

Elisa Aparecida Oliani

Frações Contínuas: Convergência, Aceleração e Erro de Truncamento



1910000928





**FRAÇÕES CONTÍNUAS:
CONVERGÊNCIA, ACELERAÇÃO E
ERRO DE TRUNCAMENTO**

Elisa Aparecida Oliani

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-053



FRAÇÕES CONTÍNUAS: CONVERGÊNCIA, ACELERAÇÃO E ERRO DE TRUNCAMENTO

Elisa Aparecida Olini

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.



Orientador: Prof. Dr. A. Sri Ranga

São José do Rio Preto
2000

Aos meus pais, Ana Alice e Clévio
e ao meu filho, Bruno
dedico.



Agradecimentos

A Deus, por tudo o que tem feito de bom na minha vida.

A meu filho, que sempre soube entender a minha ausência e que sempre com amor e carinho me ajudou a superar os momentos de insegurança.

A meus pais, por sempre estarem a meu lado e por terem tornado a realização desse sonho possível.

A meus irmãos Márcio, Júnior, Vânia e Fábio, à minha cunhada Karina e a meu sobrinho Vinícius, que souberam compreender e respeitar os meus ideais e que sempre torceram por mim.

A todos os meus familiares, em especial às minhas tias Nilda e Inair que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis da minha vida.

Ao professor Itanga, pela confiança que depositou em meu trabalho e por sempre ter respeitado as minhas dúvidas e inseguranças.

A professora Eliana por ter sempre me ajudado, em todos os momentos durante os últimos 5 anos.

A professora Cleonice pelo apoio, atenção e pelas palavras de confiança.

A meus amigos Carina, Claudiadja, Clinton, Graziela, Liberto, Lisandra, Marcelo, Patrícia, Paulo, Renas, Rosângela, Romildo e Teina pelos momentos de alegria que passamos juntos.

A todos os meus amigos que não fazem parte da Pós-graduação, mas que sempre me apoiaram.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

A FAPESP, pelo auxílio financeiro.

“Mas é preciso ter força,
é preciso ter raça,
é preciso ter gana, sempre.”

Milton Nascimento

Agradecimentos

A Deus, por tudo o que tem feito de bom na minha vida.

A meu filho, que sempre soube entender a minha ausência e que sempre com amor e carinho me ajudou a superar os momentos de insegurança.

A meus pais, por sempre estarem a meu lado e por terem tornado a realização desse sonho possível.

A meus irmãos Márcio, Júnior, Vânia e Fábio, à minha cunhada Karina e a meu sobrinho Vinícius, que souberam compreender e respeitar os meus ideais e que sempre torceram por mim.

A todos os meus familiares, em especial às minhas tias Nilde e Inair que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis da minha vida.

Ao professor Ranga, pela confiança que depositou em meu trabalho e por sempre ter respeitado as minhas dúvidas e inseguranças.

À professora Eliana por ter sempre me ajudado, em todos os momentos durante os últimos 5 anos.

À professora Cleonice pelo apoio, atenção e pelas palavras de confiança.

A meus amigos Carina, Claudinéia, Clinton, Graziela, Liberto, Lisandra, Marcelo, Patrícia, Paulo, Renan, Rosemeire, Romildo e Telma pelos momentos de alegria que passamos juntos.

A todos os meus amigos que não fazem parte da Pós-graduação, mas que sempre me apoiaram.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.



Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer um levantamento dos principais resultados sobre convergência de frações contínuas. Dentre estes resultados nos aprofundamos nos estudos relacionados ao famoso Teorema da Parábola. Além disso, por tratar-se de uma extensão do Teorema da Parábola, estudamos as condições de convergência para uma fração contínua definida positiva particular chamada de $\hat{J}$ -fração, que está intimamente relacionada aos polinômios similares.



Abstract

The objective of this dissertation is to consider a survey of the main contribution on the convergence of continued fractions. Among the many interesting results considered in this survey, more emphasis is given on the results associated with the so called Parabola Theorem. This result is considered by many as the most important criteria for convergence of continued fractions. In the final section of this dissertation we also consider the convergence behavior of certain continued fraction which are associated with a positive definiteness property. This property can be considered as an extension of the criteria given by the Parabola Theorem.

4	O Teorema da Parábola	41
4.1	Contribuições de Scott e Wall	41
4.2	Contribuições de Paydon e Wall	42
4.3	Contribuições de Thron e outros pesquisadores	44
4.4	Demonstração do Teorema da Parábola	47
5	Frações contínuas definidas positivas: um caso particular	55
5.1	Introdução	55
5.2	$\hat{J}$ -fração definida positiva	56
5.3	Círculos de convergência	59
5.4	Caso limite pontual	62
5.5	Limite circular	65
5.6	Convergência uniforme da $\hat{J}$ -fração	69
5.7	Considerações finais	70
	Referências Bibliográficas	71



4	O Teorema da Parábola	41
4.1	Contribuições de Scott e Wall	41
4.2	Contribuições de Paydon e Wall	42
4.3	Contribuições de Thron e outros pesquisadores	44
4.4	Demonstração do Teorema da Parábola	47
5	Frações contínuas definidas positivas: um caso particular	55
5.1	Introdução	55
5.2	$\hat{J}$ -fração definida positiva	56
5.3	Círculos de convergência	59
5.4	Caso limite pontual	62
5.5	Limite circular	65
5.6	Convergência uniforme da $\hat{J}$ -fração	69
	Referências Bibliográficas	71



Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre convergência de frações contínuas. A motivação para a sua realização veio dos estudos sobre polinômios ortogonais e similares e suas relações com certas frações contínuas que fizemos durante nossos estágios de Iniciação Científica. Historicamente, os estudos de polinômios ortogonais e similares e suas aplicações foram altamente beneficiados pelos resultados já conhecidos sobre frações contínuas. Por exemplo, Gauss em 1814 usou resultados conhecidos sobre uma fração contínua associada à função $f(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^{-1} dt$ para obter a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre. Inspirado por esse resultado, Jacobi dá o primeiro passo para o estudo que deu origem ao conceito de “ortogonalidade” e, especialmente, de “polinômios ortogonais”.

Para definirmos uma sequência de polinômios ortogonais, consideremos $\phi(x)$ uma função real, limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento no intervalo (c, d) , $-\infty \leq c \leq d \leq \infty$. Quando os momentos $\mu_r^\phi = \int_c^d x^r d\phi(x)$, $r = 0, 1, \dots$, existem, $d\phi(x)$ pode ser chamada uma distribuição (medida positiva) em (c, d) .

Dadas uma distribuição $d\phi(x)$ em (c, d) e $\{Q_n^\phi(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios de grau n , se

$$\int_c^d x^s Q_n^\phi(x) d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad (1.0.1)$$

então $\{Q_n^\phi(x)\}_{n=0}^\infty$ é chamada uma sequência de polinômios ortogonais com relação à distribuição $d\phi(x)$ sobre o intervalo (c, d) .

O estudo desses polinômios tem sido assunto de pesquisa extremamente importante. Como algumas aplicações desses polinômios citamos: quadraturas numéricas, aproximações de Padé, aproximações por splines, aproximações que preservam momentos, métodos de relaxação em Álgebra Linear, processo de “birth and death” em Estatística e teoria de códigos.

Na forma mônica, esses polinômios satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$Q_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi) Q_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi Q_{n-1}^\phi(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.0.2)$$

onde $Q_0^\phi(x) = 1$, $Q_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, $\beta_n^\phi \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{n+1}^\phi > 0$, para $n = 1, 2, \dots$.



Quando falamos de polinômios similares aos ortogonais, nos referimos à sequência de polinômios $\{B_n^\psi(t)\}_{n=0}^\infty$, onde $B_n^\psi(t)$, de grau n , é definido por

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n^\psi(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (1.0.3)$$

Aqui, $d\psi(t)$ é uma distribuição forte no intervalo $(a, b) \subseteq (0, \infty)$. Qualquer distribuição em (a, b) , cujos momentos $\mu_m^\psi = \int_a^b t^m d\psi(t)$ existem para todo $m \in \mathbb{Z}$, é chamada de distribuição forte.

É conhecido que os polinômios $B_n^\psi(t)$, na sua forma mônica, satisfazem à relação de recorrência

$$B_{n+1}^\psi(t) = (t - \beta_{n+1}^\psi) B_n^\psi(t) - \alpha_{n+1}^\psi t B_{n-1}^\psi(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.0.4)$$

onde $B_0^\psi(t) = 1$, $B_1^\psi(t) = t - \beta_1^\psi$ e $\beta_n^\psi, \alpha_{n+1}^\psi$, para $n = 1, 2, \dots$ são positivos.

Algumas aplicações que surgem do estudo desses polinômios são as fórmulas de quadratura interpolatórias baseadas nos zeros de $B_n^\psi(t)$ e nos zeros de combinações lineares desses polinômios quando a distribuição forte satisfaz às propriedades $d\psi(t) = -d\psi(ab/t)$ ou $d\psi(t)/\sqrt{t} = -d\psi(ab/t)/\sqrt{ab/t}$.

Dada uma distribuição forte $d\psi(t)$ definida em um intervalo (a, b) a restrição $(a, b) \subseteq (0, \infty)$ é importante para garantir a existência dos polinômios $B_n^\psi(t)$, $n = 1, 2, \dots$. Precisamente, a existência dos polinômios $B_n^\psi(t)$, $n = 1, 2, \dots$, depende do fato dos determinantes de Hankel, definidos por

$$H_n^{(k)} = \begin{vmatrix} \mu_k^\psi & \mu_{k+1}^\psi & \cdots & \mu_{k+n-1}^\psi \\ \mu_{k+1}^\psi & \mu_{k+2}^\psi & \cdots & \mu_{k+n}^\psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k+n-1}^\psi & \mu_{k+n}^\psi & \cdots & \mu_{k+2n-2}^\psi \end{vmatrix},$$

serem diferentes de zero para $k = -n, -n+1$ e $n = 1, 2, \dots$. Isso é garantido quando $(a, b) \subseteq (0, \infty)$.

Uma sequência $\{\hat{V}_n^\psi(t)\}$ de polinômios mônicos, cuja existência depende de menos restrições, é definida por

$$\int_a^b t^{-2n/2+s} \hat{V}_n^\psi(t) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (1.0.5)$$

Esses polinômios satisfazem ao par de relações de recorrência

$$\begin{aligned} \hat{V}_{2n}^\psi(t) &= (t - \beta_{2n}^\psi) \hat{V}_{2n-1}^\psi(t) - \alpha_{2n}^\psi \hat{V}_{2n-2}^\psi(t), \\ \hat{V}_{2n+1}^\psi(t) &= [(1 + \hat{\alpha}_{2n+1}^\psi)t - \hat{\beta}_{2n+1}^\psi] \hat{V}_{2n}^\psi(t) - \hat{\alpha}_{2n+1}^\psi t^2 \hat{V}_{2n-1}^\psi(t), \end{aligned} \quad (1.0.6)$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $\hat{V}_0^\psi(t) = 1$, $\hat{V}_1^\psi(t) = t - \hat{\beta}_1^\psi$ e $\hat{\beta}_n^\psi, \hat{\alpha}_{n+1}^\psi$, para $n = 1, 2, \dots$, são positivos.

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}} \quad (1.0.7)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são sequências de números complexos ou funções (simples) complexas. Uma fração contínua pode ser denotada das seguintes formas

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad \text{ou} \quad b_0 + \overset{\infty}{K}_{n=1} \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

Frações contínuas estão intimamente ligadas às relações de recorrência de três termos. No caso da relação de recorrência (1.0.2) sabe-se que a fração contínua

$$\frac{\mu_0^\phi}{z - \beta_1^\phi} - \frac{\alpha_2^\phi}{z - \beta_2^\phi} - \frac{\alpha_3^\phi}{z - \beta_3^\phi} - \frac{\alpha_4^\phi}{z - \beta_4^\phi} - \dots,$$

conhecida por J-fração, se convergir (certamente quando $-\infty < c < d < \infty$), converge para a função $\int_c^d \frac{1}{z-x} d\phi(x)$. A convergência é uniforme em qualquer região limitada e fechada em $\tilde{\mathcal{C}} \setminus [c, d]$, onde $\tilde{\mathcal{C}}$ é o plano complexo estendido.

Da mesma forma, a fração contínua

$$\frac{\mu_0^\psi}{z - \beta_1^\psi} - \frac{\alpha_2^\psi z}{z - \beta_2^\psi} - \frac{\alpha_3^\psi z}{z - \beta_3^\psi} - \frac{\alpha_4^\psi z}{z - \beta_4^\psi} - \dots, \quad (1.0.8)$$

construída a partir da relação de recorrência (1.0.4), se convergir, converge para a função $\int_a^b \frac{1}{z-t} d\psi(t)$, $0 < a < b < \infty$. Esta convergência é uniforme em qualquer região limitada e fechada de $\tilde{\mathcal{C}} \setminus [a, b]$. A fração contínua (1.0.8) é chamada de M-fração ou T-fração.

No Capítulo 5, apresentamos um estudo da convergência de uma extensão das J-frações, denotadas por $\hat{J}$ -fração, ou seja, fizemos um estudo sobre as frações contínuas

$$\frac{\mu_0^\psi}{z - \hat{\beta}_1^\psi} - \frac{\hat{\alpha}_2^\psi}{z - \hat{\beta}_2^\psi} - \frac{\hat{\alpha}_3^\psi z^2}{(1 + \hat{\alpha}_3^\psi)z - \hat{\beta}_3^\psi} - \frac{\hat{\alpha}_4^\psi}{z - \hat{\beta}_4^\psi} - \frac{\hat{\alpha}_5^\psi z^2}{(1 + \hat{\alpha}_5^\psi)z - \hat{\beta}_5^\psi} - \dots \quad (1.0.9)$$

que surgem da relação de recorrência (1.0.6) e que, se convergirem (certamente quando $-\infty < a < b < \infty$), convergem para a mesma função $\int_a^b \frac{1}{z-t} d\psi(t)$. Novamente, a convergência é uniforme em qualquer região limitada e fechada em $\tilde{\mathcal{C}} \setminus [a, b]$.

Como pode ser visto nos capítulos 2 e 3, o estudo da convergência de frações contínuas

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} + \frac{a_n}{b_n + \dots},$$

envolve, em geral, o estudo das transformações lineares fracionais ou transformações de Moebius. Em termos de aplicação, nas transformações lineares fracionais temos a interessante propriedade: a imagem de uma região circular é uma região circular.

O estudo da convergência de frações contínuas revela toda a beleza que as transformações lineares fracionais têm a oferecer. Neste trabalho, consideramos as transformações lineares fracionais

$$\begin{aligned} s_0(w) &= b_0 + w, & s_n(w) &= \frac{a_n}{b_n + w}, \\ S_0(w) &= s_0(w), & S_n(w) &= S_{n-1}(s_n(w)), \end{aligned}$$



para $n = 1, 2, \dots$. Vemos facilmente, e isso será mostrado no Capítulo 2, que

$$S_n(w) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n + w}}}.$$

Demonstramos, também, que

$$S_n(w) = \frac{A_n + wA_{n-1}}{B_n + wB_{n-1}},$$

onde A_n e B_n , para $n = 1, 2, \dots$, satisfazem às relações de recorrência

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2},$$

onde $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$, $A_0 = b_0$ e $B_0 = 1$. Dizemos que

$$S_n(0) = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}$$

é a n -ésima convergente da fração contínua (1.0.7).

No decorrer dessa dissertação, analisamos dois tipos de convergência. O primeiro trata da convergência da sequência $\{S_n(0)\}$. Dizemos que a fração contínua tem convergência clássica quando a sequência $f_n = S_n(0)$ converge para um valor f . No caso da convergência clássica, é possível achar condições em termos de $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e de uma sequência de regiões (conjuntos) $\{V_n\}$, com $0 \in V_n$,

$$V_n \subseteq \tilde{\mathcal{C}}, \quad V_n \neq \emptyset$$

e

$$s_n(V_n) = \frac{a_n}{b_n} \subseteq V_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

tais que

$$S_1(V_1) \supseteq S_2(V_2) \supseteq \dots S_{n-1}(V_{n-1}) \supseteq S_n(V_n) \supseteq \dots \quad (1.0.10)$$

A sequência de conjuntos $\{V_n\}$ é chamada de sequência de conjuntos de valores.

Quando as regiões $S_n(V_n)$, para $n = 1, 2, \dots$, são circulares elas convergem para um círculo ou para um ponto. Quando convergirem para um ponto, dizemos que ocorre o caso limite pontual. Nesse caso, podemos dizer que a sequência de convergentes $\{S_n(0)\}$ também converge para esse limite. Quando as regiões $S_n(V_n)$, para $n = 1, 2, \dots$, convergem para um círculo, dizemos que ocorre o caso limite circular. Nesse caso, a fração contínua ainda pode ser considerada convergente se, por exemplo, a sequência $\{S_n(0)\}$ convergir para um ponto no limite circular. É importante observarmos também que quando ocorre o caso limite pontual, podemos calcular um limitante para o erro de truncamento da n -ésima convergente através do raio R_n de $S_n(V_n)$. No Capítulo 4, calculamos um erro de truncamento para a fração contínua do tipo $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$ onde, para todo n , os coeficientes a_n pertencem à região parabólica

$$P_\alpha = \left\{ a \in \mathcal{C} : |a| - \operatorname{Re}(ae^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right\}.$$

Essa região P_α é considerada a melhor região de valores conhecida e o Teorema da Parábola é tido por muitos autores como o melhor critério de convergência para frações contínuas do tipo $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{1})$. Por se tratar de um critério tão importante, fizemos, também no Capítulo 4, um levantamento das suas principais demonstrações.

Dentre as muitas formas de se estender o Teorema da Parábola, apresentamos, no Capítulo 5 uma extensão desse resultado usando a teoria de frações contínuas definidas positivas para a $\hat{J}$ -fração (1.0.9). Buscamos condições sobre os coeficientes $\hat{\alpha}_{n+1}^\psi$ e $\hat{\beta}_n^\psi$ da fração contínua (1.0.9) para que ocorra o caso limite pontual. Aqui também tratamos de um segundo tipo de convergência que chamamos convergência generalizada. Quando falamos de convergência generalizada, estamos tratando da convergência das sequências $\{S_n(w_n)\}$. Se a sequência $\{w_n\}$ for tomada como o valor aproximado da fração contínua

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} + \frac{a_{n+3}}{b_{n+3}} + \frac{a_{n+4}}{b_{n+4}} + \dots, \tag{1.0.11}$$

chamada a n -ésima cauda (resto de ordem n) de (1.0.7), a convergência da fração contínua (1.0.7) será acelerada visto que quando tomamos a sequência $\{S_n(0)\}$ estamos substituindo a n -ésima cauda (1.0.11) por zero, o que nem sempre é o ideal.

2.1 Transformações lineares fracionais

Uma transformação linear fracional (t.l.f.) é definida por

$$t(w) = \frac{a + bw}{c + dw},$$

onde $ad - bc \neq 0$. Essas transformações também são chamadas de transformações de Möbius ou, ainda, transformações bilineares (veja [1] ou [2]).

Dentre suas propriedades, podemos citar

1. $t(w)$ é uma transformação biotiva do plano complexo estendido ($\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) nele mesmo.
2. Sua inversa também é uma transformação linear fracional.
3. A composição de transformações lineares fracionais é uma transformação linear fracional.
4. A imagem de um círculo generalizado é um círculo generalizado. Por círculo generalizado no plano complexo estendido entende-se qualquer curva que seja círculo ou reta.
5. Se w_1, w_2, w_3 e w_4 são quatro pontos distintos em $\hat{\mathbb{C}}$ e se t é uma transformação linear fracional, então

$$\frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_2 - w_3)} = \frac{(t(w_1) - t(w_3))(t(w_2) - t(w_4))}{(t(w_1) - t(w_4))(t(w_2) - t(w_3))}.$$



Capítulo 2

Resultados preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados básicos que serão necessários ao desenvolvimento e melhor compreensão deste trabalho.

2.1 Transformações lineares fracionais

Uma transformação linear fracional (t.l.f.) é definida por

$$t(w) = \frac{a + cw}{b + dw},$$

onde $ad - bc \neq 0$. Essas transformações também são chamadas de transformações de Moebius ou, ainda, transformações bilineares (veja [1] ou [2]).

Dentre suas propriedades, podemos citar

1. $t(w)$ é uma transformação bionívoca do plano complexo estendido ($\tilde{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{C} \cup \infty$) nele mesmo.
2. Sua inversa também é uma transformação linear fracional.
3. A composição de transformações lineares fracionais é uma transformação linear fracional.
4. A imagem de um círculo generalizado é um círculo generalizado. Por círculo generalizado no plano complexo estendido entende-se qualquer curva que seja círculo ou reta.
5. Se w_1, w_2, w_3 e w_4 são quatro pontos distintos em $\tilde{\mathcal{C}}$ e se t é uma transformação linear fracional, então

$$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)} = \frac{(t(w_1) - t(w_2))(t(w_3) - t(w_4))}{(t(w_1) - t(w_3))(t(w_2) - t(w_4))}.$$

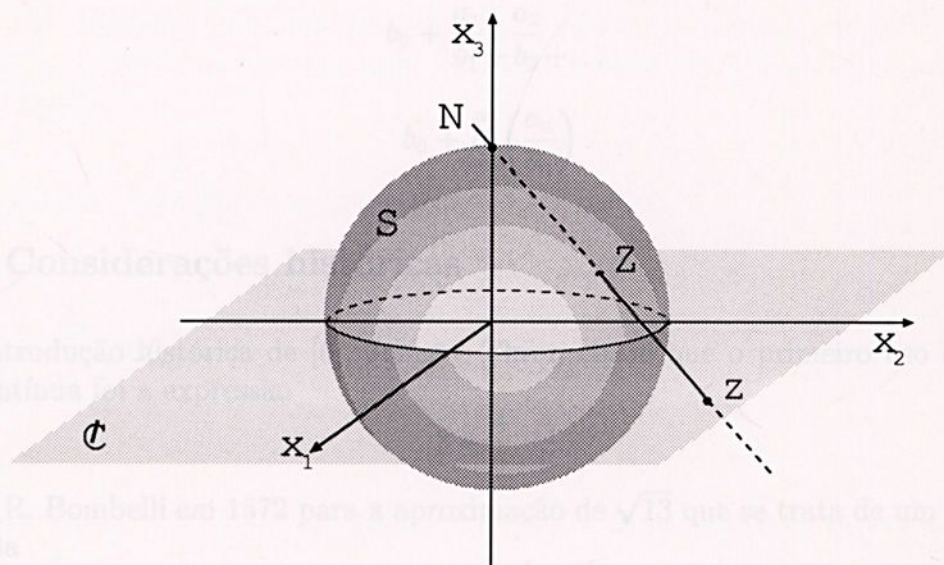


6. As imagens de pontos simétricos são simétricas.

Veremos, agora, que existe uma correspondência bionívoca entre o plano complexo estendido e a esfera de Riemann $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Para cada ponto do plano, atribuímos um ponto correspondente na esfera de Riemann. Dizemos que $N = (0, 0, 1)$ é o polo norte da esfera. O ponto Z da esfera S que corresponde a $z = x + iy \in \tilde{\mathcal{C}}$ é o segundo ponto da interseção de S com a linha que passa através de $(x, y, 0)$ e através do polo norte N de S . As coordenadas de Z são dadas por

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \\x_2 &= \frac{-i(z - \bar{z})}{z\bar{z} + 1}, \\x_3 &= \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}.\end{aligned}$$

Ao polo norte da esfera é associado o ponto ∞ . Veja a figura abaixo:



Definição 2.1.1 A distância cordal, ou métrica cordal, entre dois pontos w e z em $\tilde{\mathcal{C}}$ é definida por

$$d(w, z) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |w|^2} \sqrt{1 + |z|^2}}, \quad (2.1.1)$$

se w e z são finitos, e

$$d(w, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |w|^2}}.$$

A distância $d(w, z)$ representa o comprimento da corda entre as imagens de w e z na esfera de Riemann.

Dizemos que uma curva em $\tilde{\mathcal{C}}$ é um círculo generalizado se, e somente se, a imagem desta curva sobre a esfera de Riemann é um círculo. Um círculo generalizado representa uma reta se, e somente se, sua imagem em S é um círculo que passa por $(0, 0, 1)$. Maiores informações a respeito da esfera de Riemann e t.f.l. podem ser encontradas, por exemplo, em [2].

2.2 Frações contínuas

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências de números complexos ou funções complexas simples com $a_n \neq 0$. Uma fração contínua pode, também ser denotada das seguintes formas

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots$$

ou

$$b_0 + K_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

2.2.1 Considerações históricas

Na introdução histórica de [6], Jones e Thron citam que o primeiro uso conhecido de fração contínua foi a expressão

$$3 + \frac{4}{6} + \frac{4}{6}$$

dada por R. Bombelli em 1572 para a aproximação de $\sqrt{13}$ que se trata de um caso especial da fórmula

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \dots \quad (2.2.2)$$

Em 1613, P.Cataldi considerou um segundo caso particular de (2.2.2)

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8},$$

que foi abreviada por ele da seguinte forma

$$4 \& \frac{2}{8} \& \frac{2}{8} \& \frac{2}{8}.$$

Em 1625, D. Schwenter e C. Huygens consideraram frações contínuas da forma $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$, onde b_n são inteiros positivos. Schweter determinou

$$\frac{177}{233} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

e Huygens encontrou

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

A primeira expansão em termos de frações contínuas infinitas foi dada por Lord W. Brouncker por volta de 1659. Acredita-se que, inspirado na identidade

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}$$

dada por Wallis em 1655, descreveu, sem provar, que

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)^2}{2} \right).$$

2.2.2 Definição, notações e principais propriedades

Apresentaremos, agora, uma definição de frações contínuas adotada em [11, pp. 7], envolvendo transformações lineares fracionais, atribuída a Henrici e Pfluger, e que será usada ao longo deste trabalho.

Definição 2.2.1 *Uma fração contínua é um par ordenado*

$$((\{a_n\}, \{b_n\}), \{f_n\}) \quad (2.2.3)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências de números complexos ou ainda funções complexas simples com $a_n \neq 0$ e $\{f_n\}$ é uma seqüência em $\mathbb{C}$ dada por

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.4)$$

onde $S_n(w)$, para $n = 1, 2, \dots$, são transformações lineares fracionais definidas por

$$\begin{aligned} S_n(w) &= S_{n-1}(s_n(w)), \\ s_n(w) &= \frac{a_n}{b_n + w} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

onde

$$S_0(w) = s_0(w),$$

$$s_0(w) = b_0 + w.$$

De (2.2.5) podemos denotar $S_n(w)$ por

$$S_n(w) = s_0 \circ s_1 \circ \dots \circ s_n(w). \quad (2.2.6)$$

Os números a_n e b_n são chamados, respectivamente, n -ésimos numeradores e denominadores parciais. Esses números também podem ser chamados de elementos da fração contínua. O valor

$$f_n = S_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}} \quad (2.2.7)$$

é chamado de n -ésima convergente ou aproximante da fração contínua. Podemos usar as seguintes notações

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad (2.2.8)$$

ou

$$f_n = b_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{b_j} \right).$$

Correspondente a cada fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ existem seqüências de números ou funções complexas $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ definidas por

$$\begin{bmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

e

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = b_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.10)$$

Os números A_n e B_n são chamados de n -ésimo numerador e denominador de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, respectivamente (também são chamados de numerador e denominador canônicos). A demonstração do resultado (2.2.10) é feita por indução matemática e pode ser encontrada em [26, pp. 15]. A importância desses números é mostrada no teorema abaixo.

Teorema 2.2.1 Se A_n , B_n e f_n denotam os n -ésimos numerador, denominador e convergente da fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ respectivamente, e se $\{S_n\}$ é a seqüência de t.l.f. (2.2.5), então

$$S_n(w) = \frac{A_n + A_{n-1}w}{B_n + B_{n-1}w}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.11)$$

$$f_n = S_n(0) = \frac{A_n}{B_n} \quad e \quad f_{n-1} = S_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (2.2.12)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 1, 2, \dots$ respectivamente, e

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.13)$$

Demonstração: A igualdade (2.2.11) pode ser mostrada por indução matemática sobre n usando-se (2.2.10). A partir de (2.2.11), segue que

$$f_n = S_n(0) = \frac{A_n}{B_n} \quad e \quad S_n(\infty) = f_{n-1}.$$



Usando (2.2.10), temos que

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1) a_n (A_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} B_{n-1}).$$

Aplicando este resultado sucessivamente, temos $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k$.

Agora, $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n \neq 0$ segue do fato que $a_n \neq 0$. ■

Teorema 2.2.2 As sequências $\{A_n\}_{n=-1}^\infty$ e $\{B_n\}_{n=-1}^\infty$ de números complexos são numeradores e denominadores canônicos de alguma fração contínua $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ se, e somente se,

$$A_{-1} = B_0 = 1, \quad B_{-1} = 0 \quad e \quad \Delta_n = A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} \neq 0, \quad (2.2.14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se (2.2.14) vale, então $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ é unicamente determinada por

$$\begin{aligned} b_0 &= A_0, & b_1 &= B_1, & a_1 &= A_1 - A_0 B_1, \\ a_n &= \frac{-\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad e \quad b_n = \frac{A_n B_{n-2} - B_n A_{n-2}}{\Delta_{n-1}}, & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Demonstração: Se $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ é dado, então (2.2.14) já foi demonstrado no teorema anterior. Se A_n e B_n satisfazem (2.2.14), então a_n e b_n são soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} A_n &= a_n A_{n-2} + b_n A_{n-1}, \\ B_n &= a_n B_{n-2} + b_n B_{n-1}, \end{aligned}$$

cujo determinante é $\Delta_{n-1} \neq 0$. Assim, a solução é dada por (2.2.15) e é única. ■

Corolário 2.2.2.1 A sequência $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ em $\tilde{\mathcal{C}}$ é uma sequência de convergentes para uma fração contínua $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ se, e somente se,

$$f_0 \neq \infty \text{ e } f_n \neq f_{n-1}, \text{ para } n = 1, 2, \dots \quad (2.2.16)$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Então, $f_0 = b_0 \neq \infty$ e

$$f_n - f_{n-1} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{B_n B_{n-1}} \neq 0.$$

($\Leftarrow$) Se f_n é dada, definimos A_n e B_n por $B_n = 1$ e $A_n = f_n$, se $f_n \neq \infty$ e $B_n = 0$ e $A_n = 1$, se $f_n = \infty$.

Daí, o resultado segue do Teorema 2.2.2. ■



2.2.3 Caudas de frações contínuas

Definição 2.2.2 Seja $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para $N \in \mathbb{N}_0$, a N -ésima cauda de uma fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ é a fração contínua

$$K_{n=N}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} + \frac{a_{N+2}}{b_{N+2}} + \dots \quad (2.2.17)$$

Analogamente ao que foi feito para a fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, para $n = 0, 1, \dots$ definimos

$$S_n^{(N)}(w) = \frac{A_n^{(N)} + A_{n-1}^{(N)}w}{B_n^{(N)} + B_{n-1}^{(N)}w} = s_{N+1} \circ s_{N+2} \circ \dots \circ s_{N+n}(w) \quad (2.2.18)$$

onde

$$\begin{bmatrix} A_{-1}^{(N)} \\ B_{-1}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_0^{(N)} \\ B_0^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{bmatrix} A_n^{(N)} \\ B_n^{(N)} \end{bmatrix} = b_{N+n} \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(N)} \\ B_{n-1}^{(N)} \end{bmatrix} + a_{N+n} \begin{bmatrix} A_{n-2}^{(N)} \\ B_{n-2}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.20)$$

e ainda,

$$A_n^{(N)} B_{n-1}^{(N)} - A_{n-1}^{(N)} B_n^{(N)} = - \prod_{j=N+1}^{N+n} (-a_j). \quad (2.2.21)$$

Usaremos $A_n^{(N)}$, $B_n^{(N)}$ e $f_n^{(N)} = S_n^{(N)}(0)$ para denotar os n -ésimos numerador, denominador e convergente da N -ésima cauda, respectivamente.

Teorema 2.2.3 Com a notação introduzida acima, as seguintes igualdades são verdadeiras.

$$A_n^{(N)} = a_{N+1} B_{n-1}^{(N+1)}, \quad N \geq 0, \quad n \geq 0, \quad (2.2.22)$$

$$B_n^{(N)} = b_{N+1} B_{n-1}^{(N+1)} + a_{N+2} B_{n-2}^{(N+2)}, \quad N \geq 0, \quad n \geq 1 \quad (2.2.23)$$

e

$$A_{n+k}^{(N)} B_{n-1}^{(N)} - A_{n-1}^{(N)} B_{n+k}^{(N)} = -B_k^{(N+n)} \prod_{j=N+1}^{N+n} (-a_j), \quad N \geq 0, \quad n, k \geq 0. \quad (2.2.24)$$

Demonstração: A equação (2.2.22) pode ser demonstrada por indução matemática sobre n usando (2.2.20).

A igualdade (2.2.23) é trivial para $n = 1$ e $n = 2$. Por indução, suponhamos que seja verdadeira para todo $k \leq n - 1$. Usando (2.2.20) para $B_k^{(N)}$, a hipótese de indução para $k = n - 1, n - 2$ e colocando em evidência os termos b_{N+1} e a_{N+2} , de (2.2.20), obtemos o resultado desejado.

Resta mostrar (2.2.24). Para isso, usamos indução matemática sobre k .



De (2.2.21), temos que (2.2.24) é válido para $k = 0$ desde que $B_0^{N+n} = 1$. Para $k = 1$, substituímos em (2.2.21) as expressões para $A_{n+1}^{(N)}$ e $B_{n+1}^{(N)}$ dadas em (2.2.20) e obtemos a igualdade

$$A_{n+1}^{(N)}B_{n-1}^{(N)} - A_{n-1}^{(N)}B_{n+1}^{(N)} = b_{N+n+1}(A_n^{(N)}B_{n-1}^{(N)} - A_{n-1}^{(N)}B_n^{(N)}).$$

Por (2.2.21) e (2.2.20), vemos que o resultado é válido para $k = 1$.

Suponhamos que seja válido para todo $m \leq k - 1$. Substituindo $A_{n+k}^{(N)}$ e $B_{n+k}^{(N)}$ dados por (2.2.20) em (2.2.24) e usando a hipótese de indução, obtemos o resultado desejado. ■

2.2.4 Sequências de caudas

Dizemos que uma sequência $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos em $\tilde{\mathcal{C}}$ é uma sequência de caudas para $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ se

$$t_{n-1} = \frac{a_n}{b_n + t_n} = s_n(t_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.25)$$

Em particular para $n = 0, 1, 2, \dots$, isto significa que

$$t_0 = \frac{a_1}{b_1 + t_1} = s_1(t_1) = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n(t_n) = S_n^{(0)}(t_n) \quad (2.2.26)$$

e, assim,

$$\{S_n^{(0)-1}(t_0)\}_{n=0}^{\infty}$$

é uma sequência de caudas (unicamente definida) para todo $t_0 \in \tilde{\mathcal{C}}$.

Observemos que se $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de caudas para $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, então $\{t_n\}_{n=N}^{\infty}$ é uma sequência de caudas para a N -ésima cauda (2.2.17).

Teorema 2.2.4 *Seja $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de caudas para $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$. Então, para $n = 0, 1, \dots$,*

$$t_n = S_n^{-1}(b_0 + t_0) = s_n^{-1} \circ s_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ s_1^{-1} \circ s_0^{-1}(t_0 + b_0) \quad (2.2.27)$$

$$= - \left\{ b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \dots + \frac{a_2}{b_1 + \frac{a_1}{(-t_0)}}}} \right\}.$$

Demonstração: De (2.2.26), temos

$$t_n = s_n^{-1} \circ s_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ s_1^{-1}(t_0) \quad (2.2.28)$$

e, de (2.2.5), $s_0^{-1}(b_0 + t_0) = t_0$. Substituindo este último valor na igualdade acima, mostramos a primeira parte do teorema. De (2.2.5), sabemos que

$$s_k^{-1}(w) = - \left\{ b_k + \frac{a_k}{(-w)} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$



Substituindo esses valores em (2.2.28) concluímos a demonstração. ■

Observemos que se $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\tilde{t}_n\}_{n=0}^\infty$ são duas seqüências de caudas para $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ com $t_k = \tilde{t}_k$ para algum k , então $t_n = \tilde{t}_n, \forall n$. Para demonstrarmos isso tomemos $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\tilde{t}_n\}_{n=0}^\infty$ duas seqüências de caudas para $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Logo, (2.2.27) vale para $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{\tilde{t}_n\}_{n=0}^\infty$. Temos, então,

$$t_{n+1} = s_{n+1}^{-1}(t_n) \quad \text{ou} \quad t_{n+1} = s_{n+1}^{-1}(S_n^{-1}(b_0 + t_0))$$

e

$$t_n = s_n^{-1}(t_{n-1}) \Rightarrow t_{n-1} = s_n(t_n) \quad \text{ou} \quad t_{n-1} = s_n(S_n^{-1}(b_0 + t_0)).$$

Assim, $\tilde{t}_{n+1} = s_{n+1}^{-1}(\tilde{t}_n)$ e $\tilde{t}_{n-1} = s_n(\tilde{t}_n)$. Suponha que, para algum n , tenhamos $t_n = \tilde{t}_n$. Então, $t_{n+1} = \tilde{t}_{n+1}$ e, de maneira análoga, $t_{n-1} = \tilde{t}_{n-1}$. Logo, concluímos que $t_n = \tilde{t}_n$, para $n = 0, 1, \dots$.

Para $n = 0, 1, 2, \dots$, seja

$$h_n = -S_n^{-1}(\infty). \quad (2.2.29)$$

Daí, $h_0 = \infty, h_1 = b_1$ e

$$h_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2} + \dots + \frac{a_2}{b_1}}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Observe que $S_n^{-1}(\infty) = S_n^{(0)-1}(\infty)$, com $s_0(\infty) = \infty$ é indiferente do valor de b_0 . A seqüência $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ é chamada de *seqüência de caudas críticas* de $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$.

2.2.5 Frações contínuas equivalentes

Sejam A_n e B_n os numeradores e denominadores canônicos associados à fração contínua $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ e C_n e D_n , associados à fração contínua $d_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{c_n}{d_n})$. Se $A_n = C_n$ e $D_n = B_n, \forall n$, então as duas frações contínuas são iguais. Mas, quando apenas $\frac{A_n}{B_n} = \frac{C_n}{D_n}, n = 0, 1, \dots$, dizemos que são frações contínuas equivalentes. Podemos, então, usar a seguinte definição.

Definição 2.2.3 Duas frações contínuas são equivalentes se elas possuem a mesma seqüência de convergentes. Notação:

$$b_0 + \bar{K}_{n=1}^\infty\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \approx d_0 + \bar{K}_{n=1}^\infty\left(\frac{c_n}{d_n}\right).$$

Teorema 2.2.5 $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n}) \approx d_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{c_n}{d_n})$ se, e somente se, existe uma seqüência de números complexos $\{r_n\}$ com $r_0 = 1$ e $r_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_0 = b_0, \quad c_n = r_n r_{n-1} a_n \quad \text{e} \quad d_n = r_n b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.30)$$



Demonstração: Sejam A_n e B_n os numeradores e denominadores canônicos de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$. Então, $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n}) \approx d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$ se, e somente se, existem números $r_n \neq 0$ tais que C_n e D_n podem ser escritos como

$$C_{-1} = 1, \quad D_{-1} = 0, \quad C_n = A_n \prod_{k=0}^n r_k \quad \text{e} \quad D_n = B_n \prod_{k=0}^n r_k, \quad \forall n. \quad (2.2.31)$$

Como $D_0 = B_0 = 1$, temos que $r_0 = 1$. Daí, pelo Teorema 2.2.2, temos

$$d_0 = C_0 = A_0 = b_0.$$

Para verificar que $c_n = r_n r_{n-1} a_n$ basta substituir (veja (2.2.15)) os valores de C_n e D_n , dados em (2.2.31), em

$$c_n = -\frac{\tilde{\Delta}_n}{\tilde{\Delta}_{n-1}}, \quad \text{onde} \quad \tilde{\Delta}_n = C_n D_{n-1} - D_n C_{n-1}.$$

Temos, então, uma expressão em função de A_n , B_n e do produto dos r_k . Como, por hipótese, $r_k \neq 0$, usando (2.2.15) obtemos o resultado. De maneira análoga, demonstramos que $d_n = r_n b_n$. ■

Corolário 2.2.5.1

1. $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n}) \approx d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_n})$, onde $d_n = b_n \prod_{k=1}^n a_k^{(-1)^{n+1-k}}$, $n = 1, 2, \dots$.
2. Se $b_n \neq 0$ para $n = 1, 2, \dots$, então $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n}) \approx d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{1})$, onde $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$ e $c_n = \frac{a_n}{b_n b_{n-1}}$ para $n = 2, 3, \dots$.

Demonstração: Para mostrar o item 1, no Teorema 2.2.5 tomemos

$$r_n = \prod_{k=1}^n a_k^{(-1)^{n-k+1}} \quad n \geq 1.$$

Para mostrar o item 2, basta tomarmos

$$r_n = \frac{1}{b_n}, \quad n \geq 1.$$

2.2.6 Contrações

Definição 2.2.4 Uma contração da fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, com convergentes $\{f_n\}$ é uma fração contínua $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$ cuja sequência de convergentes $\{g_n\}$ forma uma sub-sequência de $\{f_n\}$. Dizemos, também, que $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ é uma extensão de $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$. Em particular, dizemos que $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$ é uma contração canônica de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ se

$$C_k = A_{n_k}, \quad D_k = B_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.32)$$

onde A_n , B_n e C_n , D_n são numeradores e denominadores de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ e de $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$, respectivamente.



Teorema 2.2.6 *Sejam*

$$C_k = A_{2k} \quad e \quad D_k = B_{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.33)$$

Então, existe uma contração canônica $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$ de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ se, e somente se, $b_{2k} \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots$. Além disso, a fração contínua $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$ é dada por

$$b_0 + \frac{b_2 a_1}{b_2 b_1 + a_1} - \frac{a_2 a_3 b_4 / b_2}{a_4 + b_3 b_4 + a_3 b_4 / b_2} - \frac{a_4 a_5 b_6 / b_4}{a_6 + b_5 b_6 + a_5 b_6 / b_4} - \dots \quad (2.2.34)$$

e, se $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de caudas para $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ com $t_n \neq \infty$, então

$$t_0, -t_1 t_2, -t_3 t_4, \dots$$

é uma sequência de caudas para (2.2.34).

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.2 temos

$$d_0 = C_0 = A_0 = b_0,$$

$$d_1 = D_1 = B_2 = b_1 b_2 + a_2,$$

$$c_1 = C_1 - C_0 D_1 = A_2 - A_0 B_2 = b_2 a_1,$$

$$c_n = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \Delta_n = C_n D_{n-1} - D_n C_{n-1}.$$

Substituindo C_n e D_n pela sua expressão em (2.2.33) para $n = n, n-1$ e usando (2.2.24) para $n = 2n-1$ e $k = 1$, temos, para todo $n \geq 2$, que

$$\Delta_n = -B_1^{(2n-1)} \prod_{j=1}^{2n-1} (-a_j) = -b_{2n} \prod_{j=1}^{2n-1} (-a_j).$$

Usando este resultado para $n = n-1$, obtemos

$$c_n = -\frac{a_{2n-2} a_{2n-3} b_{2n}}{b_{2n-2}}. \quad (2.2.35)$$

Finalmente,

$$d_n = \frac{P_n}{\Delta_{n-1}},$$

onde

$$P_n = C_n D_{n-2} - D_n C_{n-2} = A_{2n} B_{2n-4} - B_{2n} A_{2n-4}.$$

Analogamente, tomando (2.2.24) para $n = 2n-3$ e $k = 3$ mostramos que

$$P_n = -[b_{2n} (b_{2n-1} b_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n} b_{2n-2}] \prod_{j=1}^{2n-3} (-a_j)$$



e, assim,

$$d_n = \frac{b_{2n}(b_{2n-1}b_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n}b_{2n-2}}{b_{2n-2}}, \quad (2.2.36)$$

o que demonstra (2.2.34).

Seja $\{t_n\}$ uma sequência de caudas para $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ com $t_n \neq \infty$. Então, $a_n = t_{n-1}(b_n + t_n)$ para todo n . Resta mostrar que $t_0, -t_1t_2, -t_3t_4, \dots$ é uma sequência de caudas para (2.2.34). Temos que

$$a_1 = t_0(b_1 + t_1). \quad (2.2.37)$$

Mas,

$$a_1 = \frac{c_1}{b_2} \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{d_1 - t_1(b_2 + t_2)}{b_2}.$$

De (2.2.35), substituindo esses valores em (2.2.37), obtemos

$$c_1 = t_0(d_1 - t_1t_2).$$

Observe que

$$b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}c_n}{a_{2n-1}a_{2n-2}} \quad (2.2.38)$$

e, de (2.2.36) usando (2.2.38),

$$a_{2n} = d_n + \frac{c_n}{a_{2n-2}a_{2n-1}}(b_{2n-2}b_{2n-1} + a_{2n-1}). \quad (2.2.39)$$

Como $a_{2n} = t_{2n-1}(b_{2n} + t_{2n})$, substituindo nesta expressão (2.2.38), (2.2.39) e efetuando alguns cálculos algébricos simples, chegamos em

$$c_n = -t_{2n-3}t_{2n-2}(d_n - t_{2n-1}t_{2n})$$

e, portanto $t_0, -t_1t_2, -t_3t_4, \dots$ é uma sequência de caudas para (2.2.34). ■

Uma contração desse tipo, isto é, tendo “convergentes apenas com os índices pares” de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ é muitas vezes chamada de parte par de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$. Ela é uma fração contínua equivalente a (2.2.34)

$$b_0 + \frac{b_2a_1}{b_2b_1 + a_1} - \frac{a_2a_3b_4}{b_2(a_4 + b_3b_4) + a_3b_4} - \frac{a_4a_5b_6}{b_4(a_6 + b_5b_6) + a_5b_6} - \dots \quad (2.2.40)$$

que é mais usada, mas não é canônica.

Teorema 2.2.7 Uma contração canônica $d_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{d_n})$ de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ com

$$C_0 = \frac{A_1}{B_1}, \quad D_0 = 1, \quad C_k = A_{2k+1} \quad \text{e} \quad D_k = B_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$



existe se, e somente se, $b_{2k+1} \neq 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ é dada por

$$\frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{b_1(a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_5 b_6 / b_3}{a_5 + b_4 b_5 + a_4 b_5 / b_3} - \dots \quad (2.2.41)$$

Se $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de caudas para $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ com $t_n \neq \infty$, então

$$-t_0 t_1 / b_1, -b_1 t_2 t_3, -t_4 t_5, \dots$$

é uma sequência de caudas para (2.2.41).

A demonstração é análoga à do teorema anterior.

Uma contração como (2.2.41), com “convergentes apenas com os índices ímpares” de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, é frequentemente chamada de parte ímpar de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$. Temos a fração contínua

$$\frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{b_1(a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_5 b_1}{b_3(a_5 + b_4 b_5) + a_4 b_5} - \frac{a_5 a_6 b_7 b_3}{b_5(a_7 + b_6 b_7) + a_6 b_7} + \dots, \quad (2.2.42)$$

que é equivalente a (2.2.41).

3.1 Definição

Definição 3.1.1 Convergência clássica de uma fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ para um número $f \in \mathbb{C}$ significa a convergência da sequência de convergentes $\{f_n\}$ para f e, neste caso, o valor da fração contínua é o limite da sequência $\{f_n\}$. Então, podemos escrever

$$f = b_0 + K_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right). \quad (3.1.1)$$

Como existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano complexo estendido e a esfera de Riemann (seção 2.1), adotamos também o conceito de convergência para o infinito. Neste caso, as imagens g_n de f_n na esfera de Riemann convergem para o polo norte. Assim, dizemos que uma fração contínua diverge se a sequência $\{f_n\}$ converge para mais de um valor ou quando não converge para nenhum valor.

3.2 Conjuntos de convergência

Condições de convergência para frações contínuas são frequentemente dadas em termos de conjuntos de convergência.

Capítulo 3

Convergência de frações contínuas

Neste capítulo, apresentamos a definição e os principais resultados sobre convergência de frações contínuas. Como o principal objetivo desse trabalho é estudar o Teorema da Parábola, não nos prenderemos a outros resultados. Apresentamos, também, a definição e alguns teoremas sobre convergência generalizada, a saber: Teorema 3.7.2, Teorema 3.7.3 e Teorema 3.7.4. Além disso, faremos um estudo sobre convergência (clássica e generalizada) para caudas de frações contínuas e algumas observações sobre aceleração de convergência e erro de truncamento. Apresentamos, também, a definição e alguns exemplos de conjuntos de convergência, seguindo com um estudo sobre as principais propriedades de conjuntos de valores.

3.1 Definição

Definição 3.1.1 *Convergência clássica de uma fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ para um número $f \in \tilde{\mathcal{C}}$ significa a convergência da sequência de convergentes $\{f_n\}$ para f e, neste caso, o valor da fração contínua é o limite da sequência $\{f_n\}$. Então, podemos escrever*

$$f = b_0 + \tilde{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right). \quad (3.1.1)$$

Como existe uma correspondência bionívoca entre os pontos do plano complexo estendido e a esfera de Riemann (seção 2.1), aceitamos também o conceito de convergência para o infinito. Neste caso, as imagens g_n de f_n na esfera de Riemann convergem para o polo norte. Assim, dizemos que uma fração contínua diverge se a sequência $\{f_n\}$ converge para mais de um valor ou quando não converge para nenhum valor.



3.2 Conjuntos de convergência

Crerios de convergência para frações contnuas s3o frequentemente dados em termos de conjuntos de convergência.

Definição 3.2.1 *Seja $\Omega \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Se $(a_n, b_n) \in \Omega$ para todo n e a fração contnuia $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge, ent3o Ω é chamado conjunto de convergência da fração contnuia.*

Definição 3.2.2 *Um conjunto de convergência condicional Ω é um conjunto de convergência onde $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge se, e somente se, a s3rie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n \prod_{k=1}^n a_k^{(-1)^{n-k+1}} \right| \quad (3.2.2)$$

diverge.

A s3rie (3.2.2) é conhecida como **s3rie de Stern-Stolz**.

Para a fração contnuia $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$, o conjunto de convergência Ω pode ser descrito como $\Omega = E \times \{1\}$ onde $\{1\}$ significa o conjunto constituído apenas pelo elemento 1. Para abreviar, dizemos que $E \subset \mathcal{C}$ é um conjunto de convergência para a fração contnuia $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$ se $\Omega = E \times \{1\}$ é um de seus conjuntos de convergência. Analogamente, dizemos que $G \subset \mathcal{C}$ é um conjunto de convergência para a fração contnuia $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ se $\Omega = \{1\} \times G$ é um conjunto de convergência para a mesma. Descreveremos, agora, alguns exemplos de conjuntos de convergência que ser3o demonstrados na seção 3.3

1. O conjunto de Śleszyński-Pringsheim. (Teorema 3.3.5)

$$\Omega = \{(a_n, b_n) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : |b_n| \geq |a_n| + 1\}$$

é um conjunto de convergência.

2. O disco de Worpitzky. (Teorema 3.3.4)

$$E = \left\{ a_n \in \mathcal{C} : |a_n| \leq \frac{1}{4} \right\}$$

é um conjunto de convergência.

3. O setor de Van Vleck. (Teorema 3.3.6)

$$G_{\epsilon} = \left\{ b_n \in \mathcal{C} : |\arg b_n| < \frac{\pi}{2} - \epsilon \right\} \quad \epsilon > 0,$$

é um exemplo de conjunto de convergência condicional.



3.3 Informações históricas sobre convergência

Apenas no início do século XIX surgiram os primeiros estudos sobre convergência de processos infinitos. Em 1832, Stern fez sugestões de que frações contínuas que oscilam entre limites finitos deveriam ser consideradas convergentes. Mas, foi apenas em 1946 que Seidel [14] e em 1948 que Stern [17] desenvolveram critérios de convergência e divergência para frações contínuas do tipo $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ com elementos reais.

Teorema 3.3.1 (Seidel-Stern) *Seja $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ uma fração contínua cujos elementos b_n são positivos.*

1. *Se f_n denota a n -ésima convergente então, para $n = 1, 2, \dots$,*

$$f_{2n} < f_{2n+2} < f_{2n+1} < f_{2n-1} \quad (3.3.3)$$

e ambas as partes, par e ímpar, de $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ convergem para valores finitos.

2. *Se, além disso, $\sum b_n = \infty$, então a fração contínua converge para um valor finito f e, para $n = 2, 3, \dots$,*

$$|f - f_n| < |f_n - f_{n-1}|.$$

Demonstração: 1. Usando o fato de que b_n é positivo na relação (2.2.10) temos $B_0 = 1$, $B_1 = b_1$ e, para $n = 1, 2, \dots$,

$$B_n = b_n B_{n-1} + B_{n-2} > B_{n-2}. \quad (3.3.4)$$

Então, $\{B_{2n-1}\}$ e $\{B_{2n}\}$ são sequências crescentes de números positivos. Assim, cada sequência converge para um valor finito ou para o infinito. Além disso, por (3.3.4),

$$0 < \frac{1}{B_{n-1}B_n} < \frac{1}{B_{n-1}B_{n-2}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.3.5)$$

Mas, como

$$f_n = S_n(0) = \frac{A_n}{B_n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{B_k B_{k-1}}, \quad (3.3.6)$$

temos

$$f_{2n+2} - f_{2n} = \frac{1}{B_{2n}B_{2n+1}} - \frac{1}{B_{2n+1}B_{2n+2}} > 0,$$

o que demonstra que $f_{2n} < f_{2n+2}$. As outras desigualdades seguem de maneira análoga.

2. Usando (2.2.10) para B_n com $n = 2n, 2n-2, \dots, 2$, e o fato de que os elementos b_n são positivos, temos

$$B_{2n} \geq 1.$$

De maneira análoga, considerando $n = 2n-1, 2n-3, \dots, 1$, temos

$$B_{2n-1} \geq b_1.$$



Usando esses fatos em (2.2.10), por indução matemática obtemos

$$B_{2n} \geq b_1(b_2 + b_4 + \dots + b_{2n}) + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

e

$$B_{2n-1} \geq b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como por hipótese $\sum b_n = \infty$, segue que pelo menos uma das sequências $\{B_{2n-1}\}$ ou $\{B_{2n}\}$ tende para o infinito. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n B_{n-1} = \infty.$$

Então, $\left\{ \frac{1}{B_n B_{n-1}} \right\}$ é uma sequência monótona decrescente e tende para zero. Logo, pelo critério de Leibniz, veja [10, pp. 40], a série

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{B_k B_{k-1}}$$

é convergente. Assim, $\{f_n\}$ converge para um valor finito. Desde que

$$f_{2n} < f < f_{2n-1},$$

temos, para $n = 2, 3, \dots$,

$$|f - f_n| < |f_n - f_{n-1}|.$$

■

Stern [18], em 1860, e Stolz [19], em 1886, dão a primeira condição necessária para a convergência das frações contínuas do tipo $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ (veja Jones e Thron [6, pp. 78] ou Lorentzen e Waadeland [11, pp. 94]).

Teorema 3.3.2 (Stern-Stolz) *Uma fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ diverge se $\sum |b_n| < \infty$.*

Demonstração: Usando (2.2.10), por indução, temos

$$|A_n| \leq (1 + |b_1|)(1 + |b_2|) \dots (1 + |b_n|)$$

e

$$|B_n| \leq (1 + |b_1|)(1 + |b_2|) \dots (1 + |b_n|).$$

Assim, para $n = 1, 2, \dots$,

$$|A_n| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |b_k|)$$

e, então,

$$\ln |A_n| \leq \sum_{k=1}^n \ln(1 + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^n |b_k|.$$

Equivalentemente,

$$|A_n| \leq e^{\sum_{k=1}^n |b_k|}.$$



Analogamente,

$$\ln |B_n| \leq e^{\sum_{k=1}^n |b_k|}.$$

Assim, se $\sum |b_k| < \infty$, as sequências $\{|A_n|\}$ e $\{|B_n|\}$ são limitadas, o que significa que as séries

$$\sum b_n A_{n-1} \text{ e } \sum b_n B_{n-1}$$

convergem absolutamente. De (2.2.10), temos que $A_n - A_{n-2} = b_n A_{n-1}$ e, assim,

$$A_{2n} = A_0 + \sum_{m=1}^n (A_{2m} - A_{2m-2}) = A_0 + \sum_{m=1}^n b_{2m} A_{2m-1}$$

e

$$A_{2n+1} = A_1 + \sum_{m=1}^n b_{2m+1} A_{2m}.$$

Analogamente, obtemos os mesmos resultados para B_n . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n+1} = A^{(1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n+1} = B^{(1)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n} = A^{(2)}, \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{2n} = B^{(2)}$$

existem. Aplicando o limite na equação (2.2.13) segue que

$$A^{(1)} B^{(2)} - A^{(2)} B^{(1)} = 1.$$

Isto significa que no máximo um dos valores $B^{(1)}$ ou $B^{(2)}$ pode ser zero. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = \frac{A^{(1)}}{B^{(1)}} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{A^{(2)}}{B^{(2)}}$$

são distintos (um pode ser até infinito) e, então, a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ diverge. ■

Os resultados dos teoremas 3.3.1 e 3.3.2 também implicam no seguinte teorema.

Teorema 3.3.3 *Sejam os elementos b_n de $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ positivos. Então, $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ converge se, e somente se, $\sum b_n = \infty$.*

Frações contínuas equivalentes têm as mesmas convergentes. Assim, pelo Corolário 2.2.5.1, segue que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, com $a_n > 0$ e $b_n > 0$, converge se a série de Stern-Stolz diverge.

Em 1865, J. Worpitzky estabeleceu o primeiro resultado sobre convergência de frações contínuas com elementos complexos. Este resultado foi publicado em um programa anual de "Friedrichs Gymnasium und Realschule" em Berlin. Dados históricos mais detalhadas sobre esse teorema podem ser encontrados em [4].

Teorema 3.3.4 (Worpitzky) *A fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$ converge se $|a_n| \leq \frac{1}{4}$, $n \geq 1$.*



Em [4, pp. 39-40], os autores citam que a demonstração dada por Worpitzky baseia-se na comparação da série de potências associada à fração contínua

$$\frac{1}{1 + \frac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \dots}}},$$

onde $a_n \in \mathcal{C}$ e z é uma variável complexa, com a série de potências associada à fração contínua periódica

$$\frac{1}{1 - \frac{az}{1 - \frac{az}{1 - \dots}}}.$$

Em 1888, Ślezyński mostra que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge se $|b_n| \geq |a_n| + 1$. O resultado de Ślezyński engloba o de Worpitzky. Em 1889 e 1895 outros resultados surgiram, mas todos já estavam embutidos no resultado de Ślezyński [4, pp. 26-27], como, por exemplo,

1. Pincherle, em 1889, mostra que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ converge se $|b_n| \geq 2 + \epsilon$.
2. Von Sweden, em 1895, mostra que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$ converge se $\sum a_v < \infty$.

Em 1898, Pringsheim também provou o resultado de Ślezyński, mas sem fazer nenhuma referência aos autores Worpitzky, Ślezyński, Pincherle ou Sweden. Só em 1905 é que Van Vleck tomou conhecimento dos trabalhos de Worpitzky (veja [4, pp. 25]). Uma observação interessante é que Pringsheim fez uso da relação (2.2.10) que continua sendo o artifício mais usado até hoje.

Teorema 3.3.5 (Ślezyński-Pringsheim) *Uma fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge se*

$$|b_n| \geq |a_n| + 1. \quad (3.3.7)$$

Logo,

$$|f_n| < 1 \quad (3.3.8)$$

e

$$|f| \leq 1. \quad (3.3.9)$$

Demonstração: Por indução, mostraremos que (3.3.7) implica em (3.3.8) pois, para todo $n \geq 1$

$$|a_n| + 1 \leq |b_n| \Rightarrow \frac{|a_n|}{|a_n| + 1} \geq \frac{|a_n|}{|b_n|} \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < 1.$$

Com isso, (3.3.8) vale para $n = 1$. Para $n \geq 2$, como $|b_{n-1}| \geq |a_{n-1}| + 1$ e $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < 1$, temos

$$\left| \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}} \right| < \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-1}| + 1 - 1} = 1.$$

Para $1 \leq k < n$, seja

$$f_n^{(k)} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + \dots + b_n}.$$

Temos, então,

$$|f_n^{(n-1)}| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \text{ e } |f_n^{(n-2)}| = \left| \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}} \right|.$$

Supondo que $|f_n^{(k)}| < 1$, obtemos

$$|f_n^{(k-1)}| = \left| \frac{a_k}{b_k + f_n^{(k)}} \right| \leq \frac{|a_k|}{|b_k| - |f_n^{(k)}|} \leq \frac{|a_k|}{|a_k| + 1 - |f_n^{(k)}|} < 1. \quad (3.3.13)$$

Repetindo este processo, obtemos o resultado

$$|f_n^{(0)}| = |f_n| < 1. \quad (3.3.14)$$

Para provar a convergência da fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ tomamos (2.2.13) e, com isso,

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k}{B_n B_{n-1}}.$$

Mostrando a convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k}{B_n B_{n-1}} \quad (3.3.10)$$

teremos a convergência de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}. \quad (3.3.11)$$

Mas, se (3.3.11) converge, por definição a sequência das somas parciais converge. Porém, a sequência das somas parciais é a sequência $\{f_n\}$ de onde concluímos que a fração contínua converge. Resta-nos então mostrar que (3.3.10) converge. Usando (3.3.7) em (2.2.10), obtemos

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq |a_n| (|B_{n-1}| - |B_{n-2}|).$$

Repetindo este processo sucessivamente chegamos que

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geq \prod_{k=1}^n |a_k| > 0. \quad (3.3.12)$$

Para todo $n \geq 1$, o termo geral de (3.3.10) satisfaz

$$0 < \left| \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k}{B_n B_{n-1}} \right| \leq \frac{|B_n| - |B_{n-1}|}{|B_n| |B_{n-1}|} = \frac{1}{|B_{n-1}|} - \frac{1}{|B_n|}.$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^m \frac{|\prod_{k=1}^n a_k|}{|B_n B_{n-1}|} \leq \frac{1}{|B_0|} - \frac{1}{|B_m|} = 1 - \frac{1}{|B_m|} < 1.$$



Como $\{|B_m|\}$ é monótona crescente por (3.3.12) e as somas parciais da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k}{B_n B_{n-1}} \right|$$

são limitadas, a série converge absolutamente. Assim, provamos que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge. ■

Mostraremos a seguir, como o teorema de Worpitzky pode ser facilmente demonstrado a partir do teorema de Ślezyński-Pringsheim, usando frações contínuas equivalentes.

Demonstração (Teorema de Worpitzky) Seja

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots + \frac{a_n}{1} + \dots, \quad (3.3.13)$$

tal que $|a_n| \leq 1/4, \forall n$. Podemos ver que a fração contínua (3.3.13) é equivalente a

$$\frac{2a_1}{2} + \frac{4a_2}{2} + \dots + \frac{4a_n}{2} + \dots. \quad (3.3.14)$$

Desde que $|a_n| \leq 1/4, \forall n$, temos

$$1 + |4a_n| \leq 2.$$

Daí, pelo Teorema de Ślezyński-Pringsheim 3.3.5, segue que a fração contínua (3.3.14) converge e, assim, (3.3.13) converge. Multiplicando (3.3.14) por 2, sua primeira fração parcial passa a ser $\frac{4a_1}{2}$. Do Teorema de Ślezyński-Pringsheim todas as convergentes têm valor absoluto menor que 1. Logo, as convergentes de (3.3.13) têm valor absoluto menor que 1/2. Da convergência, segue que o valor da fração contínua está no disco $|w| \leq \frac{1}{2}$. ■

Van Vleck, em 1901, mostrou o seguinte teorema

Teorema 3.3.6 (Van Vleck) *Suponhamos que os elementos da fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ satisfaçam*

$$\frac{-\pi}{2} + \epsilon < \arg(b_n) < \frac{\pi}{2} - \epsilon, \quad 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}, \quad (3.3.15)$$

para $n = 0, 1, \dots$. Então,

1. Todas as convergentes f_n são finitas e satisfazem

$$\frac{-\pi}{2} + \epsilon < \arg(f_n) < \frac{\pi}{2} - \epsilon; \quad (3.3.16)$$

2. As sequências $\{f_{2m}\}$ e $\{f_{2m+1}\}$ convergem para valores finitos;

3. A fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ converge se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty;$$



4. Quando converge, o limite f da fração contínua é finito e satisfaz

$$|\arg f| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Após a prova original deste teorema feita por Van Vleck, surgiram outras versões. Uma das mais conhecidas é a que usa o Teorema de Stieltjes-Vitali, cuja demonstração pode ser encontrada em [26, pp. 104-109].

Teorema 3.3.7 (Stieltjes-Vitali) *Seja D um domínio em $\mathcal{C}$. Seja $\{F_n(z)\}$ uma sequência de funções tais que, para $n = 1, 2, \dots$,*

1. $F_n(z)$ é analítica para $z \in D$,
2. $F_n(z) \neq a$ e $F_n(z) \neq b$ para todo $z \in D$, onde a e b são números complexos distintos.

Seja Δ um conjunto infinito com pelo menos um ponto de acumulação em D . Se $\{F_n(z)\}$ converge para um valor finito para todo $z \in \Delta$, então, $\{F_n(z)\}$ converge uniformemente, em cada subconjunto compacto de D , para uma função analítica em D .

Demonstração (Teorema de Van Vleck):

Para mostrar 1. observe que, para o domínio angular V_ϵ descrito em (3.3.15) e (3.3.16),

$$w \in V_\epsilon \implies \frac{1}{b_k + w} \in V_\epsilon,$$

pois a soma de dois elementos de V_ϵ também está em V_ϵ e se $w \in V_\epsilon$, então $1/w \in V_\epsilon$. A partir disso, a demonstração de 1. segue facilmente por indução.

Agora, consideremos a demonstração de 2. e 3.. Queremos mostrar que

$$G_\epsilon = \left\{ b_n \in \mathcal{C} : |\arg b_n| < \frac{\pi}{2} - \epsilon \right\}$$

é um conjunto de convergência condicional para a fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{1}{b_n})$.

Seja $K_{n=1}^\infty(\frac{1}{b_n})$ uma fração contínua escolhida arbitrariamente em G_ϵ . Já sabemos que se $\sum |b_n| < \infty$ a fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{1}{b_n})$ diverge.

Então, suponha que $\sum |b_n| = \infty$. Para $n = 0, 1, \dots$, seja

$$\beta_n = \arg b_n \quad \text{e} \quad d_n(z) = |b_n| e^{i\beta_n z}.$$

Logo $d_n(z) \in G_{\epsilon/2}$ se

$$|\arg \{ |b_n| e^{i\beta_n z} \}| < \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2},$$



isto é, se

$$|\beta_n \operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \text{ onde } |\beta_n| < \frac{\pi}{2} - \epsilon.$$

Logo,

$$d_n(z) \in G_{\epsilon/2}, \text{ se } z \in D = \left\{ z \in \mathcal{C} : |\operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi - \epsilon}{\pi - 2\epsilon} \right\}.$$

Além disso,

$$d_n(z) > 0, \text{ se } z \in \Delta = \{z \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}.$$

Pelo Teorema 3.3.1, vemos que as partes par e ímpar de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_n(z)})$ convergem para valores finitos, $\forall z \in \Delta$. Pelo Teorema de Stieltjes-Vitali, as partes par e ímpar da fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_n(z)})$ convergem para valores finitos para qualquer $z \in D$. Como $1 \in D$, temos, em particular, que as partes par e ímpar da fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ convergem para valores finitos. Isso mostra o resultado 2..

Agora para mostrar 3., temos

$$\sum d_n(z) = \sum |b_n| e^{-\beta_n \operatorname{Im}(z)} > \sum |b_n| e^{(\epsilon - \pi/2) \operatorname{Im}(z)} > e^{-\pi/2 |\operatorname{Im}(z)|} \sum |b_n|.$$

Então, se $\sum |b_n| = \infty$, temos $\sum d_n(z) = \infty$. Aplicando a segunda parte do Teorema 3.3.1, obtemos que a fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_n(z)})$ converge para um valor finito para todo $z \in \Delta$. Novamente, o Teorema de Stieltjes-Vitali implica na convergência de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{d_n(z)})$, para todo $z \in D$. Escolhendo $z = 1$, obtemos o resultado desejado. ■

Em 1936, Leighton e Wall obtiveram uma condição suficiente para a convergência de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$ para um valor finito, dada por

$$|a_{2n-1}| \leq \frac{1}{4} \text{ e } |a_{2n}| \geq \frac{25}{4},$$

que é um par de regiões de convergência. Neste trabalho, eles obtiveram uma extensão do Teorema de Ślezyński-Pringsheim usando um tipo especial de transformações equivalentes (veja, Leighton e Wall [8]). Em 1938, seguindo essas mesmas idéias, Jordan e Leighton mostraram critérios de região de convergência tripla e quádrupla (veja [6, pp. 125]). Em 1940, Scott e Wall deram o resultado mais importante sobre critérios de convergência quando fizeram a primeira demonstração do Teorema da Parábola, que passou a ser o assunto mais estudado em se tratando de convergência de frações contínuas. Este teorema e sua história serão tratados com detalhes no Capítulo 4.

3.4 Um outro conceito de convergência

Quando a série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n$$

converge, temos que a n -ésima cauda, definida por $\sum_{k=n+1}^{\infty} t_k$, $n \geq 1$, tende para zero. A n -ésima aproximação $T_n = \sum_{k=1}^n t_k$ da série é obtida removendo-se a n -ésima cauda, isto é, substituindo-a pelo seu limite (que é zero).



Quando o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

converge, temos que a n -ésima cauda, definida por $\prod_{k=n+1}^{\infty} p_k$, converge para 1. A n -ésima aproximação $P_n = \prod_{k=1}^n p_k$ de um produto é obtida removendo-se a n -ésima cauda, ou seja, substituindo-a pelo seu limite (que é 1).

A n -ésima convergente (aproximante), f_n , de uma fração contínua é também obtida removendo a cauda, isto é,

$$f_n = K \left(\frac{a_k}{b_k} \right).$$

Mas, para a fração contínua isso não significa substituir a cauda pelo seu limite. Na verdade, nem sempre este limite existe e, se existe, é zero somente em casos especiais. Surgem, então, as seguintes questões:

1. Para calcularmos o valor de uma fração contínua, outras sequências como $\{S_n(w)\}$ ou $\{S_n(w_n)\}$ podem ser melhores que $\{f_n = S_n(0)\}$?
2. Talvez o conceito de convergência de fração contínua não deva estar ligado à sequência $\{S_n(0)\}$, mas a $\{S_n(w_n)\}$.

Como exemplo, consideremos a seguinte fração contínua

$$\frac{2}{1+1} + \frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \frac{2}{1+1} + \frac{1}{1} + \frac{-1}{1} + \dots$$

Podemos demonstrar por indução, usando (2.2.10), que

$$A_{3n-2} = 2^n, \quad A_{3n-1} = 2^n, \quad A_{3n} = 0, \quad (3.4.17)$$

$$B_{3n-2} = 2^{n+1} - 3, \quad B_{3n-1} = 2^{n+1} - 2 \text{ e } B_{3n} = 1. \quad (3.4.18)$$

Assim,

$$f_{3n-2} = \frac{2^n}{2^{n+1} - 3}, \quad f_{3n-1} = \frac{2^n}{2^{n+1} - 2}, \quad f_{3n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{3n-1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{3n} = 0,$$

o que mostra que a fração contínua não converge no sentido clássico.

Para a convergente $S_n(w_n)$, temos

$$S_{3n-2}(w_{3n-2}) = \frac{A_{3n-2} + A_{3n-3}w_{3n-2}}{B_{3n-2} + B_{3n-3}w_{3n-2}} = \frac{1}{2 + \frac{w_{3n-2} - 3}{2^n}} \rightarrow \frac{1}{2},$$

se $\{w_{3n-2}\}$ é limitada,

$$S_{3n-1}(w_{3n-1}) = \frac{2^n + w_{3n-1}2^n}{(2^{n+1} - 2) + w_{3n-1}(2^{n+1} - 3)} \rightarrow \frac{1}{2},$$



se $\{w_{3n-1}\}$ é limitada e diferente de -1 e

$$S_{3n}(w_{3n}) = \frac{w_{3n}}{2w_{3n} + (1 - 2w_{3n})2^{-n}} \longrightarrow \frac{1}{2},$$

se $\{w_{3n}\}$ é limitada e diferente de 0. Temos, então, um exemplo em que o limite de $S_n(0)$ não existe e, no entanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(w_n) = \frac{1}{2}$$

para toda sequência $\{w_n\}$ limitada e diferente de 0 e de -1. Este exemplo sugere fortemente que o conceito de convergência clássica tem falhas.

Em Jacobsen [3] foi introduzida uma nova definição de convergência de fração contínua, que chamaremos de convergência generalizada. A idéia é substituir as caudas da fração contínua pelas suas aproximações. Isto significa que, ao invés de usarmos $S_n(0)$ como aproximação para a fração contínua, usaremos $S_n(w_n)$, onde w_n são os valores aproximados das caudas da fração contínua, o que acelera a convergência da fração contínua.

Definição 3.4.1 A fração contínua $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge de forma generalizada para um $f \in \tilde{\mathcal{C}}$ se existem duas sequências $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ em $\tilde{\mathcal{C}}$ tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w_n) > 0 \quad (3.4.19)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(w_n) = f, \quad (3.4.20)$$

onde $d(v, w)$ é a métrica cordal já definida anteriormente.

Se uma fração contínua converge de maneira clássica então converge também de maneira generalizada. Isto é óbvio, já que $S_n(\infty) = S_{n-1}(0)$ e $\{0\}$ e $\{\infty\}$ são duas sequências que satisfazem (3.4.19).

3.5 Convergência das caudas das frações contínuas

Teorema 3.5.1 As seguintes alternativas são equivalentes:

1. $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ tem convergência clássica.
2. A cauda (2.2.17) tem convergência clássica para algum $N \in \mathbb{N}_0$.
3. A cauda (2.2.17) tem convergência clássica para todo $N \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração: A afirmação 3. $\Rightarrow$ 1. é trivial.



Para mostrarmos que a alternativa 1. $\Rightarrow$ 2. suponhamos que $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge para f . Então, $f_n = S_n(0)$ converge para f . Seja $N \in \mathbb{N}_0$ escolhido arbitrariamente e denotemos por

$$f_n^{(N)} = S_n^{(N)}(0) = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1} + \dots + b_{N+n}}$$

as convergentes da cauda (2.2.17). Logo,

$$f_{N+n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_N}{b_N} + \frac{a_{N+1}}{b_{N+1} + \dots + b_{N+n}} = S_N(f_n^{(N)}). \quad (3.5.21)$$

Assim, $f_n^{(N)} = S_N^{-1}(f_{N+n})$. Como S_N^{-1} é uma t.l.f. e, portanto, é uma bijeção de $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$, segue a convergência de $f_n^{(N)}$ para $f^{(N)}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Resta mostrarmos que 2. $\Rightarrow$ 3..

Suponhamos que (2.2.17) converge para algum $N \in \mathbb{N}_0$.

Tomando $m > N$, obtemos

$$f^{(N)} = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} + \frac{a_{N+2}}{b_{N+2}} + \dots + \frac{a_m}{b_m} + f^{(m)}.$$

Logo,

$$f^{(m)} = S_{m-N}^{(N)-1}(f^{(N)}).$$

Agora, se $N > m$, temos

$$f^{(m)} = \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}} + \dots + \frac{a_N}{b_N} + \frac{a_N}{b_N + f^{(N)}} = S_{N-m}^m(f^{(N)}).$$

Então, se $f^{(N)}$ existe, $f^{(m)}$ também existe e, portanto, a cauda converge. Assim, pelo item anterior, temos que $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge para qualquer $N \in \mathbb{N}_0$ como queríamos. ■

Podemos provar, usando essas mesmas idéias, que este resultado também é válido para a convergência generalizada. Usando que

$$S_{N+n}(w) = S_N(S_n^{(N)}(w)) = S_N \circ S_n^{(N)}(w),$$

temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5.2 *As seguintes alternativas são equivalentes:*

1. $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge de maneira generalizada.
2. A cauda (2.2.17) converge de maneira generalizada para um $N \in \mathbb{N}_0$.
3. A cauda (2.2.17) converge de maneira generalizada para todo $N \in \mathbb{N}_0$.



Cabe fazermos aqui uma observação sobre seqüências de caudas.

Sejam $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ convergente e $f^{(N)} \in \tilde{\mathcal{C}}$, o valor da N -ésima cauda (2.2.17) para $N = 0, 1, 2, \dots$. Então, de (2.2.17), temos que $f = b_0 + f^{(0)}$ é o valor de $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ e

$$f^{(N)} = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1} + f^{(N+1)}}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5.22)$$

A seqüência $\{f^{(N)}\}_{N=0}^{\infty}$ é chamada *seqüência de caudas corretas* para a fração contínua convergente $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$. Chamaremos de seqüência de caudas não corretas toda seqüência de caudas $\{t_n\}$ definida em (2.2.25) que é diferente de $\{f^{(N)}\}_{N=0}^{\infty}$.

3.6 Aceleração de convergência

Propriedades de convergência são importantes nas aplicações de frações contínuas. Não somente a existência de um limite para a fração contínua, mas também a velocidade com que acontece a convergência de f_n ou $S_n(w_n)$ é importante. Assim, é importante obtermos uma estimativa para a aceleração da convergência o que pode ser feito através do erro de truncamento a priori

$$|f - S_n(w_n)| \leq \lambda_n$$

onde $\lambda_n > 0$ é um limitante que pode ser encontrado antes de se iniciar os cálculos das convergentes, e de um limite de erro de truncamento a posteriori

$$|f - f_n| \leq M_n |f_n - f_{n-1}|,$$

onde o limitante $M_n |f_n - f_{n-1}|$ pode ser determinado somente depois de termos calculado pelo menos as convergentes f_n e f_{n-1} . No Capítulo 4, calcularemos um limitante para o erro de truncamento a priori para a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$, com $a_n \in P_{\alpha}$, onde P_{α} é a região parabólica

$$\left\{ a \in \mathcal{C} : |a| - \operatorname{Re}(ae^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right\}.$$

Este limite pode ser usado para determinarmos o índice n necessário para obtermos a exatidão desejada. Isto economiza trabalho, pois precisamos somente calcular f_n ou $S_n(w_n)$ para este índice particular.

Para calcularmos a aceleração da convergência de $S_n(w_n)$ para diferentes seqüências $\{w_n\}$, usaremos a propriedade 5 das t.l.f., seção 2.1 com $t = S_n$. Esta idéia foi dada por Thron em [23]. Se escolhermos as seqüências $w_1 = f_k^{(n)}$, $w_2 = w_n$, $w_3 = 0$ e $w_4 = -h_n$, então, se esses pontos são distintos, isto é, se f_{n+k} , $S_n(w_n)$ e f_n são distintos e finitos (pois $S_n(-h_n) = \infty$), temos

$$\frac{(f_k^{(n)} - w_n) h_n}{f_k^{(n)} (w_n + h_n)} = \frac{(S_n(f_k^{(n)}) - S_n(w_n)) (S_n(0) - S_n(-h_n))}{(S_n(f_k^{(n)}) - S_n(0)) (S_n(w_n) - S_n(-h_n))}.$$



Assim,

$$\frac{(f_k^{(n)} - w_n) h_n}{f_k^{(n)} (w_n + h_n)} = \frac{f_{n+k} - S_n(w_n)}{f_{n+k} - f_n}.$$

Esta fórmula é usada para comparar as convergentes modificadas $S_n(w_n)$ com as convergentes $f_n = S_n(0)$. Se $f_{n+k} \rightarrow f \neq \infty$, quando $k \neq \infty$, e

$$\left| \frac{h_n}{f_k^{(n)} (w_n + h_n)} \right| < M,$$

então

$$\left| \frac{f_{n+k} - S_n(w_n)}{f_{n+k} - f_n} \right| = |f_k^{(n)} - w_n| \left| \frac{h_n}{f_k^{(n)} (w_n + h_n)} \right|$$

implica em

$$\left| \frac{f - S_n(w_n)}{f - f_n} \right| \leq M |f^{(n)} - w_n| \rightarrow 0$$

se $f^{(n)} - w_n \rightarrow 0$. Isto significa que $S_n(w_n)$ converge mais rápido para f do que f_n .

3.7 Conjuntos de valores

Definição 3.7.1 Dizemos que $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de conjuntos de valores para a fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ se

$$V_n \subseteq \tilde{\mathcal{C}}, \quad V_n \neq \emptyset, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$s_n(V_n) = \frac{a_n}{b_n + V_n} \subseteq V_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7.23)$$

A importância dos conjuntos de valores é que eles contêm os valores das convergentes de $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.7.1 Seja $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de conjuntos de valores para $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Então, para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 1, 2, \dots$,

$$S_k^{(n)}(w_{n+k}) = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \dots + \frac{a_{n+k}}{b_{n+k} + w_{n+k}}}} \in V_n, \quad (3.7.24)$$

para todo $w_{n+k} \in V_{n+k}$.

Demonstração: De (2.2.18), temos

$$S_k^{(n)}(w_{n+k}) = s_{n+1} \circ s_{n+2} \circ \dots \circ s_{n+k}(w_{n+k}).$$

Se $w_{n+k} \in V_{n+k}$, então pela definição $s_{n+k}(w_{n+k}) \in V_{n+k-1}$, $s_{n+k-1}(s_{n+k}(w_{n+k})) \in V_{n+k-1}$ e $s_{n+k-1}(w_{n+k-1}) \in V_{n+k-2}, \dots$. Assim, obtemos (3.7.24). ■

Em particular, do Teorema 3.7.1, temos

$$S_k(w_k) = S_k \in V_0, \quad \text{se } w_k \in V_k. \quad (3.7.25)$$

Logo, se $0 \in V_n$ para todo $n \geq 0$, então $S_k^{(n)}(0) \in V_n$ para todo $k \geq 1$, ou seja, V_n contém todas as convergentes $f_k^{(n)}$ de $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Neste caso, dizemos que $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de conjuntos de valores para $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Seguindo esta mesma idéia, dizemos que V é um conjunto de valores para $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ se $\{V_n\}_{n=0}^\infty$, onde $V_n = V$ para todo n , é uma sequência de conjuntos de valores para $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Se $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ é de período 2, ou seja, $V_{2n} = V_0$ e $V_{2n+1} = V_1$ para todo n , dizemos que V_0 e V_1 são conjuntos de valores duplos para k .

Para o estudo de convergência generalizada de frações contínuas, os seguintes teoremas serão úteis.

Teorema 3.7.2 *A fração contínua $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ converge de maneira generalizada para $f \in \tilde{\mathcal{C}}$ se, e somente se, $\lim S_n(u_n) = f$ para toda sequência $\{u_n\}$ em $\tilde{\mathcal{C}}$ tal que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d\left(u_n, -\frac{B_n}{B_{n-1}}\right) > 0, \quad \text{se } f \neq \infty$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d\left(u_n, -\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) > 0, \quad \text{se } f = \infty.$$

Teorema 3.7.3 *Seja $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ que converge de maneira generalizada para f e g . Então $f = g$.*

Teorema 3.7.4 *Seja $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ que converge de maneira generalizada para f e sejam $\{t_n\}$ e $\{\tilde{t}_n\}$ sequências de caudas para a fração contínua $b_0 + K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ com $t_0 \neq f - b_0$ e $\tilde{t}_0 \neq f - b_0$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(t_n, \tilde{t}_n) = 0$.*

Com isso, podemos observar que se $\{u_n\}$ está suficientemente longe de qualquer sequência de caudas que não seja a correta, então $\{u_n\}$ converge para f . As demonstrações desses teoremas podem ser encontradas em [11, pp. 67-69].

Teorema 3.7.5 *Seja $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de conjuntos de valores para uma fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ que converge de maneira generalizada, tal que $\tilde{V}_0 \neq \tilde{\mathcal{C}}$ e*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(V_n) > 0, \quad (3.7.26)$$

onde $\text{diam}(V_n) = \sup \{d(u, v); u, v \in V_n\}$. Então,



1. f está contido em $\bar{V}_0$.

2. O valor $f^{(n)}$ da n -ésima cauda de $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ está contido em $\bar{V}_n$.

3. $\lim S_n(w_n) = f$, para toda sequência $\{w_n\}$ tal que $w_n \in V_n$ e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(w_n, \partial V_n) > 0, \quad (3.7.27)$$

onde $\text{dist}(w_n, \partial V_n) = \inf \{d(w_n, v); v \in \partial V_n\}$, ∂V_n denota a fronteira do conjunto V_n e $\bar{V}_n$ é o fecho de V_n em $\tilde{\mathcal{U}}$.

Demonstração: 1. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $\{V_n\}$. Então, $S_n(u_n) \in V_0$, por (3.7.25). Como $S_n(u_n) \rightarrow f$ temos que $f \in \bar{V}_0$.

2. Temos que

$$S_{N+n}(V_{N+n}) = S_N(S_n^{(N)}(V_{N+n})).$$

Mas,

$$S_n^{(N)}(V_{N+n}) = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} + \frac{a_{N+2}}{b_{N+2}} + \dots + \frac{a_{N+n-1}}{b_{N+n-1}} + \frac{a_{N+n}}{b_{N+n} + V_{N+n}}.$$

Do Teorema 3.7.5,

$$S_n^{(N)}(V_{N+n}) \subseteq \frac{a_{N+1}}{b_{N+1} + V_{N+1}} \subseteq V_N$$

Assim, como $f_n^{(N)} \in S_n^{(N)}(V_{N+n}) \subseteq V_N$, pelo Teorema 3.5.2, temos que $f_n^{(N)} \rightarrow f^{(N)} \subseteq \bar{V}_N$.

3. Seja $t_0 \in \tilde{\mathcal{U}} \setminus \bar{V}_0$. Então, $t_0 \neq f$ e a sequência de caudas $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, $t_n = S_n^{-1}(t_0)$, não é a sequência de caudas correta. Desde que

$$S_n(V_n) \subset V_0 \Rightarrow V_n \subseteq S_n^{-1}(V_0) \Rightarrow S_n^{-1}(\tilde{\mathcal{U}} \setminus V_0) \subseteq \tilde{\mathcal{U}} \setminus \bar{V}_n.$$

Logo, $t_n \in \tilde{\mathcal{U}} \setminus \bar{V}_n$, para todo n . Pelo Teorema 3.7.4, todas as sequências de caudas $\{\tilde{t}_n\}$ que não são as sequências de caudas corretas de $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ têm o mesmo comportamento assintótico. Assim, se $\{w_n\}$ está longe o suficiente de toda sequência de caudas, pelo Teorema 3.7.2 temos que $S_n(w_n) \rightarrow f$. ■

Tomemos $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de conjuntos de valores para $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$. Então, da definição de conjuntos de valores, se $w_n \in \bar{V}_n$,

$$S_n(w_n) \in S_n(\bar{V}_n) = S_{n-1}(s_n(\bar{V}_n)) \subseteq S_{n-1}(\bar{V}_{n-1}) \quad (3.7.28)$$

e, assim, $K_n = S_n(\bar{V}_n)$ forma uma sequência de conjuntos fechados aninhados, $\bar{V}_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$. Esta sequência converge para um conjunto não vazio K .

O conjunto K pode ter somente um ponto ou infinitos pontos. No caso onde K tem somente um ponto dizemos que acontece o caso *limite pontual*. Neste caso, $S_n(w_n) \rightarrow f$. Em geral, os conjuntos K_n estudados são regiões circulares. Assim, quando K não é apenas um ponto dizemos que acontece o caso *limite circular*. Quando não acontece o caso limite pontual, a questão da convergência de $S_n(w_n)$ não faz sentido, mas ainda podemos considerar a possibilidade da convergência de, por exemplo, $S_n(0)$.

Teorema 3.7.6 *Seja $\{V_n\}$ uma sequência de conjuntos de valores clássicos para $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ tal que $\infty \notin V_n, \forall n$. Então, todas as convergente f_n de $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{b_n})$ são distintas e finitas.*

Demonstração: Desde que $f_n \in V_0$ e $\infty \notin V_0$ então $f_n \neq \infty, \forall n$. suponha que $f_n = f_{n+k}$ para algum $k \geq 1$, ou seja, $S_n(0) = S_n(f_k^{(n)}) \Rightarrow 0 = f_k^{(n)}$. Assim,

$$f_{k-1}^{(n+1)} = s_{n+1}^{-1}(f_k^{(n)}) = -b_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{f_k^{(n)}} = \infty,$$

o que é impossível pois $f_{k-1}^{(n+1)} \in V_{n+1}$ e $\infty \notin V_{n+1}$. ■

Lema 3.7.7 *Seja D um disco circular com centro em c e raio r e seja $-b \notin \bar{D}$. Então,*

$$s(D) = \frac{a}{b+D}, \quad a \neq 0,$$

é um disco circular com centro c_a e raio r_a , dados por

$$c_a = \frac{(\bar{b} + \bar{c})a}{|b+c|^2 - r^2} \quad e \quad r_a = \frac{r|a|}{|b+c|^2 - r^2}.$$

Demonstração: A equação do círculo $|z - c|^2 = r^2$ pode também ser escrita como

$$z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + |c|^2 - r^2 = 0. \quad (3.7.29)$$

Seja $w = s(z) = \frac{a}{b+z}$. Então $z = -b + \frac{a}{w}$. Substituindo o valor de z na equação do círculo $|z - c|^2 = r^2$ e escrevendo-a esta na forma (3.7.29), obtemos os valores para c_a e r_a . ■

Lema 3.7.8 *Seja $U = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 1\}$ o disco unitário e seja k tal que $0 \leq k < 1$. Tomemos $\{t_n\}$ uma sequência de t.l.f. tal que*

$$t_n(U) \subseteq U, |t_n(\infty)| \leq k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.7.30)$$

e $T_1 = t_1, T_n = T_{n-1} \circ t_n = t_1 \circ \dots \circ t_n, n = 2, 3, \dots$. Então, $\{T_n(w)\}$ converge uniformemente em U para uma função constante $T(w) \equiv c \in \bar{U}$.

Demonstração: Temos que

$$K_n = T_n(\bar{U}) \subseteq T_{n-1}(\bar{U}) = K_{n-1} \subseteq \dots \subseteq \bar{U}, \quad (3.7.31)$$

onde K_n são discos circulares, já que a imagem de um círculo por uma t.l.f. é um círculo (veja propriedade 4 do Capítulo 2, seção 2.1).



Sejam C_n e R_n , respectivamente, o centro e raio de K_n para cada n . Se $R_n \rightarrow 0$, então o lema é trivial. Mas, suponha que $R_n \rightarrow R > 0$, ou seja, o caso limite circular, de (3.7.31) temos que $C_n \rightarrow C$, o centro de K . As t.l.f. de U em U podem ser dadas por

$$S(w) = e^{iw} \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha}w}, \quad w \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in U,$$

e $\bar{\alpha}$ denota o conjugado de α . Assim, podemos escrever

$$T_n(w) = C_n + R_n e^{iw_n} \frac{w - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n w}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.7.32)$$

onde $w_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_n \in U$ (veja [22]), para todo n .

Necessitaremos de duas inequações para demonstrar o lema. A primeira é consequência da condição $t_n(\infty) \in \bar{U}$, que é, $T_n(\infty) = T_{n-1}(t_n(\infty)) \in T_{n-1}(\bar{U}) = K_{n-1}$, ou seja, $T_n(\infty) = C_{n-1} + R_{n-1}z_n$ para algum $z_n \in \bar{U}$. Além disso,

$$T_n(\infty) - C_n = -\frac{R_n e^{iw_n}}{\bar{\alpha}_n} = C_{n-1} + R_{n-1}z_n - C_n.$$

Portanto,

$$\frac{R_n}{|\alpha_n|} = |(C_{n-1} - C_n) + R_{n-1}z_n| \leq (R_{n-1} - R_n) + R_{n-1} \quad (3.7.33)$$

e, assim,

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \leq \frac{2|\alpha_n|}{1 + |\alpha_n|} = 1 - \frac{1 - |\alpha_n|}{1 + |\alpha_n|},$$

que resulta na desigualdade

$$R_n \leq R_1 \prod_{j=2}^n (1 - \delta_j), \quad \text{onde} \quad \delta_j = \frac{1 - |\alpha_j|}{1 + |\alpha_j|} < 1. \quad (3.7.34)$$

A segunda desigualdade depende da seguinte condição: se $k_n = t_n(\infty)$, então $|k_n| \leq k$ para todo n . Como

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty) &= T_n(t_{n+1}(\infty)) - T_n(\infty) = T_n(k_{n+1}) - T_n(\infty) \\ &= R_n e^{iw_n} \left(\frac{k_{n+1} - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n k_{n+1}} + \frac{1}{\bar{\alpha}_n} \right) \\ &= R_n e^{iw_n} \frac{1 - |\alpha_n|^2}{\bar{\alpha}_n (1 - \bar{\alpha}_n k_{n+1})}, \end{aligned} \quad (3.7.35)$$

temos

$$|T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)| \leq \frac{R_n}{|\alpha_n|} \frac{1 - |\alpha_n|^2}{1 - k} \leq \frac{2R_1}{1 - k} (1 - |\alpha_n|^2). \quad (3.7.36)$$

Usando (3.7.34) e (3.7.36), obtemos

$$|T_{n+m}(\infty) - T_n(\infty)| \leq \frac{2R_1}{1 - k} \sum_{j=0}^{m-1} (1 - |\alpha_{n+j}|^2) \leq \frac{8R_1}{1 - k} \sum_{j=0}^{m-1} \delta_{n+j}. \quad (3.7.37)$$



Como $R_n \rightarrow R > 0$, de (3.7.34) segue que $\sum \delta_j < \infty$. Logo, por (3.7.37), $\{T_n(\infty)\}$ é uma sequência de Cauchy e converge para um valor $c \in K$. De (3.7.37),

$$|T_n(w) - T_n(\infty)| = R_n \left| \frac{w - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n w} + \frac{1}{\bar{\alpha}_n} \right| = \frac{R_n}{|\alpha_n|} \cdot \frac{1 - |\alpha_n|^2}{|1 - \bar{\alpha}_n w|}, \quad (3.7.38)$$

onde $|\alpha_n| \rightarrow 1$ (desde que $\delta_n \rightarrow 0$). Isto prova que $T_n(w) \rightarrow c$ uniformemente para todo w em $\mathcal{C} \setminus \partial U$, pois $T_n(w)$ converge uniformemente para $T_n(\infty)$. ∂U denota a fronteira de U , isto é, é o círculo unitário. ■

Teorema 3.7.9 (Hillam-Thron) *Seja $V \subseteq \mathcal{C}$ um disco circular aberto com $0 \in V$. Se V é um conjunto de valores para a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$, então $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge.*

Demonstração: Sejam γ e ρ o centro e o raio de ∂V respectivamente, e seja $t(w) = \rho w + \gamma$ tal que $t(U) = V$. Então, $t_n = t^{-1} \circ s_n \circ t$ é uma aplicação de U em U e

$$t_n(\infty) = t^{-1} \circ s_n(\infty) = t^{-1}(0) = -\frac{\gamma}{\rho}$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $|\gamma/\rho| < 1$, pois $0 \in V$. Assim, pelo Lema 3.7.8, $T_n(w)$ converge uniformemente (localmente) em U para uma função constante $T(w) \equiv c \in \bar{U}$. Agora,

$$\begin{aligned} T_n &= t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n \\ &= t^{-1} \circ s_1 \circ t \circ t^{-1} \circ s_2 \circ t \circ \dots \circ t^{-1} \circ s_n \circ t \\ &= t^{-1} \circ s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_n \circ t \\ &= t^{-1} \circ S_n \circ t. \end{aligned} \quad (3.7.39)$$

Logo, para todo $w \in t(U) = V$, $S_n(w)$ converge para uma função constante $S(w) = f$, onde $t^{-1}(f) = c$, isto é, $f = t(c) \in \bar{V}$. ■

Teorema 3.7.10 *Seja $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos de valores para $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ consistindo de discos circulares abertos com centros em γ_n e raios ρ_n tais que $|\gamma_n/\rho_n| \leq k$, para todo n e para algum $k < 1$. Então, $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge para um valor $f \in \bar{V}_0$.*

Demonstração: Observemos que como $0 \in V_n$ para todo n , então V_n , para $n \geq 0$, são conjuntos de valores clássicos para $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$.

Seja $\tau_n(w) = \gamma_n + \rho_n w$ tal que $\tau_n(U) = V_n$, para todo n . Então, $t_n = \tau_{n-1}^{-1} \circ s_n \circ \tau_n$ é uma aplicação de U em U e

$$t_n(\infty) = \tau_{n-1}^{-1}(0) = -\frac{\gamma_{n-1}}{\rho_{n-1}}.$$

O resultado segue a mesma linha do teorema anterior usando

$$\begin{aligned} T_n &= t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n \\ &= \tau_0^{-1} \circ s_1 \circ \tau_1 \circ \tau_1^{-1} \circ s_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1}^{-1} \circ s_n \circ \tau_n \\ &= \tau_0^{-1} \circ S_n \circ \tau_n. \end{aligned} \quad (3.7.40)$$

■

3.8 Outros resultados sobre convergência

Se os conjuntos de valores não contêm as convergentes clássicas para algum n , então é difícil ou quase impossível provar a convergência clássica. Isto não ocorre se $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ tem a forma $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$ ou $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$ e $\{V_n\}$ são limitados e de periodicidade 1 ou 2.

Teorema 3.8.1 *Sejam (V_0, V_1) um par de conjuntos de valores limitados para a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ que tem convergência generalizada e V_0 (ou V_1) contendo pelo menos dois pontos. Então, $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge de maneira clássica se $a_n = 1$ ou $b_n = 1, \forall n$.*

Demonstração: Seja f o valor de $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ e observemos que V_0 e V_1 devem ambos conter ao menos dois elementos pois $s_1(V_1) \subseteq V_0$ e $s_2(V_0) \subseteq V_1$. Pelo Teorema 3.7.5, temos que $f \in \bar{V}_0$ e assim $f \neq \infty$ (já que V_0 é limitado). Para um dado $t_0 \in \bar{\mathcal{U}}$, pelo Teorema 2.2.4, a sequência de cauda $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ para $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ é dada por

$$t_n = S_n^{-1}(t_0) = - \left\{ b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + \frac{a_2}{b_1 + (-t_0)}} \right\}. \quad (3.8.41)$$

Primeiramente, supomos que $b_n = 1$ para todo n e escolhemos $t_0 \in -1 - V_1, t_0 \neq f$. Então, de (3.8.41), $t_n \in -1 - V_{(n+1) \bmod 2}$ para todo n . Logo, a sequência $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ é limitada. Das propriedades de sequências de caudas já vistas anteriormente (Teorema 3.7.4), segue que $\limsup |h_n| < \infty$, o que significa que $\liminf d(\infty, -h_n) > 0$. Daí, pelo Teorema 3.7.2, $\lim S_n(\infty) = f$. Como $S_n(\infty) = S_{n-1}(0)$, a fração contínua tem convergência clássica.

Agora, consideremos que todo $a_n = 1, \forall n$, e escolhemos $t_0 \in -1/V_1, t_0 \neq f$. Então, $t_n \in -b_n - V_{(n) \bmod 2} \subseteq -1/V_{(n+1) \bmod 2}$ por (3.8.41). Assim, $\liminf |t_n| > 0$. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, temos que $\liminf |h_n| > 0$ e $\liminf d(0, -h_n) > 0$, o que implica que $\lim S_n(0) = f$. ■

Teorema 3.8.2 *Suponhamos que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ tem convergentes finitas $f_n = S_n(0)$ satisfazendo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{2n+2} - f_{2n}| < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_{2n+1} - f_{2n-1}| < \infty. \quad (3.8.42)$$

Então, $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ converge se, e somente se, a série de Stern-Stolz (3.2.2) diverge para infinito.

Demonstração: Como as n -ésimas convergentes f_n e a série de Stern-Stolz são invariantes sob transformações equivalentes, podemos supor que $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{b_n})$ tem a forma $K_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n})$. Lembremos a notação $f_n = \frac{A_n}{B_n}$ e $h_n = -S_n^{-1}(\infty) = \frac{B_n}{B_{n-1}}$. Como, por hipótese, as f_n são finitas, temos $B_n \neq 0$. Assim, $h_n \neq \infty, 0$. Os numeradores A_n podem ser escritos da seguinte forma (veja [11, pp. 128]).

$$A_n = \sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=2}^k (b_j - h_j) \prod_{j=k+1}^n h_j \right), \quad (3.8.43)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Como $B_1 = b_1$, escrevendo

$$B_n = B_1 \prod_{j=2}^n \left(\frac{B_j}{B_{j-1}} \right) = b_1 \prod_{j=2}^n h_j, \quad h_j = \frac{B_j}{B_{j-1}},$$

temos

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{b_1} \sum_{k=1}^n P_k, \quad \text{onde} \quad P_k = \prod_{j=2}^k \frac{b_j - h_j}{h_j} \quad (3.8.44)$$

e

$$\frac{b_j - h_j}{h_j} = \frac{-1/h_{j-1}}{b_j + 1/h_{j-1}} = \frac{-1}{\delta_j + 1}, \quad \text{para} \quad \delta_j = b_j h_{j-1}. \quad (3.8.45)$$

Pelo Teorema 3.3.2, temos que $K_{n=1}^\infty(\frac{1}{b_n})$ diverge se $\sum |b_n| < \infty$. Vamos supor que $\sum |b_n| = \infty$. Precisamos demonstrar que $\{f_{2n}\}$ e $\{f_{2n+1}\}$ têm o mesmo limite $L_0 = L_1$, isto é,

$$f_{n+1} - f_n = \frac{P_{n+1}}{b_1} \rightarrow 0. \quad (3.8.46)$$

Por (3.8.42), (3.8.44) e usando (3.8.45), encontramos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |f_{2n+2} - f_{2n}| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{2n+1} + P_{2n+2}|}{|b_1|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{P_{2n+2}}{b_1} \right| |-(\delta_{2n+2} + 1) + 1| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{P_{2n+2} \delta_{2n+2}}{b_1} \right| < \infty. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{2n+1} - f_{2n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{P_{2n+1} \delta_{2n+1}}{b_1} \right| < \infty.$$

Agora, se $\sum \delta_n = \infty$ e $\sum |P_n \delta_n| < \infty$, então $P_n \rightarrow 0$, o que mostra (3.8.46). Precisamos apenas mostrar que $\sum |\delta_n| = \infty$. Sabemos que

$$h_k = b_k + \frac{1}{h_{k-1}} = \frac{\delta_k + 1}{h_{k-1}},$$

e, assim,

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{\delta_{2n}}{h_{2n-1}} = \frac{\delta_{2n}}{\delta_{2n-1} + 1} h_{2n-2} = \dots \\ &= \frac{\delta_{2n}(\delta_{2n-2} + 1)(\delta_{2n-4} + 1) \dots (\delta_2 + 1)}{(\delta_{2n-1} + 1)(\delta_{2n-3} + 1) \dots (\delta_3 + 1)b_1}. \end{aligned} \quad (3.8.47)$$

Analogamente,

$$b_{2n+1} = \frac{\delta_{2n+1}(\delta_{2n-1} + 1)(\delta_{2n-3} + 1) \dots (\delta_3 + 1)b_1}{(\delta_{2n} + 1)(\delta_{2n-2} + 1) \dots (\delta_2 + 1)}. \quad (3.8.48)$$

Usando o fato que se $\sum |\delta_n| < \infty$, então $|\delta_n| \rightarrow 0$, $n \geq N$, tomando os pontos que são menores que 1, e usando (3.8.47)-(3.8.48), por meio de alguns cálculos conseguimos escrever

$$\sum |b_{2n}| \leq \frac{ga_1}{b_1 \rho_n} \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{2n}|.$$

Assim, se $\sum |\delta_n| < \infty$, então $\sum |b_n| < \infty$ o que é uma contradição. Logo, $\sum |\delta_n| = \infty$. ■



Capítulo 4

O Teorema da Parábola

Como já dissemos anteriormente, o Teorema da Parábola e suas generalizações são considerados os resultados mais importantes sobre convergência de frações contínuas. Neste capítulo, apresentamos um levantamento das principais demonstrações desse teorema.

4.1 Contribuições de Scott e Wall

Em 1940, Scott e Wall [13] deram início a um novo capítulo sobre critérios de convergência para frações contínuas quando provaram que a região parabólica

$$P = \left\{ w : |w| - \operatorname{Re}(w) \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (4.1.1)$$

é um conjunto de convergência condicional para a fração contínua $K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$.

Para demonstrar este fato, eles tomaram a fração contínua

$$\frac{1}{1 + \frac{a_2}{1 + \frac{a_3}{1 + \frac{a_4}{1 + \dots}}}} \quad (4.1.2)$$

e sua parte par

$$y_0 + \frac{x_1}{y_1 + \frac{x_2}{y_2 + \frac{x_3}{y_3 + \dots}}} \quad (4.1.3)$$

Se a desigualdade

$$r_n |1 + a_n + a_{n+1}| \geq r_n r_{n-2} |a_n| + |a_{n+1}|, \quad (4.1.4)$$

for satisfeita, onde r_n é uma sequência de números reais positivos para $n = 1, 2, 3, \dots$, e $r_0 = r_{-1} = a_1 = 0$, então (4.1.3) satisfaz

$$|c_1 y_1| \geq 1, \quad |c_n y_n| \geq |c_{n-1} c_n y_n| + 1,$$

$n = 2, 3, \dots$, onde $c_n \neq 0$. Mas este é exatamente o critério de Ślezyński-Pringsheim (Teorema 3.3.5) para a fração contínua (4.1.3). Assim, a parte par da fração contínua deve



convergir. O resultado vale também para a parte ímpar. Além disso, eles mostraram que se existem uma sequência de números reais positivos r_n satisfazendo as desigualdades (4.1.4), com desigualdades válidas para pelo menos um índice da parte par, e se

$$r_1 r_3 r_5 \cdots r_{2n-1} < M \quad \text{e} \quad r_2 r_4 r_6 \cdots r_{2n} < M, \quad (4.1.5)$$

onde M é uma constante finita, então uma condição necessária e suficiente para a convergência da fração contínua (4.1.2) é que a série $\sum |b_n|$ diverge, onde $b_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{b_n b_{n-1}}$, $n = 2, 3, \dots$

Assim, se para a fração contínua (4.1.2) temos que valem as desigualdades (4.1.4) e (4.1.5) para uma sequência de números reais positivos r_n , então a fração contínua (4.1.2) converge se, e somente se, a série $\sum |b_n|$ diverge. Tomaram, então, uma fração contínua particular dada por $a_{2n} = \bar{z}$ e $a_{2n-1} = z$, $n = 1, 2, \dots$, ou seja, a fração contínua

$$\frac{1}{1 + \frac{\bar{z}}{1 + \frac{z}{1 + \frac{\bar{z}}{1 + \frac{z}{1 + \dots}}}}} \quad (4.1.6)$$

onde $z = x + iy$, e $x, y \in \mathbb{R}$. Se esta fração contínua converge, então a fração contínua equivalente

$$-z + \frac{z}{1 + \frac{\bar{z}}{1 + \frac{z}{1 + \frac{\bar{z}}{1 + \dots}}}} \quad (4.1.7)$$

deve convergir e a fração contínua

$$\frac{|z^2|}{1 + 2x} - \frac{|z^2|}{1 + 2x} + \frac{|z^2|}{1 + 2x} - \dots$$

que é a parte ímpar de (4.1.7), deve também convergir para um valor real, que deve ser a raiz da equação

$$u^2 - (1 + 2x)u + (x^2 + y^2) = 0.$$

Consequentemente, uma condição necessária para a convergência de (4.1.7) é que $y^2 \leq x + \frac{1}{4}$, ou seja, que z esteja dentro ou na fronteira da parábola $|z| - \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Portanto, uma região de convergência para a fração contínua (4.1.2), considerada simetricamente em relação ao eixo real, é uma região finita contida dentro da região parabólica $|z| - \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$. Em seguida, eles provaram que se os coeficientes a_n , $n \geq 1$, pertencem a esta região parabólica, então eles satisfazem às desigualdades (4.1.4) e (4.1.5) com $r_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Assim, demonstraram que a região de convergência da fração contínua (4.1.2) é a região parabólica (4.1.1).

A partir daí, as regiões parabólicas foram as regiões de valores mais estudadas e são consideradas, por alguns autores, como o assunto de maior importância em se tratando de critérios de convergência para frações contínuas (veja, por exemplo, Thron [6, pp. 115]).

4.2 Contribuições de Paydon e Wall

Em 1942, Paydon e Wall [12] deram uma extensão do resultado de Scott e Wall. À fração contínua (4.1.2), onde $a_n \in \mathcal{C}$, foi associada uma sequência de transformações lineares



fracionais

$$s_1(v) = v, \quad s_k(v) = \frac{1}{1 + s_k(v)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Correspondente a um conjunto arbitrário V de pontos do plano complexo, determinaram o conjunto Γ de pontos, chamado de região elemento, com a condição que $s \in \Gamma$ se, e somente se, a transformação $w = s(v) = \frac{1}{1 + s(v)}$ transforma V em um subconjunto dele mesmo. Tomando a região de valor $V = V_c$ como sendo o círculo $|z - c| \leq |c|$, eles determinaram a região elemento $\Gamma = \Gamma_c$.

Mostraram que a transformação $w = s(v) = \frac{1}{1 + s(v)}$ transforma o círculo $|v - c| \leq |c|$ no círculo

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 \leq \gamma^2, \quad (4.2.8)$$

onde

$$\alpha = \frac{1 + rx - sy}{1 + 2(rx - sy)}, \quad \beta = -\frac{sx + ry}{1 + 2(rx - sy)}, \quad \gamma^2 = \frac{(rx - sy)^2 + (sx + ry)^2}{[1 + 2(rx - sy)]^2},$$

$a = x + iy$, $w = X + iY$, $c = r + is$ e $1 < r \leq 1/2$.

O círculo (4.2.8) passa por 1 e, conseqüentemente pertencerá ao círculo $|z - c| \leq |c|$ se, e somente se, seu centro está no interior ou sobre a elipse $J : |z - c| + |z - 1| = |c|$, que é o lugar geométrico de todos os centros de círculos que passam por 1 e tangenciam a circunferência $|z - c| = |c|$. Escrevendo a equação da elipse J em coordenadas retangulares e substituindo $X = \alpha$, $Y = \beta$ e o sinal $=$ por $\geq$, os autores mostraram que quando $a = x + iy$ a desigualdade

$$\left[\frac{2rsx - (s^2 - r^2)y}{r^2 + s^2} \right]^2 \leq \frac{1 - 2r}{r^2 + s^2} \left[\frac{2rsy + (s^2 - r^2)x}{r^2 + s^2} \right] + \left[\frac{1 - 2r}{2(r^2 + s^2)} \right]^2, \quad (4.2.9)$$

é satisfeita. Assim, mostraram que Γ_c consiste dos pontos $a = x + iy$ que satisfazem (4.2.9). Além disso, como as imagens dos pontos do interior de V_c são pontos interiores de (4.2.8), desde que 1 está no interior de V_c , segue que $a_2, a_3, \dots$ estão no interior da região parabólica (4.2.9) e, então, as convergentes $s_1 s_2 \cdots s_n(1)$ da fração contínua (4.1.2) estão no interior de V_c .

Quando $c = r$, $1/2 < r \leq 1$, a região de convergência Γ_r correspondente à região de convergência $V_r : |z - r| \leq r$ é a região parabólica $y^2 \leq h(x + h/4)$, $z = x + iy$ e $h = \frac{(2r - 1)}{r^2}$. Se $a_2, a_3, \dots$ estão em Γ_r , então todas as convergentes da fração contínua (4.1.2) estão no interior de V_r . Observe que o caso $r = 1$ é o mesmo resultado que havia sido obtido por Scott e Wall em 1940.

A condição suficiente para a convergência da fração contínua (4.1.2) encontrada por Paydon e Wall foi a divergência da série $\sum b_n$. Vamos descrever brevemente a maneira pela qual eles demonstraram este fato.

Como $\Gamma_1 \supset \Gamma_r$, $1/2 < r < 1$, vamos supor que $r = 1$. Como $a_n \in \Gamma_1$, podemos escrever $|a_n| = \operatorname{Re}(a_n) + \frac{h_n}{2}$. Além disso, $a_n \in \Gamma_1$ e também vale (4.1.4) para $r_n = 1$ (veja [13]).

Assim, se $b_1 = 1$ e $b_{n+1} = \frac{1}{b_n a_{n+1}}$, $n = 2, 3, \dots$, temos que

$$\begin{aligned} |1 + b_1 b_2| &> 1, \\ |1 + b_3 + b_2 b_3| &> 1, \\ |b_{n-1} b_n b_{n+1} + b_{n-1} + b_{n+1}| &\geq |b_{n+1}| + |b_{n-1}|, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

para $n = 2, 3, \dots$. Seja B_n o denominador da n -ésima convergente da fração contínua (4.1.2). Podemos mostrar que

$$B_{n+2} = (1 + a_{n+1} + a_{n+2})B_n - a_n a_{n+1} B_{n-2}. \quad (4.2.11)$$

Fazendo $Q_n = b_1 b_2 \dots b_n B_n$, a relação (4.2.11) em termos de Q_n é dada por

$$b_n Q_{n+2} = (b_n b_{n+1} b_{n+2} + b_n + b_{n+2})Q_n - b_{n+2} Q_{n-2}.$$

Usando as desigualdades (4.2.10), obtemos

$$|Q_{n+2}| - |Q_n| \geq \left| \frac{b_{n+2}}{b_n} \right| \{|Q_n| - |Q_{n-2}|\}$$

e, assim,

$$|Q_{n+2}| - |Q_n| \geq K |b_{n+2}|, \quad \text{onde } K > 0. \quad (4.2.12)$$

O raio R_n de V^n pode ser dado, usando a relação de recorrência (2.2.10), por

$$R_n = \frac{|a_2 a_3 \dots a_n|}{|B_n|^2 - |a_n B_{n-2}|^2} = \frac{|b_n|}{|Q_n| - |Q_{n-2}|} \frac{1}{|Q_n| + |Q_{n-2}|}.$$

De (4.2.12), temos

$$R_{2n} < \frac{1}{2K \left(1 + K \sum_{i=1}^{n-1} |b_{2i}|\right)} \quad \text{e} \quad R_{2n+1} < \frac{1}{2K \left(1 + K \sum_{i=1}^{n-1} |b_{2i+1}|\right)}.$$

Como $R_n < R_{n-1}$, mostramos que, se a série $\sum b_n$ diverge, então $R_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

4.3 Contribuições de Thron e outros pesquisadores

No mesmo ano de 1942, Leigton e Thron [9] mostraram o mesmo resultado de Paydon e Wall, mas, ao invés da divergência da série $\sum |b_n|$, encontram a condição $|a_n| < M$, $n = 1, 2, \dots$, como condição suficiente para a convergência da fração contínua (4.1.2). Para maiores detalhes veja [9].

Em 1943, Thron [20] demonstrou que o resultado encontrado por Scott e Wall em 1940 podia ser estendido para a região parabólica

$$P_\alpha = \left\{ a \in \mathcal{C} : |a| - \operatorname{Re} (a e^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right\}, \quad (4.3.13)$$

para todo α tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ou seja, mostrou que P_α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, é um conjunto de convergência condicional para a fração contínua (4.1.2). O resultado de Scott e Wall é o caso particular para $\alpha = 0$.

Em 1958, Thron [21] mostrou que toda parte limitada de P_α é um conjunto de convergência para (4.1.2). Além disso, Thron deu uma estimativa para o raio dos círculos aninhados o que pode ser usado para estabelecer um erro de truncamento. Uma demonstração parecida com aquela apresentada por Thron é dada no item 4. do Teorema da Parábola abaixo.

Em 1963, em [22], Thron deu uma prova do Teorema da Parábola usando métodos ilustrativos. A prova dada por Thron é tratada com detalhes no item 1. do teorema abaixo.

Teorema 4.3.1 (Teorema da Parábola) *Seja α um número real fixo, tal que $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Então,*

1. *A região parabólica*

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \left\{ a \in \mathbb{C} : |a| - \operatorname{Re}(ae^{-2i\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right\} \\ &= \left\{ re^{i(\theta+2\alpha)} : 0 \leq r \leq \frac{1/2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right\} \\ &= \left\{ c^2 \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(ce^{-i\alpha})| \leq \frac{1}{2} \cos \alpha \right\} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

é um conjunto de convergência condicional para a fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{1})$.

2. *As partes par e ímpar da fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{1})$ em P_α convergem para valores finitos.*

3. *O semi-plano*

$$V_\alpha = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(we^{-i\alpha}) > -\frac{1}{2} \cos \alpha \right\} \quad (4.3.15)$$

é um conjunto de valores para P_α .

4. *Se $a_n \in P_\alpha$, para todo n , e $\sum (n|a_n|)^{-1} = \infty$, então $S_n(w)$ converge uniformemente em $\bar{V}_\alpha$ para um valor f . Além disso,*

$$|f - S_n(w)| \leq \frac{2|a_1|/\cos \alpha}{\prod_{j=2}^n \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|} \right)}, \quad \forall w \in \bar{V}_\alpha. \quad (4.3.16)$$

5. *O conjunto*

$$E_{\alpha, M} = \{a \in P_\alpha : |a| \leq M\} \quad (4.3.17)$$

é um conjunto de convergência uniforme para a fração contínua $K_{n=1}^\infty(\frac{a_n}{1})$.

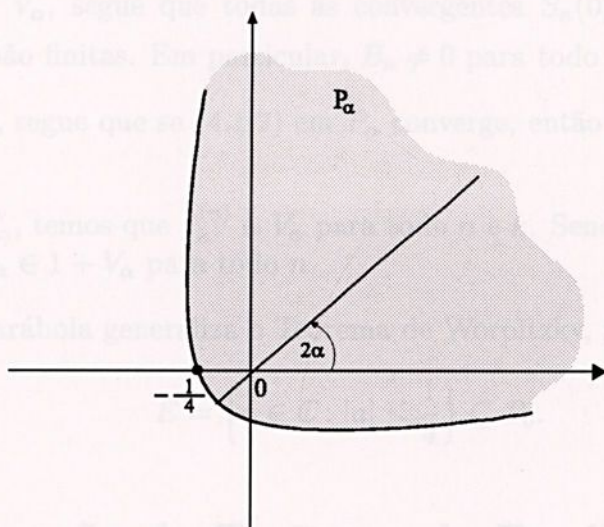
Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema, faremos algumas observações.



Observações

1. A fronteira de P_α é uma parábola com eixo sobre a reta $\arg z = 2\alpha$, foco na origem, vértice em $-\frac{1}{4}e^{i2\alpha}\cos^2\alpha$ e intercepta o eixo real em $z = -\frac{1}{4}$. Para mostrar este fato, tomemos $a = x + iy$ e, substituindo em $|a| - \operatorname{Re}(ae^{-2i\alpha}) = \frac{1}{2}\cos^2\alpha$, chegamos à fórmula reduzida

$$y^2 = \cos^2\alpha \left(x + \frac{\cos^2\alpha}{4} \right).$$



2. $V_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(we^{-i\alpha}) > -\frac{1}{2}\cos\alpha\}$ é um semi-plano, cuja fronteira é a reta $s : y = -x \cot\alpha - \frac{1}{2}\cot\alpha$. Podemos ver isso tomando $w = x + iy$. Assim,

$$\operatorname{Re}(we^{-i\alpha}) = x \cos\alpha + y \sin\alpha.$$

Tomando $\operatorname{Re}(we^{-i\alpha}) = -\frac{1}{2}\cos\alpha$, obtemos a equação da semi-reta s dada acima.

3. $P_\alpha = \{re^{i(\theta+2\alpha)} : 0 \leq r \leq \frac{1/2\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\}$ é a equação em coordenadas polares de P_α . Isto pode ser visto fazendo $x = r \cos\theta$ e $y = r \sin\theta$ na equação reduzida da parábola que foi dada acima. Para mostrar que $P_\alpha = \{c^2 \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(ce^{-i\alpha})| \leq \frac{1}{2}\cos\alpha\}$, tomemos $c^2 = x + iy$ e $c = u + iv$. Assim, $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$. Portanto, $y^2 = 4v^2(x + v^2)$ e, fazendo $v = \frac{1}{2}\cos\alpha$, obtemos a equação reduzida de P_α já vista.

4. Sob a transformação $s(w) = \frac{a}{1+w}$ a imagem de $\bar{V}_\alpha$ é o disco circular de centro

$\gamma_a = \frac{ae^{-i\alpha}}{\cos\alpha}$ e raio $\rho_a = \frac{|a|}{\cos\alpha}$. Tomemos $u = s(w)$. Então, $w = \frac{a}{u} - 1$. Sejam $w = w_1 + iw_2$ e $u = u_1 + iu_2$. Assim,

$$w_1 = \frac{au_1}{u_1^2 + u_2^2} - 1 \quad \text{e} \quad w_2 = -\frac{au_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Tomemos também w na fronteira de $\bar{V}_\alpha$. Isto implica que

$$w_1 \cos \alpha + w_2 \sin \alpha = -\frac{1}{2} \cos \alpha.$$

Substituindo os valores de w_1 e w_2 e completando os quadrados, temos

$$(u_1 - a)^2 + \left(u_2 - \left(-\frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)\right)^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}$$

e, assim, encontramos os valores de γ_a e ρ_a dados acima.

5. Desde que $\infty \notin V_\alpha$, segue que todas as convergentes $S_n(0) = \frac{A_n}{B_n}$ de uma fração contínua em P_α são finitas. Em particular, $B_n \neq 0$ para todo n .
6. Do item anterior, segue que se (4.1.2) em P_α converge, então converge para um valor finito.
7. Tomando $V_n = V_\alpha$, temos que $f_k^{(n)} \in V_\alpha$ para todo n e k . Sendo assim, a sequência de caudas críticas $h_n \in 1 + V_\alpha$ para todo n .
8. O Teorema da Parábola generaliza o Teorema de Worpitzky, pois o disco

$$E = \left\{a \in \mathbb{C} : |a| \leq \frac{1}{4}\right\} \subseteq P_0.$$

4.4 Demonstração do Teorema da Parábola

Primeiramente, vamos demonstrar os itens 3. e 2. e, então, os usaremos para mostrar 1.. Por último, demonstraremos os itens 4. e 5..

3. $s(w) = \frac{a}{1+w}$ transforma, conforme observação 4, $\bar{V}_\alpha$ em um disco circular fechado com centro em γ_a e raio ρ_a .

Este disco está contido em $\bar{V}_\alpha$ se, e somente se, $\gamma_a \in V_\alpha$ e a distância d_a de γ_a até ∂V_α , é tal que $d_a \geq \rho_a$. Aqui, ∂V_α é a fronteira de V_α .

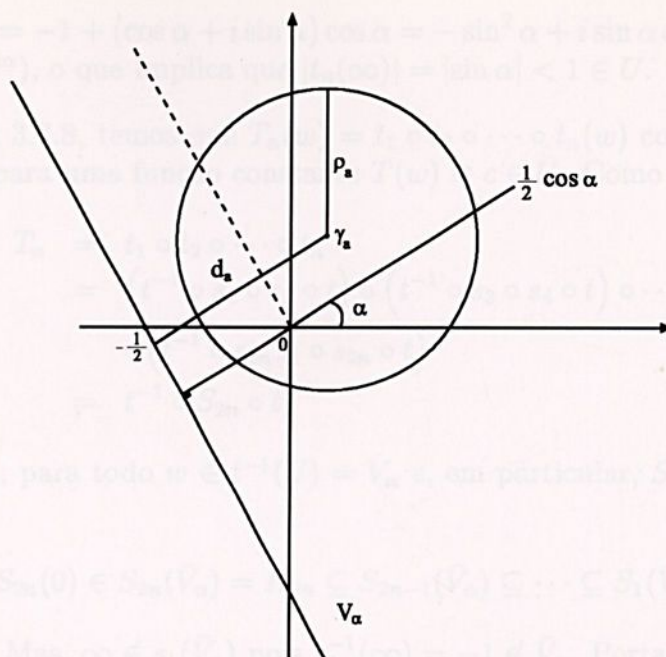
Agora, sabemos que, dado um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta $r : ax + by + c = 0$, a distância do ponto P à reta r é dada por $d(P, r) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$. O centro γ_a é dado por

$$\left(\operatorname{Re} \left(\frac{ae^{-i\alpha}}{\cos \alpha} \right), \operatorname{Im} \left(\frac{ae^{-i\alpha}}{\cos \alpha} \right) \right).$$

Observe que

$$(x + iy) \frac{e^{-i\alpha}}{\cos \alpha} = \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) + i \left(\frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$





Sabendo que a fronteira de $\bar{V}_\alpha$ é a reta s da observação 2, temos que

$$d_a = d(\gamma_a, r) = \frac{1}{2} \cos \alpha + \operatorname{Re}(\gamma_a e^{-i\alpha}),$$

onde $d_a > 0$ se, e somente se, $\gamma_a \in V_\alpha$. Temos ainda que $d_a \geq \rho_a$ se, e somente se,

$$\frac{1}{2} \cos \alpha + \operatorname{Re}(\gamma_a e^{-i\alpha}) \geq \frac{|a|}{\cos \alpha},$$

ou seja se, e somente se,

$$-\frac{|a|}{\cos \alpha} + \operatorname{Re}\left(\frac{ae^{-2i\alpha}}{\cos \alpha}\right) \geq -\frac{1}{2} \cos \alpha \iff a \in P_\alpha.$$

Isto é, $d_a \geq \rho_a$ se, e somente se, $a \in P_\alpha$.

2. Definimos a t.l.f.

$$t(w) = \frac{-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha - w}{1 + w}. \quad (4.4.18)$$

Logo, a imagem do disco unitário fechado $\bar{U}$ é $\bar{V}_\alpha$, com $t(\infty) = -1$ e $t(-1) = \infty$. Considere a fração contínua (4.1.2) com $a_n \in P_\alpha$ e $t_n(w) = t^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n} \circ t(w)$, $n = 1, 2, \dots$. Então,

$$t_n(\bar{U}) = t^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n} \left(\underbrace{t(\bar{U})}_{\bar{V}_\alpha} \right) = t^{-1} \circ s_{2n-1} (s_{2n}(\bar{V}_\alpha)) = t^{-1}(\bar{V}_\alpha) = \bar{U},$$

ou seja, $t_n(\bar{U}) \subseteq \bar{U}$ e

$$\begin{aligned} t_n(\infty) &= t^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n}(t(\infty)) \\ &= t^{-1} \circ s_{2n-1}(s_{2n}(-1)) = t^{-1}(s_{2n-1}(\infty)) = t^{-1}(0) = -1 + e^{i\alpha} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Mas, $-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha = -1 + (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cos \alpha = -\sin^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha = -\sin \alpha (\sin \alpha - i \cos \alpha) = -\sin \alpha (ie^{i\alpha})$, o que implica que $|t_n(\infty)| = |\sin \alpha| < 1 \in U$.

Assim, pelo Lema 3.7.8, temos que $T_n(w) = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n(w)$ converge uniformemente (localmente) em U para uma função constante $T(w) \equiv c \in \bar{U}$. Como

$$\begin{aligned} T_n &= t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n \\ &= (t^{-1} \circ s_1 \circ s_2 \circ t) \circ (t^{-1} \circ s_3 \circ s_4 \circ t) \circ \dots \\ &\quad \circ (t^{-1} \circ s_{2n-1} \circ s_{2n} \circ t) \\ &= t^{-1} \circ S_{2n} \circ t, \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

$S_{2n}(w) \rightarrow t(c) = L_0$, para todo $w \in t^{-1}(U) = V_\alpha$ e, em particular, $S_{2n}(0) \rightarrow L_0$. Podemos ver que

$$0 \in \bar{V}_\alpha \Rightarrow S_{2n}(0) \in S_{2n}(\bar{V}_\alpha) = K_{2n} \subseteq S_{2n-1}(\bar{V}_\alpha) \subseteq \dots \subseteq S_1(\bar{V}_\alpha) \subseteq s_1(\bar{V}_\alpha).$$

Então, $L_0 \in s_1(\bar{V}_\alpha)$. Mas, $\infty \notin s_1(\bar{V}_\alpha)$ pois $s_1^{-1}(\infty) = -1 \notin \bar{V}_\alpha$. Portanto, $L_0 \neq \infty$.

Analogamente, podemos mostrar também que $S_{2n+1}(0) \rightarrow L_1 \neq \infty$, considerando $t_n(w) = t^{-1} \circ s_{2n-2} \circ s_{2n-1} \circ t(w)$. Isso conclui a demonstração de 2..

1. Pelo Teorema 3.3.2 temos que se (4.1.2) converge, então a série de Stern-Stolz diverge. Precisamos mostrar que se (4.1.2) diverge, então a série de Stern-Stolz converge.

Já sabemos que $K_n = S_n(\bar{V}_\alpha)$ satisfaz $K_{n+1} \subseteq K_n \subseteq \dots \subseteq s_1(\bar{V}_\alpha)$, onde $s_1(\bar{V}_\alpha)$ é limitado.

Se $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$, ou seja, estamos no caso limite pontual, (4.1.2) converge. Supomos, então, que $\text{diam}(K) > 0$, onde $K = \lim K_n$. Logo o raio R_n de $T_n(\bar{U}) = t^{-1} \circ S_{2n} \circ t(\bar{U})$ deve convergir para um círculo de raio $R > 0$. Isto é, estamos no caso limite circular para $\{T_n\}$ em (4.4.19). Precisamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |S_{2n+2}(0) - S_{2n}(0)| < \infty. \quad (4.4.20)$$

Como $\{T_n\}$ satisfaz às condições do Lema 3.7.8, segue que

$$|T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)| \leq \frac{2R_1}{1-k} (1 - |\alpha_n|^2).$$

Como $\delta_n = \frac{1 - |\alpha_n|}{1 + |\alpha_n|}$ então

$$\frac{4\delta_n}{(1 + \delta_n)^2} \leq 4\delta_n, \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + \delta_n} < 1.$$

Portanto,

$$\sum |T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)| \leq \frac{8R_1}{1-k} \sum \delta_n < \infty,$$

por (3.7.38). Resta mostrar que $\sum |T_{n+1}(w) - T_n(w)| < \infty$. Como

$$|T_n(w) - T_n(\infty)| = \frac{R_n}{|\alpha_n|} \frac{1 - |\alpha_n|^2}{|1 - \bar{\alpha}_n w|}. \quad (4.4.21)$$

Se $w < 1$, como $|\alpha_n| \rightarrow 1$, obtemos que $|\alpha_n| > |w|$, $n \geq N$. Em (4.4.21), como $R_n < 1$ então

$$|T_n(w) - T_n(\infty)| \leq \frac{1}{|w|} \frac{1 - |\alpha_n|^2}{1 - w} \Rightarrow \sum |T_n(w) - T_n(\infty)| \leq k \sum \delta_n < \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum |T_{n+1}(w) - T_n(w)| &\leq \sum |T_{n+1}(w) - T_{n+1}(\infty)| + \sum |T_n(\infty) - T_n(w)| \\ &+ \sum |T_{n+1}(\infty) - T_n(\infty)| \end{aligned}$$

é convergente para $|w| \neq 1$, em particular é convergente para $w = -1 + e^{i\alpha} \cos \alpha$. Observemos também que

$$t(w) + 1 = \frac{e^{i\alpha} \cos \alpha}{1 + w} \rightarrow \frac{\cos \alpha}{|1 + w|} \leq 1 + |t(w)|.$$

Portanto

$$\frac{1}{|1 + w|} \leq \frac{1}{\cos \alpha} (1 + \lambda),$$

se $|t(w)| < \lambda$. Assim

$$|t(w_1) - t(w_2)| \leq \frac{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) |w_1 - w_2|}{\cos \alpha}.$$

Tomemos

$$w_1 = T_{n+1}(-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha) \quad \text{e} \quad w_2 = T_n(-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha).$$

Como $t(T_{n+1}(-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha)) \in s_1(\bar{V}_\alpha)$, é limitada.

Mas

$$S_{2n+2}(0) = t(T_{n+1}(-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha)) \quad \text{e} \quad S_{2n}(0) = t(T_n(-1 + e^{i\alpha} \cos \alpha)),$$

Assim temos que $\sum |S_{2n+2}(0) - S_{2n}(0)| < \infty$.

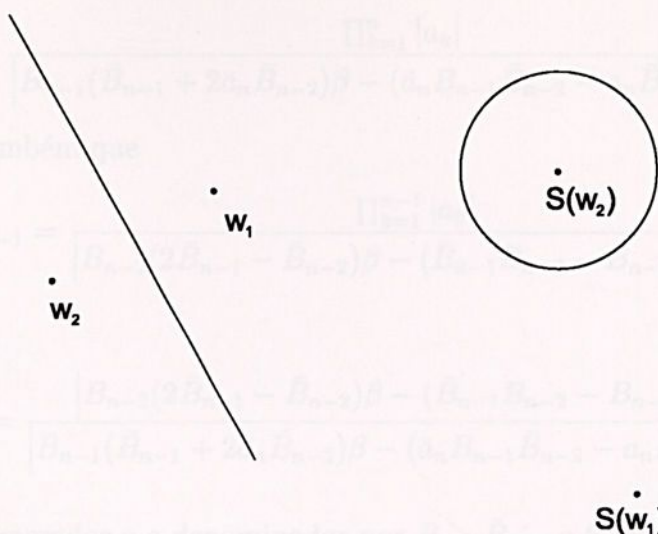
Por um caminho similar, mostramos a segunda condição de (3.8.42) e o resultado segue do Lema 3.8.2.

4. Para provarmos 4. vamos mostrar que

$$R_n \leq \frac{|a_1 / \cos \alpha|}{\prod_{j=2}^n \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1) |a_j|} \right)},$$

onde R_n é o raio de $K_n = S_n(\bar{V}_\alpha)$.





Como ∞ está na fronteira de $\bar{V}_\alpha$ temos que $R_n = |c_n - S_n(\infty)|$, onde c_n é o centro de K_n . Para obter c_n , consideremos o fato de que sob t.l.f. as imagens de pontos simétricos são pontos simétricos. Sejam $S_n(w_2) = c_n$ e $S_n(w_1) = S_n\left(-\frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}}\right) = \infty$. Para obtermos w_2 usamos o seguinte argumento: como c_n e ∞ são pontos simétricos em relação a K_n , temos que w_2 e $w_1 = -\frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}}$ são simétricos com relação à fronteira de $\bar{V}_\alpha$.

Usando o fato de que o ponto médio entre $w_1 = x_1 + iy_1$ e $w_2 = x_2 + iy_2$ é dado por $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ e que este ponto deve pertencer a r , perpendicular à reta que é a fronteira de $\bar{V}_\alpha$, encontramos w_2

$$w_2 = \frac{\bar{B}_n}{\bar{B}_{n-1}} e^{2i\alpha} - \cos \alpha e^{i\alpha}.$$

Como $e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} = 2 \cos \alpha$, podemos escrever $e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos \alpha - 1 = 2\beta - 1$, onde $\beta = e^{i\alpha} \cos \alpha$. Assim, w_2 pode ser escrito como

$$\frac{(2\bar{B}_n - \bar{B}_{n-1})\beta - \bar{B}_n}{\bar{B}_{n-1}}. \quad (4.4.22)$$

Logo,

$$S_n(w_2) = \frac{(2\bar{B}_n A_{n-1} - A_{n-1} \bar{B}_{n-1})\beta - A_{n-1} \bar{B}_n + A_n \bar{B}_{n-1}}{(2\bar{B}_n B_{n-1} - B_{n-1} \bar{B}_{n-1})\beta - B_{n-1} \bar{B}_n + B_n \bar{B}_{n-1}}$$

e

$$\begin{aligned} R_n = |S_n(w_2) - S_n(\infty)| &= \frac{|A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n|}{\left| \beta(2\bar{B}_n B_{n-1} - B_{n-1} \bar{B}_{n-1}) + [\bar{B}_{n-1} B_n - \bar{B}_n B_{n-1}] \right|} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n |a_k|}{\left| B_{n-1}(2\bar{B}_n - \bar{B}_{n-1})\beta - (\bar{B}_n B_{n-1} - B_n \bar{B}_{n-1}) \right|}. \end{aligned}$$

Substituindo B_n pela sua relação de recorrência dada em (2.2.10), temos

$$R_n = \frac{\prod_{k=1}^n |a_k|}{\left| B_{n-1}(\bar{B}_{n-1} + 2\bar{a}_n \bar{B}_{n-2})\beta - (\bar{a}_n B_{n-1} \bar{B}_{n-2} - a_n \bar{B}_{n-1} B_{n-2}) \right|}.$$

Observamos também que

$$R_{n-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} |a_k|}{\left| B_{n-2}(2\bar{B}_{n-1} - \bar{B}_{n-2})\beta - (\bar{B}_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} \bar{B}_{n-2}) \right|}.$$

Portanto,

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{\left| B_{n-2}(2\bar{B}_{n-1} - \bar{B}_{n-2})\beta - (\bar{B}_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} \bar{B}_{n-2}) \right|}{\left| B_{n-1}(\bar{B}_{n-1} + 2\bar{a}_n \bar{B}_{n-2})\beta - (\bar{a}_n B_{n-1} \bar{B}_{n-2} - a_n \bar{B}_{n-1} B_{n-2}) \right|}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $B_{n-1} \bar{B}_{n-2}$ e fazendo $L_n = \frac{B_{n-1}}{B_{n-2}}$, temos

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{\bar{L}_n e^{i2\alpha} + L_n - \cos \alpha e^{i\alpha}}{\bar{a}_n L_n e^{i2\alpha} + |L_n|^2 \cos \alpha e^{i\alpha + a_n \bar{L}_n}}.$$

Observemos que $L_n = h_{n-1}$, que é a sequência de caudas crítica, então $h_{n-1} \in 1 + V_\alpha$, $n = 2, 3, \dots$. Como $L_n = h_{n-1} \in 1 + V_\alpha$, temos que $L_n = h_{n-1} = e^{i\alpha \frac{\cos \alpha}{2}}(x_n + iy_n)$, $x_n > 1$ e $-\infty < y_n < \infty$. Além disso, se $a_n \in P_\alpha$, então $a_n = e^{2i\alpha \frac{\cos^2 \alpha}{4}}(u_n + iv_n)$ e $v_n^2 \leq 4(u_n + 1)$.

Assim,

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{(u_n^2 + v_n^2)^{1/2} [x_n - 1]}{\left| x_n^2 + u_n x_n + \left(y_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 - \frac{1}{4}v_n^2 \right|}. \quad (4.4.23)$$

Como $x_n > 1$ e $v_n^2 \leq 4(u_n + 1)$, $v_n^2 + u_n^2 \leq u_n + 2$, então

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \leq \frac{1}{1 + \frac{x_n - 1}{(v_n^2 + u_n^2)^{1/2}}}.$$

Mas $x_n > 1$. Logo podemos obter uma estimativa para $\frac{R_n}{R_{n-1}}$. Temos ainda que $L_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{L_n}$. Usando o fato de que $L_n = e^{i\alpha \frac{\cos \alpha}{2}}(x_n + iy_n)$ para L_n e L_{n+1} e escrevendo $a_n = e^{2i\alpha \frac{\cos^2 \alpha}{4}}(u_n + iv_n)$, temos que

$$d_{n+1} = \min x_{n+1} = 2 + \operatorname{Re} \left(\frac{u_n + iv_n}{x_n + iy_n} \right).$$

Como $\operatorname{Re} \left(\frac{u_n + iv_n}{x_n + iy_n} \right) = -\frac{1}{c}$ para $x > c > 0$ e $v^2 \leq 4u + 4$ (veja [6, pp. 100]), temos que $d_{n+1} = 2 - \frac{1}{d_n}$. Por indução (veja [6, pp. 104]),

$$d_n = \frac{n}{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$



Assim,

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} \leq \frac{1}{1 + \frac{d_n - 1}{(u_n^2 + v_n^2)^{1/2}}} = \frac{1}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(n-1)|a_n|}}.$$

Portanto,

$$R_n \leq \frac{|a_1/\cos \alpha|}{\prod_{j=2}^n 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|}}.$$

Como

$$1 + \sum_{j=2}^n \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|} \leq \prod_{j=2}^n \left\{ 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|} \right\} \leq e^{\sum_{j=2}^n \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|}},$$

temos

$$1 + \frac{1}{4} \sum_{j=2}^n \frac{\cos^2 \alpha}{(j-1)|a_j|} = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4} \sum_{j=2}^n \frac{j}{j-1} \frac{1}{j|a_j|} \geq 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j|a_j|}.$$

Se a série $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j|a_j|}$ diverge, então a série $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-1)|a_j|}$ diverge e, se esta última diverge, o produto $\prod_{j=2}^{\infty} 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|}$ também diverge. Como este produto não depende de w , temos a convergência uniforme.

Esse resultado é na verdade um caso particular do Teorema A de Thron [21, pp. 180].

5. Observe que se $|a_j| \leq M$, então

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|} > \frac{\cos^2 \alpha}{4M} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j-1} > \frac{\cos^2 \alpha}{4M} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} > \infty.$$

Portanto, se $|a_j| \leq M$, o produto

$$\prod_{j=2}^{\infty} 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{4(j-1)|a_j|}$$

diverge. Como este produto não depende de w , temos também a convergência uniforme. ■

Existem várias extensões do Teorema da Parábola. Um exemplo é o resultado dado em 1994 por Lange [7], no qual ele considera regiões duplas de valores. Ou seja, ele considerou

$$a_{2n-1} \in P_1(\alpha, d, M) \quad \text{e} \quad a_{2n} \in P_2(\alpha, d),$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < d \leq \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} P_1(\alpha, d) &= \{z^2 : |Im(z e^{-i\alpha})| \geq (1-d) \cos \alpha\}, \\ P_2(\alpha, d) &= \{z^2 : |Im(z e^{-i\alpha})| \geq d \cos \alpha\}. \end{aligned}$$



Usando raciocínio análogo ao do item 5 para do Teorema da Parábola, ele encontrou um novo limite para R_n e estendeu o Teorema da Parábola da seguinte forma

Teorema 4.4.1 *Sejam α, d e M números fixos que satisfazem*

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < d \leq \frac{1}{2}, \quad M > 0$$

e sejam

$$a_{2n-1} \in P_1(\alpha, d, M) \quad e \quad a_{2n} \in P_2(\alpha, d), \quad n \geq 1.$$

Então, $P_1(\alpha, d, M)$ e $P_2(\alpha, d)$ são regiões duplas de convergência uniforme para a fração contínua (4.1.2). Além disso, se $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, onde f_n denota a n -ésima convergente de (4.1.2), então

$$|f_{2n+2} - f| \leq |f_{2n+1} - f| \leq \frac{M}{(1-d) \cos \alpha} \left(\frac{1+c}{n+c} \right)^c, \quad n \geq 0, \quad (4.4.24)$$

onde

$$c = d((1-d) \cos \alpha)^2 / M.$$

Se $d = \frac{1}{2}$ no Teorema 4.4.1, obtemos um corolário que contém e estende o Teorema da Parábola.

Corolário 4.4.1.1 *Sejam α, d e M satisfazendo às mesmas condições do Teorema 4.4.1 e*

$$a_{2n-1} \in P_1(\alpha, 1/2, M), \quad a_{2n} \in P_2(\alpha, 1/2), \quad n \geq 1.$$

Então,

1. $P_1(\alpha, 1/2, M)$ e $P_2(\alpha, 1/2)$ são regiões duplas de convergência uniforme para a fração contínua (4.1.2).
2. Se, além disso, se a região elemento para a_{2n} , $P_2(\alpha, 1/2)$, é substituída pela região $P_1(\alpha, 1/2, M)$, então esta região é uma região de convergência uniforme para (4.1.2). Pela desigualdade (4.4.24), é verdade para ambos os itens 1. e 2. que

$$|f_{2n+2} - f| \leq |f_{2n+1} - f| \leq \frac{2M}{\cos \alpha} \left(\frac{1+c}{n+c} \right)^c, \quad c = \frac{\cos^2 \alpha}{8M}, \quad n \geq 0.$$

Capítulo 5

Frações contínuas definidas positivas: um caso particular

Neste capítulo, consideramos as propriedades de convergência de uma $\hat{J}$ -fração que como já foi dito anteriormente, no Capítulo 1, trata-se de uma fração contínua, que está relacionada com certos polinômios similares, (veja [15], [16]). Nossos estudos foram baseados no conceito de frações contínuas definidas positivas introduzidas em 1944 por Wall e Wetzell (veja [24] e [25]). É importante observar que o conceito de frações contínuas definidas positivas é uma extensão da idéia usada no Teorema da Parábola. Os resultados obtidos neste capítulo foram apresentados no XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, realizado em Santos em setembro de 1999.

5.1 Introdução

Consideremos a fração contínua da forma

$$\frac{a_1}{z+b_1} - \frac{\{a_2(z)\}^2}{z+b_2} - \frac{\{a_3(z)\}^2}{z+b_3} - \frac{\{a_4(z)\}^2}{z+b_4} - \dots, \quad (5.1.1)$$

onde $b_n \in \mathbb{C}$, $a_1 = 1$ e $a_n(z)$ são funções da forma $(l_n + im_n)z^{\delta_n}$, onde $\delta_n = 0$ ou $\delta_n = 1$ e $l_n, m_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em (5.1.1), se $\delta_n = 0$, ou seja, os $a_n(z)$ são constantes complexas, a fração contínua é chamada de J-fração. Assim, de maneira mais geral, a fração (5.1.1) é uma extensão de uma J-fração e será denotada aqui por $\hat{J}$ -fração. Uma $\hat{J}$ -fração é real se $m_n = 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ com $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.1.1 Definimos uma $\hat{J}$ -fração real e regular por

$$\frac{1}{z+b_1} - \frac{l_2^2}{z+b_2} - \frac{l_3^2 z^2}{z+b_3} - \frac{l_4^2}{z+b_4} - \frac{l_5^2 z^2}{z+b_5} - \dots, \quad (5.1.2)$$



onde $a_{2n}(z) = l_{2n}$, $a_{2n+1}(z) = l_{2n+1}z$ e $b_n \in \mathbb{R}$ para $n = 1, 2, \dots$

Observemos que a fração contínua (1.0.9) que surge da relação de recorrência (1.0.6) para os polinômios similares definidos no Capítulo 1 é uma $\hat{J}$ -fração real e regular com $b_n = \hat{\beta}_n^\psi$ e $l_{n+1}^2 = \hat{\alpha}_{n+1}^\psi$, para $n = 1, 2, \dots$

5.2 $\hat{J}$ -fração definida positiva

Suponhamos que todos os coeficientes $a_n(z)$ e b_n em (5.1.1) satisfaçam a propriedade

$$\left\{ \sum_{r=1}^n (y + \beta_r) \xi_r^2 - 2 \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_{r+1}(z) \xi_r \xi_{r+1} \right\} > 0, \quad (5.2.3)$$

com $n = 1, 2, \dots$, para todo z tal que $Im(z) = y > 0$, sempre que $\xi_1, \xi_2, \dots \in \mathbb{R}$ e $\sum_{r=1}^n \xi_r^2 \neq 0$. Aqui,

$$\beta_r = Im(b_r) \quad \text{e} \quad \alpha_{r+1}(z) = Im(a_{r+1}(z)).$$

Definição 5.2.1 Se a $\hat{J}$ -fração satisfaz a propriedade (5.2.3), a $\hat{J}$ -fração é chamada de $\hat{J}$ -fração positiva definida.

Teorema 5.2.1 Se a $\hat{J}$ -fração (5.1.1) é positiva definida, então os denominadores de seus convergentes são não nulos para todo z cuja parte imaginária é positiva.

Demonstração: Sabemos que os denominadores da fração contínua (5.1.1) são dados por

$$B_p(z) = (z + b_p) B_{p-1}(z) - \{a_p(z)\}^2 B_{p-2}(z), \quad (5.2.4)$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $B_{-1}(z) = 0$, $B_0(z) = 1$. Veremos agora que $B_p(z)$ pode ser dado como

$$\begin{vmatrix} z + b_1 & -a_2(z) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2(z) & z + b_2 & -a_3(z) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_3(z) & z + b_3 & -a_4(z) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{p-1}(z) & z + b_{p-1} & -a_p(z) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_p(z) & z + b_p \end{vmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Podemos mostrar que os determinantes de (5.2.5) satisfazem a (5.2.4) com as mesmas condições iniciais. Logo, são os mesmos polinômios. Consideremos o sistema de equações lineares, cujo determinante da matriz dos coeficientes é $B_p(z)$

$$\begin{aligned} (z + b_1)x_1 &- a_2(z)x_2 &+ 0x_3 &+ \dots + 0x_{p-1} &- 0x_p &= 0 \\ -a_2(z)x_1 &+ (z + b_2)x_2 &- a_3(z)x_3 &+ \dots + 0x_{p-1} &+ 0x_p &= 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 0x_3 &+ \dots - a_p(z)x_{p-1} &+ (z + b_p)x_p &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Este sistema terá somente a solução trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ se, e somente se, $B_p(z) \neq 0$. Multiplicando as equações de (5.2.6) por $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$, respectivamente, e somando as equações temos

$$\sum_{r=1}^p (z + b_r) |x_r|^2 - \sum_{r=2}^p a_r(z) \{x_{r-1} \bar{x}_r + x_r \bar{x}_{r-1}\} = 0. \quad (5.2.7)$$

Tomando

$$x_r = u_r + iv_r, \quad y = Im(z), \quad \beta_r = Im(b_r) \quad \text{e} \quad \alpha_r(z) = Im(a_r(z)),$$

como, por hipótese, a fração contínua é positiva definida para todo z tal que $y = Im(z) > 0$, temos que (5.2.3) é válida e, então, a parte imaginária de (5.2.7) é positiva. Logo (5.2.7) e (5.2.6) são válidas se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$. Assim $B_p(z) \neq 0$ para todo $y > 0$. ■

Teorema 5.2.2 *A $\hat{J}$ -fração (5.1.1) é positiva definida se as seguintes condições são verdadeiras*

1.
$$\beta_n \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2.8)$$

2.
$$m_{n+1} = 0, \text{ sempre que } a_{n+1}(z) = (l_{n+1} + im_{n+1})z, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.9)$$

3. *Existe uma sequência de números reais $g_1, g_2, \dots$ satisfazendo $0 \leq g_n < 1$, tal que, para $n = 1, 2, \dots$,*

$$m_{n+1}^2 = \beta_n \beta_{n+1} (1 - g_n) g_{n+1}, \text{ sempre que } a_{n+1}(z) = l_{n+1} + im_{n+1} \quad (5.2.10)$$

e

$$l_{n+1}^2 = (1 - g_n) g_{n+1}, \text{ sempre que } a_{n+1}(z) = l_{n+1} z. \quad (5.2.11)$$

Em (5.2.10) supomos g_{n+1} igual a zero, quando m_{n+1} é zero.

Demonstração: De (5.2.8), (5.2.9), (5.2.10) e (5.2.11), para $n = 1, 2, \dots$ segue que

$$\{\alpha_{n+1}(z)\}^2 = m_{n+1}^2 \leq (y + \beta_n)(y + \beta_{n+1})(1 - g_n)g_{n+1}, \quad (5.2.12)$$

se $a_{n+1}(z) = l_{n+1} + im_{n+1}$, enquanto

$$\{\alpha_{n+1}(z)\}^2 = l_{n+1}^2 y^2 \leq (y + \beta_n)(y + \beta_{n+1})(1 - g_n)g_{n+1}. \quad (5.2.13)$$

se $a_{n+1}(z) = l_{n+1} z$. Em (5.2.12) g_{n+1} deve ser igual a zero quando a igualdade for válida em (5.2.13). Supondo que $l_{n+1} \neq 0$, a igualdade vale quando $\beta_n = \beta_{n+1} = 0$. Usando esses resultados obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^m (y + \beta_r) \xi_r^2 - 2 \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{r+1}(z) \xi_r \xi_{r+1} \\ &= \sum_{r=1}^{m-1} \left\{ (1 - g_r)^{1/2} (y + \beta_r)^{1/2} \xi_r - g_{r+1}^{1/2} (y + \beta_{r+1})^{1/2} \xi_{r+1} \right\}^2 \\ &+ g_1 (y + \beta_1) \xi_1^2 + (1 - g_m) (y + \beta_m) \xi_m^2, \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

quando a igualdade em (5.2.12) e (5.2.13) vale para $n = 1, 2, \dots, m-1$. Quando a igualdade não acontece, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^m (y + \beta_r) \xi_r^2 - 2 \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_{r+1}(z) \xi_r \xi_{r+1} \\ & > \sum_{r=1}^{m-1} \left\{ (1 - g_r)^{1/2} (y + \beta_r)^{1/2} |\xi_r| - g_{r+1}^{1/2} (y + \beta_{r+1})^{1/2} |\xi_{r+1}| \right\}^{1/2} \\ & + g_1 (y + \beta_1) \xi_1^2 + (1 - g_m) (y + \beta_m) \xi_m^2. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Em (5.2.14), usando o fato que $g_{n+1} < 1$ para todo n , temos o resultado (5.2.3), o que completa a demonstração. ■

Do teorema acima sabemos que as condições (5.2.8), (5.2.9), (5.2.10) e (5.2.11) são suficientes para que a fração contínua (5.1.1) seja positiva definida. Podemos mostrar, de maneira similar ao que foi feito em Wall [26, pp. 67], que essas condições são também condições necessárias se a $\hat{J}$ -fração for real.

Corolário 5.2.2.1 *Se a $\hat{J}$ -fração (5.1.1) é real, então é positiva definida se, e somente se, existe uma sequência de números reais $g_1, g_2, \dots$, satisfazendo $0 \leq g_n < 1$, tal que, para $n = 1, 2, \dots$,*

$$g_{n+1} = 0, \quad \text{se} \quad a_{n+1}(z) = l_{n+1}, \quad (5.2.16)$$

$$g_{n+1} = \frac{l_{n+1}^2}{(1 - g_n)}, \quad \text{se} \quad a_{n+1}(z) = l_{n+1}z. \quad (5.2.17)$$

Para a $\hat{J}$ -fração regular (5.1.2) segue, do resultado acima, que $g_{2n} = 0$ e $g_{2n+1} = l_{2n+1}^2 < 1$. Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.2.2.2 *A $\hat{J}$ -fração regular (5.1.2) é positiva definida se, e somente se, $l_{2n+1}^2 < 1$ para $n = 1, 2, \dots$.*

Tomemos um caso particular de frações contínuas positivas definidas, onde $b_n = 0$. A fração contínua equivalente é dada por

$$\frac{1/z}{1 + \frac{-\{a_2(z)\}^2/z^2}{1} + \frac{-\{a_3(z)\}^2/z^2}{1} + \dots},$$

onde

$$\left[\frac{ia_n(z)}{z} \right] = \begin{cases} \frac{i(l_n + im_n)}{|z|^2} (x - iy) = \frac{i[l_n x + m_n y] - [m_n x - l_n y]}{|z|^2}, & \text{se } a_n(z) = l_n + im_n \\ il_n, & \text{se } a_n(z) = l_n z \end{cases}$$

Sabemos que

$$\left| \left(\frac{ia_n(z)}{z} \right)^2 \right| - \operatorname{Re} \left(\frac{ia_n(z)}{z} \right)^2 = 2 \left[\operatorname{Im} \left(\frac{ia_n(z)}{z} \right) \right]^2.$$



Tomando $z = iy$, teremos

$$2 \left[\operatorname{Im} \left(\frac{ia_n(z)}{z} \right) \right]^2 = \begin{cases} \frac{2m_n^2}{y^2} \leq 2(1 - g_{n-1})g_n, & \text{se } a_n(z) = l_n + im_n \\ 2l_n^2 \leq 2(1 - g_{n-1})g_n & \text{se } a_n(z) = l_n z \end{cases}$$

ou seja,

$$\left| \left(\frac{ia_n(iy)}{iy} \right)^2 \right| - \operatorname{Re} \left(\frac{ia_n(iy)}{iy} \right)^2 \leq 2(1 - g_{n-1})g_n.$$

Assim, para $a_n(z) = l_n + im_n$ ou $a_n(z) = l_n z$ e $b_n = 0$, e $z = iy$, a fração contínua é dita ser uma fração contínua definida positiva se existe $\{g_n\}$, $0 \leq g_n < 1$, tal que

$$\left| \left(\frac{ia_n(iy)}{iy} \right)^2 \right| - \operatorname{Re} \left(\frac{ia_n(iy)}{iy} \right)^2 \leq 2(1 - g_{n-1})g_n.$$

Se $\{g_n\}$ é tal que $g_n = \frac{1}{2}$, então a fração contínua também satisfaz à condição do teorema da parábola.

5.3 Círculos de convergência

A $\hat{J}$ -fração (5.1.1) pode ser gerada pelas seguintes t.l.f.

$$t_p(z, w) = z + b_p - \{a_{p+1}(z)\}^2 / w, \quad (5.3.18)$$

$$T_p(z, w) = T_{p-1} \{z, t_p(z, w)\}, \quad (5.3.19)$$

para $p = 1, 2, \dots$, com as condições iniciais

$$t_0(z, w) = 1/w, \quad T_0(z, w) = t_0(z, w). \quad (5.3.20)$$

Assim,

$$T_p(z, w) = \frac{1}{z + b_1 - \frac{\{a_2(z)\}^2}{z + b_2 - \dots - \frac{\{a_p(z)\}^2}{z + b_p - \frac{\{a_{p+1}(z)\}^2}{w}}}. \quad (5.3.21)$$

Logo, segue que a n -ésima convergente $P_n(z)/Q_n(z)$ da fração contínua (5.1.1) é

$$P_n(z)/Q_n(z) = T_n(z, \infty). \quad (5.3.22)$$

Já sabemos, da teoria de frações contínuas, que o numerador $P_n(z)$ e o denominador $Q_n(z)$ satisfazem a relações de recorrência de três termos dadas por

$$P_{n+1}(z) = (z + b_{n+1})P_n(z) - \{a_{n+1}(z)\}^2 P_{n-1}(z), \quad (5.3.23)$$

$$Q_{n+1}(z) = (z + b_{n+1})Q_n(z) - \{a_{n+1}(z)\}^2 Q_{n-1}(z),$$



para $n = 1, 2, \dots$, com $a_1(z) = 1$,

$$P_{-1}(z) = -1, \quad Q_{-1}(z) = 0, \quad P_0(z) = 0 \quad \text{e} \quad Q_0(z) = 1. \quad (5.3.25)$$

A partir de agora, vamos supor que a $\hat{J}$ -fração (5.1.1) satisfaz às condições do Teorema 5.2.2. Com isso, para a t.l.f. $t_n(z, w)$ consideremos a imagem dos valores de w dados por

$$W_{p+1}(z) = \{w : \text{Im}(w) \geq (y + \beta_{p+1})g_{p+1}\}, \quad (5.3.24)$$

para $p = 0, 1, \dots$.

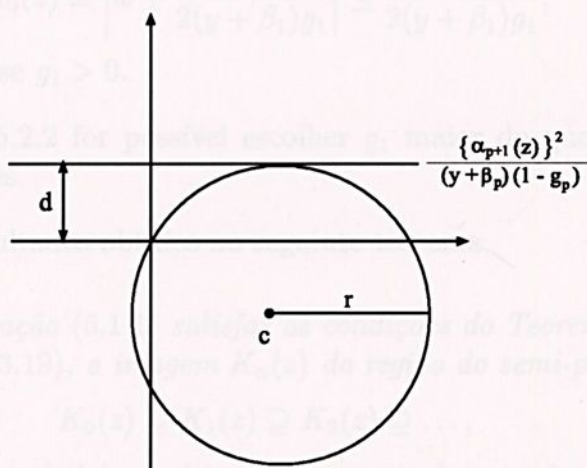
Se z pertence ao semi-plano superior do plano complexo, isto é, $\text{Im}(z) = y > 0$, então os valores de w no interior de $W_{p+1}(z)$ também satisfazem

$$\text{Im}(w) \geq \{\alpha_{p+1}(z)\}^2 / (y + \beta_p)(1 - g_p), \quad p = 1, 2, \dots$$

Podemos observar que todos os valores de w satisfazendo à relação acima, também satisfazem

$$\left| w + \frac{i \{a_{p+1}(z)\}^2}{2(y + \beta_p)(1 - g_p)} \right| \geq \frac{|\{a_{p+1}(z)\}^2|}{2(y + \beta_p)(1 - g_p)},$$

para $p = 1, 2, \dots$. Veja a figura abaixo



onde

$$c = -i \frac{a_{p+1}^2(z)}{2(y + \beta_p)(1 - g_p)}, \quad r = \frac{|a_{p+1}^2(z)|}{2(y + \beta_p)(1 - g_p)}, \quad d = \frac{\alpha_{p+1}^2(z)}{(y + \beta_p)(1 - g_p)}.$$

Esta relação é equivalente a

$$(y + \beta_p) - \operatorname{Im} \left[\frac{\{a_{p+1}(z)\}^2}{w} \right] \geq (y + \beta_p) g_p, \quad (5.3.25)$$

para $p = 1, 2, \dots$. O lado esquerdo da inequação (5.3.25) pode ser identificado como a parte imaginária de $t_p(z, w)$ e, assim, fica estabelecido o seguinte teorema.

Teorema 5.3.1 *Se a $\hat{J}$ -fração (5.1.1) satisfaz às condições do Teorema 5.2.2 então, para todo z acima do eixo real, a correspondente t.l.f. $t_p(z, w)$, $p = 1, 2, \dots$, definida por (5.3.18) satisfaz*

$$t_p(z, w) \in W_p(z), \quad \text{onde } w \in W_{p+1}(z).$$

Usaremos este resultado para estudar a imagem da região do semi-plano $W_{p+1}(z)$ pela t.l.f. $T_p(z, w)$. Primeiro denotaremos esta imagem por $K_p(z)$. Podemos ver, de (5.3.19) e do Teorema 5.3.1 que a região $K_p(z)$, para $p = 1, 2, \dots$, está contida na região $K_{p-1}(z)$. Essas regiões podem ser circulares ou semi-planos. Mas, se $K_r(z)$ é uma região circular para algum $r \geq 1$ ($r \in \mathbb{N}$) então, para todo $s \geq 1$ ($s \in \mathbb{N}$), as regiões $K_{r+s}(z)$ são também circulares.

A região $K_0(z)$ é a imagem de $W_1(z)$ pela t.l.f. $T_0(z)$. Como $T_0(z) = 1/w$, temos

$$K_0(z) \equiv \left| w + \frac{i}{2(y + \beta_1)g_1} \right| \leq \frac{1}{2(y + \beta_1)g_1},$$

que é uma região circular se $g_1 > 0$.

Assim, se no Teorema 5.2.2 for possível escolher g_1 maior do que zero, então todas as regiões $K_p(z)$ são circulares.

Podemos resumir os resultados obtidos no seguinte teorema.

Teorema 5.3.2 *Se a $\hat{J}$ -fração (5.1.1) satisfaz às condições do Teorema 5.2.2 então, para a t.l.f. $T_n(z, w)$ dada em (5.3.19), a imagem $K_n(z)$ da região do semi-plano $W_{n+1}(z)$ satisfaz*

$$K_0(z) \supseteq K_1(z) \supseteq K_2(z) \supseteq \dots,$$

para todo z com parte imaginária positiva. Em particular, se é possível escolher g_1 no Teorema 5.2.2 sendo não nulo, então $K_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$, são regiões circulares.

Por exemplo, para a $\hat{J}$ -fração real regular (5.1.2), g_1 pode ser tomado como qualquer valor em $[0, 1)$ e escolhemos $g_1 = \frac{1}{2}$. Então, $K_0(z)$ é a região circular

$$|w + i/y| \leq 1/y. \quad (5.3.26)$$

O ponto ∞ está na fronteira da região $W_{p+1}(z)$. Assim, a n -ésima convergente $T_n(z, \infty)$ da $\hat{J}$ -fração deve estar na fronteira de $K_n(z)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} |P_n(z)/Q_n(z)| &\leq 1/((y + \beta_1)g_1), \\ \operatorname{Im} \{P_n(z)/Q_n(z)\} &\leq 0, \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

para $n = 1, 2, \dots$.



5.4 Caso limite pontual

Se para algum valor particular de z para o qual $y > 0$, a sequência de regiões circulares $K_n(z)$ converge, podemos dizer que a $\hat{J}$ -fração satisfaz ao caso limite pontual para este z . Contudo, se a sequência converge para um círculo, dizemos que a fração contínua converge para um limite circular. No caso limite pontual, as convergentes da fração também convergem para este ponto. Por outro lado, no caso limite circular, a n -ésima convergente da fração que esta na fronteira de $K_n(z)$ não converge para um único ponto nesta fronteira do limite circular. Para sabermos quais dos dois casos ocorre, limite circular ou limite pontual, exige-se algum conhecimento sobre o raio de $K_n(z)$. Denotamos este raio por $r_n(z)$.

Usando (5.3.21), a t.l.f. $T_n(z, w)$ pode ser dada em termos de $P_n(z)$ e $Q_n(z)$ como segue:

$$T_n(z, w) = \frac{wP_n(z) - \{a_{n+1}(z)\}^2 P_{n-1}(z)}{wQ_n(z) - \{a_{n+1}(z)\}^2 Q_{n-1}(z)}, \quad (5.4.28)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Por conveniência, definimos duas novas sequências de funções $\{X_n(z)\}$ e $\{Y_n(z)\}$ por

$$\begin{aligned} X_{n+1}(z) &= \frac{P_n(z)}{a_2(z)a_3(z)\dots a_{n+1}(z)}, \\ Y_{n+1}(z) &= \frac{Q_n(z)}{a_2(z)a_3(z)\dots a_{n+1}(z)}. \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $X_0(z) = -1$, $Y_0(z) = 0$, $X_1(z) = 0$ e $Y_1(z) = 1$. Então, de (5.4.28) para $n = 1, 2, \dots$, segue que

$$T_n(z, w) = \frac{wX_{n+1}(z) - a_{n+1}(z)X_n(z)}{wY_{n+1}(z) - a_{n+1}(z)Y_n(z)}. \quad (5.4.30)$$

Usando as relações de três termos (5.3.23) para $P_n(z)$ e $Q_n(z)$, verificamos que

$$\begin{aligned} -a_n(z)X_{n-1}(z) + (z + b_n)X_n(z) - a_{n+1}(z)X_{n+1}(z) &= 0 \\ \text{e} \\ -a_n(z)Y_{n-1}(z) + (z + b_n)Y_n(z) - a_{n+1}(z)Y_{n+1}(z) &= 0, \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $a_1(z) = 1$.

Além disso, para $n = 1, 2, \dots$, com essas equações, temos

$$X_{n+1}(z)Y_n(z) - X_n(z)Y_{n+1}(z) = \frac{1}{a_{n+1}(z)} \quad (5.4.32)$$

e

$$X_{n+2}(z)Y_n(z) - X_n(z)Y_{n+2}(z) = \frac{(z + b_{n+1})}{\{a_{n+1}(z)a_{n+2}(z)\}}. \quad (5.4.33)$$

Agora, como $K_n(z)$ é a imagem do semi-plano $W_{n+1}(z)$ pela t.l.f. $T_n(z, w)$, de (5.4.30) temos que o centro de $K_n(z)$ é a imagem do ponto

$$w_0^{(n)}(z) = 2i(y + \beta_{n+1})g_{n+1} + \bar{a}_{n+1}(z)\bar{Y}_n(z)/\bar{Y}_{n+1}(z).$$



Isto segue imediatamente do fato que t.l.f. transforma pontos simétricos em pontos simétricos.

Desde que $T_n(z, \infty)$ está na fronteira de $K_n(z)$, o raio $r_n(z)$ pode ser dado por

$$r_n(z) = |T_n(z, w_0^{(n)}) - T_n(z, \infty)|.$$

Consequentemente, de (5.4.30) e (5.4.32), encontramos que

$$\frac{1}{r_n(z)} = 2 \left| (y + \beta_{n+1}) g_{n+1} |Y_{n+1}(z)|^2 - \operatorname{Im} \{ a_{n+1}(z) Y_n(z) \bar{Y}_{n+1}(z) \} \right|.$$

Usando (5.4.31), a equação acima pode ser dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r_n(z)} = & \left| \sum_{r=1}^{n+1} (y + \beta_r) |Y_r(z)|^2 \right. \\ & - \sum_{r=1}^n \alpha_{r+1} \{ Y_{r+1}(z) \bar{Y}_r(z) + Y_r(z) \bar{Y}_{r+1}(z) \} \\ & \left. - (y + \beta_{n+1})(1 - g_{n+1}) |Y_{n+1}(z)|^2 \right|. \end{aligned}$$

Podemos mostrar, também, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r_n(z)} \geq & \sum_{r=1}^{n+1} \left| (y + \beta_r)^{1/2} (1 - g_r)^{1/2} Y_r(z) \right. \\ & \left. - (y + \beta_{r+1})^{1/2} g_{r+1}^{1/2} Y_{r+1}(z) \right|^2 - g_1 (y + \beta_1) |Y_1(z)|^2. \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Consideremos, agora, a $\hat{J}$ -fração real e positiva definida da forma (5.1.2). Para esta $\hat{J}$ -fração todos os coeficientes g_{2r} são iguais a zero e todos os coeficientes g_{2r+1} são iguais a l_{2r+1}^2 . Assim, o correspondente $r_n(z)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1/y}{2r_{2n}(z)} = & |Y_1(z)|^2 + \sum_{r=1}^n \left\{ |Y_{2r}(z) - l_{2r+1} Y_{2r+1}(z)|^2 \right. \\ & \left. + (1 - l_{2r+1}^2) |Y_{2r+1}(z)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Em vista disso, segue o seguinte teorema.

Teorema 5.4.1 *Para a $\hat{J}$ -fração real e positiva definida da forma (5.1.2) o caso limite pontual é verdadeiro para todo z tal que $\operatorname{Im}(z) > 0$ se, e somente se, uma ou ambas as séries*

$$\sum_{r=1}^{\infty} (1 - l_{2r+1}^2) |Y_{2r+1}(z)|^2 \quad (5.4.35)$$

e

$$\sum_{r=1}^{\infty} |Y_{2r}(z) - l_{2r+1} Y_{2r+1}(z)|^2 \quad (5.4.36)$$

divergem.



Usando (5.4.33), para a $\hat{J}$ -fração real (5.1.2) obtemos que

$$\{X_{2r+1}(z)Y_{2r-1}(z) - X_{2r-1}(z)Y_{2r+1}(z)\} = \frac{z + b_{2r}}{l_{2r}l_{2r+1}z}, \quad (5.4.37)$$

para $r = 1, 2, \dots$. Assim, multiplicando-a por $(1 - l_{2r-1}^2)^{1/2}(1 - l_{2r+1}^2)^{1/2}$, somando para $r = 2, 3, \dots, n$ e aplicando a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{r=2}^n \left| (1 - l_{2r-1}^2)^{1/2}(1 - l_{2r+1}^2)^{1/2} \frac{z + b_{2r}}{l_{2r}l_{2r+1}z} \right| \\ & \leq 2 \left\{ \sum_{r=1}^n (1 - l_{2r+1}^2) |X_{2r+1}(z)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{r=1}^n (1 - l_{2r+1}^2) |Y_{2r+1}(z)|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora, supondo que a soma da esquerda diverge, então o lado direito também diverge. Assim, pelo menos uma dessas séries deve ser divergente. Usando o resultado (5.3.27), com o fato de g_1 ser maior que zero, notamos que a primeira das séries do lado direito diverge. Então, a outra também diverge. Assim, encontramos o seguinte teorema.

Teorema 5.4.2 *Uma condição suficiente para a $\hat{J}$ -fração positiva definida e real da forma (5.1.2) satisfazer o caso limite pontual para algum z onde $\text{Im}(z) > 0$, é que*

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left| (1 - l_{2r-1}^2)^{1/2}(1 - l_{2r+1}^2)^{1/2} \frac{(1 + b_{2r}/z)}{l_{2r+1}l_{2r}} \right| = \infty. \quad (5.4.38)$$

Consideremos, agora, a série (5.4.36). Se aplicarmos a relação de três termos (5.4.31) a ela encontramos a série equivalente

$$|1/z|^2 \sum_{r=1}^{\infty} |l_{2r}Y_{2r-1}(z) - b_{2r}Y_{2r}(z)|^2.$$

Supondo que $b_{2r} = 0$ para $r = 1, 2, \dots$ uma condição suficiente para o caso limite pontual é

$$\sum_{r=1}^{\infty} l_{2r}^2 |Y_{2r-1}(z)|^2 = \infty.$$

Assim, usando a fórmula (5.4.37) e a desigualdade de Schwarz, encontramos o seguinte resultado.

Teorema 5.4.3 *Uma condição suficiente para a $\hat{J}$ -fração positiva definida, real e da forma (5.1.2), com $b_{2r} = 0$, satisfazer o caso limite pontual para todo valor de z cuja $\text{Im}(z) > 0$, é que*

$$\sum_{r=1}^{\infty} |l_{2r+2}/l_{2r+1}| = \infty. \quad (5.4.39)$$



5.5 Limite circular

Restringindo z ao eixo imaginário do semi-plano positivo, isto é, $z = iy$, $y > 0$, podemos definir uma nova sequência de t.l.f., $S_n(y, w)$, por

$$S_n \left[y, -\{a_{n+1}(iy)\}^2 / (yw) \right] = T_n(iy, w), \quad (5.5.40)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Assim, para as regiões $V_n(y)$, $n = 1, 2, \dots$, dadas por

$$V_n(y) \equiv -\{a_{n+1}(iy)\}^2 / \{yW_{n+1}(iy)\}, \quad (5.5.41)$$

onde $W_{n+1}(z)$ são as regiões dadas por (5.3.24), temos

$$K_n(iy) \equiv T_n \{iy, W_{n+1}(iy)\} \equiv S_n \{y, V_n(y)\}. \quad (5.5.42)$$

Para a $\hat{J}$ -fração positiva definida, real e regular (5.1.2), de (5.3.24) e (5.5.41), lembrando que $g_{2n} = 0$, $g_{2n+1} = l_{2n+1}^2 < 1$, para $n = 1, 2, \dots$, segue que

$$V_{2n-1}(y) \equiv V_1^* \equiv \{w : \text{Im}(w) \geq 0\} \quad (5.5.43)$$

e

$$V_{2n}(y) \equiv V_2^* \equiv \left\{ w : \left| w + \frac{1}{2}i \right| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

para $n = 1, 2, \dots$. Essas regiões V_1^* e V_2^* são chamadas regiões duplas e foram estudadas por Jones e Thron em [5], dentre outros. Agora, para os valores de $y > 0$, definimos uma outra sequência de t.l.f. $H_n(w)$ por

$$H_{2n-1}(w) = S_{2n-1}(y, v_1(w)) \quad \text{e} \quad H_{2n}(w) = S_{2n}(y, v_2(w)), \quad (5.5.44)$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde

$$v_1(w) = (w - i)/(iw - 1) \quad \text{e} \quad v_2(w) = \frac{1}{2}(w - i)$$

são t.l.f. que transformam o círculo unitário U em V_1^* e V_2^* , respectivamente.

As relações entre $T_n(iy, w)$ e $H_n(w)$ são dadas por

$$H_{2n-1}(w) = T_{2n-1} \left[iy, -l_{2n}^2 / \{y v_1(w)\} \right] \quad (5.5.45)$$

e

$$H_{2n}(w) = T_{2n} \left[iy, l_{2n+1}^2 y / v_2(w) \right],$$

para $n = 1, 2, \dots$. Além disso, para a $\hat{J}$ -fração (5.1.2), das relações acima e do Teorema 5.3.2, segue que

$$K_n(iy) = H_n(U) \quad \text{e} \quad K_0(iy) \supseteq H_1(U) \supseteq H_2(U) \supseteq \dots,$$

onde $K_0(iy)$ é a região circular dada em (5.3.26). Sabemos que toda sequência de t.l.f. $\{H_n(iy)\}$ satisfazendo à relação acima pode ser escrita como (veja por exemplo, [6])

$$H_n(w) = C_n + R_n \left\{ (w + \bar{F}_n) / (w F_n + 1) \right\}, \quad (5.5.46)$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $|F_n| = f_n < 1$ e $|C_n - C_m| \leq r_m - r_n$ para $m \leq n$. Aqui, C_n é o centro de $H_n(U)$ e $r_n = |R_n|$ é o raio de $H_n(U)$. Para o caso limite circular ocorrer para algum $z = iy$ particular, o raio r_n de $H_n(U)$ deve satisfazer

$$r_n \longrightarrow r > 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Se

$$r_n \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

então dizemos que satisfaz ao caso limite pontual. Quando este último é satisfeito, o limite da sequência $\{H_n(i) = T_n(iy, \infty)\}$ coincide com este ponto. Já a convergência para o caso limite circular não é óbvia.

Para investigarmos as possibilidades do caso limite circular, primeiramente daremos algumas equações que podem ser obtidas de (5.3.18), (5.3.19) e (5.5.45).

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(\gamma_n) &= H_{2n}(\infty), \\ H_{2n}(\infty) &= H_{2n-1}(i), \\ H_{2n+1}(i) &= H_{2n}(\gamma'_n), \\ H_{2n}(\lambda_n) &= H_{2n-1}(-i), \\ H_{2n+1}(-i) &= H_{2n}(i), \\ H_{2n}(i) &= H_{2n-1}(\lambda'_n), \end{aligned} \tag{5.5.47}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$, onde γ_n , γ'_n , λ_n e λ'_n são dados por

$$\begin{aligned} \gamma_n &= -i + \frac{2y}{b_{2n+1}}, \quad \gamma'_n = \frac{(2l_{2n+1}^2 - 1) + ib_{2n+1}/y}{i + b_{2n+1}/y} \\ \lambda_n &= -i - \frac{2b_{2n}}{y}, \quad \lambda'_n = \frac{(y^2 - l_{2n}^2)i + b_{2n}y}{(y^2 + l_{2n}^2) - ib_{2n}y} \end{aligned} \tag{5.5.48}$$

Usando as duas primeiras equações de (5.5.47) juntamente com (5.5.46) temos, para $n = 1, 2, \dots$, que

$$C_{2n+1} + R_{2n+1}\delta'_{2n+1} = C_{2n-1} + R_{2n-1}\delta_{2n-1},$$

onde

$$\delta_{2n-1} = \frac{i + \bar{F}_{2n-1}}{iF_{2n-1} + 1} \quad \text{e} \quad \delta'_{2n+1} = \frac{\gamma_n + \bar{F}_{2n+1}}{\gamma_n F_{2n+1} + 1}. \tag{5.5.49}$$

Reagrupando os termos e tomando o valor absoluto em ambos os lados, para $n = 1, 2, \dots$, teremos que

$$r_{2n+1} |\delta'_{2n+1}| \leq |C_{2n-1} - C_{2n+1}| + r_{2n-1} |\delta_{2n-1}|.$$

Aqui, usando o fato de que $|\delta_{2n-1}| = 1$ e $|C_{2n-1} - C_{2n+1}| \leq r_{2n-1} - r_{2n+1}$, para $n = 1, 2, \dots$, obtemos

$$\frac{r_{2n+1}}{r_{2n-1}} \leq \frac{2}{1 + |\delta'_{2n+1}|}.$$



Podemos reescrever esta inequação da seguinte forma

$$\frac{r_{2n+1}}{r_{2n-1}} \leq 1 - \frac{|\delta'_{2n+1}| - 1}{|\delta'_{2n+1}| + 1}.$$

Então, para o caso limite circular, obtemos (veja [6]) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\delta'_{2n+1}| - 1}{|\delta'_{2n+1}| + 1} < \infty, \quad (5.5.50)$$

onde $|\delta'_{2n+1}|$ é limitado superiormente. Isto traz a condição de que $|\delta'_{2n+1}| \rightarrow 1$.

Assim, podemos concluir os seguintes resultados.

Lema 5.5.1 *Se $|b_{2n+1}|$ são limitados superiormente então, no caso limite circular, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - f_{2n+1}) < \infty.$$

Lema 5.5.2 *No caso limite circular sempre vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - f_{2n}) < \infty.$$

Agora, desde que a t.l.f. $H_n(w)$ pode ser dada por

$$H_n(w) = C_n + R_n \bar{F}_n + R_n(1 - f_n^2)/(F_n + 1/w) \quad (5.5.51)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Então, sob as condições do Lema 5.5.1 e do Lema 5.5.2, segue que se $F_n \not\rightarrow i$ e $\{R_n \bar{F}_n\}$ é uma sequência convergente, então $\{H_n(i)\}$ é também uma sequência convergente. Isto significa que a fração contínua converge para este valor particular de z . Substituindo (5.5.51) nas duas primeiras equações de (5.5.47) temos

$$R_{2n+1} \bar{F}_{2n+1} - R_{2n} \bar{F}_{2n} = C_{2n} - C_{2n+1} - R_{2n+1} \frac{(1 - f_{2n+1}^2)}{F_{2n+1} + 1/\gamma_n} + R_{2n} \frac{(1 - f_{2n}^2)}{F_{2n}},$$

$$R_{2n} \bar{F}_{2n} - R_{2n-1} \bar{F}_{2n-1} = C_{2n-1} - C_{2n} - R_{2n} \frac{(1 - f_{2n}^2)}{F_{2n}} + R_{2n-1} \frac{(1 - f_{2n-1}^2)}{F_{2n-1} - i},$$

para $n = 1, 2, \dots$. Somando as equações acima e usando os resultados do Lema 5.5.1 e do Lema 5.5.2, mostramos que $\{R_n \bar{F}_n\}$ é uma sequência de Cauchy desde que $F_{2n-1} \not\rightarrow i$. Com isso estabelecemos o seguinte resultado.

Lema 5.5.3 *Se $|b_{2n+1}|$ são limitados superiormente então, no caso limite circular, $|F_n| = f_n \rightarrow 1$. Se, além disso, $F_n \not\rightarrow i$, então $\{H_n(i)\}$ é uma sequência convergente.*



Vamos encontrar condições para que $F_n \not\rightarrow i$. Primeiramente, vamos analisamos a segunda, quarta e sexta equações de (5.5.47). Concluimos que

$$\begin{aligned} I_n &= -R_{2n} \left\{ \frac{1 - f_{2n}^2}{F_{2n}} \right\} + R_{2n-1} \left\{ \frac{1 - f_{2n-1}^2}{F_{2n-1} - i} \right\}, \\ I_n &= -R_{2n} \left\{ \frac{1 - f_{2n}^2}{F_{2n} + 1/\lambda_n} \right\} + R_{2n-1} \left\{ \frac{1 - f_{2n-1}^2}{F_{2n-1} + i} \right\}, \\ I_n &= -R_{2n} \left\{ \frac{1 - f_{2n}^2}{F_{2n} - i} \right\} + R_{2n-1} \left\{ \frac{1 - f_{2n-1}^2}{F_{2n-1} + 1/\lambda'_n} \right\}, \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \dots$, onde $I_n = R_{2n}\bar{F}_{2n} - R_{2n-1}\bar{F}_{2n-1} + C_{2n} - C_{2n-1}$. Notemos que $|I_n|$, $n = 1, 2, \dots$, são limitados superiormente. Além disso, desde que $|F_n| < f_n < 1$, todas as relações acima estão bem definidas. Assim, substituindo uma equação na outra e tomando o quociente, temos que

$$\frac{(1/\lambda_n) \{F_{2n} - i\}}{(i + 1/\lambda_n) F_{2n}} = \frac{2i \{F_{2n-1} + 1/\lambda'_n\}}{(i - 1/\lambda'_n) \{F_{2n-1} - i\}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5.52)$$

Analogamente, usando a primeira, terceira e quinta equações de (5.5.47), obtemos

$$\frac{(i - 1/\gamma_n) \{F_{2n+1} - i\}}{2i \{F_{2n+1} + 1/\gamma_n\}} = \frac{i \{F_{2n} + 1/\gamma'_n\}}{(i + 1/\gamma'_n) F_{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5.53)$$

De (5.5.48), temos que $|1/\lambda'_n| > 1$ e ainda, $|1/\lambda'_n| \rightarrow 1$ se, e somente se, um dos dois casos

1.

$$1/l_{2n}^2 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad b_{2n}/l_{2n}^2 \rightarrow 0,$$

2.

$$1/l_{2n}^2 \rightarrow \infty \quad \text{e/ou} \quad b_{2n}/l_{2n}^2 \rightarrow \infty,$$

for satisfeito. Nesses casos, $1/\lambda'_n \rightarrow +i$ e $-i$ respectivamente. Além disso, notemos que $|1/\lambda_n| \leq 1$ e a igualdade é válida se, e somente se, $b_{2n} = 0$. Quando isso ocorre, $1/\lambda_n = i$. Com isso, para $M, \epsilon > 0$ se tomarmos $|b_{2n}| \leq M$ e $l_{2n}^2 \geq \epsilon$, $n = 1, 2, \dots$, teremos $1/\lambda'_n \not\rightarrow i$. Consequentemente, de (5.5.52) segue que $F_{2n-1} \not\rightarrow i$.

Aqui, os valores de l_{2n}^2 podem ser limitados ou ilimitados. Se forem limitados superiormente, então $|1/\lambda'_n| \geq 1 + \epsilon_1$, para algum $\epsilon_1 > 0$ e, assim, de (5.5.52) encontramos que $F_{2n} \not\rightarrow i$. Contudo, se l_{2n}^2 é ilimitado, isto é, $l_{2n}^2 \rightarrow \infty$, então $1/\lambda'_n \rightarrow +i$. Mas, observamos que se

$$q_n = \frac{F_{2n-1} + 1/\lambda'_n}{i - 1/\lambda'_n} \not\rightarrow 0 \quad \text{e} \quad l_{2n}^2 \rightarrow \infty$$



então $F_{2n} \not\rightarrow i$. Como F_{2n-1} e $1/\lambda'_n$ estão dentro e fora do círculo unitário, respectivamente, uma condição suficiente para que $q_n \not\rightarrow 0$ é que a distância de $1/\lambda'_n$ ao círculo unitário, que denotaremos por k_n , satisfaça

$$k_n/|i - 1/\lambda'_n| \not\rightarrow 0, \quad l_{2n}^2 \rightarrow \infty.$$

De (5.5.48) encontramos que

$$k_n(2 + k_n) = |1/\lambda'_n|^2 - 1 = \frac{4l_{2n}^2 y^2}{(y^2 - l_{2n}^2)^2 + b_{2n}^2 y^2}$$

e

$$|i - 1/\lambda'_n| = 2y \left\{ \frac{(y^2 + b_{2n}^2)}{(y^2 - l_{2n}^2)^2 + b_{2n}^2 y^2} \right\}^{1/2}.$$

Assim,

$$\frac{k_n}{|i - 1/\lambda'_n|} = \frac{2l_{2n}^2 y / (2 + k_n)}{\{(y^2 - l_{2n}^2)^2 + b_{2n}^2 y^2\}^{1/2} (y^2 + b_{2n}^2)^{1/2}},$$

cujo limite é igual a zero quando $l_{2n}^2 \rightarrow \infty$, desde que $|b_{2n}|$ são limitados superiormente. Esses resultados nos levam à seguinte conclusão

Lema 5.5.4 *Se a $\hat{J}$ -fração da forma (5.1.2) satisfaz ao caso limite circular para algum z tal que $z = iy$, $y > 0$, então, para a correspondente t.l.f. $H_n(w)$ definida em (5.5.45), temos que $F_n \not\rightarrow i$, desde que existam $\epsilon, M > 0$, tais que $|b_n| \leq M$ e $l_{2n}^2 \geq \epsilon$, para $n = 1, 2, \dots$, mesmo quando $|F_n| \rightarrow 1$.*

5.6 Convergência uniforme da $\hat{J}$ -fração

Vemos, do Lema 5.5.3, que, sob as condições do Lema 5.5.4, a $\hat{J}$ -fração (5.1.2) converge para algum valor de z tal que $z = iy$, $y > 0$. Além disso, como $T_n(z, \infty) \in K_0(z)$, é evidente que as convergentes desta fração são uniformemente limitadas em todo domínio fechado finito contido no semi-plano $Im(z) > 0$. Se $|b_n| \leq M < \infty$ e $l_{2n}^2 \geq \epsilon > 0$ para $n = 1, 2, \dots$, aplicando o Teorema de Stieltjes-Vitali, a $\hat{J}$ -fração (5.1.2) converge uniformemente, em toda região fechada e limitada, para uma função analítica nesta região.

Se considerarmos a sequência $\{F_n(z)\}$, que são as convergentes da $\hat{J}$ -fração (5.1.2), então, desde que todos os zeros dos denominadores $Q_n(z)$ de $F_n(z)$ estão fora da região

$$S \equiv \{z : Im(z) > 0\},$$

segue que $F_n(z)$ é analítica em S . Desde que g_1 pode ser escolhido como não nulo, temos de (5.3.27) que $F_n(z)$ é uniformemente limitada em todo domínio fechado finito de S . Além disso, se $\{F_n(z)\}$ converge para um conjunto infinito de pontos com pelo menos um ponto em S , temos a convergência uniforme de toda fração contínua em todo domínio fechado finito contido em S . Escolhemos um conjunto infinito de pontos em $\{z : z = iy, 0 < \epsilon < y < M\}$. Então, esses pontos estão em S e, sob as condições dos Teoremas 5.4.2 e 5.4.3, para esses valores de z $\{F_n(z)\}$ também converge. Assim, do Corolário 5.2.2.2, obtemos

Teorema 5.6.1 *Seja a $\hat{J}$ -fração (5.1.2) satisfazendo à condição*

$$l_{2n+1}^2 < 1, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Então, esta fração contínua converge uniformemente, em toda região limitada do plano $Im(z) > 0$, para uma função analítica neste plano, se pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita.

1.

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left| (1 - l_{2r-1}^2)^{1/2} (1 - l_{2r+1}^2)^{1/2} / (l_{2r} l_{2r+1}) \right| = \infty,$$

2.

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left| (1 - l_{2r-1}^2)^{1/2} (1 - l_{2r+1}^2)^{1/2} b_{2r} / (l_{2r} l_{2r+1}) \right| = \infty,$$

3.

$$b_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad \sum_{r=2}^{\infty} |l_{2r} / l_{2r-1}| = \infty,$$

4.

$$|b_n| \leq M, \quad e \quad l_{2n}^2 \geq \epsilon, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como as condições de convergência do teorema acima não dependem do sinal de b_n , este teorema também é válido em regiões do semi-plano $Im(z) < 0$.

5.7 Considerações finais

Nas seções 5.5 e 5.6 apresentamos alguns resultados com o objetivo de obtermos informações sobre a convergência da $\hat{J}$ -fração quando ocorre o caso limite circular. Não temos conhecimento de outro trabalho que apresente as idéias por nós utilizadas nestas seções.

Preocupamo-nos em organizar os dados históricos sobre convergência de frações contínuas de uma maneira cronológica e didática. Desta forma esperamos que este trabalho possa ser utilizado como referência aos interessados em estudar o assunto.

Teorema 5.6.1 *Seja a $\hat{J}$ -fração (5.1.2) satisfazendo à condição*

$$l_{2n+1}^2 < 1, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Então, esta fração contínua converge uniformemente, em toda região limitada do plano $Im(z) > 0$, para uma função analítica neste plano, se pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita.

1.

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left| (1 - l_{2r-1}^2)^{1/2} (1 - l_{2r+1}^2)^{1/2} / (l_{2r} l_{2r+1}) \right| = \infty,$$

2.

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left| (1 - l_{2r-1}^2)^{1/2} (1 - l_{2r+1}^2)^{1/2} b_{2r} / (l_{2r} l_{2r+1}) \right| = \infty,$$

3.

$$b_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad \sum_{r=2}^{\infty} |l_{2r} / l_{2r-1}| = \infty,$$

4.

$$|b_n| \leq M, \quad e \quad l_{2n}^2 \geq \epsilon, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como as condições de convergência do teorema acima não dependem do sinal de b_n , este teorema também é válido em regiões do semi-plano $Im(z) < 0$.

5.7 Considerações finais

Nas seções 5.5 e 5.6 apresentamos alguns resultados com o objetivo de obtermos informações sobre a convergência da $\hat{J}$ -fração quando ocorre o caso limite circular. Não temos conhecimento de outro trabalho que apresente as idéias por nós utilizadas nestas seções.

Preocupamo-nos em organizar os dados históricos sobre convergência de frações contínuas de uma maneira cronológica e didática. Desta forma esperamos que este trabalho possa ser utilizado como referência aos interessados em estudar o assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] BRESSAN, R., *Propriedades e aplicações dos polinômios ortogonais de Szegő*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, S.J. Rio Preto, (1999).
- [2] HENRICI, P., *Applied and computational complex analysis*, John Willey, vol. 1, (1974).
- [3] JACOBSEN, L., General convergence of continued fractions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **294**, (1986), 477-485.
- [4] JACOBSEN, L., THRON, W.J., WAADELAND, H., Julius Worpitzky, his contributions to the analytic theory of continued fractions and his times, *Lecture Notes in Mathematics: Analytic Theory of Continued Fractions III*, Springer-Verlag, Berlin, **1406**, (1988), 25-47.
- [5] JONES, W.B., THRON, W.J., Twin-convergence regions for continued fractions $b_0 + K_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{1})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150**, (1970), 93-119.
- [6] JONES, W.B., THRON, W.J., *Continued fractions: analytic theory and applications*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 11, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1980.
- [7] LANGE, L.J., A uniform twin parabola convergence theorem for continued fractions, *J. Math. Anal. and Appl.*, **188**, (1994), 985-998.
- [8] LEIGHTON, N., WALL, H. S., On the transformation and convergence of continued fractions, *Amer. J. Math.*, **58**, (1936), 267-281.
- [9] LEIGHTON, W., THRON, W.J., Continued fractions with complex elements, *Duke Math. J.*, **9**, (1942), 763-772.
- [10] LIMA, E.L., *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 1992.
- [11] LORENTZEN, L., WAADELAND, H., *Continued fractions with applications*, Studies in Computational Mathematics, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1992.



- ✓
- [12] PAYDON, J.F., WALL, H.S., The continued fractions as a sequence of linear transformation, *Duke Math. J.*, (1942), 360-372.
 - [13] SCOTT, W.T., WALL, H.S., A convergence theorem for continued fractions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47**, (1940), 155-172.
 - [14] SEIDEL, L., Untersuchungen über die konvergenz and divergenz der kettenbrüche, *Habilschrift Munchen*, 1846.
 - [15] SRI RANGA, A., $\hat{J}$ -fractions and the strong moments problems, *Lecture Notes Math.*, **1199**, (1986), 269-284.
 - [16] SRI RANGA, A., On a recurrence formula associated with strong distributions, *Siam. J. Math. Anal.*, **21**, (1990), 1335-1348.
 - [17] STERN, M.A., Über die kennzeichen der konvergenz eines kettenbruchs, *J. Reine Angew. Math.*, **37** (1848).
 - [18] STERN, M.A., Lehrbuch der algebraischen analysis, *Leipzig* (1860).
 - [19] STOLZ, O., Vorlesungen über allgemeine arithmetik, *Leipzig* (1886).
 - [20] THRON, W.J., Two families convergence regions for continued fractions, *Duke Math. J.*, **10**, (1943), 677-685.
 - [21] THRON, W.J., On parabolic convergence regions for continued fractions, *Math. Zeitschr.*, **69**, (1958), 173-182.
 - [22] THRON, W.J., Convergence of sequences of linear fractional transformations and of continued fractions, *J. Indian. Math. Soc.*, **27**, (1963), 103-127.
 - [23] THRON, W.J., Continued fraction identities derived from the invariance of the crossratio under linear fractional transformations, *Lecture Notes in Mathematics, Analytic theory of continued fractions III*, Springer-Verlag, Berlin, **1406**, (1989), 124-134.
 - [24] WALL, H.S., WETZEL, M., Quadratic forms and convergence regions for continued fractions, *Duke Math. J.*, **11**, (1944), 89-102.
 - [25] WALL, H.S., WETZEL, M., Contributions to the analytic theory of J-fractions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**, (1944), 373-379.
 - [26] WALL, H.S., *Analytic theory of continued fractions*, Van Nostrand, New York, 1948.



