Universidade Estadual Paulista–UNESP
Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara
Departamento de Economia
Programa de Graduação em Ciências Econômicas

Bruno Teixeira Sousa Barbosa

A Crítica de Mandelbrot: Normalidade como exceção e não como regra

Araraquara
2013

Bruno Teixeira Sousa Barbosa

A Crítica de Mandelbrot: Normalidade como exceção e não como regra

Monografia apresentada ao Programa de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Área de concentração: Economia Matemática

Orientador: Alexandre Sartoris Neto

Araraquara
2013

Para todos aqueles que tornaram este trabalho possível.

Agradecimentos

Em primeiro lugar este trabalho não teria sido possível sem a ajuda e apoio do meu orientador, portanto agradeço ao professor Alexandre, não somente pela orientação ao longo deste trabalho, mas também pela importância que teve para mim durante a graduação, tanto pelas aulas que tanto aproveitei, como também por ser um exemplo a ser seguido.

Além dele, gostaria de agradecer aos professores André, Carlos Cinquetti, Claudia Heller, Claudio Paiva e Carlos Cinquetti, que mesmo que indiretamente, contribuíram para que este trabalho acontecesse.

Agradeço aos meus pais, que viabilizaram a realização da graduação e sem os quais não teria chegado até aqui.

Gostaria de agradecer também ao meu grande amigo Raphael, que não somente colaborou com este trabalho, mas também esteve presente em todos os momentos de dificuldade, e me ajudou a superá-los.

Agradeço também à Deisi, que nos últimos meses, me encorajou, apoiou e não me deixou desistir.

A todos, meu muito obrigado.

"Begin at the beginning, and go on till you come to the end. Then, stop."

L. Caroll

Resumo

BARBOSA, B.T.S **A Crítica de Mandelbrot: Normalidade como exceção e não como regra**. 41 p. Monografia – Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara, UNESP, 2013.

A partir de uma introdução sucinta sobre a evolução dos modelos de precificação de ativos, busca-se aqui introduzir a crítica feita por Benoit Mandelbrot à utilização de hipóteses de normalidade para modelos de precificação de ativos baseada principalmente na divergência teórica e empírica entre problema propostos e resultados esperados, e aqueles encontrados empiricamente. A seguir, propõe-se uma alternativa que tenta resolver alguns dos problemas implicados pelas hipóteses tradcionalmente assumidas.

Palavras-chave: Processos estocásticos. Movimento Browniano. Distribuição Gaussiana .

Abstract

BARBOSA, B.T.S **Mandelbrot' critique: Normality as an exception and not as a rule**. 41 p. Monograph – FCL - Araraquara, UNESP 2013.

Starting with a brief introduction about the evolution of asset pricing models, we seek here to introduce the critique made by Benoit Mandelbrot about using the normality hypothesis when building such models. This critique arises when empirical and theoretical models where confronted and the expected results diverged from the ones obtained. Next, we reproduce Mandelbrot alternative which he believes is sufficient to solve the main problems implied by the normality hyphotesis.

Keywords: Stochastic Processes. Brownian Motion. Gaussian Distribution.

Sumário

Introdução

Bachelier estabeleceu uma referência para elaboração de modelos para séries de preços de ativos que se tornou referência no mundo das finanças desenvolvimentos posteriores culminaram inclusive no famoso modelo de Black-Scholes. E lembrado com frequência como um dos propositores do movimento Browniano.

Porém, após um período de forte retomada do seu trabalho na década de 60, surgiram críticas quanto a adequação empírica deste modelo tendo em vista a disponibilização de grandes quantidades de dados e dos primeiros computadores capazes de dar conta de modelos matemáticos já relativamente sofisticados. E desta época que remonta o trabalho de Benoit Mandelbrot, um matemático que se interessou e resolveu se aprofundar nos estudos sobre o mercado de ativos.

Porém, ao retomar o trabalho de Bachelier, e confrontá-lo com os dados disponíveis, deu-se de conta das inadequações do modelo, e propôs que fosse modificado tendo em vista tais inadequações. Tenta-se aqui expôr o modelo de Bachelier, os movimentos posteriores a ele e por fim a crítica a alternativa proposta por Mandelbrot.

Justifica-se a necessidade de analisar tal questão a partir do fato constado que a consideração das críticas feitas por Mandelbrot e as alternativas propostas por ele permanecem relativamente restritas e não tão amplamente difundidas quanto a seriedade do teor delas. Porém, abre-se margem aqui também para questionar-se se a proposição alternativa altera realmente de forma significativa aqueles resultados esperados.

O primeiro capítulo contém um "‘overview"’ histórico que começa em Bachelier e culmina nas críticas de Manelbrot da década de 1960, sem deixar de levar em consideração os trabalhos entre estes dois momentos, como Sprenkle1961, Boness1964, Samuelson1964 e Black-Scholes.

No segundo capítulo faz-se uma abordagem mais detalhada sobre o modelo de Bachelier além da apresentação da definição, formalização e propriedades do movimento Browniano, que se constitui a base de seu modelo.

No terceiro capítulo, é apresentada a crítica feita por Mandelbrot e uma das possíveis alternativas de solução a alguns dos problemas encontrados: a substituição do Bm por um *fractional* Bm.

Por fim, conclui-se o trabalho com um comparativo entre ambos os modelos. Neste, são apresentadas, algumas semelhanças e diferenças, bem como uma avaliação sobre a real significância da inclusão de um componente fracional.

Capítulo 1

De Bachelier a Mandelbrot

1.1 Bachelier

Louis Bachelier é o marco inicial da aplicação de processos estocásticos em modelos de ativos financeiros. Seu trabalho data de 1900, *Théorie de la Spéculation* (BACHELIER, 1900), e inaugurou uma longa tradição de pesquisa baseada em suas hipóteses e conclusões.

Seu estudo pautou-se na necessidade de entender o comportamento aleatório que as séries de preços de ativos apresentavam.

Para ele, a flutuação dos preços dos títulos estava muito além de uma simples relação de causa e efeito entre as flutuações e e os acontecimentos econômicos.

A justificativa para que o preço do ativo tenha subido porque um dado fenônmeno ocorreu, para Bachelier não era satisfatória. Ele considerava necessário entender a oscilação dos preços levando em conta a distribuição de probabilidades associada a todas as possíveis variações. Com isto, ele acreditva ser possível modelar matematicamente a dinâmica dos preços de ativos.

A justificativa para levar em conta a distribuição probabilística dos preços, em detrimento de uma abordagem 'pragmática' reside na justificativa dada pelo próprio autor: A dinâmica de movimentação dos preços não era tão simplória quanto a relação de causa e efeito que os investidores da Bolsa de Paris acreditavam que existia, mas sim era o resultado da combinação de uma gama de acontecimentos que em proporções variadas estariam sendo responsáveis pela variação no preço. Além disso, a interdependência dos títulos, também seria responsável pela explicação das oscilações de preço.

Para construir então um modelo que fosse capaz de explicar as variações de preço, Bachelier precisava de uma forma de descrever matematicamente a aleatoriedade envolvida na passagem de um momento no tempo para o momento seguinte. Porém, não havia na teoria estatística, disponível à época, ferramental que desse conta de descrever o problema diante do qual Bachelier se encontrava.

Ficou, então, à cargo de Bachelier, o desenvolvimento dos métodos que seriam necessários para a execução do seu trabalho. Um pouco depois de Bachelier, Einstein viria a se debruçar sobre um problema semelhante, o que lhe traria necessidades parecidas às de Bachelier, e também semelhante solução.

O principal método por trás desta investigação é o movimento browniano. O movimento foi descrito incialmente por um biólogo, Richard Brown, em 1826, ao observar o comportamento errático de partículas microscópicas em uma solução aquosa (BROWN, 1828). Porém Brown não formalizou suas observações, ficando para Einstein e Bachelier a retomada desta questão. Ambos atuaram de forma independente na tentativa de descrever e prever o comportamento deste tipo de movimento. Einstein preocupado com um problema sobre difusão de partículas elementares, enquanto Bachelier com seu problema de precificação de ativos. O trabalho de Einstein ganhou ampla notoriedade na Física, enquanto que Bachelier permaneceu negligenciado na Economia por mais de meio século.

Somente um século após o descobrimento deste movimento, ele seria devidamente formalizado por Wiener, tanto que também leva o nome de processo de Wiener. Não somente a formalização, mas também outras questões de relevância como a demonstração da existência deste processo, e a demonstração que se tratava do limite de convergência de um processo de caso discreto só foram primeiramente feitas por Wiener.

Mesmo com um trabalho pioneiro e um orientador de renome, Poincaré, seu trabalho não obteve destaque assim que foi publicado. Bachelier não foi capaz de superar uma das máximas existentes à época que matemática não deveria ser misturada com certa espécie problemas, mais específicamente problemas financeiros de caráter especulativo. Posteriormente seu trabalho teve um reconhecimento, mesmo que não à altura do que era merecido, mas isso só viria a ocorrer mais de 50 anos depois. Mais do que isso, à época de sua publicação, a tese não foi suficiente nem para lhe garantir um emprego universidade alguma de Paris, já que buscava-se à época que o doutorado fosse um demonstrativo das habilidades matemáticas pelo candidato ao longo de sua formação, mas pela forma como o tema era visto, muitos encaravam que não havia tal demonstração em um trabalho de tal natureza, mesmo estando tal visão equivocada, dada a importância posterior que o trabalho veio a adquirir.

Não é, entretanto, devido somente à sua escolha de tema que Bachelier teve uma carreira conturbada. Seu forte temperamento e ao fato de ter sido involuntariamente parte de uma intriga política dificultaram-lhe ainda mais as coisas.

Bachelier foi pivô de desavenças políticas, de acordo com sua própria interpretação, que dificultaram ainda mais sua colocação na academia parisiense. Num dos episódios, foi candidato a uma das vagas de professor efetivo, porém um outro candidato já estava 'encaminhado' para a dita vaga, e além disso, agiu de forma ardilosa ao encontrar um pequeno erro no trabalho de Bachelier e submetê-lo descontextualizado do resto do trabalho ao parecer de um dos expoentes da Estatística à época: Paul Lévy.

Lévy confirmou que se tratava de um erro e seu veredito fechou em definitivo as portas para Bachelier naquele concurso e pelos próximos 20 anos. Bachelier inconformado com a decisão da banca questionou os critérios de escolha, e afirmou estar sendo vítima de um preteritismo político, chegando até a afirmar que Lévy sequer tinha se dado ao trabalho de ler seu trabalho por inteiro e chegou até a dizer que tal atitude por parte de Levy se tratava de um favoritismo em relação a um colega judeu (tanto Lévy como o outro candidato eram Judeus).

Posteriormente Lévy se desculpou com Bachelier, reconhecendo que havia errado ao não ler o trabalho dele por inteiro e que de fato cometera uma justiça. Porém, à altura da desculpa, já o havia lido, e reconhecia que se tratava de uma obra com diversas qualidades.

O que dificultou mais ainda foi uma carta que Bachelier denunciando a armação da qual teria sido vítima, que só agravou suas dificuldades, e demonstrou seu forte temperamento.

Entretanto, em retrospecto, é inegável a importância da sua contribuição para o desenvolvimento da teoria econômica. Algumas das hipóteses que viriam a compor a Hipótese dos Mercados Eficientes já se encontravam no trabalho de Bachelier.

1.2 Além de Bachelier

Após quase meio século esquecido, os trabalhos de Bachelier foram retomados na década de 60 e daí para frente seguiu-se algumas varições do modelo, que culminaram no modelo de Black Scholes, e também nas críticas de Mandelbrot. A seguir, procuramos expor brevemente a retomada dos trabalhos de Bachelier por Sprenkle, Boness, Samuelson e culminando em Black-Scholes. A seguir, introduzimos as críticas feitas por Mandelbrot aos trablhos.

1.2.1 Sprenkle (1961)

Sprenkle (SPRENKLE, 1961) chegou à conclusão de um modelo utilizando um movimento browniano geométrico explicava melhor os preços dos ativos do que um movimento browniando artimético, tal qual utilizado por Bachelier. Uma implicação dessa modelagem alternativa é que ao invés de uma distribuição normal dos preços do ativos, a distribuição seria log-normal.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \rho \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

Onde dS_t/S_t é a variação relativa no preço do ativo com $t \to 0$, ρ é o *drift* por unidade de tempo, e dW_t é um Browniano e σ é a volatilidade do ativo.

O BM geométrico leva a uma distribuição dos preços log-normal no tempo T:

$$f(S_T) = \frac{1}{\sigma S_T \sqrt{2\pi T}} \exp\left\{ \frac{-\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - \left(\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right)^2}{2\sigma^2 T} \right\}$$

O valor da opção de call no modelo de Sprenkle é dado por

$$c = k \cdot S \cdot N(d_1) - k^* \cdot K \cdot N(d_2)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$\tau = T - t$$

E N é a CDF normal, K e K^* são parâmetros desconhecidos. Sprenkle definiu K como sendo a razão entre o valor esperado do ativo em T e o preço corrente, e K^* como um fator de desconto. Sprenkle tentou estimar tais parâmetros empiricamente, mas não obteve sucesso. Porem, posteriormente, foi demonstrado que $K = e^{\rho\tau}$ e $K^* = 1 - Z$ onde Z é o grau de aversão ao risco.

A diferença entre as distribuições utilizadas já resolve alguns dos problemas que seriam apontados por Mandelbrot. Porém tais problemas e soluções serão tratadas mais à frente.

1.2.2 Boness (1964)

Boness (BONESS, 1964) baseia sua análise em quatro suposições:

- O mercado é competitivo no sentido que os preços de equilíbrio de todos os ativos na mesma classe de risco implicam na mesma taxa de retorno sobre investimento esperada.
- O movimento dos preços dos ativos segue um movimento Browniano geométrico.
- A taxa de variância é proporcional ao respectivo período de tempo.
- Investidores em puts e calls são indiferentes ao risco.

Já que o investidor se preocupa somente com preços futuros que lhe são favoráveis, a média, A, dessa distribuição truncada representa o preço futuro esperado, dado que lhe é favorável. Se a probabilidade de que a opção seja executada é B, então o produto $A \cdot B$ é a expectativa parcial da distribuição de probabilidades subjetiva e o produto $B \cdot K$ é o custo esperado de executar a opção. Portanto, o valor presente subjetivo da opção é

$$c = e^{-\rho\tau}(A \cdot B - B \cdot K)$$

onde ρ é a taxa de desconto.

No caso da opção de *call*, pode ser demonstrado que:

$$A = S \cdot e^{\rho\tau} \frac{\mathbb{P}\left[x \leq \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\tau^{-\frac{1}{2}}} + \left(\frac{\rho}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right) t^{\frac{1}{2}}\right]}{\mathbb{P}\left[x \leq \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\tau^{-\frac{1}{2}}} + \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) t^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$B = \mathbb{P}\left[x \leq \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)}{\sigma\tau^{-\frac{1}{2}}} + \left(\frac{\rho}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) t^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$c = S \cdot N\left(d_1\right) - K \cdot e^{-\rho\tau} N\left(d_2\right)$$

onde ρ é a taxa de retorno esperada do ativo, ou a taxa de desconto do mercado.

1.2.3 Samuelson (1965)

Samuelson (SAMUELSON, 1965) também utiliza um processo geométrico, e a principal diferença para os modelos anteriores reside no fator de desconto utilizado. Para ele, o valor esperado de uma *call* deveria ser descontado pelo preço esperado da opção, ao invés de ser descontado pelo preço esperado da ação.

Ao invés da taxa de desconto ser a taxa esperada de retorno do preço do ativo, ρ no modelo de Boness, Samuelson desconta o valor esperado da opção de *call* na sua maturação para o presente utilizando a taxa esperada de retorno da opção, ω. Na verdade, ha dois parâmetros desconhecidos, ρ e ωno modelo de Samuelson. Ele também considera que o preço do ativo segue um BM geométrico e derivou a fórmula

$$c = e^{(\rho-\omega)\tau} S \cdot N\left(d_1\right) - K \cdot e^{-\omega\tau} N\left(d_2\right)$$

1.2.4 Black Scholes

Na década de 70 surgiu o agora famoso trabalho de Black-Scholes(BLACK; SCHOLES, 1973), que fez com que o cálculo estocástico se tornasse a ferramenta central da teoria financeira, junto com o instrumental desenvolvido ao longo dos anos nestes campos adjacentes. Para alguns autores, como Mandelbrot, isto foi feito sem dar a devida atenção às necessidades específicas da economia.

Black-Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973) é o resultado de todo o desenvolvimento anterior sobre o tema. Os dois autores foram capaz de desenvolver um modelo que fosse livre de risco. Basicamente, a idéia era considerar que o movimento aleatório das opções era contrabalanceado em sentido contrário pelo movimento do preço dos ativos criando assim um portfólio 'livre do risco'.

Myron Scholes e Fischer Black receberam o prêmio Nobel pela contribuição que forneceram, de acordo com "'The Royal Swedish Academy of Sciences"':

> Robert C. Merton and Myron S. Scholes have, in collaboration with the late Fischer Black, developed a pioneering formula for the valuation of stock options. Their methodology has paved the way for economic valuations in many areas. It has also generated new types of financial instruments and facilitated more efficient risk management in society.

Tamanha foi a popularidade do modelo que um fundo de investimentos foi criado baseando todas suas análises nos resultados de Black-Scholes e nos métodos que surgiram depois deste. A história do fundo constitui um capítulo à parte e pode ser conhecida em (LOWENSTEIN, 2000)m porém de forma objetiva o resultado foi desastroso culminando na necessidade de pesadas intervenções estatais a fim de garantir a restabilização do sistema econômico mundial.

Não se pretende aqui explorar o modelo de Black-Scholes porque o foco do trabalho é expor o modelo proposto por Bachelier, e seguidamente as críticas que Mandelbrot fez-lhe. Além disso, o contingente de trabalhos escritos sobre o modelo de Black-Scholes é bem expressivo, de modo que facilmente é possível encontrar trabalhos dedicados a compreender o modelo, ou compará-lo a uma infinidade de outros modelos. Ver, por exemplo, (SCHACHERMAYER; TEICHMANN, 2008) para uma comparação entre Bachelier e Black-Scholes.

1.2.5 Mandelbrot

A demonstração do modelo de Mandelbrot é feita no capítulo 3, mas seu modelo é uma construção alternativa a partir de um conjunto de problemas que ele identificou não somente com o modelo de (BACHELIER, 1900), mas também que ou permaneceram incorrigidos nos trabalhos subsequentes, ou tiveram uma correção insatisfatória. A principal crítica feita por ele, sobre a normalidade da distribuição dos preços é que será focada posteriormente. Ele acreditava que o modelo não satisfazia o ajuste adequado a uma distribuição normal, e portanto deveria ser modificado.

1.2.6 Desenvolvimentos posteriores

Engle tenta, na década de 80, incorporar as críticas de Mandelbrot e desenvolve os modelos ARCH e GARCH (ENGLE, 1982). Tais modelos dão conta de resolver os problemas quanto à volatilidade, porém é questionável com quê grau de eficiência dão conta de tratar tal questão. Porém, apenas a crítica que diz respeito à volatilidade foi considerada por ele. Quanto ao fato de os preços não serem caracterizados por um passeio aleatório, ou não terem sido retirados de uma amostra normal, a solução foi dada pelo próprio Mandelbrot em um modelo posterior utilizando um movimento browniano fractal desenvolvido por ele mesmo. O modelo de Engle foi muito bem aceito, rendendo-lhe, inclusive, um Nobel.

Capítulo 2

Formulação convencional

2.1 Modelos de Mercado em tempo contínuo

2.1.1 Modelando preços de valores mobiliários

Nós vamos considerar um mercado onde $d+1$ valores mobiliários são negociados. Dentre eles, existem d ativos de risco com preços $p_1, p_2, ..., p_d$ no tempo $t=0$ e preços aleatórios $P_1(t), \cdots, P_d(t)$ em tempos $t>0$. O valor mobiliário restante é um título sem risco com preço p_0 no tempo $t=0$, e preço determinístico $P_0(t)$ nos outros tempos. Nós assumimos que nosso modelo permite perfeita divisibilidade dos valores mobiliários e que não ha custo de transação seja para vender, seja para comprar. Nosso intervalo de negociação será finito e dado por $[0,T]$. Como não estamos somente interessados nos preços finais e iniciais dos valores mobiliários, nós também temos que considerar os desenvolvimentos da série de preço no periodo inteiro. Para representar o modelo, precisamos introduzir alguns conceitos e tal exposição será realizada no momento em que se tornarem sequencialmente necessários.

2.1.1.1 O preço do título

O título livre de risco é análogo a uma conta poupança que paga juros em todo final de período. Em geral, os juros numa conta poupança convencional são compostos anualmente, isto quer dizer que o juro será adicionado à conta bancária após um ano, ou de forma genérica, após um período. Daquele periodo em diante, os juros também serão pagos sobre o montante adicionado à conta. Portanto, no primeiro ano, a conta bancária cresce linearmente no tempo. Considere uma conta de valor K e seja r a taxa de juros por unidade de tempo. O juro somente será pago no instante $t=1$, então o valor da conta aumentará para $K(1+r)$ em $t=1$. Porém, se $r/2$ é composta no tempo $t=1/2$ isso irá gerar juros adicionais no período $[1/2,1]$. Teremos, então, em $t=1$ $K\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$. Portanto, o capital cresce linearmente com inclinação rK durante o intervalo $[0,1/2]$. No intervalo $[1/2,1]$, também cresce linearmente, com inclinação $\left(K+\frac{r}{2}K\right)$. Em geral, a composição de juros r/n nos tempos $\frac{i}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$ levam a um valor de

$$K\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \;\; em\, t = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} K\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = Ke^r \;\; em\, t = 1$$

$$Ke^{rt}\, em\, t \in [0,1]$$

Não é problema determinar uma taxa de juros $\tilde{r}$ tal que uma composição contínua leve ao mesmo montante que uma composição anual. $\tilde{r} = \ln(1+r)$. A taxa r é chamada a taxa efetiva do período, enquanto $\tilde{r}$ é chamada taxa contínua ou nominal.

A partir do desenvolvimento, temos então uma forma de avaliar o preço do título no período t.

$$P_0(t) = p_o \cdot e^{r \cdot t}\, para\, t \in [0,T]$$

A expressão acima pode ser generalizada para um caso em que a taxa de juros é integrável, não-constante e dependente do tempo, i.e.: $r(t)$

$$P_0(t) = p_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t r(s)\, ds\right\}\, para\, t \in [0,T]$$

Podemos demonstrar facilmente que a expressão acima nada mais é do que a solução da ODE dada por:

$$dP_0(t) = P_0(t)\, r(t)\, dt, \;\; P_0(0) = p_0\, para\, t \in [0,T]$$

$$P_0(t) = p_0 + \int_0^t P_0(s)\, r(s)\, ds$$

$$P_0(t) = p_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t r(s)\, ds\right\}\, para\, t \in [0,T]$$

2.1.1.2 Preço do ativo

O comportamento do ativo é parcialmente análogo ao comportamento do título, porém adicionado de um componente aleatório. Mais precisamente, o preço do ativo flutua em torno de um componente de título "‘intrínseco"’ que tem uma taxa de juros diferente daquela do título mencionado acima. Como um prêmio pelo risco originário destas flutuações aleatórias, nós esperamos que a taxa de juros $\tilde{b}$ correspondente ao título intrínseco ao ativo seja maior do que a taxa de juros r acima.

Como no caso da taxa de juros constante, o logaritimo do preço do título é linear, isto é, assume-se que o preço do título é log-linear:

$$\ln\left(P_0\left(t\right)\right) = \ln\left(p_0\right) + r \cdot t$$

O que sugere o seguinte modelo para o preço do ativo:

$$\ln\left(P_i\left(t\right)\right) = \ln\left(p_i\right) + \tilde{b}_i \cdot t + \text{"}aleatoriedade\text{"}$$

O comportamento do componente aleatório é dito:

- ❑ Não tendencioso, isto é $\mathbb{E}\left(\text{"}aleatoriedade\text{"}\right) = 0$
- ❑ Dependente do tempo
- ❑ Representativo da soma de todos os desvios de $\ln\left(P_i\left(t\right)\right)$ em relação a $\ln\left(p_i\right) + \tilde{b}_i \cdot t$

Se assumirmos que esses desvios representam a soma de muitos desvios independentes, pela lei dos grandes números é possivel demonstrar que

$$\text{"}aleatoriedade\text{"} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 t\right)$$

para $\sigma > 0$. Se fizermos

$$Y\left(t\right) = \ln\left(P_i\left(t\right)\right) - \ln\left(p_o\right) - \tilde{b}_i \cdot t$$

o que implica em

$$Y\left(t\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 t\right)$$

que por sua vez implica em:

$$\mathbb{E}\left(Y\left(t\right)\right) = 0$$

e $Y\left(t\right)$ é dependente do tempo.

Segundo (KORN; KORN, 2001), é razoável supor que a distribuição do termo $\left(Y\left(t\right) - Y\left(\delta\right)\right)$ em $Y\left(t\right) = Y\left(\delta\right) + \left(Y\left(t\right) - Y\left(\delta\right)\right)$, com $\delta \in (0, t)$, somente depende do tamanho do intervalo $t - \delta$ e é independente de $Y\left(s\right)$ quando $s \leq \delta$.

Em particular, $Y\left(t\right) - Y\left(\delta\right)$ seria então distribuído como $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(t - s\right)\right)$. Entretanto, tal argumento não é desenvolvido, e seria também tão razoável supor que o contrário também é verdadeiro. Na verdade, para Mandelbrot, aqui reside um dos problemas com este modelo, mas até um momento oportuno, assumimos que $Y\left(t\right) - Y\left(\delta\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(t - s\right)\right)$.

A existência e as propriedades de tal família de variáveis aleatórias $\left\{Y\left(t\right)\right\}_{t \in [0, \infty)}$ é um processo estocástico denominado movimento Browniano. Para que possamos dar continuidade ao desenvolvimento do modelo, precisamos fazer um *detour* para definir tal proceso estocástico, demonstrar sua existência e expor suas propriedades.

2.2 Movimento Browniano

Na década de 20, Wiener foi responsável por demonstrar que o movimento browniano existia enquanto processo estocástico, e propor uma formalização rigorosa que até então não havia sido realizada nem por Bachelier, nem por Einstein. Tanto Einstein quanto Wiener, Thiele e Smoluchowski apresentaram contribuições para a formalização do movimento browniano. Alguns deles de forma concomitante e independente (Einstein e Smoluchowski chegaram às mesmas conclusões simultaneamente sem que um soubesse sobre o trabalho do outro (EINSTEIN et al., 1905) (SMOLUCHOWSKI, 1906)), outros de forma sequencial, como Wiener seguido por Lévy. Mesmo tendo dado conta de resolver o problema ao qual se propôs, a formulação do problema ainda era deficiente no artigo de Einstein de 1905.

2.2.1 Definição

Dada a sua importância para as demais definições e demonstrações, precisamos o conceito de filtro.

Definição 1. Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ uma família de $sub-\sigma-fields$ de $\mathcal{F}$, I um conjunto índice ordenado com $\mathcal{F}_s \subset F_t$ para $s < t$ e $s, t \in I$. Tal família é dita um filtro.

O $\sigma - field$ $\mathcal{F}_t$, $t \in I$ em geral modela os eventos que podem ser observados até o tempo t, se uma variável aleatória X_t é $\mathcal{F}_t - mensur\acute{a}vel$ nós podemos determinar seu valor a partir da informação dada no tempo t.

Definição 2. Um conjunto $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in I}$ consistindo de um filtro $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ e de uma família de variáveis aleatórias em $\mathbb{R}^n\{X_t\}_{t\in I}$ com X sendo $\mathcal{F}_t{-}mensur\acute{a}vel$ é chamado de processo estocástico com filtro $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$.

Observação 3. Se simplesmente estivermos falando do processo $\{X_t\}_{t\in I}$ ou X_t, isso implica que $\mathcal{F}_t \equiv F_t^N \equiv \sigma\{X_s | s \le t\,,\ s \in I\}$. Este filtro é chamado de canônico ou filtro natural de X_t.

Definição 4. Seja $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ e $\{(Y_t, \mathcal{G}_t)\}_{t\in[0,\infty)}$ dois processos estocásticos.

- Y é dito uma modificação de X se:

$$\mathbb{P}\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\ \ \forall t \ge 0\}$$

- Y e X são ditos indistintos se temos

$$\mathbb{P}\{\omega | X_t(\omega) = Y_t(\omega)\ \ \forall t \in [0,\infty)\} = 1$$

Definição 5. Um Movimento Browniano (padrão, unidimensional) é um processo adaptado contínuo $B = \{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$, definido em um espaço de probabilidades $(\sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com as propriedades $B_0 = 0\, a.s$ e para $0 \leq s < t$ o incremento $B_t - B_s$ é independente de $\mathcal{F}$, e é normalmente distribuído com média zero e variância $t - s$, i.e.: $B_t - B_s \sim \mathscr{N}\,(0, t - s)$. Outra forma de dizer que os incrementos são independentes é escrevendo $B_t - B_s$ é independnete de $B_u - B_r$ para $0 \leq r \leq u \leq s < t$.

2.2.2 Existência

A existência do movimento browniano como processo estocástico precisa ser demonstrada, mais precisamente, a existência de um processo estocástico que satisfaça os requerimentos que caracterizam um movimento browniano precisa ser demonstrada. A demonstração a seguir, tal qual realizada por (KARATZAS; SHREVE, 1991), baseia-se no teorema de Kolmogorov e na conceituação de espaços de Hilbert.

Suponha que $\{B_t \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ é um movimento browniano, fixemos $0 \leq s < t < \infty$ e definamos $\theta \equiv \frac{(x+z)}{2}$. Então condicionado a $B_S = x$ e $B_t = z$, a variável aleatória B_θ é normalmente distribuída com média $\mu \equiv \frac{x+z}{2}$ e variância $\sigma^2 \equiv \frac{t-s}{4}$. Para verificar, basta observar que a distribuição conhecida e independente dos incrementos B_s, $B_\theta - B_S$ e $B_t - B_\theta$ leva à distribuição conjunta

$$P\left[B_s \in dx, B_\theta \in dy, B_t \in dz\right] = p\left(s; 0, x\right) p\left(\frac{t-s}{2}; x, y\right) p\left(\frac{t-s}{2}; y, z\right) dx\, dy\, dz$$

$$= p\left(s; 0, x\right) p\left(t - s; x, z\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} dx\, dy\, dz$$

Dividindo por

$$P\left[B_s \in dx, B_t \in dz\right] = p\left(s; 0, x\right) p\left(t - s; x, z\right) dx\, dz$$

nós obtemos

$$P\left[B_{\frac{t+s}{2}} \in dy \,|\, B_s = x,\, B_t = z\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy \qquad (1)$$

A forma acima, da distribuição condicional de $B_{\frac{t+s}{2}}$ sugere que nós podemos construir o movimento browniano em algum intervalo finito, e.g.: $[0, 1]$, juntando uma sequência de tais movimentos brownianos nos levará a um movimento definido para todo $t \geq 0$.

Para realizar esta demonstração, começamos com uma coleção contável:

$$\left\{\zeta_k^{(n)}; k \in I\left(n\right), n = 0, 1, ...\right\}$$

de variáveis aleatórias normais, independentes e padronizadas num espaço de probabilidade $(\Omega; \mathcal{F}, P)$. Onde $I\left(n\right)$ é o conjunto de números ímpares entre 0 e 2^n. Para cada

$n \geq 0$, nós definimos um processo $B^{(n)} = \left\{B_t^{(n)}; 0 \leq t \leq 1\right\}$ por recursão de interpolação linear, da seguinte forma: Para $n \geq 1$, $B_{k/2^{n-1}}^{(n)}$ irá ser igual a $B_{k/2^{n-1}}^{(n-1)}$ para $k = 0, 1, ..., 2^{n-1}$. Portanto, para cada valor de n, nós precisamos somente especificar $B_{k/2^n}^{(n)}$ para $k \in I(n)$. Nós definimos $B_0^{(0)} = 0$, $B_1^{(0)} = \zeta_1^{(0)}$.

Se os valores de $B_{k/2^{n-1}}^{(n-1)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$ forem especificados e $k \in I(n)$, nós escrevemos $s = \frac{k.-1}{2^n}$, $t = \frac{k+1}{2^n}$, $\mu = \frac{1}{2}\left(B_s^{(n-1)} + B_t^{(n-1)}\right)$ e $\sigma^2 = \frac{t-s}{4} = \frac{1}{2^{n+1}}$ e também definimos, de acordo com a equação acima:

$$B_{k/2^n}^{(n)} \equiv B_{(t+s)/2}^{(n)} \equiv \mu + \sigma\zeta_k^{(n)}$$

Nós devemos então mostrar que, quase certamente, $B_t^{(n)}$ converge uniformemente em t para uma função contínua B_t, e $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; 0 \leq t \leq 1\right\}$ é um movimento browniano.

O primeiro passo é dar uma representação mais conveniente para o processo $B^{(n)}$, $n = 0, 1, ...$ para tanto, nós definimos a função de Haar por $H_1^{(0)}(t) = 1$, para $0 \leq t \leq 1$ e para $n > 1$, $k \in I(n)$

$$H_k^{(n)}(t) = 2^{(n-1)/2}$$

se $\frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n}$

$$H_k^{(n)}(t) = -2^{(n-1)/2}$$

se $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$

$$H_k^{(n)}(t) = 0$$

para qualquer outro valor de t.

A função de Schauder é definida por

$$S_t^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(u)\, du \;\; 0 \leq t \leq 1,\, n \geq 0,\;\; k \in I(n)$$

Vale a igualdade $S_1^{(n)}(t) = t$, facilmente demonstrável. A relação $B_t^{(0)} = \zeta_1^{(0)} S_1^{(0)}(t)$ e por indução em n, podemos verificar que:

$$B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I(m)} \zeta_k^{(m)}(\omega)\, S_k^{(m)}(t) \quad 0 \leq t \leq 1,\;\; n \geq 0 \tag{2}$$

Lema 6. *Conforme $n \to \infty$ a sequência de funções $\left\{B_t^{(n)}(\omega); 0 \leq t \leq 1\right\}$, $n \geq 0$, dada por 2converge uniformemente em t para uma função continua $\{B_t(\omega); 0 \leq t \leq 1\}$para quase todo $\omega \in \Omega$.*

Demonstração. Defina $b_n = \max_{k \in I(n)} \left|\zeta_k^{(n)}\right|$. Para $x > 0$

$$
\begin{aligned}
P\left[\left|\zeta_k^{(n)}\right| > x\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{u}{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}}{x}
\end{aligned}
$$

O que nos leva a

$$
P\left[b_n > n\right] = P\left[\bigcup_{k \in I_n} \left\{\left|\zeta_k^{(n)}\right| > n\right\}\right] \leq 2^n P\left[\left|\zeta_1^{(n)}\right| > n\right] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n e^{-n^2/2}}{n},\ n \geq 1
$$

Agora $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n^2/2}/n < \infty$, de forma que o lema de Borel-Cantelli implica que existe um conjunto $\tilde{\Omega}$ com $P\left(\tilde{\Omega}\right) = 1$, tal que para cada $\omega \in \tilde{\Omega}$ existe um inteiro $n\left(\omega\right)$ satisfazendo $b_n\left(\omega\right) \leq n$ para todo $n \geq n\left(\omega\right)$. Mas então:

$$
\sum_{n=n(\omega)}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \left|\zeta_k^{(n)} S_k^{(n)}\left(t\right)\right| \leq \sum_{n=n(\omega)}^{\infty} n 2^{-(n+1)/2} < \infty
$$

então para $\omega \in \tilde{\Omega}$, $B_t^{(n)}\left(\omega\right)$ converge uniformemente em t para um limite $B_t(\omega)$. A continuidade de $\left\{B_t\left(\omega\right); 0 \leq t \leq 1\right\}$ segue a partir da uniformidade da convergência. $\square$

Sob o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\left(t\right) g\left(t\right) dt$, $L^2\left[0,1\right]$ é um espaço de Hilbert, e as funções de Harr $\left\{H_k^{(n)};\ k \in I\left(n\right), n \geq 0\right\}$ formam um sistema completo e ortonormal. (Uma explicação mais detalhada sobre este fato pode ser encontrada em Kacmarz & Steinhauss (1951).

A igualdade de Parseval

$$
\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \left\langle f, H_k^{(n)}\right\rangle \left\langle g, H_k^{(n)}\right\rangle
$$

aplicada a $f = 1_{[0,t]}$e $g = 1_{[0,s]}$ resulta em

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_k^{(n)} S_K^{(n)}(S) = s \wedge t\,;\ 0 \leq t \leq 1
$$

Teorema 7. *Com* $\left\{B_t^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *definido por (3.2) e* $B_t = \lim_{n\to\infty} B_t^{(n)}$, *o processo* $\left\{B_t, \mathcal{F}_t^B; 0 \leq t \leq 1\right\}$ *é um Movimento Browniano em* $[0,1]$.

Demonstração. É suficiente provar que, para $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq 1$, os incrementos $\left\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right\}_{j=1}^{n}$ são independentes, normalmente distribuídos, com média zero e variância $t_j - t_{j-1}$. Para isso, nós mostramos que para $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, n$ e $i = \sqrt{-1}$.

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)B_{t_j}^{(M)}\right\}\right]=\mathbb{E}\left[\exp\left\{-i\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}\zeta_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)S_k^{(m)}\left(t_j\right)\right\}\right]$$

$$=\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-i\zeta_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)S_k^{(m)}\left(t_j\right)\right\}\right]$$

$$=\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)S_k^{(m)}\left(t_j\right)\right\}^2\right]$$

$$=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\left(\lambda_{t+1}-\lambda_t\right)\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}S_k^{(m)}\left(t_i\right)S_k^{(m)}\left(t_j\right)\right]$$

Fazendo $M \to \infty$e usando a relação 3.4, nós obtemos:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\right\}\right]=\mathbb{E}\left[\exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)B_{t_j}\right\}\right]$$

$$\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\left(\lambda_{t+1}-\lambda_t\right)t_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)^2t_j\right\}$$

$$\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)(-\lambda_{j+1})t_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_{j+1}-\lambda j\right)^2t_j\right\}$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\lambda_{j+1}^2-\lambda_j^2\right)t_j-\frac{1}{2}\lambda_n^2t_n\right\}$$

$$\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_j^2\left(t_j-t_{j-1}\right)\right\}$$

□

Corolário 8. *Existe um espaço de probabilidade* $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ *e um processo estocástico* $B=\left\{B_t,\mathcal{F}_t^B;0\le t<\infty\right\}$ *neste espaço, tal que B é um movimento browniano padrão, unidimensional.*

Demonstração. De acordo com o teorema acima, existe uma sequência $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)\,,n=1,2,3,...$ de espaços de probabilidade juntos com um movimento browniano $\left\{X_t^{(n)};0\le t\le 1\right\}$ em cada espaço. Seja $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times...$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2\otimes...$, e $P=P_1\times P_2\times....$ Defina B em Ω recursivamente por

$$B_t=X_t^{(1)},\ \ 0\le t\le 1$$

$$B_t=B_n+X_{t-n}^{(n+1)}\quad n\le t\le n+1$$

Esse processo é claramente contínuo, e os incrementos são facilmente vistos como independentes e normais com média zero e variância apropriada. □

Isto conclui a demonstração da existência do movimento browniano.

2.2.3 Propriedades

Propriedades básicas do BM

- B_t é um processo gaussiano, isto é, para todos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$ o vetor aleatório $\mathbb{Z} = (B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}$ tem distribuição multinormal.
- B_t tem incrementos estacionários, isto é, o processo $(B_{t+h} - B_t)_{h \geq 0}$ tem a mesma distribuição para todo t, portanto $\mathbb{E}\left(B_{t+h} - B_t\right) = 0$ e $Var\left(B_{t+h} - B_t\right) = h$
- B_t é contínuo, mas não é diferenciável em nenhum ponto.
- O movimento Browniano é um martingale.

Propriedades relativas à distribuição do BM:

- Homogeneidade espacial $B_t + x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$é um BM iniciado em x
- Simetria$-B_t$ também é um BM
- Escalável: $\sqrt{c}B_{t/c}$para todo $c > 0$ é um BM.
- Inversão temporal: $Z_t = tB_{1/t}$ também é um BM
- Reversibilidade temporal Para um dado $t > 0$ $\{B_s : 0 \leq s \leq t\} \sim \{B_{t-s} - B_t : 0 \leq s \leq t\}$
- Continuidade e diferenciabilidade: Mesmo sendo continuo em todos os pontos, não e diferenciável em nenhum deles.

Propriedades da trajetória local do BM

Máximo e mínimo locais

Para uma função $f : |0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, um ponto t é um máximo local se:
$\exists \epsilon > 0 \; s.t. \; \forall s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)\,, f\,(s) \leq f\,(t)$

Para quase todas as trajetórias, o conjunto de máximos locais para a trajetória browniana B é contável e denso. O mesmo se aplica para casos de mínimo. Uma trajetória de movimento Browniano tem um máximo ou mínimo local em qualquer intervalo. Isso significa que o conjunto de máximos e mínimos é denso. Existe um máximo ou mínimo local arbitrariamente próximo de qualquer número dado.

2.2.3.1 Pontos de aumento e redução

Um ponto t é um ponto de aumento se

$$\exists \epsilon > 0, s.t. \; \forall s \in (0, \epsilon)\,, f\,(t - s) \leq f\,(t) \leq f\,(t + s)$$

Para quase todas as trajetórias, o BM não tem pontos de aumento ou redução.

2.3 Modelo de preços de valores mobiliários (Cont.)

O movimento browniano é o processo estocástico apropriado para modelar o comportamento aleatório da forma log-linear do preço do ativo. No caso em que há somente um título e um ativo ($d = 1$), escolhemos um BM com volatilidade σ_{11} para representar a aleatoriedade, de forma que:

$$\ln\left(P_1\left(t\right)\right) = \ln\left(p_1\right) + \tilde{b}_1 \cdot t + \sigma_{11} B_t$$

Obtemos assim:

$$P_1\left(t\right) = p_1 \cdot \exp\left\{\tilde{b_1} \cdot t + \sigma_{11} B_t\right\}$$

O problema é facilmente extensível para um caso com i ativos basta substituir $p_1$por p_1e $\sigma_{11} B_t$ por $\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} B_j\left(t\right)$.

Lema 9. *Seja* $b_i \equiv \tilde{b}_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}^2$ *e* $P_1(t)$ *conforme a equação acima, então temos:*
$\mathbb{E}\left(P_i\left(t\right)\right) = p_i \cdot e^{b_i t}$

$$Var\left(P_i\left(t\right)\right) = p_i^2 \cdot \exp\left\{2b_i t\right\}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}^2 t\right) - 1\right)$$

$X_t \equiv a \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{m}\left(c_j B_j\left(t\right) - \frac{1}{2}c_j^2 t\right)\right)$*com* $a, c_j \in \mathbb{R}$*,* $j = 1, 2, ...m$ *é um martingale.*
A prova dos ítens deste lema podem ser encontrados em (KORN; KORN, 2001)

Diante deste lema, podemos interpretar de uma nova maneira o preço do ativo no nosso modelo.

$$P_i(t) = \{\, p_i \cdot \exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[\sigma_{ij} B_j\left(t\right) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 t\right]\right\} t > 0 p_i t = 0$$

Ou seja, o preço do ativo é um produto de dois componentes, o preço médio do ativo $p_i \cdot \exp\left(b_j t\right)$ e um martingale com esperança igual a 1, dado por $\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[\sigma_{ij} B_j\left(t\right) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 t\right]\right\}$ que representa a oscilação do preço em torno da sua média.

Vale observar que este modelo já se vale de alguns aperfeiçoamentos antes àquele desenvolvido por Bachelier.

2.4 Modelos de mercado em tempo continuo com opções

2.4.1 Alguns conceitos sobre opções.

Um derivativo é um ativo financeiro cujo *pay off* depende do valor de alguma variável por trás deste derivativo. Tal variável pode ser um ativo transacional, tal como uma ação, um índice de portfólio, um preço futuro, uma moeda, ou alguma variável de estado mensurável, tal como a temperatura de algum lugar, ou a volatilidade de um índice. O *pay off* pode envolver vários padrões de fluxo de caixa. O pagamento pode ser igualmente espaçado através do tempo, ocorrer em datas específicas, ou ser uma combinação de ambos.

Uma opção é um derivativo que dá o direito de comprar ou vender o ativo por trás de tal derivativo, na data de maturidade T, ou antes dela , por um preço pré-especificado K, chamado de *strike, exercise price*. Uma opção de *call* é um direito de compra, e uma opção de *put*, é um direito de venda. Já que o exercicio é um direito e não uma obrigação, o *pay off* deste será $(S+K)^{+} \equiv \max\{S-K,0\}$ para uma opção de *call*, e $(K-S)^{+} \equiv \max\{K-S,0\}$ para uma opção de *put*, onde S é o preço do ativo em questão. As opções podem ser de estilo Europeu, que somente podem ser exercidas na data de maturidade, ou então de estilo Americano, no qual o exercício fica a critério do detentor, contanto que não exceda a data de maturidade.

2.4.2 Bachelier

Bachelier iniciou o estudo de processos em tempo contínuo e introduziu o movimento browniano. Para ele, as variações de preço são i.i.d, ou seja, identicamente e independentemente distribuídas, o que serviu de base para a teoria dos mercados eficientes. O processo estocástico usado para descrever as variações de preço de ativos é o movimento browniano. Pelo fato de ter este papel central no modelo, a seção anterior foi dedicada à formalização deste e a demonstração de suas propriedades. Como já dito, a versão apresentada não é propriamente tal qual proposta por Bachelier, mas sim formalizada de acordo com Wiener.

A escolha da utilização de tal processo para descrever as variações de preço foi feita porque de acordo com suas propriedades, qualquer movimento futuro depende somente no nível da variável, e não no seu histórico, a idéia é que o preço do momento t reflete o resultado de toda a informação contida em todos os momentos anteriores a t. (Esse é um dos pontos criticados por Mandelbrot, que será explorado mais adiante). Essa característica, como já dito, é conhecida como propriedade de Markov, e em termos práticos traduz-se em dizer que "‘os preços de ativos não têm memória"’. Como também já dito, apesar de ser um processo contínuo, ele não é diferenciável em praticamente todos os pontos, em outras palavras, os preços de ativos não necessariamente variam de forma suave, e podem, portanto, formar trajetórias não-suaves.

Alem disso, Bachelier utilizou um movimento browniano aritmético, o que implica que os preços estão normalmente distribuídos, enquanto que versões posteriores, como BS, por exemplo, utilizaram-se de movimentos brownianos geométricos o que torna os preços log-normalmente distribuídos. De acordo com a versão contemporânea do modelo de Bachelier, o preço da ação é dado pela igualdade:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

onde W_t é um BM padrão.

A equação de precificação pode ser escrita como

$$c = \int_K^{\infty} (S - K) f(S) \, dS$$

Essencialmente, a equação diz que o *call premium* c, é igual à diferença esperada entre o preço da ação, S, e o preço de exercício, K, onde $f(K)$ denota a função de densidade do preço futuro do ativo em questão. O preço de arbitragem da *call option* é dada pela fórmula:

$$c = (S - K) N[d(s,t)] + \sigma \sqrt{\tau} n[d(s,t)]$$

onde $\tau = T - t$, $d(s,t) = \frac{(S-K)}{\sigma\sqrt{\tau}}$, N é cdf Gaussiana padronizada e n é a pdf gaussiana padronizada. Ou seja:

$$N(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ \frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dt$$

e

$$n(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Capítulo 3

Novos caminhos

Mandelbrot coloca em questionamentos aspectos essenciais para a validade do modelo proposto por Bachelier, e que mesmo melhorado por alguns autores subsequentes, ainda não foi o suficiente para resolver os problemas apontados.

Na primeira crítica, ele afirma que é irrealista acreditar que os preços dos ativos são realizações de uma população em que os valores se distribuem normalmente. Ou seja, valendo esta hipótese, a probabilidade de encontrarmos valores extremos é remota e tende a zero rapidamente.

Outra decorrência da não-normalidade das realizações é que a volatilidade não é constante ao longo de toda a série. Isto é, em alguns períodos, principalmente naqueles seguidos por más notícias que afetem o preço do ativo em questão, a volatilidade tenderá a ser maior, enquanto que em tempos de calmaria, é de se esperar baixas volatilidades.

A segunda crítica feita por ele diz respeito à forma como as séries de preços são interpretadas pelos economistas. Para ele, as séries de preços não são passeios aleatórios. Isto é, não podem ser modeladas como se o preço a cada instante fosse independente do preço anterior.

3.1 Crítica

O nome de Bachelier é frequentemente citado em livros sobre processos de difusão. Porém, apesar da importância por trás do modelo de Bachelier, o Movimento Browniano, segundo Mandelbrot, não é capaz de dar conta dos dados empíricos porque a distribuição empírica das distribuições das variações de preços não condizem com aquela teórica. Os histogramas dos preços são unimodais e têm o típico formato de "‘sino"’, mas há tantos *outliers* que a distribuição teórica é leptocúrtica em relação à Normal e até um tanto quanto assimétrica.

Em 1963, seu primeiro artigo denunciando as suposições problemáticas que sustentavam os modelos que deram origem ao modelo que servira de base ao modelo de black-scholes foi publicado (MANDELBROT, 1967).

Para Mandelbrot, o modelo de variação de preços especulativos proposto por Bachelier assume que variações de preços sucessivas são variáveis aleatórias Gaussianas independentes. Isso já gera uma dificuldade em lidar com a parte negativa da distribuição, que o próprio Bachelier já havia notado, mas argumentou que tais casos não seriam incorridos, ou o seriam com probabilidade muito baixa, podendo então ser ignorados. Uma alternativa a este problema, seria substituir então a variação do preço pelo logaritmo da variação, ou seja, adota-se uma variação percentual, que resulta numa distribuição conjunta log-normal para o modelo, tal qual o modelo de Sprenkle, já citado anteriormente. Porém, mesmo assim, Mandelbrot argumenta que o modelo pode ser contradito por, no mínimo, quatro argumentos de importância relativamente significativa, a serem expostos a seguir.

Variações de preços de magnitude significativa são muito mais frequentes do que prevê a distribuição Gaussiana; ou seja, a distribuição empírica é leptocúrtica em relação à Gaussiana, e tal fato já está bem estabelecido desde 1915 com (MITCHELL, 1921).

Grandes variações praticamente instantâneas ocorrem com frequência, contrariando aquilo que a distribuição prevê. De acordo com a distribuição, tais variações deveriam ocorrer de forma inversamente proporcional às suas magnitudes. Quanto maior a variação, menor a expecativa que ela ocorra, fato este também contradito ao se analisar distribuições empíricas de uma quantidade de ativos.

Variações sucessivas de preços não aparentam ser independentes, mas ao invés disso exibem um número significativo de padrões reconhecíveis.

Registros de preços não aparentam ser estacionários, e expressões estatísticas, tais como a variância amostral assumem valores muito distintos de acordo com a janela de tempo considerada; tal questão não-estacionária, segundo Mandelbrot, já é suficiente para eliminarmos a busca por um modelo estatístico de alta precisão para séries de preços de ativos.

Diante destes fatos, é possível identificar a necessidade de uma distribuição que dê conta de melhor explicar o problema da variação de preços. A alternativa proposta por Mandelbrot é a substituição da distribuição Gaussiana por uma família de distribuição "‘Paretianas estáveis"’. que foram inicialmente introduzidas por Paul Lévy em 1925 (LÉVY, 1925).

3.1.1 Mitchell

O primeiro a perceber que a distribuição das variações de preços não era gaussiana foi Mitchell (MITCHELL, 1921). Mitchell analisou séries de preços de 230 commodities por um período de 25 anos. Sua preocupação central era a construção de índices de preços e a avaliação da qualidade de certos índices existentes. Porém, no intuito de comparar tais séries de preços, para entender que tipo de comportamento elas apresentam, e se havia alguma forma de correlação no movimento delas, ou não, Mitchell nos diz que:

> The best comparison to make, however, is one between the actual distribution of our price fluctuations about their average and a 'normal' distribution of the same data – that is, a distribution according perfectly with the so-called 'normal law of error'.

Mitchel afirma ainda que:

> When it can be shown that phenomena are distributed approximately in this fashion, their average can safely be accepted as a significant measure of the whole set of variations, since even the deviations from the average are then grouped in a tolerably definite and symmetrical fashion about the average.' Ou seja, estando os dados distribuídos desta maneira, teríamos uma medida representativa da distribuição dos dados.

Porém, ao realizar uma verificação empírica, Mitchell chega a conclusões que não vão no mesmo sentido daquilo que ele esperava e que era previsto teoricamente.

A distribuição empírica é semelhante à normal teórica quanto ao seu formato, porém os dados estão mais concentrados em torno da média na distribuição empírica do que na distribuição normal teórica e as caudas da distribuição empírica são mais longas e "'pesadas"' do que aquelas esperadas e além disso, a distribuição empírica não é perfeitamente simétrica.

Mitchel conclui que mesmo com um certo desvio em relação às características esperadas, a distribuição normal serve com um bom referencial para variações em intervalos de dados anuais ou bianuais, mas para intervalos maiores que estes, as distorções já se tornam maiores que a qualidade do ajuste.

É claro que a preocupação de Mitchel era com índices de preços, e de um modo geral, se o objetivo é apenas representar um panorama geral da movimentação dos preços, tais peculiaridades da série passariam desapercebidas, pois mesmo que o ajuste não seja perfeito, ainda sim é de boa qualidade, e ainda há uma concentração significativa em torno da média dentro dos intervalos esperado. Porém, quando trazemos estas dificuldades para financeiro, onde as oscilações a curtíssimo prazo assumem uma importância maior, não podemos negligenciar a problemática apresentada; e os modelos de precificação de ativos, a significância do modelo e a sua precisão quanto ao propósito esperado ficam prejudicadas.

3.2 Alternativa

Por *fractional* Brownian Motion, Mandelbrot propõe designar uma família de funções aleatórias Gaussianas definidas como segue: $B(t)$ sendo um BM convencional e H um parâmetro, tal que $M \in (0,1)$, o fBm de expoente H é uma média móvel, no qual incrementos passados de $B(t)$ são ponderados pelo *kernel* $(t-s)^{H-\frac{1}{2}}$. Mandelbrot afirma que o fBm provê suporte para uma grande família de modelos, o que justifica sua introdução e estudo.

A característica básica do fBM é que o span de interdependência entre seus incrementos podem ser ditos infinitos. Em contraposição, o estudo de funções aleatórias tem se dedicado excessivamente a sequências de variáveis aleatórias independentes, processos de Markov, e outras funções aleatorias que têm a propriedade que amostras suficientemente distantes destas distribuições são independentes. Porém, estudos empíricos de fenômenos aleatórios em geral sugerem o contrário, que há uma forte interdependência entre amostras distantes.

Uma classe de exemplos surge na economia. É sabido que séries temporais econômicas geralmente envolvem ciclos de todas as ordens de magnitude, o ciclo mais lento tendo períodos de duração comparáveis ao tamanho total da amostra.

Vale ressaltar, que o fBm ja foi considerado, mesmo que implicitamente, por (YAGLOM, 1958),(LAMPERTI, 1962), (KOLMOGOROV, 1940),(HUNT, 1951).

3.2.1 Definição

Temos que t é o tempo e varia no intervalo $-\infty < t < \infty$, e ω representa o conjunto de todos os valores da função aleatória. O BM convencional, $B(t,\omega)$ de Bachelier, Wiener e Levy é uma função aleatória com incrementos Gaussianos independentes tal que

$$\mathbb{E}\left(B(t_2,\omega) - B(t_1,\omega)\right) = 0$$

$$\mathbb{E}^2\left(B(t_2,\omega) - B(t_1,\omega)\right) = |t_2 - t_1|$$

e que $\{B(t_2,\omega) - B(t_1,\omega)\}$ e $\{B(t_4,\omega) - B(t_3,\omega)\}$ são independentes se (t_1,t_2) e (t_3,t_4) não se sobrepõem. Temos ainda que:

$$SD\left[B(t+T,\omega) - B(t,\omega)\right] = T^{1/2}$$

Definição 10. Seja H tal que $H \in (0,1)$ e seja b_0 um valor aleatório e $b_0 \in \mathbb{R}$. Função $B_H(t,\omega)$, movimento Browniano reduzido com parâmetro H e valor inicial $b_0$no tempo 0. Para $t > 0$, $B_H(t,\omega)$ é definida por:

$$B_H(0,\omega) = b_0$$

$$B_H(t,\omega) - B_H(0,\omega) = \frac{1}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}\right] dB(s,\omega)\right.$$
$$\left. + \int_{0}^{t}(t-s)^{H-1/2}\, dB(s,\omega)\right.$$

O fBm se divide em três famílias de funções muito diferentes de acordo com o valor de H, uma $0 < H < \frac{1}{2}$, outra $\frac{1}{2} < H < 1$ e uma última $H = \frac{1}{2}$.

3.2.2 Propriedades

Definição 11. A notação $\{X(t,\omega)\} \equiv \{Y(t,\omega)\}$ significa que os dois processos têm a mesma função de distribuição conjunta e esta é finita.

Definição 12. Os incrementos de uma função aleatória $\{X(t,\omega); -\infty < t < \infty\}$ serão ditos auto-semelhantes (s-s) com parâmetro H se para algum $h > 0$ e algum t_0:

$$\{X(t_0+\tau,\omega) - X(t_0,\omega)\} \equiv \left\{h^{-H}\left[X(t_0+h\tau,\omega) - X(t_0,\omega)\right]\right\}$$

O teorema a seguir é o que motiva a introdução do fBm:

Teorema 13. *Os incrementos do fBm, $B_H(t,\omega)$ são estacionários and $(s-s)$ com parâmetro H.*

A demonstração pode ser encontrada em Mandelbrot 1968, juntamente com detalhes mais aprofundados sobre as propriedades deste classe de movimentos, porém compartilha algumas das propriedades do movimento Browniano convencional, tal como não diferenciável em praticamente todos os pontos, e conversamente não integrável à lá Riemann.

Além da exposição do modelo e das suas propriedades, Mandelbrot oferece vários exemplos que indicam haver de fato um melhor ajuste desta formulação alternativa ao invés daquela que Bachelier propôs. E as aplicações não se restringem somente a um autor ou a uma espécie de problemas.

Conclusão

Talvez a alteração proposta por Mandelbrot seja mais um passo rumo à proximidade com o "‘mundo real"’. Os modelos se tornam mais complexos porque o mundo real é complexo e essa complexidade precisa ser levada em conta, Mandelbrot trás então o ensejo para que algumas questões até então não tratadas sejam consideradas. A volatilidade não constante dos modelos foi resolvida nos modelos GARCH. A normalidade pode ser resolvida pela substituição da distribuição gaussiana multinormal por uma distribuição Paretiana. A tendência dos dados se agruparem e as variáveis não serem normalmente distribuídas resolve-se com a introdução do fBm, e assim por diante. Em suma, todas as críticas que Mandelbrot levantou são abordadas e soluções são propostas por ele.[1]

Entretanto, fica a agenda ainda em aberto de se estudar os desenvolvimentos posteriores aos modelos que se originaram de suas contribuições. Os modelos GARCH já datam da década de 1980, várias derivações dele já surgiram como TGARCH, EGARCH, FIGARCH, e outros. Os modelos ARIMA também já incorporaram components fraccionais, ARFIMA, e para cada um destes, é possível fazer um levantamento distinto de prós e contras.

Em suma, Mandelbrot foi responsável por dar um passo a mais na caminhada rumo a uma maior proximidade dos modelos e o "‘mundo real"’. Porém, só com mais tempo, e se estudando os desenvolvimentos mais recentes saberemos a importância de sua contribuição.

[1] Outras referências consultados incluem: (SMITH, 1976) (CAMPBELL; LO; MACKINLAY, 1997) (MANDELBROT; HUDSON, 2007) (KATZ; MCCORMICK, 2005) (MERTON, 1973) (WAX, 2003) (ØKSENDAL, 1998) (BERNSTEIN, 2011) (FAIAS; SANTA-CLARA, 2011) (MANDELBROT, 1967) (SCHACHERMAYER; TEICHMANN, 2008) (COX; ROSS, 1976) (LEIBOWITZ; EMRICH; BOVA, 2009) (AÏT-SAHALIA; HANSEN, 2009) (HAUG, 1997) (BROADIE; DETEMPLE, 2004) (MANDELBROT, 1983) (RALF, 1997) (GHYSELS; RENAULT, 2004) (LOWENSTEIN, 2000) (BERESTYCKI,) (BOYCE; DIPRIMA; HAINES, 1992) (HANDEL, 2007) (SONDERMANN, 2006) (KORN; KORN, 2001)

Referências

AÏT-SAHALIA, Y.; HANSEN, L. **Handbook of Financial Econometrics, Vol 1: Tools and Techniques**. [S.l.]: Elsevier Science, 2009.

BACHELIER, L. **Théorie de la spéculation**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1900.

BERESTYCKI, N. **Stochastic Calculus and Applications**.

BERNSTEIN, P. L. **Capital ideas evolving**. [S.l.]: Wiley, 2011.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **The journal of political economy**, 1973. JSTOR, p. 637–654, 1973.

BONESS, A. J. Elements of a theory of stock-option value. **The Journal of Political Economy**, 1964. JSTOR, v. 72, n. 2, p. 163–175, 1964.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; HAINES, C. W. **Elementary differential equations and boundary value problems**. [S.l.]: Wiley New York, 1992.

BROADIE, M.; DETEMPLE, J. B. Option pricing: valuation models and applications. **Management science**, 2004. JSTOR, p. 1145–1177, 2004.

BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. **The Philosophical Magazine, or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History and General Science**, 1828. Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828.

CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.-C.; MACKINLAY, A. C. **The econometrics of financial markets**. [S.l.]: princeton University press, 1997.

COX, J. C.; ROSS, S. A. A survey of some new results in financial option pricing theory. **The Journal of Finance**, 1976. Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 383–402, 1976.

EINSTEIN, A. et al. On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik**, 1905. v. 17, n. 891, p. 50, 1905.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric**

Society, 1982. JSTOR, p. 987–1007, 1982. Disponível em: <http://www.jstor.org-/stable/10.2307/1912773>.

FAIAS, J.; SANTA-CLARA, P. Optimal option portfolio strategies. In: **AFA 2011 Denver Meetings Paper**. [S.l.: s.n.], 2011.

GHYSELS, E.; RENAULT, E. The econometrics of option pricing. 2004. 2004.

HANDEL, R. van. Stochastic calculus, filtering, and stochastic control. **Course notes., URL http://www. princeton. edu/˜ rvan/acm217/ACM217. pdf**, 2007. 2007.

HAUG, E. G. **Option pricing formulas**. [S.l.]: McGraw Hill, 1997.

HUNT, G. Random fourier transforms. **Transactions of the American Mathematical Society**, 1951. JSTOR, v. 71, n. 1, p. 38–69, 1951. Disponível em: <http://www.jstor-.org/stable/10.2307/1990858>.

KARATZAS, I. A.; SHREVE, S. E. **Brownian motion and stochastic calculus**. [S.l.]: Springer Verlag, 1991.

KATZ, J. O.; MCCORMICK, D. L. **Advanced Option Pricing Models: An Empirical Approach to Valuing Options**. [S.l.]: McGraw Hill Professional, 2005.

KOLMOGOROV, A. N. Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven im hilbertschen raum. In: **CR (Dokl.) Acad. Sci. URSS**. [S.l.: s.n.], 1940. v. 26, p. 115–118.

KORN, R.; KORN, E. Option pricing and portfolio optimization. In: AMERICAN MATH. SOC. [S.l.], 2001.

LAMPERTI, J. Semi-stable stochastic processes. **Transactions of the American Mathematical Society**, 1962. JSTOR, v. 104, n. 1, p. 62–78, 1962. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/10.2307/1993933>.

LEIBOWITZ, M. L.; EMRICH, S.; BOVA, A. Modern portfolio management. **New Jersey: John Willey&Sons**, 2009. 2009.

LÉVY, P. **Calcul des probabilités**. [S.l.]: Gauthier-Villars Paris, 1925.

LOWENSTEIN, R. **When genius failed: The rise and fall of Long-Term Capital Management**. [S.l.]: Random House Digital, Inc., 2000.

MANDELBROT, B. The variation of some other speculative prices. **The Journal of Business**, 1967. JSTOR, v. 40, n. 4, p. 393–413, 1967. Disponível em: <http://www-.jstor.org/stable/10.2307/2351623>.

MANDELBROT, B.; HUDSON, R. L. **The Misbehavior of Markets: A fractal view of financial turbulence**. [S.l.]: Basic books, 2007.

MANDELBROT, B. B. The fractal geometry of nature/revised and enlarged edition. **New York, WH Freeman and Co., 1983, 495 p.**, 1983. v. 1, 1983. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983whf..book.....M>.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. **The Bell Journal of Economics and Management Science**, 1973. JSTOR, p. 141–183, 1973. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/10.2307/3003143>.

MITCHELL, W. C. **Index Numbers of Wholesale Prices in the United States and Foreign Countries: Revision of Bulletin No. 173. October, 1921**. [S.l.]: US Government Printing Office, 1921.

ØKSENDAL, B. **Stochastic differential equations**. [S.l.]: Springer, 1998.

RALF, K. **Optimal portfolios: stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time**. [S.l.]: World Scientific, 1997.

SAMUELSON, P. A. Rational theory of warrant pricing. **Industrial management review**, 1965. v. 6, p. 13–31, 1965.

SCHACHERMAYER, W.; TEICHMANN, J. How close are the option pricing formulas of bachelier and black–merton–scholes? **Mathematical Finance**, 2008. Wiley Online Library, v. 18, n. 1, p. 155–170, 2008. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com-/doi/10.1111/j.1467-9965.2007.00326.x/full>.

SMITH, C. W. Option pricing: A review. **Journal of Financial Economics**, 1976. Elsevier, v. 3, n. 1, p. 3–51, 1976.

SMOLUCHOWSKI, M. V. Zur kinetischen theorie der brownschen molekularbewegung und der suspensionen. **Annalen der physik**, 1906. Wiley Online Library, v. 326, n. 14, p. 756–780, 1906. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp-.19063261405/abstract>.

SONDERMANN, D. **Introduction to stochastic calculus for finance**. [S.l.]: Springer, 2006.

SPRENKLE, C. M. Warrant prices as indicators of expectations and preferences. **Yale economic essays**, 1961. v. 1, n. 2, p. 178–231, 1961.

WAX, N. **Selected papers on noise and stochastic processes**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2003.

YAGLOM, A. Correlation theory of processes with random stationary nth increments. **American Mathematical Society Translations (Series 2)**, 1958. v. 8, p. 87–141, 1958.

Apêndices

APÊNDICE A

Conceitos relevantes

FILTRO

Seja $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ uma coleção de $\sigma - fields$ no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$com $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para todo $t \geq 0$.

A coleção então é dita um filtro de $\sigma - fields$ em Ωse $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_t, \quad \forall \leq s \leq t$.

Os filtros sao de particular importância para mercados financeiros porque em geral preços de ativos, taxas de câmbio e de juros podem ser modeladas como soluções de equações diferenciais estocásticas que dependem de movimentos Brownianos. As soluções para estas equações são então funções de um movimento browniano.

As flutuações de tais processos representam quantums de informação sobre o mercado momento a momento, estas informações relevantes estao contidas no filtro natural. Porém, em finanças há sempre aqueles que têm acesso a informações diferentes, que em geral os demais não têm aceso. Isso permite que esta pessoa informada aja com mais competência do que os demais, ou seja, estas pessoas têm seus proprios filtros, que podem ser maiores que o filtro natural.

Os filtros alem de ter importância na formalização da existência do movimento, têm um papel importante na definição de martingales. Ou seja, em termos financeiros, se sabemos que um dado filtro $\mathcal{F}_S$e uma v.a X são dependentes, então $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ é uma melhor previsão para X do que$\mathbb{E}\,(X)$.

MARTINGALE

Um processo é dito martingale se o valor esperado dele é finito, ou possível de ser quantificado.

Def.: O processo $M_t é$um martingale se:

- ❏ $|\,\mathbb{E}(M_t)\,| < \infty$ para todo t;
- ❏ M_t é $F_t - mensurável$ para todo t;

- ❏ $\mathbb{E}(M_t|\, F_s) = M_s$ quase certamente se $s < t$
- ❏ $Cov(B_s, B_t) = \min(s, t)$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A distribuição normal tem um papel central neste trabalho e por isso vamos expor algumas de suas propriedades principais.

Uma distribuição normal numa variável X com média μe variância σ^2é uma distribuição estatística com função densidade de probabilidade dada por:

$P\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$tal que o suporte de x é $(-\infty, \infty)$.

É possivel demonstrar que a distribuição normal é o caso limitante de uma distribuição binominal $P_p\left(n\,|\,N\right)$ conforme $N \to \infty$.

Temos que $P\left\{W_t \in [x, x+dx]\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx$, $P\left\{W_t < a\right\} = N\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$ e $N\left(y\right) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-x^2\right\} dx$

σ-algebras

Um espaço de probabilidade e uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde Ωé um conjunto não-vazio, F é uma $\sigma - algebra$ de subconjuntos de Ω e P é uma função que, para todo conjunto $A \in F$ é atribuído um número em $[0, 1]$ chamado de probabilidade de A e escrito como $P(A)$. É requerido que:

- ❏ $P(\Omega) = 1$
- ❏ Para qualquer sequência $A_1, A_2, ...$ disjunta contida em F, temos: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Processo Estocástico

Um processo estocástico e uma coleção parametrizada de variáveis aleatórias. Podemos representar um processo estocástico da variável aleatória X como:

$\{X_t\}_{t\,\in\,T}$

e esta definido num espaço de probabildiades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e assume valores em $\mathbb{R}^n$.

Conjunto de Borel

Um conjunto de Borel é qualquer conjunto num espaço topológico que pode ser formado a partir de conjuntos abertos a partir de operações de união contável, interseção contável e complemento relativo.

Variável aleatoria

Seja (Ω, A, P) um espaço de probabilidade. Uma função real univariada $X = X(\omega)$ definida em Ωé dita uma variável aleatória se para qualquer real x o conjunto $\{\omega : X(\omega) < x\}$ pertence à classe A.

Variável F-mensurável

Seja (Ω, F, P) um espaço de probabilidades. Um mapeamento $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$é dito uma variável aleatória n-dimensional se para cada b em B, a relação $X^{-1}(B) \in F$ é verdadeira. Equivalentemente X é dito F-mensurável.

Espaço de Hilbert

O conceito de espao de Hilbert será necessario para a demosntração da existência do Movimento Browniano. Porem, antes é necessaria a definição do conceito de sequência de Cauchy que tem um papel central nos espaços de Hilbert.

Uma sequência de elementos $x_n$de um espaço métrico com métrica $d(...)$é dita uma sequência de Cauchy se para cada $\epsilon > 0$ existe um $n_0$tal que para todo k, m, $d(x_k, x_m) < \epsilon$.

Um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$é um espaço vetorial dotado com produto interno $\langle x, y \rangle = x^T y$, norma $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ e uma métrica associada $\|x - y\|$tal que toda sequência de Cauchy tem limite em $\mathbb{R}^n$ é dito um espaço de Hilbert.