta(q^2 - m_1^2)\delta\left((p-q)^2 - m_2^2\right) \quad . \tag{5.90}$$

Como é usual, a avaliação dessas integrais simplificar-se-á pela escolha conveniente do sistema de referência, tal que $(p_a) = (p_+; 0_\perp; p_-)$; este existe devido a que, como implicado pelos supportes das distribuições delta de Dirac e funções de Heaviside nas Eqs. (5.89) e (5.90), $(p-q) \in V^-(0)$ e $q \in V^-(0)$, então também $p = (p-q) + q \in V^-(0)$. Claramente, isto implica que $p_+,\ p_- < 0$. Nesse sistema de referência, as Eqs. (5.89) e (5.90) são:

$$I_1 = \int d^4q\Theta\left(-q_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\delta(q^2 - m_1^2)\delta\left(2p_+p_- - 2p_-q_+ - 2p_+q_- + (m_1^2 - m_2^2)\right) \quad , \tag{5.91}$$

$$I_{2\pm} = \int d^4q q_\pm\Theta\left(-q_-\right)\Theta\left(q_- - p_-\right)\delta(q^2 - m_1^2)\delta\left(2p_+p_- - 2p_-q_+ - 2p_+q_- + (m_1^2 - m_2^2)\right) \ , \tag{5.92}$$

$$I_{2\perp} = 0 \quad . \tag{5.93}$$

Particularmente, a Eq. (5.93) provém do fato de que o integrando na Eq. (5.90) é ímpar nas variáveis $q_a = q_\perp$ no sistema de referência escolhido. Também, o produto das distribuições delta de Dirac que aparecem nessas integrais pode ser colocado na seguinte forma:

$$\frac{1}{|8p_-|}\Theta\left(A^2 - \frac{p_+\omega_q^2}{2p_-}\right)\delta\left(q_- - \frac{\omega_q^2}{2q_+}\right)F(q_+; q_\perp) \quad , \tag{5.94}$$

com as quantidades $F(q_+; q_\perp)$ e A definidas como:

$$F(q_+; q_\perp) := \frac{1}{\sqrt{A^2 - \dfrac{p_+\omega_q^2}{2p_-}}} \times \left\{\delta\left[q_+ - \left(A + \sqrt{A^2 - \frac{p_+\omega_q^2}{2p_-}}\right)\right] + \delta\left[q_+ - \left(A - \sqrt{A^2 - \frac{p_+\omega_q^2}{2p_-}}\right)\right]\right\} \quad , \tag{5.95}$$

$$A = \frac{2p_+p_- + (m_1^2 - m_2^2)}{4p_-} \quad . \tag{5.96}$$

Essa última se mantém constante no processo de integração. Agora, desde que $\omega_q^2 = q_\perp^2 + m_1^2 > m_1^2$, a função de Heaviside na Eq. (5.94) implica que: $2p_-A^2/p_+ > m_1^2$. Colocando o

valor de A nessa desigualdade, chega-se a:

$$\left(2p_+p_- - (m_1^2+m_2^2)\right)^2 - 4m_1^2m_2^2 > 0 \quad . \tag{5.97}$$

Com essas manipulações, as integrais nas Eqs. (5.91) e (5.92) são:

$$I_1 = \frac{\pi}{8|p_-|}\Theta(-p_-)\Theta\left(\left(2p_+p_- - (m_1^2+m_2^2)\right)^2 - 4m_1^2m_2^2\right) \times \int_{m_1^2}^{2p_-A^2/p_+} d(\omega_q^2) \int_{\omega_q^2/2p_-}^{0} dq_+ F(q_+;q_\perp) \quad , \tag{5.98}$$

$$I_{2+} = \frac{\pi}{8|p_-|}\Theta(-p_-)\Theta\left(\left(2p_+p_- - (m_1^2+m_2^2)\right)^2 - 4m_1^2m_2^2\right) \times \int_{m_1^2}^{2p_-A^2/p_+} d(\omega_q^2) \int_{\omega_q^2/2p_-}^{0} dq_+ \, q_+ F(q_+;q_\perp) \quad , \tag{5.99}$$

$$I_{2-} = \frac{\pi}{8|p_-|}\Theta(-p_-)\Theta\left(\left(2p_+p_- - (m_1^2+m_2^2)\right)^2 - 4m_1^2m_2^2\right) \times \int_{m_1^2}^{2p_-A^2/p_+} d(\omega_q^2) \int_{\omega_q^2/2p_-}^{0} dq_+ \frac{\omega_q^2}{2q_+} F(q_+;q_\perp) \quad , \tag{5.100}$$

em que tem-se usado que $d^2q_\perp = \pi d(\omega_q^2)$. Para realizar a integração na variável q_+, precisa-se ver sob quais condições as distribuições delta de Dirac têm suporte na região de integração. Já que $q_+ < 0$, tem de ser $A < 0$, o que significa que [vide a Eq. (5.96) e lembre que $p_- < 0$]:

$$2p_+p_- > m_1^2 - m_2^2 \quad . \tag{5.101}$$

Adicionalmente, o argumento das funções de Heaviside nas Eqs. (5.98)-(5.100) pode escrever-se como:

$$\left(2p_+p_- - (m_1^2-m_2^2)\right)^2 - 8p_+p_-m_2^2 > 0 \quad , \tag{5.102}$$

que em conjunto com a Eq. (5.101) leva à desigualdade: $2p_+p_- - 2m_2\sqrt{2p_+p_-} - (m_1^2 - m_2^2) > 0$, cujas raízes são $\sqrt{2p_+p_-} = m_2 \pm m_1$. Sob a suposição de ser $m_1 > m_2$ –o que se justifica, por exemplo, para os núcleons e píons, como antes dito–, observa-se que a integração na variável q_+ tem de ser proporcional a:

$$\Theta\left[2p_+p_- - (m_1+m_2)^2\right] \quad . \tag{5.103}$$

Para a integração na variável ω_q^2 usa-se o seguinte resultado:

$$\int_{m_1^2}^{2p_-A^2/p_+} \frac{d(\omega_q^2)}{\sqrt{A^2 - \dfrac{p_+\omega_q^2}{2p_-}}} = 4\sqrt{\frac{p_-}{p_+}}\sqrt{\frac{p_-A^2}{p_+} - \frac{m_1^2}{2}} = 2|p_-|\sqrt{1 - \frac{2(m_1^2+m_2^2)}{2p_+p_-} + \frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{(2p_+p_-)^2}} \, .$$

As integrais requeridas são portanto, já em suas formas covariantes de Lorentz:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\Theta\left(-p_-\right)\Theta\left[p^2-(m_1+m_2)^2\right]\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{p^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{p^4}} \quad , \tag{5.104}$$

$$I_{2a} = \frac{p_a}{2}\left(1+\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2}\right)I_1 \quad . \tag{5.105}$$

Substituindo as Eqs. (5.104) e (5.105) na Eq. (5.88) e usando que $\left(\gamma^5\right)^2 = 1$, assim como que $\gamma^5\gamma^a\gamma^5 = -\gamma^a$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^2\gamma^5\hat{d}_-(p)\gamma^5 = &\frac{\mathfrak{g}^2}{4}(2\pi)^{-3}\Theta\left(-p_-\right)\Theta\left[p^2-(m_1+m_2)^2\right]\\ &\times\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{p^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{p^4}}\left\{m_1-\frac{\not{p}}{2}\left(1+\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2}\right)\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.106}$$

O cálculo da distribuição d_+ –vide a definição dada na Eq. (5.83)– leva-se a cabo percorrendo os mesmos passos e realizando apenas modificações menores; o resultado de tal procedimento é:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^2\gamma^5\hat{d}_+(p)\gamma^5 = &-\frac{\mathfrak{g}^2}{4}(2\pi)^{-3}\Theta\left(p_-\right)\Theta\left[p^2-(m_1+m_2)^2\right]\\ &\times\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{p^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{p^4}}\left\{m_1-\frac{\not{p}}{2}\left(1+\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2}\right)\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.107}$$

Daqui, a parte numérica da distribuição causal que descreve à auto-energia do núcleon será, no espaço dos momentos –vide a Eq. (5.83)–:

$$\begin{aligned}\hat{d}(p) = &\frac{\mathfrak{g}^2}{4}(2\pi)^{-3}\mathrm{sgn}\left(p_-\right)\Theta\left[p^2-(m_1+m_2)^2\right]\\ &\times\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{p^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{p^4}}\left\{m_1-\frac{\not{p}}{2}\left(1+\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2}\right)\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.108}$$

Com o intuito de obter a distribuição retardada reescreve-se a distribuição causal fatorizando nela um polinômio do terceiro grau:

$$\hat{d}(p) = \frac{\mathfrak{g}^2}{4}(2\pi)^{-3}\left\{m_1p^2-\frac{\not{p}}{2}\left[p^2+(m_1^2-m_2^2)\right]\right\}\hat{d}_1(p) \quad , \tag{5.109}$$

com:

$$\hat{d}_1(p) = \mathrm{sgn}(p_-)\Theta\left[p^2-(m_1+m_2)^2\right]\frac{1}{p^2}\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{p^2}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{p^4}} \quad . \tag{5.110}$$

Graças ao Teorema 4.7, será suficiente obter a parte retardada da distribuição $\hat{d}_1(p)$. Isto é mais facilmente feito passando a um sistema de referência no qual $(p_a) = (p_+; 0_\perp; p_-)$, o que é possível desde que $p \in V^+$, como se implica das distribuições delta de Dirac e funções

de Heaviside contidas na Eq. (5.110). Nele:

$$\hat{d}_1(p) = \mathrm{sgn}(p_-)\Theta\left[2p_+p_- - (m_1+m_2)^2\right]\frac{1}{2p_+p_-}\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{2p_+p_-}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{(2p_+p_-)^2}} \quad . \tag{5.111}$$

Essa distribuição tem a ordem singular $\omega_-^1 = -1 < 0$, então sua parte retardada é dada pela expressão:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(p) =& \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\mathrm{sgn}(p_-)\Theta\left[-2kp_- + 2p_+p_- - (m_1+m_2)^2\right] \\ &\times \frac{1}{-2kp_- + 2p_+p_-}\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{-2kp_- + 2p_+p_-}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{(-2kp_- + 2p_+p_-)^2}} \quad .\end{aligned} \tag{5.112}$$

Usando a fórmula de Sokhotskiy para tratar o pólo e fazendo a mudança de variável $s = -2kp_- + 2p_+p_-$:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(p) =& \frac{i}{2\pi}\mathrm{V.p.}\int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty}\frac{ds}{s(2p_+p_- - s)}\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{s}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{s^2}} \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(p_-)\,\Theta(2p_+p_- - (m_1+m_2)^2)\frac{1}{2p_+p_-}\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{2p_+p_-}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{(2p_+p_-)^2}} \quad .\end{aligned} \tag{5.113}$$

Esta distribuição retardada é o valor limite da função analítica definida no tubo $\mathbb{R}^4 + i\mathbb{R}_0^+e^-$ –escrita em forma covariante de Lorentz–:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(\tilde{p}) &= -\frac{i}{2\pi}\int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty}\frac{ds}{s(s-\tilde{p}^2)}\sqrt{1-\frac{2(m_1^2+m_2^2)}{s}+\frac{(m_1^2-m_2^2)^2}{s^2}} \\ &= -\frac{i}{2\pi}\int_{(m_1+m_2)^2}^{+\infty}\frac{ds}{s^2(s-\tilde{p}^2)}\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]} \quad .\end{aligned} \tag{5.114}$$

Como o pólo do integrando não se encontra mais no eixo real (para $\tilde{p} = p + i\varepsilon\eta$, $\varepsilon > 0$), essa integral pode ser resolvida por meio da terceira substituição de Euler [196]: Efetua-se a seguinte mudança de variável:

$$s = \frac{(m_1+m_2)^2 - (m_1-m_2)^2x^2}{1-x^2} \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad , \tag{5.115}$$

com a qual:

$$\sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]} = 4m_1m_2\frac{x}{1-x^2} \; , \; ds = \frac{8m_1m_2xdx}{(1+x)^2(1-x)^2} \, . \tag{5.116}$$

Definimos também os parâmetros a e $\tilde{b}$ segundo:

$$a := \frac{m_1+m_2}{m_1-m_2} > 1\ ,\ \tilde{b} := \left(\frac{\tilde{p}^2-(m_1+m_2)^2}{\tilde{p}^2-(m_1-m_2)^2}\right)^{1/2} \in \mathbb{C} \quad . \tag{5.117}$$

Com estas relações, a função analítica $\hat{r}_1(\tilde{p})$ se expressa como:

$$\hat{r}_1(\tilde{p}) = -\frac{i}{2\pi}\frac{32m_1^2m_2^2}{(m_1-m_2)^4\left[\tilde{p}^2-(m_1-m_2)^2\right]}\int_0^1 \frac{x^2dx}{(a+x)^2(a-x)^2(x-\tilde{b})(x+\tilde{b})}\ , \tag{5.118}$$

a qual já pode ser avaliada pela técnica de decomposição em frações parciais. O resultado de semelhante operação é:

$$\hat{r}_1(\tilde{p}) = -\frac{i}{2\pi}\frac{\tilde{p}^2-(m_1-m_2)^2}{\tilde{p}^4}\left\{\tilde{b}\log\left(\frac{\tilde{b}-1}{\tilde{b}+1}\right)+\frac{\tilde{b}^2+a^2}{2a}\log\left(\frac{a+1}{a-1}\right)-\frac{\tilde{b}^2-a^2}{a^2-1}\right\}. \tag{5.119}$$

Assim, utilizando a Eq. (5.109), conclui-se que a parte retardada da distribuição numérica causal $\hat{d}(p)$ é o valor limite da função analítica:

$$\begin{aligned}\hat{r}(\tilde{p}) =& \frac{i\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1-\frac{\tilde{\not{p}}}{2}\left(1+\frac{m_1^2-m_2^2}{\tilde{p}^2}\right)\right]\\ &\times\left\{\frac{\tilde{p}^2-(m_1-m_2)^2}{\tilde{p}^2}\left[\tilde{b}\log\left(\frac{\tilde{b}+1}{\tilde{b}-1}\right)-\frac{\tilde{b}^2+a^2}{2a}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right]-1\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.120}$$

Com a finalidade de se obter o valor limite desta função, é preciso dividir a análise em três regiões que determinam o comportamento da quantidade $b := \lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{b}$. Elas são:

(I) $p^2 < (m_1-m_2)^2$: Neste caso, $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$, de forma que o limite para $\varepsilon \to 0$ da Eq. (5.120) pode ser obtido diretamente:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p) =& \frac{i\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1-\frac{\not{p}}{2}\left(1+\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2}\right)\right]\\ &\times\left\{\left(1-\frac{(m_1-m_2)^2}{p^2}\right)\left[b\log\left(\frac{b+1}{b-1}\right)-\frac{b^2+a^2}{2a}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right]-1\right\}.\end{aligned} \tag{5.121}$$

(II) $(m_1-m_2)^2 < p^2 < (m_1+m_2)^2$: Nesta região de variação do impulso, $b \in i\mathbb{R}$, de modo que pode-se escrever:

$$b = ic \quad , \quad c := \sqrt{\frac{(m_1+m_2)^2-p^2}{p^2-(m_1-m_2)^2}} \in \mathbb{R} \quad . \tag{5.122}$$

Definindo o argumento da função logaritmo na Eq. (5.120) como

$$\xi := \frac{b+1}{b-1} = \frac{ic+1}{ic-1} \quad , \tag{5.123}$$

ocorre que ela tem, evidentemente, o módulo unidade: $|\xi| = 1$, e por isso este número

pode ser representado na forma:

$$\xi = e^{i\theta} \quad , \quad p^2 = (m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad . \tag{5.124}$$

Assim,

$$\log(\xi) = i\theta = 2i \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{p^2 - (m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2}}\right) \quad . \tag{5.125}$$

A distribuição retardada para os valores do quadrado do momento em consideração é portanto –oferecemos todos os detalhes para este importante caso porque nele encontra-se a camada de massa; no problema da normalização faremos uso dessa expressão–:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p) =& \frac{i\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1 - \frac{\not{p}}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right)\right]\left\{\left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{p^2}\right)\right. \\ &\times\left[-2\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 - p^2}{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{p^2 - (m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2}}\right)\right. \\ &\left.\left. - \frac{(m_1^2 + m_2^2)p^2 - 2(m_1^2 - m_2^2)^2}{2(m_1^2 - m_2^2)[p^2 - (m_1 - m_2)^2]}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right] - 1\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.126}$$

(III) $p^2 > (m_1 + m_2)^2$: Nesta região se cumpre que $b \in \mathbb{R}$, mas $0 < b < 1$, e por isso $\xi < 0$. É preciso, pois, observar qual é a fase que irá adquirir $\log(\xi)$. Da definição de $\tilde{b}$ dada na Eq. (5.117) é possível ver que para $\varepsilon \ll 1$: $\tilde{b} \approx b + i\varepsilon p_-$, e portanto $\tilde{\xi} \approx \xi - i\varepsilon p_-$; daqui decorre que $\log(\xi) = \log(|\xi|) - i\pi \mathrm{sgn}(p_-)$. A distribuição retardada é neste caso:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p) =& \frac{i\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1 - \frac{\not{p}}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right)\right]\left\{\left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{p^2}\right)\right. \\ &\left.\times\left[b\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) - \frac{b^2 + a^2}{2a}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right) - i\pi\mathrm{sgn}(p_-)b\right] - 1\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.127}$$

Ainda precisamos da distribuição subsidiária retardada. Das Eqs. (5.15) e (5.83), vê-se que ao termo da distribuição causal em consideração –primeiro termo da Eq. (5.84)– corresponde:

$$R'^{(N)}_2(x_1; x_2) = -\mathfrak{g}^2 \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^5 d_-(y)\psi(x_2): \quad . \tag{5.128}$$

A parte numérica da distribuição subsidiária retardada pode portanto ser imediatamente lida da Eq. (5.106):

$$\begin{aligned}\hat{r}'(p) =& -\frac{\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^3}\Theta(-p_-)\Theta\left(p^2 - (m_1 + m_2)^2\right)\left[m_1 - \frac{\not{p}}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right)\right] \\ &\times\sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{p^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{p^4}} \,,\end{aligned} \tag{5.129}$$

e por seu suporte só modifica à distribuição retardada no intervalo $p^2 > (m_1 + m_2)^2$.

Por conseguinte, definindo a «auto-energia do férmion» como a distribuição Σ tal que:

$$\hat{r}(p) - \hat{r}'(p) =: -i\hat{\Sigma}(p) \quad ; \quad T_2^{(N)}(x_1; x_2) = -i \ :\overline{\psi}(x_1)\Sigma(x_1 - x_2)\psi(x_2): \ , \tag{5.130}$$

da análise recém feita segue que:

(I) Para $p^2 < (m_1 - m_2)^2$:

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}(p) = &- \frac{\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1 - \frac{\not{p}}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right)\right] \\ &\times \left\{\left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{p^2}\right)\left[b\log\left(\frac{b+1}{b-1}\right) - \frac{b^2 + a^2}{2a}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right] - 1\right\} \ .\end{aligned} \tag{5.131}$$

(II) Para $(m_1 - m_2)^2 < p^2 < (m_1 + m_2)^2$:

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}(p) = &- \frac{\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1 - \frac{\not{p}}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right)\right]\left\{\left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{p^2}\right)\right. \\ &\times \left[-2\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 - p^2}{p^2 - (m_1 - m_2)^2}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{p^2 - (m_1 - m_2)^2}{4m_1 m_2}}\right)\right. \\ &\left.\left. - \frac{(m_1^2 + m_2^2)p^2 - 2(m_1^2 - m_2^2)^2}{2(m_1^2 - m_2^2)[p^2 - (m_1 - m_2)^2]}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right] - 1\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.132}$$

(III) Para $p^2 > (m_1 + m_2)^2$:

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}(p) = &- \frac{\mathfrak{g}^2}{4(2\pi)^4}\left[m_1 - \frac{\not{p}}{2}\left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2}\right)\right]\left\{\left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{p^2}\right)\right. \\ &\left.\times \left[b\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) - \frac{b^2 + a^2}{2a}\log\left(\frac{m_1}{m_2}\right) - i\pi b\right] - 1\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.133}$$

Finalmente, a ordem singular de $\widehat{\Sigma}(p)$ no eixo x^- é $\omega_- = +1$ e, portanto, esta distribuição tem a forma geral:

$$\widetilde{\Sigma}(p) = \widehat{\Sigma}(p) + C_0 + C_1\not{p} \equiv \widehat{\Sigma}(p) + c + C_1(\not{p} - m_1) \quad , \quad c, C_1 \in \mathbb{R} \quad . \tag{5.134}$$

Como no caso da auto-energia do méson, as constantes c e C_1 fixar-se-ão pela imposição de condições físicas adicionais. Essas impor-se-ão ao propagador total do núcleon, definido como a parte numérica da distribuição completa que descreve o espalhamento de um núcleon por um méson:

$$T^{(MN)}(x_1; x_2) = i\mathfrak{g}^2 \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^5 S_{\text{tot}}(x_1 - x_2)\gamma^5\psi(x_2): :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \quad . \tag{5.135}$$

Para calcular a contribuição da quarta ordem à serie, começa-se, no processo indutivo, por

construir a distribuição causal:

$$D_4^{(MN)}(x_1;x_2;x_3;x_4) = T_2^{(MN)}(x_1;x_3)T_2^{(MN)}(x_4;x_2) - T_2^{(MN)}(x_2;x_4)T_2^{(MN)}(x_1;x_3) \quad . \tag{5.136}$$

Escrevendo a distribuição de transição da segunda ordem para o espalhamento méson-núcleon como:

$$T_2^{(MN)}(x_1;x_2) = -i\mathfrak{g}^2 \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^5 t_2^{(MN)}(x_1-x_2)\gamma^5\psi(x_2): :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \quad , \tag{5.137}$$

obtém-se por aplicação do teorema de Wick:

$$\begin{aligned} &D_4^{(MN)}(x_1;x_2;x_3;x_4) \\ &\quad = -\mathfrak{g}^2 \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^5 t_2^{(MN)}(x_1-x_3)d(x_3-x_4)t_2^{(MN)}(x_4-x_2)\psi(x_2): :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \ , \end{aligned} \tag{5.138}$$

e a correspondente distribuição de transição achar-se-á pela simples divisão de $d(x_3-x_4)$, que é a mostrada na Eq. (5.83), pois as distribuições $t_2^{(MN)}$ têm ordem singular negativa:

$$\begin{aligned} T_4^{(MN)}(x_1;x_2;x_3;x_4) &= i\mathfrak{g}^2 \ :\varphi(x_1)\varphi(x_2): \\ &\quad \times \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^5 t_1^{(MN)}(x_1-x_3)\Sigma(x_3-x_4)t_2^{(MN)}(x_4-x_2)\psi(x_2): \ , \end{aligned} \tag{5.139}$$

e similarmente para as seguintes ordens da série perturbativa. Como consequência, o propagador nucleônico total no espaço dos momentos é dado pela série:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{\rm tot} &= -\hat{t}_2^{(MN)} + (2\pi)^4 \hat{t}_2^{(MN)}\widetilde{\Sigma}\hat{t}_2^{(MN)} - (2\pi)^8 \hat{t}_2^{(MN)}\widetilde{\Sigma}\hat{t}_2^{(MN)}\widetilde{\Sigma}\hat{t}_2^{(MN)} + \cdots \\ &= -\hat{t}_2^{(MN)}\left(1 + (2\pi)^4\widetilde{\Sigma}\widehat{S}_{\rm tot}\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.140}$$

Na Seç. 5.2 foi mostrado que a distribuição de transição da segunda ordem para o espalhamento de um méson por um núcleon é:

$$\hat{t}_2^{(MN)}(p) = -(2\pi)^{-2}\frac{\not{p}+m_1}{p^2-m_1^2+i0^+} = -(2\pi)^{-2}\frac{1}{\not{p}-m_1+i0^+} \quad . \tag{5.141}$$

Assim, da Eq. (5.140) segue que:

$$\widehat{S}_{\rm tot}(p) = (2\pi)^{-2}\frac{1}{\not{p}-\left(m_1+(2\pi)^2\widetilde{\Sigma}(p)\right)+i0^+} \quad . \tag{5.142}$$

As condições físicas que esse propagador completo tem de satisfazer são: (1) A massa física do férmion é m_1, de modo que $\widehat{S}_{\rm tot}(p)$ deve ter um pólo em $\not{p} = m_1$; (2) o valor físico da constante de acoplamento é $\mathfrak{g}$, então o coeficiente de $\not{p}$ no denominador de $\widehat{S}_{\rm tot}(p)$ deve ser igual à unidade. Estas condições traduzem-se operacionalmente em:

$$\lim_{\not{p}\to m_1}\widetilde{\Sigma}(p) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\not{p}\to m_1}\frac{d\widetilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}} = 0 \quad , \tag{5.143}$$

e são satisfeitas pela escolha:

$$c = -\left.\widehat{\Sigma}(p)\right|_{\not{p}=m_1} \quad , \quad C_1 = -\left.\frac{d\widehat{\Sigma}(p)}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_1} \quad . \tag{5.144}$$

em que deve ser usada a expressão da auto-energia do núcleon apresentada na Eq. (5.132), pois é na sua região de validade que se encontra a camada de massa $p^2 = m_1^2$. Como no caso mesônico, também a auto-energia do férmion na dinâmica da frente de luz se iguala àquela obtida na dinâmica instantânea [132].

5.5 Normalizabilidade e termos de auto-interação

Nesta seção analisaremos o problema da normalizabilidade do modelo de Yukawa. Comecemos por lembrar que a construção da distribuição causal da ordem n, D_n, é feita indutivamente pelo produto das distribuições de transição de menor ordem, com as quais se constroem a distribuição subsidiária retardada e a avançada. Um dado termo da distribuição causal obtém-se então por aplicação do teorema de Wick e define-se pelos operadores de campo quantizado externo que apresenta. Suponhamos, assim, que o desejado termo de D_n é obtido por aplicação do teorema de Wick ao produto $T_r^1 T_s^2$, e que está definido pela feitura de l_s contrações bosônicas e l_f fermiônicas. Logo, se t_1 e t_2 são, respectivamente, as partes numéricas de T_r^1 e T_s^2, então a parte numérica do produto anterior com as mencionadas contrações terá a forma:

$$d(x_1;\cdots;x_r;y_1;\cdots;y_s) := t_1(x_1;\cdots;x_r)\prod_{j=1}^{l_s} D_+(x_{r_j}-y_{s_j})\prod_{m=1}^{l_f} S_+(x_{r_m}-y_{s_m})t_2(y_1;\cdots;y_s)\ . \tag{5.145}$$

Aqui, $\left\{x_{r_j}\right\}_{j\in I_{l_s}} \subseteq \{x_1;\cdots;x_r\}$ e $\left\{y_{s_j}\right\}_{j\in I_{l_s}} \subseteq \{y_1;\cdots;y_s\}$ são os pontos em que uma contração bosônica tem tido lugar, enquanto que $\{x_{r_m}\}_{m\in I_{l_f}} \subseteq \{x_1;\cdots;x_r\}$ e $\{y_{s_m}\}_{m\in I_{l_f}} \subseteq \{y_1;\cdots;y_s\}$ são aqueles em que foi feita uma contração fermiônica. Em virtude da invariância translacional das distribuições numéricas $t_{1,2}$, definimos as coordenadas relativas:

$$\xi_j := x_j - x_r \ (j=1,\cdots,r-1)\ ,\ \eta_j := y_j - y_s \ (j=1,\cdots,s-1)\ ,\ \eta := x_r - y_s\ , \tag{5.146}$$

assim como os vetores:

$$\boldsymbol{\xi} := (\xi_1;\cdots;\xi_{r-1}) \quad , \quad \boldsymbol{\eta} := (\eta_1;\cdots;\eta_{s-1}) \quad , \tag{5.147}$$

com os quais a Eq. (5.145) pode escrever-se na forma:

$$d(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\eta};\eta) = t_1(\boldsymbol{\xi})\prod_{j=1}^{l_s} D_+(\xi_{r_j}-\eta_{s_j}+\eta)\prod_{m=1}^{l_f} S_+(\xi_{r_m}-\eta_{s_m}+\eta)t_2(\boldsymbol{\eta}) \quad . \tag{5.148}$$

Numa análise ingênua pretender-se-ia usar a Eq. (4.95) para determinar a ordem singular diretamente no espaço real. Para simplificar a notação, escrevamos, por exemplo:

$$s_*\boldsymbol{\xi} := \left(s\boldsymbol{\xi}^+; s\boldsymbol{\xi}^\perp; \boldsymbol{\xi}^-\right) \quad , \tag{5.149}$$

e similarmente para as outras coordenadas. A suposição de que as ordens singulares das distribuições t_1, t_2, D_+ e S_+ são ω_-^1, ω_-^2, ω_-^s e ω_-^f, respectivamente, significa que as seguintes quantidades são finitas e não nulas no limite $s \to 0$ –note-se que já está fixando-se a dimensionalidade do espaço-tempo como sendo igual a quatro–:

$$\begin{gathered} s^{3(r-1)}s^{\omega_-^1}t_1(s_*\boldsymbol{\xi}) \quad , \quad s^{3(s-1)}s^{\omega_-^2}t_2(s_*\boldsymbol{\eta}) \quad , \\ s^3 s^{\omega_-^s} D_+(s_*[\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta]) \quad , \quad s^3 s^{\omega_-^f} S_+(s_*[\xi_{r_m} - \eta_{s_m} + \eta]) \quad . \end{gathered} \tag{5.150}$$

Portanto, formando essas expressões na Eq. (5.148) chegar-se-ia a que a quantidade

$$\begin{aligned} s^{3(r+s-1)}s^{\omega_-}d(s_*\boldsymbol{\xi}; s_*\boldsymbol{\eta}; s_*\eta) &= s^{3(r+s-1)}s^{\omega_-}\left\{s^{-3(r-1)}s^{-\omega_-^1}\left[s^{3(r-1)}s^{\omega_-^1}t_1(s_*\boldsymbol{\xi})\right]\right\} \\ &\times \left\{s^{-3(s-1)}s^{-\omega_-^2}\left[s^{3(s-1)}s^{\omega_-^2}t_2(s_*\boldsymbol{\eta})\right]\right\}\left\{s^{-3l_s}s^{-\omega_-^s l_s}\left[\prod_{j=1}^{l_s} s^3 s^{\omega_-^s} D_+(s_*[\xi_{r_j} - \eta_{s_j} + \eta])\right]\right\} \\ &\times \left\{s^{-3l_f}s^{-\omega_-^f l_f}\left[\prod_{m=1}^{l_f} s^3 s^{\omega_-^f} S_+(s_*[\xi_{r_m} - \eta_{s_m} + \eta])\right]\right\} \quad , \end{aligned} \tag{5.151}$$

na qual todas as expressões entre chaves são finitas quando $s \to 0$, será finita e não nula em tal limite se:

$$\omega_- = \omega_-^1 + \omega_-^2 + (3 + \omega_-^s)l_s + (3 + \omega_-^f)l_f - 3 \quad . \tag{5.152}$$

Entretanto, esse resultado é o que esperaríamos numa teoria em três dimensões, o que deve levar ao questionamento da existência do limite $s \to 0$ na Eq. (5.151), isto é, se o produto das quase-assíntotas das diferentes distribuições contidas nela, é uma distribuição bem definida. Para responder a essa pergunta, volte-se à Eq. (5.148) e aplique-se a transformação de Fourier para ir ao espaço dos momentos:

$$\hat{d}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q}; q) = (2\pi)^{-2(r+s-1)} \int d^{4(r-1)}\boldsymbol{\xi} d^{4(s-1)}\boldsymbol{\eta} d^4\eta\, t(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}; \eta) e^{ip\boldsymbol{\xi} + iq\boldsymbol{\eta} + iq\eta} \quad . \tag{5.153}$$

Aqui substitui-se a Eq. (5.148) e troca-se as distribuições de (anti-)comutação por suas respectivas transformadas de Fourier,

$$S_+(x) = (2\pi)^{-2}\int d^4k \widehat{S}_+(k)e^{-ikx} \quad , \quad D_+(x) = (2\pi)^{-2}\int d^4h \widehat{D}_+(h)e^{-ihx} \quad , \tag{5.154}$$

com o qual obtém-se, após o agrupamento conveniente dos termos:

$$\hat{d}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q}; q) = (2\pi)^{-2(l_s+l_f-1)} \int \prod_{j,m} d^4k_m d^4h_j \widehat{D}_+(h_j)\widehat{S}_+(k_m)\left[(2\pi)^{-4}\int d^4\eta e^{i\left(q - \sum_m k_m - \sum_j h_j\right)}\right]$$

$$\times \left[(2\pi)^{-2(r-1)} \int d^{4(r-1)}\boldsymbol{\xi}\, t_1(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\xi} - i\left(\sum_m k_m \xi_{r_m} + \sum_j h_j \xi_{r_j}\right)} \right]$$
$$\times \left[(2\pi)^{-2(s-1)} \int d^{4(s-1)}\boldsymbol{\eta}\, t_2(\boldsymbol{\eta}) e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{\eta} + i\left(\sum_m k_m \eta_{s_m} + \sum_j h_j \eta_{s_j}\right)} \right] \quad . \tag{5.155}$$

Nesta expressão pode identificar-se a transformada de Fourier das distribuições numéricas $t_{1,2}$ e a representação integral da distribuição delta de Dirac na primeira linha da Eq. (5.155). Definindo o vetor $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}_r - \boldsymbol{h}_r$ como sendo aquele com componentes $p_i - k_{r_i} - h_{r_i}$ se ξ_{r_i} é um ponto de contração, e p_i se não o é, e analogamente para o vetor $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{h}_s$, a Eq. (5.155) escreve-se:

$$\hat{d}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q};q) = (2\pi)^{-2(l_s+l_f-1)} \int \prod_{j,m} d^4k_m d^4h_j \widehat{D}_+(h_j)\widehat{S}_+(k_m)\delta\left[q - \left(\sum_j h_j + \sum_m k_m\right)\right]$$
$$\times \hat{t}_1(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}_r - \boldsymbol{h}_r)\hat{t}_2(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{h}_s) \quad . \tag{5.156}$$

Para determinar a ordem singular da distribuição $\hat{d}$ precisa-se avaliar o limite:

$$\lim_{s\to 0^+} \rho(s)\hat{d}\left(\frac{p}{s_*}\right) \quad . \tag{5.157}$$

Aqui, analogamente à Eq. (5.149), estamos usando a seguinte notação simplificadora:

$$\frac{\boldsymbol{p}}{s_*} := \left(\frac{\boldsymbol{p}_+}{s}; \frac{\boldsymbol{p}_\perp}{s}; \boldsymbol{p}_-\right) \quad , \tag{5.158}$$

e similarmente para as outras variáveis de momento. Consideremos, para maior clareza, um caso particular. Suponhamos que $\hat{t}_1 = 1 = \hat{t}_2$ e $l_s = 1 = l_f$. A distribuição causal é –esse caso é um dos termos que contribuem para a auto-energia do férmion [vide a Eq. (5.20)]–:

$$\hat{d}(q) = \int d^4k \widehat{D}_+(k)\widehat{S}_+(q-k) \quad ; \quad \hat{d}\left(\frac{q}{s_*}\right) = s^{-3}\int d^4\tilde{k}\widehat{D}_+\left(\frac{\tilde{k}}{s_*}\right)\widehat{S}_+\left(\frac{q-\tilde{k}}{s_*}\right) , \tag{5.159}$$

com $\tilde{k} = s_* k$. Se assumirmos que o limite $s \to 0^+$ comuta com a integral, então teriamos que a quase-assíntota de $\hat{d}$ no eixo x^- é:

$$\hat{d}_-(q) \sim \int d^4\tilde{k}\left[(q_+ - \tilde{k}_+)\gamma^+ + (q_\alpha - \tilde{k}_\alpha)\gamma^\alpha\right]\Theta(\tilde{k}_-)\Theta(q_- - \tilde{k}_-)\delta\left(\tilde{k}_\perp^2\right)\delta\left(q_\perp^2 - \tilde{k}_\perp^2\right) \quad .$$

Mas a integração dessa expressão na variável $\tilde{k}_+$ é divergente, e por isso a quase-assíntota $\hat{d}_-(q)$ não pode ser encontrada aplicando primeiro o limite e a integração depois, pois somos forçados a concluir que o produto de quase-assíntotas no eixo x^- das distribuições $\widehat{D}_+$ e $\widehat{S}_+$ não é bem definido. Em uma palavra, o procedimento de limite e a integração não comutam: A ordem singular da distribuição $\hat{d}$ somente pode ser calculada uma vez que a integração esteja feita.

Existe ainda uma outra possibilidade. Desde que k_m e h_j são somente variáveis de integração, seu *scaling* não passa de uma simples mudança de variáveis. Assim, podemos

definir $\tilde{k}_m = sk_m$ e $\tilde{h}_j = sh_j$ –afetando às quatro componentes–, e a distribuição na Eq. (5.156) é igual a:

$$\begin{aligned}\hat{d}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q};q) =&(2\pi)^{-2(l_s+l_f-1)}s^{-4(l_s+l_f)}\int\prod_{j,m}d^4\tilde{k}_m d^4\tilde{h}_j\widehat{D}_+\left(\frac{\tilde{h}_j}{s}\right)\widehat{S}_+\left(\frac{\tilde{k}_m}{s}\right)\\ &\times\hat{t}_1\left(\boldsymbol{p}-\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}_r+\tilde{\boldsymbol{h}}_r}{s}\right)\hat{t}_2\left(\boldsymbol{q}+\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}_s+\tilde{\boldsymbol{h}}_s}{s}\right)\delta\left[q-\frac{1}{s}\left(\sum_j\tilde{h}_j+\sum_m\tilde{k}_m\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{5.160}$$

Agora, no limite $s\to 0^+$, as distribuições $\widehat{D}_+$ e $\widehat{S}_+$ tornam-se suas respectivas versões de massa nula, cuja convolução é, sim, bem definida. Nesse ponto, deseja-se avaliar o limite para $s\to 0^+$ da quantidade:

$$\begin{aligned}\hat{d}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*};\frac{\boldsymbol{q}}{s_*};\frac{q}{s_*}\right) =&(2\pi)^{-2(l_s+l_f-1)}s^{-4(l_s+l_f)}\int\prod_{j,m}d^4\tilde{k}_m d^4\tilde{h}_j\widehat{D}_+\left(\frac{\tilde{h}_j}{s}\right)\widehat{S}_+\left(\frac{\tilde{k}_m}{s}\right)\\ &\times\hat{t}_1\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*}-\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}_r+\tilde{\boldsymbol{h}}_r}{s}\right)\hat{t}_2\left(\frac{\boldsymbol{q}}{s_*}+\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}_s+\tilde{\boldsymbol{h}}_s}{s}\right)\delta\left[\frac{q}{s_*}-\frac{1}{s}\left(\sum_j\tilde{h}_j+\sum_m\tilde{k}_m\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{5.161}$$

Nessa equação aparecem distribuições tais como

$$\hat{t}_1\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*}-\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}}{s}\right)=\hat{t}_1\left(\frac{\boldsymbol{p}_+-\tilde{\boldsymbol{k}}_+}{s};\frac{\boldsymbol{p}_\perp-\tilde{\boldsymbol{k}}_\perp}{s};p_--\frac{\tilde{k}_-}{s}\right) \quad , \tag{5.162}$$

então no limite em que $s\to 0^+$ obter-se-á quase-assíntotas «mistas»: no eixo x^- nas variáveis em que seja $(\tilde{k}_j)_- = 0$, e na origem nas variáveis em que $(\tilde{k}_j)_-\neq 0$. A Eq. (5.161) leva diretamente ao seguinte lema.

Lema 5.1: *No modelo de Yukawa, a ordem singular no eixo x^- de cada distribuição de transição é igual a sua ordem singular na origem $x=0$.*

Prova: Procederemos por indução matemática completa. (i) A base indutiva é que para $n=1$: $\omega_-[T_1]=0=\omega_0[T_1]$, o que é trivial, pois a parte numérica de T_1 é uma constante. (ii) A hipótese indutiva é que para qualquer $m\in I_{n-1}$: $\omega_-[T_m]=\omega_0[T_m]$. (iii) O passo indutivo é dado usando a Eq. (5.161) para a distribuição causal da n-ésima ordem: Como $r,s\leq n-1$, pode-se rearranjar essa equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{d}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*};\frac{\boldsymbol{q}}{s_*};\frac{q}{s_*}\right) =&(2\pi)^{-2(l_s+l_f-1)}s^{-4(l_s+l_f-1)-\omega_0^s l_s-\omega_0^f l_f-\omega_-^1-\omega_-^2}\\ &\times\int\prod_{j,m}d^4\tilde{k}_m d^4\tilde{h}_j\left\{s^{\omega_0^s}\widehat{D}_+\left(\frac{\tilde{h}_j}{s}\right)\right\}\left\{s^{\omega_0^f}\widehat{S}_+\left(\frac{\tilde{k}_m}{s}\right)\right\}\delta\left[q_{+,\perp}-\left(\sum_j\tilde{h}_{j+,\perp}+\sum_m\tilde{k}_{m+,\perp}\right)\right]\\ &\times\delta\left[sq_--\left(\sum_j\tilde{h}_{j-}+\sum_m\tilde{k}_{m-}\right)\right]\left\{s^{\omega_-^1}\hat{t}_1\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*}-\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}_r+\tilde{\boldsymbol{h}}_r}{s}\right)\right\}\left\{s^{\omega_-^s}\hat{t}_2\left(\frac{\boldsymbol{q}}{s_*}+\frac{\tilde{\boldsymbol{k}}_s+\tilde{\boldsymbol{h}}_s}{s}\right)\right\} . \end{aligned} \tag{5.163}$$

Mas $\omega^1_- = \omega^1_0$ e $\omega^2_- = \omega^2_0$ por hipótese indutiva, de forma que é indiferente onde tenha de ser tomada a quase-assíntota de $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_2$: Quer seja no eixo x^-, quer seja na origem, as expressões entre chaves na Eq. (5.163) são finitas. Aqui está-se supondo que as distribuições de comutação do bóson e do férmion, $\widehat{D}_+$ e $\widehat{S}_+$, têm ordem singular ω^s_0 e ω^f_0, respectivamente, na origem $x = 0$. Portanto, ao multiplicar a Eq. (5.163) por $\rho(s) = s^{\omega_-}$ para avaliar a ordem singular de $\hat{d}$ no eixo x^-, obter-se-á que:

$$\omega_- = \omega^1_- + \omega^2_- + (4 + \omega^s_0)l_s + (4 + \omega^f_0)l_f - 4 \quad . \tag{5.164}$$

Ou, colocando já os valores $\omega^s_0 = -2$ e $\omega^f_0 = -1$:

$$\omega_- = \omega^1_- + \omega^2_- + 2l_s + 3l_f - 4 \quad . \tag{5.165}$$

Novamente, como $\omega^1_- = \omega^1_0$ e $\omega^2_- = \omega^2_0$ por hipótese indutiva, esse resultado implica que a distribuição causal da ordem n tem a mesma ordem singular no eixo x^- e na origem –com efeito, a Eq. (5.165) é a mesma equação que se obtém pela análise na origem [132]–. Dessa distribuição causal é obtida sua parte retardada, a qual, uma vez normalizada de acordo com a condição de covariância de Lorentz, terá a mesma ordem singular que a distribuição causal –um termo instantâneo com maior ordem singular é proibido, como explicado no final da Seç. 4.7, e deve ser cancelado pela escolha adequada dos termos de normalização–. Concluíndo, a ordem singular no eixo x^- da distribuição de transição de n pontos é dada pela Eq. (5.165). ■

A Eq. (5.165) é a que permite determinar, começando com as duas distribuições T^1_r e T^2_s, a ordem singular de um dado termo resultante na distribuição de transição T_n, $n = r + s$. Como ela tem dependência linear com o número de contrações, propõe-se que a ordem singular da distribuição causal da ordem n tenha a forma:

$$\omega_-[d] = A + BM + CN + Fn \quad , \tag{5.166}$$

com M o número de campos mesônicos assintoticamente livres (exteriores), N o número de campos nucleônicos exteriores. A Eq. (5.165) deve ser usada para a determinação das constantes A, B, C e F na Eq. (5.166), uma vez que conhece-se a estrutura do termo da primeira ordem, T_1. Procederemos, mais uma vez, pelo método de indução matemática completa sobre a ordem da distribuição T_n:

(i) **Base indutiva:** A distribuição da primeira ordem T_1 tem ordem singular $\omega_- = 0$ e $n = 1$. Ela tem $M = 1$ e $N = 2$; a base indutiva é obtida exigindo o cumprimento da Eq. (5.166) para esses valores particulares:

$$0 = A + B + 2C + F \quad . \tag{5.167}$$

(ii) **Hipótese indutiva:** Assumir-se-á, de acordo com o princípio da indução matemática completa, que todas as distribuições T_m com $m \leq n - 1$ satisfazem à Eq. (5.166).

(iii) **Passo indutivo:** O passo indutivo será dado impondo a Eq. (5.166) sobre a distribuição T_n e procurando pelos valores das constantes A, B, C e F que sejam compatíveis com a Eq. (5.165) e, a um tempo, satisfaçam à Eq. (5.167). Se tais constantes podem ser identificadas, então a prova estará completa.

Suponhamos que estejamos interessados por um termo particular de T_n gerado por T_r^1 (M_r, N_r) e T_s^2 (M_s, N_s) por meio de l_s contrações bosônicas e l_f contrações fermiônicas. Então a Eq. (5.166) implica que:

$$\omega_- = A + B(M_r + M_s - 2l_s) + C(N_r + N_s - 2l_f) + F(r+s) \quad . \tag{5.168}$$

Por outro lado, devido à hipótese indutiva:

$$\omega_-^1 = A + BM_r + CN_r + Fr \quad , \quad \omega_-^2 = A + BM_s + CN_s + Fs \quad ,$$

de forma que a Eq. (5.165) estabelece a seguinte igualdade:

$$\omega_- = 2A + B(M_r + M_s) + C(N_r + N_s) + F(r+s) + 2l_s + 3l_f - 4 \quad . \tag{5.169}$$

Comparando as Eqs. (5.168) e (5.169), chega-se a:

$$A + 2(B+1)l_s + 2\left(C + \frac{3}{2}\right) l_f - 4 = 0 \quad . \tag{5.170}$$

Essa equação deve ser válida para todos os valores de l_s, l_e –compatíveis com a ordem da distribuição, isto é, $l_s, l_f \leq n/2$ para n par, e $l_s, l_f \leq (n-1)/2$ para n ímpar–. Tomando $l_s = 0 = l_f$: $A = 4$. Se em câmbio é $l_s = 0$, $l_f \neq 0$: $C = -3/2$. E finalmente, se $l_f = 0$, $l_s \neq 0$: $B = -1$. Com esses valores, a Eq. (5.167) implica que seja: $F = 0$. O resultado final é portanto:

$$\omega_- = 4 - M - \frac{3}{2}N \quad . \tag{5.171}$$

Como consequência, o modelo de Yukawa é normalizável na dinâmica da frente de luz, pois a ordem singular das distribuições de transição independe da ordem perturbativa delas. Também, para essa teoria, em que o méson é uma partícula pseudo-escalar, o único termo de auto-interação que pode ser gerado em ordens superiores é o $:\varphi^4:$, para o qual é $\omega_- = 0$. Termos de auto-interação com potências maiores do campo do méson, ou termos de auto-interação para o núcleon, não são possíveis, pois para eles a ordem singular seria negativa.

Além disso, no modelo de Yukawa as condições de normalização de covariância de Lorentz e de preservação da ordem singular no eixo x^- podem, as duas, ser simultâneamente atingidas em toda distribuição de transição de qualquer ordem. Isto pode ser provado por indução matemática completa: Como a distribuição T_1 é invariante de Lorentz e as distribuições de (anti-)comutação dos campos fermiônico e escalar são covariantes de Lorentz, a distribuição causal será sempre covariante de Lorentz e o Teorema 4.5 da Seç. 4.7 se lhe aplica.

Capítulo 6

Invariância de gauge quântica para campos de gauge sem massa

No presente capítulo estabeleceremos uma metodologia de trabalho para as teorias de gauge que nos permitirá estudá-las de forma manifestamente covariante. Ainda mais, o procedimento que apresentaremos revelar-se-á fundamental no mesmo sentido em que o é a prescrição do acoplamento mínimo [200] na teoria do campo clássico –vide também a Ref. [201]–: Ele definirá a forma da interação quântica ao permitir deduzir o termo da primeira ordem, T_1, para as teorias de gauge. Ademais, serão estabelecidas identidades cujo cumprimento deve ser exigido aos termos de ordem superior. Como resultado da construção concluir-se-á que os termos de gauge da distribuição de comutação do campo de gauge não contribuem para o cálculo dos elementos de matriz do operador de espalhamento entre estados físicos.

6.1 Extensão do espaço de Fock

A quantização do campo no Cap. 3 significou a construção do espaço de Fock e dos operadores, assim como das distribuições operador-valuadas, que agem no referido espaço. Este consistia somente de estados físicos, cujas funções de onda eram as partes de frequência positiva das soluções clássicas às equações do movimento do campo. Essa abordagem não apresentava problema algum, como pode-se ver no Cap. 5, em que foi usada para estudar a interação de Yukawa. Porém, quando se trata das teorias de gauge, em que o campo vetorial sem massa deve ser quantizado, por exemplo, no gauge do plano nulo, duas dificuldades práticas –e somente práticas– surgem: A primeira se refere à covariância não manifesta do processo de quantização; a segunda, à dificuldade de implementar a invariância de gauge nos termos de ordem superior, precisando de cálculos longos. Estes motivos são suficientes para buscar uma formulação alternativa das teorias de gauge em que as quantidades sejam todas covariantes e em que a invariância de gauge possa ser implementada de forma simples. Como para semelhante tarefa é preciso incluir, na formulação, estados não físicos em que o gauge não tenha sido fixado, os objetivos acima descritos precisam da ampliação do espaço de Fock para caber nele os mencionados estados adicionais.

Consideremos o campo de gauge vetorial neutro sem massa; ele descreverá o fóton na teoria eletromagnética e os glúons na cromodinâmica quântica. Este tipo de campo, o temos visto, possui unicamente dois graus de liberdade, que identificam-se com suas componentes transversais $A^{\alpha}(x)(\alpha \in I_2)$, então a expressão do campo quantizado completo era obtida

solucionando as equações de vínculos. O espaço de Fock que correspondia a este processo de quantização será doravante denotado por $\mathcal{F}_{\text{fís}}$, e chamado «subespaço físico» do espaço de Fock completo, $\mathcal{F}$. Isto porque os potenciais de gauge físicos serão aqueles que satisfazem à condição de gauge do plano nulo –e, implicada por ela, lembrando que tratamos somente com campos livres, à condição de gauge de Lorenz–. Os setores do espaço de Fock $\mathcal{F}$ distintos do subespaço físico são inacessíveis à observação experimental, portanto neles não aplicam as considerações físicas feitas no Cap. 3; particularmente, não é esperado que a expressão do campo quantizado seja a mesma que a do seu correspondente campo clássico: A extensão do espaço de Fock é um procedimento eminentemente matemático.

Se as condições de gauge não se impõem ao operador de campo quantizado, então se tem de quantizar os quatro estados de polarização $\lambda \in \{+;1;2;-\}$, e introduzir não dois, senão quatro conjuntos de operadores de emissão e absorção $a^\dagger_\lambda(f)$ e $a_\lambda(f)$. Para que o produto interno do espaço de Fock completo seja definido positivo, impor-se-á que eles satisfaçam:

$$\left[a_\lambda(\boldsymbol{p}); a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{q})\right] = 2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad . \tag{6.1}$$

A extensão mais natural da expressão do operador de campo quantizado da Eq. (3.151) é:

$$A^a(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\lambda \int d\mu(\boldsymbol{p})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad , \tag{6.2}$$

com a soma agora estendida a todas as polarizações, incluindo as não físicas $\lambda \in \{+;-\}$. No entanto, o operador de campo da Eq. (6.2) não tem uma relação de comutação apropriada:

$$\begin{aligned}\left[A^a(x); A^b(y)\right] =& (2\pi)^{-3}\int d^4p\,\delta(p^2)\Theta(p_-)\left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right) \\ &\times\left(-g^{ab} + \frac{p^a\eta^b + \eta^a p^b}{p_-} + \varepsilon_+(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_+(\boldsymbol{p})^b + \varepsilon_-(\boldsymbol{p})\varepsilon_-(\boldsymbol{p})^b\right) \quad .\end{aligned}$$

Para obter uma relação de comutação covariante, como nossos fins reclamam, dever-se-ia ter somente o termo $-g^{ab}$ entre os parênteses da segunda linha dessa equação, o que é possível de se conseguir com uma redefinição apropriada dos operadores de campo associados às polarizações não físicas –isto, já o dissemos, é absolutamente admissível, pois tal modificação não tem nenhuma influência nos resultados físicos–. Escrevamos o operador de campo quantizado como:

$$A^a(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\lambda \int d\mu(\boldsymbol{p})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a A_\lambda(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{6.3}$$

Para que este coincida com o campo quantizado real para os estados de polarização físicos:

$$A_{1,2}(\boldsymbol{p}) = a_{1,2}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger_{1,2}(\boldsymbol{p})e^{ipx} \quad . \tag{6.4}$$

O comutador é então:

$$\left[A^a(x); A^b(y)\right] = (2\pi)^{-3}\int d\mu(\boldsymbol{p})d\mu(\boldsymbol{q})\sum_{\lambda,\lambda'}\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_{\lambda'}(\boldsymbol{q})^b\left[A_\lambda(\boldsymbol{p}); A_{\lambda'}(\boldsymbol{q})\right] \quad . \tag{6.5}$$

Levando em conta a relação de completeza dos vetores de polarização, isto é:

$$\sum_{\lambda,\lambda'} g_{\lambda\lambda'}\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})_a\varepsilon_{\lambda'}(\boldsymbol{p})_b = g_{ab} \quad , \tag{6.6}$$

a relação de comutação desejada se obtém sempre que seja:

$$[A_\lambda(\boldsymbol{p}); A_{\lambda'}(\boldsymbol{q})] = -2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})g_{\lambda\lambda'}\left(e^{-i(px-qy)} - e^{i(px-qy)}\right) \quad . \tag{6.7}$$

Essa relação é efetivamente a que se tem para $\lambda \in \{1;2\}$ com $A_{1,2}(\boldsymbol{p})$ da Eq. (6.4). As outras componentes são também obtidas mediante a redefinição:

$$A_\pm(\boldsymbol{p}) := a_\pm(\boldsymbol{p})e^{-ipx} - a^\dagger_\mp(\boldsymbol{p})e^{ipx} \quad . \tag{6.8}$$

Assim sendo, definiremos o operador de campo do campo vetorial sem massa como:

$$A^a(x) := (2\pi)^{-3/2}\sum_\lambda \int d\mu(\boldsymbol{p})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\left(a_\lambda(\boldsymbol{p})e^{-ipx} - \sum_\tau g_{\lambda\tau}a^\dagger_\tau(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad , \tag{6.9}$$

e este, sim, satisfaz a uma regra de comutação covariante:

$$\left[A^a(x); A^b(y)\right] = ig^{ab}D(x-y) \quad , \tag{6.10}$$

com $D(x)$ a distribuição de Jordan-Pauli de massa nula. Também será de utilidade ter o comutador da parte de frequência negativa com a de frequência positiva desse campo[1]:

$$\begin{aligned}\left[A^a{}_-(x); A^b{}_+(y)\right] &= -(2\pi)^{-3}\sum_{\lambda,\lambda'}\int d\mu(\boldsymbol{p})d\mu(\boldsymbol{q})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_{\lambda'}(\boldsymbol{q})^b \\ &\quad\times\sum_{\tau'} g_{\lambda'\tau'}\left[a_\lambda(\boldsymbol{p}); a^\dagger_{\tau'}(\boldsymbol{q})\right]e^{-i(px-qy)} \\ &= -(2\pi)^{-3}\int d\mu(\boldsymbol{p})\sum_{\lambda\lambda'} g_{\lambda\lambda'}\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_{\lambda'}(\boldsymbol{p})^b e^{-ip(x-y)} \\ &= ig^{ab}D_+(x-y) \quad .\end{aligned} \tag{6.11}$$

E, analogamente:

$$\left[A^a{}_+(x); A^b{}_-(y)\right] = ig^{ab}D_-(x-y) \quad . \tag{6.12}$$

O espaço de Fock agora contém estados de partículas com as quatro polarizações, dentre as quais somente as transversais podem manifestar-se na natureza. Nesse espaço estendido, o operador hamiltoniano é:

$$\mathbf{P}_+ = \int d\mu(\boldsymbol{p})p_+\sum_\lambda a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p})a_\lambda(\boldsymbol{p}) \quad , \tag{6.13}$$

[1] O subíndice indicando o sinal das frequências escrever-se-á sempre à direita do índice da componente do operador de campo. Por exemplo, a parte de frequência positiva da componente longitudinal do operador de campo será: $A^-{}_+(x) = A_{++}(x)$, e assim por diante.

pois com ele o operador de campo quantizado da Eq. (6.9) satisfaz à equação do movimento de Heisenberg:

$$\begin{aligned} i\partial_+ A^a(x) &= (2\pi)^{-3} \sum_\lambda \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_+ \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + \sum_\tau g_{\lambda\tau} a_\tau^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \\ &= [A^a(x); \mathbf{P}_+] \quad . \end{aligned} \tag{6.14}$$

Como este hamiltoniano é definido não-negativo, o procedimento de extensão do espaço de Fock feito é satisfatório.

6.2 Prova da invariância de Poincaré do subespaço físico

Vejamos em primeiro lugar o que as condições de gauge do plano nulo e de Lorenz significam quando são aplicadas ao operador de campo quantizado. Como definido, a componente «+» de todos os vetores de polarização, exceto a do $\varepsilon_+(\boldsymbol{p})^a$, é nula, motivo pelo qual o operador de campo quantizado $A^+(x)$ só tem contribuição dessa polarização:

$$A^+(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \varepsilon_+(\boldsymbol{p})^+ \left(a_+(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} - a_-^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{6.15}$$

Também, a divergência do operador de campo quantizado é:

$$\partial_a A^a(x) = -i(2\pi)^{-3/2} \sum_\lambda \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_a \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + \sum_\tau g_{\lambda\tau} a_\tau^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{6.16}$$

Sem embargo, como viu-se no Cap. 2:

$$\varepsilon_{1,2}(\boldsymbol{p})_- = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{1,2}(\boldsymbol{p})_+ = -\frac{p_\alpha \varepsilon_{1,2}(\boldsymbol{p})^\alpha}{p_-} \quad , \tag{6.17}$$

o que implica que eles são vetores de polarização ortogonais ao momento p^a: $p_a \varepsilon_{1,2}(\boldsymbol{p})^a = 0$. Portanto, na soma da Eq. (6.16) somente os estados de polarização «+» e «−» entram:

$$\partial_a A^a(x) = -i(2\pi)^{-3/2} \sum_{\lambda=+,-} \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_a \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + \sum_\tau g_{\lambda\tau} a_\tau^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad , \tag{6.18}$$

de forma que só os operadores de campo de emissão e absorção $a_\pm^\dagger(\boldsymbol{p})$ e $a_\pm(\boldsymbol{p})$ estão inclusos. Como o subespaço físico do espaço de Fock, $\mathcal{F}_{\text{fís}}$, é aquele em que as partículas só têm as polarizações transversais, os resultados das Eqs. (6.15) e (6.18) significam que este subespaço pode ser caracterizado pelo cumprimento das condições de gauge como elementos de matriz:

$$\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{\text{fís}} : \quad \big(\Phi; A^+(x)\Psi\big) = 0 \quad \wedge \quad \big(\Phi; \partial_a A^a(x)\Psi\big) = 0 \quad . \tag{6.19}$$

Seja $f = (f_a)$ uma função de onda no espaço de Hilbert estendido de uma partícula; ela muda, quando submetida a uma transformação de Poincaré, segundo a lei de câmbio do

campo vetorial clássico:

$$\left(U(a;\Lambda)f\right)(x) = \Lambda^{-1} f\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right) \quad . \tag{6.20}$$

Sobre o espaço dessas funções definimos o operador $A(f)$ como a aplicação do operador de campo quantizado $A^a(x)$ –que assim manifesta seu caráter distribucional– sobre a função de teste f_a:

$$A(f) := \int d^4x f_a(x) A^a(x) \quad . \tag{6.21}$$

Definição: *O operador de transformação de Poincaré que age no espaço de Fock estendido é o operador* $\mathbf{U}(a;\Lambda)$ *tal que:*

$$\mathbf{U}(a;\Lambda) A(f) \mathbf{U}(a;\Lambda)^{-1} = A\left(U(a;\Lambda)f\right) \quad . \tag{6.22}$$

Usando as Eqs. (6.20) e (6.21), a definição recém dada leva à lei de transformação do operador de campo quantizado. Como:

$$\begin{aligned}
\int d^4x f_a(x) \mathbf{U}(a;\Lambda) A^a(x) \mathbf{U}(a;\Lambda)^{-1} &= \int d^4x \left(U(a;\Lambda)f\right)_a A^a(x) \\
&= \int d^4x \Lambda_a{}^b f_b\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right) A^a(x) \\
&= \int d^4x f_a(x) \left(\Lambda^{-1}\right)^a{}_b A^b(\Lambda x + a) \quad ,
\end{aligned}$$

obtém-se que:

$$\mathbf{U}(a;\Lambda) A^a(x) \mathbf{U}(a;\Lambda)^{-1} = \left(\Lambda^{-1}\right)^a{}_b A^b(\Lambda x + a) \quad . \tag{6.23}$$

A aplicação da involução «†» a essa equação permite notar que o operador $\mathbf{U}(a;\Lambda)$ só poderia ser unitário se o operador de campo quantizado fosse auto-adjunto; mas de sua expressão dada na Eq. (6.9) é claro que somente as componentes $A^{1,2}(x)$ o são, enquanto que as $A^{+,-}(x)$, não. Donde as transformações de Poincaré não são unitárias no espaço de Fock estendido. Isto não viola ao teorema de Wigner, pois as transformações de Poincaré não têm por que ser uma simetria do espaço completo: a experiência pode apenas provar que elas o são do subespaço físico. Que é possível, como de fato o assegura o teorema de Wigner, escrever uma representação unitária dessas transformações no subespaço físico, o provaremos a seguir.

Denotemos por $\mathcal{F}_L$ o supespaço do espaço de Fock dos estados que satisfazem à condição de gauge de Lorenz. Como essa é compatível com a condição de gauge do plano nulo, a qual é única, como foi provado no Cap. 3, pode-se afirmar:

$$\forall \Phi' \in \mathcal{F}_L \ : \ \exists! \Phi \in \mathcal{F}_{\text{fís}} : \quad \Phi'_a(x) = \Phi_a(x) + \partial_a \Lambda(x) \quad , \quad \Box \Lambda(x) = 0 \quad . \tag{6.24}$$

O projetor sobre o subespaço físico, que age por meio da transformação de gauge apropriada e única, denotar-se-á P; assim:

$$\Phi = P\Phi' \quad . \tag{6.25}$$

Por outro lado, o produto interno no espaço de uma partícula é:

$$(f;g)_1 = \sum_a i \int f_a(x)^* \overleftrightarrow{\partial}_- g_a(x) d^3\boldsymbol{x} = \sum_a \int d\mu(\boldsymbol{p}) \hat{f}_a(\boldsymbol{p})^* \hat{g}_a(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{6.26}$$

Consideremos então dois estados de uma partícula, $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{\text{fís}}$, com funções de onda Φ_a e Ψ_a, respectivamente. Como estes estão no subespaço físico, satisfazem à condição de gauge do plano nulo, $\Phi^+ = 0 = \Psi^+$, e então seu produto interno pode ser colocado de forma invariante de Poincaré –abusando da notação, embora o significado seja claro–:

$$(\Phi;\Psi) = \sum_\alpha i \int \Phi_\alpha(x)^* \overleftrightarrow{\partial}_- \Psi_\alpha(x) d^3\boldsymbol{x} = -\sum_\alpha i \int \Phi_\alpha(x)^* \overleftrightarrow{\partial}_- \Psi^\alpha(x) d^3\boldsymbol{x} = -(\Phi_a;\Psi^a) \quad . \tag{6.27}$$

Aplique-se agora uma transformação de Poincaré (de sistema de referência). Se a transformação é a identidade, ou se ela é uma rotação espacial ou uma promoção de Lorentz[2] na direção x^3, então o valor $\Phi^+ = 0$ não muda, e o vetor ainda se encontra no subespaço físico. Porém, no caso geral o valor da componente temporal do potencial mudará de valor, e os estados transformados Φ' e Ψ' já não se encontram em $\mathcal{F}_{\text{fís}}$. Como a condição de gauge de Lorenz é covariante, entretanto, ainda se terá que $\Phi', \Psi' \in \mathcal{F}_L$. Assim sendo, pode-se aplicar o projetor P aos estados transformados para obter estados outra vez em $\mathcal{F}_{\text{fís}}$:

$$\widetilde{\Phi} = P\mathbf{U}(a;\Lambda)\Phi =: \widetilde{\mathbf{U}}(a;\Lambda)\Phi \quad , \quad \widetilde{\Psi} = \widetilde{\mathbf{U}}(a;\Lambda)\Psi \quad . \tag{6.28}$$

Portanto, o operador que realiza as transformações de Poincaré em $\mathcal{F}_{\text{fís}}$, e que tem de ser unitário neste subespaço, não é o $\mathbf{U}(a;\Lambda)$, mas o $\widetilde{\mathbf{U}}(a;\Lambda)$. Efetivamente, ele o é: Como $\widetilde{\Phi}$ e Φ' estão relacionados por uma transformação de gauge, assim como $\widetilde{\Psi}$ e Ψ', escreveremos:

$$\Phi'_a = \widetilde{\Phi}_a + \partial_a \chi \quad , \quad \Psi'_a = \widetilde{\Psi}_a + \partial_a \Lambda \quad . \tag{6.29}$$

Substituindo estes no produto interno, que na Eq. (6.27) foi escrito de forma covariante, e que portanto não muda com a transformação de Poincaré aplicada, obtém-se a igualdade:

$$(\Phi;\Psi) = -(\Phi'_a;\Psi'^a) = \left(\widetilde{\Phi};\widetilde{\Psi}\right) - \left(\partial_a\chi;\widetilde{\Psi}^a\right) - \left(\widetilde{\Phi}_a;\partial^a\Lambda\right) - (\partial_a\chi;\partial^a\Lambda) \quad . \tag{6.30}$$

É fácil verificar que os termos segundo e terceiro da última igualdade são nulos, devido a que $\widetilde{\Phi}$ e $\widetilde{\Psi}$ satisfazem às condições de gauge impostas e devido às condições assintóticas. Usando também as condições assintóticas, o último termo adota a forma:

$$\begin{aligned}(\partial_a\chi;\partial^a\Lambda) &= (\partial_+\chi;\partial_-\Lambda) + (\partial_-\chi;\partial_+\Lambda) - (\partial_\alpha\chi;\partial_\alpha\Lambda) \\ &= -(\partial_+\partial_-\chi;\Lambda) - (\chi;\partial_+\partial_-\Lambda) + \frac{1}{2}(\partial_\perp^2\chi;\Lambda) + \frac{1}{2}(\chi;\partial_\perp^2\Lambda) \\ &= -\frac{1}{2}(\Box\chi;\Lambda) - \frac{1}{2}(\chi;\Box\Lambda) \quad ,\end{aligned}$$

[2] No idioma inglês, um *boost*.

e estes dois adendos são ambos nulos devido à Eq. (6.24). Concluindo:

$$(\Phi;\Psi) = \left(\widetilde{\Phi};\widetilde{\Psi}\right) = \left(\widetilde{\mathbf{U}}(a;\Lambda)\Phi;\widetilde{\mathbf{U}}(a;\Lambda)\Psi\right) \quad , \tag{6.31}$$

e o operador $\widetilde{\mathbf{U}}(a;\Lambda)$ é um operador unitário. Dessarte, o subespaço físico do espaço de Fock é invariante sob transformações do sistema de referência.

6.3 Pseudo-unitariedade da transformação de Poincaré no espaço de Fock estendido

Observando novamente a Eq. (6.23), ainda existe a possibilidade de que o operador $\mathbf{U}(a;\Lambda)$ seja pseudo-unitário no espaço de Fock estendido segundo alguma involução «K», isto é,

$$\mathbf{U}(a;\Lambda)^K = \mathbf{U}(a;\Lambda)^{-1} \quad , \tag{6.32}$$

se o operador de campo quantizado estendido é pseudo-auto-adjunto segundo a mesma: $A^a(x)^K = A^a(x)$. Isto será possível se ele tem a seguinte expressão:

$$A^a(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\lambda \int d\mu(\boldsymbol{p})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^K_\lambda(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right) \quad . \tag{6.33}$$

A comparação com a Eq. (6.9) permite estabelecer que:

$$a^K_\lambda(\boldsymbol{p}) = -\sum_\tau g_{\lambda\tau}a^\dagger_\tau(\boldsymbol{p}) \quad \Rightarrow \quad a^K_{1,2}(\boldsymbol{p}) = a^\dagger_{1,2}(\boldsymbol{p}) \quad , \quad a^K_\pm(\boldsymbol{p}) = -a^\dagger_\mp(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{6.34}$$

Essas equações já poderiam ser consideradas a definição da involução «K». Contudo, para mostrar que esta operação está de fato bem definida –ou ainda, que ela existe e tem as propriedades de uma involução–, fixaremos a atenção no seguinte teorema [163]:

Teorema: *Seja $(\bullet;\bullet)_K$ uma forma bilinear no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se ela é limitada, isto é:*

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ \ : \ \forall f,g \in \mathcal{H} \ : \quad |(f;g)_K| \leq C\|f\|\|g\| \quad , \tag{6.35}$$

então existe um operador linear limitado $\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, com $\|\eta\| \leq C$ e $Dom(\eta) = \mathcal{H}$, tal que:

$$(f;g)_K = (f;\eta g) \quad . \tag{6.36}$$

Ademais, $(\bullet;\bullet)_K$ é hermitiana[3] se e só se o operador η é auto-adjunto, $\eta^\dagger = \eta$.

Comecemos por definir os seguintes operadores, para funções de teste $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$:

$$a^a_\lambda(f) := \int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a a_\lambda(\boldsymbol{p}) \quad , \quad a^a_\lambda(f)^\dagger := \int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a a^\dagger_\lambda(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{6.37}$$

[3] Isto é, para todos $f,g \in \mathcal{H}$: $(f;g)_K = (g;f)^*_K$.

Eles geram os estados de multi-partículas:

$$\Phi^{a_1\cdots a_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(f_1;\cdots;f_n) := a^{a_1}_{\lambda_1}(f_1)^\dagger\cdots a^{a_n}_{\lambda_n}(f_n)^\dagger\Omega \quad . \tag{6.38}$$

Semelhantemente, e tendo a Eq. (6.34) como inspiração, definimos os operadores:

$$a^a_\lambda(f)^K := -\int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\sum_\tau g_{\tau\lambda}a^\dagger_\tau(\boldsymbol{p}) \quad , \tag{6.39}$$

e os estados gerados por eles:

$$\widetilde{\Phi}^{a_1\cdots a_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(f_1;\cdots;f_n) := a^{a_1}_{\lambda_1}(f_1)^K\cdots a^{a_n}_{\lambda_n}(f_n)^K\Omega \quad . \tag{6.40}$$

Definimos agora a forma bilinear $(\bullet;\bullet)_K$: Sobre os estados de multi-partículas:

$$\left(\Phi^{a_1\cdots a_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(f_1;\cdots;f_n);\Phi^{b_1\cdots b_m}_{\sigma_1\cdots\sigma_m}(g_1;\cdots;g_m)\right)_K := \left(\Phi^{a_1\cdots a_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(f_1;\cdots;f_n);\widetilde{\Phi}^{b_1\cdots b_m}_{\sigma_1\cdots\sigma_m}(g_1;\cdots;g_m)\right) , \tag{6.41}$$

e sobre estados mais gerais, por continuação linear da definição recém dada. Esta, oferecida apenas sobre os estados de multi-partículas, é suficiente porque os estados $\Phi^{a_1\cdots a_n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(f_1;\cdots;f_n)$ geram o espaço de Fock –uma vez escolhida uma base de funções no espaço de Schwartz–, segundo se provou no Cap. 3 [vide em particular a Eq. (3.30)], e porque a forma bilinear é definida em relação ao produto interno, o qual é contínuo. Além disso, será suficiente limitar nossa atenção aos estados de uma partícula, pois os estados mais gerais podem ser considerados combinações lineares de seus produtos tensoriais.

O cálculo direto mostra que:

$$\left(\Phi^a_\lambda(f);\Phi^b_\sigma(g)\right)_K = -g_{\lambda\sigma}\int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\hat{g}(\boldsymbol{p})\left(\sum_a\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_\sigma(\boldsymbol{p})^a\right) \quad . \tag{6.42}$$

Por comparação, o produto interno entre os mesmos estados é:

$$\left(\Phi^a_\lambda(f);\Phi^b_\sigma(g)\right) = \delta_{\lambda\sigma}\int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\hat{g}(\boldsymbol{p})\left(\sum_a\varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_\sigma(\boldsymbol{p})^a\right) \quad . \tag{6.43}$$

Para as polarizações físicas (transversais) a forma bilinear $(\bullet;\bullet)_K$ se reduz ao produto interno, que satisfaz à Eq. (6.35) com $C = 1$ como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz. O outro caso em que a forma bilinear $(\bullet;\bullet)_K$ é não nula é –também $\left(\Phi^a_-(f);\Phi^b_+(g)\right)_K$ é não nulo, mas este pode ser obtido por simetria do caso que estudaremos–:

$$\begin{aligned}\left(\Phi^a_+(f);\Phi^b_-(g)\right)_K &= -\int d\mu(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\hat{g}(\boldsymbol{p})\left(\sum_a\varepsilon_+(\boldsymbol{p})^a\varepsilon_-(\boldsymbol{p})^a\right)\\ &= -\int d\mu(\boldsymbol{p})\frac{p_\perp^2}{2p_-^2}\hat{f}(\boldsymbol{p})^*\hat{g}(\boldsymbol{p}) \quad ,\end{aligned} \tag{6.44}$$

em que usamos a expressão explícita dos vetores de polarização envolvidos para obter o resultado da segunda linha. Por outro lado, usando a Eq. (6.43) e a forma explícita dos vetores de polarização, encontra-se que:

$$\|\Phi^a_+(f)\|^2 = \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(1 + \frac{p_\perp^2}{2p_-^2}\right)^2 \left|\hat{f}(\boldsymbol{p})\right|^2 \quad , \quad \left\|\Phi^b_-(g)\right\|^2 = \int d\mu(\boldsymbol{p})\, |\hat{g}(\boldsymbol{p})|^2 \quad . \tag{6.45}$$

As Eqs. (6.44) e (6.45), junto com a aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço $L^2(\mathcal{M}, \mu)$, permite obter finalmente:

$$\begin{aligned} \left|\left(\Phi^a_+(f); \Phi^b_-(g)\right)_K\right| &= \left| \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(\frac{p_\perp^2}{2p_-^2} \hat{f}(\boldsymbol{p})\right)^* \hat{g}(\boldsymbol{p}) \right| \\ &= \left| \left(\frac{p_\perp^2}{2p_-^2} \hat{f}(\boldsymbol{p}); \hat{g}(\boldsymbol{p})\right)_{L^2} \right| \\ &\leq \left\| \frac{p_\perp^2}{2p_-^2} \hat{f} \right\| \|\hat{g}\| \\ &\leq \|\Phi^a_+(f)\| \left\|\Phi^b_-(g)\right\| \quad . \end{aligned} \tag{6.46}$$

De forma que também para este caso a Eq. (6.35) se satisfaz com $C = 1$. Este estudo dos casos particulares pode agora ser estendido para combinações lineares de diferentes polarizações. Note-se, em primeiro lugar, que $\Phi^a_\lambda(f_1) + \Phi^a_\lambda(f_2) = \Phi^a_\lambda(f_1 + f_2)$, de forma que só estaremos interessados no caso em que a soma inclua estados de polarização diferentes. Assim sendo, e como cada polarização só tem uma outra polarização correspondente tal que a forma bilinear não se anula, segundo o indica a Eq. (6.42), ter-se-á, por exemplo:

$$\begin{aligned} \left|\left(\Phi^a_{\lambda_1} + \Phi^a_{\lambda_2}; \Phi^b_{\sigma_1} + \Phi^b_{\sigma_2}\right)_K\right| &= \left|\left(\Phi^a_{\lambda_1}; \Phi^b_{\sigma_1}\right)_K + \left(\Phi^a_{\lambda_2}; \Phi^b_{\sigma_2}\right)_K\right| \\ &\leq \left|\left(\Phi^a_{\lambda_1}; \Phi^b_{\sigma_1}\right)_K\right| + \left|\left(\Phi^a_{\lambda_2}; \Phi^b_{\sigma_2}\right)_K\right| \\ &\leq \left\|\Phi^a_{\lambda_1}\right\| \left\|\Phi^a_{\sigma_1}\right\| + \left\|\Phi^a_{\lambda_2}\right\| \left\|\Phi^a_{\sigma_2}\right\| \\ &\leq \left(\left\|\Phi^a_{\lambda_1}\right\|^2 + \left\|\Phi^a_{\lambda_2}\right\|^2\right)^{1/2} \left(\left\|\Phi^a_{\sigma_1}\right\|^2 + \left\|\Phi^a_{\sigma_2}\right\|^2\right)^{1/2} \quad . \end{aligned}$$

E estas últimas quantidades são as normas dos estados $\Phi^a_{\lambda_1} + \Phi^a_{\lambda_2}$ e $\Phi^b_{\sigma_1} + \Phi^b_{\sigma_2}$, pois os vetores de polarização –e assim então os estados que lhes correspondem– são ortogonais entre si, como o evidencia a Eq. (6.43). O mesmo raciocínio se aplica quando estejam presentes mais outras polarizações, de forma que ainda na combinação linear mais geral possível se cumprirá que:

$$|(\Phi; \Psi)_K| \leq \|\Phi\| \|\Psi\| \quad . \tag{6.47}$$

Assim, como a constante é $C = 1$, seu valor não se modificará ao considerar produtos tensoriais, e a Eq. (6.47) será válida para quaisquer $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$. Decorre disto e do teorema

antes citado que existe um operador η definido sobre o espaço de Fock completo, tal que:

$$(\Phi;\Psi)_K = (\Phi;\eta\Psi) \quad , \quad \|\eta\| \leq 1 \quad . \tag{6.48}$$

Ainda mais, da Eq. (6.42) é claro que a forma bilinear $(\bullet;\bullet)_K$ é hermitiana:

$$\left(\Phi^a_\lambda(f);\Phi^b_\sigma(g)\right)^*_K = \left(\Phi^b_\sigma(g);\Phi^a_\lambda(f)\right)_K \quad , \tag{6.49}$$

donde o operador η será, o diz o teorema, auto-adjunto:

$$\eta^\dagger = \eta \quad . \tag{6.50}$$

À continuação, usando as Eqs. (6.38) e (6.40) é possível provar que:

$$\left(\widetilde{\Phi}^a_\lambda(f);\widetilde{\Phi}^b_\sigma(g)\right) = \left(\Phi^a_\lambda(f);\Phi^b_\sigma(g)\right) \quad . \tag{6.51}$$

Por outro lado, usando as Eqs. (6.48)-(6.50):

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\Phi}^a_\lambda(f);\widetilde{\Phi}^b_\sigma(g)\right) &= \left(\widetilde{\Phi}^a_\lambda(f);\Phi^b_\sigma(g)\right)_K = \left(\widetilde{\Phi}^a_\lambda(f);\eta\Phi^b_\sigma(g)\right) \\ &= \left(\eta\Phi^b_\sigma(g);\widetilde{\Phi}^a_\lambda(f)\right)^* = \left(\eta\Phi^b_\sigma(g);\Phi^a_\lambda(f)\right)^*_K \\ &= \left(\eta\Phi^b_\sigma(g);\eta\Phi^a_\lambda(f)\right)^* = \left(\Phi^a_\lambda(f);\eta^2\Phi^b_\sigma(g)\right) \quad .\end{aligned} \tag{6.52}$$

A comparação das Eqs. (6.51) e (6.52) leva a estabelecer que:

$$\eta^2 = 1 \quad . \tag{6.53}$$

Outras propriedades importantes são as seguintes: como a forma bilinear $(\bullet;\bullet)_K$ se reduz ao produto interno para estados físicos –polarizações transversais–, ter-se-á que:

$$\forall\Phi \in \mathcal{F}_{\text{fís}} : \ \eta\Phi = \Phi \quad . \tag{6.54}$$

Isto é válido, em particular, para o estado de vazio: $\eta\Omega = \Omega$. Também, das Eqs. (6.41) e (6.48):

$$\left(\Phi;\eta a^\dagger_{\lambda_1}(f_1)\cdots a^\dagger_{\lambda_n}(f_n)\Omega\right) = \left(\Phi;a^K_{\lambda_1}(f_1)\cdots a^K_{\lambda_n}(f_n)\Omega\right) \quad . \tag{6.55}$$

Mas do lado esquerdo dessa equação, entre cada par de operadores de emissão, podemos introduzir a unidade $1 = \eta^2$. A comparação com o lado direito leva a estabelecer a definição rigorosa da involução «K»: Seja B um operador:

$$B^K := \eta B^\dagger \eta \quad . \tag{6.56}$$

Esta definição e as propriedades do operador η acima encontradas permitem provar que a

involução «K» satisfaz a todas as propriedades desejáveis:

$$(A+B)^K = A^K + B^K\,, \quad (AB)^K = B^K A^K\,, \quad (B^K)^K = B\,, \quad (cB)^K = c^* B^K \ (c \in \mathbb{C})\,. \tag{6.57}$$

Podemos, pois, afirmar com total certeza a existência de uma involução «K» segundo a qual o campo quantizado da radiação estendido é pseudo-auto-adjunto, e, desta maneira, que o operador $\mathbf{U}(a;\Lambda)$ é pseudo-unitário segundo «K» no espaço de Fock completo (estendido).

6.4 Definição da transformação de gauge quântica

Já repetimos várias vezes que o subespaço físico é aquele constituído por estados nos quais regem as condições de gauge do plano nulo e de Lorenz, simultâneamente, e que essas fixam completamente o gauge. Assim, já não são permitidas mais «transformações de gauge clássicas», isto é, transformações de gauge das funções de onda. Por outro lado, temos estendido o espaço de Fock do campo de gauge por meio da definição do operador de campo quantizado da Eq. (6.9). Contudo, já dissemos que essa extensão não é um procedimento físico, mas matemático, e, como tal, goza de certa liberdade: O operador de campo quantizado que definimos anteriormente bem poderia não ser o único a satisfazer as condições pelas quais foi introduzido, a saber, que as modificações deixem invariante a ação do operador de campo sobre os vetores do subespaço físico e que satisfaça a uma relação de comutação covariante. A possibilidade de uma tal simetria residual leva diretamente à definição da transformação de gauge quântica.

Definição: *Uma transformação de gauge quântica é uma transformação do campo quantizado, ou equivalentemente, do operador de campo quantizado, que depende continuamente de um parâmetro λ constante, e que tem a forma*

$$A'(f) = e^{-i\lambda Q} A(f) e^{i\lambda Q} \quad \Leftrightarrow \quad A'^a(x) = e^{-i\lambda Q} A^a(x) e^{i\lambda Q} \quad , \tag{6.58}$$

forma essa que garante (1) que a distribuição de comutação do campo transformado seja igual àquela do campo original (covariante), e (2) que o operador de campo transformado ainda satisfaça à equação do movimento $\Box A'^a(x) = 0$. Ademais, impomos a condição de que $e^{i\lambda Q}$ é um operador que deixa invariantes os estados de $\mathcal{F}_{\text{fís}}$. O operador Q, gerador das transformações de gauge quânticas, é chamado operador de carga de gauge.

A consequência mais direta dessa definição é que os estados físicos são aniquilados pelo operador de carga de gauge, donde decorre que:

$$\mathcal{F}_{\text{fís}} \subseteq \text{Ker}(Q) \quad . \tag{6.59}$$

Mas não sabemos ainda se se cumpre a igualdade entre os dois conjuntos. Para averiguá-lo, comecemos por estabelecer o seguinte resultado:

Lema 6.1: *O operador de carga de gauge Q é construído só com operadores de emissão e absorção de partículas não físicas.*

Prova: Em primeiro lugar, vejamos que os estados de partículas não físicas são ortogonais aos estados físicos; com efeito, sejam $a^\dagger_{\text{fís}}$ e $a^\dagger_{\text{nf}}$ operadores de emissão de partículas físicas e não físicas, respectivamente. Como eles comutam:

$$\left(a^\dagger_{\text{fís}}\Omega; a^\dagger_{\text{nf}}\Omega\right) = \left(\Omega; a_{\text{fís}}a^\dagger_{\text{nf}}\Omega\right) = \left(\Omega; a^\dagger_{\text{nf}}a_{\text{fís}}\Omega\right) = 0 \quad , \tag{6.60}$$

o que prova nosso enunciado. Consideremos então dois estados $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_{\text{fís}}$:

$$0 = (\Phi; Q\Psi) = \left(Q^\dagger\Phi; \Psi\right) \quad \Rightarrow \quad Q^\dagger\Phi \in \mathcal{F}^\perp_{\text{fís}} \quad . \tag{6.61}$$

De acordo com o Corolário 3.1-1 (vide a Seç. 3.1), todo operador que age no espaço de Fock pode ser escrito em função dos operadores de emissão e absorção. Em particular, apliquemos este resultado ao operador de carga de gauge, Q. Para que ele aniquile todos os estados físicos, necessariamente todos seus termos devem ter um operador de absorção de partícula não física à sua direita. Suponhamos agora que um dos seus termos tem um operador de partícula física à esquerda:

$$Q \sim a^\dagger_{\text{fís}}a_{\text{nf}} + \cdots \tag{6.62}$$

Então, aplicando o operador adjunto a um estado físico Φ:

$$Q^\dagger\Phi \sim a^\dagger_{\text{nf}}a_{\text{fís}}\Phi + \cdots \quad , \tag{6.63}$$

que em geral ainda contém partículas físicas, contradizendo o resultado da Eq. (6.61). Assim, Q não pode conter operadores de emissão de partículas físicas. Um argumento semelhante prova que o mesmo é válido para os operadores de absorção. ■

Como consequência do Lema 6.1, também $Q^\dagger$ só pode conter operadores de emissão e absorção de partículas não físicas. Este fato, junto com a Eq. (6.61), implica que $Q^\dagger$ só pode eliminar as partículas físicas contidas em $\Phi \in \mathcal{F}_{\text{fís}}$ se aniquila ele por completo: $Q^\dagger\Phi = 0$. Vemos assim que os estados físicos se encontram não só no núcleo de Q, mas também no de $Q^\dagger$, e a Eq. (6.59) deve ser substituída por:

$$\mathcal{F}_{\text{fís}} \subseteq \text{Ker}(Q) \cap \text{Ker}\left(Q^\dagger\right) = \text{Ker}\left(\left\{Q; Q^\dagger\right\}\right) \quad . \tag{6.64}$$

Essa última igualdade pode ser provada considerando que

$$\left(\Phi; \left\{Q; Q^\dagger\right\}\Phi\right) = \|Q\Phi\|^2 + \left\|Q^\dagger\Phi\right\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q\Phi = 0 \ \wedge \ Q^\dagger\Phi = 0 \quad . \tag{6.65}$$

Se expandirmos as exponenciais da Eq. (6.58) em série de potências do parâmetro λ,

obteremos que:

$$A'^a(x) = A^a(x) - i\lambda\,[Q; A^a(x)] - \frac{\lambda^2}{2}\,[Q; [Q; A^a(x)]] + \mathscr{O}(\lambda^3) \quad . \tag{6.66}$$

Segundo o Lema 6.1, o operador Q contém apenas operadores associados a partículas não físicas, donde decorre que os comutadores que aparecem na Eq. (6.66) são não nulos somente para as partes não físicas do operador de campo quantizado $A^a(x)$; ou seja, a transformação de gauge quântica não modifica a parte dinâmica –física– do operador de campo quantizado, como era requerido, e todos os observáveis construídos a partir de $A^a(x)$ terão os mesmos valores médios no subespaço físico: Essa é a invariância de gauge quântica.

Agora, a carga de gauge Q é qualquer operador construído com os operadores de emissão e absorção das partículas não físicas, sempre que tenha em todos seus termos, pelo menos, um operador de emissão à esquerda e um de absorção à direita, pois também $Q^\dagger$ deve ter sempre um operador de absorção à direita:

$$Q \sim a^\dagger_{\mathrm{nf}} \cdots a_{\mathrm{nf}} + \cdots \tag{6.67}$$

É claro, um termo tão geral assim originaria que o operador de campo $A'^a(x)$ tenha uma expansão em operadores compostos. Por simplicidade, desejaremos mantê-lo como um operador simples, e por isso exigiremos adicionalmente que Q seja quadrático nos operadores de campo de emissão e absorção.

Para esses operadores gerais, a Eq. (6.64) se satisfaz com o símbolo «$\subset$»; a igualdade nela será satisfeita se $\{Q; Q^\dagger\}$ é um operador que tem todos os operadores de absorção de todas as partículas não físicas à direita. Busquemos esse operador que permitirá a caracterização unívoca do subespaço físico, examinando em primeiro lugar a forma geral que o operador de carga de gauge tem. Para isso, notemos já que o operador Q é sempre quadrático nos operadores de emissão e absorção –isto é, não pode ter um termo só com um operador–, de forma que o comutador $[Q; A^a(x)]$ será sempre uma expressão linear nos operadores de emissão e absorção de partículas não físicas. Assim sendo, fixemos nossa consideração na Eq. (6.66). Definimos o operador de campo $u(x)$ mediante:

$$i\partial_a u(x) := [Q; A_a(x)] \quad . \tag{6.68}$$

Então a Eq. (6.66) adota a forma:

$$A'^a(x) = A^a(x) + \lambda\partial^a u(x) - \frac{i\lambda^2}{2}\,[Q; \partial^a u(x)] + \mathscr{O}(\lambda^3) \quad . \tag{6.69}$$

Segundo a definição dada da transformação de gauge quântica, também o campo transformado, $A'^a(x)$, deve satisfazer à equação de Klein-Gordon-Fock. Tendo em vista à Eq. (6.69), isto só será possível se o operador de campo $u(x)$ satisfaz à mesma equação:

$$\Box u(x) = 0 \quad . \tag{6.70}$$

Logo, este operador de campo tem a seguinte solução:

$$u(x) = \int\limits_{y^+=y_0^+} u(y) \overleftrightarrow{\partial}^y_- D(y-x) d^3\boldsymbol{y} \quad . \tag{6.71}$$

A partir dessa equação:

$$\begin{aligned} i\partial_a u(x) &= i\partial_a^x \int\limits_{y^+=y_0^+} \left(u(y)\partial_-^y D(y-x) - \partial_-^y u(y) D(y-x) \right) d^3\boldsymbol{y} \\ &= \int\limits_{y^+=y_0^+} \left(\partial_y^b \left(i g_{ab} D(y-x) \right) \partial_-^y u(y) - u(y) \partial_y^b \partial_-^y \left(i g_{ab} D(y-x) \right) \right) d^3\boldsymbol{y} \quad , \end{aligned} \tag{6.72}$$

expressão na qual identifica-se a relação de comutação do operador de campo quantizado estendido dado na Eq. (6.10); substituindo-a:

$$i\partial_a u(x) = \left[\int\limits_{y^+=y_0^+} \partial_b A^b(y) \overleftrightarrow{\partial}_- u(y) d^3\boldsymbol{y}; A_a(x) \right] \quad . \tag{6.73}$$

Reconhecemos assim, por comparação com a Eq. (6.68), que o operador de carga de gauge tem a seguinte expressão:

$$Q = \int\limits_{x^+=x_0^+} \partial_a A^a(x) \overleftrightarrow{\partial}_- u(x) d^3\boldsymbol{x} \quad . \tag{6.74}$$

Por outro lado, segundo a Eq. (6.70), o operador de campo $u(x)$ tem a seguinte solução:

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(c_2(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{6.75}$$

Os operadores de campo de emissão e absorção $c_1(\boldsymbol{p})$ e $c_2(\boldsymbol{p})$ são, por enquanto, desconhecidos. Somente sabemos que eles correspondem a partículas não físicas, pois formam parte do operador de carga de gauge. Reunindo as Eqs. (6.18) e (6.75) na Eq. (6.74) e efetuando uma integração elementar, obtemos a seguinte expressão para o operador de carga de gauge:

$$Q = \sum_{\lambda=+,-} \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_a \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(a_\lambda(\boldsymbol{p}) c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) - \sum_\tau g_{\lambda\tau} a_\tau^\dagger(\boldsymbol{p}) c_2(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{6.76}$$

Por construção, essa é a expressão quadrática mais geral que pode ter o operador de carga de gauge. A fórmula recém obtida é crucial, pois nos revela o seguinte: Lembramos que Q deve ter sempre operadores de absorção à direita. Como isto não acontece no primeiro termo da Eq. (6.76), devemos comutar $a_\lambda(\boldsymbol{p})$ com $c_1^\dagger(\boldsymbol{p})$; mas, ao fazer isso, se $c_1(\boldsymbol{p})$ fosse algum dos $a_+(\boldsymbol{p})$ ou $a_-(\boldsymbol{p})$, então, ao aplicar o comutador, no operador de carga Q apareceria um termo constante e o dito operador não aniquilaria os estados físicos. Isto é impossível. Portanto, é preciso estender ainda mais o espaço de Fock para incluir novos operadores

$c_1(\boldsymbol{p})$ e $c_2(\boldsymbol{p})$ e seus adjuntos, associados a partículas não físicas e que são diferentes dos operadores $a_+(\boldsymbol{p})$ e $a_-(\boldsymbol{p})$. O operador de campo quantizado $u(x)$, por ser um novo campo não físico, é chamado «campo fantasma». Como vemos, o campo fantasma é indispensável para a simetria de gauge quântica.

Uma vez que $c_1^\dagger(\boldsymbol{p})$ corresponde a uma nova partícula, este pode ser simplesmente comutado com $a_\lambda(\boldsymbol{p})$. Disto na Eq. (6.76) decorre que:

$$Q = \sum_{\lambda=+,-} \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_a \varepsilon_\lambda(\boldsymbol{p})^a \left(c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) a_\lambda(\boldsymbol{p}) - \sum_\tau g_{\lambda\tau} a_\tau^\dagger(\boldsymbol{p}) c_2(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{6.77}$$

Coloquemos agora a forma explícita, obtida no Cap. 2, dos vetores de polarização do campo vetorial sem massa, que repetimos aqui:

$$\varepsilon_+(\boldsymbol{p})^a = \left(1; -\frac{p_1}{p_-}; -\frac{p_2}{p_-}; \frac{p_\perp^2}{2p_-^2}\right) \quad , \quad \varepsilon_1(\boldsymbol{p})^a = \left(0; 1; 0; -\frac{p_1}{p_-}\right) \quad , \tag{6.78}$$

$$\varepsilon_2(\boldsymbol{p})^a = \left(0; 0; 1; -\frac{p_2}{p_-}\right) \quad , \quad \varepsilon_-(\boldsymbol{p})^a = (0; 0; 0; 1) \quad . \tag{6.79}$$

Ter-se-á que:

$$p_a \varepsilon_+(\boldsymbol{p})^a = p_+ - \frac{p_\perp^2}{2p_-} = \frac{p^2}{2p_-} \quad , \quad p_a \varepsilon_-(\boldsymbol{p})^a = p_- \quad . \tag{6.80}$$

Introduzindo isto na Eq. (6.77) e levando em conta que na expressão do operador de campo quantizado do campo vetorial sem massa se satisfaz $p^2 = 0$, obtemos a expressão final:

$$Q = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_- \left(c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) a_-(\boldsymbol{p}) - a_+^\dagger(\boldsymbol{p}) c_2(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{6.81}$$

O operador adjunto é portanto:

$$Q^\dagger = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_- \left(a_-^\dagger(\boldsymbol{p}) c_1(\boldsymbol{p}) - c_2^\dagger(\boldsymbol{p}) a_+(\boldsymbol{p}) \right) \quad . \tag{6.82}$$

Para caracterizar o subespaço físico estamos interessados no anticomutador de Q e $Q^\dagger$, como se depreende da Eq. (6.64). Usando as Eqs. (6.81) e (6.82):

$$\begin{aligned}
\left\{Q; Q^\dagger\right\} &= \int d\mu(\boldsymbol{p}) d\mu(\boldsymbol{q}) p_- q_- \left(\left\{ c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) a_-(\boldsymbol{p}); a_-^\dagger(\boldsymbol{q}) c_1(\boldsymbol{q}) \right\} + \left\{ a_+^\dagger(\boldsymbol{p}) c_2(\boldsymbol{p}); a_-^\dagger(\boldsymbol{q}) c_1(\boldsymbol{q}) \right\} \right) \\
&= \int d\mu(\boldsymbol{p}) d\mu(\boldsymbol{q}) p_- q_- \left(a_-^\dagger(\boldsymbol{q}) \left\{ c_1(\boldsymbol{q}); c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) \right\} a_-(\boldsymbol{p}) + c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) \left[a_-^\dagger(\boldsymbol{q}); a_-(\boldsymbol{p}) \right] c_1(\boldsymbol{q}) \right. \\
&\quad \left. + a_+^\dagger(\boldsymbol{p}) \left\{ c_2(\boldsymbol{p}); c_2^\dagger(\boldsymbol{q}) \right\} a_+(\boldsymbol{q}) + c_2^\dagger(\boldsymbol{q}) \left[a_+^\dagger(\boldsymbol{p}); a_-(\boldsymbol{q}) \right] c_2(\boldsymbol{p}) \right) \\
&= \int d\mu(\boldsymbol{p}) d\mu(\boldsymbol{q}) p_- q_- \left(2p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) c_1(\boldsymbol{p}) + 2p_- \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) c_2^\dagger(\boldsymbol{p}) c_2(\boldsymbol{p}) \right. \\
&\quad \left. + a_-^\dagger(\boldsymbol{q}) \left\{ c_1(\boldsymbol{q}); c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) \right\} a_-(\boldsymbol{p}) + a_+^\dagger(\boldsymbol{p}) \left\{ c_2(\boldsymbol{p}); c_2^\dagger(\boldsymbol{q}) \right\} a_+(\boldsymbol{q}) \right) \quad .
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Os dois primeiros termos dessa expressão têm a forma desejada. Para os dois últimos, se $c_1(\boldsymbol{p})$ e $c_2(\boldsymbol{p})$ fossem operadores bosónicos, então o anti-comutador $\left\{Q; Q^\dagger\right\}$ apresentaria

termos do tipo $a_-^\dagger(\boldsymbol{q})c_1^\dagger(\boldsymbol{p})c_1(\boldsymbol{q})a_-(\boldsymbol{p})$, e então haveria estados não físicos aniquilados por este anti-comutador –por exemplo, o estado de uma partícula de polarização ε_-–. Em princípio, então, não existe motivo para desconsiderar os campos fantasma bosónicos, pois eles geram transformações de gauge quânticas perfeitamente admissíveis. Todavia, uma transformação de gauge semelhante, por deixar invariantes alguns estados não físicos, não exprime por completo a invariância da teoria. É assim que é mais conveniente que o campo quantizado u seja um campo fermiônico, cujos operadores de campo de emissão e absorção estão sujeitos às regras de anti-comutação:

$$\left\{c_1(\boldsymbol{p}); c_1^\dagger(\boldsymbol{q})\right\} = 2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad , \quad \left\{c_2(\boldsymbol{p}); c_2^\dagger(\boldsymbol{q})\right\} = 2p_-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \quad . \tag{6.84}$$

E o operador do campo quantizado satisfaz [vide a Eq. (3.120)]:

$$\{u(x); \widetilde{u}(y)\} = -iD(x-y) \quad . \tag{6.85}$$

O campo $\widetilde{u}(x)$ é chamado campo «anti-fantasma». Assim sendo, a Eq. (6.83) adota a forma final:

$$\left\{Q; Q^\dagger\right\} = \int d\mu(\boldsymbol{p}) p_-^2 \left(a_-^\dagger(\boldsymbol{p})a_-(\boldsymbol{p}) + a_+^\dagger(\boldsymbol{p})a_+(\boldsymbol{p}) + c_1^\dagger(\boldsymbol{p})c_1(\boldsymbol{p}) + c_2^\dagger(\boldsymbol{p})c_2(\boldsymbol{p})\right) . \tag{6.86}$$

Então, agora sim, podemos afirmar:

$$\mathcal{F}_{\text{fís}} = \text{Ker}\left(\left\{Q; Q^\dagger\right\}\right) \quad . \tag{6.87}$$

Também, como resultado da Eq. (6.81), por cálculo direto, é imediato observar que o operador de carga de gauge é nilpotente:

$$Q^2 = \frac{1}{2}\{Q; Q\} = 0 \quad . \tag{6.88}$$

Recapitulando os resultados até agora obtidos, a imposição de que o operador de carga de gauge aniquile todos os estados físicos implicou a necessidade de expandir o espaço de Fock para conter um novo tipo de partículas, chamadas fantasma, e que elas devem ter a estatística fermiônica com a finalidade de que as transformações de gauge afetem ao setor não físico inteiro, exprimindo assim a simetria completa da teoria. Voltando à Eq. (6.69), isto tem como consequência que o parâmetro λ da transformação de gauge quântica seja um número de Grassmann[4], e então a série acaba no termo linear em λ: A transformação de gauge quântica do operador $F(x)$, contendo operadores de campo de gauge, fantasmas e anti-fantasmas, é exatamente:

$$F'(x) = e^{-i\lambda Q}F(x)e^{i\lambda Q} = F(x) - i\lambda QF(x) + iF(x)\lambda Q \quad . \tag{6.89}$$

[4]Essa nomenclatura, evidentemente, é inexata, pois é a operação de multiplicação que se define como não-comutativa, e não os números em si mesmos. O nome «número de Grassmann», contudo, é usado para indicar que seu produto segue tal regra.

Como λ é um número de Grassmann, não podemos simplesmente comutá-lo com $F(x)$ no último termo da Eq. (6.89); para colocá-lo à esquerda de $F(x)$ teremos de colocar um sinal $(-1)^{n_F}$, com n_F o chamado «número fantasma» do operador $F(x)$, igual à diferença entre o número de campos fantasma e o de campos anti-fantasma nele contidos. Assim sendo, definimos a «variação de gauge» do operador $F(x)$ como:

$$d_Q F(x) := [Q; F(x)]_{(-1)^{n_F+1}} \quad . \tag{6.90}$$

Da Eq. (6.89) decorre assim que o operador transformado é exatamente:

$$F'(x) = F(x) - i\lambda d_Q F(x) \quad . \tag{6.91}$$

E dessa equação observamos que, necessariamente, d_Q muda a estatística do operador $F(x)$, de forma que $\lambda d_Q F(x)$ mantenha a estatística de $F(x)$.

Estudemos finalmente algumas propriedades da variação de gauge d_Q. Primeiramente, por cálculo direto, estudando as diferentes estatísticas que podem ter os operadores F e G, prova-se que a variação de gauge satisfaz à seguinte regra:

$$d_Q(F(x)G(y)) = (d_Q F(x))G(y) + (-1)^{n_F} F(x)(d_Q G(y)) \quad . \tag{6.92}$$

Em segundo lugar, como d_Q muda a estatística do operador ao qual se aplica, seu quadrado pode ter uma das seguintes formas:

$$d_Q^2 = [Q; \{Q; \bullet\}] = Q^2 \bullet + \bullet\, Q^2 \quad \text{ou} \quad d_Q^2 = \{Q; [Q; \bullet]\} = Q^2 \bullet - \bullet\, Q^2 \quad . \tag{6.93}$$

Em qualquer caso, a nilpotência do operador de carga de gauge [Eq. (6.88)] implica a nilpotência da variação de gauge:

$$d_Q^2 = 0 \quad . \tag{6.94}$$

Em terceiro lugar, encontramos as variações de gauge dos operadores de campo quantizado. Da definição da Eq. (6.68):

$$d_Q A^a{}_{\pm} = i\partial^a u_{\pm} \quad . \tag{6.95}$$

Da Eq. (6.96) e usando que $\{u; u\} = 0$:

$$d_Q u = 0 \quad . \tag{6.96}$$

E da Eq. (6.74) em conjunto com a regra de anticomutação da Eq. (6.85):

$$d_Q \widetilde{u}_{\pm} = -i\partial_a A^a{}_{\pm} \quad . \tag{6.97}$$

E, por último, com a ajuda das variações de gauge explícitas recém encontradas, estabeleceremos o seguinte resultado [118]:

Lema 6.2: *Seja G um monômio de Wick que contém campos de gauge, A, fantasmas, u, e anti-fantasmas, $\widetilde{u}$. A variação de gauge do monômio G comuta com seu ordenamento normal:*

$$d_Q \ :G: = :d_Q G: \quad . \tag{6.98}$$

Prova: A prova será por indução matemática. Para G contendo um único campo, o resultado é trivial, pois, nesse caso, $:G: = G$. Suponhamos agora o resultado válido para um monômio G constituído por n operadores de campo quantizado, e suponhamos que para ele o lema é válido. Vejamos se ele ainda se satifaz quando é adicionado mais um campo quantizado, que pode ser A^a, u ou $\widetilde{u}$. Em qualquer caso, denotemos por F o campo quantizado adicionado, e por n_F seu número fantasma. Usando a definição de produto normalmente ordenado:

$$:FG: = F_+ \ :G: \ + (-1)^{n_F n_G} \ :G: \ F_- \quad . \tag{6.99}$$

Logo, da Eq. (6.92) e usando a hipótese indutiva, teremos que:

$$\begin{aligned} d_Q \ :FG: =& (d_Q F_+) \ :G: \ + (-1)^{n_G(n_F+1)} \ :G: \ d_Q F_- \\ &+ (-1)^{n_F} F_+ \ :d_Q G: \ + (-1)^{n_F n_G} \ :d_Q G: \ F_- \quad . \end{aligned} \tag{6.100}$$

Mas, como d_Q preserva a estrutura de frequência positiva e a de frequência negativa, como pode-se ver nas Eqs. (6.95)-(6.97):

$$\begin{aligned} d_Q \ :FG: = & \left(:(d_Q F_+) G: \ + (-1)^{n_G(n_F+1)} \ :G(d_Q F_-): \right) \\ &+ (-1)^{n_F} \left(:F_+(d_Q G): \ + (-1)^{(n_G+1)n_F} \ :(d_Q G) F_-: \right) \quad . \end{aligned} \tag{6.101}$$

E já que a variação de gauge d_Q muda a estatística do operador sobre o qual age, reconhecemos que cada um dos parênteses acima é um dos seguintes termos:

$$d_Q \ :FG: = :(d_Q F) G: \ + (-1)^{n_F} \ :F(d_Q G): = :d_Q(FG): \quad . \ \blacksquare \tag{6.102}$$

6.5 Invariância de gauge quântica do operador de espalhamento

Nessa seção precisaremos o conceito da invariância de gauge quântica, já sugerido nos comentários após a Eq. (6.66), e que se refere à independência das grandezas físicas em relação ao processo de extensão do espaço de Fock[5]. No caso particular da TPC, a grandeza física que se deseja construir é a amplitude de transição entre dois vetores do subespaço físico. Assim, devemos admitir como definição [118]:

[5]Este tipo de simetrias aparece com frequência na física; exemplos disto são o princípio da covariância geral e o princípio da invariância de gauge clássico. Em todas essas versões, o que prima é a independência da física em relação aos métodos artificiais que o homem inventa para seu estudo –nos casos supracitados, os sistemas de coordenadas no espaço-tempo, no espaço das variáveis internas, *et cetera*–.

Definição: *Seja P o operador de projeção sobre o subespaço físico $\mathcal{F}_{fis}$ do espaço de Fock. Duas funcionais operador-valuadas de espalhamento $S(g)$ e $S'(g)$ são chamadas fisicamente equivalentes se:*

$$\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{F} \;:\quad \lim_{g\to 1} (\Phi; PS(g)P\Psi) = \lim_{g\to 1} \left(\Phi; PS'(g)P\Psi\right) \quad , \tag{6.103}$$

sempre que o limite adiabático exista.

Nesta definição, o operador de espalhamento é entendido como um funcional operador-valuado da função de comutação adiabática porque a equivalência física, em primeira instância, só pode ser estabelecida entre grandezas físicas, de forma que a igualdade deve ser exigida no limite adiabático; com efeito, somente no limite adiabático a forma bilinear $(\Phi; PS(g)P\Psi)$ tem significado físico. A definição oferecida pressume que tal limite existe, ao menos, fracamente. Embora o problema da existência do limite adiabático está longe de ser trivial[6], os diversos resultados existentes na literatura permitem pressumir sua existência, pelo menos, em uma grande variedade de casos de interesse, de forma que doravante será possível eliminar a dependência com a função de comutação adiabática e formular a equivalência física como uma condição diretamente aplicada às distribuições de transição. Isto, além do mais, evita a necessidade de conhecer os operadores de espalhamento completos: numa teoria como a TPC, é preferível ter uma versão perturbativa da equivalência física. Com esse fim, coloquemos na Eq. (6.103) a série formal que define o operador de espalhamento, que, lembremos, é:

$$S(g) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int dX T_n(X) g(X) \quad . \tag{6.104}$$

Então a equivalência dos operadores $S(g)$ e $S'(g)$ significa que a seguinte equação é válida –o limite é fraco no sentido da Eq. (6.103)–:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \text{w-}\lim_{g\to 1} \int dX \left(PT_n(X)P - PT'_n(X)P\right) g(X) = 0 \quad . \tag{6.105}$$

Definição: *Os operadores de espalhamento $S(g)$ e $S'(g)$ são (perturbativamente) fisicamente equivalentes na ordem n se suas correspondentes distribuições de transição T_n da ordem n satisfazem:*

$$\text{w-}\lim_{g\to 1} \int dX \left(PT_n(X)P - PT'_n(X)P\right) g(X) = 0 \quad , \tag{6.106}$$

sempre que o limite adiabático exista na ordem n da série perturbativa.

[6] É justo mencionar aqui alguns resultados referentes à existência do limite adiabático. Epstein e Glaser provaram que ele existe fracamente [103] e ainda fortemente [202] no caso de teorias em que todos os campos possuem massa não nula (esse é o caso, por exemplo, do modelo de Yukawa antes estudado, em que o limite adiabático é trivial), enquanto que Blanchard e Seneor provaram que ele existe fracamente para as funções de Green para teorias em que alguns dos campos são não massivos (particularmente, para a QED e para teorias do tipo $\lambda\, :\varphi^{2n}:$) [203]. Recentemente, Duch provou que o limite adiabático fraco existe para as funções de Green e de Wightman para teorias gerais com termos de interação de dimensão canônica igual a quatro [204].

A Eq. (6.106) tem a solução geral $PT_n(X)P = PT'_n(X)P + \partial(\cdots)$, com $\partial(\cdots)$ significando «a divergência da quantidade $(\cdots)$». Com efeito, a integração por partes implica que, em tais circunstâncias, o lado esquerdo da Eq. (6.106) é igual a:

$$\text{w-}\lim_{g\to 1}\int dX(\cdots)\partial g(X) \quad , \tag{6.107}$$

o qual é nulo no limite adiabático em que g se torna constante. Por outro lado, na construção $PT_n(X)P$, $T_n(X)$ está definido módulo uma variação de gauge, pois devido à Eq. (6.87): $PQ = 0 = QP$, e, como consequência: $Pd_QXP = PQX - XQP = 0$. Como resultado, temos que as distribuições T_n e T'_n são fisicamente equivalentes se elas se diferenciam por termos que são divergências ou variações de gauge. Isto o denotamos com o símbolo «$\sim$»:

$$T'_n \sim T_n \;:\Leftrightarrow T'_n = T_n + d_Q(\cdots) + \partial(\cdots) \quad . \tag{6.108}$$

Assim sendo, os elementos de matriz do operador $S(g)$ no subespaço físico, em qualquer ordem, são trivialmente invariantes de gauge quânticos, pois a variação de gauge d_QT_n é fisicamente equivalente à distribuição nula: $0 \sim d_QT_n$. A invariância de gauge da distribuição $T_1(x)$, portanto, está garantida qualquer que ela seja. Mas isso não é suficiente: A construção de $T_1(x)$ deve ser feita de tal forma que a distribuição $T_2(x_1;x_2)$ construída com ele seja fisicamente equivalente à $T'_2(x_1;x_2)$ construída com $T'_1(x) = T_1(x) - i\lambda d_QT_1(x)$. Essa é uma condição de consistência. E o mesmo deve ser válido para as ordens superiores. Em uma palavra, devemos impor que a invariância de gauge quântica não seja destruída no processo indutivo da TPC –isto é, que nenhuma anomalia irremovível apareça nas ordens superiores–.

Definição: *Uma teoria de interação com primeiro termo $T_1(x)$ é uma teoria de gauge quântica se ela é fisicamente equivalente à teoria com primeiro termo $T_1(x) - i\lambda d_QT_1(x)$, em todas as ordens da série perturbativa.*

Comecemos por estudar a distribuição de transição da segunda ordem, $T_2(x_1;x_2)$. Introduzamos a seguinte notação: $T_1(x) = T^0_1(x) - i\lambda d_QT^0_1(x)$; $T^0_2(x_1;x_2)$ é a distribuição de dois pontos que provém de $T^0_1(x)$; $T_2(x_1;x_2)$ a que provém de $T_1(x)$, e assim por diante. Como já sabemos, sua construção inicia com as distribuições:

$$A'_2(x_1;x_2) = -T_1(x_1)T_1(x_2) \quad , \quad R'_2(x_1;x_2) = -T_1(x_2)T_1(x_1) \quad . \tag{6.109}$$

Substituindo nelas a expressão de $T_1(x)$ e formando a distribuição causal da segunda ordem, $D_2 = R'_2 - A'_2$, obtemos que:

$$D_2(x_1;x_2) = D^0_2(x_1;x_2) - i\lambda d_QD^0_2(x_1;x_2) + 2i\lambda T^0_1(x_1)d_QT^0_1(x_2) - 2i\lambda T^0_1(x_2)d_QT_1(x_1)\,. \tag{6.110}$$

Dessa distribuição se obtém a parte retardada, $R_2(x_1;x_2)$, por meio do procedimento de

divisão exposto no Cap. 4. Obtemos:

$$R_2(x_1;x_2) = R_2^0(x_1;x_2) - i\lambda d_Q R_2^0(x_1;x_2) + 2i\lambda \text{ret}\left\{T_1^0(x_1)d_Q T_1^0(x_2) - T_1^0(x_2)d_Q T_1^0(x_1)\right\} \ , \tag{6.111}$$

com ret$\{\cdots\}$ significando «a parte retardada de $\{\cdots\}$». A distribuição de dois pontos, $T_2 = R_2 - R_2'$, é assim:

$$\begin{aligned} T_2(x_1;x_2) &= T_2^0(x_1;x_2) - i\lambda d_Q T_2^0(x_1;x_2) \\ &+ 2i\lambda \left(\text{ret}\left\{T_1^0(x_1)d_Q T_1^0(x_2) - T_1^0(x_2)d_Q T_1^0(x_1)\right\} - T_1^0(x_2)d_Q T_1^0(x_1)\right) \ . \end{aligned} \tag{6.112}$$

Daqui decorre que T_2 será fisicamente equivalente a T_2^0 se e somente se a segunda linha da Eq. (6.112) é igual a uma variação de gauge ou a uma divergência. A primeira possibilidade se realiza se $T_1^0(x)$ é uma variação de gauge, $T_1^0(x) = d_Q(\cdots)$, o que leva à anulação da segunda linha; esse caso não tem interesse físico, pois então T_1^0 se equivale fisicamente com a distribuição nula. A segunda possibilidade ocorre quando a variação de gauge de $T_1^0(x)$ é igual a uma divergência:

$$d_Q T_1^0(x) = i\partial_a T_{1/1}^a(x) \quad , \tag{6.113}$$

em que à distribuição $T_{1/1}^a(x)$ será dado o nome «vértice-Q». Destarte, a teoria se mantém invariante de gauge na segunda ordem: $T_2 \sim T_2^0$. Pelo exposto, a Eq. (6.113) é uma condição necessária em toda teoria de gauge quântica. Ela implica, também, que $T_1(x)$ é invariante de gauge como forma bilinear não só no subespaço físico, senão em todo o espaço de Fock.

Para determinar se a Eq. (6.113) é também uma condição suficiente para que a teoria seja invariante de gauge quântica, devemos examinar as seguintes ordens na série perturbativa, o que será mais fácil se primeiro estudarmos suas consequências. Como foi provado no Cap. 4, as distribuições de n pontos são, sempre que as coordenadas $x_1, \cdots, x_n$ correspondam a tempos todos diferentes, produtos cronológicos –temporalmente ordenados segundo a coordenada x^+–:

$$T_n(x_1;\cdots;x_n) = \mathfrak{T}_+\left\{T_1(x_1)\cdots T_1(x_n)\right\} \quad . \tag{6.114}$$

Como cada T_1 tem caráter bosónico, ao aplicar o operador de variação de gauge a T_n obteremos:

$$d_Q T_n = \sum_{l\in I_n} \mathfrak{T}_+\left\{T_1(x_1)\cdots d_Q T_1(x_l)\cdots T_1(x_n)\right\} \quad . \tag{6.115}$$

E com a Eq. (6.113):

$$d_Q T_n = i\sum_{l\in I_n} \partial_a^{x_l} T_{n/l}^a(x_1;\cdots;x_n) \quad ; \quad T_{n/l}^a := \mathfrak{T}_+\left\{T_1(x_1)\cdots T_{1/1}^a(x_l)\cdots T_1(x_n)\right\} \ . \tag{6.116}$$

De forma geral, a distribuição $T_1(x)$ um polinômio de Wick:

$$T_1(x) = T_1^0(x) + T_1^1(x) + \cdots + T_1^p(x) \quad , \tag{6.117}$$

com cada $T_1^j(x)$ um monômio de Wick. Levando em consideração a Eq. (6.114), então, a distribuição $T_n(x_1;\cdots;x_n)$ tem em geral a seguinte forma:

$$T_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{i_1,\cdots,i_n\in I_{p,0}} T_n^{i_1\cdots i_n}(x_1;\cdots;x_n) \quad ; \tag{6.118}$$

com o superíndice i_j indicando a distribuição de um ponto $T_1^{i_j}$ que corresponde ao ponto x_j, isto é:

$$T_n^{i_1\cdots i_n}(x_1;\cdots;x_n) := \mathfrak{T}_+\left\{T_1^{i_1}(x_1)\cdots T_1^{i_j}(x_j)\cdots T_1^{i_n}(x_n)\right\} \quad . \tag{6.119}$$

Sendo assim, já podemos estabelecer os seguintes resultados, dados em forma geral e que conterão, como um caso particular, a desejada suficiência da Eq. (6.113) para que a teoria seja invariante de gauge quântica. Estes resultados são uma generalização do nosso estudo à segunda ordem para ordens superiores. Eles foram dados pela primeira vez por Dütsch na Ref. [120], e podem também ser consultados na Ref. [118].

Teorema 6.3: *Seja $T_1(x)$ uma distribuição da forma:*

$$T_1(x) = T_1^0(x) + T_1^2(x) \quad ; \quad T_1^2(x) = \partial_a T_1^{4a}(x) \quad . \tag{6.120}$$

Se a variação de gauge de $T_1^0(x)$ é uma divergência,

$$d_Q T_1^0(x) = i\partial_a T_1^{1a}(x) \quad , \tag{6.121}$$

então, na notação da Eq. (6.119):

$$T_n(x_1;\cdots;x_n) = T_n^{0\cdots 0}(x_1;\cdots;x_n) + \partial(\cdots) \quad . \tag{6.122}$$

Prova: Com a distribuição $T_1(x)$ da Eq. (6.120), na Eq. (6.118) os índices i_j só podem tomar os valores $0, 2$. O teorema estará provado, então, se demonstrarmos que todo termo de T_n contendo r distribuições T_1^2 e $n-r$ distribuições T_1^0 é uma divergência:

$$T_n^{2\cdots 20\cdots 0} = \partial_{a_1}^{x_1}\cdots\partial_{a_r}^{x_r} T_n^{4\cdots 40\cdots 0} \quad . \tag{6.123}$$

Usaremos o método de indução matemática completa. O caso $n = 1$ é a própria definição do problema, Eq. (6.120). Suponhamos agora que a Eq. (6.123) é válida para todo $m \leq n-1$. Para estudar a ordem n, construímos as distribuições –escrevemos $X = \{x_1;\cdots;x_n\}$–:

$$A'^{i_1\cdots i_n}_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{I\cup J=X\\ I\cap J=\emptyset\\ I\neq\emptyset}} \widetilde{T}^{i_1\cdots i_{n_1}}_{n_1}(I)\, T^{i_{n_1+1}\cdots i_n}_{n-n_1}(J;x_n) \quad , \tag{6.124}$$

$$R'^{i_1\cdots i_n}_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{I\cup J=X\\ I\cap J=\emptyset\\ I\neq\emptyset}} T^{i_{n_1+1}\cdots i_n}_{n-n_1}(J;x_n)\, \widetilde{T}^{i_1\cdots i_{n_1}}_{n_1}(I) \quad . \tag{6.125}$$

Por hipótese indutiva, as distribuições T_m que aparecem nessas equações são da forma da Eq. (6.123). E como as $\widetilde{T}_m$ são construídas com elas segundo a equação

$$\widetilde{T}_m(X) = \sum_{r\in I_m}(-1)^r \sum_{\substack{X_1\cup\cdots\cup X_r = X \\ X_i\cap X_j=\emptyset,\ \forall i\neq j \\ X_j\neq\emptyset,\ \forall i}} T_{m_1}(X_1)\cdots T_{m_r}(X_r) \quad , \tag{6.126}$$

também possuirão essa forma. O fato de que as partições que aparecem nessas expressões sejam disjuntas permite, ademais, extrair a divergência e colocar o sinal de derivada na frente do produto inteiro. Daqui se obtém:

$$A'^{2\cdots20\cdots0}_n = \partial^{x_1}_{a_1}\cdots\partial^{x_r}_{a_r}A'^{4\cdots40\cdots0}_n \quad , \quad R'^{2\cdots20\cdots0}_n = \partial^{x_1}_{a_1}\cdots\partial^{x_r}_{a_r}R'^{4\cdots40\cdots0}_n \quad . \tag{6.127}$$

E em consequência o mesmo é válido para a distribuição causal:

$$D^{2\cdots20\cdots0}_n = \partial^{x_1}_{a_1}\cdots\partial^{x_r}_{a_r}D^{4\cdots40\cdots0}_n \quad . \tag{6.128}$$

A divisão dessa distribuição causal pode ser feita assim: Seja $R^{4\cdots40\cdots0}_n$ a parte retardada de $D^{4\cdots40\cdots0}_n$. Como a derivação não muda o suporte causal da distribuição –ou, se se prefere, por virtude do Teorema 4.7–, então uma solução ao problema da divisão de $D^{2\cdots20\cdots0}_n$ será:

$$R^{2\cdots20\cdots0}_n = \partial^{x_1}_{a_1}\cdots\partial^{x_r}_{a_r}R^{4\cdots40\cdots0}_n \quad . \tag{6.129}$$

Das Eqs. (6.127) e (6.129) segue que a distribuição de n pontos tem a forma desejada:

$$\begin{aligned} T^{2\cdots20\cdots0}_n &= R^{2\cdots20\cdots0}_n - R'^{2\cdots20\cdots0}_n \\ &= \partial^{x_1}_{a_1}\cdots\partial^{x_r}_{a_r}\left(R^{4\cdots40\cdots0}_n - R'^{4\cdots40\cdots0}_n\right) \\ &= \partial^{x_1}_{a_1}\cdots\partial^{x_r}_{a_r}T^{4\cdots40\cdots0}_n \quad . \ \blacksquare \end{aligned} \tag{6.130}$$

O Teorema 6.3 diz que qualquer termo de divergência na distribuição inicial $T_1(x)$ pode ser desconsiderado, pois ao se fazer isso o resultado é fisicamente equivalente, em todas as ordens da série perturbativa, àquele obtido ao considerar dita divergência[7]. Em particular, isto é válido para a divergência do vértice-Q, o que significa que a condição da Eq. (6.113) é suficiente para a invariância de gauge quântica em todas as ordens.

Teorema 6.4: *Seja $T_1(x)$ uma distribuição da forma:*

$$T_1(x) = T^0_1(x) + T^3_1(x) \quad ; \quad T^3_1(x) = d_Q T^5_1(x) \quad . \tag{6.131}$$

[7]Este resultado poder-se-ia considerar a contraparte quântica correspondente àquela observação na teoria clássica segundo a qual os termos de superfície na densidade lagrangiana podem ser desconsiderados, sempre que as condições assintóticas de desaparecimento dos campos no infinito estejam em vigor.

Se para todo $n \in \mathbb{N}$ a variação de gauge de $T_n^{0\cdots 0}$ é uma divergência,

$$d_Q T_n^{0\cdots 0} = \partial(\cdots) \quad , \tag{6.132}$$

então T_n e $T_n^{0\cdots 0}$ são fisicamente equivalentes:

$$T_n(x_1;\cdots;x_n) = T_n^{0\cdots 0}(x_1;\cdots;x_n) + \partial(\cdots) + d_Q(\cdots) \quad . \tag{6.133}$$

Prova: A prova do Teorema 6.4 segue o mesmo roteiro que a do 6.3. Com a distribuição $T_1(x)$ da Eq. (6.131), na Eq. (6.118) os índices i_j só podem tomar os valores $0, 3$. Provaremos desta vez que todo termo de T_n contendo r distribuições T_1^3 e $n-r$ distribuições T_1^0 é da forma:

$$T_n^{3\cdots 30\cdots 0} = \partial(\cdots) + d_Q(\cdots) \quad . \tag{6.134}$$

Usaremos para isto o método de indução matemática completa. O caso $n = 1$ está contido na Eq. (6.131). Nossa hipótese indutiva é que a Eq. (6.134) é válida para todo $m \leq n-1$. Comecemos por estudar as distribuições subsidiárias da ordem n quando está presente só uma distribuição T_1^3 no ponto x_1 –denotamos $X' = \{x_2;\cdots;x_{n-1}\}$–:

$$A'^{30\cdots 0}_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{I\cup J = X' \\ I\cap J = \emptyset}} \widetilde{T}_{n_1}^{30\cdots 0}(x_1;I) T_{n-n_1}^{0\cdots 0}(J;x_n) + \sum_{\substack{I'\cup J' = X' \\ I'\cap J' = \emptyset \\ I'\neq\emptyset}} \widetilde{T}_{n_1}^{0\cdots 0}(I') T_{n-n_1}^{30\cdots 0}(x_1;J';x_n) \, , \tag{6.135}$$

$$R'^{30\cdots 0}_n(x_1;\cdots;x_n) = \sum_{\substack{I\cup J = X' \\ I\cap J = \emptyset}} T_{n-n_1}^{0\cdots 0}(J;x_n) \widetilde{T}_{n_1}^{30\cdots 0}(x_1;I) + \sum_{\substack{I'\cup J' = X' \\ I'\cap J' = \emptyset \\ I'\neq\emptyset}} T_{n-n_1}^{30\cdots 0}(x_1;J';x_n) \widetilde{T}_{n_1}^{0\cdots 0}(I') \, . \tag{6.136}$$

Por hipótese indutiva, as distribuições $T_m^{30\cdots 0}$ e as $\widetilde{T}_m^{30\cdots 0}$ [vide a Eq. (6.126)] que aparecem nessas equações são da forma da Eq. (6.134). Novamente, como as partições que aparecem nessas expressões são disjuntas, podemos extrair a divergência e colocá-la na frente da expressão. Assim fazendo e usando a regra de variação de gauge de um produto dada na Eq. (6.92):

$$\begin{aligned} A'^{30\cdots 0}_n = \sum \Big[& d_Q\left(\widetilde{Z}_{n_1} T_{n-n_1}^{0\cdots 0}\right) + \widetilde{Z}_{n_1}\left(d_Q T_{n-n_1}^{0\cdots 0}\right) \\ & + d_Q\left(\widetilde{T}_{n_1}^{0\cdots 0} Z_{n-n_1}\right) - \left(d_Q \widetilde{T}_{n_1}^{0\cdots 0}\right) Z_{n-n_1} \Big] + \partial(\cdots) \quad . \end{aligned} \tag{6.137}$$

Usando a Eq. (6.132) vemos que todos os termos são, quer divergências, quer variações de gauge, então podemos escrever:

$$A'^{30\cdots 0}_n = d_Q Z_1 + \partial Z_2 \quad . \tag{6.138}$$

Analogamente, tem-se que:

$$R'^{30\cdots 0}_n = d_Q Z_3 + \partial Z_4 \quad , \tag{6.139}$$

e portanto o mesmo acontece com a distribuição causal:

$$D_n^{30\cdots0} = R'^{30\cdots0}_n - A'^{30\cdots0}_n = d_Q Z_5 + \partial Z_6 \quad . \tag{6.140}$$

Daqui se obtém que $T_n^{30\cdots0}$ tem a forma desejada, pois a divisão da distribuição causal pode ser feita dividindo Z_5 e Z_6. O mesmo processo é válido se se tem mais de uma distribuição T_1^3. Por exemplo, consideremos o caso com duas distribuições; seguindo os mesmos passos dados na análise anterior:

$$\begin{aligned}
A'^{330\cdots0}_n &= \sum \left[\widetilde{T}^{330\cdots0} T^{0\cdots0} + \widetilde{T}^{30\cdots0} T^{30\cdots0} + \widetilde{T}^{0\cdots0} T^{330\cdots0}\right] \\
&= \sum \left[\left(d_Q \widetilde{Z}\right) T^{0\cdots0} + \left(d_Q \widetilde{Z}\right)(d_Q Z) + \widetilde{T}^{0\cdots0}(d_Q Z)\right] + \partial(\cdots) \\
&= \sum \left[d_Q\left(\widetilde{Z} T^{0\cdots0}\right) + d_Q\left(\widetilde{Z} Z\right) + d_Q\left(\widetilde{T}^{0\cdots0} Z\right) + \widetilde{Z}\left(d_Q T^{0\cdots0}\right) - \left(d_Q \widetilde{T}^{0\cdots0}\right) Z\right] + \partial(\cdots) \\
&= d_Q(\cdots) + \partial(\cdots) \quad .
\end{aligned}$$

É patente que o mesmo acontece com a distribuição $R'^{330\cdots0}_n$, e então com a correspondente distribuição causal. Finalmente, outro tanto ocorre à distribuição $T_n^{330\cdots0}$ que se obtém com as anteriores. É já evidente que este procedimento é válido em geral. ■

Note-se que a condição da Eq. (6.132) é sempre respeitada uma vez que $T_1(x)$ seja apropriadamente escolhida [vide a Eq. (6.116)], caso as coordenadas corresponderem a tempos diferentes. Mas, o que acontecerá quando dois pontos ou mais corresponderem a tempos iguais? Nesse caso a Eq. (6.116) já não é válida, o que nos obriga a estabelecer o seguinte enunciado: Em uma teoria de gauge quântica, os termos de $T_1(x)$ que são variações de gauge podem ser desconsideradas, sem isso trazer consequências nos resultados físicos, se e somente se os termos instantâneos que alteram o cumprimento da Eq. (6.116) a tempos iguais podem ser compensados no processo de normalização. Eis que a invariância de gauge quântica é uma condição física adicional para a normalização das soluções ao problema de divisão da distribuição causal.

6.6 Unitariedade do operador de espalhamento no subespaço físico

Existe ainda um ponto a ser esclarecido, e é o fato de que a extensão do espaço de Fock e a invariância de gauge quântica sejam compatíveis com o axioma da unitariedade do operador de espalhamento. Essa unitariedade, sendo uma propriedade física, apenas precisa ser mantida no subespaço físico $\mathcal{F}_{\text{fís}}$. No espaço de Fock completo, no entanto, ainda é possível exigir a pseudo-unitariedade segundo a involução «K» definida na Seç. 6.3, e segundo a qual o campo de gauge é pseudo-auto-adjunto: $A^a(x)^K = A^a(x)$. Essa operação deve ainda ser estendida de tal forma que a referida propriedade seja mantida pelo campo de gauge uma vez que ele seja transformado por alguma transformação de gauge quântica

como na Eq. (6.69); isso é possível se o campo fantasma $u(x)$, cuja expressão é dada na Eq. (6.75), é também pseudo-auto-adjunto segundo «K», o que é verdade se:

$$c_1^K(\boldsymbol{p}) = c_2^\dagger(\boldsymbol{p}) \quad \text{e} \quad c_2^K(\boldsymbol{p}) = c_1^\dagger(\boldsymbol{p}) \quad . \tag{6.141}$$

Adotando essas expressões, a Eq. (3.120) implica que o campo anti-fantasma é anti-pseudo-auto-adjunto segundo «K»: $\widetilde{u}(x)^K = -\widetilde{u}(x)$. Ademais, os campos em questão agora podem ser escritos na seguinte forma:

$$u(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(c_2(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c_2^K(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad ; \tag{6.142}$$

$$\widetilde{u}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(\boldsymbol{p}) \left(-c_1(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + c_1^K(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right) \quad . \tag{6.143}$$

Ora, é possível imediatamente enunciar o teorema a seguir, pois sua prova é idêntica àquela mostrada na Seç. 4.8.

Teorema 6.5: *Seja $T_1(x)$ a distribuição de um ponto de uma teoria de gauge quântica. Se T_1 satisfaz à condição de pseudo-unitariedade perturbativa:*

$$\widetilde{T}_1(x) = T_1(x)^K \quad , \tag{6.144}$$

então as distribuições de n pontos podem ser construídas, pelo procedimento indutivo da TPC, de forma a satisfazer à mesma condição de pseudo-unitariedade.

Concluímos que o procedimento de extensão do espaço de Fock para facilitar o tratamento das teorias com campos vetoriais sem massa e a implementação da correspondente invariância de gauge quântica que semelhante extensão produz são satisfatórios.

Capítulo 7

Eletrodinâmica quântica fermiônica

Neste capítulo estudaremos a teoria de gauge do campo eletromagnético. Nela existe apenas um campo de gauge, A^a, associado aos fótons, e em consequência deveremos considerar um só campo fantasma, u, e seu correspondente anti-fantasma, $\widetilde{u}$. A constante de acoplamento será denotada por e em referência à carga elétrica. O campo de matéria a ser acoplado ao campo da radiação será o campo de Dirac, descrevendo algum par lépton–anti-lépton (por exemplo, o elétron e o pósitron).

7.1 Construção do primeiro termo pela invariância de gauge quântica

Começaremos examinando a possibilidade da existência de termos de auto-interação entre os fótons, isto é, queremos ver se existe uma distribuição $T_1(x)$ para a teoria eletromagnética sem matéria, construída com os operadores de campo $A^a(x)$, $u(x)$ e $\widetilde{u}(x)$, e que satisfaça às condições de (1) invariância de Lorentz, (2) número fantasma nulo, (3) pseudo-unitariedade e (4) variação de gauge igual a uma divergência. As condições (1), (3) e (4) não requerem uma explicação. Quanto à condição (2), ela implica que os campos fantasma e anti-fantasma apareçam sempre em pares. Isto é necessário porque, como foi mostrado no Cap. 3, somente a combinação destes dois campos pode dar lugar a leis causais, o que não seria possível prevalecendo um campo sobre o outro. Além disto, a distribuição $T_1(x)$ deve ter caráter bosónico, propriedade essa que se extrapola do caso clássico: Quantidades observáveis, como o tensor de energia-momento, se constroem a partir da densidade lagrangiana[1].

Considerando acoplamentos trilineares –acoplamentos de maior número de campos, proporcionais a potências maiores da constante de acoplamento, devem ser gerados no processo indutivo–, como todos os índices de Lorentz devem estar contraídos devido à condição (1), somente poderá estar presente, no máximo, uma derivada em cada termo. Assim, a expressão mais geral que respeita aos requerimentos anteriores é:

$$\begin{aligned} T_1(x) = ie\Big\{ & f_1 \ :A_a A_b \partial^b A^a: \ + f_2 \ :A_a A^a \partial_b A^b: \ + f_3 \ :A_a u \partial^a \widetilde{u}: \\ & + f_4 \ :\partial_a A^a u \widetilde{u}: \ + f_5 \ :A_a \partial^a u \widetilde{u}: \ \Big\} \quad . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Sendo que a constante de acoplamento e é real, a condição (3) implica que também os

[1] Isto pode também ser justificado no âmbito quântico sem recorrer ao clássico. Com efeito, as variáveis dinâmicas locais podem ser construídas a partir do operador de espalhamento estendido [100]; em particular, o hamiltoniano generalizado de interação, cujo primeiro termo é a distribuição $T_1(x)$.

coeficientes f_j o sejam, uma vez que a pseudo-unitariedade perturbativa à primeira ordem implica que $T_1(x)^K = \widetilde{T}_1(x) = -T_1(x)$. Usando as Eqs. (6.95)-(6.97), assim como a regra da Eq. (6.92) e o fato já provado de que a variação de gauge comuta com o ordenamento normal (Lema 6.2), calculamos a variação de gauge de $T_1(x)$, que, após o uso da equação do movimento do operador de campo fantasma, $\Box u = 0$, resulta ser igual a:

$$d_Q T_1 = -e\Big\{ f_1 \ :\partial_a u A_b \partial^b A^a + A_a \partial_b u \partial^b A^a + A_a A_b \partial^b \partial^a u: \ + f_2 \ :2\partial_a u A^a \partial_b A^b: \\ + f_3 \ :\partial_a u u \partial^a \widetilde{u} + A_a u \partial^a \partial_b A^b: \ + f_4 \ :\partial_a A^a u \partial_b A^b: \ + f_5 \ :A_a \partial^a u \partial_b A^b + \partial_a u \partial^a u \widetilde{u}: \ \Big\} . \quad (7.2)$$

O último termo nessa equação é nulo, pois contém ao operador nulo $\partial_a u \partial^a u$ (lembrando que o campo fantasma possui caráter fermiônico). Desconsiderando-o e agrupando termos:

$$d_Q T_1 = -e\Big\{ f_1 \ :\partial_a u A_b \partial^a A^b: \ + f_1 \ :\partial_a u A_b \partial^b A^a: \ + f_1 \ :\partial_a \partial_b u A^a A^b: \ + f_3 \ :\partial_a u u \partial^a \widetilde{u}: \\ + f_3 \ :u A^a \partial_a \partial_b A^b: \ + (2f_2 + f_5) \ :\partial_a u A^a \partial_b A^b: \ + f_4 \ :u \partial_a A^a \partial_b A^b: \ \Big\} . \quad (7.3)$$

Como foi estabelecido no Cap. 6, essa variação de gauge tem de ser igual à divergência do vértice-Q [vide a Eq. (6.113)]. Como na Eq. (7.3) todos os termos são trilineares, contendo, quer um campo fantasma e dois campos de radiação, quer dois campos fantasma e um anti-fantasma, e sempre duas derivadas, o vértice-Q deve também estar constituído por esse tipo de combinações dos campos e conter apenas uma derivada em cada um deles, então oferecendo à vista a seguinte forma geral:

$$iT^a_{1/1} = e\Big\{ g_1 \ :\partial^a u A_b A^b: \ + g_2 \ :u A_b \partial^a A^b: \ + g_3 \ :\partial_b u A^b A^a: \ + g_4 \ :u \partial_b A^b A^a: \\ + g_5 \ :u A^b \partial_b A^a: \ + g_6 \ :\partial^a u u \widetilde{u}: \ \Big\} \quad . \quad (7.4)$$

Aplicando a divergência e agrupando os termos convenientemente, obtemos:

$$i\partial_a T^a_{1/1} = e\Big\{ (2g_1 + g_2) \ :\partial_a u A_b \partial^a A^b: \ + g_2 \ :u \partial_a A_b \partial^a A^b: \ + g_3 \ :\partial_a \partial_b u A^a A^b: \\ + (g_3 + g_5) \ :\partial_a u A^b \partial_b A^a: \ + (g_3 + g_4) \ :\partial_a u A^a \partial_b A^b: \ + (g_4 + g_5) \ :u A^a \partial_a \partial_b A^b: \\ + g_4 \ :u \partial_a A^a \partial_b A^b: \ + g_5 \ :u \partial_a A^b \partial_b A^a: \ + g_6 \ :\partial_a u u \partial^a \widetilde{u}: \ \Big\} \quad . \quad (7.5)$$

Substituindo as Eqs. (7.3) e (7.5) na Eq. (6.113) encontra-se o seguinte conjunto de relações entre os coeficientes f_j e g_j:

$$-f_1 = 2g_1 + g_2 \quad , \quad -f_1 = g_3 + g_5 \quad , \quad -f_1 = g_3 \quad , \quad -2f_2 - f_5 = g_3 + g_4 \quad , \\ -f_3 = g_6 \quad , \quad -f_3 = g_4 + g_5 \quad , \quad -f_4 = g_4 \quad , \quad 0 = g_2 \quad , \quad 0 = g_5 \quad . \quad (7.6)$$

Desse sistema tem-se que:

$$f_1 = -2g_1 \quad , \quad 2f_2 + f_5 = -2g_1 - g_4 \quad , \quad f_3 = -g_4 \quad , \quad f_4 = -g_4 \quad , \quad (7.7)$$

assim como que:

$$g_2 = 0 \quad , \quad g_3 = 2g_1 \quad , \quad g_5 = 0 \quad , \quad g_6 = g_4 \quad . \tag{7.8}$$

Ou seja, os únicos coeficientes independentes de $i\partial_a T^a_{1/1}$ são g_1 e g_4, e em função deles podem ser expressados todos os coeficientes de $d_Q T_1$. Para obter seus valores, apliquemos a variação de gauge à Eq. (6.113) e usemos o fato de que ela é nilpotente [Eq. (6.94)]; obtém-se dessa forma a equação:

$$id_Q \partial_a T^a_{1/1} = d_Q^2 T_1 = 0 \quad . \tag{7.9}$$

Substituindo a Eq. (7.8) na (7.5) e aplicando a variação de gauge, obtém-se:

$$id_Q \partial_a T^a_{1/1} = ie\Big\{ 4g_1 \ :\partial_a u A_b \partial^a \partial^b u: \ + 4g_1 \ :\partial_a \partial_b u \partial^a u A^b: \ + 2g_4 \ :u\partial^a u \partial_a \partial_b A^b: \ \Big\} \quad . \tag{7.10}$$

A Eq. (7.9) então implica que $g_1 = 0 = g_4$, e o vértice-Q é nulo:

$$iT^a_{1/1} = 0 \quad . \tag{7.11}$$

Também, na Eq. (7.7), nosso resultado implica que $f_1, f_3, f_4 = 0$, e que $f_5 = -2f_2$, o qual, substituído na Eq. (7.1), leva a estabelecer que:

$$T_1(x) = ief_2 \ :\Big(A_a A^a \partial_b A^b - 2A_a \partial^a u \widetilde{u} \Big): \quad . \tag{7.12}$$

Sem embargo, essa forma particular de $T_1(x)$ é uma variação de gauge exata, então fisicamente equivalente à distribuição nula:

$$T_1(x) = -ief_2 d_Q \ :A_a A^a \widetilde{u}: \sim 0 \quad . \tag{7.13}$$

Conclui-se que a teoria de um só campo de gauge não tem termos de auto-interação. Sendo assim, a distribuição de um ponto completa é aquela que contém o acoplamento do campo de gauge com a matéria:

$$T_1(x) = iej^a(x) A_a(x) \quad , \tag{7.14}$$

com $j^a(x)$ a corrente dos campos de matéria. Em tal caso, a variação de gauge da distribuição T_1 é igual a

$$d_Q T_1(x) = -ej^a(x)\partial_a u(x) = \partial_a \left(-ej^a(x) u(x) \right) + e\left(\partial_a j^a(x) \right) u(x) \quad , \tag{7.15}$$

que se reduz a uma divergência sempre que a corrente de matéria seja conservada. Ora, na TPC todos os operadores de campo quantizado são livres, do que se infere que o acoplamento corrente-campo de gauge na TPC ocorre com a corrente conservada dos campos de matéria livres[2]. No caso do campo fermiônico, que estudaremos nesse capítulo, a corrente que se

[2]Por isso, no caso da SQED, em que a corrente dos campos de matéria livres (campo escalar complexo) é $-i \ :\varphi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_a \varphi(x):$, a distribuição de transição da primeira ordem é $T_1(x) = e \ :\varphi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_a \varphi(x): \ A^a(x)$. Esta distribuição, vemos, possue apenas a parte linear em e da densidade lagrangiana invariante de gauge usada na teoria convencional. Do ponto de vista quântico, no entanto, a distribuição T_1 é de fato invariante de gauge, pois

conserva como consequência das equações do movimento dos campos $\psi(x)$ e $\overline{\psi}(x)$ livres (equações de Dirac) é:

$$j^a(x) = :\overline{\psi}(x)\gamma^a\psi(x): \quad . \tag{7.16}$$

O vértice-Q da QED, portanto, será:

$$T^a_{1/1}(x) = iej^a(x)u(x) = ie\ :\overline{\psi}(x)\gamma^a\psi(x):\ u(x) \quad . \tag{7.17}$$

Antes de começar a realizar cálculos explícitos na QED, vejamos genericamente o que a invariância de gauge das distribuições de ordem superior, T_n, implica nessa teoria sem autointeração do campo de gauge. Devido a essa característica, precisamente, em cada ponto só pode estar presente um único operador de campo de radiação, isto é, a distribuição de ordem n tem a seguinte forma geral:

$$T_n(x_1;\cdots;x_n) = :T^a_l(x_1;\cdots;x_n)A_a(x_l):\ +\cdots \quad , \tag{7.18}$$

em que, nem T^a_l, nem os pontos suspensivos incluem um outro operador de campo de gauge no ponto x_l, $A_a(x_l)$. Assim sendo, a variação de gauge da distribuição T_n será:

$$d_Q T_n(x_1;\cdots;x_n) = i\ :T^a_l(x_1;\cdots;x_n)\partial^{x_l}_a u(x_l):\ +\cdots \quad , \tag{7.19}$$

e dessa vez os pontos suspensivos não incluem um outro campo fantasma no ponto x_l, $u(x_l)$. Segundo a Eq. (6.116), que é a condição geral da invariância de gauge da distribuição de transição da ordem n, a variação de gauge dada na Eq. (7.19) tem de reduzir-se a uma divergência. A regra de Leibniz das derivadas implica que isto será possível –note-se que o procedimento segue o mesmo roteiro que na Eq. (7.15)–, e

$$d_Q T_n(x_1;\cdots;x_n) = i\partial^{x_l}_a\ (\ :T^a_l(x_1;\cdots;x_n)u(x_l):\ ) + \cdots \quad , \tag{7.20}$$

sempre que sejam satisfeitas as «identidades-Cg» –do inglês *C-number identities for gauge invariance*– da QED:

$$\partial^{x_l}_a\ :T^a_l(x_1;\cdots;x_n): = 0 \quad . \tag{7.21}$$

Essas equações são válidas em todo ponto x_l em que esteja presente um operador de campo da radiação. Onde não o esteja, a variação de gauge será automaticamente nula, e o termo correspondente, invariante de gauge. Um estudo detalhado das consequências que se derivam das identidades-Cg será apresentado na Seç. 7.8, em que provaremos que elas se equivalem às identidades de Ward-Takahashi.

sua variação de gauge se iguala à divergência do vértice-Q $T^a_{1/1}(x) = e\ :\varphi^\dagger(x)\overleftrightarrow{\partial}^a\varphi(x):\ u(x)$. A possibilidade de se encontrar os termos adicionais da teoria lagrangiana como termos de normalização na segunda ordem da série perturbativa pela invariância de gauge (clássica) foi apontada por Sukhanov na Ref. [143], no contexto da teoria perturbativa da matriz de espalhamento de Bogoliubov e Shirkov. O tratamento deste problema na TPC instantânea encontra-se na Ref. [110], e na TPC no plano nulo, na Ref. [148].

7.2 Distribuição causal da segunda ordem

Como tem sido estabelecido, o primeiro termo na série perturbativa do operador $S(g)$ é dado pela distribuição de um ponto:

$$T_1(x) = ie\ :\overline{\psi}(x)\gamma^a\psi(x):\ A_a(x) \quad . \tag{7.22}$$

A construção da distribuição causal da segunda ordem começa com a definição das distribuições subsidiárias:

$$A'_2(x_1;x_2) = \widetilde{T}_1(x_1)T_1(x_2) = -T_1(x_1)T_1(x_2) \quad , \tag{7.23}$$

$$R'_2(x_1;x_2) = T_1(x_2)\widetilde{T}_1(x_1) = -T_1(x_2)T_1(x_1) \quad , \tag{7.24}$$

com as quais:

$$D_2(x_1;x_2) = R'_2(x_1;x_2) - A'_2(x_1;x_2) = T_1(x_1)T_1(x_2) - T_1(x_2)T_1(x_1) \quad . \tag{7.25}$$

Explicitamente, as distribuições A'_2 e R'_2 podem-se encontrar por aplicação do teorema de Wick, com o uso das seguintes contrações:

$$\overbrace{\psi_a(x)\overline{\psi}_b}(y) = \{\psi_{a-}(x);\overline{\psi}_{b+}(y)\} = \frac{1}{i}S_{ab+}(x-y) \quad , \tag{7.26}$$

$$\overbrace{\overline{\psi}_a(x)\psi_b}(y) = \{\overline{\psi}_{a-}(x);\psi_{b+}(y)\} = \frac{1}{i}S_{ba-}(y-x) \quad , \tag{7.27}$$

$$\overbrace{A_a(x)A_b}(y) = [A_{a-}(x);A_{b+}(y)] = iD_{ab+}(x-y) \quad . \tag{7.28}$$

Ter-se-á:

$$\begin{aligned}
A'_2(x_1;x_2) &= e^2\ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^a\psi(x_1):\ :\overline{\psi}(x_2)\gamma^b\psi(x_2):\ A_a(x_1)A_b(x_2) \\
&= e^2\gamma^a_{ab}\gamma^b_{cd}\ :\overline{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_1):\ :\overline{\psi}_c(x_2)\psi_d(x_2):\ A_a(x_1)A_b(x_2) \\
&= e^2\gamma^a_{ab}\gamma^b_{cd}\Big[\ :\overline{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2)\psi_d(x_2):\ +\overbrace{\overline{\psi}_a(x_1)\psi_d}(x_2)\ :\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2): \\
&\quad +\overbrace{\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c}(x_2)\ :\overline{\psi}_a(x_1)\psi_d(x_2):\ +\overbrace{\overline{\psi}_a(x_1)\psi_d}(x_2)\overbrace{\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c}(x_2)\Big] \\
&\quad \times\Big[\ :A_a(x_1)A_b(x_2):\ +\overbrace{A_a(x_1)A_b}(x_2)\Big] \\
&= e^2\gamma^a_{ab}\gamma^b_{cd}\Big[\ :\overline{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2)\psi_d(x_2):\ +\frac{1}{i}S_{da-}(x_2-x_1)\ :\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2): \\
&\quad +\frac{1}{i}S_{bc+}(x_1-x_2)\ :\overline{\psi}_a(x_1)\psi_d(x_2):\ -S_{da-}(x_2-x_1)S_{bc+}(x_1-x_2)\Big] \\
&\quad \times[\ :A_a(x_1)A_b(x_2):\ +iD_{ab+}(x_1-x_2)] \quad .
\end{aligned} \tag{7.29}$$

E, da Eq. (7.24), a distribuição R'_2 é igual à A'_2 com os pontos x_1 e x_2 trocados. Trocando também os índices vetoriais a e b, e os espinoriais a e c e b e d por motivos de conveniência

–já que ambas distribuições serão subtraídas para obter a distribuição causal–, obtém-se:

$$\begin{aligned} R_2'(x_1;x_2) = e^2\gamma^a_{ab}\gamma^b_{cd}\Big[&:\overline{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2)\psi_d(x_2): -\frac{1}{i}S_{bc-}(x_1-x_2)\ :\overline{\psi}_a(x_1)\psi_d(x_2): \\ &-\frac{1}{i}S_{da+}(x_2-x_1)\ :\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2): -S_{bc-}(x_1-x_2)S_{da+}(x_2-x_1)\Big] \\ &\times\left[:A_a(x_1)A_b(x_2): +iD_{ab+}(x_2-x_1)\right] \quad . \end{aligned} \tag{7.30}$$

Logo, substituindo as Eqs. (7.29) e (7.30) na Eq. (7.25), obtém-se a distribuição causal da segunda ordem:

$$D_2(x_1;x_2) = \left(D_2^{(M)} + D_2^{(C)} + D_2^{(VP)} + D_2^{(SE)} + D_2^{(VG)}\right)(x_1;x_2) \quad , \tag{7.31}$$

com (usamos a coordenada relativa $y \equiv x_1 - x_2$):

$$D_2^{(M)}(x_1;x_2) = -\,ie^2\ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^a\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma^b\psi(x_2):\ D_{ab}(y) \quad ; \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned} D_2^{(C)}(x_1;x_2) =& ie^2\ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^a S(y)\gamma^b\psi(x_2):\ :A_a(x_1)A_b(x_2): \\ &-ie^2\ :\overline{\psi}(x_2)\gamma^b S(-y)\gamma^a\psi(x_1):\ :A_a(x_1)A_b(x_2): \quad ; \end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned} D_2^{(VP)}(x_1;x_2) =& -e^2\mathrm{Tr}\left[\gamma^a S_-(y)\gamma^b S_+(-y) - \gamma^a S_+(y)\gamma^b S_-(-y)\right] \\ &\times\ :A_a(x_1)A_b(x_2): \quad ; \end{aligned} \tag{7.34}$$

$$\begin{aligned} D_2^{(SE)}(x_1;x_2) =& -e^2\ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^a\left[S_-(y)D_{ab+}(-y) + S_+(y)D_{ab+}(y)\right]\gamma^b\psi(x_2): \\ &+e^2\ :\overline{\psi}(x_2)\gamma^a\left[S_+(-y)D_{ab+}(-y) + S_-(-y)D_{ab+}(y)\right]\gamma^b\psi(x_1): \quad ; \end{aligned} \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned} D_2^{(V)}(x_1;x_2) =& -ie^2\mathrm{Tr}\left[\gamma^a S_-(y)\gamma^b S_+(-y)\right]D_{ab+}(-y) \\ &+ie^2\mathrm{Tr}\left[\gamma^a S_-(-y)\gamma^b S_+(y)\right]D_{ab+}(-y) \quad . \end{aligned} \tag{7.36}$$

Esta equação, assim escrita, resulta ser conveniente para ver quais termos contribuem a cada processo, pois isto depende dos operadores de campo não-contraídos que aparecem neles: os operadores de campo que aparecem determinam quais estados iniciais e finais darão um resultado não nulo à amplitude de probabilidade $\langle\Psi; S(g)\Phi\rangle$. Assim, a distribuição $D_2^{(M)}$ dá conta do espalhamento de dois férmions, a $D^{(C)}$, do espalhamento de um férmion por um fóton; as distribuições $D_2^{(VP)}$ e $D_2^{(SE)}$ representam a polarização do vácuo e a auto-energia do férmion, respectivamente; já a distribuição $D_2^{(V)}$ não descreve processo físico nenhum, pois não há nele operadores de campo sem contrair.

7.3 Processos de espalhamento

Nesta seção estudaremos os processos de espalhamento que aparecem na QED à segunda ordem e estabeleceremos a densidade lagrangiana de interação que lhe corresponde.

7.3.1 Espalhamento de Møller

O espalhamento mútuo de dois elétrons (espalhamento de Møller), é descrito pela distribuição causal da Eq. (7.32), cuja parte numérica é a distribuição de comutação do fóton, a parte retardada da qual já foi derivada na Seç. 4.10. A distribuição de transição que corresponde a este processo é, portanto:

$$T_2^{(M)}(x_1;x_2) = -ie^2 \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^a\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma^b\psi(x_2): \ D^F_{ab}(y) \quad , \tag{7.37}$$

com:

$$\widehat{D}^F_{ab}(k) = -\frac{(2\pi)^{-2}}{k^2+i0^+}\left\{g_{ab} - \frac{k_a\eta_b+\eta_a k_b}{k_-} + \frac{k^2}{k_-^2}\eta_a\eta_b\right\} \quad . \tag{7.38}$$

Note-se que estamos usando aqui a distribuição de comutação do campo da radiação incluindo seus termos de gauge (não-covariantes); isto é feito para mostrar explicitamente que eles não têm contribuição aos elementos de matriz do operador de espalhamento, reforçando a análise feita no Cap. 6. Por outro lado, o assim proceder nos permitirá estabelecer alguns resultados em relação com a abordagem lagrangiana (vide a Subseç. 7.3.3). Continuando, a distribuição da Eq. (7.38) tem a ordem singular $\omega_-\left[D^F_{ab}\right] = 0$, e, como consequência, permite a introdução de um termo de normalização da forma $\widehat{C}\,(k_-)$. Escolhendo:

$$\widehat{C}\,(k_-) = (2\pi)^{-2}\frac{\eta_a\eta_b}{k_-^2} \quad , \tag{7.39}$$

o propagador de Feynman do campo da radiação se modifica segundo:

$$\hat{d}_{ab}(k) \equiv \widehat{D}^F_{ab}(k) + \widehat{C}\,(k_-) = -\frac{(2\pi)^{-2}}{k^2+i0^+}\left\{g_{ab} - \frac{k_a\eta_b+\eta_a k_b}{k_-}\right\} \quad . \tag{7.40}$$

Consideremos agora os seguintes estados iniciais e finais, respectivamente:

$$\frac{b^\dagger_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)}{\sqrt{2p_{1-}}}\frac{b^\dagger_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)}{\sqrt{2q_{1-}}}\Omega \quad , \quad \frac{b^\dagger_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)}{\sqrt{2p_{2-}}}\frac{b^\dagger_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)}{\sqrt{2q_{2-}}}\Omega \quad . \tag{7.41}$$

Para estes estados, o operador de espalhamento no limite adiabático $g \to 1$ é:

$$\begin{aligned} S^{(M)}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2p_{1-}2q_{1-}2p_{2-}2q_{2-}}}\left(\Omega; b_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)b_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)S^{(M)}_2 b_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)^\dagger b_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)^\dagger\Omega\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2p_{1-}2q_{1-}2p_{2-}2q_{2-}}}\frac{ie^2}{2(2\pi)^2}\int d^4k d^4x_1 d^4x_2 e^{-iky}\hat{d}_{ab}(k) \\ &\quad\times\left(\Omega; b_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)b_{s_2}(\boldsymbol{p}_2) \ :\overline{\psi}(x_1)\gamma^a\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\gamma^b\psi(x_2): \ b_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)^\dagger b_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)^\dagger\Omega\right) \quad . \end{aligned} \tag{7.42}$$

O produto de operadores que aparece dentro do produto interno é reduzido com o uso do teorema de Wick com o uso das contrações seguintes:

$$\begin{aligned}\overbrace{b_s(\boldsymbol{p})\overline{\psi}}(x) &= (2\pi)^{-3/2}\Theta\left(p_-\right)\sqrt{2p_-}\,\overline{u}_s(\boldsymbol{p})e^{ipx} \quad , \\ \overbrace{\psi(x)b_s(\boldsymbol{p})^\dagger} &= (2\pi)^{-3/2}\Theta\left(p_-\right)\sqrt{2p_-}\,u_s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} \quad . \end{aligned} \tag{7.43}$$

Como os vetores a ambos os lados do produto interno são estados de vazio, são quatro as contribuições não nulas, correspondentes às contrações completas. Assim:

$$\begin{aligned} S_{12}^{(M)} =& \frac{ie^2}{2(2\pi)^8}\int d^4k d^4x_1 d^4x_2 e^{-iky}\hat{d}_{ab}(k)\Theta\left(p_{1-}\right)\Theta\left(q_{1-}\right)\Theta\left(p_{2-}\right)\Theta\left(q_{2-}\right) \\ &\times\Big\{\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^a u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^b u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)e^{i(p_2-q_1)x_1+i(q_2-p_1)x_2} \\ &\quad -\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^a u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^b u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)e^{i(p_2-p_1)x_1+i(q_2-q_1)x_2} \\ &\quad -\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^a u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^b u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)e^{i(q_2-q_1)x_1+i(p_2-p_1)x_2} \\ &\quad +\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^a u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^b u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)e^{i(q_2-p_1)x_1+i(p_2-q_1)x_2}\Big\} \quad . \end{aligned} \tag{7.44}$$

Em todos os termos aparece a seguinte integral:

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{-iky}e^{iPx_1+iQx_2} = (2\pi)^8\delta(k-P)\delta(P+Q) \quad , \tag{7.45}$$

de forma que, integrando na variável k e usando as propriedades de simetria da distribuição $\hat{d}_{ab}$ [vide Eq. (7.40)], isto é, que

$$\hat{d}_{ab}(k) = \hat{d}_{ab}(-k) \quad \text{e} \quad \hat{d}_{ab}(k) = \hat{d}_{ba}(k) \quad , \tag{7.46}$$

obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned} S_{12}^{(M)} =& ie^2\delta(p_2+q_2-p_1-q_1)\Theta\left(p_{1-}\right)\Theta\left(q_{1-}\right)\Theta\left(p_{2-}\right)\Theta\left(q_{2-}\right) \\ &\times\Big\{\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^a u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^b u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\hat{d}_{ab}(p_2-q_1) \\ &\quad -\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^a u_{s_1}(\boldsymbol{p}_1)\overline{u}_{r_2}(\boldsymbol{q}_2)\gamma^b u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)\hat{d}_{ab}(p_2-p_1)\Big\} \quad . \end{aligned} \tag{7.47}$$

Além do mais, as funções de onda $u(p)$ e $\overline{u}(p)$ satisfazem às equações de Dirac no espaço dos momentos:

$$\not{p}u(p) = mu(p) \quad , \quad \overline{u}(p)\not{p} = m\overline{u}(p) \quad , \tag{7.48}$$

donde decorre que:

$$\overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\gamma^a u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)\left(p_{2a}-q_{1a}\right) = \overline{u}_{s_2}(\boldsymbol{p}_2)\left(\not{p}_2-\not{q}_1\right)u_{r_1}(\boldsymbol{q}_1)\left(p_{2a}-q_{1a}\right) = 0 \quad , \tag{7.49}$$

e os termos não covariantes da distribuição $\hat{d}_{ab}$ não têm contribuição alguma a $S_{12}^{(M)}$ [vide as Eqs. (7.40) e (7.47)]. Conclui-se que todos os termos não locais podem ser desconsiderados, pois o resultado será sempre o mesmo a considerar simplesmente a parte covariante da

distribuição de comutação do fóton:

$$-\frac{(2\pi)^{-2}}{k^2+i0^+}g_{ab} \quad , \tag{7.50}$$

estabelecendo este resultado a equivalência com a dinâmica instantânea para o espalhamento de dois elétrons. O fato de termos usado, nessa derivação, estados com momento definido –os quais, evidentemente, não formam parte do espaço de Fock por não poderem ser normalizados–, não afeta o resultado, pois é fácil verificar que nenhum dos procedimentos efetuados se invalida ao se utilizar pacotes de onda, bastando para isso apenas integrar os estados da Eq. (7.41) com certas funções apropriadas do momento.

7.3.2 Espalhamento de Compton

Passamos a estudar agora o espalhamento de Compton, quer dizer, o espalhamento de um elétron por um fóton. Ele é descrito pela distribuição causal da Eq. (7.33), a qual reescrevemos definindo a distribuição numérica:

$$d^{ab}(y) = ie^2\gamma^a S(y)\gamma^b \quad , \tag{7.51}$$

com a qual ter-se-á que:

$$D_2^{(C)}(x_1;x_2) = \Big(:\overline{\psi}(x_1)d^{ab}(y)\psi(x_2): \; - \; :\overline{\psi}(x_2)d^{ba}(-y)\psi(x_1):\Big) \; :A_a(x_1)A_b(x_2): \quad . \tag{7.52}$$

O tratamento deste processo de espalhamento é muito semelhante ao do espalhamento de um férmion por um bóson no modelo de Yukawa estudado no Cap. 5. Como as matrizes de Dirac são constantes, a distribuição $d^{ab}(y)$ tem a ordem singular $\omega_- = -1$, determinada apenas pela distribuição $S(y)$, cuja divisão já foi feita na Seç. 4.10. Como resultado:

$$\hat{r}^{ab}(y) = ie^2\gamma^a S^{\rm ret}(y)\gamma^b \quad . \tag{7.53}$$

Subtraindo a correspondente distribuição subsidiária retardada $\hat{r}'^{ab}(y)$, obtém-se a correspondente distribuição de transição:

$$t^{ab}(y) = ie^2\gamma^a S^F(y)\gamma^b \quad . \tag{7.54}$$

Usando a expressão para o propagador de Feynman do férmion no espaço dos momentos e introduzindo já o termo de normalização permitido devido a ser $\omega_-\left[S^F\right] = 0$:

$$\hat{t}^{ab}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\gamma^a\left(\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i0^+} - \frac{\gamma^+}{2p_-}\right)\gamma^b + \widehat{C}\,(p_-) \quad . \tag{7.55}$$

Para obter a invariância de Lorentz, escolhemos:

$$\widehat{C}\,(p_-) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\frac{\gamma^a\gamma^+\gamma^b}{2p_-} \quad , \tag{7.56}$$

com o qual obtemos finalmente:

$$\hat{t}^{ab}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^2}\gamma^a \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0^+}\gamma^b \quad , \tag{7.57}$$

provando isto, também para este processo, a equivalência com a dinâmica instantânea.

7.3.3 Densidade lagrangiana de interação

No estudo dos processos de espalhamento vimos que a covariância de Lorentz requer a introdução de termos de normalização muito específicos. No caso do espalhamento de Møller, a contribuição do termo de normalização da Eq. (7.39) ao operador $S(g)$ no limite adiabático $g \to 1$ é:

$$+\frac{ie^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 \ :j^a(x_1)\delta(y)\frac{\eta_a\eta_b}{\partial_-^2}j^b(x_2): = ie^2\int d^4x_1 \ :j^+(x_1)\frac{1}{2\partial_-^2}j^+(x_1): \quad . \tag{7.58}$$

Este é precisamente o termo de interação instantânea que aparece na densidade lagrangiana na abordagem convencional ao solucionar as equações de vínculo do campo da radiação em interação, no gauge do plano nulo [25, 26]. Um outro termo de normalização foi requerido para obter uma distribuição de transição covariante para o espalhamento de Compton –vide a Eq. (7.57)–; sua contribuição ao operador de espalhamento no limite adiabático $g \to 1$ é –levando em conta os dois termos na Eq. (7.52)–:

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 e^2 \Big\{ &:\left(\overline{\psi}(x_1)\gamma^a A_a(x_1)\right)\delta(y)\frac{\gamma^+}{2\partial_-}\left(\gamma^b A_b(x_2)\psi(x_2)\right): \\
&+ :\left(\overline{\psi}(x_2)\gamma^b A_b(x_2)\right)\delta(y)\frac{\gamma^+}{2\partial_-}\left(\gamma^a A_a(x_1)\psi(x_1)\right): \Big\} \\
= \int d^4x_1 e^2 \ &:\left(\overline{\psi}(x_1)\gamma^a A_a(x_1)\right)\frac{\gamma^+}{2\partial_-}\left(\gamma^b A_b(x_1)\psi(x_1)\right): \quad .
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Este termo corresponde, na abordagem lagrangiana, ao termo de interação instantânea que aparece como resultado de solucionar as equações de vínculos do campo fermiônico na teoria em interação [25, 26].

Juntando as Eqs. (7.22), (7.58) e (7.59) podemos então identificar a «densidade lagrangiana de interação», definida como $-i$ vezes a distribuição de transição de um ponto mais $-i$ vezes as contribuições dos termos de normalização das distribuições de transição nas seguintes ordens da série perturbativa ao operador de espalhamento no limite adiabático:

$$\mathscr{L} = :j^a(x)A_a(x): \ - \ :\frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{\partial_-}j^+(x)\right)^2: \ + \frac{e^2}{2} \ :\left(\overline{\psi}(x)\gamma^a A_a(x)\right)\frac{\gamma^+}{i\partial_-}\left(\gamma^b A_b(x)\psi(x)\right): \ . \tag{7.60}$$

Lembramos que a densidade lagrangiana da Eq. (7.60) é da primeira ordem na constante de acoplamento e quando escrita em função dos campos interagentes; sua estrutura de segunda ordem aparece quando as equações de vínculos em interação são solucionadas

e reintroduzidas nela. De modo que, o fato destes termos aparecerem na segunda ordem na TPC no plano nulo está dentro da filosofia do método causal, que trabalha apenas com campos livres.

Diremos de passagem que o cancelamento ou não dos termos instantâneos da densidade lagrangiana pelos termos instantâneos dos propagadores de Feynman dos campos, a qualquer ordem, foi tema de debate na comunidade por alguns anos. A TPC no plano nulo oferece uma resposta imediata: Como tais interações instantâneas correspondem aos termos de normalização das distribuições de transição da segunda ordem, numa série perturbativa baseada na densidade lagrangiana $\mathscr{L}$, estes se cancelarão em todas as ordens, pois toda distribuição causal em cada ordem se constrói com as distribuições de transição anteriores já normalizadas (já covariantes). Essa é uma das grandes vantagens de se trabalhar numa teoria indutiva.

7.4 Polarização do vácuo

Consideremos agora a correção radiativa conhecida como «polarização do vácuo», que será precisamente definida mais adiante, e que provêm do estudo da distribuição causal da Eq. (7.34), que repetimos aqui:

$$D_2^{(VP)}(x_1;x_2) = \left(P^{ab}(y) - P^{ba}(-y)\right) \,:A_a(x_1)A_b(x_2):\quad , \tag{7.61}$$

com:

$$P^{ab}(y) = e^2\mathrm{Tr}\left[\gamma^a S_+(y)\gamma^b S_-(-y)\right]\quad . \tag{7.62}$$

A transformada de Fourier da distribuição P^{ab} é:

$$\begin{aligned}\widehat{P}^{ab}(k) &= e^2(2\pi)^{-2}\int d^4p\mathrm{Tr}\left[\gamma^a S_+(p)\gamma^b S_-(p-k)\right]\\ &= e^2(2\pi)^{-2}\int d^4p\mathrm{Tr}\left[\gamma^a(\not{p}+m)\gamma^b(\not{p}-\not{k}+m)\right]\widehat{D}_+(p)\widehat{D}_-(p-k)\quad .\end{aligned} \tag{7.63}$$

O traço que aqui se apresenta é calculado pelas fórmulas usuais:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma^a(\not{p}+m)\gamma^b(\not{p}-\not{k}+m)\right] &= \mathrm{Tr}\left[\gamma^a\not{p}\gamma^b(\not{p}-\not{k})\right] + m^2\mathrm{Tr}\left[\gamma^a\gamma^b\right]\\ &= 4\left[p^a\left(p^b-k^b\right) + p^b\left(p^a-k^a\right) - g^{ab}\left(p(p-k)-m^2\right)\right]\quad .\end{aligned} \tag{7.64}$$

Também, como:

$$\widehat{D}_\pm(p) = \pm\frac{i}{2\pi}\Theta\left(\pm p_-\right)\delta(p^2-m^2)\quad , \tag{7.65}$$

aparecerão no integrando da Eq. (7.63) as distribuições delta de Dirac $\delta(p^2-m^2)$ e $\delta((p-k)^2-m^2)$, que têm, em conjunto, suporte em $p^2=m^2$ e $k^2=2pk$. Portanto:

$$\begin{aligned}\widehat{P}^{ab}(k) =& \frac{4e^2}{(2\pi)^4}\int d^4p\left[2p^ap^b - p^ak^b - k^ap^b + g^{ab}pk\right]\\ &\times\Theta\left(p_-\right)\delta(p^2-m^2)\Theta\left(k_- - p_-\right)\delta(k^2-2pk)\quad .\end{aligned} \tag{7.66}$$

Pode-se observar da Eq. (7.66) que a distribuição $\widehat{P}^{ab}(k)$ é simétrica em seus dois índices. E, além disso, ela é ortogonal ao vetor k, pois ao multiplicá-la por dito vetor, ter-se-á que:

$$k_a \widehat{P}^{ab}(k) \sim (2pk - k^2)p^b \quad , \tag{7.67}$$

que é nulo por causa do suporte da distribuição $\delta(k^2 - 2pk)$. Sendo, como é, simétrico e ortogonal ao vetor k, $\widehat{P}^{ab}(k)$ tem de ser proporcional ao projetor $k^a k^b - k^2 g^{ab}$:

$$\widehat{P}^{ab}(k) = \left(k^a k^b - k^2 g^{ab}\right) B(k^2) \quad . \tag{7.68}$$

Calculando o traço dessa equação e também o da Eq. (7.66), obtém-se a seguinte fórmula para $B(k^2)$:

$$B(k^2) = -\frac{1}{3k^2}\hat{P}^a{}_a(k) = -\frac{4e^2}{3(2\pi)^4}\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) I(k) \quad , \tag{7.69}$$

com $I(k)$ a integral da Eq. (5.38), e cujo valor é dado na Eq. (5.42). Da substituição dessas equações na Eq. (7.69), e então na Eq. (7.68):

$$\widehat{P}^{ab}(k) = \frac{e^2}{3(2\pi)^3}\left(g^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2}\right)(k^2 + 2m^2)\Theta(k_-)\,\Theta\left(k^2 - 4m^2\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \quad . \tag{7.70}$$

Então a distribuição numérica associada à polarização do vácuo [vide a Eq. (7.61)] é:

$$\hat{d}^{ab}(k) = \frac{e^2}{3(2\pi)^3}\left(g^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2}\right)(k^2 + 2m^2)\mathrm{sgn}(k_-)\,\Theta\left(k^2 - 4m^2\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \quad . \tag{7.71}$$

Para extrair dela a parte retardada, fatoramos nela um polinômio do segundo grau:

$$\hat{d}^{ab}(k) = \frac{e^2}{3(2\pi)^3}\left(k^2 g^{ab} - k^a k^b\right)\hat{d}_1(k) \quad , \tag{7.72}$$

com $\hat{d}_1(k)$ a seguinte distribuição:

$$\hat{d}_1(k) = \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right)\mathrm{sgn}(k_-)\,\Theta\left(k^2 - 4m^2\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \quad . \tag{7.73}$$

Pelo Teorema 4.7, será suficiente encontrar a parte retardada da distribuição $\hat{d}_1(k)$, cuja ordem singular no eixo x^- é:

$$\omega_-\left[\hat{d}_1\right] = 0 \quad . \tag{7.74}$$

Tal parte retardada é (usamos a variável $s = -2k_-q$):

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(k) = -\frac{i}{2\pi}\int \frac{ds}{s - ik_-0^+}\Bigg\{&\Theta(s + k^2 - 4m^2)\left(1 + \frac{2m^2}{s + k^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s + k^2}} \\ &-\Theta(s - 4m^2)\left(1 + \frac{2m^2}{s}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}\Bigg\} \quad .\end{aligned} \tag{7.75}$$

Fazendo uso da fórmula de Sokhotskiy e, depois, a mudança de variável $s + k^2 \to s$ na primeira integral, resulta:

$$\hat{r}_1(k) = \frac{ik^2}{2\pi}\text{V.p.}\int_{4m^2}^{+\infty}\frac{(s+2m^2)\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}}{s^2(k^2-s)}ds + \frac{1}{2}\text{sgn}\,(k_-)\,\Theta(k^2-4m^2)\left(1+\frac{2m^2}{k^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}\,. \tag{7.76}$$

Essa distribuição é o valor limite da seguinte função analítica, regular no tubo $\mathbb{R}^4 + i\mathbb{R}^+_0 e^-$, em que tem-se introduzido a variável complexa de momento $\tilde{k} = k + i\varepsilon\eta$:

$$\hat{r}_1(\tilde{k}) = \frac{i}{2\pi}\tilde{k}^2\int_{4m^2}^{+\infty}\frac{(s+2m^2)\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}}{s^2(\tilde{k}^2-s)}ds \quad , \tag{7.77}$$

Seu valor explícito pode ser obtido pela mesma substituição de Euler das Eqs. (5.53) e (5.54), com a qual ela adota a forma seguinte:

$$\hat{r}_1(\tilde{k}) = \frac{im^2}{(2\pi)\tilde{k}^4}\frac{(1-\tilde{\xi})^4}{\tilde{\xi}^2}\int_0^1\frac{(1-x)^2(x^2+4x+1)dx}{(x+\tilde{\xi})(-x-1/\tilde{\xi})(1+x)^4} \quad , \tag{7.78}$$

e que, após a aplicação da técnica de decomposição em frações parciais, que permite a integração elementar, revela seu valor:

$$\hat{r}_1(\tilde{k}) = \frac{im^2}{(2\pi)\tilde{k}^4}\left[\frac{1+\tilde{\xi}}{1-\tilde{\xi}}\left(\tilde{\xi}-4+\frac{1}{\tilde{\xi}}\right)\log(\tilde{\xi}) + \frac{5}{3}\left(\tilde{\xi}+\frac{1}{\tilde{\xi}}\right) - \frac{22}{3}\right] \quad . \tag{7.79}$$

Notemos ainda que, segundo a Eq. (5.54), no limite em que $\varepsilon \to 0$,

$$\xi + \frac{1}{\xi} = 2 - \frac{k^2}{m^2} \quad , \tag{7.80}$$

e os termos além do logaritmo na primeira linha da Eq. (7.79) estão sujeitos a normalização. Finalmente, colocando esse resultado na Eq. (7.72) para obter $\hat{r}^{ab}(k)$, subtraindo a distribuição subsidiária $\hat{r}'^{ab}(k)$ e definindo o «tensor de polarização do vácuo» Π^{ab} segundo:

$$\hat{t}^{ab}(k) =: -i\widehat{\Pi}^{ab}(k) \quad ; \quad T_2^{(VP)}(x_1;x_2) = -i\ :A_a(x_1)\Pi^{ab}(x_1-x_2)A_b(x_2): \tag{7.81}$$

obtém-se finalmente:

$$\widehat{\Pi}^{ab}(k) =: (2\pi)^{-4}\left(\frac{k^a k^b}{k^2} - g^{ab}\right)\widehat{\Pi}(k) \quad , \tag{7.82}$$

com o «escalar de polarização do vácuo» $\widehat{\Pi}(k)$ tendo as seguintes expressões, dependendo do valor do quadrado do momento –elas se obtém tomando o valor limite da função analítica da Eq. (7.79), de modo análogo ao realizado para o modelo de Yukawa–:

(I) $k^2 < 0$:

$$\widehat{\Pi}(k) = \frac{e^2m^2}{3}\left[\frac{1+\xi}{1-\xi}\left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi}\right)\log(\xi) + \frac{5}{3}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) - \frac{22}{3}\right] \quad . \tag{7.83}$$

(II) $0 < k^2 < 4m^2$:

$$\widehat{\Pi}(k) = \frac{e^2m^2}{3}\left[4\left(1 + \frac{k^2}{2m^2}\right)\sqrt{\frac{4m^2}{k^2} - 1}\,\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{4m^2}{k^2} - 1}\right) - \frac{5k^2}{3m^2} - 4\right] \quad . \tag{7.84}$$

(III) $k^2 > 4m^2$:

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}(k) = \frac{e^2m^2}{3}\Bigg\{&\left[\frac{1+\xi}{1-\xi}\left(\xi - 4 + \frac{1}{\xi}\right)\log(|\xi|) + \frac{5}{3}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) - \frac{22}{3}\right] \\ &-i\pi(k^2 + 2m^2)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}\Bigg\} \quad .\end{aligned} \tag{7.85}$$

Mas $\widehat{\Pi}^{ab}(k)$ tem a ordem singular $\omega_- = 2$, donde ainda existe uma indeterminação que no espaço dos momentos é da forma:

$$\widetilde{\Pi}_{ab}(k) = \widehat{\Pi}_{ab}(k) - C_0 g_{ab} + c'_a k_b - C_2 k^2 g_{ab} - C_3 k_a k_b \quad , \quad C_0, c'_a, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \quad . \tag{7.86}$$

É claro que o termo linear no momento deve ser nulo devido à invariância da interação eletromagnética sob transformações de paridade. Quanto aos outros, a identidade-Cg [Eq. (7.21)] indica que a distribuição completa deve ser transversal ao momento, o que implica que o polinômio $-C_0 g_{ab} - C_2 k^2 g_{ab} - C_3 k_a k_b$ a ser adicionado a $\widehat{\Pi}_{ab}(k)$ deve ser ele mesmo transversal ao momento, pois $\widehat{\Pi}_{ab}(k)$ já o é [Eq. (7.82)]. Portanto, multiplicando o polinômio de normalização por k^a e igualando a zero, se deve cumprir que: $C_2 + C_3 = -C_0/k^2$, e o polinômio mencionado se reduz a:

$$\left(\frac{k_a k_b}{k^2} - g_{ab}\right)(C_0 + C_2 k^2) \quad .$$

Isto significa que a normalização deve ser feita diretamente no escalar da polarização do vácuo:

$$\widetilde{\Pi}(k) = \widehat{\Pi}(k) + C_0 + C_2 k^2 \quad , \quad C_0, C_2 \in \mathbb{R} \quad . \tag{7.87}$$

Para fixar as constantes C_0 e C_2, estudar-se-á a dispersão de Møller com inserções de polarização do vácuo. Por um procedimento idêntico ao realizado no estudo do espalhamento de dois férmions com inserções de auto-energia do méson no modelo de Yukawa –vide o Cap. 5–, observa-se que o propagador completo do fóton é a distribuição $\widehat{D}^{ab}_{\text{tot}}$ que soluciona à equação:

$$\begin{aligned}\widehat{D}^{ab}_{\text{tot}} &= \hat{d}^{ab} + (2\pi)^4 \hat{d}^{ac}\widetilde{\Pi}_{cd}\hat{d}^{db} + (2\pi)^8 \hat{d}^{ac}\widetilde{\Pi}_{cd}\hat{d}^{de}\widetilde{\Pi}_{ef}\hat{d}^{fb} + \cdots \\ &= \hat{d}^{ac}\left(\delta^b_c + (2\pi)^4\widetilde{\Pi}_{cd}\widehat{D}^{db}_{\text{tot}}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{7.88}$$

com $\hat{d}^{ab}$ a parte numérica da distribuição de transição da segunda ordem correspondente à dispersão de Møller, dada na Eq. (7.40). A Eq. (7.88) pode ainda ser escrita na seguinte forma, em que o propagador completo do fóton aparece uma única vez:

$$\left(\delta^a_d - (2\pi)^4 \hat{d}^{ac}\widetilde{\Pi}_{cd}\right)\widehat{D}^{db}_{\text{tot}} = \hat{d}^{ab} \quad . \tag{7.89}$$

Usualmente [107] esta equação é solucionada por meio da inversão de $\hat{d}^{ab}$. No entanto, no caso particular que estamos estudando, tal distribuição não possui inversa devido aos termos não covariantes contidos nela[3]. Porém, com as Eqs. (7.40) e (7.82) podemos ainda calcular a expressão inter-parentética da Eq. (7.89), que resulta ser:

$$L^a{}_d = \pi_1\delta^a_d + \pi_2 k^a\eta_d \quad ; \quad \pi_1 = \frac{k^2 - (2\pi)^{-2}\widetilde{\Pi} + i0^+}{k^2 + i0^+} \quad , \quad \pi_2 = \frac{(2\pi)^{-2}\widetilde{\Pi}}{k_-(k^2 + i0^+)} \quad . \tag{7.90}$$

Acontece que este tensor tem, ele sim, uma inversa, que chamaremos $E^c{}_a$ e que terá a seguinte forma geral:

$$E^c{}_a = \sigma_1\delta^c_a + \sigma_2 k^c k_a + \sigma_3 k^c\eta_a + \sigma_4\eta^c k_a + \sigma_5\eta^c\eta_a \quad , \tag{7.91}$$

com σ_i coeficientes a serem determinados. Tal é feito solucionando o sistema de equações $E^c{}_a L^a{}_d = \delta^c_d$; a solução é:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\pi_1} \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = -\frac{\sigma_1\pi_2}{\pi_1 + k_-\pi_2} \quad , \quad \sigma_4 = 0 = \sigma_5 \quad . \tag{7.92}$$

Substituindo a Eq. (7.92), com os valores de π_i dados na Eq. (7.90), na Eq. (7.91) encontra-se que:

$$E^c{}_a = \frac{1}{k^2 - (2\pi)^{-2}\widetilde{\Pi} + i0^+}\left\{k^2\delta^c_a - \frac{(2\pi)^{-2}\widetilde{\Pi}}{k_-}k^c\eta_a\right\} \quad . \tag{7.93}$$

Agora podemos solucionar a Eq. (7.89) multiplicando-a por $E^c{}_a$. Obtemos assim que o propagador completo do fóton é:

$$\widehat{D}^{cb}_{\text{tot}}(k) = -\frac{(2\pi)^{-2}}{k^2 - (2\pi)^{-2}\widetilde{\Pi}(k) + i0^+}\left(g^{cb} - \frac{k^c\eta^b + \eta^c k^b}{k_-}\right) \quad . \tag{7.94}$$

Como podemos ver, o propagador completo preserva a estrutura tensorial da distribuição $\hat{d}^{ab}(k)$. Isto não acontece com o propagador completo numa abordagem covariante na dinâmica instantânea, em que ele pode ser dividido em duas partes: Uma transversal ao momento k^a, que é modificada pela presença de $\widetilde{\Pi}$; uma longitudinal (paralela ao momento), que se mantém independente de $\widetilde{\Pi}$ –isto pode ser comprovado, por exemplo, na Ref. [107]–. Contudo, os dois propagadores totais são iguais entre si, e iguais à parte covariante apenas, uma vez que a conservação da corrente elétrica é levada em consideração, eliminando ela todas as contribuições proporcionais ao momento k^a; essa é uma expressão da invariância de

[3] Isto pode ser provado da seguinte forma: Suponhamos que a distribuição inversa $\hat{d}^{-1}$ existe. Escrevendo-a como $\alpha g_{ab} + \beta k_b k_c + \gamma(\eta_b k_c + \eta_c k_b) + \delta\eta_b\eta_c$, o conjunto de equações para os coeficientes $\alpha, \cdots, \delta$ obtidos por meio da condição $\hat{d}^{-1}\hat{d} = 1$ é inconsistente.

gauge. Voltando à Eq. (7.94), o escalar de polarização do vácuo $\widetilde{\Pi}$ aparece no denominador de $\widehat{D}^{ab}_{\rm tot}(k)$, então é possível impor as seguintes condições físicas para sua normalização: (1) O fóton é uma partícula sem massa, dessarte, o propagador deve ter um pólo em $k^2 = 0$; (2) o valor físico da carga elétrica é a constante de acoplamento e da distribuição de um ponto T_1. Esses dois requerimentos são traduzidos, respectivamente, nas condições:

$$\lim_{k^2\to 0} \widetilde{\Pi}(k) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k^2\to 0} \frac{d\widetilde{\Pi}(k)}{d(k^2)} = 0 \quad . \tag{7.95}$$

Estas já são satisfeitas por $\widehat{\Pi}(k)$ das Eqs. (7.83) e (7.84) –cujos limites laterais contêm à camada de massa do fóton–, donde decorre que na Eq. (7.87) devem ser: $C_0 = 0 = C_2$, e a solução normalizada para a polarização do vácuo é precisamente a solução central.

7.5 Auto-energia do férmion

A partir desse ponto, e para simplificar consideravelmente os cálculos, faremos uso do resultado crucial do Cap. 6, isto é, desconsideraremos os termos de gauge da distribuição de comutação do campo de radiação, por eles não contribuírem para a matriz física de espalhamento.

A auto-energia do elétron é descrita pela distribuição causal da Eq. (7.35). A escreveremos como:

$$D_2^{(SE)}(x_1; x_2) = :\overline{\psi}(x_1) d(y) \psi(x_2): \; - \; :\overline{\psi}(x_2) d(-y) \psi(x_1): \quad , \tag{7.96}$$

com:

$$d(y) := -e^2 \gamma^a \left[d^+(y) + d^-(y) \right] \gamma_a \quad ; \quad d^\pm(y) := S_\pm(y) D_{0+}(\pm y) \quad . \tag{7.97}$$

Para ir ao espaço dos momentos, começaremos por calcular a transformada de Fourier de d^-, que é a seguinte:

$$\begin{aligned} \hat{d}^-(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4q \widehat{S}_-(p-q) \widehat{D}_{0+}(-q) \\ &= (2\pi)^{-4} \left[(\not{p} + m) I_1 - \gamma^a I_{2a} \right] \quad , \end{aligned} \tag{7.98}$$

com as seguintes definições das várias integrais:

$$I_1 = \int d^4q \Theta(-q_-) \Theta(q_- - p_-) \delta(q^2) \delta\left((p-q)^2 - m^2 \right) \quad , \tag{7.99}$$

$$I_{2a} = \int d^4q \Theta(-q_-) \Theta(q_- - p_-) \delta(q^2) \delta\left((p-q)^2 - m^2 \right) q_a \quad . \tag{7.100}$$

O seu cálculo se simplifica no sistema inercial de referência em que $p = (p_+; 0_\perp; p_-)$, o qual existe porque $q \in \overline{V^-}$ e $p - q \in V^-$, de forma que $p = q + (p-q) \in V^-$; isto implica, em particular, que $p_+, p_- < 0$. Em tal sistema inercial de referência:

$$(p-q)^2 - m^2\big|_{q^2=0} = 2p_+p_- - 2p_+q_- - 2p_-q_+ - m^2 \quad . \tag{7.101}$$

Logo, usando as propriedades da distribuição delta de Dirac:

$$\Theta(-q_-)\delta(q^2)\delta\left((p-q)^2-m^2\right)=\frac{1}{|2p_-|}\Theta(-q_-)\Theta(q_--A)\Theta(2p_+p_--m^2)$$
$$\times\,\delta\left(q_+-\frac{q_\perp^2}{2q_-}\right)\delta\left[q_\perp^2-\frac{2p_+}{p_-}(A-q_-)q_-\right]\quad , \tag{7.102}$$

com:

$$A=\frac{2p_+p_--m^2}{2p_+}\quad . \tag{7.103}$$

Desde que $p_+<0$, é trivial ver que $A>p_-$, e a função de Heaviside $\Theta(q_--p_-)$ que aparece nas integrais das Eqs. (7.99) e (7.100) é redundante. Além disso, é claro que, por argumentos de simetria, no sistema de referência escolhido serão:

$$I_{2\alpha}=0\quad(\alpha\in I_2)\quad . \tag{7.104}$$

Decorre disto que somente precisamos calcular as integrais I_1, I_{2+} e I_{2-}. A integração nas variáveis q_+ e $q_\perp^2$ é imediata usando as propriedades das distribuições delta de Dirac contidas na Eq. (7.102); obtém-se:

$$I_1=\frac{\pi}{|2p_-|}\Theta(-p_-)\Theta(2p_+p_--m^2)\int_A^0 dq_-\quad , \tag{7.105}$$

$$I_{2+}=\frac{\pi}{|2p_-|}\Theta(-p_-)\Theta(2p_+p_--m^2)\frac{p_+}{p_-}\int_A^0 dq_-(A-q_-)\quad , \tag{7.106}$$

$$I_{2-}=\frac{\pi}{|2p_-|}\Theta(-p_-)\Theta(2p_+p_--m^2)\int_A^0 dq_-q_-\quad . \tag{7.107}$$

A integração na variável q_- é agora elementar:

$$I_1=\frac{\pi}{2}\Theta(-p_-)\Theta(2p_+p_--m^2)\left(1-\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\quad , \tag{7.108}$$

$$I_{2\pm}=\frac{p_\pm}{2}\left(1-\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)I_1\quad . \tag{7.109}$$

Substituindo estes resultados na Eq. (7.98) e multiplicando-a por γ^a pela esquerda e por γ_a pela direita e realizando a soma no índice «a»:

$$\gamma^a\hat{d}^-(p)\gamma_a=(2\pi)^{-3}\Theta(-p_-)\Theta(2p_+p_--m^2)\left(1-\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\left\{m-\frac{\not{p}}{4}\left(1+\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\right\}\quad . \tag{7.110}$$

De forma análoga, calcula-se a transformada de Fourier da distribuição d^+:

$$\gamma^a \hat{d}^+(p)\gamma_a = -(2\pi)^{-3}\Theta(p_-)\Theta(2p_+p_- - m^2)\left(1-\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\left\{m - \frac{\not{p}}{4}\left(1+\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\right\} \quad . \tag{7.111}$$

Substituindo as Eqs. (7.110) e (7.111) na Eq. (7.97) obtemos finalmente a distribuição causal no espaço dos momentos:

$$\hat{d}(p) = e^2(2\pi)^{-3}\mathrm{sgn}(p_-)\Theta(2p_+p_- - m^2)\left(1-\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\left\{m - \frac{\not{p}}{4}\left(1+\frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\right\} \quad . \tag{7.112}$$

Para obter a parte retardada da distribuição recém encontrada, faremos uso do Teorema 4.7 e escreveremos, fatorando dela um polinômio:

$$\hat{d}(p) = e^2(2\pi)^{-3}(2p_+p_- - m^2)\left\{2p_+p_-m - \frac{\not{p}}{4}(2p_+p_- + m^2)\right\}\hat{d}_1(p) \quad , \tag{7.113}$$

com:

$$\hat{d}_1(p) = \mathrm{sgn}(p_-)\Theta(2p_+p_- - m^2)\frac{1}{(2p_+p_-)^2} \quad , \tag{7.114}$$

e só esta distribuição deverá ser dividida. Sua ordem singular no eixo x^- é negativa:

$$\omega_-\left[\hat{d}_1\right] = -1 \quad . \tag{7.115}$$

O motivo para esse valor da ordem singular no eixo x^- é a integral

$$\int \rho(s)\Theta\left(\frac{p}{s}-a\right)\frac{s^2}{p^2}\hat{f}(p)dp = s\rho(s)\int_a^{+\infty}\hat{f}(sq)\frac{dq}{q^2} \quad ,$$

que tende a $\hat{f}(0)/a$ para $s \to 0$ caso seja escolhida a função de auto-modelo $\rho(s) = s^{-1}$ – definindo assim $\omega_- = -1$–. Em tal caso, no limite $s \to 0$:

$$\rho(s)\Theta\left(\frac{p}{s}-a\right)\frac{s^2}{p^2} \to \frac{\delta(p)}{a} \quad .$$

Este valor da ordem singular é diferente do valor -2 para o grau de divergência de d_1 por contagem de potências. Tal diferença é, no entanto, irrelevante neste caso, pois a fórmula para se obter a distribuição retardada é a mesma para todos os valores negativos da ordem singular. Contudo, deve-se sempre lembrar que calcular corretamente a ordem singular é extremamente importante, pois pode levar a diferenças nas características físicas da solução quando a ordem singular é não-negativa[4]. Voltando à divisão da distribuição

[4]Isto ocorre, por exemplo, no modelo de Schwinger, em que a ordem singular para a polarização do vácuo é igual a zero, enquanto que, por contagem de potências, é -1; o termo de normalização admissível leva ao aparecimento da massa do fóton [205].

$\hat{d}_1$, ela então será feita por aplicação da Eq. (4.130). Realizando a mudança de variável $s = -2kp_- + 2p_+p_-$:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1(p) &= \frac{i}{2\pi}\int \frac{dk}{k+i0^+}\mathrm{sgn}(p_-)\Theta(-2kp_- + 2p_+p_- - m^2)\frac{1}{(-2kp_- + 2p_+p_-)^2} \\ &= \frac{i}{2\pi}\left\{\text{V.p.}\int_{m^2}^{+\infty}\frac{ds}{s^2(2p_+p_- - s)} - i\pi\mathrm{sgn}(p_-)\Theta(2p_+p_- - m^2)\frac{1}{(2p_+p_-)^2}\right\} \\ &= \frac{i}{2\pi}\frac{1}{(2p_+p_-)^2}\left\{\log\left(\left|\frac{2p_+p_- - m^2}{m^2}\right|\right) + \frac{2p_+p_-}{m^2} - i\pi\mathrm{sgn}(p_-)\Theta(2p_+p_- - m^2)\right\}.\end{aligned} \tag{7.116}$$

A distribuição retardada completa será portanto:

$$\begin{aligned}\hat{r}(p) =& \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\left\{\left(1 - \frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\left[m - \frac{\not{p}}{4}\left(1 + \frac{m^2}{2p_+p_-}\right)\right]\left[\log\left(\left|\frac{2p_+p_- - m^2}{m^2}\right|\right)\right.\right. \\ &\left.\left. - i\pi\mathrm{sgn}(p_-)\Theta(2p_+p_- - m^2)\right] + \frac{m^2\not{p}}{4(2p_+p_-)} - m - \frac{2p_+p_-}{m}(\not{p} - m)\right\}.\end{aligned} \tag{7.117}$$

Nesta expressão, os últimos dois termos da segunda linha têm a forma de termos de normalização e podem, portanto, ser substituídos por valores arbitrários, levando em consideração que a ordem singular no eixo x^- da distribuição causal completa na Eq. (7.112) é $\omega_-\left[\hat{d}\right] = +1$. Além disso, a distribuição subsidiária retardada para a auto-energia do férmion é $\hat{r}'(p) = -e^2\gamma^a\hat{d}^-(p)\gamma_a$, como pode ser visto na Eq. (7.30); seu valor é então dado na Eq. (7.110). Destarte, se definirmos a auto-energia do férmion Σ de tal forma que a distribuição de transição seja:

$$T_2^{(SE)}(x_1;x_2) = i\ :\overline{\psi}(x_1)\Sigma(x_1 - x_2)\psi(x_2):\ + i\ :\overline{\psi}(x_2)\Sigma(x_2 - x_1)\psi(x_1):\quad , \tag{7.118}$$

$$\widehat{\Sigma}(p) = -i\left(\hat{r}(p) - \hat{r}'(p)\right)\quad , \tag{7.119}$$

então em forma covariante de Lorentz ter-se-á:

$$\begin{aligned}\widehat{\Sigma}(p) =& \frac{e^2}{(2\pi)^4}\left\{\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)\left[m - \frac{\not{p}}{4}\left(1 + \frac{m^2}{p^2}\right)\right]\left[\log\left(\left|\frac{p^2 - m^2}{m^2}\right|\right) - i\pi\Theta(p^2 - m^2)\right]\right. \\ &\left. + \frac{m^2\not{p}}{4p^2} + C_0 + C_1\not{p}\right\}\quad ,\end{aligned} \tag{7.120}$$

com $C_0,\ C_1 \in \mathbb{R}$ constantes de normalização. Essa distribuição é a mesma que a da dinâmica instantânea [107]. Com a finalidade de fixar as constantes de normalização C_0 e C_1, estudamos as inserções da auto-energia do férmion no espalhamento de Compton, semelhantemente a como foi feito para o espalhamento de um méson e um núcleon com inserções da auto-energia do núcleon no modelo de Yukawa no Cap. 5; encontra-se que o propagador

total do férmion é o que soluciona à equação:

$$\widehat{S}_{\text{tot}} = \hat{t}_2^{(C)} \left(1 + (2\pi)^4 \widetilde{\Sigma} \widehat{S}_{\text{tot}}\right) \quad , \tag{7.121}$$

com $\hat{t}_2^{(C)}$ o propagador de Feynman normalizado (sem termo instantâneo) do férmion, que é o que aparece na distribuição de transição do espalhamento de Compton à segunda ordem [Eq. (7.57)]:

$$\hat{t}_2^{(C)}(p) = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\not{p} - m + i0^+} \quad . \tag{7.122}$$

Obtém-se:

$$\widehat{S}_{\text{tot}}(p) = (2\pi)^{-2} \frac{1}{\not{p} - \left(m + (2\pi)^2 \widetilde{\Sigma}(p)\right) + i0^+} \quad . \tag{7.123}$$

Devemos então considerar, como alhures, as condições de normalização: (1) A massa m é a massa física do férmion; (2) o valor de e é o da carga elétrica física. Essas duas condições, respectivamente, se traduzem operacionalmente em:

$$\lim_{\not{p} \to m} \widetilde{\Sigma}(p) = 0 \quad , \quad \lim_{\not{p} \to m} \frac{d\widetilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}} = 0 \quad . \tag{7.124}$$

A primeira dessas condições pode ser avaliada diretamente, pois $\widetilde{\Sigma}$ na Eq. (7.120) não é divergente na camada de massa; ela leva à relação:

$$C_0 = -m \left(C_1 + \frac{1}{4}\right) \quad . \tag{7.125}$$

A segunda condição de normalização, no entanto, não pode ser diretamente avaliada, pois a derivada de $\widetilde{\Sigma}$ é singular na camada de massa[5]. A solução deste problema são as identidades de Ward-Takahashi: A normalização da auto-energia do férmion e a da função de vértice não são independentes, mas se relacionam de tal forma que os valores particulares de suas respectivas constantes de normalização não mudam o valor da carga elétrica; qualquer mudança na constante de normalização C_1 leva, pelas identidades de Ward-Takahashi, a uma mudança na constante de normalização da função de vértice de modo que a carga elétrica se mantém a mesma. Por este motivo, a constante C_1 pode ser escolhida com o uso de uma outra condição de normalização em que não se apresentem divergências infra-vermelhas, por exemplo:

$$\lim_{\not{p} \to 0} \frac{d\widetilde{\Sigma}(p)}{d\not{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{8} \quad . \tag{7.126}$$

A verificação do recém proferido requer uma análise mais profunda das identidades de Ward-Takahashi, a qual será feita na Seç. 7.8.

[5]Este problema de divergência infra-vermelha se apresenta em todo formalismo: a não analiticidade é uma propriedade geral da auto-energia quando uma das distribuições que intervém na convolução tem massa nula (quando uma das «linhas internas» corresponde a uma partícula sem massa) [100]. Uma «solução» comumente usada é a de introduzir uma massa para o fóton [100, 206]. Semelhante regularização, no entanto, não pode ser removida posteriormente. O mesmo ocorre quando é usada a regularização de Pauli-Villars [207].

7.6 Interação luz-luz

Um dos novos efeitos que a eletrodinâmica quântica permitiu predizer é a interação luz-luz [206]. Este aparece apenas a partir da quarta ordem da série perturbativa e, portanto, sua magnitude é extremamente pequena, ao ponto que nenhuma medição direta dela tem sido realizada até hoje. Para sua descrição na TPC, como o procedimento é indutivo, precisa-se em primeiro lugar calcular a distribuição causal da terceira ordem[6]:

$$\begin{aligned} D_3(1;2;3) =& [T(1);T(2;3)] + [T(2);T(1;3)] + [T(1);T(2;3)] \\ &+ \{T(1);D_2(2;3)\} + \{T(2);D_2(3;1)\} \quad . \end{aligned} \tag{7.127}$$

A partir dessa expressão, a distribuição de transição da terceira ordem, T_3, tem de ser determinada por divisão e subtração da distribuição subsidiária retardada. Então já podemos obter a distribuição causal da quarta ordem:

$$\begin{aligned} D_4(1;2;3;4) =& -[T(1;2;4);T(3)] - [T(1;3;4);T(2)] - [T(2;3;4);T(1)] - [T(1;4);T(2;3)] \\ &+ \{[T(1;4);T(2)];T(3)\} + \{[T(1;4);T(3)];T(2)\} + \{[T(2;4);T(1)];T(3)\} \\ &+ \{[T(2;4);T(3)];T(1)\} + \{[T(3;4);T(1)];T(2)\} + \{[T(3;4);T(2)];T(1)\} \\ &- [T(2;4);T(1;3)] - [T(3;4);T(1;2)] - [T(4);T(1;2;3)] + \{[T(4);T(1)];T(2;3)\} \\ &+ \{T(1);[T(4);T(2;3)]\} + \{[T(4);T(2)];T(1;3)\} + \{T(2);[T(4);T(1;3)]\} \\ &+ \{[T(4);T(3)];T(1;2)\} + \{T(3);[T(4);T(1;2)]\} + T(1)\{T(2);T(3)\}T(4) \\ &+ T(2)\{T(1);T(3)\}T(4) + T(3)\{T(1);T(2)\}T(4) - T(4)\{T(1);T(2)\}T(3) \\ &- T(4)\{T(1);T(3)\}T(2) - T(4)\{T(2);T(3)\}T(1) \quad . \end{aligned} \tag{7.128}$$

Nessa expressão, só contribuirão à interação luz-luz aquelas partes de T_2 que correspondem ao espalhamento de Compton e aquelas de T_3 com três campos de radiação e dois campos fermiônicos externos. Ademais, as contrações de Wick deverão ser feitas de forma a deixar quatro campos eletromagnéticos externos só. Quanto ao produto de quatro distribuições T_1, eles irão contribuir sempre que as contrações sejam feitas respeitando o que agora dissemos. Deveria então proceder-se a obter sua parte retardada, e, com ela, a distribuição de transição.

Embora este esboço do procedimento possa desalentar qualquer tentativa de realizar explicitamente o cálculo, ainda é possível dizer algumas coisas a respeito da interação luz-luz. Em particular, ver-se-á na Seç. 7.7 que a ordem singular no eixo x^- das distribuições com quatro campos de radiação externos e nenhum fermiônico é $\omega_- = 0$, e portanto um termo de normalização é possível para eles. Assim, a distribuição de transição da interação luz-luz será da forma:

$$T^{(LL)}(1;2;3;4) = \tilde{t}^{(LL)}(1;2;3;4)^{abcd} \; :A_a(1)A_b(2)A_c(3)A_d(4): \quad , \tag{7.129}$$

[6]Para simplificar a notação, não estamos escrevendo o sub-índice indicando a ordem das distribuições de transição; ele se evidencia pelo número de argumentos das distribuições mencionadas. Também, denotamos as coordenadas x_j fazendo referência apenas ao seu índice j.

com:

$$\tilde{t}^{(LL)}(1;2;3;4)^{abcd} = t^{(LL)}(1;2;3;4)^{abcd} + C^{abcd}\delta(1-4)\delta(2-4)\delta(3-4)\,. \tag{7.130}$$

No espaço dos momentos, definindo os momentos p_1, p_2 e p_3 conjugados, respectivamente, às coordenadas relativas $x_1 - x_4$, $x_2 - x_4$ e $x_3 - x_4$, a distribuição de transição é:

$$\hat{t}^{(LL)}(p_1;p_2;p_3)^{abcd} + C^{abcd} \quad . \tag{7.131}$$

Além disso, como as distribuições de transição hão de ser simétricas em seus argumentos, C^{abcd} deve ser simétrico em seus índices, e ter portanto a estrutura:

$$C^{abcd} = C(g^{ab}g^{cd} + g^{ac}g^{bd} + g^{ad}g^{bc}) \quad , \quad C \in \mathbb{R} \quad . \tag{7.132}$$

A substituição dessa expressão na Eq. (7.131) leva, via as identidades-Cg mostradas na Eq. (7.21), à condição:

$$p_{1a}\hat{t}^{(LL)}(p_1;p_2;p_3)^{abcd} + C(p_1^b g^{cd} + p_1^c g^{bd} + p_1^d g^{bc}) = 0 \quad . \tag{7.133}$$

Derivando em relação a p_{1r}:

$$\hat{t}^{(LL)}(p_1;p_2;p_3)^{rbcd} + p_{1a}\frac{\partial}{\partial p_{1r}}\hat{t}^{(LL)}(p_1;p_2;p_3)^{abcd} + C(g^{br}g^{cd} + g^{cr}g^{bd} + g^{dr}g^{bc}) = 0 \quad . \tag{7.134}$$

Tomando então o limite $p_1 \to 0$ na Eq. (7.134), e supondo que $\hat{t}^{(LL)}$ corresponda à solução central, satisfazendo portanto à Eq. (4.152) com $q_{+,\perp} = 0$, ter-se-á que os dois primeiros termos da referida equação se anulam, sendo forçoso concluir que seja $C = 0$. Decorre disto que a constante de normalização na interação luz-luz é nula, ou seja, que o termo de auto-interação dos fótons $:A^4:$ é proibido pela invariância de gauge quântica. É importante salientar que o limite considerado não é perigoso na quarta ordem, pois todas as distribuições numéricas («linhas internas») correspondem ao férmion massivo, caso em que não há divergências infra-vermelhas [202]. O argumento, contudo, é válido para qualquer ordem se assumirmos que tal limite pode ser efetuado sem dificuldades.

7.7 Normalizabilidade

Para o estudo da normalizabilidade da QED no plano nulo, limitaremos nossa atenção somente àquelas distribuições obtidas com a parte covariante da distribuição de comutação do campo da radiação; em outras palavras, o estudo que aqui fazemos diz respeito à normalizabilidade da matriz de espalhamento física. Para encontrar, pois, a ordem singular de uma distribuição de transição geral, consideremos, como na Seç. 5.5, uma distribuição causal da ordem $n = r + s$, obtida pelo produto das distribuições de transição $T_r^1(x_1;\ldots;x_r)$ e $T_s^2(y_1;\ldots;y_s)$, e no qual se há efetuado l_p contrações de fóton e l_f contrações de férmion. A

parte numérica de uma tal distribuição será:

$$d(x_1;\ldots;x_r;y_1;\ldots;y_s) \sim t_1(x_1;\ldots;x_r)\prod_{j=1}^{l_p} D_{ab+}(x_{r_j}-y_{s_j})\prod_{m=1}^{l_f} S_+(x_{r_m}-y_{s_m})t_2(y_1;\ldots;y_s)\ . \tag{7.135}$$

A notação é a mesma que definimos na Seç. 5.5. O símbolo «∼», por outro lado, é colocado em lugar do símbolo da igualdade devido a que desconsideraremos fatores numéricos irrelevantes. Introduzindo as coordenadas relativas

$$\xi_j := x_j - x_r \quad (j=1,\ldots,r-1) \quad , \quad \lambda_j := y_j - y_s \quad (j=1,\ldots,s-1) \quad , \quad \lambda := x_r - y_s \quad , \tag{7.136}$$

e os vetores $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1;\ldots;\xi_{r-1})$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1;\ldots;\lambda_{s-1})$, a Eq. (7.135) se reescreve:

$$d(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\lambda};\lambda) \sim t_1(\boldsymbol{\xi})\prod_{j=1}^{l_p} D_{ab+}(\xi_{r_j}-\lambda_{s_j}+\lambda)\prod_{m=1}^{l_f} S_+(\xi_{r_m}-\lambda_{r_m}+\lambda)t_2(\boldsymbol{\lambda}) \quad . \tag{7.137}$$

A transformação de Fourier leva essa distribuição ao espaço dos momentos:

$$\hat{d}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q};q) \sim \int d^{4(r-1)}\boldsymbol{\xi} d^{4(s-1)}\boldsymbol{\lambda} d^4\lambda\, d(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\lambda};\lambda) e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\xi}+i\boldsymbol{q}\boldsymbol{\lambda}+iq\lambda} \quad . \tag{7.138}$$

Substituindo a Eq. (7.137) e escrevendo

$$D_{ab+}(x) \sim \int d^4h \widehat{D}_{ab+}(h)e^{-ihx} \quad , \quad S_+(x) \sim \int d^4k \widehat{S}_+(k)e^{-ikx} \quad , \tag{7.139}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\hat{d}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q};q) \sim{}& \int \prod_{j,m} d^4k_m d^4h_j \widehat{D}_{ab+}(h_j)\widehat{S}_+(k_m)\left[\int d^{4(r-1)}\boldsymbol{\xi} t_1(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\xi}-i\left(\sum_m k_m\xi_{r_m}+\sum_j h_j\xi_{r_j}\right)}\right] \\ &\times\left[\int d^{4(s-1)}\boldsymbol{\lambda} t_2(\boldsymbol{\lambda}) e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{\lambda}-i\left(\sum_m k_m\lambda_{s_m}+\sum_j h_j\lambda_{s_j}\right)}\right]\left[\int d^4\lambda e^{i\left(q-\sum_m k_m-\sum_j h_j\right)}\right] \\ \sim{}& \int \prod_{j,m} d^4k_m d^4h_j \widehat{D}_{ab+}(h_j)\widehat{S}_+(k_m)\hat{t}_1(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}_r-\boldsymbol{h}_r)\hat{t}_2(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{h}_s)\delta\left[q-\left(\sum_j h_j+\sum_m k_m\right)\right] ,\end{aligned} \tag{7.140}$$

com:

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}_r-\boldsymbol{h}_r)_j = \begin{cases} p_j - k_{r_j} - h_{r_j} & \text{se } \xi_{r_j} \text{ é um ponto de contração} \\ p_j & \text{se } \xi_{r_j} \text{ não é um ponto de contração} \end{cases} ,$$

e semelhantemente para $\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{h}_s$. Redefinindo as variáveis de integração por escalamento de suas quatro componentes: $\widetilde{k}_m = sk_m$ e $\widetilde{h}_j = sh_j$, a Eq. (7.140) torna-se:

$$\hat{d}(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q};q) \sim s^{-4(l_p+l_f)} \int \prod_{j,m} d^4\widetilde{k}_m d^4\widetilde{h}_j \widehat{D}_{ab+}\left(\frac{\widetilde{h}_j}{s}\right)\widehat{S}_+\left(\frac{\widetilde{k}_m}{s}\right)$$

$$\times \hat{t}_1\left(\boldsymbol{p}-\frac{\widetilde{\boldsymbol{k}}_r+\widetilde{\boldsymbol{h}}_r}{s}\right)\hat{t}_2\left(\boldsymbol{q}+\frac{\widetilde{\boldsymbol{k}}_s+\widetilde{\boldsymbol{h}}_s}{s}\right)\delta\left[1-\frac{1}{s}\left(\sum_j \widetilde{h}_j+\sum_m \widetilde{k}_m\right)\right] \quad . \tag{7.141}$$

Como já adiantamos, de acordo com o Cap. 5, para todos os propósitos físicos a distribuição de comutação do campo de radiação na Eq. (7.141) pode ser tomada como sendo:

$$\widehat{D}_{ab}(p) = g_{ab}\widehat{D}_0(p) \quad , \tag{7.142}$$

com $\widehat{D}_0(p)$ a distribuição de Jordan-Pauli de massa nula. Com essa substituição, a Eq. (7.141) é:

$$\begin{aligned}\hat{d}_0(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q};q) \sim & s^{-4(l_p+l_f)}\int\prod_{j,m} d^4\widetilde{k}_m d^4\widetilde{h}_j \widehat{D}_{0+}\left(\frac{\widetilde{h}_j}{s}\right)\widehat{S}_+\left(\frac{\widetilde{k}_m}{s}\right)\\ & \times \hat{t}_1\left(\boldsymbol{p}-\frac{\widetilde{\boldsymbol{k}}_r+\widetilde{\boldsymbol{h}}_r}{s}\right)\hat{t}_2\left(\boldsymbol{q}+\frac{\widetilde{\boldsymbol{k}}_s+\widetilde{\boldsymbol{h}}_s}{s}\right)\delta\left[q-\frac{1}{s}\left(\sum_j \widetilde{h}_j+\sum_m \widetilde{k}_m\right)\right] \quad . \end{aligned}\tag{7.143}$$

Para obter a ordem singular no eixo x^- dessa distribuição causal, temos de avaliar o limite:

$$\lim_{s\to 0} s^{\omega_-}\hat{d}_0\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*};\frac{\boldsymbol{q}}{s_*};\frac{q}{s_*}\right) \quad ; \quad \frac{p}{s_*}\equiv\left(\frac{p_+}{s};\frac{p_\perp}{s};p_-\right) \quad . \tag{7.144}$$

Com a Eq. (7.143):

$$\begin{aligned}\hat{d}_0\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*};\frac{\boldsymbol{q}}{s_*};\frac{q}{s_*}\right) \sim & \; s^{-4(l_p+l_f)}\int\prod_{j,m} d^4\widetilde{k}_m d^4\widetilde{h}_j \widehat{D}_{0+}\left(\frac{\widetilde{h}_j}{s}\right)\widehat{S}_+\left(\frac{\widetilde{k}_m}{s}\right)\\ & \times \hat{t}_1\left(\frac{\boldsymbol{p}}{s_*}-\frac{\widetilde{\boldsymbol{k}}_r+\widetilde{\boldsymbol{h}}_r}{s}\right)\hat{t}_2\left(\frac{\boldsymbol{q}}{s_*}+\frac{\widetilde{\boldsymbol{k}}_s+\widetilde{\boldsymbol{h}}_s}{s}\right)\delta\left[\frac{q}{s_*}-\frac{1}{s}\left(\sum_j \widetilde{h}_j+\sum_m \widetilde{k}_m\right)\right] \quad . \end{aligned}\tag{7.145}$$

Assim, realizando exatamente o mesmo procedimento utilizado na prova do Lema 5.1, é possível provar que:

Lema 7.1: *A ordem singular no eixo x^- de uma distribuição causal geral da QED, sem levar em conta os termos de gauge da distribuição de comutação do campo da radiação, é:*

$$\omega_- = 4 - N - \frac{3}{2}M \quad , \tag{7.146}$$

com N o número de operadores de campo de radiação externos e M o de operadores de campo fermiônico.

Concluímos que o operador de espalhamento físico da QED no plano nulo é normalizável. E ainda mais: O operador de espalhamento físico da QED no plano nulo é invariante de Lorentz. A essa conclusão é possível chegar pelo seguinte argumento: Uma vez que os termos de gauge na distribuição de comutação do campo da radiação não contribuem ao operador de espalhamento físico, as distribuições causais que o determinam serão sempre covariantes

de Lorentz e o Teorema 4.5 se aplica. Este fato se relaciona com o que encontramos na Seç. 6.2: A invariância de gauge é uma propriedade crucial para que a invariância relativísitica seja uma simetria no subespaço físico.

Mencionaremos finalmente que, em concordância com a Eq. (7.146), as únicas possibilidades para ter-se a ordem singular $\omega_- \geq 0$ são as que se mostram na Tab. 7.1. Como pode-se observar, qualquer termo de auto-interação fermiônica é impossível, enquanto que, como vimos na Seç. 7.6, um termo de auto-interação para o fóton é igualmente inadmissível, pois o termo de normalização no espalhamento luz-luz (última linha da tabela) deve ser tomado nulo para obedecer à invariância de gauge quântica. Como isto esgota todas as possibilidades, não haverá outros termos de interação gerados a nenhuma ordem. Finalmente, na terceira e sexta linha afirmamos que as correspondentes distribuições são nulas devido ao teorema de Furry [208]; este teorema estabelece que todas as distribuições contendo um número ímpar de campos fotônicos externos e nenhum fermiônico são nulas, e pode ser provado de forma simples como consequência da invariância da QED sob transformações de conjugação da carga elétrica [107].

N	M	ω_-	Processo
0	0	4	Transição vazio-vazio
0	2	1	Auto-energia do elétron
1	0	3	$= 0$ por teorema de Furry
1	2	0	Função de vértice
2	0	2	Polarização do vácuo
3	0	1	$= 0$ por teorema de Furry
4	0	0	Espalhamento luz-luz

Tabela 7.1: Distribuições com ordem singular não-negativa.

7.8 Identidades de Ward-Takahashi

Nesta última seção, faremos um estudo aprofundado das identidades de Ward-Takahashi, e veremos que elas se derivam das identidades-Cg da QED apresentadas na Eq. (7.21). Dessa forma, desejamos generalizar alguns resultados obtidos nas seções precedentes, assim como formalizar alguns comentários nelas introduzidos.

Em primeiro lugar, provaremos que as identidades-Cg podem de fato ser satisfeitas com uma escolha adequada dos termos de normalização. Note-se, para começar, que a distribuição de um ponto, T_1, satisfaz trivialmente à Eq. (7.21), pois foi construída de forma a fazê-lo [vide a Seç. 7.1]. Assumamos, então, com a finalidade de aplicar o princípio de indução matemática completa, que:

$$\forall m \in I_{n-1} : \ \forall l \in I_m : \ \partial_a^{x_l} T_l^a(x_1; \cdots; x_m) = 0 \quad . \tag{7.147}$$

No procedimento indutivo, para calcular a distribuição de transição da ordem n, precisamos

primeiramente construir as distribuições subsidiárias:

$$R'_n(Y;x_n) = \sum_{\substack{X\cup X'=Y\\ X\cap X'=\emptyset\\ X\neq\emptyset}} T(X';x_n)\widetilde{T}(X) \quad , \quad A'_n(Y;x_n) = \sum_{\substack{X\cup X'=Y\\ X\cap X'=\emptyset\\ X\neq\emptyset}} \widetilde{T}(X)T(X';x_n) \quad . \tag{7.148}$$

Lembrando que a distribuição $\widetilde{T}_m$ correspondente à funcional inversa $S(g)^{-1}$ é dada pela fórmula

$$\widetilde{T}_m(X) = \sum_{r=1}^{m}(-1)^r \sum_{\substack{X_1\cup\cdots\cup X_r=X\\ X_j\cap X_k=\emptyset,\forall j\neq k\\ X_1,\cdots,X_r\neq\emptyset}} T(X_1)\cdots T(X_r) \quad , \tag{7.149}$$

podemos reconhecer que as distribuições subsidiárias somente contêm distribuições T_m com $m \in I_{n-1}$ tais que os argumentos de todas elas são disjuntos. Por esse motivo, se escrevermos, seguindo a Eq. (7.18),

$$R'_n(x_1;\cdots;x_n) = :R'^a_l(x_1;\cdots;x_n)A_a(x_l): + \cdots \quad , \tag{7.150}$$

em que, nem R'^a_l, nem os pontos suspensivos incluem um outro operador de campo de gauge no ponto x_l, $A_a(x_l)$, a derivação só afetará a uma distribuição T_m por vez (àquela que, na partição particular de $(Y;x_n)$, contenha ao ponto x_l), e então a hipótese indutiva da Eq. (7.147) implica imediatamente que –escrevemos já o resultado igualmente válido para a distribuição subsidiária avançada–:

$$\forall l \in I_n : \ \partial^{x_l}_a R'^a_l(x_1;\cdots;x_n) = 0 \quad \wedge \quad \partial^{x_l}_a A'^a_l(x_1;\cdots;x_n) = 0 \quad , \tag{7.151}$$

donde decorre que o mesmo pode ser afirmado da distribuição causal da ordem n:

$$\forall l \in I_n : \ \partial^{x_l}_a D^a_l(x_1;\cdots;x_n) = 0 \quad . \tag{7.152}$$

Assim, como $T_n = R_n - R'_n$, devido à Eq. (7.151) ter-se-á que, como desejado, $\partial^{x_l}_a T^a_l = 0$ se e somente se $\partial^{x_l}_a R^a_l = 0$, isto é, se a propriedade da Eq. (7.152) é mantida na divisão da distribuição causal. Ora, por sua própria definição, a distribuição retardada é $R^a_l = D^a_l$ em $\Gamma^+_n \setminus E^-_n$, em que estamos denotando:

$$E^-_n := \left\{(x_1;\cdots;x_{n-1};x_n) \in \Gamma^+_n \mid \forall j \in I_{n-1} : \ x_j \in \left\{x_n + \mathbb{R}e^-\right\}\right\} \quad , \tag{7.153}$$

e $R^a_l = 0$ em $\mathbb{R}^{4n} \setminus \Gamma^+_n$. Devido à Eq. (7.152), portanto:

$$\forall (x_1;\cdots;x_n) \in \mathbb{R}^{4n} \setminus E^-_n : \ \partial^{x_l}_a R^a_l(x_1;\cdots;x_n) = 0 \quad . \tag{7.154}$$

E disto:

$$\text{supp}\left(\partial^{x_l}_a R^a_l\right) \subseteq E^-_n \quad \Rightarrow \quad \text{supp}\left(\partial^{x_l}_a T^a_l\right) \subseteq E^-_n \quad . \tag{7.155}$$

Este resultado ainda pode ser mais especializado escrevendo as distribuições T^a_l como a

soma das distribuições $T^a_{l,M}$ contendo M operadores de campo fermiônico externos:

$$T^a_l = \sum_{\substack{M\in I_{2n,0}\\ M\text{ par}}} T^a_{l,M} \quad \Rightarrow \quad \forall M \in \{0;2;\cdots;2n\} : \text{ supp}\left(\partial^{x_l}_a T^a_{l,M}\right) \subseteq E^-_n \quad . \tag{7.156}$$

É preciso, para continuar, nos determos em estudar se em $\partial^{x_l}_a T^a_{l,M}$ haverá ou não alguma derivada agindo sobre um operador de campo fermiônico. Em primeiro lugar, caso houvesse um operador de campo fermiônico no ponto x_l, quer $\psi(x_l)$, quer $\overline{\psi}(x_l)$, necessariamente deveria haver também uma distribuição $S^\bullet(x_l - x_j)$, com $\bullet \in \{\text{ret};\text{av};F\}$; efetivamente, como o ponto x_l é um ponto em que está presente um campo de fóton externo [vide a Eq. (7.18)], se ao menos um dos campos fermiônicos não estivesse contraído, então a distribuição seria desconectada. Mas o suporte do produto tensorial de duas distribuições é o produto cartesiano dos seus suportes individuais, ou seja, os suportes das partes desconectadas são independentes, contrariando ao Teorema 4.3, segundo o qual o suporte da distribuição causal D_n está contido no cone de luz do ponto x_n; logo, se a distribuição causal não pode ser desconectada, tampouco a distribuição retardada pode sê-lo, e então as distribuições de transição que correspondem a tais casos se reduzem apenas a $-R'_n$, que já satisfaz às identidades de Ward-Takahashi [vide Eq. (7.151)]. Segue disso que os casos que requerem atenção são aqueles que correspondem a distribuições conectadas. Como as distribuições $S^\bullet(x_l - x_j)$ podem conter termos instantâneos, dividimo-as da seguinte forma:

$$S^\bullet(x_l - x_j) = S^\bullet_c(x_l - x_j) + S^\bullet_i(x_l - x_j) \quad , \tag{7.157}$$

em que S_c denota a parte covariante e S_i, a instantânea. Assim sendo, e como as distribuições $S^\bullet_c$ são funções de Green para a equação de Dirac, ter-se-á sempre que:

$$\begin{aligned} \partial^{x_l}_a \left(\overline{\psi}(x_l)\gamma^a S^\bullet_c(x_l - x_j)\right) &= i\overline{\psi}(x_l)\delta(x_l - x_j) \quad , \\ \partial^{x_l}_a \left(S^\bullet_c(x_j - x_l)\gamma^a \psi(x_l)\right) &= -i\delta(x_l - x_j)\psi(x_l) \quad . \end{aligned} \tag{7.158}$$

Dessa forma, as equações satisfeitas pelo operador de campo de Dirac e pelas distribuições covariantes que lhe são associadas permitem sempre eliminar as derivadas que agem sobre o campo de Dirac. Ademais, no processo indutivo da TPC, a distribuição causal da ordem n é construída com as distribuições T_m com $m \in I_{n-1}$, as quais já são normalizadas. Portanto, a parte instantânea $S^\bullet_i(x_l - x_j)$ só pode estar presente se é gerada no procedimento de divisão em relação ao novo ponto adicionado na ordem n, x_n, ou seja, se o próprio ponto x_l é x_n, ou se está diretamente conectado a ele. Isto é verdade quer haja um operador de campo fermiônico no ponto x_n ou não; em qualquer caso, todos os termos instantâneos em T_n podem ser gerados apenas na divisão da distribuição causal D_n em relação ao ponto x_n. Temos visto, no entanto, que os termos instantâneos que se geram em $S^\bullet$ podem ser cancelados por uma escolha adequada dos termos de normalização. O mesmo não ocorre com os termos de gauge da distribuição de comutação do campo de radiação no gauge do plano nulo, mas isso é irrelevante no presente caso, pois desde que as identidades-Cg se aplicam sempre

que haja um campo de fóton externo, $A_a(x_l)$, é absolutamente impossível que haja alguma distribuição associada ao fóton conetando o ponto x_l com o resto da distribuição: Todas as distribuições que conectam o ponto x_l são associadas ao férmion.

Por esses motivos, uma vez considerados os termos de normalização que eliminam $S_i^\bullet$ quando x_l seja x_n ou esteja conectado a ele, já não será possível o surgimento de nenhuma derivada de campo fermiônico externo, de forma que, pela Eq. (7.156), a forma geral para a divergência de $T^a_{l,2f}$ é, sem escrever os possíveis campos externos de fóton:

$$\partial_a^{x_l} T^a_{l,2f}(x_1;\cdots;x_n) = \sum_G :\overline{\psi}(x_{i_1})\cdots\overline{\psi}(x_{i_f})\left(\sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-(G)\rfloor+1} C_b^G(x^-)D^b_{+,\perp}\delta(x^{+,\perp})\right)\psi(x_{j_1})\cdots\psi(x_{j_f}):\,, \tag{7.159}$$

com as distribuições numéricas $C_b^G(x^-) \equiv C_b^{G1}(x_1^- - x_n^-)\cdots C_b^{G(n-1)}(x_{n-1}^- - x_n^-)$ e $\delta(x^{+,\perp}) \equiv \delta(x_1^{+,\perp} - x_n^{+,\perp})\cdots\delta(x_{n-1}^{+,\perp} - x_n^{+,\perp})$, e b um multi-índice. A soma é estendida a todas as distribuições G com $M = 2f$ férmions externos e N fótons, um deles no ponto x_l. Porém, exatamente pelo fato de já termos eliminado $S_i^\bullet(x_j - x_n)$ ($l = j$ ou $l = n$), em $T^a_{l,2f}$ não pode haver mais termos não covariantes provindo de distribuições fermiônicas, mas todos os possíveis, já o dissemos, serão os termos de gauge caso seja usado o gauge do plano nulo –e nenhum deles incluirá o ponto x_l–.

Neste ponto, o comentário feito acima adota uma relevância capital: Como o ponto x_l só pode estar conectado com o resto da distribuição por distribuições associadas ao férmion, na derivação em relação a x_l não tem importância qual seja a distribuição considerada para o fóton, pois o ponto x_l nunca será seu argumento. É claro, $\partial_a^{x_l} T^a_{l,2f}$ pode em geral ter diferente expressão no gauge do plano nulo ou na construção covariante, mas se é igual a zero em um caso, também o será no outro, pois a parte da distribuição que depende de x_l é igual em ambos os casos. Podemos, portanto, concluir que, embora as anomalias, caso existissem, seriam diferentes, as identidades-Cg são satisfeitas no gauge do plano nulo se, e somente se, também o são na construção covariante. Claro, não devemos entender isto senão literalmente: Ainda com a equivalência da regência das identidades-Cg, não podemos afirmar por este argumento a igualdade das diversas distribuições de transição da QED no plano nulo e as da dinâmica instantânea.

Logo, bastará verificar a validade das identidades de Ward-Takahashi para a teoria com distribuição de comutação covariante do campo da radiação. É mister lembrar que somente elas sendo satisfeitas é que podemos afirmar com total certeza que a QED é uma teoria de gauge quântica, e assim poderemos concluir que, caso desejássemos usar o campo de radiação quantizado sob a condição de gauge do plano nulo, embora as distribuições de transição possam ser não covariantes devido à possível presença de termos de gauge, os elementos de matriz do operador de espalhamento no subespaço físico serão covariantes pela construção feita no Cap. 6. Dessarte, na Eq. (7.159) devemos considerar apenas termos

covariantes, e portanto ela deve ser reduzida a:

$$\partial_a^{x_l} T^a_{l,2f}(x_1;\cdots;x_n) = \sum_G \,:\overline{\psi}(x_{i_1})\cdots\overline{\psi}(x_{i_f})\left(\sum_{|b|=0}^{\lfloor\omega_-(G)\rfloor+1} C_b^G D^b\delta(x)\right)\psi(x_{j_1})\cdots\psi(x_{j_f}):\quad . \tag{7.160}$$

Por outro lado, vimos no Cap. 4 que os únicos termos na distribuição de transição cuja ordem singular pode ser maior que a da distribuição causal têm suporte em E_n^-, e são portanto termos de normalização que podem ser imediatamente eliminados. Donde basta considerar na Eq. (7.160) $\omega_-(G)$ correspondente à distribuição causal $D^{Ga}_{l,2f}$, dada na Eq. (7.146). Daí vemos que os casos que precisam de análise, isto é, aqueles com $\omega_- \geq -1$, são os mostrados na Tabela 7.2.

N	M	ω_-	Processo
2	2	-1	Espalhamento de Compton
2	0	2	Polarização do vácuo
4	0	0	Espalhamento luz-luz
1	2	0	Função de vértice e auto-energia

Tabela 7.2: Distribuições com ordem singular $\omega_- \geq -1$.

A partir desse ponto o percurso da análise é o mesmo que o mostrado na Ref. [107]. Por completeza, o comentamos brevemente.

Espalhamento de Compton. Seja $t^{(C)}(x_i;x_j;x_{n-1};x_n;\cdots)^{ab}$ a distribuição numérica correspondente ao espalhamento de Compton para o caso em que os campos fermiônicos estão nos pontos x_i e x_j, e os campos de radiação, nos x_{n-1} e x_n. A Eq. (7.160) se lê:

$$\partial_{x_n a}\left(\sum_{i,j}\,:\overline{\psi}(x_i)t^{(C)}(x_i;x_j;x_{n-1};x_n;\cdots)^{ab}\psi(x_j):\right) = \sum_{i,j} C_{ij}\,:\overline{\psi}(x_i)\gamma^b\psi(x_j):\,\delta\quad . \tag{7.161}$$

No entanto, na distribuição de transição, cada termo entre os parênteses do lado esquerdo da Eq. (7.161) está multiplicado pelo produto de Wick $:A_a(x_n)A_b(x_{n-1}):$. Como esse último produto é par perante a transformação de conjugação da carga elétrica, enquanto que a distribuição de transição completa deve sê-lo também –pois ela é uma simetria experimental da QED–, também o lado esquerdo da Eq. (7.161) tem de sê-lo. No lado direito, por outro lado, o suporte da distribuição delta de Dirac implica que os argumentos x_i e x_j sejam os mesmos, do qual reconhecemos que ele é uma corrente elétrica, ímpar frente à conjugação de carga. Vê-se daqui que a única possibilidade é que todos os coeficientes C_{ij} sejam nulos, e a identidade de Ward-Takahashi é satisfeita sem requerer normalização –que, digamos de passo, só seria possível com o indesejável efeito de aumentar a ordem singular da distribuição de transição, pois esta tem $\omega_- = -1$–.

Um exemplo explícito pode ser visto na Seç.7.3.2: Embora a distribuição da Eq. (7.57)

pareceria não satisfazer à identidade-Cg, como de fato não o faz por si só, é necessário lembrar que há um segundo termo, correspondente à corrente elétrica na direção oposta [vide a Eq. (7.52)]; a soma das duas distribuições, invariante por conjugação de carga elétrica, já satisfaz à identidade desejada.

Polarização do vácuo. A denotamos por $\Pi^{ba}(x_1; x_2; \cdots ; x_n)$, em que os campos da radiação externos estão nas coordenadas x_1 e x_2 com índices b e a, respectivamente. A forma mais geral que pode ter sua divergência na teoria covariante é, segundo a Eq. (7.160):

$$\partial_{x_1 b}\Pi^{ba}(x_1; x_2; \cdots) = \left(\sum_{i,j,k} C_{ijk}\partial^c_{x_i}\partial_{x_j c}\partial^a_{x_k} + \sum_k L_k \partial^a_{x_k}\right)\delta \quad . \tag{7.162}$$

Essa forma geral deve ser restrita pelas simetrias da distribuição Π^{ba}. Em primeiro lugar, o fato de que, tomando a divergência da Eq. (7.162) em relação à coordenada x_2, o resultado há de ser simétrico em relação às coordenadas x_1 e x_2: $\partial_{x_2 a}\partial_{x_1 b}\Pi^{ba}(x_1; x_2; \cdots) = \partial_{x_2 a}\partial_{x_1 b}\Pi^{ab}(x_2; x_1; \cdots)$. Em segundo lugar, o fato de que, por se tratar de uma distribuição de transição, deve ser simétrica em todos seus pontos internos $x_3, \ldots, x_n$. Mantendo na Eq. (7.162) somente os termos que respeitam a essas simetrias, obtemos que a forma geral antes dada deve ser reduzida a:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1 b}\Pi^{ba}(x_1; x_2; \cdots) = \Bigg(& C_1 \sum_{i=3}^{n} \partial^c_{x_i}\partial_{x_i c}\partial^a_{x_1} + C_2 \sum_{i=3}^{n} \partial^c_{x_i}\partial_{x_1 c}\partial^a_{x_i} + C_3\partial^c_{x_1}\partial_{x_2 c}\partial^a_{x_2} + C_4\partial^c_{x_2}\partial_{x_2 c}\partial^a_{x_1} \\
& + (C_3 + C_4)\partial^c_{x_1}\partial_{x_1 c}\partial^a_{x_1} + C_5\partial^c_{x_1}\partial_{x_1 c}\partial^a_{x_2} + C_6\partial^c_{x_1}\partial_{x_2 c}\partial^a_{x_1} + C_7\partial^a_{x_1}\Bigg)\delta \\
= \partial_{x_1 b}\Bigg(& g^{ab}C_1 \sum_{i=3}^{n} \partial^c_{x_i}\partial_{x_i c} + C_2 \sum_{i=3}^{n} \partial^b_{x_i}\partial^a_{x_i} + C_3(\partial^b_{x_1}\partial^a_{x_1} + \partial^b_{x_2}\partial^a_{x_2}) + C_4 g^{ab}(\Box_{x_1} + \Box_{x_2}) \\
& + C_5\partial^b_{x_1}\partial^a_{x_2} + C_6\partial^b_{x_2}\partial^a_{x_1} + C_7 g^{ab}\Bigg)\delta \quad .
\end{aligned} \tag{7.163}$$

Dessa forma, vemos que $\partial_{x_1 b}\left(\Pi^{ba} - (\cdots)\right) = 0$, em que «$(\cdots)$» denota a expressão entre parênteses na equação anterior. Como $(\cdots)$ tem suporte na origem das coordenadas, este tem a forma de um termo de normalização. Segue disto que os termos de normalização da polarização do vácuo podem sempre ser escolhidos de forma a satisfazer à identidade-Cg, que reconhecemos como sendo uma das identidades de Ward-Takahashi, a qual, no caso, exprime a transversalidade dessa distribuição em relação ao impulso do fóton externo.

Espalhamento luz-luz. Seja $t^{(LL)}(x_1; x_2; x_3; x_4; \cdots)^{abcd}$ a distribuição numérica desse processo, em que os campos de fóton externos se localizam nos pontos x_1, x_2, x_3 e x_4. Segundo a Eq. (7.160), ter-se-á em geral que:

$$\partial_{x_1 a}t^{(LL)}(x_1; x_2; x_3; x_4)^{abcd} = \sum_{i=1}^{n}\left(C_{k1}g^{cd}\partial^b_{x_k} + C_{k2}g^{bd}\partial^c_{x_k} + C_{k3}g^{bc}\partial^d_{x_k}\right)\delta \quad . \tag{7.164}$$

Dessa vez os termos do lado direito têm de ser restringidos pelo fato de que a distribuição $\partial_{x_1 a}\partial_{x_2 b}\partial_{x_3 c}\partial_{x_4 d}t^{(LL)}(x_1;x_2;x_3;x_4;\cdots)^{abcd}$ tem de ser simétrica em relação às coordenadas x_1, x_2, x_3 e x_4, assim como que $t^{(LL)}(x_1;x_2;x_3;x_4;\cdots)^{abcd}$ é simétrica em relação aos pontos internos $x_5,\ldots,x_n$. Isto leva a reduzir a Eq. (7.164) à forma mais simples:

$$\begin{aligned}\partial_{x_1 a}t^{(LL)}(x_1;x_2;x_3;x_4)^{abcd} &= C\left(g^{cd}\partial^b_{x_1}+g^{bd}\partial_{x_1^c}+g^{bc}\partial^d_{x_1}\right)\delta \\ &= C\partial_{x_1 a}\left(g^{ab}g^{cd}+g^{ac}g^{bd}+g^{ad}g^{bc}\right)\delta \quad , \end{aligned} \tag{7.165}$$

do que ter-se-á que $\partial_{x_1 a}\left(t^{(LL)abcd}-(\cdots)^{abcd}\right)=0$, e como $(\cdots)^{abcd}$ tem suporte na origem, concluímos que a identidade-Cg (de Ward-Takahashi) para o espalhamento luz-luz pode sempre ser satisfeita. Como provamos na Seç. 7.6, essa identidade implica que não há termos de auto-interação de fótons.

Função de vértice e auto-energia. A quarta linha da Tabela 7.2 inclui aquelas distribuições de transição em que estão presentes dois operadores de campo fermiônico externos e um do campo de radiação. Assumiremos convencionalmente –e, evidentemente, sem perda de generalidade– que o campo de fóton se encontra no ponto x_n. Há então três tipos de distribuições que devem ser somadas no lado esquerdo da Eq. (7.160):

1) Aquelas em que os campos fermiônicos se encontram em pontos diferentes de x_n e diferentes entre si. Elas definem a distribuição chamada «função de vértice»:

$$:\overline{\psi}(x_i)\Lambda^a(x_n;x_i;x_j;\cdots)\psi(x_j)A_a(x_n): \quad . \tag{7.166}$$

2) Aquelas em que os campos fermiônicos se encontram em pontos diferentes de x_n, mas iguais entre si. Elas contêm a já estudada polarização do vácuo:

$$:\overline{\psi}(x_i)\Pi^{ac}(x_n;x_j;\cdots)D^F_{cb}(x_j-x_i)\gamma^b\psi(x_i)A_a(x_n): \quad . \tag{7.167}$$

3) Aquelas em que um dos campos fermiônicos –quer $\overline{\psi}$, quer ψ, e os dois casos devem ser levados em conta– se encontra no ponto x_n, enquanto que o outro em um ponto diferente. Nesse tipo de distribuições aparece a auto-energia do férmion:

$$\begin{aligned}&:\overline{\psi}(x_n)\gamma^a S^F(x_n-x_i)\Sigma(x_i;x_j;\cdots)\psi(x_j)A_a(x_n): \\ &+\ :\overline{\psi}(x_i)\Sigma(x_i;x_j;\cdots)S^F(x_j-x_n)\gamma^a\psi(x_n)A_a(x_n): \quad .\end{aligned} \tag{7.168}$$

A expressão entre os parênteses do lado esquerdo da Eq. (7.160) é então constituída pela soma sobre todos os $i,j\in I_{n-1}$ com $i\neq j$ das distribuições anteriores –sem o operador de campo de radiação–. Porém, quando a derivação agir nas distribuições do tipo da Eq.(7.167), como ela é feita em relação à variável x_n, apenas o tensor de polarização do vácuo será afetado. Assim, se assumirmos que ele já foi normalizado de forma a ser transversal ao momento do fóton (como já mostramos possível), tal termo se anula. Note-se que essa

anulação nada tem a ver com que o gauge do plano nulo esteja ou não sendo usado: A distribuição D^F_{cb} na Eq. (7.167) pode conter termos de gauge ou não; como ela não tem ao ponto x_n por argumento, sua forma explícita é completamente irrelevante nessa discussão. Donde esta identidade-Cg se tornará a identidade de Ward-Takahashi que envolve à função de vértice e a auto-energia do férmion. A Eq. (7.160) é, no caso em questão, e já levando em conta a simetria em relação às variáveis x_i, x_j com $i, j \in I_{n-1}$:

$$\sum_{\substack{i,j\in I_{n-1}\\ i\neq j}} \partial_{x_n a}\Big(:\overline{\psi}(x_i)\Lambda^a(x_n;x_i;x_j;\cdots)\psi(x_j): + :\overline{\psi}(x_n)\gamma^a S^F(x_n-x_i)\Sigma(x_i;x_j;\cdots)\psi(x_j): \\ + :\overline{\psi}(x_i)\Sigma(x_i;x_j;\cdots)S^F(x_j-x_n)\gamma^a\psi(x_n): \Big) \\ = \sum_{\substack{i,j\in I_{n-1}\\ i\neq j}} :\overline{\psi}(x_i)\left(C_0 + C_1\not{\partial}_{x_i} + C_2\not{\partial}_{x_j} + C_n\not{\partial}_{x_n}\right)\delta\ \psi(x_j): \quad . \tag{7.169}$$

Vejamos com detalhes o lado direito dessa equação. Como tratamos com a derivada da distribuição delta de Dirac, é conveniente estudar sua ação sobre uma função de teste f, que assumimos –e bem que não poderia ser de outra forma, pois a teoria causal tem tal propriedade como axioma– invariante sob translações. Temos então que:

$$\sum_{i\in I_{n-1}} \int :\overline{\psi}(x_i)\not{\partial}_{x_i}\delta\ \psi(x_j): \ f(x_1-x_n;\cdots;x_{n-1}-x_n)d^4x_1\cdots d^4x_n \\ = -\sum_{i\in I_{n-1}} :\overline{\psi}(x_n)\gamma^a\psi(x_n): \ (\partial_{x_i a}f)(0) + im(n-1)\ :\overline{\psi}(x_n)\psi(x_n): \ f(0) \quad , \tag{7.170}$$

em que, para obter o segundo termo da segunda linha, usamos a equação de Dirac satisfeita pelo operador de campo $\overline{\psi}$ quando a derivada age sobre ele. Adicionalmente, o primeiro termo da segunda linha pode ser simplificado usando da invariância sob translações:

$$\sum_{i\in I_{n-1}} (\partial_{x_i a}f)(x_1-x_n;\cdots;x_{n-1}-x_n) = -(n-1)\partial_{x_n a}f(x_1-x_n;\cdots;x_{n-1}-x_n) \quad .$$

Por estes motivos, e como a soma estendida a $i, j \in I_{n-1}$ com $i \neq j$ que aparece no lado direito da Eq. (7.169) pode ser escrito como a soma sobre $i, j \in I_{n-1}$ menos a soma sobre $i, j \in I_{n-1}$ com $i = j$, ter-se-á que o lado direito da equação mencionada é, no sentido distribucional, igual a:

$$\sum_{\substack{i,j\in I_{n-1}\\ i\neq j}} :\overline{\psi}(x_i)\left(C'_0 + C\not{\partial}_{x_n}\right)\delta\ \psi(x_j): \quad , \tag{7.171}$$

em que C'_0 inclui todos os termos de massa como os da Eq. (7.170). Finalmente, como o lado esquerdo da Eq. (7.169) é multiplicado por uma campo de radiação na distribuição de transição, ele deve ser ímpar diante da conjugação de carga. Na Eq. (7.169) esta propriedade é satisfeita pelo termo com constante C, mas não o é pelo termo com constante C'_0; é preciso

então que seja $C_0' = 0$. Desta forma, a Eq. (7.171) pode ser escrita como:

$$\sum_{\substack{i,j\in I_{n-1}\\ i\neq j}} \partial_{x_n a} \left(:\overline{\psi}(x_i) C\delta\gamma^a \psi(x_j): \right) \quad , \tag{7.172}$$

que tem a forma de um termo de normalização e pode, portanto, ser absorvida por uma normalização da função de vértice na Eq. (7.169). Se além disto levamos em conta as Eqs. (7.158) para simplificar o lado esquerdo da Eq. (7.169), concluímos que a seguinte identidade pode sempre ser satisfeita:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j\in I_{n-1}\\ i\neq j}} :\overline{\psi}(x_i) \Big[&\partial_{x_n a}\Lambda^a(x_n; x_i; x_j; \cdots) \\ &+ i\delta(x_i - x_n)\Sigma(x_i; x_j; \cdots) - i\delta(x_j - x_n)\Sigma(x_i; x_j; \cdots) \Big] \psi(x_j): = 0 \quad .\end{aligned} \tag{7.173}$$

Aplicando essa identidade distribucional a uma função de teste, então avaliando os elementos de matriz do operador obtido entre pacotes de onda do campo de Dirac, observamos que, como estes últimos são arbitrários (dentro das óbvias restrições), é necessário que a identidade seja satisfeita na forma: $\forall i, j \in I_{n-1}, i \neq j$:

$$\partial_{x_n a}\Lambda^a(x_n; x_i; x_j; \cdots) + i\delta(x_i - x_n)\Sigma(x_i; x_j; \cdots) - i\delta(x_j - x_n)\Sigma(x_i; x_j; \cdots) = 0 \quad . \tag{7.174}$$

Particularmente –o que é suficiente devido à simetria das distribuições de transição em seus argumentos–, colocando $i = 1$ e $j = 2$, e usando a invariância sob translações para fazer em Λ^a uma translação de todos seus argumentos pela quantidade $-x_n$ (ponto em que, lembremos, o fóton se localiza), e em Σ uma pelo valor $-x_2$, obtém-se a seguinte identidade de Ward-Takahashi:

$$\begin{aligned}&\partial_{x_n a}\Lambda^a(x_1 - x_n; x_2 - x_n; \cdots) \\ &+ i\delta(x_1 - x_n)\Sigma(x_1 - x_2; \cdots) - i\delta(x_2 - x_n)\Sigma(x_1 - x_2; \cdots) = 0 \, .\end{aligned} \tag{7.175}$$

Ou ainda, mais conveniente para a posterior aplicação da transformação de Fourier, introduzindo as coordenadas relativas $y_j := x_j - x_n$:

$$-\sum_{j\in I_{n-1}} \partial_{y_j a}\Lambda^a(y_1; y_2; \cdots) + i\delta(y_1)\Sigma(y_1 - y_2; \cdots) - i\delta(y_2)\Sigma(y_1 - y_2; \cdots) = 0 \, . \tag{7.176}$$

Assim, definindo os momentos p_j conjugados a y_j, $j \in I_{n-1}$, a transformação de Fourier permite escrever a identidade de Ward-Takahashi no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in I_{n-1}} p_{ja}\hat{\Lambda}^a(p_1; p_2; \cdots; p_{n-1}) \\ &+ (2\pi)^{-2}\left[\widehat{\Sigma}(-p_2 - \cdots - p_{n-1}; p_3; \cdots; p_{n-1}) - \widehat{\Sigma}(p_1; p_3; \cdots; p_{n-1})\right] = 0 \quad .\end{aligned} \tag{7.177}$$

Desta forma, encontramos de forma explícita todas as restrições que as identidades de Ward-Takahashi impõem sobre as diversas distribuições de transição. Como, o temos provado, todas elas podem ser satisfeitas, podemos concluir finalmente que a QED é uma teoria de gauge quântica[7].

Condições de normalização da auto-energia e da função de vértice. Há ainda um ponto que desejamos estabelecer. Como comentamos no final da Seç. 7.5, a identidade de Ward-Takahashi que relaciona a função de vértice com a auto-energia, faz com que suas normalizações sejam, em certa medida, arbitrárias. Desejamos elaborar esse enunciado. Comecemos por especializar a Eq. (7.177) para $n = 3$:

$$(p_1 + p_2)_a \hat{\Lambda}^a(p_1; p_2) = (2\pi)^{-2} \left[\widehat{\Sigma}(p_1) - \widehat{\Sigma}(-p_2)\right] \quad . \tag{7.178}$$

Como a ordem singular da função de vértice é $\omega_- = 0$ [vide a Tabela 7.1], ela pode ser normalizada segundo:

$$\tilde{\Lambda}^a(p_1; p_2) = \hat{\Lambda}^a(p_1; p_2) + C\gamma^a \quad , \tag{7.179}$$

enquanto que a auto-energia, já o sabemos, admite a normalização:

$$\widetilde{\Sigma}(p) = \widehat{\Sigma}(p) + C_0 + C_1 \not{p} \quad . \tag{7.180}$$

A identidade de Ward-Takahashi implica que, se $\hat{\Lambda}^a$ e $\widehat{\Sigma}$ já a satisfazem, há ainda a liberdade de re-normalizá-las sempre que as constantes C e C_1 se relacionem por:

$$C = (2\pi)^{-2} C_1 \quad . \tag{7.181}$$

A suposição de que existam $\hat{\Lambda}^a$ e $\widehat{\Sigma}$ já satisfazendo à identidade de Ward-Takahashi pode ser fácilmente justificada: Tomando na Eq. (7.178) o limite em que $p_2 \to -p_1$, a dita equação torna-se:

$$\frac{\partial \widehat{\Sigma}(p)}{\partial p_a} = (2\pi)^2 \hat{\Lambda}^a(p; p) \quad . \tag{7.182}$$

Logo vemos que se colocarmos, por exemplo, a condição de normalização da Eq. (7.126), então a equação anterior é verificada escolhendo para a função de vértice a solução central, em que $\hat{\Lambda}^a(0; 0) = 0$. Nela também, como está avaliada fora da camada de massa, não haverá problemas de divergências infra-vermelhas.

Por outro lado, como tínhamos visto, a eleição de C_1 na normalização da auto-energia é complicada, pois embora pareceria influenciar o valor da carga elétrica, é impossível dizê-lo com certeza pelo estudo do propagador completo do elétron, uma vez que a auto-energia possui primeira derivada divergente na camada de massa. Em seu lugar, portanto, devemos lembrar que a carga elétrica é definida em processos de espalhamento de elétrons em um

[7] Em linguagem convencional, diria-se que a QED é uma teoria «sem anomalias», porém o leitor concordará em que, caso existissem anomalias, não haveria certamente motivo para dizer que a teoria é de gauge, como fica implícito pela definição da teoria de gauge que oferecemos no Cap. 6.

campo eletromagnético estático externo (clássico). Formalmente, o problema do campo externo se formula por meio da substituição [209]: $A_a = A_a^{\text{rad}} + A_a^{\text{ext}}$, em que, explicitamente, se separa o operador de campo quantizado de radiação A_a^{rad} do campo externo clássico A_a^{ext}. Semelhante separação permite obter os termos com campo externo clássico, sem por isso perder os processos nos quais o fóton (quântico) aparece intermediariamente. Do ponto de vista pragmático, por isto, basta efetuar os procedimentos usuais e colocar, no final, o campo eletromagnético sem contrair igual ao campo clássico externo.

Prosseguindo, na terceira ordem as mesmas distribuições de transição das Eqs. (7.166), (7.167) e (7.168) aparecem, com a única diferença de que o operador de campo $A_a(x_3)$ é substituído pelo campo clássico $A_a^{\text{ext}}(x_3)$. Vemos, desta forma, que a normalização da polarização do vácuo efetivamente afeta ao valor da carga elétrica; mas como já tínhamos escolhido para ela a solução central, não precisamos mais considerá-la. Ficamos assim com o vértice e a auto-energia do elétron. A distribuição de transição da terceira ordem será:

$$\Big[:\overline{\psi}(x_1)\Lambda^a(x_1;x_2;x_3)\psi(x_2): + :\overline{\psi}(x_3)\gamma^a S^F(x_3-x_1)\Sigma(x_1-x_2)\psi(x_2): \\ + :\overline{\psi}(x_1)\Sigma(x_1-x_2)S^F(x_2-x_3)\gamma^a\psi(x_3): \Big] A_a^{\text{ext}}(x_3) \quad . \tag{7.183}$$

O correspondente termo do operador de espalhamento é obtido integrando nas variáveis x_1, x_2 e x_3 com as funções de comutação adiabática. Para este fim, escolhemos –como na Ref. [107]– uma função $g_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ tal que $g_0(0) = 1$, e consideramos $g(x) = g_0(\epsilon x)$; o limite adiabático consiste então em fazer o parâmetro ϵ tender para zero. Note-se, ademais, que o fato de ser $g_0(0) = 1$ implica que:

$$\int d^4k \hat{g}_0(k) = (2\pi)^2 \quad . \tag{7.184}$$

Se, além do mais, avaliamos o operador assim obtido entre estados de impulso definido p e q, obter-se-á, após a escrituração das diversas distribuições em função de suas transformadas de Fourier e posterior integração nas variáveis x_1, x_2 e x_3 –desconsideramos fatores de 2π por simplicidade–:

$$\overline{u}(p)\int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \hat{g}_0(k_1)\hat{g}_0(k_2)\hat{g}_0(k_3)\Big[\hat{\Lambda}^a(p-\epsilon k_1;-q-\epsilon k_2) \\ + \gamma^a \widehat{S}^F(q+\epsilon(k_1+k_2))\widehat{\Sigma}(q+\epsilon k_2) + \widehat{\Sigma}(p-\epsilon k_1)\widehat{S}^F(p-\epsilon(k_1+k_2))\gamma^a\Big]u(q) \\ \times \hat{A}_a^{\text{ext}}(p-q-\epsilon(k_1+k_2+k_3)) \quad . \tag{7.185}$$

Independentemente do valor dessa integral, no que estamos interessados é em ver o que ocorre quando uma re-normalização é feita. Das Eqs. (7.179) e (7.185) observa-se que a contribuição do termo de normalização da função de vértice é:

$$\overline{u}(p)\int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \hat{g}_0(k_1)\hat{g}_0(k_2)\hat{g}_0(k_3) C\gamma^a u(q)\hat{A}_a^{\text{ext}}(p-q-\epsilon(k_1+k_2+k_3)) \\ = (2\pi)^6 C\overline{u}(p)\gamma^a u(q)\hat{A}_a^{\text{ext}}(p-q) \quad , \tag{7.186}$$

em que temos usado a Eq. (7.184) e tomado o limite adiabático $\epsilon \to 0$. Quanto à contribuição dos termos contendo à auto-energia, nota-se que, devido à relação entre as constantes C_0 e C_1 mostrada na Eq. (7.125), uma re-normalização compatível com a condição de normalização relativa à massa física é dada por:

$$\widetilde{\Sigma}(p) = \widehat{\Sigma}(p) + C_1(\not{p} - m) \quad . \tag{7.187}$$

Escrevendo, ademais, a forma explícita do propagador de Feynman do elétron, ter-se-á:

$$\begin{aligned} & C_1(2\pi)^{-2}\overline{u}(p)\int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \hat{g}_0(k_1)\hat{g}_0(k_2)\hat{g}_0(k_3)\hat{A}^{\text{ext}}_a(p-q-\epsilon(k_1+k_2+k_3)) \\ & \times \left[\gamma^a \frac{\not{q} + \epsilon(\not{k}_1+\not{k}_2)+m}{(q+\epsilon(k_1+k_2))^2 - m^2 + i0^+}(\not{q}+\epsilon\not{k}_2 - m)\right. \\ & \left. + (\not{p} - \epsilon\not{k}_1 - m)\frac{\not{p} - \epsilon(\not{k}_1+\not{k}_2)+m}{(p-\epsilon(k_1+k_2))^2 - m^2 + i0^+}\gamma^a\right] u(q) \quad . \end{aligned} \tag{7.188}$$

Usando as equações de Dirac satisfeitas por $\overline{u}(p)$ e $u(q)$ para simplificar essa expressão, e tomando o limite adiabático trivial em k_3, o que permite a integração nessa variável:

$$\begin{aligned} & -C_1\overline{u}(p)\int d^4k_1 d^4k_2 \hat{g}_0(k_1)\hat{g}_0(k_2)\frac{2\epsilon p(k_1+k_2)}{2\epsilon p(k_1+k_2) - i0^+}\gamma^a u(q)\hat{A}^{\text{ext}}_a(p-q) + \mathscr{O}(\epsilon) \\ & = -(2\pi)^4 C_1\overline{u}(p)\gamma^a u(q)\hat{A}^{\text{ext}}_a(p-q) \quad . \end{aligned} \tag{7.189}$$

A última linha, evidentemente, é o resultado no limite adiabático, em que os termos $\mathscr{O}(\epsilon)$ se anulam. Com os resultados (7.186) e (7.189) verificamos que, se C e C_1 se relacionam como o determina a Eq. (7.181), então a contribuição destes termos de normalização para o espalhamento do elétron por um campo externo é nula: Eles não afetam ao valor da carga elétrica, e podem, portanto, ser escolhidos arbitráriamente sem nenhuma consequência física. Isto justifica por completo o uso da condição de normalização da Eq. (7.126).

Capítulo 8

Epílogo

Na tese a que agora damos conclusão apresentamos um estudo detalhado da teoria do campo quantizado na forma dinâmica do plano nulo a partir da perspectiva da teoria de perturbação causal. Neste último capítulo, resumiremos e comentaremos os pontos mais relevantes do desenvolvimento feito, e exporemos também nossas perspectivas para o trabalho futuro.

Começamos estudando a teoria do campo clássico na forma dinâmica da frente de luz (Cap. 2), à qual, vimos, é possível chegar não somente pelo método algébrico de Dirac (Ap. A) –que, por outro lado, permite salientar fatos importantes desta forma dinâmica, como o de ser aquela em que o grupo de estabilidade é maior–, mas também do próprio estudo do problema dos valores iniciais da equação de Klein-Gordon-Fock. A teoria do campo no plano nulo, neste sentido, se relaciona com o estudo das soluções à susodita equação quando os valores iniciais são dados em suas superfícies características (problema de Goursat). A boa definição deste problema foi explicitamente mostrada para todos os campos de que fizemos uso nesta tese: O escalar, o fermiônico e o vetorial não-massivo. Este estudo no regime clássico possui importância capital, ao ponto que não acreditamos ser exagerado dizer que, sem ele, nenhum desenvolvimento posterior teria sido possível. Com efeito, a decomposição dos campos clássicos em suas componentes dinâmicas e não-dinâmicas apontou o caminho para o método de quantização do campo livre por construção direta do espaço de Fock (Cap. 3), e permitiu reduzir o programa de quantização de todo campo ao da do campo escalar (quer bosônico, quer fermiônico) aplicado a suas componentes dinâmicas; ademais, nestas deduções apareceram pela primeira vez as distribuições que, mais tarde, por construção, corresponderam aos (anti-)comutadores dos respectivos operadores de campo quantizado. Isto mostra a estreitíssima relação existente entre a teoria do campo clássico e a do quântico, e a necessidade de estudar detalhadamente aquela antes de formular esta.

A parte central desta tese foi a formulação da TPC no plano nulo (Cap. 4). Ela foi baseada nos axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov para o operador de espalhamento e faz uso, também, do método de comutação adiabática da interação. Na dinâmica da frente de luz, no entanto, o axioma da causalidade precisou ser modificado para ser compatível com a nova escolha do parâmetro de evolução temporal –coordenada x^+–, modificação esta cujo principal efeito é a possibilidade de que o suporte das distribuições retardadas e o das avançadas contenham ao eixo x^-. Não obstante isto, provamos que a construção indutiva das distribuições de transição ainda é possível; porém, as distribuições de normalização das soluções ao problema de divisão da distribuição causal têm suporte no eixo x^-, diferente à dinâmica instantânea, em que o têm só na origem das coordenadas. Mostramos que tal

modificação não evita a possibilidade de encontrar soluções covariantes de Lorentz sempre que as distribuições causais sejam covariantes.

Quanto à implementação prática do método indutivo causal na forma dinâmica do plano nulo, para poder efetuar a divisão da distribuição causal em suas partes retardada e avançada foi necessário introduzir o conceito de quase-assíntota por variável selecionada, pois devido a que a interseção do plano nulo $x^+ = 0$ com o cone de luz com vértice na origem das coordenadas (relativas) é o eixo x^-, não é suficiente cuidar do comportamento singular da distribuição na origem, senão que é preciso fazê-lo em todo o eixo x^-. Outrossim, com a finalidade de obter expressões bem definidas para a obtenção das distribuições retardada e avançada, a distribuição causal precisa ser multiplicada por uma função $\mathfrak{b}(x^-)$ com suporte compacto antes da divisão ser efetuada. As distribuições «reais» são finalmente obtidas no limite $\mathfrak{b} \to 1$. Neste sentido, oferecemos motivos matematicamente claros para a necessidade de limitar o alcance de variação da coordenada longitudinal. Por outro lado, a função auxiliar $\mathfrak{b}$ introduzida não leva a modificação alguma quando as distribuições são entendidas como sendo definidas sobre o espaço das funções de teste com algum suporte compacto preestabelecido na variável x^-. Provamos, ademais, que a ordem singular no eixo x^- determina o espaço de funções de teste no qual a distribuição retardada existe univocamente: Para $\omega_- < 0$, ele é o espaço de Schwartz completo, para $\omega_- \geq 0$, ele é restrito pela condição de anulamento das primeiras $\lfloor \omega_- \rfloor$ derivadas em relação às coordenadas x^+ e $x^\perp$, avaliadas no eixo x^-. A extensão ao espaço de Schwartz completo, contudo, é possível, porém não é única, senão ambígua, pois distribuições com suporte no eixo x^- podem ser adicionadas (problema da normalização); estas são fixadas atendendo a condições físicas adicionais: Os axiomas de Bogoliubov, Medvedev e Polivanov que não foram utilizados na construção da TPC –a saber, a covariância de Lorentz, a unitariedade e a estabilidade do vazio e do setor de uma partícula–, simetrias discretas ou de gauge, valores das constantes de acoplamento, *et cetera*.

As fórmulas de divisão foram levadas ao espaço dos momentos, onde assumem uma forma mais prática, e no qual provamos um teorema de fatorização de polinômios que facilita notavelmente os cálculos explícitos. Ainda mais, embora em nossos cálculos tenhamos feito sempre a transformação de Fourier em todas as variáveis (x^+, $x^\perp$ e também x^-), verdadeiramente a transformação na variável x^- é absolutamente opcional, pois nem o cálculo da ordem singular nem as fórmulas de divisão dependem dela. Esta observação é importante, pois, o dissemos no Cap. 3, a medida $\mu(\boldsymbol{p})$, obtida por restrição da $\mu_m(p)$ ao plano nulo, não é uma medida bem definida sobre o espaço de Schwartz completo, mas somente sobre aquele subespaço seu caracterizado pelo anulamento da função em $p_- = 0$. Esta restrição não traz consequência nenhuma aos resultados que obtivemos devido à supramencionada independência das fórmulas de divisão em relação à variável p_-. No entanto, é bem sabido que o espaço de distribuições definidas sobre um determinado espaço de funções de teste é tanto maior quanto mais restrito é este, e por isso é possível que em algumas circunstâncias a transformação de Fourier de uma dada distribuição definida no espaço restrito não exista. Quando isto ocorrer, há duas opções possíveis para realizar o

estudo: Transformar apenas as variáveis x^+ e $x^\perp$ para as p_+ e $p_\perp$, ou então deve-se estender a distribuição ao espaço de Schwartz completo –por exemplo, com o uso das pseudo-funções [159]–, caso em que a transformação de Fourier estará bem definida e os cálculos seguem como no caso padrão. Tal modificação, é claro, não afeta os resultados uma vez que a distribuição finalmente obtida seja restrita ao espaço inicial.

A primeira aplicação de nossos resultados foi realizada ainda no Cap. 4 para a obtenção dos propagadores de Feynman dos operadores de campo quantizados livres. Verificamos que o propagador de Feynman para o campo escalar se mantém igual ao da dinâmica instantânea, enquanto que os dos campos fermiônico e vetorial sem massa adquirem termos instantâneos, conhecidos na literatura. Em particular, o propagador para o campo vetorial sem massa que obtivemos corresponde ao conhecido propagador duplamente transversal. Os termos instantâneos que aparecem no procedimento de divisão, contudo, possuem a ordem singular $\omega_- = 0$ no eixo x^-, e, portanto, estão sujeitos a normalização; este resultado prova que os tais termos não possuem informação física genuína, pois ainda devem ser fixados atendendo a outras considerações; em particular, a imposição da covariância de Lorentz às distribuições de transição dos modelos específicos considerados (Caps. 5 e 7) os elimina por completo, o que indica que eles são nada mais que consequências do fato de que a causalidade, entendida segundo a variável temporal x^+, não pode fixar seu valor no eixo x^-. Precisamente, vimos nos diversos modelos de interação que as distribuições de normalização requeridas para semelhante tarefa correspondem aos termos instantâneos que na abordagem lagrangiana da teoria do campo aparecem como consequência de solucionar os vínculos da teoria interagente, re-inserindo depois os mesmos na densidade lagrangiana de interação –e que, se prova por uma análise combinatória, cancelam efetivamente os termos instantâneos dos propagadores dos campos–; estes termos são sempre da segunda ordem na constante de acoplamento, de forma que é natural, na filosofia da TPC, que tenham aparecido como termos de normalização às distribuições de transição de dois pontos. Com esta correspondência, foi possível encontrar as densidades lagrangianas efetivas no plano nulo dos modelos estudados.

No estudo particular do modelo de Yukawa (Cap. 5), além dos resultados já comentados, calculamos as correções radiativas à segunda ordem, isto é, a auto-energia do méson e a do núcleon. Particularmente, a divisão das distribuições causais foi facilitada pelo uso da técnica de continuação analítica da distribuição retardada no espaço dos momentos ao tubo $\mathbb{R}^4 + i\mathbb{R}^+_0 e^-$ (Ap. C), permitindo obter claramente, a partir de expressões únicas, os resultados para todos os intervalos de variação do momento. Estes, se vê por comparação direta, se equivalem aos resultados obtidos na dinâmica instantânea. No estudo da normalizabilidade do modelo, provamos por um contra-exemplo que a ordem singular de uma dada distribuição causal não pode ser calculada a não ser que ela tenha sido obtida de forma fechada, pois as convoluções de quase-assíntotas no eixo x^- não existem em geral. Não está claro o motivo de tal comportamento. Contudo, foi possível estabelecer indiretamente uma fórmula geral para a ordem singular de uma distribuição qualquer, dependente do número de campos exteriores mesônicos e nucleônicos. Com isso, concluímos que o modelo de Yukawa no plano nulo é, como na dinâmica instantânea, normalizável.

A quantização do campo vetorial sem massa levou ao aparecimento de termos não covariantes na parte de frequência positiva e a de frequência negativa da distribuição de comutação do referido campo. Como eles aparecem na construção das distribuições causais na TPC, e para evitar as dificuldades de cálculo que seu uso originaria, foi desenvolvida a teoria invariante de gauge quântica (Cap. 6). A ideia central desse método consiste em estender o espaço de Fock para permitir a existência nele de estados não físicos; no caso em questão, das polarizações escalar e longitudinal do campo vetorial sem massa. Esta extensão, é claro, tem de ser feita de forma tal que os elementos de matriz do operador de espalhamento entre vetores do subespaço físico se mantenham os mesmos da teoria inicial. Provamos por isso que o subespaço físico é o mesmo para todos os observadores inerciais, e que, nele, os operadores que representam às transformações de Poincaré são unitárias, em concordância com o teorema de Wigner. Por outro lado, mostramos que existe um operador de Krein, η, definindo uma forma bilinear segundo a qual as transformações de Poincaré são pseudo-unitárias no espaço de Fock estendido, e segundo a qual, também, o campo quantizado vetorial sem massa é pseudo-auto-adjunto. Esta forma bilinear corresponde ao «produto interno indefinido» introduzido no método de quantização de Gupta e Bleuler. O referido operador de Krein é facilmente encontrado na dinâmica instantânea como sendo $(-1)^{\mathbf{N}_0}$, com $\mathbf{N}_0$ o operador de número de fótons escalares; na dinâmica no plano nulo, todavia, como não conseguimos encontrar sua forma explícita, a prova de sua existência foi, por assim dizer, indireta.

A exigência de que o subespaço físico seja invariante em relação ao processo de extensão do espaço de Fock e às transformações de gauge quânticas do operador de campo quantizado vetorial não-massivo levou à necessidade de introduzir, simultaneamente, campos escalares fermiônicos (fantasma) de massa nula. Eles permitiram escrever expressões para a variação de gauge de monômios de Wick gerais contendo campos quantizados de gauge, fantasmas e anti-fantasmas. Assim nos encontramos em posição de definir a teoria de gauge quântica perturbativa como aquela em que a transformação de gauge da distribuição de transição da primeira ordem não leva ao aparecimento de anomalias nas ordens superiores. Provamos que termos que são variação de gauge exata ou divergência de outras quantidades podem ser desconsiderados da distribuição de transição em qualquer ordem, sem isso trazer modificação alguma aos elementos de matriz do operador de espalhamento no subespaço físico. Mostramos, finalmente, que a condição necessária e suficiente para que uma dada teoria de interação seja uma teoria de gauge quântica é que a variação de gauge da distribuição de transição da primeira ordem seja igual à divergência do vértice-Q, e que as distribuições de ordem superior possam ser normalizadas de tal forma a satisfazer às identidades-Cg.

Assim, a teoria invariante de gauge quântica pode ser considerada uma expressão particular da técnica geral de Becchi, Rouet, Stora e Tyutin (técnica BRST) [214] para os sistemas vinculados, que consiste em estender apropriadamente a superfície dos vínculos do sistema adicionando novos graus de liberdade, com a finalidade de simplificar o tratamento do problema ou explicitar alguma simetria de interesse. Como expusemos construtivamente, desde sua base conceitual, a implementação dessa técnica geral ao caso particular da interação do

campo vetorial sem massa, justificando cada passo dado, o apresentado permite modificações, *exempli gratia*, para a quantização invariante de gauge do campo vetorial massivo, do campo tensorial, e outras possibilidades a serem exploradas.

Em nosso estudo da QED (Cap. 7), vimos que no processo de espalhamento de Møller a liberdade de normalização permite cancelar o termo que surge no propagador do fóton no processo de divisão. Contudo, isso não é suficiente, pois ainda permanecem os termos de gauge que provêm da distribuição de comutação do campo, os quais não podem ser eliminados por normalização. Mostramos de forma explícita que eles, sem embargo, não contribuem para os elementos de matriz do operador de espalhamento como consequência dos campos de Dirac serem físicos (satisfazerem à condição de camada de massa). Dessarte, confirmamos mediante este exemplo o que havíamos adiantado anteriormente: Embora a condição de covariância de Lorentz não possa ser exigida na normalização quando a distribuição causal não possua essa propriedade, no caso do campo vetorial sem massa os termos não covariantes não contribuem aos elementos de matriz do operador de espalhamento no subespaço físico devido à invariância de gauge quântica. Ainda nos mantendo no uso da distribuição de comutação obtida sob a condição de gauge do plano nulo, estudamos a polarização do vácuo. A forma do tensor que a representa, é claro, independe de qual seja a distribuição de comutação, mas não o propagador completo do fóton, o qual, o verificamos, mantém a mesma estrutura tensorial que o propagador no caso livre: A polarização do vácuo modifica tanto a parte covariante como os termos de gauge da mesma forma, e não leva ao aparecimento de nenhum termo adicional. Este resultado só pode ser considerado equivalente à formulação covariante uma vez que a conservação da corrente elétrica seja considerada; em uma palavra, é novamente a invariância de gauge quântica a que estabelece a equivalência física dos diversos resultados.

Nosso estudo da auto-energia do férmion foi substancialmente simplificado pelo uso dos resultados do Cap. 6, considerando apenas a parte covariante da distribuição de comutação do campo eletromagnético. O resultado foi, como também o foi o tensor de polarização do vácuo, o mesmo que se obtém na dinâmica instantânea. A mesma simplificação foi considerada em nosso estudo do problema da normalizabilidade da QED no plano nulo: Estudamos a normalizabilidade do operador de espalhamento físico, isto é, a de aqueles termos cujos elementos de matriz no subespaço físico não se anulam. Obtivemos que ele é normalizável, e ainda concluímos, em base a nossos resultados prévios, que ele pode ser normalizado de forma a ser invariante de Lorentz. Verificamos que nenhum termo de auto-interação pode ser gerado em ordens superiores nessa teoria: Para os férmions, devido a que a ordem singular das distribuições que lhes dariam origem é sempre negativa; para os fótons, embora seria possível uma auto-interação do tipo $:A^4:$, a mesma é proibida pela invariância de gauge quântica. Mostramos, para mais, que as identidades-Cg da QED se equivalem com as identidades de Ward-Takahashi e que elas podem sempre ser satisfeitas por uma escolha conveniente dos termos de normalização das diversas distribuições. Finalmente, provamos que por virtude da identidade de Ward-Takahashi que relaciona a função de vértice com a auto-energia do férmion, a normalização dessas duas distribuições se vincula

de tal forma que o valor físico da carga elétrica não muda se elas se modificam; logo o problema de divergência infra-vermelha na camada de massa na primeira derivada da distribuição de auto-energia pode ser evitado, sem consequências físicas, escolhendo um ponto de normalização diferente.

Pelos resultados assim referidos, acreditamos que a presente tese proporciona um firme primeiro passo para o estabelecimento da QFT perturbativa no plano nulo sobre sólidas bases, pois mostra a inexistência de problemas que são, então, só aparentes em outras formulações. Estas últimas, por outro lado, possuem a virtude da simplicidade, e, por isso mesmo, continuam sendo os melhores caminhos para a obtenção de resultados fenomenológicos. A TPC no plano nulo, finalizamos, lhes dá o suporte teórico necessário.

Perspectivas. É claro que muito trabalho deve ainda ser feito em relação à TPC no plano nulo. A obtenção de resultados como a razão giromagnética do elétron, que consta como uma das previsões mais importantes da QED, deve ser reproduzida. Igualmente, a técnica do grupo de renormalização, como introduzido por Stückelberg e Petermann e desenvolvido por Bogoliubov e Shirkov, precisa ser detalhadamente estudada e implementada no formalismo. A dita técnica, junto com o cálculo das correções radiativas da QCD, permitirão estabelecer firmemente a liberdade assintótica dessa teoria.

No âmbito mais teórico, ainda é preciso aprofundar o estudo da normalizabilidade dos diversos modelos. Assim, o motivo da não existência das convoluções de quase-assíntotas no eixo x^- deve ser esclarecido, e suas consequências, estudadas. Por outro lado, como mencionamos no estudo da auto-energia do elétron na QED, existem regras de soma que podem modificar o valor da ordem singular de uma dada distribuição. Consideramos um problema em aberto, embora pareça difícil, reconhecer de forma geral quando uma de tais regras de soma aparecerá, ou ainda se elas são mais comuns na dinâmica da frente de luz do que na instantânea, pois as consequências de tais aparecimentos podem ser importantes. Nossas fórmulas para a ordem singular e a normalizabilidade dos modelos estudados não as levam em consideração.

Por outro lado, na construção da teoria invariante de gauge quântica impusemos a hipótese simplificadora de que o operador de carga de gauge seja quadrático nos operadores de emissão e absorção. Uma formulação completa requer, evidentemente, examinar as consequências de relaxar semelhante restrição.

Finalmente, o estudo da SQED e da QCD no plano nulo está em progresso, assim como a construção geral das variáveis dinâmicas locais em interação [210, 100]. Esse último tópico, em particular, abre as portas a uma variedade de possíveis direções de estudo, por exemplo, à aplicação do método causal para o cálculo perturbativo finito de fatores de forma hadrônicos [213] e ao estudo dos operadores de criação hadrônicos em interação. Também, os campos em interação podem ser definidos como as variáveis dinâmicas locais cujo primeiro termo da série perturbativa é igual ao correspondente operador de campo quantizado livre, estabelecendo um vínculo direto com a teoria de Källén para a QFT perturbativa na descrição de Heisenberg [82], e relacionando, também, o operador de espalhamento da TPC com o

de Källén-Yang-Feldman [211, 212]. Além disso, se espera obter equações para as funções de Green dos campos em interação (análogas às de Schwinger-Dyson), por meio das quais se estudaria estados ligados, como o átomo de hidrogênio e os hádrons. Finalmente, a possibilidade de estabelecer outros resultados, como fórmulas de redução ou a decomposição espectral de Källén-Lehmann, deve também ser estudada.

Apêndice A

Definição algébrica das formas dinâmicas

Nesse apêndice introduziremos as diversas formas dinâmicas seguindo as idéias apresentadas por Dirac [1], que colocou o problema da seguinte forma: Duas teorias, a relatividade de Poincaré-Einstein, que exige a invariância da física perante as transformações do grupo de Poincaré, e a mecânica quântica, cuja estrutura é hamiltoniana[1], passaram por importantes provas experimentais. Quais serão as condições gerais que permitem a descrição de um sistema físico compatível com esses dois requerimentos simultaneamente?

Começaremos com a imposição da possibilidade da formulação hamiltoniana. Essa formulação se equivale com o formalismo dos colchetes de Poisson [215], segundo o qual variáveis dinâmicas quaisquer, ξ, η e ζ, devem ter colchetes de Poisson regidos pelas leis:

$$\{\xi;\eta\} = -\{\eta;\xi\} \quad , \tag{A.1}$$

$$\{\xi;\eta+\zeta\} = \{\xi;\eta\} + \{\xi;\zeta\} \quad , \tag{A.2}$$

$$\{\xi;\eta\zeta\} = \{\xi;\eta\}\zeta + \eta\{\xi;\zeta\} \quad , \tag{A.3}$$

$$\{\{\xi;\eta\};\zeta\} + \{\{\eta;\zeta\};\xi\} + \{\{\zeta;\xi\};\eta\} = 0 \quad . \tag{A.4}$$

Mas as variáveis dinâmicas estão definidas em relação ao sistema de coordenadas –exemplo disto são as próprias coordenadas e os momentos–, de forma que aquelas mudam quando essas são submetidas a uma transformação. Sob a transformação infinitesimal das coordenadas, cada variável dinâmica ξ transforma-se segundo:

$$\xi' = \xi + \{\xi;F\} \quad , \tag{A.5}$$

com F alguma variável dinâmica infinitesimal, dependente apenas do sistema envolvido e da transformação de coordenadas, e ao que se dá o nome de «gerador da transformação». Essa forma da variação garante que as relações entre os colchetes de Poisson das diversas variáveis dinâmicas permaneçam inalteradas, o que permite cumprir a exigência da teoria da relatividade: «Sob as transformações do grupo de Poincaré, as variações das variáveis dinâmicas devem ser tais que os colchetes de Poisson entre elas permaneçam inalterados». Assim, faz-se necessário examinar os geradores das transformações de Poincaré. Uma

[1] Naquela época, é mister dizê-lo, a formulação hamiltoniana era imprescindível para a transição da teoria clássica para a quântica –assim o apontou Dirac explicitamente–; na atualidade tal restrição não rege mais, e é perfeitamente possível formular a teoria ondulatória desde a abordagem lagrangiana ou ainda diretamente desde as equações do movimento dos campos.

transformação infinitesimal de Poincaré muda as coordenadas segundo:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} + b^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad , \tag{A.6}$$

com a^{μ} os parâmetros infinitesimais da translação e $b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}$ os parâmetros infinitesimais associados à transformação de Lorentz. Mantendo a discussão no regime infinitesimal, o gerador F deverá também ser linear nestes parâmetros:

$$F = -P_{\mu} a^{\mu} + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} b^{\mu\nu} \quad ; \quad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \quad . \tag{A.7}$$

A dependência com a transformação está inclusa nos parâmetros a e b; logo as variáveis dinâmicas P e M caracterizam o sistema em estudo. A elas se chama «quantidades fundamentais». Com a finalidade de determinar a álgebra a que elas seguem, consideremos em primeiro lugar a ação de duas transformações consecutivas, caracterizadas pelos geradores F_1 e F_2. A variável dinâmica ξ muda então para –mantendo termos até da ordem $F_1 F_2$, mas desconsiderando os da ordem F_1^2 e F_2^2–:

$$\xi'' = \xi + \{\xi; F_1\} + \{\xi; F_2\} + \{\{\xi; F_2\}; F_1\} \quad . \tag{A.8}$$

Se as transformações forem aplicadas na ordem inversa, isto é, primeiro F_2 e depois F_1, a variável dinâmica teria-se tornado:

$$\xi^{**} = \xi + \{\xi; F_1\} + \{\xi; F_2\} + \{\{\xi; F_1\}; F_2\} \quad . \tag{A.9}$$

Dessas equações, a identidade de Jacobi expressa na Eq. (A.4) leva a estabelecer que a diferença entre a aplicação das transformações em uma ordem e em outra é igual a:

$$\xi^{**} - \xi'' = \{\xi; \{F_1; F_2\}\} \quad . \tag{A.10}$$

De sorte que o comutador das pequenas variações da variável dinâmica se relaciona com o colchete de Poisson dos geradores das transformações correspondentes. Assim é que poder-se-á estabelecer a álgebra de colchetes de Poisson entre os geradores P e M das transformações de Poincaré, uma vez que seja conhecida a ação deles nas coordenadas. Inicialmente se observa que, segundo as Eqs. (A.5), (A.6) e (A.7):

$$a^{\mu} + b^{\mu\nu} x_{\nu} = -a^{\rho} \{x^{\mu}; P_{\rho}\} + \frac{1}{2} b^{\rho\sigma} \{x^{\mu}; M_{\rho\sigma}\} \quad , \tag{A.11}$$

cuja solução é:

$$\{x^{\mu}; P_{\rho}\} = -\delta^{\mu}_{\rho} \quad , \quad \{x^{\mu}; M_{\rho\sigma}\} = \delta^{\mu}_{\rho} x_{\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma} x_{\rho} \quad . \tag{A.12}$$

Definamos agora os geradores:

$$F_1 = -P_{\mu} a^{\mu} + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} b^{\mu\nu} \quad , \quad F_2 = -P_{\rho} a'^{\rho} + \frac{1}{2} M_{\rho\sigma} b'^{\rho\sigma} \quad ,$$

cujo comutador é:

$$\{F_1; F_2\} = a^\mu a^\rho \{P_\mu; P_\rho\} - \frac{1}{2} a^\mu b'^{\rho\sigma} \{P_\mu; M_{\rho\sigma}\} - \frac{1}{2} a'^\rho b^{\mu\nu} \{M_{\mu\nu}; P_\rho\} + \frac{1}{4} b^{\mu\nu} b'^{\rho\sigma} \{M_{\mu\nu}; M_{\rho\sigma}\} \quad . \tag{A.13}$$

Por outro lado, as transformações de coordenadas correspondentes, aplicadas sucessivamente, levam, via a Eq. (A.6), a:

$$\begin{aligned} x''^\tau &= x^\tau + \left(a'^\tau + a^\tau + b'^{\tau\eta} a_\eta\right) + \left(b^{\tau\lambda} + b'^{\tau\lambda} + b'^\tau{}_\eta b^{\eta\lambda}\right) x_\lambda \quad , \\ x^{**\tau} &= x^\tau + \left(a^\tau + a'^\tau + b^{\tau\eta} a'_\eta\right) + \left(b'^{\tau\lambda} + b^{\tau\lambda} + b^\tau{}_\eta b'^{\eta\lambda}\right) x_\lambda \quad , \end{aligned}$$

do qual obtém-se:

$$x^{**\tau} - x''^\tau = b^{\tau\eta} a'_\eta - b'^{\tau\eta} a_\eta + \left(b^\tau{}_\eta b'^{\eta\lambda} - b'^\tau{}_\eta b^{\eta\lambda}\right) x_\lambda \quad . \tag{A.14}$$

Como o ditam as Eqs. (A.10) e (A.13), o lado direito dessa equação deverá igualarse a:

$$\begin{aligned} &a^\mu a^\rho \left\{x^\tau; \{P_\mu; P_\rho\}\right\} - \frac{1}{2} a^\mu b'^{\rho\sigma} \left\{x^\tau; \{P_\mu; M_{\rho\sigma}\}\right\} - \frac{1}{2} a'^\rho b^{\mu\nu} \left\{x^\tau; \{M_{\mu\nu}; P_\rho\}\right\} \\ &+ \frac{1}{4} b^{\mu\nu} b'^{\rho\sigma} \left\{x^\tau; \{M_{\mu\nu}; M_{\rho\sigma}\}\right\} \quad . \end{aligned} \tag{A.15}$$

E dessa igualdade, por meio da Eq. (A.12), obtém-se a álgebra de colchetes de Poisson das quantidades fundamentais, que não é outra senão a dos geradores das transformações de Poincaré:

$$\{P_\mu; P_\nu\} = 0 \quad , \quad \{M_{\mu\nu}; P_\rho\} = -g_{\mu\rho} P_\nu + g_{\nu\rho} P_\mu \quad , \tag{A.16}$$

$$\{M_{\mu\nu}; M_{\rho\sigma}\} = -g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\rho\nu} + g_{\nu\sigma} M_{\rho\mu} \quad . \tag{A.17}$$

Neste ponto, Dirac introduziu a noção das formas dinâmicas: Elas são as soluções para as relações algébricas recém escritas. Para entender o que isto quer dizer, lembremos que nem todas as transformações do grupo de simetrias do espaço-tempo levam à evolução dinâmica das superfícies isocrônicas; na teoria newtoniana, por exemplo, em que o grupo de simetrias é o grupo de Galilei, uma translação espacial ou uma rotação não mudam a superfície de tempo constante, apenas a transformam em si mesma, são «transformações cinemáticas» e a superfície isocrônica é estável em relação a elas. O mesmo ocorre na teoria relativística: Alguns dos geradores o serão de transformações cinemáticas e constituirão o «grupo de estabilidade» das superfícies isocrônicas, mapeando essas em si mesmas; os outros geradores mudam a superfície, a fazem evoluir, e assim devem ser identificados com as transformações dinâmicas; a esses geradores Dirac dá o nome de «hamiltonianos».

Já é evidente daqui que o grupo de estabilidade e os hamiltonianos dependerão de qual seja a superfície isocrônica escolhida, e daí o interesse nas diversas formas dinâmicas: Pode acontecer, como de fato acontece, que para alguns problemas a descrição da dinâmica seja

simplificada em uma determinada forma dinâmica, pois os hamiltonianos podem ser mais simples ou mais complicados segundo a escolha da superfície isocrônica. Se tais grupos de estabilidade não são isomórficos, então as formas dinâmicas que lhes correspondem não poderão ser deformadas uma na outra por uma simples transformação de Poincaré; em tais situações, que são precisamente as que definem formas dinâmicas «diferentes», a equivalência física da descrição não se deriva do axioma da relatividade: Esse é o problema da equivalência.

Para relacionar as superfícies isocrônicas com seu grupo de estabilidade, se as descreverá por meio de uma função $\Sigma = \Sigma(x)$ cujo valor é constante nas superfícies; ele é a expressão do «tempo» da forma dinâmica. Os geradores do grupo de estabilidade serão aqueles que satisfaçam:

$$\{\Sigma(x); F\} = 0 \quad , \tag{A.18}$$

pois assim sendo, como o dita a Eq. (A.5), a transformação gerada por F deixa invariante o valor do tempo Σ. Os geradores que não satisfazem à Eq. (A.18), por outro lado, serão os geradores da dinâmica. O colchete da Eq. (A.18) pode ser calculado uma vez que seja conhecida a função $\Sigma(x)$ pelo uso das Eqs. (A.12).

Forma instantânea. Nessa forma dinâmica, as superfícies isocrônicas são aquelas em que a coordenada x^0 se mantém constante:

$$\Sigma(x) = x^0 \quad . \tag{A.19}$$

Usando as Eqs. (A.12), vê-se que:

$$\left\{x^0; P_\rho\right\} = -\delta^0_\rho \quad , \quad \left\{x^0; M_{\rho\sigma}\right\} = \delta^0_\rho x_\sigma - \delta^0_\sigma x_\rho \quad . \tag{A.20}$$

O grupo de estabilidade dessas superfícies espaciais contém, como na física newtoniana, às translações e rotações espaciais, correspondentes aos geradores P_1, P_2, P_3, M_{12}, M_{23} e M_{31}, que são então os geradores cinemáticos da forma instantânea. Que eles constituem uma subálbegra do grupo de Poincaré –e então dão origem a um subgrupo dele– pode ser diretamente verificado com o uso das Eqs. (A.16)-(A.17): Todos os colchetes de Poisson desses geradores têm por resultado uma expressão que contém a eles mesmos só. Os outros geradores, a saber, P_0, M_{10}, M_{20} e M_{30}, são os geradores dinâmicos ou hamiltonianos. Assim, o grupo de estabilidade da forma instantânea tem dimensão sêis, e possui quatro hamiltonianos.

Forma-ponto. Na forma-ponto, o tempo é dado pela função:

$$\Sigma(x) = x^\mu x_\mu \quad . \tag{A.21}$$

Calculando a ação dos geradores das transformações de Poincaré sobre ela, encontra-se que:

$$\left\{x^\mu x_\mu; P_\rho\right\} = -2x_\rho \quad , \quad \left\{x^\mu x_\mu; M_{\rho\sigma}\right\} = 0 \quad . \tag{A.22}$$

Portanto, o grupo de estabilidade é constituído pelas transformações geradas por $M_{\mu\nu}$ e tem dimensão seis, ao passo que os geradores P_μ serão os quatro hamiltonianos da forma dinâmica. Embora sejam eles em número igual que na forma instantânea, a forma-ponto possui a vantagem de apresentar hamiltonianos que compõem um tetra-vetor, podendo eles ser tratados como uma única entidade covariante. A nomeação de «forma-ponto» dada a essa dinâmica é, de fato, devida a essa propriedade: Que seu grupo de estabilidade é o grupo de rotações tetradimensionais ao redor de um ponto fixo.

Forma da frente de luz. Nessa forma dinâmica, a superfície isocrônica é a superfície de valor constante do tempo

$$\Sigma(x) = x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^3\right) \quad . \tag{A.23}$$

Para ela obtém-se que:

$$\left\{x^+; P_\rho\right\} = -\delta^+_\rho \quad , \quad \left\{x^+; M_{\rho\sigma}\right\} = \delta^+_\rho x_\sigma - \delta^+_\sigma x_\rho \quad . \tag{A.24}$$

Ocorre aqui algo curioso: Somente se a superfície for a $x^+ = 0$, o colchete de Poisson $\{x^+; M_{+-}\}$ se anula, como se observa da Eq. (A.24). M_{+-}, portanto, forma parte do grupo de estabilidade da superfície $x^+ = 0$, mas não das superfícies correspondentes a outros tempos. Restringindo a atenção a essa superfície particular, que sempre pode ser usada como a superfície inicial no problema dos valores iniciais, ter-se-á que o grupo de estabilidade tem dimensão sete e é formada pelos geradores P_1, P_2, P_-, M_{12}, M_{1-}, M_{2-} e M_{+-}; o número de hamiltonianos é três, e eles são P_+, M_{1+} e M_{2+}.

Forma de Leutwyler-Stern 1. Na primeira forma de Leutwyler e Stern, a superfície isocrônica é definida pelo tempo:

$$\Sigma(x) = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 = x^\mu x_\mu + \left(x^3\right)^2 \quad . \tag{A.25}$$

A ação sobre ele dos geradores do grupo de Poincaré é:

$$\left\{x^\mu x_\mu + \left(x^3\right)^2; P_\rho\right\} = -2x_\rho - 2x^3\delta^3_\rho \quad , \quad \left\{x^\mu x_\mu + \left(x^3\right)^2; M_{\rho\sigma}\right\} = 2x^3\left(\delta^3_\rho x_\sigma - \delta^3_\sigma x_\rho\right) \quad . \tag{A.26}$$

Destarte, o grupo de estabilidade tem apenas dimensão quatro, e a ele correspondem os geradores P_3, M_{01}, M_{02} e M_{12}. Os hamiltonianos dessa forma dinâmica são seis: P_0, P_1, P_2, M_{03}, M_{13} e M_{23}.

Forma de Leutwyler-Stern 2. A segunda forma introduzida por Leutwyler e Stern possui o tempo definido segundo a função:

$$\Sigma(x) = \left(x^0\right)^2 - \left(x^3\right)^2 \quad . \tag{A.27}$$

Com o uso das Eqs. (A.12) obtém-se que:

$$\begin{aligned}\left\{\left(x^0\right)^2-\left(x^3\right)^2;P_\rho\right\}&=-2x^0\delta^0_\rho+2x^3\delta^3_\rho \quad ,\\ \left\{\left(x^0\right)^2-\left(x^3\right)^2;M_{\rho\sigma}\right\}&=2x^0\left(\delta^0_\rho x_\sigma-\delta^0_\sigma x_\rho\right)-2x^3\left(\delta^3_\rho x_\sigma-\delta^3_\sigma x_\rho\right) \quad .\end{aligned} \tag{A.28}$$

Com esses resultados pode-se estabelecer que o grupo de estabilidade dessa forma dinâmica é aquele correspondente aos geradores P_1, P_2, M_{12} e M_{03}, e portanto tem dimensão quatro. Os seis hamiltonianos dessa forma dinâmica serão os geradores P_0, P_3, M_{01}, M_{02}, M_{13} e M_{23}.

Isso esgota as possibilidades, pois não há outro subgrupo transitivo do grupo de Poincaré para ser o grupo de estabilidade de uma outra forma dinâmica [8, 9, 10, 11, 7]. Os resultados obtidos resumem-se na Tab. A.1. Como pode-se ver, a forma dinâmica da frente de luz ocupa um lugar destacado por ser aquela com o maior grupo de estabilidade e, consequentemente, com menor número de hamiltonianos.

F. dinâmica	$\Sigma(x)$	D(G_Σ)	N. de H's
Instantânea	x^0	6	4
Forma-ponto	$x^\mu x_\mu$	6	4
Frente de luz	x^+	7	3
L-S 1	$x^\mu x_\mu+(x^3)^2$	4	6
L-S 2	$(x^0)^2-(x^3)^2$	4	6

Tabela A.1: *Resumo das cinco formas dinâmicas da teoria relativística. $D(G_\Sigma)$: Dimensão do grupo de estabilidade G_Σ; N. de H's: Número de hamiltonianos.*

Mecânica do ponto material

A solução mais simples às Eqs. (A.16)-(A.17) é obtida na mecânica do ponto material:

$$P_\mu=p_\mu \quad , \quad M_{\mu\nu}=q_\mu p_\nu-q_\nu p_\mu \quad , \tag{A.29}$$

com as coordenadas q_μ e momentos p_μ da partícula sujeitos às relações:

$$\{q_\mu;q_\nu\}=0\,,\ \{p_\mu;p_\nu\}=0\,,\ \{p_\mu;q_\nu\}=g_{\mu\nu}\,. \tag{A.30}$$

Para escrever expressões para os geradores sobre a superfície inicial em cada forma dinâmica, introduzir-se-á as equações que as determinam como equações subsidiárias do tipo:

$$A\approx 0 \quad . \tag{A.31}$$

Mas as condições subsidiárias devem permanecer tais frente a qualquer mudança do sistema de coordenadas, o que implica que devam também ser condições subsidiárias:

$$\{A;P_\rho\}\approx 0 \quad , \quad \{A;M_{\rho\sigma}\}\approx 0 \quad . \tag{A.32}$$

Para eliminar as variáveis cujo significado é perdido ao fixar a superfície inicial, usar-se-á a condição de camada de massa, $p^2 - m^2 = 0$, mas essa introduzir-se-á nos geradores do grupo de Poincaré usando de coeficientes indeterminados (multiplicadores de Lagrange); as Eqs. (A.29) serão substituídas por:

$$P_\mu = p_\mu + \lambda_\mu(p^2 - m^2) \quad , \quad M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu + \lambda_{\mu\nu}(p^2 - m^2) \quad , \tag{A.33}$$

com $\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$. Tais coeficientes serão determinados pela imposição da Eq. (A.32).

Forma instantânea. Tem-se a condição subsidiária:

$$q^0 \approx 0 \quad . \tag{A.34}$$

A anulação do colchete de Poisson dela com o gerador P_μ somente acontece se:

$$\{q^0; P_\sigma\} = -\delta^0_\sigma - 2\lambda_\sigma p_0 \approx 0 \quad , \tag{A.35}$$

enquanto que a equação correspondente às transformações de Lorentz é:

$$\{q^0; M_{\rho\sigma}\} = -q_\rho\delta^0_\sigma + q_\sigma\delta^0_\rho - \lambda_{\rho\sigma}2p_0 \approx 0 \quad . \tag{A.36}$$

Das Eqs. (A.35) e (A.36) decorrem os valores:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2p_0} \, , \; \lambda_r = 0 \, , \; \lambda_{r0} = -\frac{q_r}{2p_0} \, , \; \lambda_{rs} = 0 \, , \tag{A.37}$$

$r, s = 1, 2, 3$. Os geradores na superfície inicial são portanto:

$$P_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \quad , \quad P_r = p_r \quad , \quad M_{r0} = q_r\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \quad , \quad M_{rs} = q_r p_s - q_s p_r \quad . \tag{A.38}$$

Tem-se usado aqui a notação $\boldsymbol{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Forma-ponto. A condição subsidiária nessa forma dinâmica é:

$$q^\mu q_\mu \approx \kappa^2 = \text{constante} \quad . \tag{A.39}$$

Essa constante em geral será não nula; porém, ela pode também ser nula, caso em que o hiperbolóide degenera no cone de luz. As condições da Eq. (A.32) são, assim:

$$\{q^\mu q_\mu; P_\rho\} = -2q_\rho - 4\lambda_\rho q \cdot p \approx 0 \quad , \tag{A.40}$$

$$\{q^\mu q_\mu; M_{\rho\sigma}\} = -4\lambda_{\mu\nu} q \cdot p \approx 0 \quad . \tag{A.41}$$

Dessas equações obtém-se o valor dos coeficientes indeterminados:

$$\lambda_\rho = -\frac{q_\rho}{2q \cdot p} \quad , \quad \lambda_{\mu\nu} = 0 \quad , \tag{A.42}$$

bem como os geradores do grupo de Poincaré:

$$P_\mu = p_\mu - \frac{q_\mu(p^2 - m^2)}{2q\cdot p} \quad , \quad M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu \quad . \tag{A.43}$$

Forma da frente de luz. A condição subsidiária consiste dessa vez na especificação do plano nulo inicial:

$$q^+ \approx 0 \quad . \tag{A.44}$$

Tem-se agora as restrições:

$$\left\{q^+; P_\rho\right\} = -\delta^+_\rho - 2\lambda_\rho p_- \approx 0 \quad , \tag{A.45}$$
$$\left\{q^+; M_{\rho\sigma}\right\} = \delta^+_\rho q_\sigma - \delta^+_\sigma q_\rho - 2\lambda_{\rho\sigma} p_- \approx 0 \quad . \tag{A.46}$$

Delas decorrem os multiplicadores –usa-se $i, j = 1, 2$–:

$$\lambda_+ = -\frac{1}{2p_-} \, , \, \lambda_i = 0 = \lambda_- \, , \, \lambda_{+-} = 0 \, , \, \lambda_{i+} = -\frac{q_i}{2p_-} \, , \, \lambda_{ij} = 0 \, , \, \lambda_{i-} = 0 \, . \tag{A.47}$$

E daqui os geradores do grupo de Poincaré no plano nulo $x^+ = 0$ são:

$$P_+ = \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p_-} \, , \, P_- = p_- \, , \, P_i = p_i \, , \, M_{i+} = q_i \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p_-} - q_+ p_i \, , \tag{A.48}$$
$$M_{+-} = q_+ p_- \, , \, M_{12} = q_1 p_2 - q_2 p_1 \, , \, M_{i-} = q_i p_- \, . \tag{A.49}$$

Nessas expressões: $p_\perp^2 = p_1^2 + p_2^2$.

Forma de Leutwyler-Stern 1. Na primeira forma de Leutwyler-Stern, a condição subsidiária imposta às coordenadas da partícula é:

$$q^\mu q_\mu + \left(q^3\right)^2 \approx \kappa^2 = \text{constante} \quad . \tag{A.50}$$

Encontra-se as seguintes condições adicionais:

$$\left\{q^\mu q_\mu + \left(q^3\right)^2; P_\rho\right\} = -2q_\rho - 2q^3\delta^3_\rho - 4\lambda_\rho\left(q^\mu p_\mu + q^3 p^3\right) \approx 0 \quad , \tag{A.51}$$
$$\left\{q^\mu q_\mu + \left(q^3\right)^2; M_{\rho\sigma}\right\} = 2q^3\left(\delta^3_\rho q_\sigma - \delta^3_\sigma q_\rho\right) - 4\lambda_{\mu\nu}\left(q^\mu p_\mu + q^3 p^3\right) \approx 0 \quad , \tag{A.52}$$

das quais é possível isolar os coeficientes indeterminados:

$$\lambda_{0,1,2} = -\frac{q_{0,1,2}}{2\left(q^\mu p_\mu + q^3 p^3\right)} \, , \, \lambda_3 = 0 \, ,$$
$$\lambda_{01} = \lambda_{02} = \lambda_{12} = 0 \, , \, \lambda_{(0,1,2)3} = -\frac{q_{0,1,2} q^3}{2\left(q^\mu p_\mu + q^3 p^3\right)} \, .$$

As quantidades fundamentais nessa forma dinâmica são, portanto:

$$P_{0,1,2} = p_{0,1,2} - \frac{q_{0,1,2}(p^2 - m^2)}{2\left(q^\mu p_\mu + q^3 p^3\right)}\ ,\ P_3 = p_3\ , \tag{A.53}$$

$$M_{01} = q_0 p_1 - q_1 p_0\ ,\ M_{02} = q_0 p_2 - q_2 p_0\ ,\ M_{12} = q_1 p_2 - q_2 p_1\ ,$$

$$M_{(0,1,2)3} = q_{0,1,2} p_3 - q_3 p_{0,1,2} - \frac{q_{0,1,2} q^3 (p^2 - m^2)}{2\left(q^\mu p_\mu + q^3 p^3\right)} \quad . \tag{A.54}$$

Forma de Leutwyler-Stern 2. Nessa última forma dinâmica, a condição subsidiária adota a forma:

$$\left(q^0\right)^2 - \left(q^3\right)^2 \approx \kappa^2 = \text{constante} \quad . \tag{A.55}$$

As condições que tal restrição implica são as que seguem:

$$\left\{\left(q^0\right)^2 - \left(q^3\right)^2 ; P_\rho\right\} = -2q^0\delta^0_\rho + 2q^3\delta^3_\rho - 4\lambda_\rho\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right) \approx 0\ , \tag{A.56}$$

$$\left\{\left(q^0\right)^2 - \left(q^3\right)^2 ; M_{\rho\sigma}\right\} = 2q^0\left(\delta^0_\rho q_\sigma - \delta^0_\sigma q_\rho\right) - 2q^3\left(\delta^3_\rho q_\sigma - \delta^3_\sigma q_\rho\right) - 4\lambda_{\rho\sigma}\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right) \approx 0\ . \tag{A.57}$$

Desse sistema obtém-se os valores dos multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_0 = -\frac{q^0}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ ,\ \lambda_{1,2} = 0\ ,\ \lambda_3 = \frac{q^3}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ ,$$

$$\lambda_{0(1,2)} = \frac{q^0 q_{1,2}}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ ,\ \lambda_{03} = 0\ ,\ \lambda_{12} = 0\ ,\ \lambda_{(1,2)3} = \frac{q^3 q_{1,2}}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)} \quad .$$

Os geradores, finalmente, são estes:

$$P_0 = p_0 - \frac{q^0(p^2 - m^2)}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ ,\ P_{1,2} = p_{1,2}\ ,\ P_3 = p_3 + \frac{q^3(p^2 - m^2)}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ , \tag{A.58}$$

$$M_{0(1,2)} = q_0 p_{1,2} - q_{1,2} p_0 + \frac{q^0 q_{1,2}(p^2 - m^2)}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ ,\ M_{03} = q_0 p_3 - q_3 p_0\ ,$$

$$M_{12} = q_1 p_2 - q_2 p_1\ ,\ M_{(1,2)3} = q_{1,2} p_3 - q_3 p_{1,2} + \frac{q^3 q_{1,2}(p^2 - m^2)}{2\left(q^0 p^0 - q^3 p^3\right)}\ . \tag{A.59}$$

Como pode-se observar, em todas as formas dinâmicas os geradores do grupo de estabilidade da superfície inicial não são modificados pela restrição a ela, mas somente os hamiltonianos o são, em correspondência com a ação deles. Poder-se-ia perguntar agora, nessa situação que é ainda a mais simples possível, que é a do ponto material livre: Qual é a forma dinâmica que se apresenta mais vantajosa? Olhando para as expressões acima escritas para os hamiltonianos, é claro que as formas de Leutwyler e Stern não o serão, não já somente pela complexidade de seus hamiltonianos, mas também pelo fato de serem seis deles. A forma instantânea, muito usada, apresenta a dificuldade de uma raíz quadrada; em relação a este ponto, lembre-se a impossibilidade de escrever a equação de Klein-Gordon-Fock na forma hamiltoniana na classe dos operadores diferenciais; isto último somente é possível ao

ampliar a dita classe e considerar os operadores pseudo-diferenciais –vide, por exemplo, a Ref. [216]–. Semelhante dificuldade é evitada na forma-ponto e na forma da frente de luz, que se mostram assim muito convenientes.

Já indicamos anteriormente uma vantagem importante da forma-ponto, que é o fato de seus hamiltonianos constituirem um tetra-vetor: A covariância é fácilmente implementada nessa forma dinâmica. Entretanto, na expressão de seus hamiltonianos aparece sempre o produto $q \cdot p$ no denominador, o que faz com que eles sejam complicados. Comparativamente, na forma dinâmica do plano nulo, além de ser aquela em que o número de hamiltonianos é menor, eles têm também uma forma bastante simples; e em adição seu hamiltoniano P_+, associado às translações temporais, depende única e exclusivamente dos momentos; a posição não aparece nele, diferentemente da forma-ponto. Estes motivos fazem da forma dinâmica da frente de luz um tópico de estudo bastante interessante.

Apêndice B

Matrizes de Dirac no plano nulo

Na representação de Weyl, as matrizes de Dirac são:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \, , \, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0_2 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0_2 \end{pmatrix} \, , \tag{B.1}$$

com σ_k as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, , \, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \, , \, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \, . \tag{B.2}$$

Assim, tem-se que as matrizes $\gamma^{\pm}$, definidas segundo:

$$\gamma^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\gamma^0 \pm \gamma^3 \right) \, , \tag{B.3}$$

têm a seguinte forma explícita, na representação em uso:

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, , \, \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \, . \tag{B.4}$$

Os projetores $\Lambda_{\pm}$ definidos na equação (2.134) são, portanto:

$$\Lambda_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, , \, \Lambda_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, . \tag{B.5}$$

Apêndice C

Causalidade e valores limite de funções analíticas

Mostrou-se no Cap. 4 que a condição da causalidade implica que a distribuição retardada da ordem n, $R_n(x_1;\cdots;x_n)$, tem suporte no conjunto:

$$\text{supp}\,(R_n) \subseteq \Gamma_n^+ \quad . \tag{C.1}$$

Particularmente, após a utilização da invariância sob translações do operador de espalhamento, sua parte numérica, $r_n(x_1;\cdots;x_{n-1})$, tem suporte em $\Gamma_{n-1}^+(0)$. A transformada de Fourier (distribucional) dela vem dada pela fórmula:

$$\hat{r}(p) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ipx} r(x) d^m x \quad . \tag{C.2}$$

Acontece, no entanto, que, de forma geral, a obtenção da distribuição retardada pela aplicação da fórmula de divisão da distribuição causal requer da integração de uma determinada distribuição ao longo do eixo real –ou uma parte dele–, sobre o qual se localizam pólos para determinados intervalos de variação do momento. Esta operação se simplifica notóriamente se os tais pólos são deslocados do eixo real, o que se equivale com a complexificação do momento. Se bem existem na literatura teoremas que garantem a existência da continuação analítica das distribuições com suporte num cone –vide, por exemplo, as Refs. [179, 197]–, é mister examinar sua validez no caso particular da dinâmica do plano nulo, visto que a condição usual da causalidade há sido modificada. Isto se reflete, em primeiríssimo lugar, no fato de que o conjunto $\Gamma_n^+(0)$ não é um cone, devido à presença nele do eixo x^-.

Seja $\tilde{p} = p + i\lambda \in \mathbb{R}^m + i\mathbb{R}^m$, e consideremos a extensão da Eq. (C.2):

$$\hat{r}(\tilde{p}) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{i(p+i\lambda)x} r(x) d^m x \quad . \tag{C.3}$$

É evidente que o termo que inclui ao vetor λ modifica as propriedades de convergência da integral. Estamos interessados em determinar em qual conjunto de variação de λ ela é convergente, propriedade essa que está assegurada pela condição:

$$\lambda x \geq 0 \quad . \tag{C.4}$$

Em particular, o caso com $\lambda x = 0$ se corresponde com a Eq. (C.2), existente por hipótese. Como $\text{supp}(r) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(0)$, é claro que $\lambda \in \Gamma_{n-1}^+(0)$, pois de outra forma seria $\lambda x < 0$. Ademais, como $\lambda x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_{n-1} x_{n-1}$, bastará assegurar que seja $\lambda_j x_j \geq 0$ para $\lambda_j, x_j \in \widetilde{V^+}$. Desejamos estabelecer o seguinte resultado.

Proposição C.1: *Sejam $x, \lambda \in \widetilde{V^+}$. Cumpre-se que:*

$$\left(\forall x \in \widetilde{V^+} : \ \lambda x \geq 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}_0^+ e^- \quad . \tag{C.5}$$

Prova: Como os dois vetores pertencem a $\widetilde{V^+}$, se satisfazem:

$$\lambda^2 \geq 0 \quad , \quad \lambda^+ \geq 0 \quad ; \quad x^2 \geq 0 \quad , \quad x^+ \geq 0 \quad . \tag{C.6}$$

Consideremos as desigualdades estritas e as igualdades, referentes às coordenadas x^+ e λ^+, separadamente.

(I) $x^+ > 0$ e $\lambda^+ > 0$: Da desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^2$:

$$-\lambda_\alpha x^\alpha \leq \sqrt{(\lambda^\perp)^2}\sqrt{(x^\perp)^2} \leq \sqrt{2\lambda^+\lambda^-}\sqrt{2x^+x^-} = 2\sqrt{\lambda_+ x^+}\sqrt{\lambda_- x^-} \quad . \tag{C.7}$$

Portanto:

$$\lambda x = \lambda_+ x^+ + \lambda^- x^- + \lambda_\alpha x^\alpha \geq \left(\sqrt{\lambda_+ x^+} - \sqrt{\lambda_- x^-}\right)^2 \geq 0 \quad , \tag{C.8}$$

e a desigualdade desejada se satisfaz sempre.

(II) $x^+ > 0$ e $\lambda^+ = 0$: Neste caso, forçosamente, $\lambda^\alpha = 0$, e por isso:

$$\lambda x = \lambda_+ x^+ \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda_+ \geq 0 \quad . \tag{C.9}$$

(III) $x^+ = 0$ e $\lambda^+ > 0$: Agora é, necessáriamente, $x^\alpha = 0$, de forma que:

$$\lambda x = \lambda_- x^- \quad . \tag{C.10}$$

Como $x^- \in \mathbb{R}$ pode variar livremente, quando seja $x^- < 0$, $\lambda x \geq 0$ somente se $\lambda^+ \leq 0$, o que contradiz a hipótese de ser $\lambda^+ > 0$.

(IV) $x^+ = 0$ e $\lambda^+ = 0$: As componentes transversais dos dois vetores, x^α e λ^α, devem ser nulas. Assim sendo:

$$\lambda x = 0 \geq 0 \quad . \tag{C.11}$$

Em conclusão, o caso (III) impede a possibilidade de ser $\lambda^+ > 0$, de forma que, por força, será $\lambda^+ = 0$. Logo o caso (I) não ocorrerá, o caso (IV) se satisfaz sempre, e o caso (II) impõe a restrição de ser $\lambda_+ \geq 0$. Em suma, $\lambda \in \mathbb{R}_0^+ e^-$. ■

Desta sorte, a distribuição retardada numérica no espaço dos momentos pode ser continuada analíticamente ao tubo $\mathbb{R}^{4(n-1)} + i\left(\mathbb{R}_0^+ e^-\right)^{\times(n-1)}$. Esta região é muito mais restrita que na dinâmica instantânea, em que a parte complexa do momento é livre de variar em todo o cone de luz futuro.

Em particular, podemos utilizar $\lambda = \varepsilon\eta$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ e η o vetor definido na Eq. (2.186). Então a distribuição retardada obtém-se como o valor limite da função analítica da variável p_-, regular na região descrita:

$$\hat{r}(p) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \hat{r}(p + i\varepsilon\eta) \quad . \tag{C.12}$$

Esta última é mais fácil de calcular que a distribuição retardada, pois o quadrado do momento, que por regra geral determina a existência de pólos ou sua inexistência no integrando que dá lugar à dita distribuição, torna-se complexo: $\tilde{p}^2 = p^2 + 2i\varepsilon p_-$, de forma que os pólos não se encontram mais no eixo real. O fato de que, quando $p_- = 0$, seja $\tilde{p}^2 \in \mathbb{R}$, não é problema, pois em tal cenário $\tilde{p}^2 = p^2 < 0$ é do tipo-espaço, região em que não há pólos, como se pode ver de forma geral mediante o estudo das relações de dispersão [100].

Referências

[1] P.A.M. Dirac. *Forms of Relativistic Dynamics*. Rev. Mod. Phys. **21**, 3: 392-399 (1949).

[2] A. Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik **17**: 891–921 (1905). Tradução à língua portuguesa em: H. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski. *Textos Fundamentais da Física Moderna. I Volume: O Princípio da Relatividade*. 5a ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (2001).

[3] H. Poincaré. *La Science et l'Hypothèse* (1902). Tradução ao inglês: *Science and Hypothesis*. The Walter Scott publishing Co. (1905).

[4] A.A. Logunov. *Henri Poincaré and Relativity Theory*. arXiv:physics/0408077 (2004).

[5] G.E. Ramos. *Teoria de Campos no Plano Nulo: Um estudo*. Dissertação de Mestrado, IFT-UNESP (2005).

[6] G.E. Ramos. *Formulação Canônica no Plano Nulo*. Tese de Doutoramento, IFT-UNESP (2009).

[7] H. Leutwyler and J. Stern. *Relativistic Dynamics on a Null Plane*. Ann. Phys. **112**: 94-164 (1978).

[8] H. Bacry, P. Combe e P. Sorba. *Connected subgroups of the Poincaré group. I*. Rep. Math. Phys. **5**, 2: 145-186 (1974).

[9] H. Bacry, P. Combe e P. Sorba. *Connected subgroups of the Poincaré group. II*. Rep. Math. Phys. **5**, 3: 361-392 (1974).

[10] J. Patera, P. Winternitz e H. Zassenhaus. *Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group*. J. Math. Phys. **16**, 8: 1597-1624 (1975).

[11] J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz e H. Zassenhaus. *Subgroups of the Poincaré group and their invariants*. J. Mark Phys. **17**, 6: 977-985 (1976).

[12] F. Rohrlich. *Theory of Photons and Electrons on Null Planes*. Acta Phys. Austriaca **32**: 87-106 (1970).

[13] F. Rohrlich. *Null Plane Field Theory*. Acta Phys. Austriaca, Suppl. VIII: 277-322 (1971).

[14] S.J. Brodsky, H.-C. Pauli e S.S. Pinsky. *Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone*. Phys. Rep. **301**: 299-486 (1998).

[15] S. Fubini e G. Furlan. *Renormalization effects for partially conserved currents*. Physics Physique Fizika **1**: 299-247 (1965).

[16] S. Weinberg. *Dynamics at Infinite Momentum*. Phys. Rev. **150**: 1313-1318, (1966). *Erratum*: Phys. Rev. **158**: 1638 (1967).

[17] H. Bebié e H. Leutwyler. *Relativistically Invariant Solutions of Current Algebras at Infinite Momentum*. Phys. Rev. Lett. **19**: 618-621 (1967).

[18] R.A. Neville. *Quantum Electrodynamics in a Laser Pulse*. Tese de doutoramento. Syracuse University (1968).

[19] R.A. Neville e F. Rohrlich. *Quantum Electrodynamics on Null Planes and Applications to Lasers*. Phys. Rev. D **3**, 8: 1692-1707 (1971).

[20] S.-J. Chang e S. Ma. *Feynman Rules and Quantum Electrodynamics at Infinite Momentum*. Phys. Rev. **180**: 1506-1513 (1969).

[21] J.B. Kogut e D.E. Soper. *Quantum Electrodynamics in the Infinite-Momentum Frame*. Phys. Rev. D **1**, 10: 2901-2914 (1970).

[22] E.P. Biernat, W.H. Klink e W. Schweiger. *Point-Form Hamiltonian Dynamics and Applications*. Few-Body Syst. **49**: 149–161 (2011).

[23] R.A. Neville e F. Rohrlich. *Quantum Field Theory off Null Planes*. Nuovo Cimento, **1**, 4: 625-644 (1971).

[24] H. Leutwyler, J.R. Klauder e L. Streit. *Quantum Field Theory on Lightlike Slabs*. Nuovo Cimento LXVI A, 3: 536-554 (1970).

[25] J.H. Ten Eyck. *Problems in Null-Plane Quantum-Electrodynamics*. Tese de doutoramento. Syracuse University (1973).

[26] J.H. Ten Eyck e F. Rohrlich. *Equivalence of null-plane and conventional quantum electrodynamics*. Phys. Rev. D **9**, 8: 2237-2245 (1974).

[27] S.-J. Chang, R.G. Root e T.-M. Yan. *Quantum Field Theories in the Infinite-Momentum Frame. I. Quantization of Scalar and Dirac Fields.* Phys. Rev. D **7**: 1133-1146 (1973).

[28] S.-J. Chang e T.-M. Yan. *Quantum Field Theories in the Infinite-Momentum Frame. II. Scattering Matrices of Scalar and Dirac Fields.* Phys. Rev. D **7**: 1147-1161 (1973).

[29] T.-M. Yan. *Quantum Field Theories in the Infinite-Momentum Frame. III. Quantization of Coupled Spin-One Fields.* Phys. Rev. D **7**: 1760-1780 (1973).

[30] T.-M. Yan. *Quantum Field Theories in the Infinite-Momentum Frame. IV. Scattering Matrix of Vector and Dirac Fields and Perturbation Theory.* Phys. Rev. D **7**: 1780-1800 (1973).

[31] S.J. Brodsky, R. Roskies e R. Suaya. *Quantum Electrodynamics and Renormalization Theory in the Infinite-Momentum Frame*. Phys. Rev. D **8**: 4574-4594 (1973).

[32] S.D. Drell, D. Levy e T.-M. Yan. *Theory of Deep-Inelastic Lepton-Nucleon Scattering and Lepton-Pair Annihilation Processes. I*. Phys. Rev. **187**: 2159-2171 (1969).

[33] S.D. Drell, D. Levy e T.-M. Yan. *Theory of Deep-Inelastic Lepton-Nucleon Scattering and Lepton Pair Annihilation Processes. II. Deep-Inelastic Electron Scattering*. Phys. Rev. D **1**: 1035-1068 (1970).

[34] S.D. Drell, D. Levy e T.-M. Yan. *Theory of Deep-Inelastic Lepton-Nucleon Scattering and Lepton-Pair Annihilation Processes. III. Deep-Inelastic Electron-Positron Annihilation*. Phys. Rev. D **1**: 1617-1639 (1970).

[35] S.D. Drell e T.-M. Yan. *Connection of Elastic Electromagnetic Nucleon Form Factors at Large Q^2 and Deep Inelastic Structure Functions Near Threshold*. Phys. Rev. Lett. **24**: 181-186 (1970).

[36] K. Yamawaki. *Zero-Mode Problem on the Light Front*.arXiv:hep-th/9802037 (1998).

[37] P. Ullrich. *On the restriction of quantum fields to a lightlike surface*. J. Math. Phys. **45**, 8: 3109-3145 (2004).

[38] W. Polyzou e M. Herrmann. *Tho Light-Front Vacuum*. Few-Body Syst. **57**: 479-484 (2016).

[39] T. Maskawa e K. Yamawaki. *The Problem of $P^+ = 0$ Mode in the Null-Plane Field Theory and Dirac's Method of Quantization*. Progr. Theor. Phys. **56**: 270-283 (1976).

[40] H.-C. Pauli e S.J. Brodsky. *Solving field theory in one space and one time dimension*. Phys. Rev. D **32**: 1993-2000 (1985).

[41] H.-C. Pauli e S.J. Brodsky. *Discretized light-cone quantization: Solution to a field theory in one space and one time dimension*. Phys. Rev. D **32**: 2001-2013 (1985).

[42] J.P. Vary, X. Zhao, A. Ilderton, H. Honkanen, P. Maris e S.J. Brodsky. *Applications of Basis Light-Front Quantization to QED*. Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.) **251-252**: 10-15 (2014).

[43] X. Zhao, H. Honkanen, P. Maris, J.P. Vary e S.J. Brodsky. *Electron g-2 in Light-front Quantization*. Phys. Lett. B **737**: 65-69 (2014).

[44] R.J. Perry, A. Harindranath e K.G. Wilson. *Light-Front Tamm-Dancoff Field Theory*. Phys. Rev. Lett. **65**, 24: 2959-2962 (1990).

[45] B.L.G. Bakker, A. Bassetto, S.J. Brodsky, W. Broniowski, S. Dalley, T. Frederico, ... e T. Heinzl. *Light-Front Quantum Chromodynamics. A framework for the analysis of hadron physics*. Nuclear Phys. B (Proc. Suppl.) **251-252**: 165-174 (2014).

[46] E. Tomboulis. *Quantization of the Yang-Mills Field in the Null-Plane Frame*. Phys. Rev. D **8**: 2736-2740 (1973).

[47] A. Casher. *Gauge fields on the null plane*. Phys. Rev. D **14**: 452-464 (1976).

[48] B.M. Pimentel e A.T. Suzuki. *Light-cone gauge and the (causal) principal value prescription*. Phys. Rev. D **42**: 2115-2119 (1990).

[49] B.M. Pimentel, A.T. Suzuki e G.E.R. Zambrano. *Functional Analysis for Gauge Fields on the Front-Form and the Light-Cone Gauge*. Few-Body Syst. **52**: 437-442 (2012).

[50] D. Bhamre, A. Misra e V.K. Singh. *Equivalence of One Loop Diagrams in Covariant and Light Front QED Revisited*. Few Body Syst. **59**: 107 (2018).

[51] D. Bhamre e A. Misra. *Equivalence of Light-Front and Covariant Electrodynamics at One Loop Level and the form of the Gauge Boson Propagator*. arXiv:2003.10881 (2020).

[52] A.T. Suzuki e T.H.O. Sales. *The Light-Front Gauge Propagator: The Status Quo*. arXiv:hep-th/0408135 (2004).

[53] L. Mantovani, A. Bacchetta, B. Pasquini e X. Xiong. *The Gauge-Field Propagator in Light-Cone Gauge: Which is the Correct One?* Few-Body Syst. **58**: 84 (2017).

[54] A.T. Suzuki e C.-R. Ji. *Ward-Takahashi Identity in QED_4 at the One-loop Level on the Light-Front*. PoS **LC2019**: 082 (2020).

[55] D. Mustaki, S. Pinsky, J. Shigemitsu e K. Wilson. *Perturbative renormalization of null-plane QED*. Phys. Rev. D **43**, 10: 3411-3427 (1991).

[56] M. Born e P. Jordan. *Zur Quantenmechanik*. Z. Phys. **34**: 858-888 (1925).

[57] P. Jordan e W. Pauli. *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder*. Z. Phys. **47**: 151-173 (1928).

[58] P. Jordan e E. Wigner. *Über das Paulische Äquivalenzverbot*. Z. Phys. **47**: 631-651 (1928).

[59] W. Heisenberg e W. Pauli. *Zur Quantendynamik der Wellenfelder*. Z. Phys. **56**: 1-61 (1929).

[60] A.S. Wightman. *The Dirac equation*. Em: A. Salam e E.P. Wigner (Eds.). *Aspects of Quantum Theory*. Cambridge University Press (1972).

[61] W. Pauli. *The Connection Between Spin and Statistics*. Phys. Rev. **58**: 716-722 (1940).

[62] W. Pauli. *Relativistic Field Theories of Elementary Particles*. Rev. Mod. Phys. **13**: 203-232 (1941).

[63] S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*. Prog. Theor. Phys. **1**: 27–42 (1946).

[64] Z. Koba, T. Tati e S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. II*. Prog. Theor. Phys. **2**: 101–116 (1947).

[65] Z. Koba, T. Tati e S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. III*. Prog. Theor. Phys. **2**: 198–208 (1947).

[66] S. Kanesawa e S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. IV*. Prog. Theor. Phys. **3**: 1–13 (1948).

[67] S. Kanesawa e S. Tomonaga. *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. V*. Prog. Theor. Phys. **3**: 101–113 (1948).

[68] J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation*. Phys. Rev. **74**: 1439-1461 (1948).

[69] J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics. II. Vacuum Polarization and Self-Energy*. Phys. Rev. **75**: 651-679 (1949).

[70] J. Schwinger. *Quantum Electrodynamics. III. The electromagnetic properties of the electron: Radiative corrections to scattering*. Phys. Rev. **76**: 790-817 (1949).

[71] R.P. Feynman. *Space-Time Approach to Quantum Electro Dynamics*. Phys. Rev. **76**: 769-789 (1949).

[72] F.J. Dyson. *The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman*. Phys. Rev. **75**: 486-582 (1949).

[73] F.J. Dyson. *The S matrix in quantum electrodynamics*. Phys. Rev. **75**: 1736-1755 (1949).

[74] K.O. Friedrichs. *Mathematical aspects of the quantum theory of fields*. Interscience Publishers (1953).

[75] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Parte I*. Hermann (1957).

[76] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Parte II*. Hermann (1959).

[77] J. Lützen. *The Prehistory of the Theory of Distributions*. Springer (1982).

[78] J.M. Cook. *The mathematics of second quantization*. Trans. Am. Math. Soc. **74**: 222-245 (1953).

[79] V. Fock. *Konfigurationsraum und Zweite Quantelung*. Z. Phys. **75**: 622-647 (1950).

[80] R. Haag. *On Quantum Field Theories*. Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, 12 (1955).

[81] D.L. Fraser. *Haag's theorem and the interpretation of quantum field theories with interactions*. Tese de doutoramento. University of Pittsburgh (2006).

[82] G. Källén. *Quantum Electrodynamics*. Springer (1972).

[83] N. Nakanishi e I. Ojima. *Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity*. World Scientific (1990).

[84] A.S. Wightman. *Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values*. Phys. Rev. **101**, 2: 860-866 (1956).

[85] N.N. Bogoliubow e O.S. Parasiuk, *Über die multiplikation der kausalfunktionen in der quantentheorie der felder*. Acta Math. **97**: 227-266 (1957).

[86] A.S. Wightman. *La théorie quantique locale et la théorie quantique des champs*. Ann. Inst. H. Poincaré A **1**: 403-420 (1964).

[87] A.S. Wightman e L. Garding. *Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory*. Ark. Fys. **28**: 129-189 (1964).

[88] R.F. Streater e A.S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and all that*. The Benjamin/Cummings Publishing Company (1964).

[89] J. Glimm e A. Jaffe. *Quantum Physics*. Springer-Verlag (1981).

[90] A. Jaffe e E. Witten. *Quantum Yang-Mills Theory*. https://www.claymath.org/sites/default/files/yangmills.pdf

[91] H. Lehmann, K. Symanzik e W. Zimmermann. *Zur Furmulierung quantisierter Feldtheorien*. Nuovo Cim. **1**: 205-225 (1955).
Traduzido ao inglês por C.F. Barger: *On the formulation of quantized field theories*. CBF Scientific Translations.

[92] H. Araki. *Von Neumann Algebras of Local Observables for Free Scalar Field*. J. Math. Phys. **5**: 1-13 (1964).

[93] R. Haag e D. Kastler. *An algebraic approach to quantum field theory*. J. Math. Phys. **5**: 848-861 (1964).

[94] I.E. Segal. *Postulates for General Quantum Mechanics*. Ann. Math. **48**, 4: 930-948 (1947).

[95] R. Haag. *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*. 2 ed., Springer (1996).

[96] W. Heisenberg. *Die 'Beobachtbaren Grössen' in der Theorie der Elementarteilchen*. Z. Phys. **120**: 513-538 (1943).
Este artigo pode ser encontrado em: W. Blum, H.-P. Dürr e H. Rechenberg (Eds.). *Werner Heisenberg. Gesammelte Werke / Collected Works. Series A / Part II. Original Scientific Papers*. Springer-Verlag (1989), em que excelentes comentários a respeito das motivações de Heisenberg para a definição da matriz S são dados por R. Oehme.

[97] J. Lacki, H. Ruegg e G. Wanders (Eds.). *E.C.G. Stueckelberg, An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics. Selected Scientific Papers with Commentaries*. Birkhauser (2009).

[98] E. Stueckelberg e D. Rivier. *Causalité et structure de la matrice S*. Helv. Phys. Acta **23**: 215-222 (1950).
Este artigo é reproduzido também na Ref. [97].

[99] N.N. Bogoliubov, B.V. Medvedev e M.K. Polivanov. *Voprossy Teorii Dispersionnykh Sootnoshenii*. Moscow, Fizmatgiz (1958).
Tradução ao inglês em: N.N. Bogoliubov, B.V. Medvedev and M.K. Polivanov. *Problems in the Theory of Dispersion Relations*. Institute for Advanced Study, Princeton (1958).

[100] N.N. Bogoliubov e D. Shirkov. *Introduction to the theory of Quantized Fields*. 3 ed., John Wiley & Sons - Interscience Publishers (1979).

[101] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak e I.T. Todorov. *General Principles of Quantum Field Theory*. Kluwer Acad. Publ. (1990).

[102] B.M. Stepanov. *On the construction of an S-matrix in accordance with the theory of perturbations* (em russo). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **29**: 1037-1054 (1965).
Tradução ao inglês em: *Eighteen papers on analysis and quantum mechanics*. American Mathematical Society Translations, Series 2, Volume 91, American Mathematical Society (1970).

[103] H. Epstein e V. Glaser. *The role of locality in perturbation theory*. Ann. Inst. H. Poincaré A **19**: 211-295 (1973).

[104] S. Łojasiewicz. *Sur le problème de la division*. Studia Mathematica T. XVIII: 87-136 (1959).

[105] B. Malgrange. *Division des distributions. I: Distributions prolongeables*. Séminaire Schwartz T. 4, exp. No. 21: 1-5 (1959-1960).

[106] B. Malgrange. *Division des distributions. II: L'Inégalité de Łojasiewicz*. Séminaire Schwartz T. 4, exp. No. 22: 1-8 (1959-1960).

[107] G. Scharf. *Finite Quantum Electrodynamics. The Causal Approach*. 3 ed., Dover (2014).

[108] S. Fassari e G. Scharf. *Borel Summability in Finite QED I: Outline and Results*. Em: S. Albeverio, U. Cattaneo e D. Merlini (Eds.). *Stochastic processes, physics and geometry II*. World Scientific: 278-288 (1991).

[109] V.S. Vladimirov, Y.N. Drozzinov e B.I. Zavialov. *Tauberian Theorems for Generalized Functions*. Kluwer Acad. Publ. (1988).

[110] M. Dütsch, F. Krahe e G. Scharf. *Scalar QED Revisited*. Nuovo Cim. **106** A, 3: 277-307 (1993).

[111] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe e G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. I*. Nuovo Cim. A **106**: 1029-1041 (1993).

[112] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe e G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. II*. Nuovo Cim. A **107**: 375-406 (1994).

[113] M. Dütsch, T. Hurth e G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. III*. Nuovo Cim. A **108**: 679-708 (1995).

[114] M. Dütsch, T. Hurth e G. Scharf. *Causal Construction of Yang-Mills Theories. IV. Unitarity*. Nuovo Cim. A **108**: 737-773 (1995).

[115] M. Dütsch e G. Scharf. *Electroweak theory without spontaneous symmetry breaking*. e-Print: hep-th/9612091 (1996).

[116] A.W. Aste, G. Scharf e M. Dütsch. *Perturbative gauge invariance: Electroweak theory II*. Ann. Phys. **8**: 389-404 (1999).

[117] A.W. Aste e G. Scharf. *NonAbelian gauge theories as a consequence of perturbative quantum gauge invariance*. Int. J. Mod. Phys. A **14**: 3421-3434 (1998).

[118] G. Scharf. *Gauge Field Theories: Spin One and Spin Two. 100 Years After General Relativity*. Dover (2016).

[119] M. Dütsch. *Slavnov-Taylor Identities From the Causal Point of View*. Int. J. Mod. Phys. A **12**: 3205-3248 (1997).

[120] M. Dütsch. *Non-uniqueness of quantized Yang-Mills theories*. J. Phys. A: Math. Gen. **29**: 7597-7617 (1996).

[121] D.R. Grigore. *Trivial Lagrangians in the Causal Approach*. Rom. J. Phys. **61**: 320-332 (2016).

[122] D.R. Grigore. *Cohomological Aspects of Gauge Invariance in the Causal Approach*. Rom. J. Phys. **55**: 386-438 (2010).

[123] D.R. Grigore. *The Structure of the Anomalies of Gauge Theories in the Causal Approach*. Journ. Phys. A **35**: 1665-1689 (2002).

[124] D.R. Grigore e G. Scharf. *No-go result for supersymmetric gauge theories in the causal approach*. Ann. Phys. **17**: 864-880 (1997).

[125] G. Scharf, W.F. Wreszinski, B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli. *Causal Approach to (2+1)-Dimensional QED*. Annals of Physics **231**: 185-208 (1994).

[126] L.A. Manzoni, B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli. *Causal theory for the gauged Thirring model*. Eur. J. Phys. C **8**: 353-361 (1999).

[127] L.A. Manzoni, B.M. Pimentel e J.L. Tomazelli. *Radiative corrections to the causal Thirring model*. Eur. J. Phys. C **12**: 701-705 (2000).

[128] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, J.S. Valverde e L.A. Manzoni. *Duffin–Kemmer–Petiau Theory in the Causal Approach*. Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2: 205-227 (2002).

[129] J. Beltrán, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *The causal approach proof for the equivalence of $SDKP_4$ and $SQED_4$ at tree-level*. Int. J. Mod. Phys. A **35**, 9: 2050042 (2020).

[130] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *Causal approach for the electron-positron scattering in generalized quantum electrodynamics*. Phys. Rev. D **90**: 085012 (2014).

[131] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *Normalizability analysis of the generalized quantum electrodynamics from the causal point of view*. Int. J. Mod. Phys. A **32**: 1750165 (2017).

[132] O.A. Acevedo, J.V. Beltrán, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *Causal perturbation theory approach to Yukawa's model*. Eur. Phys. J. Plus **136**: 895 (2021).

[133] M. Dütsch e K. Fredenhagen. *A local (perturbative) construction of observables in gauge theories: The example of QED*. Commun. Math. Phys. **203**: 71–105 (1999).

[134] R. Brunetti e K. Fredenhagen. *Microlocal Analysis and Interacting Quantum Field Theories: Renormalization on Physical Backgrounds*. Commun. Math. Phys. **208**: 623-661 (2000).

[135] M. Dütsch e K. Fredenhagen. *Causal perturbation theory in terms of retarded products, and a proof of the Action Ward Identity*. Rev. Math. Phys. **16**: 1291–1348 (2004).

[136] R. Brunetti, M. Dütsch e K. Fredenhagen. *Perturbative algebraic quantum field theory and the renormalization groups*. Adv. Theor. Math. Phys. **13**: 1541–1599 (2009).

[137] K. Fredenhagen e K. Rejzner. *Batalin–Vilkoviski formalism in perturbative algebraic quantum field theory*. Commun. Math. Phys. **317**: 697-725 (2013).

[138] M. Dütsch. *From Classical Field Theory to Perturbative Quantum Field Theory*. Birkkhäuser (2019).

[139] S. Hollands e R. Wald. *Local Wick Polynomials and Time Ordered Products of Quantum Fields in Curved Spacetime*. Commun. Math. Phys. **223**: 289-326 (2001).

[140] S. Hollands e R.M. Wald. *Existence of local covariant time-ordered products of quantum fields in curved spacetime*. Commun. Math. Phys. **231**: 309–345 (2002).

[141] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *The Epstein-Glaser causal approach to the light-front QED_4. I: Free theory*. Ann. Phys. **351**: 1034-1061 (2014).

[142] R. Bufalo, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *The Epstein-Glaser causal approach to the light-front QED_4. II: Vacuum polarization tensor*. Ann. Phys. **351**: 1062-1084 (2014).

[143] A.D. Sukhanov. *On the interaction Hamiltonian in quantum field theory*. J. Exptl. Theoret. Phys. **41**: 1915-1928 (1961).

[144] A.D. Sukhanov. *The connection between operators in the Heisenberg and interaction representations in local quantum field theory*. J. Exptl. Theoret. Phys. **47**: 1303-1314 (1964).

[145] V.A. Karmanov, J.-F. Mathiot e A.V. Smirnov. *Regularization of the fermion self-energy and the electromagnetic vertex in the Yukawa model within light-front dynamics*. Phys. Rev. D **75**: 045012 (2007).

[146] B.L.G. Bakker e C.-R. Ji. *Light-front singularities in the Yukawa model*. Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.) **161**: 15-20 (2006).

[147] O.A. Acevedo, K.P. Gallo, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano. *Campos clássicos no plano nulo*. Rev. Bras. Ens. Fís. **43**: e20210200 (2021).

[148] O.A. Acevedo, B.M. Pimentel e D.E. Soto. *Epstein-Glaser's Causal Light-Front Field Theory*. Proc. Sci. **LC2019**: 021 (2020).

[149] O.A. Acevedo e B.M. Pimentel. *Null-plane causal perturbation theory*. Eur. Phys. J. Plus **137**: 287 (2022).

[150] O.A. Acevedo e B.M. Pimentel. *Radiative corrections in the Yukawa model within the null-plane causal perturbation theory framework*. Phys. Rev. D **103**: 076022 (2021).

[151] O.A. Acevedo e B.M. Pimentel. *Quantum electrodynamics in the null-plane causal perturbation theory II*. Em preparação.

[152] O.A. Acevedo e B.M. Pimentel. *Quantum electrodynamics in the null-plane causal perturbation theory I*. Submetido.

[153] W. Rindler. *Relativity. Special, General and Cosmological*. 2a ed. Oxford University Press (2006).

[154] V. Fock. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon Press (1964).

[155] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press. (1923).

[156] E. Goursat. *A Course in Mathematical Analysis. Vol. I*. Ginn and Company (1904).

[157] A.N. Tíjonov e A.A. Samarsky. *Ecuaciones de la física matemática*. Mir Moscú (1972).

[158] E. Gourgoulhon. *Special Relativity in General Frames. From Particles to Astrophysics*. Springer-Verlag (2013).

[159] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. 2a ed. Hermann (1979).

[160] L. Landau e E. Lifchitz. *Théorie du champ*. La Paix (1966).

[161] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press (2006).

[162] N.P. Konopleva e V.N. Popov. *Gauge Fields*. Harwood academic publishers, (1981).

[163] E. Prugovečki. *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. 2a ed. Dover (2006).

[164] G.G. Emch. *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Dover (2009).

[165] C.R. de Oliveira. *Introdução à análise funcional*. IMPA (2012).

[166] N.P. Landsman. *Foundations of Quantum Theory. From Classical Concepts to Operator Algebras*. Springer (2017).

[167] S. French. *Identity and Individuality in Quantum Theory*. Em: E.N. Zalta (Ed.). *The Stanford Encyclopedia on Philosophy* (Winter 2019 Edition), https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/qt-idind/

[168] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Pinceton University Press (1955).

[169] J. Earman. *Quantum Physics in Non-Separable Hilbert Spaces*. Preprint (2020).

[170] G. Nenciu e G. Scharf. *On regular external fields in quantum electrodynamics*. Helv. Phys. Acta **51**, 3: 412-424 (1978).

[171] A. Duncan. *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory*. Oxford University Press (2012).

[172] S. Schlieder e E. Seiler. *Some Remarks on the "Null Plane Development" of a Relativistic Quantum Field Theory*. Commun. Math. Phys. **25**: 62-72 (1972).

[173] O.I. Zavialov. *Renormalized Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Publishers (1990).

[174] F.G. Friedlander e M. Joshi. *Introduction to the theory of distributions*. 2a ed. Cambridge University Press (1998).

[175] A.G. Sveshnikov e A.N. Tikhonov. *The Theory of Functions of a Complex Variable*. Mir Publishers (1971).

[176] D. Prange. *Lorentz covariance in Epstein-Glaser renormalization*. arXiv:hep-th/9904136 (1999).

[177] P.P. Srivastava. *Perspectives of Light-Front Quantized Field Theory: Some New Results*. arXiv:hep-ph/9908492v1 (1999).

[178] J. Hilgevoord. *Dispersion Relations and Causal Description*. North Holland (1960).

[179] H.M. Nussenzveig. *Causality and Dispersion Relations*. Academic Press (1972).

[180] T. Hurth and K. Skenderis. *Quantum Noether method*. Nuc. Phys. B **541**: 566-614 (1999).

[181] D.Z. Freedman, K. Johnson e J. Latorre. *Differential regularization and renormalization: a new method of calculation in quantum field theory*. Nuc. Phys. B **371**(1-2): 353–414 (1992).

[182] P.P. Srivastava e S.J. Brodsky. *Light-front quantized QCD in the light-cone gauge: The doubly transverse gauge propagator*. Phys. Rev. D **64**: 045006 (2001).

[183] K. Nishijima. *Fundamental Particles*. W.A. Benjamin (1963).

[184] V. Mukherji. *A History of the Meson Theory of Nuclear Forces from 1935 to 1952*. Archive for History of Exact Sciences, **13**, 1: 27-102 (1974).

[185] L.M. Brown e H. Rechenberg. *The Origin of the Concept of Nuclear Forces*. CRC Press. (1996).

[186] L.M. Brown e H. Rechenberg. *Quantum field theories, nuclear forces, and the cosmic rays (1934-1938)*. Am. J. Phys. **59**, 7: 595-605 (1991).

[187] W. Heisenberg. *Über den Bau der Atomkeme* Z. Phys. **77**: 1-11 (1932); *ibid*. **78**: 156-164 (1932); *ibid*. **80**: 587-596 (1933). Tradução ao inglês da parte I e um trecho da parte III em: D.M. Brink. *Nuclear Forces*. Oxford (1965).

[188] A.I. Miller. *Werner Heisenberg and the beginning of nuclear physics*. Physics Today **38**, 11: 60-68 (1985).

[189] H. Yukawa. *On the interaction of elementary particles I*. Proc. Physico-Math. Soc. of Jpn. **17**: 48-57 (1935).

[190] N. Kemmer. *The charge-dependence of nuclear forces*. Proc. Cambridge Phil. Soc. **34**: 354-364 (1938).

[191] G.C. Wick. *Range of Nuclear Forces in Yukawa's Theory*. Nature **142**: 993-994 (1938).

[192] N. Kemmer. *Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction*. Proc. Roy. Soc. (London) A **166**: 127-153 (1938).

[193] CMS Collaboration. *Analysis of the CP structure of the Yukawa coupling between the Higgs boson and τ leptons in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV*. CMS-PAS-HIG-20-006 (2020).

[194] M. Benghi. *Three dimensional Yukawa models and CFTs at strong and weak couplings*. arXiv:2007.03784v1 (2020).

[195] S. Glazek, A. Harindranath, S. Pinsky, J. Shigemitsu e K. Wilson. *Relativistic bound-state problem in the light-front Yukawa model*. Phys. Rev. D **47**: 1599-1619 (1993).

[196] N. Piskunov. *Differential and Integral Calculus*. MIR Publishers Moscow (1969).

[197] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II: Fourier Analysis, Self-adjointness*. Academic Press (1975).

[198] R. Casana, B.M. Pimentel e G.E.R. Zambrano. *$SQED_2$ on the null-plane*. Revista Colombiana de Física **41**, 1: 220-222 (2009).

[199] V.S. Vladimirov. *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*. Dover (2007).

[200] R. Utiyama. *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*. Phys. Rev. **101**, 5: 1597-1607 (1956).

[201] O.A. Acevedo, R.R. Cuzinatto, B.M. Pimentel e P.J. Pompeia. *Teorias de gauge a la Utiyama*. Rev. Bras. Ens. Fís. **40**, 4: e4302 (2018).

[202] H. Epstein e V. Glaser. *Adiabatic limit in perturbation theory*. Em: G. Velo e A.S. Wightman (eds.), *Renormalization Theory*: 193-254 (1976).

[203] P. Blanchard e R. Seneor. *Green's functions for theories with massless particles (in perturbation theory)*. Ann. Inst. H. Poincaré A **XXIII**, 2: 147-209 (1975).

[204] P. Duch. *Weak Adiabatic Limit in Quantum Field Theories with Massless Particles*. Ann. H. Poincaré **19**: 875-935 (2018).

[205] A. Aste, G. Scharf e U. Walther. *Power counting versus singular order in the Schwinger model*. Nuovo Cim. A **111**: 323-327 (1998).

[206] C. Itzykson e J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover (2005).

[207] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields. Volume I. Foundations*. Cambridge University Press (1995).

[208] W.H. Furry. *A Symmetry Theorem in the Positron Theory*. Phys. Rev. **51**: 125-129 (1937).

[209] E.S. Fradkin, D.M. Gitman e Sh.M. Shvartsman. *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*. Springer-Verlag (1991).

[210] B.M. Stepanov. *On the problem of introduction of dynamic variables in the quantum theory of fields* (em russo). Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. **100**: 889 (1955).

[211] G. Källén. *Formal integration of the equations of quantum theory in the Heisenberg representation*. Arkiv Fysik **2**: 371-410 (1951).

[212] C.N. Yang e D. Feldman. *The S-Matrix in the Heisenberg Representation*. Phys. Rev. **79**, 6: 972-978 (1950).

[213] A. Khodjamirian. *Hadron Form Factors. From Basic Phenomenology to QCD Sum Rules*. CRC Press, Taylor & Francis Group (2020).

[214] M. Henneaux e C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press (1994).

[215] L. Landau e E. Lifchitz. *Mécanique*. La Paix (1969).

[216] C. Lämmerzahl. *The pseudodifferential operator square root of the Klein–Gordon equation*. J. Math. Phys. **34**, 9: 3918–3932 (1993).