



São Paulo State University - UNESP
School of Engineering, Ilha Solteira - FEIS

Otimização do projeto de suspensão de um veículo fórmula SAE utilizando simulação dinâmica em Python

Aluno: Bruno Emanuel Fortunato
Professor: Dr. Marcio Antonio Bazani

Ilha Solteira, SP
2025

Bruno Emanuel Fortunato

**Otimização do projeto de suspensão de um veículo fórmula SAE utilizando
simulação dinâmica em Python**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Mecânico

Marcio Antonio Bazani
Orientador

Ilha Solteira, SP
2025

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvida pela Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

F745o Fortunato, Bruno Emanuel.
Otimização do projeto de suspensão de um veículo de fórmula SAE utilizando simulação dinâmica em Python / Bruno Emanuel Fortunato. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2025
42 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2025


Orientador: Marcio Antonio Bazani
Inclui bibliografia

1. Suspensão veicular. 2. Fórmula SAE. 3. Dinâmica veicular. 4. Simulação. 5. Otimização. 6. Python.

ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos 15 dias do mês de Dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco, as 18h30min, por videoconferência, no Departamento de Engenharia Mecânica, do Campus da UNESP, da Faculdade de Ilha Solteira, o discente **Bruno Emanuel Fortunato**, matriculada sob o número 182054187, tendo como banca examinadora, o orientador Prof. Ph.D. Marcio Antonio Bazani, o Mestrando Engenheiro Mecânico Mario Finato Cestari (University of New Mexico) e o Mestrando Engenheiro Mecânico João Augusto da Costa Terilli (UNESP), apresentou o Trabalho de Graduação intitulado: “Otimização do projeto de suspensão de um veículo de fórmula SAE utilizando simulação dinâmica em python”, obtendo o CONCEITO APROVADO e NOTA FINAL: 10.

Por ser verdade, os membros da banca examinadora e o discente assinam em seguida.

Documento assinado digitalmente
 **MARCIO ANTONIO BAZANI**
Data: 15/12/2025 22:40:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Ph.D. Marcio Antonio Bazani (Orientador)

Mario Finato Cestari

Eng. Mec. Mario Finato Cestario (University of New Mexico)

João Augusto

Eng. Mec. João Augusto da Costa Terilli (UNESP)

Documento assinado digitalmente
 **BRUNO EMANUEL FORTUNATO**
Data: 15/12/2025 19:34:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Bruno Emanuel Fortunato (Discente)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar eu gostaria de dedicar esse trabalho à meus amados pais, que dentre tantas dificuldades que tivemos, em momento algum deixaram faltar nada em casa, meu amor e minha admiração pela minha mãe Ana e meu pai Hélio transcendem os limites das palavras. Muito obrigado por tudo, sem vocês nada disso teria acontecido.

Gostaria de agradecer aos meus irmãos, Emanuele e Hélio Augusto, o apoio de vocês foi de extrema importância para que eu pudesse continuar. Tenho sorte de ter vocês ao meu lado.

À toda minha família, sei que vocês fizeram de tudo para que eu chegasse onde eu cheguei, em especial ao meu cunhado Rafael, à minha tia Marcia, meu tio José Carlos e meus primos: Lucas, Janaina, Carlos e Aline. Vocês tem uma parcela muito grande em tudo isso.

À minha segunda mãe, Tânia, que tem uma importância muito grande desde o começo, seu carinho e amor me mantiveram firme durante todo esse tempo.

À toda família da Dona Jacinta, que fizeram de tudo por mim e pela minha família. Um agradecimento especial à Paulinha, que rezo para que la do céu olhe com orgulho o final da jornada que viu nascer.

Aos meus amigos, da infância e da graduação, que terão que me desculpar mas é impossível citar nomes. Desde sempre fui abençoado com as melhores amizades que o mundo pode proporcionar e isso me rendeu um número alto de amigos. Agradeço do fundo do meu coração tudo o que fizeram por mim, espero continuar levando vocês por toda minha vida e que saibam o valor que todos vocês tem para mim. A vida e principalmente a graduação, não teriam tido o brilho que tiveram sem vocês ao meu lado.

Por fim, agradeço a minha amada Equipe Fênix Racing, que dentre todas as minhas escolhas, essa com certeza foi uma das melhores. Obrigado por tudo, vocês me mostraram valores que não há em outros lugares.

“No mundo o falso e o verdadeiro se confundem, mas os que sabem jamais se iludem. Não é fácil encontrar o caminho, mas é bom olhar pro lado e ver que eu não estou sozinho.”

— CHORÃO

RESUMO

O projeto e otimização do sistema de suspensão são elementos críticos para a performance de veículos de competição, como o protótipo Fórmula SAE. O presente trabalho aborda a otimização do projeto de suspensão de um veículo Fórmula SAE por meio da criação e aplicação de um algoritmo de simulação dinâmica desenvolvido em linguagem *Python*. Inicialmente, estabelece o referencial teórico, cobrindo conceitos essenciais de Dinâmica Veicular, como o Centro Instantâneo (*Instant Center - IC*), o Centro de Rolagem (*Roll Center - RC*), Transferência de Carga e o Gradiente de Rolagem, todos cruciais para a cinemática e o setup da suspensão Duplo A (*Double Wishbone*).

A metodologia empregou a modelagem do veículo como um sistema de Quatro Graus de Liberdade (4-DOF), representando os movimentos acoplados da massa suspensa (vertical e rolagem) e das massas não suspensas (vertical esquerda e direita). As Equações de Movimento foram derivadas a partir dos Diagramas de Corpo Livre (DCL) e reescritas no formalismo de Equações de Estado para viabilizar a resolução numérica por meio do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Os resultados demonstram que o algoritmo desenvolvido permite a análise quantitativa e qualitativa dos parâmetros em tempo significativamente reduzido. A simulação da geometria (IC, RC, Ganho de Câmbio) demonstrou uma economia de tempo de mais de 150 minutos em comparação aos métodos manuais ou assistidos por software CAD. Adicionalmente, a análise qualitativa das Equações de Movimento (4-DOF) confirmou a validade física do modelo, apresentando respostas esperadas a variações extremas de massa, rigidez e amortecimento. Conclui-se que o algoritmo estabelece um ponto de partida robusto para a otimização, acelerando o ciclo de projeto e a tomada de decisão da equipe.

Palavras-chave: Suspensão Veicular; Fórmula SAE; Dinâmica Veicular; Simulação; Otimização; *Python*

ABSTRACT

The design and optimization of the suspension system are critical elements for the performance of competition vehicles, such as the Formula SAE prototype. This paper addresses the optimization of a Formula SAE vehicle suspension design through the creation and application of a dynamic simulation algorithm developed in the Python language. Initially, the study establishes a robust theoretical framework, covering essential concepts of Vehicle Dynamics, such as the Instant Center (IC), the Roll Center (RC), Load Transfer, and the Roll Gradient, which are all crucial for the kinematics and setup of the Double Wishbone suspension.

The methodology employed modeled the vehicle as a Four Degrees of Freedom (4-DOF) system, representing the coupled movements of the sprung mass (vertical and roll) and the unsprung masses (vertical left and right). The Equations of Motion were derived from Free Body Diagrams (FBDs) and reformulated into the State-Space formalism to enable numerical resolution using the fourth-order Runge-Kutta method.

The results demonstrate that the developed algorithm allows for the quantitative and qualitative analysis of parameters in significantly reduced time. The simulation of the geometry (IC, RC, Camber Gain) showed a time saving of over 150 minutes compared to manual or CAD-assisted methods. Additionally, the qualitative analysis of the 4-DOF Equations of Motion confirmed the physical validity of the model, exhibiting expected responses to extreme variations in mass, stiffness, and damping. It is concluded that the algorithm establishes a robust starting point for optimization, accelerating the design cycle and the team's decision-making process.

Keywords: Vehicle Suspension; Formula SAE; Vehicle Dynamics; Simulation; Optimization; Python.

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Formula SAE	14
1.1.1	Relatórios	14
1.1.2	Provas Estáticas	15
1.1.3	Provas Dinâmicas	15
1.1.4	Critério de Vencedor e Flexibilidade	15
1.2	Dinâmica Veicular	15
1.2.1	Comportamento dos Pneus	15
1.2.2	Geometria e Elementos da Suspensão	16
1.2.3	Elementos Elásticos e de Amortecimento	16
1.2.4	Estabilidade e Controle do Veículo	16
1.3	Suspensão de um Formula SAE	16
1.3.1	Geometria Cinética da Suspensão	16
1.3.2	Dinâmica de Vibração e Controle	17
1.3.3	Ajuste de Rigidez e Equilíbrio de Carga	17
1.4	Variação dos parametros e métodos computacionais	17
1.4.1	A linguagem <i>Python</i>	17
2	Fundamentação Teórica	18
2.1	<i>Instant Center IC</i>	18
2.2	<i>Camber</i>	18
2.3	<i>Front View Swing Arm</i>	19
2.4	<i>Roll Center RC</i>	20
2.5	Ganho de camber	21
2.6	Transferência de Carga	21
2.7	Gradiente de Rolagem	22
2.8	Modelos Matemáticos	23
2.9	Diagrama de Corpo Livre (DCL)	23
2.10	Equações de Movimento - Sistema Massa, Mola e Amortecor	24
2.11	Equações de Estado	24
3	Metodologia	26
3.1	Definição do Modelo Matemático	26
3.2	Diagrama de Corpo Livre - 4DOF	27
3.3	Equações de Movimento - 4DOF	30
4	Resultados	34
4.1	O Algoritmo	34
4.2	Análise Quantitativa - Parâmetros de Geometria	34
4.3	Análise Qualitativa - Equações de Movimento	36
5	Conclusão	39
5.1	Pontos principais	39
5.2	Trabalhos Futuros	39
6	Referências	40

Lista de Figuras

1	Equipe Fenix Racing - Competição FSAE 2022.	14
2	Suspensão Duplo-A	17
3	Definição do <i>Instant Center</i>	18
4	Ilustração do conceito de <i>Camber</i>	19
5	Ilustração do conceito de <i>FVSA</i>	20
6	Definição do <i>Roll Center</i>	21
7	Modelo 1DOF	23
8	Modelo de Diagrama de Corpo Livre	24
9	Modelo de 4 graus de liberdade - Simplificação do veículo.	26
10	Diagrama de corpo livre - Massa Suspensa.	27
11	Diagrama de corpo livre - Massa Não Suspensa Esquerda.	28
12	Diagrama de corpo livre - Massa Não Suspensa Direita.	29
13	Diagrama de corpo livre -Rotação do chassi.	30
14	Tela de interação do algoritmo.	34
15	Simulação dos parâmetros de geometria.	35
16	Calculo IC e RC através de CAD	36
17	Figura (a) - Linhas com valores.	36
18	Figura (b) - Linhas traçadas.	36
19	Simulação $m_s = 220$ kg.	37
20	Simulação $m_s = 2000$ kg.	37
21	Simulação $c = 0$	38
22	Simulação $K = 80000$ N/m.	38

Lista de Tabelas

1	Valores Iniciais dos Parâmetros Geométricos.	35
2	Comparação do tempo de calculo dos valores	36
3	Valores dos Parâmetros de Simulação (Modelo 4- GDL).	37

1 Introdução

1.1 Formula SAE

A competição se desdobra em um período intenso de três dias, dedicados à rigorosa avaliação dos protótipos construídos pelas equipes de estudantes. O objetivo central é analisar o desempenho de cada projeto, abrangendo tanto a excelência do design e da engenharia quanto a performance efetiva na pista. A Figura 1 mostra a equipe na competição de 2022.

Figura 1: Equipe Fenix Racing - Competição FSAE 2022.



Fonte: Acervo Equipe Fenix Racing.

1.1.1 Relatórios

Meses antes do evento principal, as equipes iniciam o processo de avaliação enviando um conjunto de relatórios técnicos detalhados ao comitê organizador. Essa submissão inclui:

- Relatório de Custos e Fabricação: Uma análise minuciosa dos gastos de produção e do processo de manufatura do protótipo.
- Relatório de Projeto e Estrutura: Documentação completa sobre o *design* do veículo, a arquitetura dos sistemas e a escolha de materiais.
- Relatório do Atenuador de Impacto: Detalhamento do dispositivo de segurança frontal, crucial para a proteção do piloto.

Esses relatórios são avaliados por um corpo de engenheiros e especialistas da indústria, e a pontuação obtida nessa fase constitui a primeira e fundamental parte da avaliação dos protótipos, garantindo a conformidade técnica e a qualidade do projeto conceitual. A segunda parte da competição é constituída por duas partes: provas estáticas e provas dinâmicas.

1.1.2 Provas Estáticas

Nesta etapa, o foco está na validação do projeto e da viabilidade comercial do veículo, com as equipes demonstrando a equivalência entre o projeto teórico enviado previamente e o carro físico apresentado no evento. As equipes apresentam:

- Apresentação de *Design (Design Event)*: A defesa técnica do projeto perante os juízes, mostrando a eficiência, a inovação e as decisões de engenharia.
- Análise de Custo e Manufatura (*Cost and Manufacturing Analysis Event*): A demonstração da otimização de custos e da escolha inteligente de processos de fabricação.
- Apresentação de Marketing (*Presentation Event*): Uma defesa da proposta de negócio, apresentando o protótipo como um produto viável no mercado.

1.1.3 Provas Dinâmicas

Realizadas tipicamente no segundo dia do evento, estas provas avaliam o desempenho prático e a durabilidade do veículo na pista. Os testes incluem:

- Aceleração (*Acceleration Event*): Avaliação da capacidade de arrancar e atingir velocidade em um percurso curto de 75 metros.
- *Skidpad (Skidpad Event)*: Teste de aceleração lateral em curvas, para medir a aderência e a estabilidade.
- *Autocross (Autocross Event)*: Um percurso misto que testa a dirigibilidade e a dinâmica geral do veículo.
- *Endurance (Endurance Event)*: A prova de resistência mais importante, onde o carro é levado ao limite em um trajeto longo para testar a confiabilidade e a durabilidade.
- Eficiência Energética/Consumo (*Fuel Economy Event*): Medição do consumo de combustível ou energia durante o teste de Endurance.

1.1.4 Critério de Vencedor e Flexibilidade

Todas as provas, estáticas e dinâmicas, são pontuadas de maneiras distintas e possuem pesos variados na classificação final. Este sistema garante que a equipe vencedora seja aquela que apresentar o melhor conjunto de projeto, gestão, viabilidade econômica e desempenho de pista, e não apenas o carro mais rápido.

1.2 Dinâmica Veicular

A Dinâmica Veicular é um campo especializado da engenharia mecânica e automotiva, focado na aplicação rigorosa dos princípios da Mecânica e da Física para a análise, o projeto e a otimização de veículos de competição. Conforme estabelecido por Milliken(1) sua obra *Race Car Vehicle Dynamics*, o escopo da disciplina transcende a mera descrição de componentes, dedicando-se à compreensão de como sistemas complexos interagem para maximizar a performance sob as condições extremas impostas pelo ambiente de corrida.

O ponto de partida da dinâmica veicular reside na natureza extrema das competições. Um veículo de corrida opera consistentemente no limite do seu desempenho. Os engenheiros devem dominar as respostas do veículo a altíssimos níveis de aceleração, frenagem e forças laterais. O estudo se organiza em torno de subsistemas fundamentais cuja integração define o comportamento dinâmico global do automóvel.

1.2.1 Comportamento dos Pneus

O pneu é universalmente reconhecido como o subsistema de maior importância na dinâmica veicular. Sendo o único elemento de interface entre o veículo e a superfície da pista, ele é responsável por gerar todas as forças de aceleração, frenagem e direção. O desempenho do pneu é altamente não linear e dependente de fatores operacionais como a carga vertical (normal), a pressão interna, a temperatura e as características da superfície da pista. A otimização destes parâmetros é central para a estratégia de setup.

1.2.2 Geometria e Elementos da Suspensão

A suspensão gerencia a interação do pneu com a superfície da pista e controla o movimento da carroceria. Com isso, a análise da geometria de suspensão se faz necessária para ajuste de parâmetros a fim de controlar:

- Centro de Rolagem (*Roll Center*): O ponto instantâneo em torno do qual a carroceria tende a girar. Sua altura e localização lateral afetam significativamente a distribuição das cargas laterais entre os pneus.
- Variações de Câmara (*Camber Change*): O controle preciso da inclinação da roda é vital para manter a área de contato ideal do pneu com o solo durante o rolamento da carroceria e os movimentos verticais.

1.2.3 Elementos Elásticos e de Amortecimento

- Molas (*Springs*): Definem a taxa de rolagem (*roll rate*) e a taxa de arfagem (*pitch rate*) do veículo, determinando a rigidez vertical e a distribuição de carga estática.
- Amortecedores (*Dampers*): Cruciais para o regime transitório, controlam a velocidade dos movimentos da suspensão (compressão/extensão) e dissipam energia, influenciando o controle da carroceria e a aderência em irregularidades da pista.

1.2.4 Estabilidade e Controle do Veículo

A estabilidade e controle do veículo é de suma importância para a dinâmica veicular, uma vez que, o comportamento do carro e conseqüentemente a dirigibilidade para o piloto estão atreladas a esses parâmetros o que implica no cálculo da transferência de carga a qual podemos dividir em:

- Regime Permanente (*Steady-State*): Este regime estuda o veículo em condições estabilizadas, como curvas de raio constante e aceleração lateral constante.
- Este regime estuda a resposta do veículo a mudanças súbitas, como a entrada em uma curva, correções rápidas ou manobras evasivas.

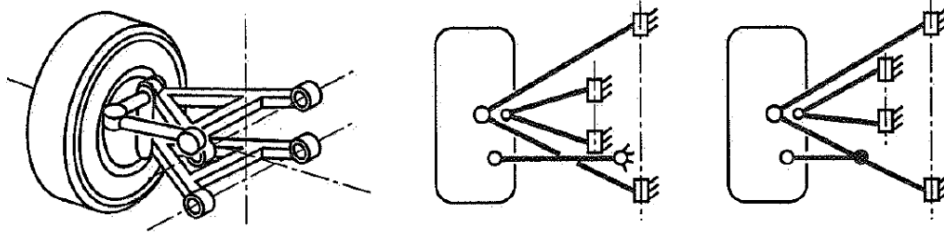
1.3 Suspensão de um Formula SAE

O sistema de suspensão de um protótipo Formula SAE transcende sua função de isolamento de vibrações, sendo um componente crítico para a performance do veículo. Seu projeto e ajuste são determinados pela Dinâmica Veicular, com o objetivo principal de maximizar o grip do pneu e controlar a plataforma do chassi sob cargas dinâmicas (1). A análise da suspensão é dividida em três pilares fundamentais: cinemática (geometria), dinâmica de vibração e equilíbrio de carga.

1.3.1 Geometria Cinética da Suspensão

A geometria da suspensão é o estudo cinemático dos pontos de fixação, que define o movimento da roda em relação ao chassi. A configuração mais comum em veículos de competição é a Duplo-A (*Double Wishbone*), que oferece controle superior sobre os ângulos da roda. O principal objetivo cinemático da suspensão é restringir os seis graus de liberdade da roda, permitindo primariamente apenas o movimento vertical (*bump* e *rebound*). A Figura 2 ilustra a configuração de bandejas Duplo -A.

Figura 2: Suspensão Duplo-A



Fonte:(1)

1.3.2 Dinâmica de Vibração e Controle

A dinâmica de vibração estuda como as forças da pista são transmitidas e controladas pelos elementos elásticos e de amortecimento da suspensão. Com isso, podemos citar:

- Controle da Plataforma Aerodinâmica: Em veículos com significativa *downforce*, as molas e amortecedores controlam a atitude do carro em relação ao solo, pois variações na altura de rodagem têm grandes implicações aerodinâmicas.
- Resposta Transitória (*Pitch* e *Roll*): Os amortecedores (dampers) são responsáveis por controlar a taxa de movimento do chassi. Eles reduzem a duração e a magnitude dos movimentos de *Pitch* (arfagem) e *Roll* (rolagem), essenciais para a estabilidade na entrada de curvas e sob frenagem/aceleração
- Modelagem Matemática: A base para a seleção de molas e amortecedores é a modelagem do sistema massa-mola-amortecedor descrevendo a derivação das equações diferenciais para os movimentos acoplados de *Bounce* (movimento vertical) e *Pitch*. O objetivo é sintonizar a frequência natural da suspensão para evitar ressonância com as frequências típicas da pista.

1.3.3 Ajuste de Rigidez e Equilíbrio de Carga

O ajuste da rigidez da suspensão é o principal mecanismo de setup para controlar o equilíbrio dinâmico do veículo devido a sua rápida, prática e fácil manuseio dos componentes de rigidez como molas e barras anti-rolagem.

1.4 Variação dos parâmetros e métodos computacionais

Para um projetista de suspensão alcançar a excelência, é absolutamente crucial possuir um conhecimento aprofundado do sistema como um todo. Essa base de conhecimento deve ser complementada por uma expertise técnica sofisticada, que permita ao profissional adequar de forma otimizada os parâmetros do veículo como *camber*, *caster*, centro de rolagem e anti-efeitos. Ademais, é de suma importância a capacidade analítica para simular e avaliar variações de comportamento e desempenho em todo o envelope operacional do veículo, abrangendo desde as condições de rodagem cotidianas até os limites de sua faixa ampla de trabalho.

1.4.1 A linguagem *Python*

Python é uma linguagem de programação de alto nível (próxima da linguagem humana), interpretada, ou seja, não precisa ser compilada antes de rodar e de propósito geral (2). Sua principal filosofia é a legibilidade do código. Ela possui uma sintaxe limpa e simples que se assemelha muito à linguagem inglesa.

2 Fundamentação Teórica

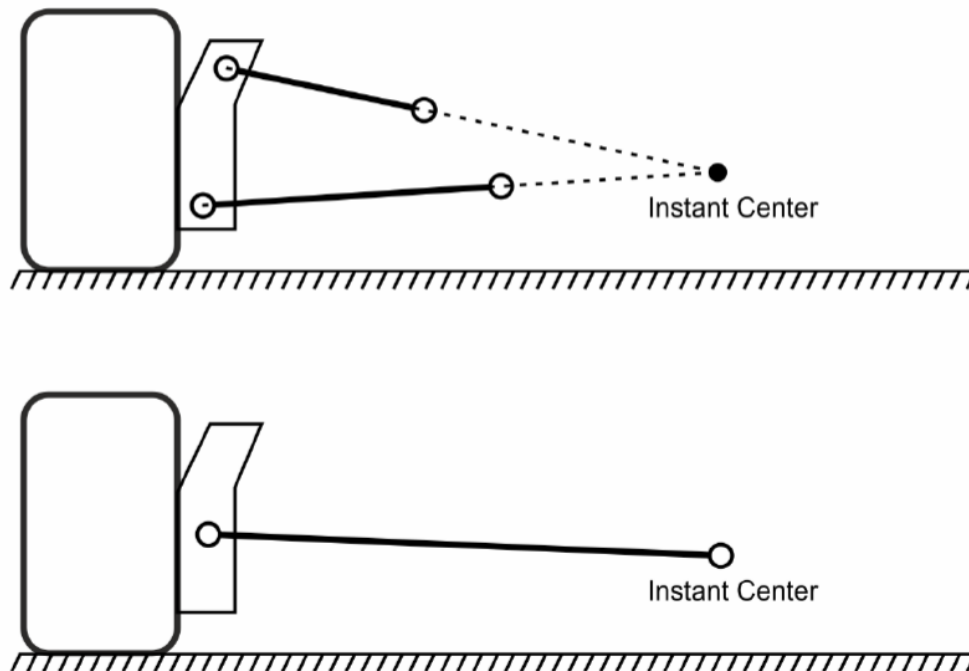
Neste trabalho, iremos partir de alguns conceitos fundamentais sobre dinâmica veicular, suspensão Duplo-A, equações de movimento e resolução das mesmas. Para isso há a necessidade da definição dos parâmetros cruciais para o entendimento do texto.

2.1 *Instant Center IC*

O Centro Instantâneo (*Instant Center - IC*) é um conceito fundamental na análise e no projeto de suspensões veiculares, particularmente nas geometrias tipo Duplo-A (*Double Wishbone*) utilizadas em carros de corrida como o Formula SAE.

A definição do Centro Instantâneo está ligada à cinemática da suspensão e é o ponto em torno do qual a roda gira em um determinado momento (ou em um pequeno instante de tempo) durante o movimento vertical (*bump* ou *rebound*)(3) e é o ponto de intersecção das linhas que definem os braços de controle (bandejas) da suspensão como mostrado na Figura 3.

Figura 3: Definição do *Instant Center*



Fonte:(1)

O *IC* é crucial porque ele permite ao engenheiro definir parâmetros como:

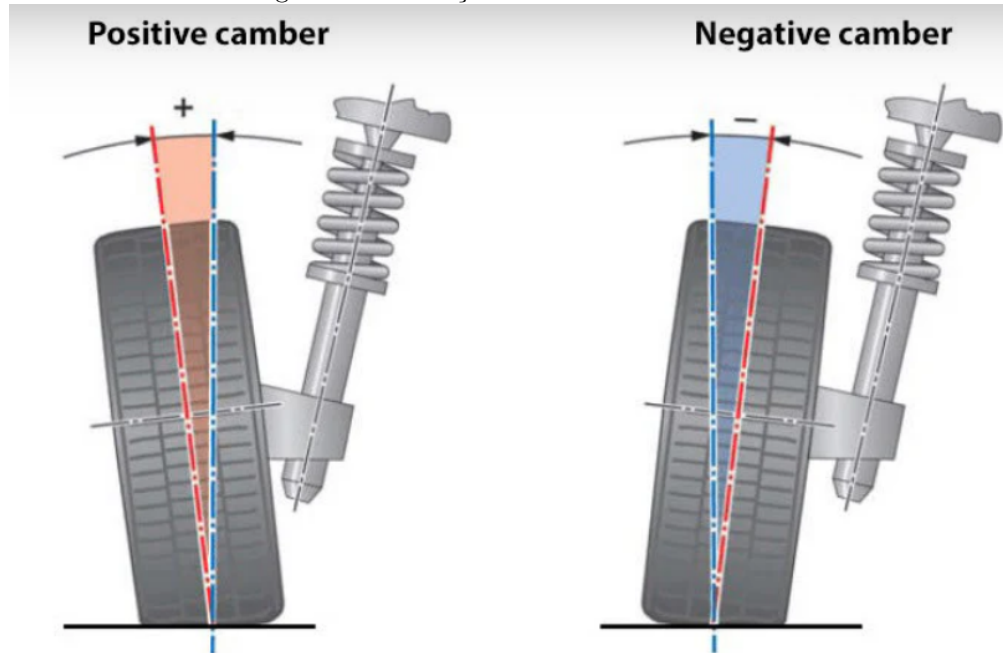
- Cinemática da Roda: Ele mostra como a roda irá se deslocar à medida que o chassi do carro sobe ou desce.
- Centro de Rolagem (*Roll Center*): O Centro Instantâneo é o primeiro passo para a determinação do Centro de Rolagem (RC). O RC é o ponto onde a força lateral gerada pelo chassi (*Roll Moment*) é transferida para o eixo.

2.2 *Camber*

O Ângulo de *Camber* é o ângulo de inclinação vertical da roda quando vista de frente ou por trás do veículo. Ele mede o desvio da roda em relação a uma linha perfeitamente vertical, ou seja, o ângulo perpendicular ao

plano de rodagem. A Figura 4 ilustra como é definido o camber positivo e o negativo, uma vez que o neutro se dá com o ângulo de camber em zero graus.

Figura 4: Ilustração do conceito de *Camber*



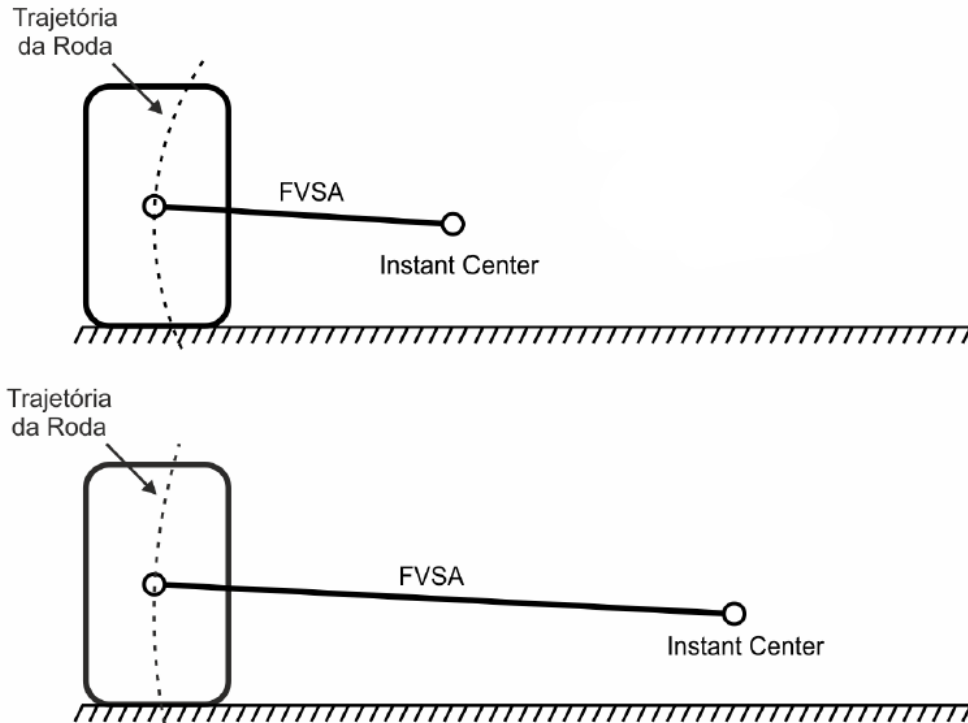
Fonte:(4)

2.3 *Front View Swing Arm*

O FVSA é o segmento de reta que conecta o Centro Instantâneo de uma roda ao centro do contato do pneu no chão.

Este braço virtual é uma ferramenta conceitual crucial que representa o eixo efetivo em torno do qual a roda gira e se move no plano vertical quando a suspensão é comprimida (*bump*) ou estendida (*rebound*). A Figura 5 ilustra o FVSA.

Figura 5: Ilustração do conceito de *FVSA*



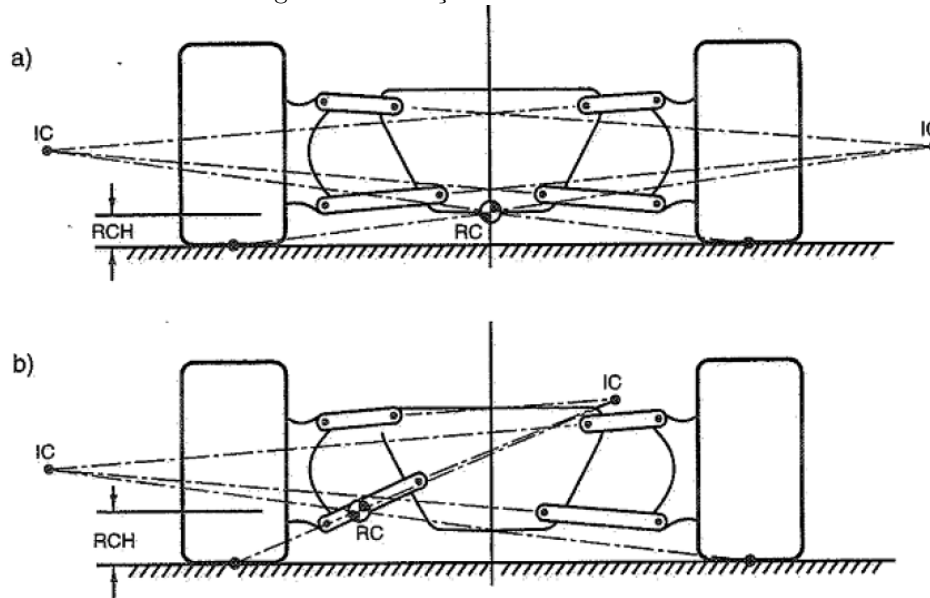
Fonte:(5)

O *FVSA* é essencial porque a sua geometria determina diretamente duas propriedades dinâmicas e cinemáticas vitais: o *roll center* e o ganho de *camber*.

2.4 *Roll Center RC*

O Centro de Rolagem (*Roll Center - RC*) é um ponto geométrico fundamental na Dinâmica Veicular que determina como as forças laterais atuantes no chassi são distribuídas para a suspensão e, conseqüentemente, para as rodas. Ele é o ponto, no plano da seção transversal do veículo, onde a força lateral que age na massa suspensa (carroceria e chassi) é transferida para a massa não suspensa (rodas e braços de suspensão)(1). É o ponto virtual que define o eixo instantâneo de rolagem de um eixo. Ou seja, em termos de movimento: o *RC* é o ponto que está fixo no chassi (ou na massa suspensa) e em torno do qual a carroceria rola em uma curva. O *RC* de um eixo (dianteiro ou traseiro) é determinado a partir dos Centros Instantâneos (*Instant Centers*) das suspensões direita e esquerda, para isso, determina-se o Centro Instantâneo (*IC*) para as suspensões da esquerda e da direita, traçando-se a intersecção das linhas que definem os braços de controle (bandejas) como visto anteriormente, traça-se uma linha do *IC* de um lado até o centro do pneu (*patch* de contato) do lado oposto. A Figura 6 ilustra como são traçadas as linhas partindo do *IC*.

Figura 6: Definição do Roll Center



Fonte:(1)

2.5 Ganho de camber

O Ganho de Câmbor (*Camber Gain*) é uma característica de projeto da suspensão que define a taxa de variação do ângulo de *camber* da roda em resposta ao movimento vertical da suspensão (*bump* e *rebound*) e, principalmente, à rolagem (roll) da carroceria em uma curva.

É expresso como a taxa de mudança de *camber* (em graus) por unidade de curso vertical da suspensão (em milímetros ou polegadas). Em veículos de competição, o principal objetivo do Ganho de *Câmbor* é compensar a rolagem da carroceria para manter o pneu o mais perpendicular possível à superfície da pista e ao seu centro de pressão(1). Quando um carro vira, o chassi rola para fora da curva, e a roda externa (aquela que suporta a maior parte da Transferência Lateral de Carga) tende a se inclinar positivamente, ou seja, *camber* positivo. Um Ganho de *Câmbor* bem projetado faz com que a geometria da suspensão, à medida que a roda se move para cima (*bump*), induza um ângulo de *camber* negativo para a roda externa, compensando a rolagem do chassi. Sendo assim, para determinar o ganho de *camber*, é necessário o uso do conceito de *Front View Swing Arm*, para estabelecer uma relação como mostra Equação 1

$$\text{GanhodeCamber} = \arctan\left(\frac{1}{FVSA}\right) \quad (1)$$

2.6 Transferência de Carga

A Transferência de Carga é um conceito cinemático e dinâmico fundamental que descreve a redistribuição das cargas verticais incidentes sobre as quatro rodas do veículo, ocorrendo em resposta a qualquer aceleração ou desaceleração (1). O fenômeno é gerado pelas forças de inércia que atuam no Centro de Gravidade (CG) do veículo, resultando em um momento que altera o peso percebido por cada pneu. Este evento é categorizado em dois eixos de movimento:

- Transferência Longitudinal de Carga: Ocorre no eixo longitudinal (frente-traseira) durante a aceleração e a frenagem. Na aceleração inércia resulta na transferência de carga para o eixo traseiro e na frenagem ocorre a transferência de carga para o eixo dianteiro (efeito *pitch* ou arfagem).
- Transferência Lateral de Carga: Ocorre no eixo transversal (esquerda-direita) durante as curvas. A força inercial (centrífuga) transfere a carga das rodas internas (no lado da curva) para as rodas externas (no lado oposto).

Neste trabalho, iremos analisar o comportamento do veículo conforme a transferência lateral de carga, isso se deve ao fato de os movimentos de interesse do sistema de suspensão ser maior em curvas, e para isso utilizaremos do seu conceito bem como da equação que define a transferência permanente de carga como mostra a Equação 2.

$$\Delta W = \frac{W_s A_y}{t} \left[h_s \left(\frac{K_{\phi a}}{K_{\phi F} + K_{\phi R}} \right) + \frac{l-x}{l} \cdot Z_{RC} \right] + \frac{W_{ua} A_y}{t} Z_{ua} \quad (2)$$

Nesta equação temos os termos:

- ΔW : Transferência Lateral de Carga Permanente
- W_s : Peso da Massa Suspensa
- A_y : Aceleração Lateral
- t : Bitola, a distância entre os centros das bandas de rodagem dos pneus de um mesmo eixo
- h_s : Altura do Centro de Gravidade da Massa Suspensa, medida a partir da superfície de referência, como o solo ou o centro do eixo
- $K_{\phi a}$: Rigidez Angular (ou de Rolagem) Anti-Rolagem, rigidez que resiste ao rolamento da suspensão de um eixo específico, frequentemente o eixo anti-rolagem, *roll stiffness*
- $K_{\phi F}$: Rigidez Angular Total (ou de Rolagem) da Suspensão Dianteira (Inclui molas, barras estabilizadoras, e rigidez dos pneus no eixo dianteiro)
- $K_{\phi R}$: Rigidez Angular Total (ou de Rolagem) da Suspensão Traseira (Inclui molas, barras estabilizadoras, e rigidez dos pneus no eixo traseiro)
- l : entre - eixos
- x : Distância Longitudinal do Centro de Gravidade da Massa Suspensa
- Z_{RC} : Altura do Centro de Rolagem (Roll Center) da Suspensão
- W_{ua} : Peso da Massa Não-Suspensa, o peso da parte do veículo não suportada pelas molas, como rodas, pneus, eixos, freios
- Z_{ua} : Altura do Centro de Gravidade da Massa Não-Suspensa

2.7 Gradiente de Rolagem

O Gradiente de Rolagem (*Roll Gradient*) é uma métrica fundamental na Dinâmica Veicular que quantifica a sensibilidade do ângulo de rolagem da carroceria à força de aceleração lateral que o carro experimenta em uma curva.

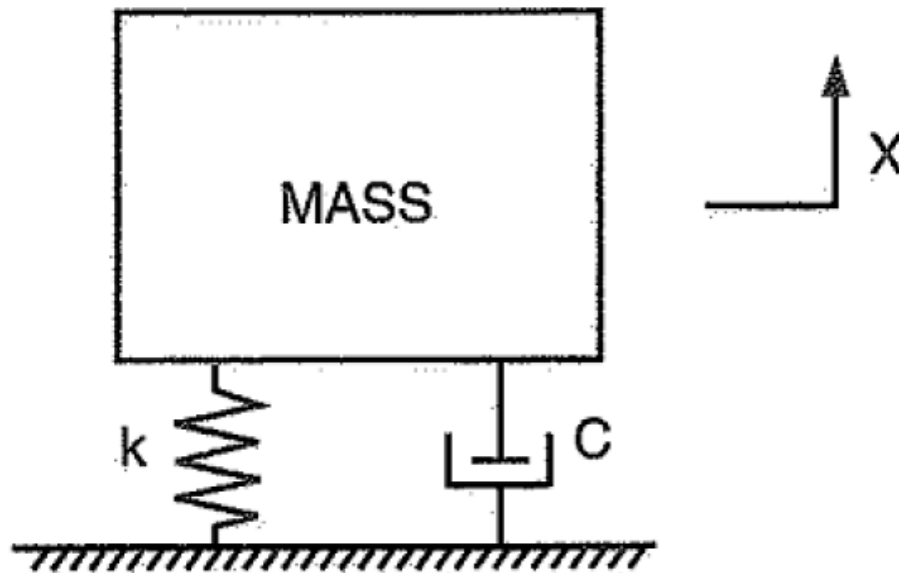
É a medida mais importante para o ajuste fino da rigidez da suspensão e para o controle da atitude aerodinâmica do veículo, é a relação entre a rolagem total do chassi (ϕ) e a aceleração lateral (A_y) aplicada ao veículo expressa como a inclinação da carroceria em graus ou radianos por unidade de aceleração lateral em g 's. O controle do Gradiente de Rolagem é crucial em um veículo de competição, pois, em carros com grande dependência aerodinâmica, é vital manter o Gradiente de Rolagem o mais baixo possível para que os dispositivos aerodinâmicos (como asas e difusores) permaneçam em sua altura de rodagem ideal e mantenham a eficiência máxima. Uma rolagem excessiva pode comprometer o downforce, ou seja, a força vertical para baixo que o *kit* aerodinâmico impõe sobre o carro. Com tudo, um Gradiente de Rolagem baixo limita o movimento vertical da suspensão, o que por sua vez minimiza a variação indesejada de Câamber e Convergência (Ganho de Câamber) controlada pela geometria. Podemos citar também a percepção do piloto, pois, o alto Gradiente de Rolagem pode ser desconfortável para o piloto e dificultar a resposta transitória na entrada da curva, devido ao fato do carro levar mais tempo para se estabilizar no ângulo de rolagem final. Por fim, a Equação 3 mostra o calculo para esse parâmetro.

$$\frac{\phi}{A_y} = \frac{W_s h_s}{K_{\phi F} + K_{\phi R} - W_s h_s} \quad (3)$$

2.8 Modelos Matemáticos

Em Dinâmica Veicular, particularmente no estudo de vibração e suspensão, os Modelos Matemáticos são representações simplificadas e idealizadas de um sistema físico complexo, utilizando-se de princípios da mecânica newtoniana (força, massa, aceleração) e elementos de engenharia (mola, amortecedor e massa) para derivar as Equações de Movimento, sendo que, seu principal objetivo é transformar o sistema real, contínuo e tridimensional, como um veículo, em um sistema discreto permitindo a análise e a otimização de seu comportamento. Para isso, é necessário a definição dos graus de liberdade (DOF) do sistema, onde este é representado pelo número mínimo de coordenadas independentes necessárias para especificar completamente a posição e orientação de um corpo ou sistema no espaço. Na Figura 7 é ilustrado um sistema de um grau de liberdade como exemplo, onde o grau de liberdade é mostrado através da coordenada X da massa do corpo.

Figura 7: Modelo 1DOF



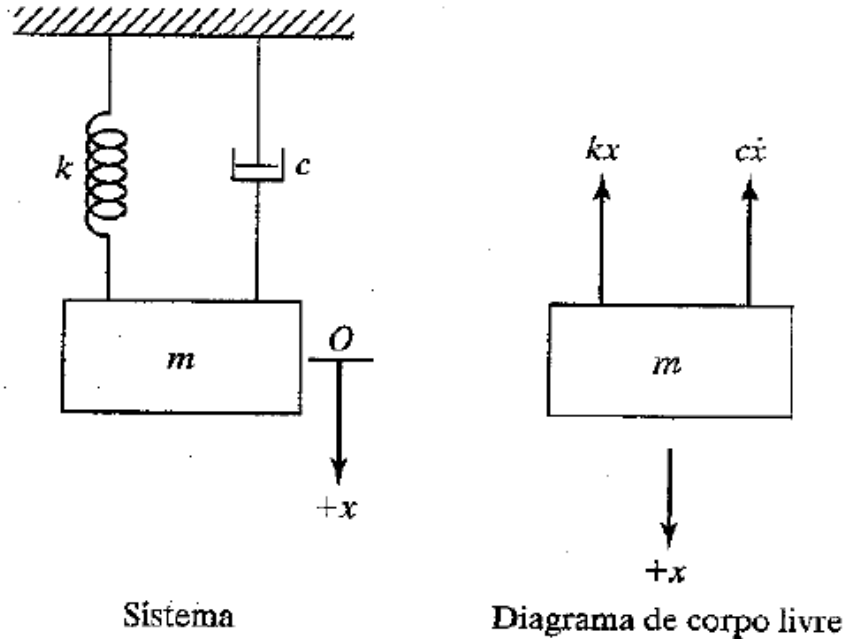
Fonte:(1)

2.9 Diagrama de Corpo Livre (DCL)

O DCL é uma representação esquemática isolada de um corpo, ou parte dele (a "massa suspensa", a "roda", etc.), que remove todas as restrições e apoios físicos, substituindo-os pelas forças e momentos que atuam sobre o corpo.

Seu principal propósito é traduzir um sistema físico complexo e interconectado em um modelo matemático idealizado no qual as forças desconhecidas (como as forças elásticas ou de amortecimento) e as forças de inércia possam ser claramente visualizadas. A Figura 8 ilustra o conceito de DCL.

Figura 8: Modelo de Diagrama de Corpo Livre



Fonte:(6)

2.10 Equações de Movimento - Sistema Massa, Mola e Amortecedor

As Equações de Movimento, no contexto das vibrações mecânicas, são as ferramentas analíticas primárias para modelar o comportamento dinâmico de um sistema. Segundo (6), estas equações são as equações diferenciais que formalizam a relação entre as propriedades inerciais, elásticas e dissipativas de um sistema e as forças externas que atuam sobre ele. Para o modelo mais fundamental na Dinâmica Veicular—o sistema de um grau de liberdade, a Equação de Movimento é uma equação diferencial linear de segunda ordem como mostra a Equação 4, onde m é a massa do corpo, c o coeficiente de amortecimento, k a rigidez da mola, x a posição do corpo e \dot{x} , \ddot{x} a velocidade e a aceleração respectivamente além da força de excitação $f(t)$.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (4)$$

2.11 Equações de Estado

As Equações de Estado fornecem uma descrição completa e não redundante do estado interno de um sistema em qualquer instante de tempo (t), através de um conjunto mínimo de variáveis, conhecidas como Variáveis de Estado. O modelo é fundamentalmente composto por duas equações matriciais: Equação de Estado (Dinâmica do Sistema) representada pela Equação 5 e Equação de Saída (Observação) representada pela Equação 6 .

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6)$$

Nestas equações, as variáveis envolvidas são:

- $\mathbf{x}(t)$ (Vetor de Estado): Conjunto mínimo de variáveis independentes (ex: deslocamentos, ângulos, velocidades).
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (Derivada do Vetor de Estado): As taxas de variação das variáveis de estado (velocidades e acelerações).

- $\mathbf{u}(t)$ (Vetor de Entrada): As entradas que atuam no sistema (e.g., comando de direção, força do freio, excitação da pista).
- $\mathbf{y}(t)$ (Vetor de Saída): são as variáveis que se deseja observar (e.g., aceleração lateral, ângulo de deslizamento, ângulo de rolagem).
- \mathbf{A} (Matriz do Sistema): Matriz fundamental que define a dinâmica interna (massa, rigidez, amortecimento) e as interações entre as variáveis de estado.
- \mathbf{B} (Matriz de Entrada): Define como as entradas (\mathbf{u}) afetam a evolução do estado ($\dot{\mathbf{x}}$).
- \mathbf{C} (Matriz de Saída): Define como o estado (\mathbf{x}) é mapeado para as saídas observáveis (\mathbf{y}).
- \mathbf{D} (Matriz de Feedthrough): Define o impacto direto da entrada (\mathbf{u}) na saída (\mathbf{y}).

O principal benefício do modelo de estado é converter a Equação de Movimento original (que pode ser de segunda ordem, como $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$) em um sistema de equações de primeira ordem, o que o torna ideal para a análise computacional e simulação (6).

3 Metodologia

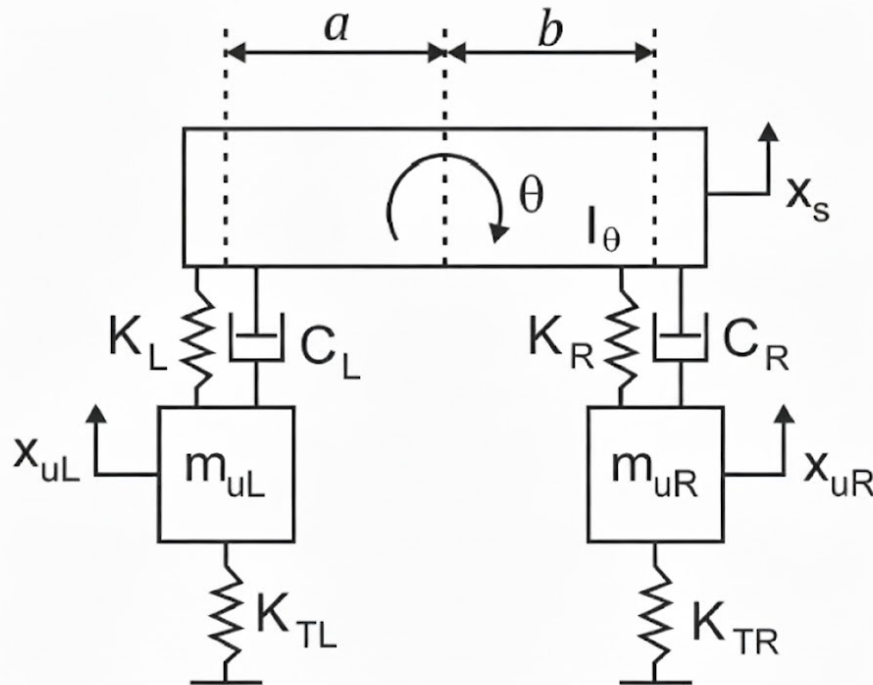
3.1 Definição do Modelo Matemático

A primeira etapa do trabalho consistiu na definição criteriosa do modelo matemático a ser empregado. Para essa seleção, foram ponderados os seguintes fatores determinantes:

- Necessidade de Análise de Variáveis: A capacidade do modelo de incorporar e permitir a análise das variáveis críticas e relevantes para o sistema em estudo.
- Grau de Complexidade do Modelo: O equilíbrio entre a precisão exigida e o nível de complexidade inerente ao modelo matemático, visando a representação adequada do fenômeno sem incorrer em detalhes desnecessários.
- Facilidade de Resolução do Sistema: A viabilidade e a simplicidade na resolução do sistema de equações de movimento resultante, o que impacta diretamente a implementação prática.
- Disponibilidade Computacional: A adequação do modelo aos recursos e à capacidade computacional disponíveis para a simulação e processamento dos dados.
- Essa abordagem assegurou a escolha de um modelo que fosse, simultaneamente, rigoroso em sua representação física e praticável em sua aplicação computacional

Com isso, foi escolhido o modelo de 4 graus de liberdade de um veículo, sendo estes a posição da massa suspensa, a posição da massa não suspensa esquerda, a posição da massa não suspensa direita e a rolagem. A Figura 9 ilustra o modelo simplificado.

Figura 9: Modelo de 4 graus de liberdade - Simplificação do veículo.



Fonte: Elaborado pelo autor

No modelo apresentado, os subscritos contendo R (right) são representados pelas variáveis à direita do centro do veículo, enquanto o subscrito L (left) representa as que estão à esquerda. Por fim, temos a seguinte denominação para os parâmetros do sistema:

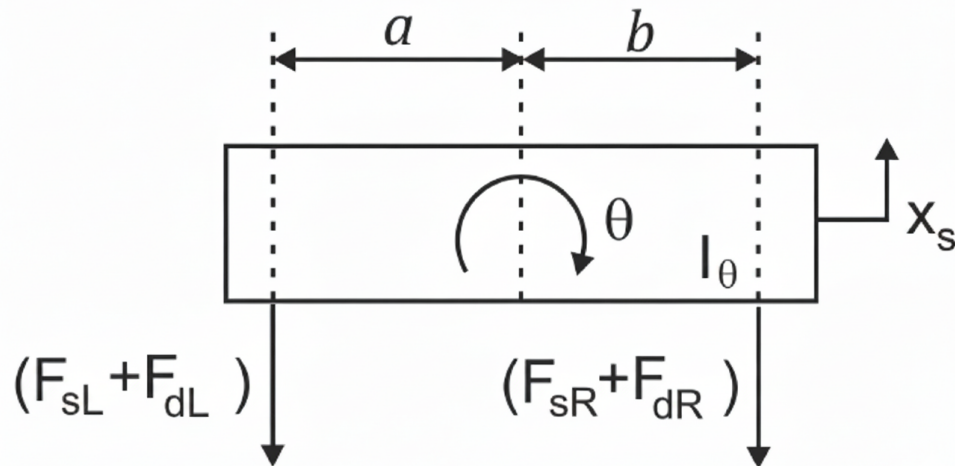
- K : representa a rigidez da mola
- C : representa o coeficiente de amortecimento dos amortecedores
- K_T : representa a rigidez dos pneus
- m_s : representa a massa suspensa, ou seja, a massa que é suspensa pelo sistema de suspensão, como o chassi, piloto, volante, etc
- m_u : representa a massa não suspensa, ou seja, a massa que não é suspensa pelo sistema de suspensão, como roda, pinça, pneu, etc
- a e b : são as medidas do centro do chassi até o meio da roda
- θ : é a rolagem da carroceria do veículo
- I_θ : é o momento de inercia do veículo

3.2 Diagrama de Corpo Livre - 4DOF

Conforme explicitado na ??, onde o Diagrama de Corpo Livre (DCL) foi definido conceitualmente, a metodologia de análise do sistema exige um passo crucial: a aplicação do DCL para cada componente individual.

Este procedimento é estritamente necessário porque o DCL serve como a ferramenta gráfica primária para isolamento do corpo e para a visualização clara de todas as forças e momentos externos e internos que atuam sobre cada parte do sistema. Para isso, iremos adotar a medida de deslocamento sempre positiva em relação ao seu sistema de coordenadas, ou seja, $x > 0$. Sendo assim, a Figura 10 ilustra o diagrama de corpo livre para a massa suspensa do veículo.

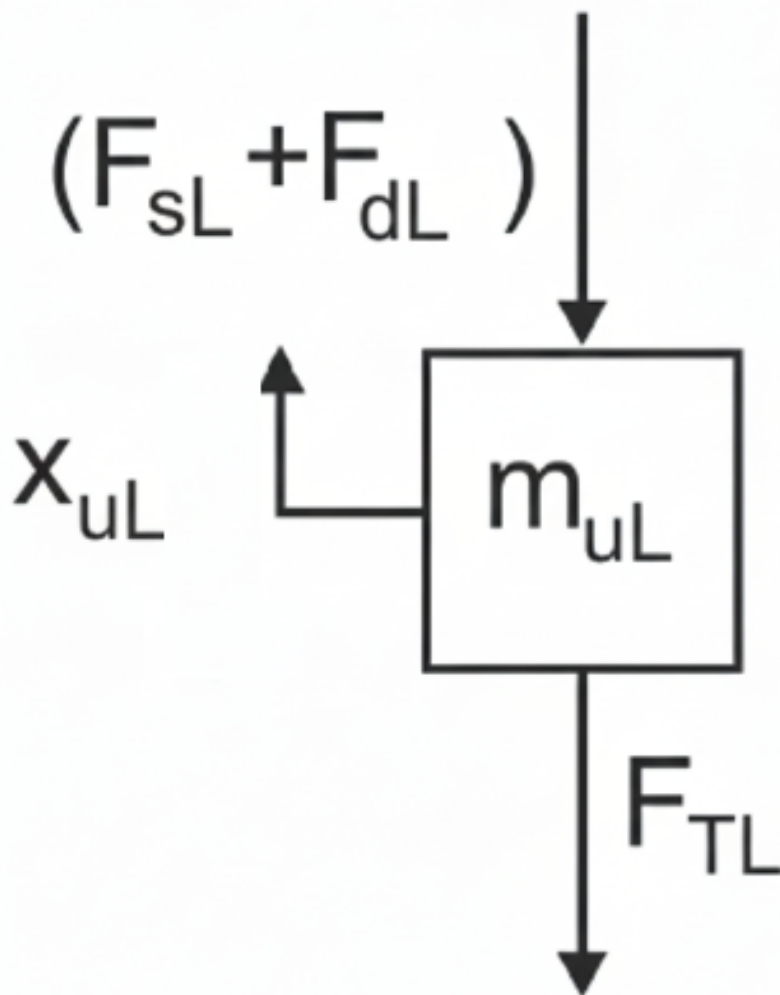
Figura 10: Diagrama de corpo livre - Massa Suspensa.



Fonte: Elaborado pelo autor

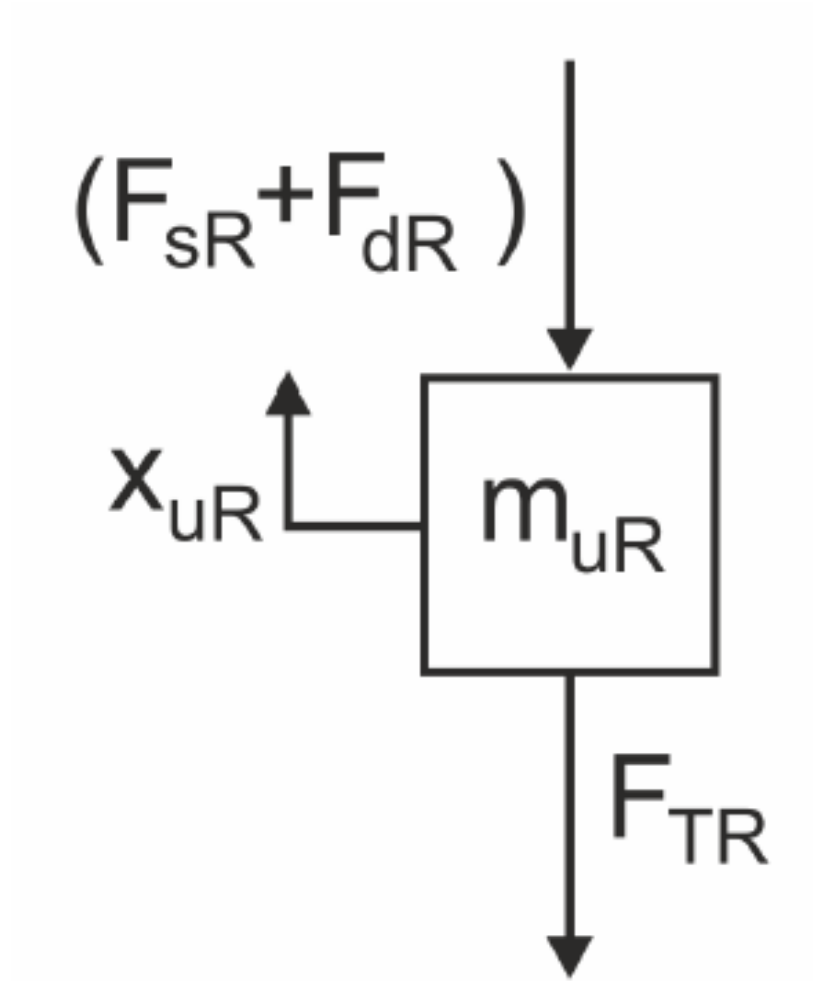
No diagrama, utilizando $x > 0$ (como estabelecido anteriormente), surge as forças das molas F_s e dos amortecedores F_d devido a reação de seus componentes ao movimento da massa suspensa, uma vez que, nessa parte do DCL é analisado somente o movimento vertical e não o rotacional. Seguindo a mesma linha, foi realizado o DCL para as massas não suspensas esquerda e direita como mostra as Figura 11 e Figura 12 respectivamente.

Figura 11: Diagrama de corpo livre - Massa Não Suspensa Esquerda.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12: Diagrama de corpo livre - Massa Não Suspensa Direita.

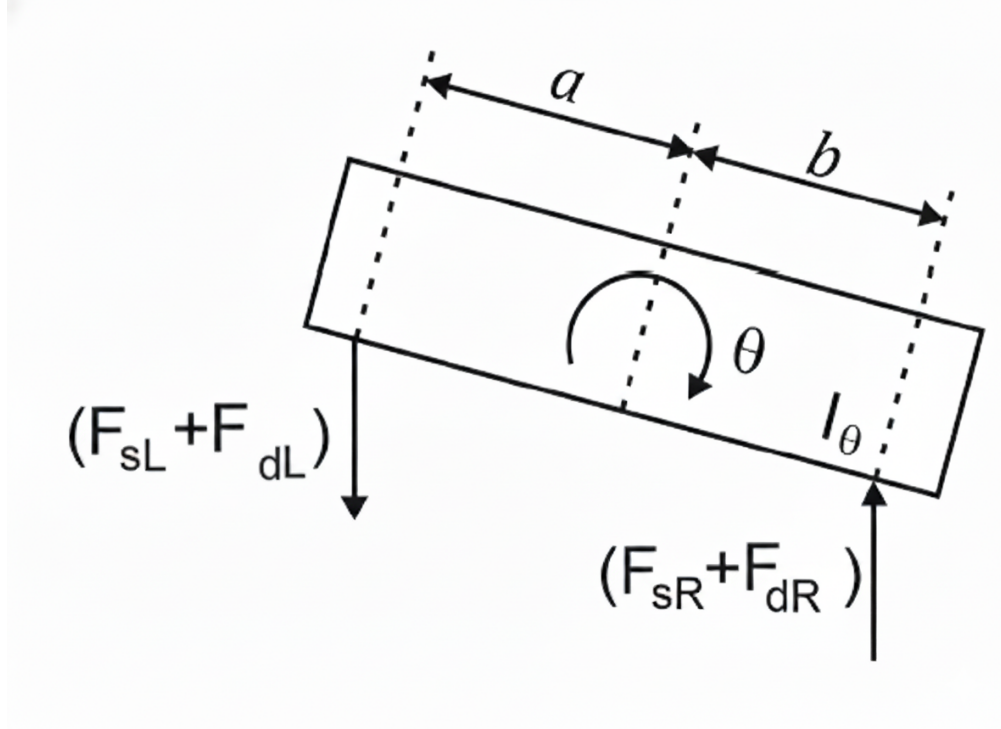


Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta parte do diagrama, é representado as forças das molas e amortecedores como comentando anteriormente, porém, surge a força do pneu oriunda da sua representação como uma mola, ou seja, um componente elástico.

Por fim, é analisado o sistema na situação onde o chassi do veículo sofre uma rolagem de θ graus no sentido horário como ilustra Figura 13.

Figura 13: Diagrama de corpo livre -Rotação do chassi.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta etapa, nota-se o sentido das forças das molas e dos amortecedores em sentidos opostos, isso se dá devido ao fato de quando o chassi rola, um lado é comprimido (direito) e o outro é estendido (esquerdo) fazendo com que as reações seja opostas.

3.3 Equações de Movimento - 4DOF

Conforme a Subseção 2.10, as equações de movimento se tornam ferramentas extremamente úteis para analisar de forma física o comportamento de sistemas. Sendo assim, fazendo uso desse conceito, essa seção do trabalho irá analisar os diagramas de corpo livre com o intuito de encontrar as equações de movimento e chegar nas matrizes que descreve fenômeno físico. Analisando a Figura 10 e com o auxílio da Segunda Lei de Newton, foi possível chegar na equação de movimento que rege o deslocamento da massa suspensa, como mostrado na Equação 7.

$$m_s \ddot{x}_s = -(F_{sL} + F_{sR} + F_{dL} + F_{dR}) \quad (7)$$

Nota-se um sinal negativo na equação devido ao fato das forças estarem contrária ao sistema de coordenadas previamente definido. Assim, analogamente, podemos definir as equações de movimento para ambas massas suspensas conforme mostra Equação 8 e Equação 9

$$m_{uR} \ddot{x}_{uR} = -(F_{sR} + F_{dR} + F_{TR}) \quad (8)$$

$$m_{uL} \ddot{x}_{uL} = -(F_{sL} + F_{dL} + F_{TL}) \quad (9)$$

Por fim, temos a análise de rotação do chassi, onde iremos assumir pequenos deslocamentos angulares, o que implica nas aproximações: $\cos(\theta) \approx 1$ e $\sin(\theta) \approx \theta$.

Analisando a Figura 13, tem-se a Equação 10 para o movimento de rotação da massa suspensa.

$$I_\theta \ddot{\theta} = -(F_{sR} + F_{dR})b + (F_{sL} + F_{dL})a \quad (10)$$

Por fim, com relação as forças de reações das molas, amortecedores e pneus, é necessário definir as equações que as regem bem como os deslocamentos e velocidades das massas. Sabe-se que os efeitos de força das molas estão diretamente atrelados ao descolamento, δ e a constante de rigidez K , ja para os amortecedores os efeitos de força são relacionados através da velocidade $\dot{\delta}$ e o coeficiente de amortecimento C (6). Com isso podemos definir para um caso genérico as seguintes relações:

$$F_s = Kx \quad (11)$$

$$F_d = C\dot{x} \quad (12)$$

Por fim, partindo do sistema de coordenadas adotado, chegamos nas relações do deslocamento e da velocidade que se dá através da primeira derivada. As Equação 13 e Equação 14 mostram os deslocamentos e as Equação 15 e Equação 16 mostram as velocidades respectivamente.

$$\delta_L = x_s - x_{uL} + \theta a \quad (13)$$

$$\delta_R = x_s - x_{uR} - \theta b \quad (14)$$

$$\dot{\delta}_L = \dot{x}_s - \dot{x}_{uL} + \dot{\theta} a \quad (15)$$

$$\dot{\delta}_R = \dot{x}_s - \dot{x}_{uR} - \dot{\theta} b \quad (16)$$

Assim sendo, com o intuito de obter as equações do movimento, é necessário fazer as substituições corretas para cada lado do sistema, ou seja, a Equação 13 e Equação 14 são substituídas na Equação 11 para a mola esquerda e direita e o resultado disto é substituído na Equação 7, Equação 8, Equação 9 e Equação 10. Analogamente, o mesmo processo de substituição é aplicado aos amortecedores. Após as substituições, é possível deduzir as equações do movimento total par ao sistema de 4 graus de liberdade como mostrado abaixo:

$$m_s \ddot{x}_s = - \left(K_L(x_s - x_{uL} + \theta a) + C_L(\dot{x}_s - \dot{x}_{uL} + \dot{\theta} a) \right) + K_R(x_s - x_{uR} - \theta b) + C_R(\dot{x}_s - \dot{x}_{uR} - \dot{\theta} b) \quad (17)$$

$$I_\theta \ddot{\theta} = - \left[K_R(x_s - x_{uR} - \theta b) + C_R(\dot{x}_s - \dot{x}_{uR} - \dot{\theta} b) \right] b - \left[K_L(x_s - x_{uL} + \theta a) + C_L(\dot{x}_s - \dot{x}_{uL} + \dot{\theta} a) \right] a \quad (18)$$

$$m_{uL} \ddot{x}_{uL} = - \left(K_L(-x_s + x_{uL} - \theta a) + C_L(-\dot{x}_s + \dot{x}_{uL} - \dot{\theta} a) \right) - K_{TL} x_{uL} \quad (19)$$

$$m_{uR} \ddot{x}_{uR} = - \left(K_R(-x_s + x_{uR} + \theta b) + C_R(-\dot{x}_s + \dot{x}_{uR} + \dot{\theta} b) \right) - K_{TR} x_{uR} \quad (20)$$

Após a obtenção dessas equações, nota-se que após um rearranjo matemático podemos chegar em um sistema de equações como segue:

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s + K_L(x_s - x_{uL} + \theta a) + K_R(x_s - x_{uR} - \theta b) + C_L(\dot{x}_s - \dot{x}_{uL} + \dot{\theta} a) + \\ C_R(\dot{x}_s - \dot{x}_{uR} - \dot{\theta} b) = 0 \\ I_\theta \ddot{\theta} + [K_R(x_s - x_{uR} - \theta b) + C_R(\dot{x}_s - \dot{x}_{uR} - \dot{\theta} b)]b + [K_L(x_s - x_{uL} + \theta a) + \\ C_L(\dot{x}_s - \dot{x}_{uL} + \dot{\theta} a)]a = 0 \\ m_{uL} \ddot{x}_{uL} + K_L(-x_s + x_{uL} - \theta a) + C_L(-\dot{x}_s + \dot{x}_{uL} - \dot{\theta} a) + K_{TL} x_{uL} = 0 \\ m_{uR} \ddot{x}_{uR} + K_R(-x_s + x_{uR} + \theta b) + C_R(-\dot{x}_s + \dot{x}_{uR} + \dot{\theta} b) + K_{TR} x_{uR} = 0 \end{cases}$$

Nota-se que se trata de Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) Linear, Homogêneo, de Segunda Ordem e de Coeficientes Constantes, onde podemos colocar na forma matricial com a finalidade de usar a teoria de Espaço dos Estados. Rearranjando os termos e escrevendo na forma matricial, temos:

Para a matriz de massas:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{uL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{uR} \end{bmatrix}$$

Para a matriz de acelerações:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_{uL} \\ \ddot{x}_{uR} \end{bmatrix}$$

Para a matriz de amortecimento:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_L + C_R & C_L a - C_R b & -C_L & -C_R \\ C_L a - C_R b & C_L a^2 + C_R b^2 & -C_L a & C_R b \\ -C_L & -C_L a & C_L & 0 \\ -C_R & C_R b & 0 & C_R \end{bmatrix}$$

Para a matriz de velocidades:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_{uL} \\ \dot{x}_{uR} \end{bmatrix}$$

Para a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_L + K_R & K_L a - K_R b & -K_L & -K_R \\ K_L a - K_R b & K_L a^2 + K_R b^2 & -K_L a & K_R b \\ -K_L & -K_L a & K_L + K_{TL} & 0 \\ -K_R & K_R b & 0 & K_R + K_{TR} \end{bmatrix}$$

Para a matriz de deslocamento:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_s \\ \theta \\ x_{uL} \\ x_{uR} \end{bmatrix}$$

Para a matriz de força:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Após a definição das matrizes, foi utilizado a teoria de Espaço dos Estados, como visto na Subseção 2.11, essa modelagem matemática faz uso do sistema matricial para resolver o sistema de EDO's com o intuito de analisar as variáveis de saída desejadas. Neste trabalho, foram usadas as saídas: Posição da massa suspensa, rolagem do chassi e a posição das duas massas não suspensas. Tendo isso em vista, foi calculado as matrizes A , B , C e D para análise gráfica das saídas mencionadas.

Para a Matriz A :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_l+k_r}{m_s} & -\frac{c_l+c_r}{m_s} & -\frac{ak_l+bk_r}{m_s} & -\frac{ac_l+bc_r}{m_s} & \frac{k_l}{m_s} & \frac{c_l}{m_s} & \frac{k_r}{m_s} & \frac{c_r}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{ak_l+bk_r}{I_\theta} & -\frac{ac_l+bc_r}{I_\theta} & -\frac{a^2k_l+b^2k_r}{I_\theta} & -\frac{a^2c_l+b^2c_r}{I_\theta} & \frac{ak_l}{I_\theta} & \frac{ac_l}{I_\theta} & -\frac{bk_r}{I_\theta} & -\frac{bc_r}{I_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_l}{m_{uf}} & \frac{c_l}{m_{uf}} & \frac{ak_l}{m_{uf}} & \frac{ac_l}{m_{uf}} & -\frac{k_l+k_{tl}}{m_{uf}} & -\frac{c_l}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_r}{m_{ur}} & \frac{c_r}{m_{ur}} & \frac{-bk_r}{m_{ur}} & \frac{-bc_r}{m_{ur}} & 0 & 0 & -\frac{k_r+k_{tr}}{m_{ur}} & -\frac{c_r}{m_{ur}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Para a Matriz B :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_{tl}}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{tr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}$$

Para a Matriz C :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para a Matriz D :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

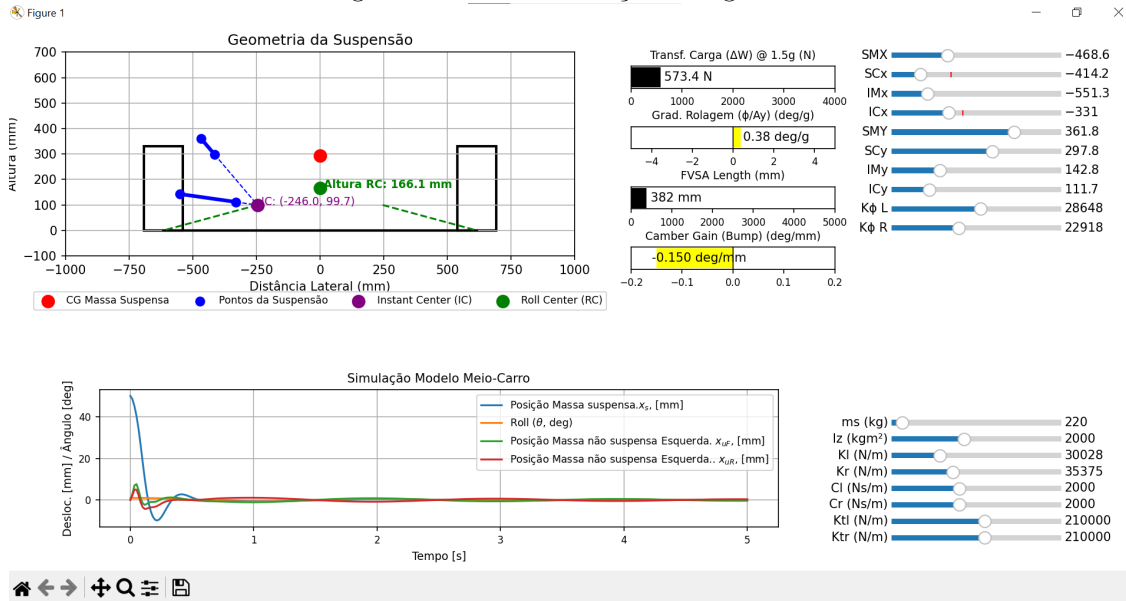
Com as matrizes em mãos, fez-se o uso de um algoritmo em Python, onde as matrizes de espaço dos estados foram resolvidas através do método de Runge-Kutta de 4^a ordem oque será melhor apresentado na seção de resultados.

4 Resultados

4.1 O Algoritmo

O algoritmo feito une todas as partes comentadas nas seções anteriores, isso é, a parte da obtenção dos parâmetros da geometria da suspensão bem como as variáveis de saída escolhidas para análise dinâmica do *setup* de suspensão. Com isso, afim de obter um algoritmo leve e de fácil manuseio, utilizou-se da linguagem em *Python* (*open source*) e as bibliotecas que já existem nele, a Figura 14 mostra a tela de interação entre o projetista e o código.

Figura 14: Tela de interação do algoritmo.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nessa figura, é possível notar as facilidades que o algoritmo trás, a análise manual desses parâmetros consome tempo e fatalmente gera erros de cálculos devido ao método manual. Como se pode notar a tela é dividida em 2 partes: análise dos parâmetros geométricos e análise dinâmica do sistema. A primeira parte conta com uma representação do veículo, onde pode-se notar os dois pneus bem como um conjunto de bandeja (inferior e superior), uma vez que, pontos da bandeja direita são parâmetros de entrada do algoritmo, porém, para melhor visualização do mesmo optou-se por ocultar sua representação. Ainda na parte da representação, o algoritmo fornece ao usuário as linhas que são traçadas para encontrar os instantes centers bem como o *roll center*. Logo ao lado, há os valores calculados para a transferência lateral de carga, gradiente de rolagem, front view swing arm e o ganho de camber, conforme a Equação 2, Equação 3, Equação 1, que são de extrema importância em um projeto de suspensão, sendo que, esses ditam o comportamento do veículo e seu aproveitamento em pista. Para representação dessas grandezas, utilizou-se de barras gráficas escolhidas devido a sua fácil visualização e clareza quando variadas. Por fim, a ultima ferramenta nesta primeira parte e na segunda, são os sliders. Esses sliders (botões deslizantes) são obtidos através dos *widgets* da biblioteca *matplotlib*, o que torna eles cruciais perante a ideia de fácil variação dos parâmetros, ou seja, o projetista apenas desliza esses botões e acompanha os parâmetros variarem conforme as equações estabelecidas. Na segunda parte do código, há a análise dos parâmetros de saída das equações de estado, onde estas são alteradas devido a variação dos parâmetros listados e com a ajuda dos sliders.

4.2 Análise Quantitativa - Parâmetros de Geometria

Nesta parte do trabalho, foi realizado a análise sobre os parâmetros geométricos do sistema de suspensão com base na Tabela 1, onde rodou-se uma simulação com os pontos de bandeja e variou-se os mesmo afim de

comparar resultados com o processo manual.

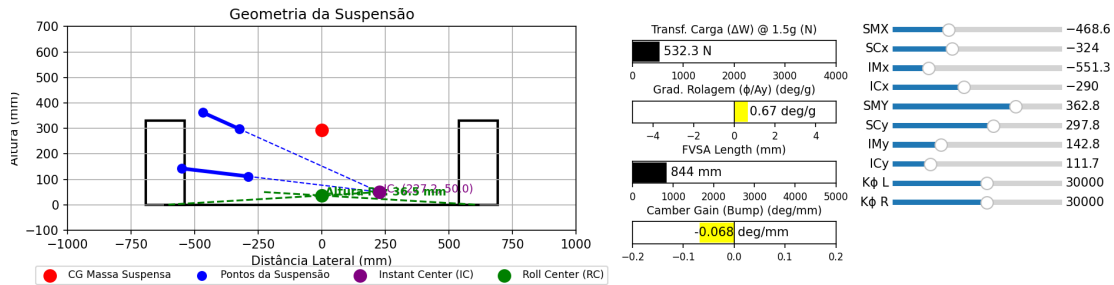
Tabela 1: Valores Iniciais dos Parâmetros Geométricos.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Pos. Sup. Manga (X)	$P_{um,x}$	mm	-468.565
Pos. Sup. Manga (Y)	$P_{um,y}$	mm	362.806
Pos. Sup. Chassi (X)	$P_{uc,x}$	mm	-324.0
Pos. Sup. Chassi (Y)	$P_{uc,y}$	mm	297.806
Pos. Inf. Manga (X)	$P_{dm,x}$	mm	-551.282
Pos. Inf. Manga (Y)	$P_{dm,y}$	mm	142.806
Pos. Inf. Chassi (X)	$P_{dc,x}$	mm	-290.0
Pos. Inf. Chassi (Y)	$P_{dc,y}$	mm	111.650
Rigidez Rolagem Diant.	$K_{\phi,F}$	N·m/rad	30000
Rigidez Rolagem Tras.	$K_{\phi,R}$	N·m/rad	30000
Massa Suspensa (Geom.)	$m_{s,g}$	kg	274
Massa Não-Susp. (Geom.)	$m_{u,g}$	kg	20
Entre-eixos	l	m	1.5
Acel. Lateral (Análise)	a_y	g	1.5

Fonte: Elaborado pelo autor

Após compilar o código, foi registrado os valores de IC e Roll center para os valores pré estabelecidos como mostra a Figura 15.

Figura 15: Simulação dos parâmetros de geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, nota-se uma melhora visual para o usuário, sendo que, no processo manual o projetista necessita de um *software* em CAD como *Solidworks* usado atualmente na equipe, o que polui a visualização bem como demanda um tempo extremamente maior. A Figura 16 ilustra o procedimento da obtenção dos valores do IC e do RC através de CAD.

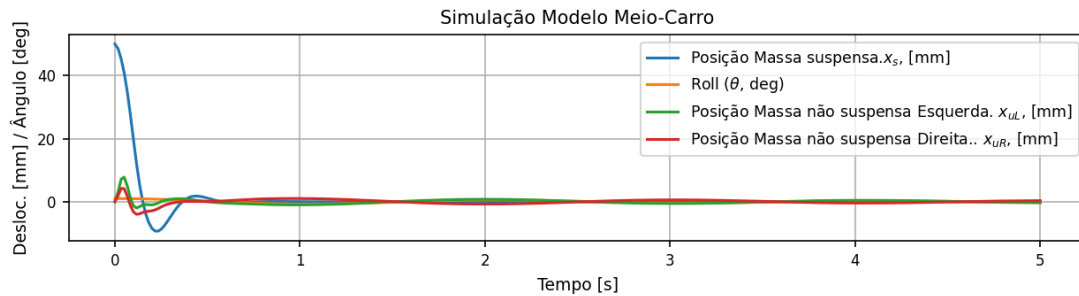
Tabela 3: Valores dos Parâmetros de Simulação (Modelo 4- GDL).

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Massa Suspensa	m_s	kg	220
Massa Não-Suspensa Esquerda	m_{uf}	kg	15
Massa Não-Suspensa Direita	m_{ur}	kg	15
Momento de Inércia (Roll)	I_θ	kg · m ²	2000
Dist. CG à Mola Esquerda	a	m	0.6
Dist. CG à Mola Direita	b	m	0.6
Rigidez Mola Esquerda	k_l	N/m	30000
Rigidez Mola Direita	k_r	N/m	30000
Amortecimento Esquerdo	c_l	Ns/m	2000
Amortecimento Direito	c_r	Ns/m	2000
Rigidez Pneu Esquerdo	k_{tl}	N/m	210000
Rigidez Pneu Direito	k_{tr}	N/m	210000

Fonte: Elaborado pelo autor.

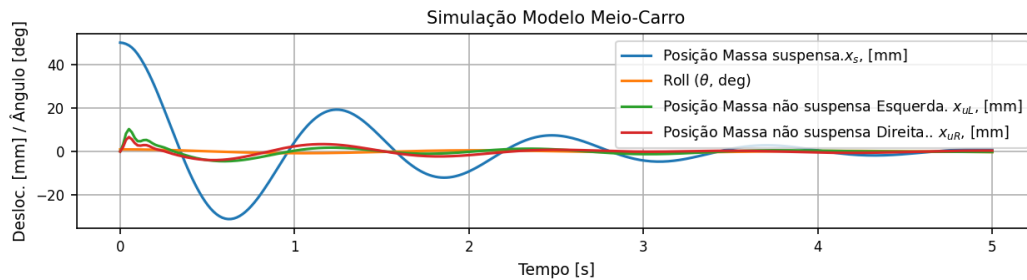
Depois desses valores serem alocados no algoritmo, rodou-se a simulação para registrar as curvas das saídas e alterou-se m_s para 2000kg. As Figura 19 e Figura 20 mostram o comportamento obtido.

Figura 19: Simulação $m_s = 220$ kg.



Fonte: Elaborado pelo autor

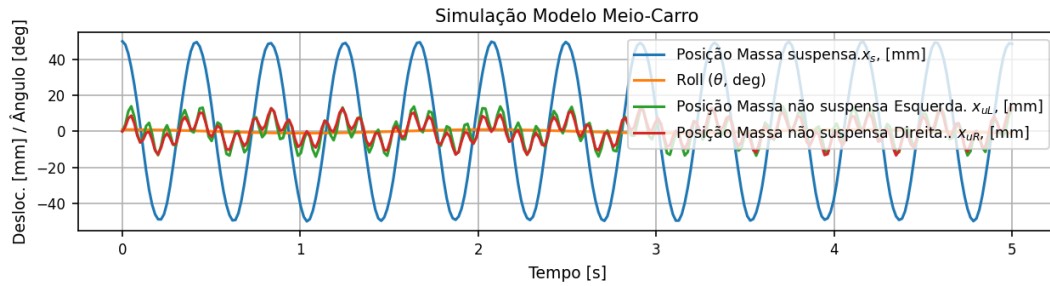
Figura 20: Simulação $m_s = 2000$ kg.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nota-se um comportamento esperano, pois, ao aumentar a massa suspensa m_s o sistema tem mais dificuldade em amortecer o conjunto como um todo, o que é visto no deslocamento das curvas, ou seja, elas demoram mais tempo para voltar ao repouso. Um ponto a se destacar, são os valores das condições iniciais, nesta análise onde o intuito é ver apenas o comportamento das curvas e não seus valores, foram colocadas as condições iniciais de posição inicial $X_0 = 50mm$, velocidade inicial $\dot{X}_0 = 0m/s$ e o ângulo de rolagem $\theta_0 = 1$. Após a análise do aumento da massa suspensa, foi feita uma simulação onde reduziu-se o sistema massa, mola e amortecedor ao sistema massa, mola, ou seja, os valores para os coeficientes de amortecimentos foram zerados e as curvas registradas conforme mostra a Figura 21.

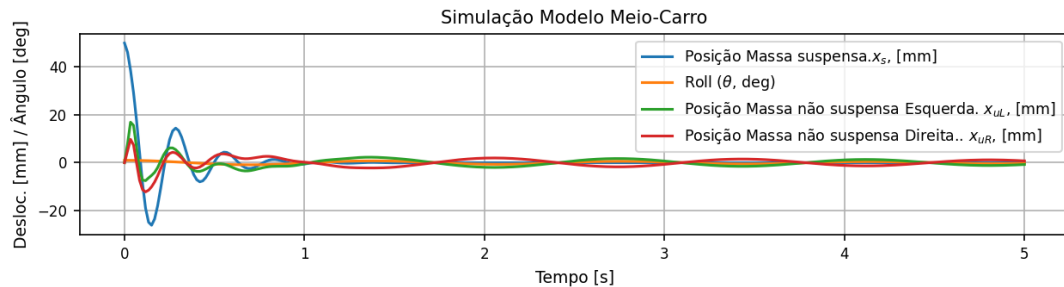
Figura 21: Simulação $c = 0$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta simulação, é possível notar que as curvas atendem as leis da física, ou seja, para um sistema sem amortecimento o movimento dos corpos irão continuar vibrando devido ao fato de que o amortecedor dissipa energia proveniente do movimento da massa (6). Em relação a rigidez, com o mesmo intuito de analisar qualitativamente sua influência, foi aumentado os valores das duas molas até 80000 N/m para registro das curvas de saída. A Figura 22 mostra o comportamento obtido.

Figura 22: Simulação $K = 80000$ N/m.



Fonte: Elaborado pelo autor

Neste ponto, nota-se mais uma vez uma resposta esperada, pois, ao aumentar o valor da rigidez o sistema ganha um caráter mais oscilatório, ou seja, os efeitos da energia cinética tendem a aumentar o que é evidenciado no maior número de oscilações que os corpos sofrem perante as mesmas condições em um curto espaço de tempo. Por fim, pode-se citar que os fenômenos físicos com relação aos parâmetros principais do sistema (massa, mola e amortecedor) atendem bem perante o comportamento esperado dentro das leis físicas, ou seja, as curvas obtidas se confirmaram confiáveis diante do comportamento analisado.

5 Conclusão

5.1 Pontos principais

A análise aprofundada dos resultados obtidos permite concluir que esta primeira versão do algoritmo de otimização desenvolvido para o veículo de Formula SAE representa um ponto de partida robusto e promissor. A metodologia empregada foi validada e demonstrou eficácia, superando as expectativas iniciais e estabelecendo uma base sólida sobre a qual futuras melhorias e expansões poderão ser construídas.

O benefício mais imediato e impactante observado é a diminuição expressiva do tempo de ciclo do projeto de suspensão. Processos que anteriormente demandavam um esforço iterativo manual extenso, muitas vezes suscetíveis a erros e consumindo dias de trabalho, agora podem ser executados e validados em uma fração do tempo. Esta automação libera o projetista de tarefas computacionais repetitivas, permitindo que ele se concentre em análises de maior valor agregado, como a interpretação dos dados e a exploração de diferentes cenários de performance. Desta forma, o engenheiro não apenas economiza horas valiosas, mas também eleva a qualidade de sua análise ao contar com um controle gráfico, visual e analítico mais poderoso para uma tomada de decisão embasada.

Este ganho de eficiência não é um benefício isolado, mas sim um fator que reverbera positivamente por toda a equipe, gerando um impacto substancial no cronograma geral. No contexto competitivo do Formula SAE, o projeto da suspensão é notoriamente um processo crítico que dita o ritmo de toda a equipe. Ele define parâmetros fundamentais e pontos de fixação (*hard points*) que são pré-requisitos diretos para o avanço de outros subsistemas cruciais, como o chassi, a direção e o pacote aerodinâmico. Ao acelerar e consolidar o projeto da suspensão, o algoritmo efetivamente otimiza o fluxo de trabalho global, quebrando um gargalo de desenvolvimento e permitindo que as outras áreas iniciem seus trabalhos mais cedo e com dados mais confiáveis. Portanto, a melhora no tempo deste projeto acarreta uma drástica e positiva mudança na dinâmica da equipe, potencializando o desenvolvimento do protótipo como um todo. Com relação as curvas obtidas através da modelagem de 4DOF, pode-se notar que o programa responde de uma forma incrivelmente bem, corroborado através das confirmações das leis físicas vista nas simulações, uma vez que, o projetista tem total liberdade para variar os parâmetros cruciais para o projeto afim de obter um melhor steep de suspensão em todas as fases do projeto.

5.2 Trabalhos Futuros

Por fim, após essa primeira e experimental versão do algoritmo, há pontos de melhorias para trabalhos futuros, dentre eles podemos citar:

Validação do algoritmo com coleta de dados reais do projeto do veículo: este ponto torna-se crucial no mundo do Formula SAE, uma vez que, neste há uma necessidade robusta de precisão para com o protótipo em pista e se tratando de um algoritmo com grande base teórica, os resultados irão divergir em alguns pontos, pois, o projeto não consegue refletir totalmente o veículo após sua construção.

Por fim, utilização de métodos de otimização: conforme mostrado, o projetista irá definir os pontos de suspensão e com o auxílio dos sliders irá variar parâmetros até chegar em um projeto de suspensão ideal (oque já mostra um grande passo em relação aos métodos convencionais), porém, ao implementar métodos de otimização, abre-se uma gama de possibilidades para com o código já criado, uma vez que, é possível definir espaços pré delimitados aos pontos de suspensão para que haja uma otimização de um parâmetro de saída escolhido como por exemplo a transferência lateral de carga tornando o algoritmo ferramenta ainda mais poderosa.

6 Referências

Referências

- 1 MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. *Race Car Vehicle Dynamics*. 1. ed. Warrendale, Pennsylvania, EUA: SAE International (Society of Automotive Engineers), 1995.
- 2 ALURA. *O que é Python? — um guia completo para iniciar nessa linguagem de programação*. 2023. <<https://www.alura.com.br/artigos/python>>. Acesso em: 12 dez. 2025.
- 3 SEGERS, J. *Analysis Techniques for Racecar Data Acquisition*. 2. ed. Warrendale, Pennsylvania, EUA: SAE International, 2014.
- 4 SLR. *The Science of Camber in Drifting: A Technical Guide*. 2025. <<https://slrspeed.com/blogs/news/the-science-of-camber-in-drifting-a-technical-guide?srsltid=AfmBOoqt4QTdnn-iGggaWgUu7PV1jVsjqYMd35nVL0jh9YV5ScvbnV0N>>, note = Acesso em: 12 dez. 2025.
- 5 EQUIPE DIDÁTICA RACING CAR DYNAMICS. *Módulo 6 - Geometria de Suspensão e Direção*. 2024. Apostila, Material Didático Interno. Acesso em: 12 dez. 2025.
- 6 RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.