

UBIRAJARA L. VAN KOLCK

29
3

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA
E
TEORIAS DE GAUGE



Dissertação de Mestrado
apresentada no
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

Orientador: Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

São Paulo

Agosto de 1987

À memória de
meu pai.

Agradecimentos

Como qualquer outro trabalho, este é o resultado das vivências de seu autor e, portanto, da influência das pessoas que com ele conviveram. É difícil citá-las todas e, mais ainda, expressar a cada uma minha estima. Vou tentar. Agradeço

- à Cíntia, meu amor, minha companheira, meu maior exemplo de tudo de bom que pode nascer entre duas pessoas, esteio e estímulo para esta dissertação;
- ao Pimentel, meu amigo, meu orientador, que me mostrou de modo tão simples e cuidadoso quão agradável pode ser trabalhar com liberdade e respeito, sem imediatismo;
- ao Carias, ao Edson, ao Elso e ao Gustavo, que, compartilhando dor e alegria, revelaram-se grandes amigos em um período turbulento; suas amizades são talvez o melhor produto desses anos no IFT;
- ao Denis, ao Elso (de novo), ao Marcelo (apesar de tudo...) e à Norma, pelos mais de seis anos juntos na física; ao Jonas, tantas partidas depois; ao Zimmerman e ao Alfredo, por discussões sobre pontos deste trabalho; à Cristina, por isso e, sobretudo, pela alegria contagiante; ao Bira, ao Braz, ao Airton, ao Seu Moacir, ao Seu Antônio, ao Alberto, ...; enfim, a todos alunos, professores e funcionários do IFT;
- à turbulência, doce mas às vezes perdida, que me apontou carinhosamente a necessidade de muitas mudanças e foi, indiretamente, responsável pelo que há de novo aqui;
- e, como não poderia deixar de ser, à minha mãe, que (também) é a melhor do mundo.

Além disto, foram fundamentais o suporte financeiro da CAPES e o eficiente e simpático trabalho de datilografia da Maria Inês.

ÍNDICE

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA E TEORIAS DE GAUGE

RESUMO/ABSTRACT	1
INTRODUÇÃO	3
I. CONSIDERAÇÕES GERAIS	11
1. Teorema Flutuação-Dissipação	16
2. Ruído Gaussiano	18
II. CAMPO ESCALAR	21
1. Quantização	21
2. Regularização	32
a. Regularizações Usuais	33
b. Regularizações Estocásticas	34
III. CAMPO DE GAUGE ABELIANO LIVRE	43
1. Abordagem de Parisi e Wu	44
2. Fixação de Gauge	50
IV. ELETRODINÂMICA ESCALAR	53
1. Quantização	55
a. Abordagem de Parisi e Wu	55
b. Fixação de Gauge	64
b1. Fixação de Gauge na Ação	64
b2. Fixação Estocástica de Gauge	66
2. Regularização	70
a. Dimensional	70
b. Estocástica	74

V.	CAMPO DE GAUGE NÃO-ABELIANO	81
1.	Quantização	83
a.	Abordagem de Parisi e Wu	83
b.	Ação de Fadeev - Popov	88
c.	Fixação de Gauge de Zwanziger	92
2.	Regularização Dimensional	95
a.	Polarização do Vácuo	95
b.	$\langle F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} \rangle$	98
VI.	CONCLUSÃO	101

APÊNDICES

A.	Movimento Browniano	105
B.	Prova do Teorema Flutuação-Dissipação	125
C.	Outras Abordagens da QE	127
D.	Um exemplo: $\lambda\phi^4$	137
E.	Equivalência entre a QE e a Teoria Convencional ...	140
F.	Correlação Escalar com Regularização Dimensional ..	143
G.	Polarização do Vácuo na Eletrodinâmica Escalar com Regularização Dimensional	148
H.	Polarização do Vácuo na Eletrodinâmica Escalar com Regularização Estocástica Analítica	152
I.	Polarização do Vácuo na Teoria Não-Abeliana com Regularização Dimensional	156
J.	$\langle F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} \rangle$ na Teoria Não-Abeliana com Regularização Dimensional	165
K.	Algumas Integrais	174

REFERÊNCIAS	177
-------------------	-----

LEGENDA DAS FIGURAS	181
---------------------------	-----

FIGURAS	183
---------------	-----

RESUMO. Apresenta-se a quantização estocástica tomando o Teorema Flutuação-Dissipação como guia. Mostra-se que a abordagem original de Parisi e Wu não dá resultados corretos para quantidades invariantes de gauge com regularização dimensional. Embora exista uma solução simples no caso abeliano, é provavelmente necessário partir de uma ação invariante de BRST (ao invés de invariante de gauge) em uma teoria não-abeliana. Discutem-se também as regularizações estocásticas.

ABSTRACT. Stochastic quantization is presented taking the Fluctuation-Dissipation Theorem as a guide. It is shown that the original approach of Parisi and Wu to gauge theories fails to give the right results to gauge invariant quantities when dimensional regularization is used. Although there is a simple solution in an abelian theory, in the non-abelian case it is probably necessary to start from a BRST invariant action instead of a gauge invariant one. Stochastic regularizations are also discussed.

INTRODUÇÃO

De nossas experiências cotidianas clássicas, isto é, com aparelhos de medição macroscópicos, desenvolvemos os conceitos "naturais" de números e funções reais. A mecânica clássica, que utiliza-os na descrição dos estados e das variáveis dinâmicas de um sistema, cresceu adaptada às imagens que formamos como resultado de tais experiências. Na origem da dinâmica de um sistema estão suas equações de movimento, que podem ser "derivadas" como equações de Euler-Lagrange de uma ação ou equações de Hamilton de uma hamiltoniana, nos dois formalismos mais comuns.

No entanto, a investigação de fenômenos microscópicos, pelos mesmos aparelhos clássicos, mostrou que alguns conceitos eram inadequados na sua descrição. A causalidade presente nas equações de movimento permanece apenas enquanto o sistema não é perturbado; toda medida, entretanto, afeta-o, e introduzimos o conceito de probabilidade (enquanto característica intrínseca do processo) de obtermos certos resultados experimentais. À receita para sua introdução, a partir da mais intuitiva mecânica clássica, damos o nome de método de quantização.

O primeiro de tais métodos [0.1] consiste, basicamente, em encarar variáveis canonicamente conjugadas como operadores lineares agindo sobre um espaço de Hilbert de estados, sujeitos a relações de comutação obtidas por analogia clássica. As demais variáveis dinâmicas e, principalmente, o hamiltoniano H se escrevem como as mesmas funções clássicas (a menos de problemas de

ordenamento) das variáveis canônicas. A evolução no tempo é governada pelo hamiltoniano através de equações diferenciais (de Schrödinger ou de Heisenberg).

Alternativamente a esta formulação "hamiltoniana", Feynman, seguindo idéias de Dirac [0.2], desenvolveu uma nova abordagem, "lagrangiana", em que a evolução é descrita por uma soma sobre to das as trajetórias possíveis, cada uma com um peso $\exp \{i \frac{S}{\hbar}\}$, on de S é ação (efetiva) do sistema clássico.

Ambas as linguagens desenvolveram-se bastante, de forma complementar, aplicando-se a um sem-número de situações. Não obstante, teorias de gauge foram sempre difíceis de quantizar, em função de uma super-descrição através de potenciais $A_\mu^a(x)$: em função da liberdade de gauge, o número de graus de liberdade é menor que o número de componentes de potencial.

Consideremos em primeiro lugar a abordagem canônica. A tarefa inicial é passar da ação clássica

$$S_{cl} = \int d^D x \text{Tr } F_{\mu\nu}^2(x)$$

para uma descrição hamiltoniana. O primeiro problema que aparece é que a lagrangiana é singular: não depende de $\partial_0 A_0^a$ e o momento canonicamente conjugado a A_0^a é nulo.

Um caminho a seguir é se restringir, de antemão, aos graus de liberdade físicos, utilizando a liberdade de gauge (estamos face ao programa de Dirac [0.3] de quantizar sistemas vinculados). Por exemplo, começamos fazendo $A_0^a = 0$ e obtendo a lei de Gauss como um vínculo independente do tempo da hamiltoniana associada à S_{cl} . No caso de uma teoria abeliana, como o eletromagnetismo,

podemos fazer a escolha do gauge de Coulomb $\partial_i A_i = 0$ imediatamente e em seguida quantizar o campo transversal ou seguir a ordem inversa restringindo os estados físicos. Para uma teoria não-abeliana o método complica-se devido à auto-interação e chegamos rapidamente a fórmulas intratáveis [0.4].

É interessante, entretanto, manter manifesta a covariância de Lorentz da teoria, tratando as componentes do campo em pé de igualdade. Para tanto adicionamos à S_{cl} um termo de fixação de gauge

$$S_{gf} = \frac{1}{2\xi} \int d^D x (\partial^\mu A_\mu^a(x))^2$$

(com ξ um parâmetro real positivo), que modifica as equações de movimento. No caso abeliano isto permite generalizar de maneira direta e covariante o procedimento seguido no gauge de Coulomb, mas o espaço de Hilbert passa a ter métrica indefinida. Gupta e depois Bleuler [0.5] mostraram que a teoria de Maxwell é recuperada se impomos uma restrição sobre os estados admissíveis $|P\rangle$ da forma $\partial^\mu A_\mu^{(-)} |P\rangle = 0$ com $A_\mu^{(-)}$ a parte de aniquilação de A_μ . Com isto a condição de Lorentz se verifica na média:

$$\langle P | \partial^\mu A_\mu | P \rangle = 0.$$

Novamente uma teoria não-abeliana apresenta dificuldades adicionais. A seqüência natural seria encarar os termos tri e quadri-lineares nos campos, presentes em S_{cl} , como uma perturbação aos N campos livres (quantizados pelo método de Gupta-Bleuler). Feynman [0.6] foi o primeiro a notar que diagramas com "loops" apresentavam problemas: devido à propagação longitudinal nas linhas internas, violava-se unitariedade e transversalidade. Novas

regras para diagramas com um só "loop" foram dadas pelo próprio Feynman e, mais detalhadamente, por de Witt [0.7].

A quantização por integrais de trajetória permite generalizar estas regras para um diagrama arbitrário. Não podemos, entretanto, aplicar o método para S_{cl} sem considerações adicionais: a invariância de gauge implica um infinito adicional proveniente da contribuição igual de campos de uma mesma órbita de gauge (isto é, campos ligados por uma transformação de gauge). Novamente podemos abandonar de partida a covariância de Lorentz restringindo a integração aos graus de liberdades físicos, mas graças à Fadeev e Popov [0.8] temos um método direto de trabalhar com uma condição de gauge qualquer. Sua idéia é integrar apenas sobre uma superfície, como a dada por $\partial^\mu A_\mu^a(x) = B(x)$, $B(x)$ arbitrário, que corte as órbitas de gauge uma só vez (a independência de $B(x)$ do funcional gerador permite integrar sobre ele com um peso gaussiano). Agindo assim, obtemos justamente $\exp \frac{i}{\hbar} \{ S_{cl} + S_{gf} \}$, mas ganhamos também o determinante da matriz que mede a resposta da condição de gauge à uma transformação de gauge infinitesimal. Quando o campo é abeliano, este determinante não depende do campo e pode ser absorvido na normalização; para uma teoria não-abeliana a expansão perturbativa na constante de acoplamento dá lugar a termos não-locais nos campos e é mais conveniente, então, introduzir campos escalares grassmanianos fictícios (os fantasmas de Fadeev-Popov), que interagem localmente com os campos de gauge. À ação resultante S_{FP} , com a contribuição clássica, de fixação de gauge e de fantasmas, chamaremos ação de Fadeev-Popov.

Recentemente este procedimento foi revertido [0.9] através de uma generalização da transformação de gauge, a transformação de BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin), em que os N parâmetros locais de gauge são escritos como produtos de um parâmetro

independente do espaço-tempo e N campos (fantasmas), todos grassmanianos. Introduzem-se ainda outros $2N$ campos, N grassmanianos (anti-fantasmas) e N reais (auxiliares). As leis de transformação de BRST são construídas de forma a assegurar sua nilpotência. Nós então tomamos os campos de gauge, fantasmas, anti-fantasmas e auxiliares como aqueles a serem quantizados. Definimos um espaço de estados físicos invariantes por BRST e construímos a ação do sistema adicionando à lagrangiana clássica a transformada de BRST de uma função dos campos da teoria (o que garante a invariância por BRST da lagrangiana total). Com algumas imposições gerais obtemos justamente a ação de Fadeev-Popov. A quantização então prossegue pelo método canônico ou por integração funcional. Em resumo, procedemos à quantização encarando a simetria de BRST como um princípio, como a versão quântica fundamental da simetria de gauge.

Temos, neste ponto, uma teoria de perturbação covariante para uma teoria de gauge. Evidentemente, o trabalho não está completo uma vez que os diagramas de Feynman são, em geral, divergentes na região ultravioleta, e demanda-se um processo de exibição (regularização) e subtração (renormalização) destas divergências. Com uma lagrangiana renormalizada invariante de gauge, a unitariedade da matriz S surge como consequência de sua unitariedade nos gauges "físicos". São desejáveis, por isso, esquemas de regularização que respeitem a invariância de gauge. Nem todas as técnicas desenvolvidas para teorias escalares funcionam. Particularmente útil, por sua simplicidade, é a regularização dimensional [0.10] em que se faz uma continuação analítica de dimensões suficientemente baixas ou complexas (em que as integrais convergem) para a dimensão de interesse. O outro método invariante aplicável a teorias não-abelianas é o de derivadas covariantes mais altas [0.11], uma generalização invariante do método de

inserir na lagrangiana termos em derivadas mais altas, aliado a uma outra generalização, no método de Fadeev-Popov.

Apesar de tudo, um problema ainda persiste. A questão é que qualquer que seja o método de quantização seguido, canônico ou integral de trajetória, impomos uma condição sobre os campos (fixação de gauge) que supomos bem definida e não singular. Isto é, supomos que, dado um campo qualquer, existe apenas um outro campo em sua órbita satisfazendo tal condição de gauge (por exemplo, tendo uma dada divergência $B(x)$). Ocorre que Gribov [0.12] mostrou que isto em geral não é verdade em teorias não-abelianas, ao menos para os gauges de Coulomb e de Lorentz (neste último caso, se a teoria é abeliana basta limitarmo-nos, como é usual, a campos que se anulam no infinito). Apenas quando trabalhamos com campos pequenos, próximos de $A_\mu = 0$ (isto é, apenas perturbativamente), o determinante de Fadeev-Popov não tem autovalores nulos e a quantização covariante funciona. As regularizações acima são, portanto, também perturbativas.

Em 1981, Parisi e Wu [1.4] propuseram um novo método de quantização, chamado desde então quantização estocástica (QE). A esperança era que, baseando a quantização apenas na equação de movimento clássica, a fixação de gauge não seria necessária e evitar-se-ia, assim, a ambigüidade de Gribov. Os caminhos para uma teoria não-perturbativa de gauge estariam abertos.

Este trabalho pretende apresentar a QE em uma abordagem nova: baseando-se na física apreendida no movimento browniano, encaramos o Teorema de Flutuação-Dissipação como um guia. Em particular, vamos mostrar que aquela esperança não está, em princípio, justificada e a QE talvez só funcione, de fato, a nível perturbativo, em teorias de gauge.

Começamos no Capítulo I introduzindo o método e fazendo alguns comentários nem sempre claros na literatura. Esta discussão, bem como toda seqüência, está fortemente ligada a lições que tomamos no caso simples de uma partícula executando movimento browniano (revisto no Apêndice A). O Apêndice B exhibe a prova do Teorema utilizado ao longo do trabalho.

No Capítulo II desenvolvemos a quantização de um campo escalar real, que é o caso mais simples e estudado. Muito do potencial da QE se torna claro, por exemplo, na possibilidade de regular a teoria convencional de maneira puramente estocástica. Os Apêndices D e E ilustram alguns pontos.

O Capítulo III generaliza a QE para um campo $U(1)$ livre. No espírito da proposta original de Parisi e Wu sugerimos uma modificação na QE, na sua forma mais branda representando uma liberdade até agora ignorada. Outros esquemas fixam o gauge.

As idéias dos Capítulos precedentes se aplicam à Eletrodinâmica Escalar no Capítulo IV. Utilizando os resultados obtidos nos Apêndices F e G mostramos que a idéia original de Parisi e Wu só é compatível com a regularização dimensional se utilizamos a liberdade por nós assinalada. Como consequência a fixação de gauge estocástica também falha (a fixação de gauge na ação, entretanto, funciona). Utilizando o Apêndice H, mostramos que a regularização estocástica também não é, em princípio, adequada, com fixação na ação.

O caso não-abeliano é tratado no Capítulo V. Confirmamos nossas críticas à abordagem de Parisi-Wu, utilizando os Apêndices

I e J, e investigamos a possibilidade de partir da ação invariante por BRST.

Estes dois últimos são os capítulos centrais do trabalho.

O Apêndice C exhibe abordagens alternativas à QE, enquanto o K resume as fórmulas de regularização dimensional.

O Capítulo VI é dedicado às conclusões.

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Iniciemos com certa generalidade: consideremos uma teoria euclidiana de campos (bosônicos ou fermiônicos) reais⁺ $\varphi_1(x)$, 1 denotando um conjunto de índices (espaço-temporais ou internos), em D dimensões, $x = (x_0, x_1, \dots, x_{D-1})$, descrita pela ação

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_I[\varphi] \equiv \int d^D x (L_0(\varphi) + L_I(\varphi))$$

onde $L_0(\varphi)$ é a lagrangiana livre e $L_I(\varphi)$, a interação.

A nível clássico, a dinâmica do sistema está contida nas equações de movimento

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1(x)} = 0$$

que podem ser obtidas pelo Princípio de Mínima Ação. Quanticamente todas as configurações contribuem para a evolução do sistema; usualmente estamos interessados em calcular as funções de Green, que são os valores esperados no vácuo do produto de campos e podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\varphi_{1_1}(x_1) \dots \varphi_{1_n}(x_n)] | 0 \rangle &= \frac{\int D\varphi [\varphi_{1_1}(x_1) \dots \varphi_{1_n}(x_n)] e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi]}}{\int D\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi]}} \\ &= N \int D\varphi [\varphi_{1_1}(x_1) \dots \varphi_{1_n}(x_n)] e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi]} \end{aligned} \quad (1.0)$$

+ Campos complexos se constróem a partir destes.

É bastante conhecida a analogia entre esta formulação integral funcional e a mecânica estatística de equilíbrio. Ocorre que a medida da integral de trajetória (1.0) pode ser encarada como uma distribuição de Boltzmann com S no papel da energia potencial e $\hbar$ no da temperatura, kT . As funções de Green, que medem flutuações quânticas, são funções de correlação, ligadas a flutuações térmicas.

[Digressão: Esta analogia entre um sistema estatístico clássico em D dimensões (espaciais) e um sistema descrito por uma teoria euclidiana de campos quântica também em D dimensões (uma temporal e $D-1$ espaciais) pode ser formulada de maneira mais precisa introduzindo uma rede (hiper-) cúbica no espaço. Nas proximidades de um ponto crítico a magnitude do parâmetro de ordem e a estrutura (em particular, o espaçamento) da rede não são relevantes, e o problema estatístico a temperaturas acima da crítica pode ser tratado como uma teoria de campos. No caso estático [1.1, 1.2], tudo bem. Mas a que corresponde um fenômeno crítico dinâmico, em que o parâmetro de ordem relaxa vagarosamente para o equilíbrio, através de uma equação estocástica [1.1, 1.3] ?]

A idéia de Parisi e Wu [1.4, 1.5] foi generalizar tal formulação, interpretando a densidade de probabilidade $N \exp \{-\frac{S}{\hbar}\}$ como a distribuição de equilíbrio de um problema estatístico fora-de-equilíbrio que se desenrola em um "tempo fictício" (ou "tempo extra", ou "5º tempo", ou simplesmente "tempo") τ , do qual o campo (clássico) também é função: $\phi_1 = \phi_1(x, \tau)$.

Talvez o exemplo mais conhecido de sistema em que ocorre relaxação para o equilíbrio seja o de uma partícula que executa

movimento browniano [veja Ap. A]. Postulamos então que o sistema de interesse está imerso, a partir do instante τ_0 , em um reservatório térmico $(D+1)$ -dimensional à temperatura $T \sim \hbar$, com sua dinâmica (no tempo $\tau > \tau_0$) simulada pela equação de Langevin generalizada

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(x, \tau) \equiv \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = & - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int d^D y K_{1m}(x, y, \tau - \tau') \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_m(y, \tau')} + \\ & + \int d^D y R_{1m}(x, y) \eta_m(y, \tau), \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde⁺

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1(y, \tau)} \equiv \left. \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1(y)} \right|_{\varphi_1(y) = \varphi_1(y, \tau)},$$

$K_{1m}(x, y, \tau - \tau')$ e $R_{1m}(x, y)$ reais são núcleos por hora arbitrários de, respectivamente, uma "força de atrito" e uma "força aleatória" ou "ruído" $\eta_1(x, \tau)$.

A solução $\varphi^\eta([\eta, \varphi^0], \tau)$ de (1.1) é um funcional da variável aleatória η e da condição inicial $\varphi_1(x, \tau_0) = \varphi_1^0(x)$. Tudo o que podemos calcular são médias estatísticas sobre um ensemble de sistemas. No espírito do movimento browniano assumimos que a força η varia rapidamente e não é correlacionada com a configuração inicial; assim a média de um funcional qualquer $A[\eta, \varphi^0]$ é

$$\langle A[\eta, \varphi^0] \rangle = \int 'D\eta D\varphi^0 A[\eta, \varphi^0] P([\eta], \tau) P[\varphi^0], \quad (1.2)$$

onde $P([\eta], \tau)$ e $P[\varphi^0]$ são as densidades de probabilidade de obtermos as configurações $\eta(x, \tau')$, $\tau_0 < \tau' < \tau$, e $\varphi^0(x)$, respectivamente, $D\varphi^0 = \pi D\varphi_1^0$ é a medida D -dimensional de φ^0 e $'D\eta$, um produto das medidas D -dimensionais usuais, $'D\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \pi D\eta_1(\tau_i)$ com $\eta_1(\tau_i)$

⁺ Enfatizemos que basta conhecer a equação de movimento; não precisamos conhecer S .

as configurações nos N tempos τ_i em que foi dividido o intervalo τ_0 a τ . Em particular

$$\langle \varphi_1(x, \tau_0) \eta_1(x', \tau) \rangle = \langle \varphi_1(x, \tau_0) \rangle \langle \eta_1(x', \tau) \rangle, \quad \tau > \tau_0. \quad (1.3)$$

Podemos introduzir maneiras alternativas de escrever as médias (1.2). Seja $B[\varphi^\eta, \varphi^0]$ um funcional qualquer dos campos que satisfazem (1.1). Definimos a ação de Fokker - Planck $S_{FP}([\varphi], \tau)$ pela integral de trajetória $(D+1)$ -dimensional

$$\langle B[\varphi^\eta, \varphi^0] \rangle \equiv \int \tilde{D}\varphi B[\varphi, \varphi^0] P[\varphi^0] e^{\frac{1}{2\hbar} S[\varphi^0]} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{FP}([\varphi], \tau)} e^{-\frac{1}{2\hbar} S[\varphi(\tau)]} \quad (1.4)$$

onde $\tilde{D}\varphi \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^N \pi D\varphi_1(\tau_i) \equiv D\varphi^0 \tilde{D}\varphi$. A ação S_{FP} pode ser escrita como uma integral sobre o ruído:

$$e^{\frac{1}{2\hbar} S[\varphi^0]} e^{-\frac{1}{\hbar} S_{FP}([\varphi], \tau)} e^{-\frac{1}{2\hbar} S[\varphi(\tau)]} = \int \tilde{D}\eta \delta(\varphi(x, \tau) - \varphi^\eta(x, \tau)) P([\eta], \tau). \quad (1.5)$$

Este é o ponto de partida de uma formulação integral-funcional do método [veja Ap. C].

Se B é um funcional dos campos apenas em um determinado 5º tempo, a integral passa a ser D -dimensional. Definindo a probabilidade $P([\varphi], \tau)$ de obtermos a configuração φ no instante τ , temos, por exemplo,

$$\langle \varphi_{1_1}^\eta(x_1, \tau) \dots \varphi_{1_n}^\eta(x_n, \tau) \rangle \equiv \int D\varphi \varphi_{1_1}(x_1) \dots \varphi_{1_n}(x_n) P([\varphi], \tau) \quad (1.6)$$

desde que

$$\begin{aligned} P([\varphi], \tau) &= \langle \delta(\varphi_1(x) - \varphi_1^\eta(x, \tau)) \rangle = \\ &= \int \tilde{D}\eta D\varphi^0 \delta(\varphi_1(x) - \varphi_1^\eta(x, \tau)) P([\eta], \tau) P[\varphi^0] = \end{aligned}$$

$$= \int \tilde{D}\varphi \, \delta(\varphi_1(x) - \varphi_1(x, \tau)) \, P[\varphi^0] \, e^{\frac{1}{2\hbar} S[\varphi^0]} \, e^{-\frac{1}{\hbar} S_{FP}([\varphi], \tau')} \, e^{-\frac{1}{2\hbar} S[\varphi(\tau')]} \, , \tau' > \tau . \quad (1.7)$$

De modo análogo, podemos construir probabilidades conjuntas de obtermos várias configurações em diferentes instantes e, a partir destas, as probabilidades condicionais. Tratam-se de extensões diretas das probabilidades introduzidas no movimento browniano [Ap. A].

O método de quantização estocástica (QE) se traduz pela expressão

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P([\varphi], \tau) = N e^{-\frac{1}{\hbar} S[\eta]} , \quad (1.8)$$

ao menos no sentido fraco, em que as funções de Green (1.0) são obtidas como limite das funções de correlações (1.6), isto é, das médias de produtos de campos que resolvem a equação de Langevin generalizada, a tempos iguais⁺:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \varphi_{1_1}^\eta(x_1, \tau) \cdots \varphi_{1_n}^\eta(x_n, \tau) \rangle = \langle 0 | T [\varphi_{1_1}'(x_1) \cdots \varphi_{1_n}(x_n)] | 0 \rangle . \quad (1.9)$$

Tal propriedade não é automática: depende de características da força aleatória, que examinaremos a seguir.

Impomos inicialmente que sua média seja nula,

$$\langle \eta_1(x, \tau) \rangle = 0 .$$

Por isso (1.3) torna-se

$$\langle \varphi_1(x, \tau_0) \eta_1(x', \tau) \rangle = 0 , \quad \tau > \tau_0 . \quad (1.10)$$

⁺ No caso de teorias de gauge pode ser vantajoso requerer que apenas quantidades invariantes de gauge compartilhem esta propriedade.

I.1 Teorema Flutuação - Dissipação (TFD)

Por definição [p. ex., A.2], um estado estacionário é tal que, quando o sistema é preparado inicialmente nele, a distribuição $P[\varphi^0]$ garante que as correlações não são afetadas por uma translação no 5º tempo:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{1_1}^\eta(x_1, \tau_1 + \tau) \varphi_{1_2}^\eta(x_2, \tau_2 + \tau) \dots \varphi_{1_n}^\eta(x_n, \tau_n + \tau) \rangle = \\ = \langle \varphi_{1_1}^\eta(x_1, \tau_1) \varphi_{1_2}^\eta(x_2, \tau_2) \dots \varphi_{1_n}^\eta(x_n, \tau_n) \rangle . \quad (1.11) \end{aligned}$$

Em conseqüência, o instante τ_0 é arbitrário e não precisamos tomar o limite $\tau \rightarrow \infty$ a fim de obter a situação de equilíbrio:

$$P([\varphi], \tau) = P([\varphi]) .$$

Quais as condições sobre a correlação da força aleatória em dois instantes,

$$\langle \eta_1(x, \tau) \eta_{1'}(x', \tau') \rangle \equiv \chi_{11'}(x, x', \tau, \tau') \geq 0 ,$$

que devemos impor de forma a permitirmos a existência de um estado estacionário? A resposta vem através do Teorema Flutuação-Dissipação em sua forma clássica.

Se $\frac{\delta S}{\delta \varphi}$ é um polinômio em φ podemos estender a derivação de Kubo [A.4] do TFD, como exibimos no Ap. B. Enunciamo-lo como: a condição necessária para que a equação de Langevin generalizada (1.1) sujeita à condição (1.10) admita um estado estacionário é que

$$\begin{aligned}
& \int d^D y \int d^D y' R_{1m}(x, y) R_{1,m'}(x', y') \chi_{mm'}(y, y', \tau, \tau') = \\
& = \int d^D z \{ \theta(\tau - \tau') K_{1n}(x, z, \tau - \tau') \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_n(z, \tau_0)} \varphi_{1'}(x', \tau_0) \right\rangle + \theta(\tau' - \tau) K_{1,n'}(x', z, \tau' - \tau) \cdot \\
& \quad \cdot \left\langle \varphi_1(x, \tau_0) \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_n(z, \tau_0)} \right\rangle \}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Isto relaciona propriedades da força aleatória (X, R) - flutuação - com o núcleo da força de atrito (K) - dissipação.

Note que χ é função de $|\tau - \tau'|$, uma condição necessária para que $\eta(x, \tau)$ seja uma variável estacionária.

Se desejamos que o estado estacionário seja o estado de equilíbrio $P[\varphi^0] = N \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[\varphi^0] \right\}$,

$$\left. \begin{aligned}
\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_n(z, \tau_0)} \varphi_{1'}(x', \tau_0) \right\rangle &= \hbar \delta_{n1'} \delta(z - x') \\
\left\langle \varphi_1(x, \tau_0) \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_n(z, \tau_0)} \right\rangle &= \mp \hbar \delta_{n1} \delta(x - z)
\end{aligned} \right\} \tag{1.13}$$

$$\text{fazendo } \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_m(x, \tau_0)} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[\varphi^0] \right\} = \frac{-\hbar \delta \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[\varphi^0] \right\}}{\delta \varphi_m(x, \tau_0)} \quad e$$

uma integração por partes; o sinal positivo se aplica para um campo bosônico e o negativo, para um grassmaniano. Estamos supondo nestas relações que φ_n não é cíclico, isto é, que $\frac{\delta S}{\delta \varphi_n}$ não é identicamente nulo. Então (1.12) se reduz a

$$\int d^D y \int d^D y' R_{1m}(x, y) R_{1,m'}(x', y') \chi_{mm'}(y, y', \tau, \tau') = \tag{1.14}$$

$$= \hbar [\theta(\tau - \tau') K_{11}(x, x', \tau - \tau') \pm \theta(\tau' - \tau) K_{1,1}(x', x, \tau' - \tau)]$$

com φ_1 e $\varphi_{1'}$ não cíclicos. Como poderia ter sido esperado, o caráter quântico (materializado em $\hbar$) aparece através do ruído.

Ao longo deste trabalho retornaremos ao TFD aplicando (1.12) e (1.14) a casos particulares.

I.2 Ruído Gaussiano: Markoviano e Não-Markoviano

De forma a determinar completamente o processo, precisamos impor o valor das médias de produtos do ruído em mais que dois instantes. Para manter a propriedade de decomposição de Wick,

$$\langle \eta_{1_1}(x_1, \tau_1) \dots \eta_{1_{2n-1}}(x_{2n-1}, \tau_{2n-1}) \rangle = 0 \quad (1.15)$$

$$\langle \eta_{1_1}(x_1, \tau_1) \dots \eta_{1_{2n}}(x_{2n}, \tau_{2n}) \rangle = \sum_{\text{permutações}} f(\epsilon_p) \prod_{\text{pares}} \langle \eta_{1_i}(x_i, \tau_i) \eta_{1_j}(x_j, \tau_j) \rangle ,$$

onde ϵ_p é o sinal da permutação e

$$f(\epsilon_p) = \begin{cases} 1 & \text{para bosons} \\ \epsilon_p & \text{para férmions.} \end{cases}$$

Existindo a inversa χ^{-1} ,

$$\int d^D x_2 \int d\tau_2 \chi_{1_1 1_2}(x_1, x_2, \tau_1, \tau_2) \chi_{1_2 1_3}^{-1}(x_2, x_3, \tau_2, \tau_3) = \delta_{1_1 1_3} \delta(x_1 - x_3) \delta(\tau_1 - \tau_3) ,$$

é direto verificar que a distribuição de probabilidade $P[\eta]$ é gaussiana:

$$P[\eta] = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int d^D x_1 \int d^D x_2 \int d\tau_1 \int d\tau_2 \eta_{1_1}(x_1, \tau_1) \chi_{1_1 1_2}^{-1}(x_1, x_2, \tau_1, \tau_2) \eta_{1_2}(x_2, \tau_2)}}{\int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int d^D x_1 \int d^D x_2 \int d\tau_1 \int d\tau_2 \eta_{1_1}(x_1, \tau_1) \chi_{1_1 1_2}^{-1}(x_1, x_2, \tau_1, \tau_2) \eta_{1_2}(x_2, \tau_2)}} \quad (1.16)$$

Desta forma a correlação de η em dois instantes determina todo o processo. Se $\int R_{1m} R_{1'm'} \langle \eta_m \eta_{m'} \rangle$ se anula, o processo se desenvolve como se não houvesse ruído algum. Tal acontece se fazemos $\hbar \rightarrow 0$: a configuração clássica $\varphi_{c1}(x)$ é solução da equação de Langevin generalizada.

CAPÍTULO II

CAMPO ESCALAR

O caso de um campo escalar real sem simetria interna é o mais simples e, conseqüentemente, o mais bem entendido. Nele o procedimento original de Parisi e Wu se aplica diretamente e algumas das potencialidades do método se evidenciam. Aqui enfatizaremos a abordagem perturbativa via equação de Langevin, cujos aspectos essenciais aparecem na quantização de outras teorias, como as de gauge. Pinceladas das outras abordagens (equação de Fokker - Planck e representação integral de trajetória) se encontram no Ap. C.

II.1 Quantização

Começemos da maneira mais simples [1.4]: concentremo-nos em um processo markoviano e estacionário. Isto significa tomar $K(x, y, \tau - \tau')$ e $\chi(x, y, \tau, \tau')$ com dependência $\delta(\tau - \tau')$ nos tempos e relacionar suas dependências em x e y com $R(x, y)$. Escolhemos partir da equação de Langevin

$$\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x, \tau)} + \eta(x, \tau) \quad , \quad (2.1)$$

o que implica⁺

⁺ Daqui para frente $\hbar = 1$

Se $\langle \eta_m(x, \tau) \eta_n(x', \tau') \rangle$ é função do tempo apenas na forma $|\tau - \tau'|$, assim são todas as demais correlações e η é dita variável estacionária. Ademais, se esta dependência é via $\delta(\tau - \tau')$, a variável é markoviana.

O processo, entretanto, só é dito (imprecisamente) estacionário (quando admite estado estacionário) e markoviano ("sem memória") dependendo dos núcleos da equação de Langevin.

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle = 2\delta(x-x')\delta(\tau-\tau') \quad , \quad (2.2)$$

se desejamos o equilíbrio dado por $N \exp \{-S\}$. Estamos aqui nos restringindo à uma ação do tipo

$$S = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi(x) \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \sum_{r \geq 3} \frac{1}{r!} g_r \varphi^r(x) \right\} \quad (2.3)$$

onde g_r são constantes de acoplamento.

É conveniente tomar a transformada de Fourier⁺, (2.1) se escrevendo como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(k, \tau)}{\partial \tau} = & - (k^2 + m^2) \varphi(k, \tau) + \\ & - \sum_r \frac{1}{r(r-1)!} g_r \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \int \frac{d^D k_{r-1}}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - \dots - k_{r-1}) \cdot \\ & \cdot \varphi(k_1, \tau) \dots \varphi(k_{r-1}, \tau) + \eta(k, \tau) \end{aligned} \quad (2.4)$$

com

$$\langle \eta(k, \tau) \eta(k', \tau') \rangle = 2(2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \quad . \quad (2.5)$$

Em geral esta é uma equação não-linear que não conseguimos resolver exatamente. Podemos, entretanto, transformá-la em uma equação integral, introduzindo a função de Green retardada li vre

$$g(k, \tau) = \theta(\tau) G(k, \tau) \quad ,$$

$$\frac{\partial g(k, \tau)}{\partial \tau} = - (k^2 + m^2) g(k, \tau) + \delta(\tau)$$

+ Adotaremos a definição

$$f(x, \tau) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(k, \tau) e^{ikx}$$

enquanto $G(k, \tau)$ satisfaz à equação homogênea e $\lim_{\tau \rightarrow 0} G(k, \tau) = 1$:

$$G(k, \tau) = e^{-(k^2 + m^2)\tau} \quad (2.6)$$

Se consideramos o ruído e a interação como "fontes" do campo, (2.4) torna-se

$$\begin{aligned} \varphi(k, \tau) = & \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \left[\eta(k, t) \right. \\ & - \sum_r \frac{1}{(r-1)!} g_r \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \int \frac{d^D k_{r-1}}{(2\pi)^D} (2\pi)^0 \delta(k-k_1-\dots-k_{r-1}) \varphi(k_1, t) \dots \\ & \left. \dots \varphi(k_{r-1}, t) + G(k, \tau) \varphi(k, 0) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

que tem a forma adequada para apelarmos à teoria de perturbações.

Começamos negligenciando completamente os g_r e obtendo

$$\varphi^{(0)}(k, \tau) = \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \eta(k, t) + G(k, \tau) \varphi(k, 0) .$$

Substituímos em seguida esta aproximação no lado direito de (2.7),

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(k, \tau) = & - \sum_r \frac{1}{(r-1)!} g_r \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \int \frac{d^D k_{r-1}}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-\dots-k_{r-1}) \cdot \\ & \cdot \varphi^{(0)}(k_1, t) \dots \varphi^{(0)}(k_{r-1}, t) \end{aligned}$$

e, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(k, \tau) = & - \sum_r \frac{1}{(r-1)!} g_r \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \int \frac{d^D k_{r-1}}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-\dots-k_{r-1}) \cdot \\ & \cdot \sum_{j=1}^{r-1} \varphi^{(0)}(k_1, t) \dots \varphi^{(1)}(k_j, t) \dots \varphi^{(0)}(k_{r-1}, t) \\ & \vdots \\ \varphi^{(n)}(k, \tau) = & - \sum_r \frac{1}{(r-1)!} g_r \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \int \frac{d^D k_{r-1}}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-\dots-k_{r-1}) \cdot \\ & \cdot \sum_{i_j \geq 0} \varphi^{(i_1)}(k_1, t) \dots \varphi^{(i_{r-1})}(k_{r-1}, t) \delta_{n-1, \sum i_j} \end{aligned}$$

A solução de (2.7) é

$$\varphi^\eta(x, \tau) = \varphi^{(0)}(x, \tau) + \varphi^{(1)}(x, \tau) + \dots + \varphi^{(n)}(x, \tau) + \dots \quad (2.9)$$

Podemos escrevê-la de maneira mais conveniente através de regras de Feynman estocásticas de árvore [Fig. 2.1a]. Denotemos a função de Green G por uma linha, o ruído por uma cruz, a condição inicial por um círculo e a interação por um vértice, e convençionemos integrar sobre momentos de vértices e tempos de cruzes e vértices (devido ao $\theta(\tau)$ em $g(k, \tau)$ estas integrais temporais são ordenadas: o limite superior de integração é o 5º tempo do vértice precedente).

Temos assim

$$\begin{aligned} \varphi^\eta(k, \tau) = & \text{---} \times + \sum_I \text{---} \begin{array}{c} \times^1 \\ \times^2 \\ \vdots \\ \times^{r-1} \end{array} + \sum_r \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{r'} \text{---} \begin{array}{c} \times^1 \\ \times^2 \\ \vdots \\ \times^{r-1} \end{array} \begin{array}{c} \times^{1'} \\ \times^{2'} \\ \vdots \\ \times^{r'-1} \end{array} + \dots \\ & + \text{---} \circ + \sum_I \left[\sum_{j=1}^{r-1} \text{---} \begin{array}{c} \times^1 \\ \times^2 \\ \vdots \\ \times^{r-1} \end{array} \begin{array}{c} \circ^1 \\ \circ^2 \\ \vdots \\ \circ^i \end{array} + \sum_{i \neq j} \text{---} \begin{array}{c} \times^1 \\ \times^2 \\ \vdots \\ \times^{r-1} \end{array} \begin{array}{c} \circ^1 \\ \circ^2 \\ \vdots \\ \circ^j \end{array} + \dots + \right. \\ & \left. \text{---} \begin{array}{c} \circ^1 \\ \circ^2 \\ \vdots \\ \circ^{r-1} \end{array} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

As funções de correlação se obtém agora tomando as médias sobre produtos de soluções (2.9). A média sobre o ruído é dada por (1.15) e (2.2): temos que ligar as cruzes duas a duas de todas as maneiras possíveis. A média sobre $\varphi(k, 0)$ é dada prescrevendo a distribuição $P[\varphi^0]$.

Observemos a função de correlação de dois pontos livre:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{(0)}(k, \tau) \varphi^{(0)}(k', \tau') \rangle = & e^{-(k^2 + m^2)\tau - (k'^2 + m^2)\tau'} \langle \varphi(k, 0) \varphi(k', 0) \rangle + \\ & + (2\pi)^D \delta(k + k') D(k, \tau, \tau') \quad , \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$\begin{aligned}
 D(k, \tau, \tau') &= 2 \int_0^{\min(\tau, \tau')} dt G(k, \tau-t) G(k, \tau'-t) = \\
 &= \frac{1}{k^2 + m^2} \left(e^{-(k^2 + m^2)|\tau - \tau'|} - e^{-(k^2 + m^2)(\tau + \tau')} \right). \quad (2.11b)
 \end{aligned}$$

Facilmente vemos que no limite $\tau, \tau' \rightarrow \infty$ recaímos justamente no propagador de Feynman $\frac{1}{k^2 + m^2}$, independentemente das condições iniciais. Note que, se a distribuição de φ inicial é a de equilíbrio,

$$D(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2 + m^2} e^{-(k^2 + m^2)|\tau - \tau'|}, \quad (2.12)$$

exibindo a estacionariedade do processo. Isto é equivalente a trabalhar a tempos grandes com qualquer condição inicial.

Em função do amortecimento gerado por $G(k, \tau)$ em (2.7) vemos que, de fato, a contribuição das condições iniciais desaparece em todas as funções de correlação a tempos grandes. Na medida que estamos interessados em recobrar a teoria convencional, podemos sem perda de generalidade fazer

$$\varphi(k, 0) = 0 \quad (2.13)$$

Neste caso podemos escrever diretamente as regras de Feynman estocásticas de correlações [Fig. 2.1b]. Os diagramas estocásticos S_F associados à $\langle \varphi^\eta(k_1, \tau_1) \cdots \varphi^\eta(k_n, \tau_n) \rangle$ são construídos pela receita [2.1, 2.4, 4.4]:

- 1) Desenhe todos os diagramas de Feynman ordinários F , correspondendo à cada vértice r um fator $-\frac{g_r}{r!}$, a cada linha um momento (conservação observada), a cada "loop" uma integração e ao diagrama como um todo um peso topológico, da maneira usual.

Em particular valem as relações

$$L - I + V = 1$$

$$\sum_r r V_r = n + 2I$$

$$\left. \begin{array}{l} L - I + V = 1 \\ \sum_r r V_r = n + 2I \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

entre o número de "loops" L , o número de linhas externas n e internas I , o número de vértices V_r do tipo r e o número total de vértices V .

- 2) Distribua cruzeiras pelas linhas em cada diagrama F - obtendo assim linhas cristãs (com cruz), E_C externas e I_C internas, e linhas agnósticas (sem cruz), E_A externas e I_A internas - de forma que cortando todas as linhas cristãs obtemos n árvores, isto é:

- todo "loop" tem ao menos uma cruz;
- dois pontos extremos não podem ser ligados por um caminho de linhas agnósticas;
- com excessão do diagrama que tem apenas uma linha (cristã), qualquer cruz pode ser ligada a um extremo por um caminho de linhas agnósticas:

$$E_A \geq 1. \quad (2.15)$$

A cada F temos, portanto, uma coleção de diagramas S_F que diferem pela disposição das cruzes; mas, como há uma correspondência bi-unívoca entre linhas agnósticas e vértices (proveniente dos diagramas de árvore),

$$E_A + I_A = V, \quad (2.16)$$

o número de cruzes é fixo: de (2.14)

$$C \equiv E_C + I_C = n + L - 1 \quad (2.17)$$

3) Associe a cada vértice um 5º tempo:

- a. aos externos, os tempos fixos $\tau_j, j = 1, \dots, n$
- b. aos internos, tempos a serem integrados, do tempo inicial a um 5º tempo de vértice vizinho, de forma que encontrarmos sempre uma seqüência crescente de tempos no caminho agnóstico que leva de um vértice a um extremo.

Quando $\tau_j = \tau, j = 1, \dots, n$, pode ser conveniente ordenar temporalmente todos os vértices; neste caso convençionamos um ordenamento entre os vértices ligados por linhas cristãs (compatível com 3b) e a amplitude do gráfico se decompõe na soma dos possíveis ordenamentos.

4) Associe a cada linha ligando dois vértices, de tempos τ_1 e τ_2 , por onde flue momento k ,

- a. a função de Green $G(k, |\tau_2 - \tau_1|)$, se agnóstica

b. o propagador livre $D(k, \tau_1, \tau_2)$, se cristã.

A contribuição de um diagrama arbitrário S_F será então da forma

$$I(k_j, \tau_j) = \int_{i=1}^L \frac{d^D q_i}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^V F_k J(k_j, q_i, \tau_j) \quad (2.18)$$

onde q_i são os momentos internos independentes, F_k os fatores advindos dos vértices e

$$J(k_j, q_i, \tau_j) = \int_{k=1}^V dt_k \prod_{l=1}^V G(Q_l, t_{l_2} - t_{l_1}) \prod_{m=1}^{n+L-1} D(Q_m, t_{m_2}, t_{m_1}) \quad , \quad (2.19)$$

com l_2, l_1 (m_2, m_1) denotando os vértices vizinhos à linha $l(m)$ de momento $Q_l(Q_m)$ (uma combinação linear de q_i, k_j).

A tempos grandes

$$J(k_j, q_i, \tau_j) = \int_{k=1}^V dt_k \prod_{\substack{\text{linhas} \\ \text{internas}}} \left(e^{-|t_{l_2} - t_{l_1}|(Q_l^2 + m^2)} \frac{1}{Q_m^2 + m^2} e^{-|t_{m_2} - t_{m_1}|(Q_m^2 + m^2)} \right) \cdot \prod_{\substack{\text{linhas} \\ \text{externas}}} G(k_j, \tau_j - t_{j_1}) D(k_i, \tau_i - t_{i_1}) \quad (2.20)$$

Façamos agora, neste limite, todos os τ_j iguais a τ . Fixemos um ordenamento temporal $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_v < t_{v+1} \equiv \tau$ e denotemos M_i o conjunto de momentos p que se reúne no vértice i . Vamos integrar nos tempos, retendo os termos dominantes (os demais são exponencialmente pequenos) [2.1].

Como é o menor 5º tempo, t_1 aparece nos expoentes de G's e D's com sinal positivo:

$$\int_0^{t_2} dt_1 e^{t_1 \sum_{M_1} (p^2+m^2)} \sim \frac{e^{t_2 \sum_{M_1} (p^2+m^2)}}{\sum_{M_1} (p^2+m^2)}$$

Já para t_2 devemos tomar algum cuidado. Podem existir linhas ligando os vértices 1 e 2, que geram fatores $\exp \{-(t_2-t_1) \cdot (p^2+m^2)\}$ antes da integração em t_1 . Nesse caso, a contribuição desta os cancela. Restam ainda as demais linhas do vértice 2, que se dirigem a vértices com tempos maiores e, portanto, expoentes positivos. Ou seja

$$\int_0^{t_3} dt_2 e^{t_2 \left(\sum_{M_1} (p^2+m^2) - \sum_{M_1 \cap M_2} (p^2+m^2) + \sum_{M_2 - M_1 \cap M_2} (p^2+m^2) \right)} \sim e^{t_3 W_2} \frac{\sum_{W_2} (p^2+m^2)}{\sum_{W_2} (p^2+m^2)}$$

com

$$W_2 = M_1 \cup M_2 - M_1 \cap M_2.$$

Generalizando para a k-ésima integração,

$$\int_0^{t_{k+1}} dt_k e^{t_k \left(\sum_{W_{k-1}} (p^2+m^2) - \sum_{\substack{U(M_i \cap M_k) \\ 1 \leq i < k}} (p^2+m^2) + \sum_{\substack{M_k - U(M_i \cap M_k) \\ 1 \leq i < k}} (p^2+m^2) \right)} \sim \frac{e^{t_{k+1} W_k} \sum_{W_k} (p^2+m^2)}{\sum_{W_k} (p^2+m^2)}$$

(2.21)

com

$$\left. \begin{aligned} W_k &= W_{k-1} \cup M_k - \bigcup_{1 \leq i < k} (M_i \cap M_k) = \bigcup_{i=1}^k M_i - \bigcup_{1 \leq i < j < k} (M_i \cap M_j) \\ W_1 &= M_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Após a V-ésima integração obtemos

$$\frac{e^{\tau \sum_{\text{linhas externas}} (p^2 + m^2)}}{\sum_{\text{linhas externas}} (p^2 + m^2)} \equiv \frac{1}{P} e^{\tau P}, \quad (2.23)$$

cancelando os expoentes em τ dos G's e D's das linhas externas. Como resultado, reunindo os denominadores acima obtidos e os provenientes dos D's, o diagrama estocástico ordenado dá

$$J(k_j, q_i) = \pi \prod_{k=1}^v \frac{1}{\sum_{w_k} (p^2 + m^2)} \pi \prod_{\text{cruzes}} \frac{1}{(p^2 + m^2)}. \quad (2.24)$$

A contribuição do diagrama S_F se obtém finalmente somando sobre todos os ordenamentos.

Construímos, portanto, a expansão perturbativa estocástica de qualquer função de correlação, exibindo o resultado das integrações temporais no limite de tempos externos iguais e grandes [veja, p.ex., Ap. D].

O resultado fundamental agora é que a soma de todos os diagramas estocásticos S_F com a mesma topologia do diagrama de Feynman ordinário F é justamente F , naquele limite. Podemos provar isto de diferentes formas. Uma das possibilidades [2.2] é partir de (2.20) e introduzir um parâmetro β para cada linha interna, que é simplesmente $|t_{1_2} - t_{1_1}|$ para uma linha agnóstica e, para uma cristã,

$$\frac{1}{k^2 + m^2} e^{-|t-t'| (k^2 + m^2)} = \int_0^\infty d\beta \, \theta(\beta - |t-t'|) e^{-\beta (k^2 + m^2)}.$$

Em virtude das integrações em t_k serem substituídas por integrações nos β 's de linhas agnósticas, a contribuição do diagrama es tocástico é similar a do ordinário na forma paramétrica de Schwinger, a diferença aparecendo no domínio de integração dos β 's. Quando $\tau_j = \tau$, $j=1, \dots, n$, a soma dos estocásticos produz o domínio usual. Outra alternativa [2.3] é reunir todos os diagramas estocásticos em uma integral sobre variáveis grassmanianas; a relação

$$G(k, \tau - \tau') = \frac{\partial}{\partial \tau'} D(k, \tau, \tau')$$

que vale a tempos grandes assegura uma supersimetria que permite integrar facilmente nos tempos.

Apresentamos no Ap. E uma outra prova, devida a Grimus e Hüffel [2.1], que é mais natural e mais adequada à extensão para o caso de teorias de gauge.

II.2 Regularização

Acabamos de ver que podemos desenvolver uma teoria de perturbações estocástica em estreita conexão com a teoria usual. Pode-se perguntar qual a vantagem, uma vez que temos um número maior de diagramas, com integrações temporais adicionais. Aqui veremos que a QE i) faz parte da regularização das divergências ultra-violeta (UV) e ii) sugere novos esquemas de regularização.

Começemos com um diagrama estocástico genérico. Em geral encontramos, como na teoria convencional, divergências UV. Definimos o grau superficial de divergência ω da maneira usual, isto é, reescalando todos os momentos internos independentes por um parâmetro λ e fazendo $\lambda \rightarrow \infty$; de (2.18),

$$\int_{i=1}^L \frac{\pi}{(2\pi)^D} \frac{d^D(\lambda q_i)}{k} F_k J(k_j, \lambda q_i, \tau_j) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\omega \int_{i=1}^L \frac{\pi}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_i}{k} F_k J(k_j, q_i, \tau_j)$$

isto é,

$$\omega = DL + M, \quad (2.25)$$

onde

$$J(k_j, \lambda q_i, \tau_j) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^M J(k_j, q_i, \tau_j). \quad (2.26)$$

A tempos grandes M pode ser obtido de (2.20) [2.4]. Para tanto, primeiro mudamos as variáveis de integração temporais: substituimos os V t_k 's por $(V-1)$ diferenças entre eles e a soma de todos [exemplo: $t_1, t_2, t_3 \rightarrow \tilde{t}_1 \equiv t_1 - t_2, \tilde{t}_2 \equiv t_1 - t_3, T \equiv \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$,

$$\frac{\partial(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, T)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = 1] \quad .$$

Então reescalamos as diferenças por $(t_i - t_j) \rightarrow \lambda^{-2}(t_i - t_j)$, ao mesmo tempo que os momentos dos "loops" por $q_i \rightarrow \lambda q_i$. Retendo apenas os termos dominantes quando $\lambda \rightarrow \infty$ [note que os termos de linhas externas não são afetados; por exemplo, $\tau_i - t_1 = \tau_i - \frac{\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2}{3} - T \longrightarrow \tau_i - \frac{\tilde{t}_1 + \tilde{t}_3}{3} \lambda^{-2} - T \sim \tau_i - T$], encontramos

$$M = -2(I_C + V - 1) \quad . \quad (2.27)$$

O mesmo resultado pode também ser obtido de (2.24) lembrando que, como não alteramos os momentos externos, as cruces de linhas externas e o produto da última integração não contribuem para M.

Reunindo (2.25) e (2.27), e usando (2.16),

$$\omega = DL - 2I - 2(E_A - 1) \quad . \quad (2.28)$$

Mas $E_A \geq 1$ e $DL - 2I$ é o grau superficial de divergência do diagrama convencional associado: os diagramas estocásticos divergem menos que os convencionais.

a. Regularizações Usuais

Este resultado vale, em particular, para os diagramas primitivamente divergentes. Isto sugere que os métodos tradicionais de regularização podem ser aplicados com sucesso à teoria estocástica, pelo menos no caso escalar.

Estaremos interessados sobretudo na regularização dimensional por sua facilidade operacional e respeito à invariância de gauge na teoria convencional. Aqui este esquema funciona da mesma forma [0.10]. Tomamos as integrais sobre momentos de "loops" que são divergentes no ultra-violeta na dimensão D de interesse (deixamos o 5º tempo intocado); definimos todos os momentos e produtos escalares para dimensão real positiva qualquer; de alguma forma definimos a integral em uma região finita do plano complexo D , que coincida com o valor usual para dimensões inteiras, quando finito; por fim fazemos uma continuação analítica para todo o plano complexo e a divergência aparece como pólo na dimensão.

Duas observações fundamentais são que permanecem válidas nas integrais regularizadas: i) a álgebra vetorial e ii) propriedades de linearidade, escala, invariância translacional e covariância rotacional (e, por tudo isto, mudanças de variável de integração).

Em consequência, as provas de equivalência da série estocástica e da usual permanecem inalteradas.

b. Regularizações Estocásticas

Uma das lições do TFD é a observação clara que a teoria quântica, isto é, a distribuição de equilíbrio $\exp(-S)$, surge da interrelação entre o ruído e a força de atrito. Sabemos, por outro lado, que a teoria quântica é contaminada por divergências nas funções de correlação. Para suprimi-las, podemos pensar em

modificar a força aleatória em (2.1) ou (2.2) e/ou a força de atrito em (2.1). A isso chamamos regularizações estocásticas.

Se modificamos ambas, ainda satisfazendo o TFD, um equilíbrio pode ou não ser atingido. No último caso, as condições iniciais são determinantes e a evolução do sistema é, em geral, complicada, mas pode eventualmente ser utilizável. Na primeira alternativa, não conseguimos regularizar todos os diagramas.

Tome, por exemplo, o diagrama tipo "tadpole" [Fig.2.3a]. A linha do "loop" é cristã, já sabemos, e sua contribuição é

$$L = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D(k, \tau, \tau) \quad (2.29)$$

onde τ é o tempo do vértice. A tempos grandes $D(k, \tau, \tau) \sim \frac{1}{k^2 + m^2}$, se obtemos o equilíbrio usual. Para $D \geq 2$ temos uma divergência UV. A única maneira estocástica de regularizar tal tipo de termo é modificar o limite de D .

Tem-se utilizado a modificação na força aleatória, embora a modificação na força de atrito possa até ser superior, pois altera, a nível gráfico, tanto as linhas cristãs quanto as agnósticas.

Para ilustrar a idéia, seguimos a literatura. Introduzimos um parâmetro Λ que, no limite $\Lambda \rightarrow \infty$, permite recobrar a teoria original, não-regularizada.

Embora não tenha sido a primeira abordagem, a mais natural parece ser a modificação no setor espaço-temporal do ruído. Sem mexer no caráter gaussiano, podemos introduzir em (2.1) um núcleo R ,

$$\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x, \tau)} + \int d^D y \quad R_{\Lambda}(\square_{xy}) \eta(y, \tau) \quad (2.30)$$

onde

$$\square_{xy} = \int d^D z \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z_{\mu}} \delta(z-y) \quad , \quad (2.31)$$

não alterando (2.2) [2.5], ou deixar (2.1) intocada e fazer

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle = \Delta_{\Lambda}(x-x') \delta(\tau-\tau') \quad (2.32)$$

ou, no espaço dos momentos,

$$\langle \eta(k, \tau) \eta(k', \tau') \rangle = \Delta_{\Lambda}(k) (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \quad . \quad (2.33)$$

Ambos os procedimentos são equivalentes aqui pois podemos redefinir em (2.30) o ruído como $\int R_{\Lambda} \eta$. No limite $\Lambda \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Delta_{\Lambda}(k) = 2 \quad .$$

Está na escolha de $\Delta_{\Lambda}(k)$ (ou de R_{Λ}) a regularização: podemos repetir a expansão perturbativa de árvore (2.10) e as regras de formação de diagramas de correlações, em particular que todo "loop" contém uma linha cristã, agora associada à

$$D(k, \tau, \tau') = \frac{\Delta_{\Lambda}(k)}{2} \frac{1}{k^2 + m^2} \left(e^{-(k^2 + m^2)|\tau - \tau'|} - e^{-(k^2 + m^2)(\tau + \tau')} \right) \quad (2.34)$$

ao invés de (2.11).

A dependência de $\Delta_\Lambda(k)$ em k deve ser tal a atenuar o comportamento das integrais a altos momentos. Talvez a forma mais simples seja

$$\Delta_\Lambda(k) = 2 \theta(\Lambda - |k|) \quad (2.35)$$

e Λ fará simplesmente o papel de um corte em momentos $|p| > \Lambda$. Este regulador é útil também a nível não-perturbativo [2.6]. Outra escolha é [1.5, 2.5]

$$\Delta_\Lambda(k) = 2 \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + k^2} \right)^m \quad (2.36)$$

onde m é um inteiro positivo.

Este método tem a característica agradável do processo permanecer markoviano e, portanto, fácil de lidar: a dependência no 5º tempo é a mesma do caso não-regularizado, e (2.24) deve incluir a mais apenas um fator $\Delta_\Lambda(p)$ para cada cruz. Escolhendo m em (2.36) suficientemente grande devemos poder regularizar todos os diagramas; para o "tadpole", por exemplo, basta fazer $m > \frac{D-2}{2}$. Não é claro, entretanto, para que teoria regularizada tende o processo estocástico.

Este esquema de regularização não foi, entretanto, o primeiro a surgir. A primeira proposta de regularização estocástica (até hoje conhecida por este nome) [2.7] consistiu em abandonar o caráter markoviano da força aleatória sem introduzir um núcleo de memória na equação de Langevin. (2.2) passa à

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle = \delta(x-x') \beta_{\Lambda}(|\tau-\tau'|) \quad (2.37)$$

e (2.5) à

$$\langle \eta(k, \tau) \eta(k', \tau') \rangle = (2\pi)^D \delta(k+k') \beta_{\Lambda}(|\tau-\tau'|) \quad (2.38)$$

onde $\beta_{\Lambda}(|\tau-\tau'|)$ é uma função positiva suave que se concentra em torno de zero, e

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \beta_{\Lambda}(|\tau-\tau'|) = 2 \delta(\tau-\tau') . \quad (2.39)$$

A motivação para tal procedimento parece ter sido dupla:

- i) solucionar as inconsistências de processos markovianos [Ap.A];
- ii) preservar todas as simetrias da teoria com o argumento (talvez ingênuo) de que estamos regularizando-a sem perturbar o setor espaço-temporal.

Esta esperança gerou um grande interesse pelo caráter operacional do método, em particular com respeito à invariância de gauge [ver Cap. IV], ao mesmo tempo que obscureceu alguns de seus problemas. O caso é que, abandonando o abrigo do TFD, estamos expostos a toda sorte de perigos: a evolução em τ torna-se muito mais complicada, as integrações temporais não se limitando a exponenciais como antes. Em particular, não vale a prova do Ap. E. Pior ainda, não há um estado de equilíbrio: a teoria quântica regularizada é, na melhor das hipóteses, um estado assintótico [veja um caso simples no Ap. A]. As implicações disto não são claras, mas envolvem a questão de o que significa $\tau \rightarrow \infty$ (e depois $\Lambda \rightarrow \infty$), já que se o sistema é preparado inicialmente no estado dado por $\exp(-S)$, ele o abandonará.

Vamos deixar, ao menos por hora, tais problemas. Novamente podemos repetir a expansão perturbativa da equação de Langevin e utilizar as mesmas regras de Feynman, onde agora à linha cristã associamos

$$\begin{aligned}
 D(k, \tau, \tau') &= \int_0^\tau dt \int_0^{\tau'} dt' \beta_\Lambda(|t-t'|) e^{-(k^2+m^2)(\tau-t)} e^{-(k^2+m^2)(\tau'-t')} = \\
 &= \int_0^\tau dT \int_0^{\tau'} dT' \beta_\Lambda(|T-T'|) e^{-(k^2+m^2)(T+T')} = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{(2\pi)} \frac{\beta_\Lambda(|E|)}{E^2+(k^2+m^2)^2} \left\{ e^{iE|\tau-\tau'|} - e^{iE\tau-(k^2+m^2)\tau'} - \right. \\
 &\quad \left. - e^{iE\tau'-(k^2+m^2)\tau} + e^{-(k^2+m^2)(\tau+\tau')} \right\} \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

onde

$$\beta_\Lambda(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} \beta_\Lambda(|t|) \quad (2.41)$$

é a transformada de Fourier do regulador.

Novamente cada "loop" tem ao menos uma linha cristã e a potência extra de k^2 no denominador em (2.40) permite a redução de dois graus na divergência, se $\beta(E)$ vai a zero para grandes valores de E . "Loops" logaritmicamente divergentes são feitos finitos, mas já divergências quadráticas são mais difíceis de serem tratadas. De fato, em $D = 4$, (2.29) com (2.40) resulta, integrando em k e mudando para variáveis $\tilde{t} = T - T'$ e $\tilde{\pi} = \frac{T + T'}{2}$,

$$L = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\int_0^\tau d\tilde{\pi} \int_{-2\tilde{\pi}}^{2\tilde{\pi}} d\tilde{t} + \int_{\frac{\tau}{2}}^\tau d\tilde{\pi} \int_{2(\tilde{\pi}-\tau)}^{2(\tau-\tilde{\pi})} d\tilde{t} \right] e^{-2\tilde{\pi}m^2} \frac{\beta_\Lambda(|\tilde{t}|)}{(4\tilde{\pi})^2} \quad (2.42)$$

A contribuição dominante vem da região em que $\tilde{\pi} \approx 0$; então,

com $\varepsilon \ll \tau$,

$$L \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \beta_{\Lambda}(0) \int_0^{\epsilon} d\tilde{\pi} \frac{1}{\tilde{\pi}} \quad (2.43)$$

que é finita se

$$\beta_{\Lambda}(0) = 0 \quad . \quad (2.44)$$

Mas isto implica que a densidade de probabilidade de η não é positivo-definida: o requerimento $\langle \eta(x,t) \eta(x',t) \rangle = 0$ se choca com sua interpretação como momento de uma distribuição gaussiana, quando $\beta(t) > 0$. A regularização estocástica não-markoviana não pode ser utilizada não perturbativamente em teorias com divergências quadráticas [2.7, 4.5].

Para prosseguir devemos fazer alguma escolha de reguladores. Basicamente dois tipos têm sido usados. De um lado, a família [1.5, 2.7]

$$\beta_{\Lambda m}(|\tau|) = \frac{1}{m!} \Lambda^2 (\Lambda^2 |\tau|)^m e^{-\Lambda^2 |\tau|} \quad (2.45)$$

e, em particular,

$$\beta_{\Lambda 1}(|\tau|) = \Lambda^4 |\tau| e^{-\Lambda^2 |\tau|} \quad . \quad (2.46)$$

Por outro, a transformada de Mellin (que transforma a análise do comportamento assintótico em um parâmetro grande na das singularidades do plano complexo de um parâmetro diferente) de (2.46) $\cdot (\epsilon \rightarrow 0$ quando $\Lambda \rightarrow \infty$),

$$\beta_{\epsilon}(|\tau|) = \epsilon |\tau|^{\epsilon-1} \quad (2.47a)$$

$$\beta_{\epsilon}(E) \stackrel{+}{=} 2\epsilon |E|^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \cos \frac{\epsilon\pi}{2} \quad (2.47b)$$

chamada regularização estocástica analítica [2.8]. Para uso futuro damos aqui o propagador (2.40) associado. Não é difícil, com o uso de uma tabela de integrais, encontrar sua forma exata. Restringiremo-nos entretanto à sua forma a tempos grandes:

$$D(k, \tau, \tau') = \frac{\epsilon \Gamma(\epsilon) \cos \frac{\pi\epsilon}{2}}{(k^2 + m^2)^{1+\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{|x|^{-\epsilon}}{1+x^2} e^{ix(k^2 + m^2)|\tau - \tau'|} =$$

$$\stackrel{++}{=} \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\epsilon}} \left\{ e^{-|\tau - \tau'| (k^2 + m^2)} (1 - \epsilon C) + \right. \quad (2.48)$$

$$\left. - \frac{\epsilon}{2} \left[e^{(k^2 + m^2)|\tau - \tau'|} \text{Ei}(-|\tau - \tau'| (k^2 + m^2)) - e^{-(k^2 + m^2)|\tau - \tau'|} \text{Ei}(|\tau - \tau'| (k^2 + m^2)) \right] + O(\epsilon^2) \right\}$$

onde C é a constante de Euler - Mascheroni e $\text{Ei}(x)$, a função exponencial integral.

+ usamos [H.1, pag. 421]

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \cos ax \, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}} \cos \frac{\mu\pi}{2} \quad (a > 0, 0 < \text{Re}\mu < 1)$$

++ usamos [H.1, pag. 598]

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta'}{\beta^2 + x^2} \ln ax \cos bx \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-b\beta'} \ln(a\beta') + \frac{\pi}{4} [e^{b\beta'} \text{Ei}(-b\beta') - e^{-b\beta'} \text{Ei}(b\beta')]$$

($\beta' = \text{sign } \beta$, $a > 0$, $b > 0$)

CAPÍTULO III

CAMPO DE GAUGE ABELIANO LIVRE

A QE foi introduzida por Parisi e Wu para quantizar teorias de gauge sem fixação de gauge. A idéia é simples: introduzimos uma distribuição integrável no tempo τ finito que no limite $\tau \rightarrow \infty$ forneça resultados bem definidos para quantidades invariantes de gauge.

Desde então muito tem sido feito, em especial para teorias escalares. Vimos, em particular, que se pode provar que os diagramas estocásticos são menos divergentes que os de Feynman topologicamente equivalentes, e eles se somam na série usual. O programa segue através da regularização por procedimentos usuais ou estocásticos.

Se estes resultados se aplicam a teorias de gauge é ainda um problema aberto. Neste capítulo iniciamos sua análise, no caso simples da quantização de um campo abeliano livre. Consideramos tanto a abordagem original quanto a fixação de gauge.

Tentamos nos manter fiéis às lições tomadas no movimento browniano.

III.1. Abordagem de Parisi-Wu

Vamos proceder no espírito original da QE [3.1.]. Generalizamos o caso escalar da maneira mais direta possível: a dinâmica do campo de gauge $U(1)$ $A_\mu(x, \tau)$ no tempo extra τ sendo dada pela equação de Langevin

$$\frac{\partial A_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} = (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu(x, \tau) + \eta_\mu(x, \tau) \quad (3.1)$$

com $\eta_\mu(x, \tau)$ uma variável aleatória gaussiana de média zero satisfazendo o TFD (1.12), isto é,

$$\begin{aligned} \langle \eta_\mu(x, \tau) \eta_\nu(x', \tau') \rangle &= \{ (-\partial^2 \delta_{\mu\rho} + \partial_\mu \partial_\rho) \langle A_\rho(x, \tau_0) A_\nu(x', \tau_0) \rangle + \\ &\quad + (-\partial'^2 \delta_{\nu\rho} + \partial'_\nu \partial'_\rho) \langle A_\mu(x, \tau_0) A_\rho(x', \tau_0) \rangle \} \delta(\tau - \tau') \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $A_\mu(x, \tau_0)$ é resultado de uma distribuição estacionária.

A invariância de gauge cobra seu preço. Graças a ela existem variáveis cíclicas, isto é, variáveis que não aparecem na ação

$$S_{cl} = \int d^D x \left(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \right)^2, \quad (3.3)$$

que fornece as equações de movimento utilizadas acima. Para tratá-las é conveniente trabalhar com a transformada de Fourier $A_\mu(k, \tau)$ e suas componentes transversal $A_\mu^T(k, \tau)$ e longitudinal $A_\mu^L(k, \tau)$,

$$\left. \begin{aligned} A_{\mu}^T(k, \tau) &\equiv P_{\mu\nu}^T(k) A_{\nu}(k, \tau) \\ A_{\mu}^L(k, \tau) &\equiv P_{\mu\nu}^L(k) A_{\nu}(k, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} P_{\mu\nu}^T(k) &= \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \\ P_{\mu\nu}^L(k) &= \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

são os respectivos projetores.

A equação de Langevin se decompõe em duas partes fundamentalmente diferentes: enquanto a transversal é simplesmente uma equação de campo escalar (sem massa),

$$\frac{\partial A_{\mu}^T(k, \tau)}{\partial \tau} = -k^2 A_{\mu}^T(k, \tau) + \eta_{\mu}^T(k, \tau) \quad , \quad (3.6)$$

a outra não tem atrito,

$$\frac{\partial A_{\mu}^L(k, \tau)}{\partial \tau} = \eta_{\mu}^L(k, \tau) \quad . \quad (3.7)$$

No caso escalar vimos que o equilíbrio correto existe, independente das condições iniciais, se o ruído é markoviano. A eq. (3.6), através de (3.2), permite-nos 1) fazer

$$\langle \eta_{\mu}^T(k, \tau) \eta_{\nu}^T(k', \tau') \rangle = 2P_{\mu\nu}^T(k) (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \quad (3.8)$$

e 2) esquecer a condição inicial (isto é, usar $A_{\mu}^T(k, 0) = 0$) sem perda de generalidade, e assim atingir o equilíbrio dado por (3.3).

A observação fundamental é que, sendo cíclicas as componentes $A_{\mu}^L(k, \tau)$, o TFD exige

$$\langle \eta_{\mu}^L(k, \tau) \eta_{\nu}^L(k', \tau') \rangle = 0 \quad . \quad (3.9)$$

Estamos aqui face ao conhecido resultado que uma equação como (3.7) não tem uma distribuição de equilíbrio bem definida: é o que ocorre com a coordenada na teoria de Einstein da difusão [ver Ap. A].

Mas talvez a estacionariedade não seja realmente fundamental, ao menos quando relacionada às componentes longitudinais. Alguém pode dizer que estas são não-físicas no limite $\tau \rightarrow \infty$ e não precisamos exigir qualquer bom comportamento de sua distribuição neste limite.

Por este ponto de vista, impondo (3.9) estamos sendo muito severos: estamos livres para escolher qualquer correlação para η_{μ}^L desde que quantidades invariantes de gauge, que são as que têm sentido físico, não tenham componente longitudinal no limite de tempos longos. Por simplicidade consideramos η_{μ}^L markoviana também, mas deixamos livre, por enquanto, um parâmetro $\alpha \geq 0^+$:

$$\langle \eta_{\mu}^L(k, \tau) \eta_{\nu}^L(k', \tau') \rangle = \alpha P_{\mu\nu}^L(k) (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \quad . \quad (3.10)$$

+ α poderia ser, inclusive, dependente de um parâmetro de gauge.

Além do mais, a condição inicial longitudinal não é esquecida; a propriedade de decomposição de Wick aliada à invariância relativística impõe [3.2]

$$P[\phi(k)] = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{|\phi(k)|^2}{\gamma(k^2)}}}{\int D\phi e^{-\frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{|\phi(k)|^2}{\gamma(k^2)}}}, \quad \gamma(k^2) > 0 \quad (3.11a)$$

ou

$$P[\phi(k)] = \delta[\phi(k)] \quad (3.11b)$$

onde $\phi(k) = k_\mu A_\mu^L(k, 0)$ e $\gamma(k^2)$ é uma função real. Em particular

$$\langle A_\mu^L(k, 0) A_\nu^L(k', 0) \rangle = \gamma(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} (2\pi)^D \delta(k+k') \quad (3.12)$$

Se não queremos introduzir parâmetros com dimensões, $\gamma(k^2)$ deve ser uma constante ξ real, $\xi \geq 0$,

$$\langle A_\mu^L(k, 0) A_\nu^L(k', 0) \rangle = \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} (2\pi)^D \delta(k+k') \quad (3.13)$$

De fato, vamos partir de (3.6) e (3.7) e seguir os passos do Cap. II. A função de Green retardada da primeira é

$$g_{\mu\nu}^T(k, \tau) = G_{\mu\nu}^T(k, \tau) \theta(\tau) \quad \text{com}$$

$$G_{\mu\nu}^T(k, \tau) = P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 \tau} \quad (3.14)$$

e a da segunda, $g_{\mu\nu}^L(k, \tau) = G_{\mu\nu}^L(k, \tau) \theta(\tau)$ com

$$G_{\mu\nu}^L(k, \tau) = \epsilon P_{\mu\nu}^L(k), \quad \epsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha \neq 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Como conseqüência, a solução pode ser escrita como

$$A_\mu(k, \tau) = \int_0^\tau dt G_{\mu\nu}(k, \tau-t) \eta_\nu(k, t) + A_\mu^L(k, 0), \quad (3.16)$$

$$G_{\mu\nu}(k, \tau) = P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 \tau} + \epsilon P_{\mu\nu}^L(k), \quad (3.17)$$

já desprezando as condições iniciais transversais.

O propagador (livre) é obtido diretamente de

$$\langle A_\mu(k, \tau) A_\nu(k', \tau') \rangle = (2\pi)^D \delta(k+k') D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau'):$$

$$D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2} P_{\mu\nu}^T(k) \left(e^{-k^2 |\tau-\tau'|} - e^{-k^2 (\tau+\tau')} \right) + P_{\mu\nu}^L(k) \left(\frac{\xi}{k^2} + \alpha \min(\tau, \tau') \right) \quad (3.18)$$

usando (3.8), (3.10) e (3.13). No limite de tempos grandes

$$\lim_{\tau, \tau' \rightarrow \infty} D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2} P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 |\tau-\tau'|} + P_{\mu\nu}^L(k) \left(\frac{\xi}{k^2} + \alpha \min(\tau, \tau') \right) \quad (3.19)$$

$|\tau-\tau'| \text{ fixo}$

e a tempos iguais

$$\lim_{\tau=\tau' \rightarrow \infty} D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tau. \quad (3.20)$$

Este é simplesmente o propagador de Feynman em um gauge covariante fixado por ξ somado a um termo divergente característico de um processo de difusão ilimitado.

Este último termo é consequência direta da invariância de gauge e de não respeitarmos o TFD (se $\alpha = 0$, ele desaparece). Na literatura sempre foi tomado $\alpha = 2$, que parece a generalização mais direta da correlação escalar (2.2). Tem sido argumentado que, sendo um termo longitudinal, não deve contribuir para quantidades invariantes de gauge. Isto é verdade no caso livre, já que podemos escrever $F_{\mu\nu}$ em termos de A_μ^τ apenas (e qualquer correlação invariante de gauge sem nenhuma integração temporal além das já realizadas em $D_{\mu\nu}$).

No caso interagente, entretanto, o cancelamento da contribuição de tais termos está longe de ser óbvio. Analisaremos esta questão nos capítulos seguintes.

Por hora, acrescentemos que, desde que consigamos nos livrar de tais divergências temporais, temos um método de quantização de teorias de gauge muito elegante. Pois neste caso a fixação (isto é, a quebra da invariância por transformações) de gauge é naturalmente introduzida através das condições iniciais⁺.

⁺ vamos nos referir (imprecisamente) a esta abordagem como sem fixação de gauge, em contraste com as demais.

III.2. Fixação de Gauge

Podemos evitar o problema da difusão infinita nas variáveis longitudinais abandonando o programa inicial de quantizar a teoria a partir de sua equação de movimento clássica $\frac{\delta S_{cl}}{\delta A_\mu} = 0$: nós fixamos, de partida, o gauge. Há diferentes procedimentos para fazê-lo, que no caso livre resultam no mesmo. Vamos discriminá-los no caso interagente [ver Cap. IV e V]; aqui limitemo-nos a examinar as conseqüências da introdução de um atrito longitudinal $\frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu A_\nu(x, \tau)$, ξ um parâmetro positivo, em (3.1):

$$\frac{\partial A_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} = \left[\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu(x, \tau) + \eta_\mu(x, \tau) \quad (3.21)$$

ou

$$\frac{\partial A_\mu^T(k, \tau)}{\partial \tau} = -k^2 A_\mu^T(k, \tau) + \eta_\mu^T(k, \tau) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial A_\mu^L(k, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{k^2}{\xi} A_\mu^L(k, \tau) + \eta_\mu^L(k, \tau) \quad (3.22)$$

no espaço dos momentos. Agora as componentes A_μ^L não mais são cíclicas e o TFD indica (3.8) e (3.10) com $\alpha = 2$ como as correlações de η^T e η^L . Entretanto, para uso futuro e com o argumento já utilizado, mantenhamos α arbitrário.

Graças ao atrito podemos desconsiderar também as condições iniciais longitudinais e escrever (3.16) com

$$A_{\mu}^L(k, 0) = 0 \quad (3.23)$$

e

$$G_{\mu\nu}(k, \tau) = P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 \tau} + P_{\mu\nu}^L(k) e^{-\frac{k^2}{\xi'} \tau} \quad (3.24)$$

ao invés de (3.17).

O propagador, por sua vez, é

$$D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2} \left[P_{\mu\nu}^T(k) \left(e^{-k^2 |\tau - \tau'|} - e^{-k^2 (\tau + \tau')} \right) + \frac{\alpha}{2} \xi' P_{\mu\nu}^L(k) \left(e^{-\frac{k^2}{\xi'} |\tau - \tau'|} - e^{-\frac{k^2}{\xi'} (\tau + \tau')} \right) \right] \quad (3.25)$$

de onde

$$\lim_{\substack{\tau, \tau' \rightarrow \infty \\ |\tau - \tau'| \text{ fixo}}} D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2} P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 |\tau - \tau'|} + \frac{\alpha \xi'}{2} P_{\mu\nu}^L(k) e^{-\frac{k^2}{\xi'} |\tau - \tau'|} \quad (3.26)$$

e

$$\lim_{\tau = \tau' \rightarrow \infty} D_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{\alpha \xi'}{2} \right) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) \quad (3.27)$$

que é justamente o propagador convencional com parâmetro de gauge $\xi = \frac{\alpha \xi'}{2}$.

CAPÍTULO IV

ELETRODINÂMICA ESCALAR

O passo seguinte é abordar interações do campo de gauge abeliano com campos de matéria. Por seu interesse, a eletrodinâmica quântica seria a candidata natural. Ocorre que a QE se complica ligeiramente quando temos férmions de Dirac: mais que o caráter grassmaniano do campo, é a não-positividade de $\frac{\delta S}{\delta \psi}$ que demanda modificação na equação de Langevin (usualmente a introdução de um núcleo na força de atrito - markoviano e satisfazendo o TFD - ou a duplicação do ruído) [1.5, 4.1, 2.7].

Para evitar adicionar problemas à questão da quantização de teorias de gauge escolhemos trabalhar com a eletrodinâmica escalar. Estudamos tanto a abordagem original de Parisi - Wu quanto as diferentes fixações de gauge, regularizando a teoria dimensional e estocasticamente.

Seja φ um campo escalar complexo em interação com o campo eletromagnético A_μ ; a nível clássico o sistema é descrito pela ação invariante de gauge

$$S_{cl} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2(x) + (D_\mu \varphi(x))^* (D_\mu \varphi(x)) + m^2 \varphi^*(x) \varphi(x) \right\} \quad (4.1)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu \quad .$$

Quando introduzimos o 5º tempo τ , alargamos o espaço sobre o qual estão definidos os campos. Podemos generalizar as transformações de gauge considerando um parâmetro de gauge real τ -dependente $\theta(x, \tau)$; definimos novos campos [4.2]

$$A'_\mu(x, \tau) = A_\mu(x, \tau) + \partial_\mu \theta(x, \tau) \quad (4.2)$$

$$\varphi'(x, \tau) = e^{ie \theta(x, \tau)} \varphi(x, \tau) .$$

Quando $\theta(x, \tau) = \theta(x)$ reduzimo-nos às transformações de gauge usuais. Creio que tal generalização é a chave para entendermos muitos aspectos da dinâmica (de Langevin) de teorias de gauge.

Seguindo Parisi e Wu [1.4], dados $A_\mu(x, \tau)$ e $\varphi(x, \tau)$ definamos as quantidades

$$A_\mu^\tau(x, \tau) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ikx} A_\mu^\tau(k, \tau) , \quad (4.3a)$$

$$\alpha(x, \tau) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ikx} \left(-\frac{ik_\mu}{k^2} \right) A_\mu^L(k, \tau) \quad (4.3b)$$

e

$$\varphi^\tau(x, \tau) = e^{-ie\alpha(x, \tau)} \varphi(x, \tau) . \quad (4.3c)$$

Perceba que $A_\mu^\tau(x, \tau)$ e $\varphi^\tau(x, \tau)$ são invariantes de gauge, no sentido generalizado: $\alpha(x, \tau)$, que é essencialmente $A_\mu^L(x, \tau)$, carrega toda indefinição de gauge. A ação S_{cl} , sendo invariante de gauge, depende apenas de A_μ^τ e φ^τ .

IV.1 Quantização

a. Abordagem de Parisi e Wu

No espírito original [3.1], partimos das equações de movimento clássicas e obtemos as equações de Langevin.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} &= (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu(x, \tau) - ie \left(\varphi^*(x, \tau) \partial_\mu \varphi(x, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \varphi(x, \tau) \partial_\mu \varphi^*(x, \tau) \right) - 2e^2 A_\mu(x, \tau) \varphi^*(x, \tau) \varphi(x, \tau) + \eta_\mu(x, \tau) \\ &\equiv F_1(A_\mu, \varphi, \varphi^*) + \eta_\mu(x, \tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \frac{\delta S_{cl}}{\delta \varphi^*(x, \tau)} + \eta(x, \tau) = \\ &= (\partial^2 - m^2) \varphi(x, \tau) - ie [A_\mu(x, \tau) \partial_\mu \varphi(x, \tau) + \partial_\mu (A_\mu(x, \tau) \varphi(x, \tau))] + \\ &\quad - e^2 A_\mu^2(x, \tau) \varphi(x, \tau) + \eta(x, \tau) \\ &\equiv F_2(A_\mu, \varphi, \varphi^*) + \eta(x, \tau) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \varphi^*(x, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\delta S_{cl}}{\delta \varphi(x, \tau)} + \eta^*(x, \tau) = F_2^*(A_\mu, \varphi, \varphi^*) + \eta^*(x, \tau) \quad (4.6)$$

ou, no espaço dos momentos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_\mu(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) A_\nu(k, \tau) + \\
& + e \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (2k' + k)_\mu \varphi^*(k', \tau) \varphi(k + k', \tau) + \\
& - 2e^2 \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} A_\mu(k + k' - k'', \tau) \varphi^*(k', \tau) \varphi(k'', \tau) + \eta_\mu(k, \tau)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(k, \tau)}{\partial \tau} = & - (k^2 + m^2) \varphi(k, \tau) + e \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (2k - k')_\mu A_\mu(k', \tau) \varphi(k - k', \tau) + \\
& - e^2 \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} A_\mu(k - k' - k'', \tau) A_\mu(k', \tau) \varphi(k'', \tau) + \eta(k, \tau)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi^*(k, \tau)}{\partial \tau} = & - (k^2 + m^2) \varphi^*(k, \tau) + e \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (2k + k')_\mu A_\mu(k', \tau) \varphi^*(k + k', \tau) + \\
& - e^2 \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} A_\mu(-k - k' + k'', \tau) A_\mu(k', \tau) \varphi^*(k'', \tau) + \eta^*(k, \tau) .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Vamos prosseguir passo a passo. Todo deslize pode ser fatal. Sendo a ação (4.1) invariante de gauge, $F_1(A_\mu, \varphi, \varphi^*)$ também o é: depende apenas de $A_\mu^\top$ e $\varphi^\top$. Portanto

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial \tau} = F_1(A_\mu^\top, \varphi^\top, \varphi^{*\top}) + \eta_\mu \tag{4.10}$$

ou

$$\frac{\partial A_\mu^T}{\partial \tau} = F_1(A_\mu^T, \varphi^T, \varphi^{*T}) + \eta_\mu^T \quad (4.11a)$$

e

$$\frac{\partial A_\mu^L}{\partial \tau} = \eta_\mu^L. \quad (4.11b)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = e^{ie\alpha} F_2(A_\mu^T, \varphi^T, \varphi^{*T}) + \eta \quad (4.12)$$

e analogamente para φ^* . Agora Parisi e Wu [1.4] argumentam que "a invariância de gauge da equação de Langevin (...) implica que a evolução de $A_\mu^T(x, \tau)$ e $\varphi^T(x, \tau)$ é independente da evolução de $\alpha(x, \tau)$ " e, sendo todas as quantidades invariantes de gauge escritas em termos de $A_\mu^T(x, \tau)$ e $\varphi^T(x, \tau)$, calculamo-las corretamente com a QE (as divergências temporais já encontradas no Cap. III cancelando-se automaticamente).

Ocorre que as equações de Langevin não são invariantes por transformações de gauge generalizadas. Em consequência

$$\frac{\partial \varphi^T}{\partial \tau} = F_2(A_\mu^T, \varphi^T, \varphi^{*T}) + \eta^T - ie \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \varphi^T. \quad (4.13)$$

Se η_μ^L é não-nulo, $\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \neq 0$ e a componente longitudinal contamina, através de seu ruído, a evolução de A_μ^T e φ^T . A componente longitudinal executando um processo de difusão sem equilíbrio, termos proporcionais a τ devem, em princípio, aparecer em todas as quantidades calculadas por QE. É uma expectativa altamente não-trivial que esta funcione quando η_μ^L não é identicamente nulo.

$$\begin{aligned}
\varphi(k, \tau) = & \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \left[\eta(k, t) + \right. \\
& + e \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} (2k-1)_\mu A_\mu(l, t) \varphi(k-l, t) + \\
& \left. - e^2 \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} A_\mu(k-l_1-l_2, t) A_\mu(l_1, t) \varphi(l_2, t) \right]
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^*(k, \tau) = & \int_0^\tau dt G(k, \tau-t) \left[\eta^*(k, t) + \right. \\
& + e \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} (2k+1)_\mu A_\mu(l, t) \varphi^*(k+l, t) + \\
& \left. - e^2 \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} A_\mu(-k-l_1+l_2, t) A_\mu(l_1, t) \varphi^*(l_2, t) \right]
\end{aligned}
\tag{4.18}$$

já desconsiderando as condições iniciais de amortecimento rápido, onde $G_{\mu\nu}$ e G são os propagadores de gauge e escalar, (3.17) e (2.6). Introduzindo as regras de Feynman estocásticas de árvore apropriadas [Fig. 4.1a], com a convenção do caso escalar (acrescentando a soma sobre índices de espaço-tempo em cruzes e vértices), as soluções são escritas como soma de diagramas de árvore:

$$A_\mu(k, \tau) = \text{wavy line} \times + \text{wavy line} \times \text{triangle} + \text{wavy line} \times \text{triangle} \times \text{triangle} + \text{wavy line} \times \text{triangle} \times \text{triangle} \times \text{triangle} + \dots$$

$$+ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + 0(e^3) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \varphi(k, \tau) = & \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \\ & + \frac{1}{2} \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \\ & + \frac{1}{2} \text{diagram 10} + \frac{1}{2} \text{diagram 11} + \frac{1}{2} \text{diagram 12} + 0(e^3) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\varphi^*(k, \tau) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + 0(e^2) \quad (4.21)$$

Destas regras é possível calcular quantidades invariantes de gauge até dada ordem, usando (4.14) e (4.15). Isto introduz novas regras de Feynman estocásticas [Fig. 4.1b], agora para os propagadores livres de gauge e escalar, (3.18) e (2.11). Elas são em tudo similares às escalares [Cap. II] com as diferenças notáveis: i) fatores extras de simetria provenientes da orientação das linhas escalares (por exemplo, o peso de  é duas vezes o de ) e ii) a dependência de momentos nos vértices.

Na notação do Cap. II a contribuição de um diagrama arbitrário S_F é

$$I_{\mu_j}(k_j, \tau_j) = \int_{i=1}^L \frac{d^D q_i}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^V F_{\nu_k}(k_j, q_i) J_{\mu_j \nu_k}(k_j, q_i, \tau_j) \quad (4.22)$$

com $J_{\mu_i} v_k$ análogo à (2.19).

Não é fácil continuar nos passos do campo escalar: toda linha fotônica tem uma contribuição transversal parecida com a do campo escalar (carregando a mais apenas o respectivo projetor) e uma longitudinal que não depende do tempo segundo exponencial. Não podemos sequer escrever a forma de J no limite de tempos grandes como (2.20), pois as integrações temporais mudam a dependência no tempo, a cada passo, e mesmo termos do tipo $\tau_1 \exp\{-(p^2+m^2) \cdot (\tau_1+\tau_2)\}$ deixam pegadas. Por isso, até aqui ninguém conseguiu provar a correção ou não da QE, no caso geral, para uma teoria de gauge.

Existe, porém, uma situação manejável: justamente quando $\alpha = 0$.

Tome um diagrama estocástico e considere primeiro apenas as contribuições transversais nas linhas de ftons. Estendemos diretamente o raciocínio que precedeu (2.24) e encontramos simplesmente, no limite de tempos iguais e grandes,

$$J_{\mu_j}^T v_k^T(k_j, q_i) = \pi \frac{1}{\sum_{k=1}^V (p^2 + m^2)_{w_k}} \pi \frac{1}{p^2 + m^2} \pi \frac{P_{\mu_1}^T v_1^T(p)}{\text{linhas de foton}} \quad (4.23)$$

onde $m^2 = 0$ para linhas de foton.

Nós agora começamos a "decorar" o diagrama com contribuições longitudinais. Sempre que se tratar de uma linha de foton agnóstica, não há contribuição: limitamo-nos então às linhas de foton cristãs longitudinais. Tomemos um diagrama que não se

parte quando ignoramos estas linhas. Neste caso a integração sobre os tempos é a mesma que no caso escalar, M_i denotando o conjunto de momentos escalares e fotônicos transversais que se encontram no vértice i . Usando o mesmo ordenamento temporal do diagrama original, obtemos

$$J_{\mu_i \nu_k}^{TL(0)}(k_j, q_i) = \prod_{k=1}^V \frac{1}{\sum_{w_k} (p^2 + m^2)} \prod_{\text{cruzes}} \frac{1}{p^2 + m^2} \cdot$$

$$\cdot \xi^{c_1} \prod_{\substack{\text{linhas} \\ \text{de} \\ \text{foton}}}^{c_1} \prod_{\mu_1 \nu_1}^L (p_1) \prod_{\substack{\text{linhas} \\ \text{de} \\ \text{foton}}}^{c_f - c_1} \prod_{\mu_1 \nu_1}^T (p) \quad (4.24)$$

onde $C_f(C_1)$ é o número de linhas de ftons cristãs (cristãs longitudinais). A última integração temporal gera um fator

$$\frac{1}{P} \equiv \frac{1}{\sum_{n_e, n_t} (p^2 + m^2)} \quad (4.25)$$

onde n_e, n_t são as linhas externas escalares e fotônicas transversais. No caso de diagrama que se parte quando rompemos linhas $D_{\mu\nu}$, sua contribuição é o produto das partes e dos $\frac{\xi}{p^2} P_{\mu\nu}^L(p)$ das linhas $D_{\mu\nu}^L$:

$$J_{\mu_j \nu_k}^{TL}(k_j, q_i) = \sum_l \sum_m J_{\mu_j \nu_k}^{TL(0)m}(k_j, q_i) \frac{\xi}{p_1^2} P_{\nu_1 \nu_2}^L(p_1) \quad (4.26)$$

já que tais linhas não dependem do tempo.

Finalmente, somamos sobre todos os ordenamentos possíveis.

Para este caso especial $\alpha = 0$ podemos, de maneira análoga ao campo escalar [Ap. E], provar que cada diagrama de Feynman pode ser obtido corretamente desde que não tenha "loops" escalares que possam ser isolados cortando duas ou mais linhas fotônicas (no gauge de Landau, claramente todos os diagramas são corretamente calculados). De qualquer forma, sempre quantidades invariantes de gauge podem ser obtidas, se usarmos uma regularização invariante de gauge.

b. Fixação de Gauge

Tomemos uma postura diferente, com respeito à equação para o campo longitudinal. Vimos que o reservatório térmico não provê neste caso um atrito, e o remédio, na abordagem de Parisi e Wu, é desligá-lo longitudinalmente, acabando com o ruído também. A abordagem alternativa é, ao invés disto, introduzir atrito, o que significa mudar as equações de movimento ou a equação de Langevin.

b1. Fixação de Gauge na Ação

Sabemos que os métodos de quantização canônico e integral-funcional funcionam, no caso de um campo abeliano, com fixação de gauge, isto é, impondo⁺ um vínculo como

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (4.27)$$

aos potenciais. Este vínculo pode ser introduzido na ação utilizando um multiplicador de Lagrange $\frac{1}{\xi}$: adicionamos à S_{cl} dada em (4.1) um termo de fixação de gauge S_{gf} ,

$$S = S_{cl} + S_{gf} = S_{cl} + \frac{1}{2\xi} \int d^D x (\partial_\mu A_\mu(x))^2. \quad (4.28)$$

O único efeito deste termo é a introdução do referido atrito longitudinal: (4.4) e (4.7) mudam para

⁺ no sentido discutido na Introdução.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} = & (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu(x, \tau) - ie(\varphi^*(x, \tau) \partial_\mu \varphi(x, \tau) - \\
& - \varphi(x, \tau) \partial_\mu \varphi^*(x, \tau) - 2e^2 A_\mu(x, \tau) \varphi^*(x, \tau) \varphi(x, \tau) + \\
& + \eta_\mu(x, \tau)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_\mu(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2 (\delta_{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi}) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) A_\nu(k, \tau) + \\
& + e \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (2k' + k)_\mu \varphi^*(k', \tau) \varphi(k+k', \tau) + \\
& - 2e^2 \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k''}{(2\pi)^D} A_\mu(k+k'-k'', \tau) \varphi^*(k', \tau) \varphi(k'', \tau) + \\
& + \eta_\mu(k, \tau)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

respectivamente, as demais equações de Langevin permanecendo inalteradas. Agora é inevitável a contaminação da evolução de A_μ^T e φ^T por A_μ^L , mas no limite de tempos longos quantidades devem depender da distribuição de equilíbrio, agora existente, de A_μ^L . Para que este limite seja o correto, isto é, dado por (4.28), o TFD indica $\alpha = 2$ em (4.15). Vamos, entretanto, manter α livre, para maior generalidade, esperando ser forçados a impô-lo 2 quando calcularmos algo mensurável.

A expansão perturbativa e as regras de Feynman permanecem as mesmas. As únicas diferenças são que agora podemos fazer $A_\mu^L(k, 0) = 0$ (não considerando portanto círculos) e tomar $G_{\mu\nu}$ e $D_{\mu\nu}$ como dados por (3.24) e (3.25). Note que apenas no caso $\alpha=2$ conseguimos estender a prova de Grimus e Hüffel [Ap. E] para as linhas longitudinais. Nada surpreendente.

b2. Fixação Estocástica de Gauge

Apresentamos agora um método híbrido de introdução do atrito longitudinal conhecido como fixação estocástica de gauge [1.5]: utilizamos a liberdade de gauge generalizada para transformar as equações de Langevin (4.4) - (4.6) e estabelecer uma ligação entre as duas abordagens anteriores.

De fato, consideremos as equações de Langevin para os novos campos $A'_\mu(x, \tau)$ e $\varphi'(x, \tau)$ definidos em (4.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} = & (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A'_\nu(x, \tau) + \partial_\mu \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} - ie(\varphi'^*(x, \tau) \partial_\mu \varphi'(x, \tau) - \\ & - \varphi'(x, \tau) \partial_\mu \varphi'^*(x, \tau)) - 2e^2 A'_\mu(x, \tau) \varphi'^*(x, \tau) \varphi'(x, \tau) + \eta_\mu(x, \tau) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'(x, \tau)}{\partial \tau} = & (\partial^2 - m^2) \varphi'(x, \tau) - ie [A'_\mu(x, \tau) \partial_\mu \varphi'(x, \tau) + \partial_\mu (A'_\mu(x, \tau) \varphi'(x, \tau))] + \\ & - e^2 A'^2_\mu(x, \tau) \varphi'(x, \tau) + ie \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} \varphi'(x, \tau) + \eta'(x, \tau) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \varphi'^*(x, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\delta S_{cl}}{\delta \varphi'(x, \tau)} - ie \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} \varphi'^*(x, \tau) + \eta'^*(x, \tau) \quad (4.33)$$

obtidas de (4.4) - (4.6). Nestas equações $\eta_\mu(x, \tau)$ é o mesmo ruído gaussiano, enquanto η' e η'^* se obtém de η e η^* como os campos φ' e φ'^* de φ e φ^* . As correlações dos ruídos não mudam, portanto. Daqui para frente abandonamos as linhas nas novas quantidades.

A idéia é escolher $\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau}$ não invariante de gauge (no sentido usual); de forma a facilitar a comparação com a fixação de gauge covariante anterior fazemos

$$\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \partial_\mu A_\mu(x, \tau) \quad . \quad (4.34)$$

Neste caso (4.31) reduz-se à (4.29). Por outro lado (4.32) e (4.33) se escrevem no espaço dos momentos como

$$\begin{aligned} \varphi(k, \tau) = & \int_0^\tau dt \, G(k, \tau-t) [\eta(k, t) + \\ & + e \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} [(2k-1)_\mu - \frac{1_\mu}{\xi}] A_\mu(l, t) \varphi(k-l, t) + \\ & - e^2 \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} A_\mu(k-l_1-l_2, t) A_\mu(l_1, t) \varphi(l_2, t)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \varphi^*(k, \tau) = & \int_0^\tau dt \, G(k, \tau-t) [\eta^*(k, t) + \\ & + e \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} [(2k+1)_\mu + \frac{1_\mu}{\xi}] A_\mu(l, t) \varphi^*(k+l, t) + \\ & - e^2 \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} A_\mu(-k-l_1+l_2, t) A_\mu(l_1, t) \varphi^*(l_2, t)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

na forma integral. Comparação com (4.17) e (4.18) mostra que devemos introduzir um novo vértice [Fig. 4.2] que tem a notável (e ingrata) propriedade de ser direcionado, isto é, não ser simétrico

pela troca das linhas escalares. De resto, a expansão em árvores é semelhante às anteriores (com $A_\mu^L(k,0) = 0$),

$$A_\mu(k,\tau) = (4.19) + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + 0(e^3) \quad (4.37)$$

$$\varphi(k,\tau) = (4.20) + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} + \text{diagrama 6} + 0(e^3) \quad (4.38)$$

$$\varphi^*(k,\tau) = (4.21) + \text{diagrama 7} + 0(e^2) \quad (4.39)$$

Queremos daqui calcular funções de correlação (a tempos iguais) invariantes de gauge no sentido usual. Lembremos que estas (apenas estas) devem coincidir com as calculadas na abordagem de Parisi e Wu. Isto porque, a um tempo fixo, invariância de gauge usual implica invariância no sentido generalizado. Mas agora as funções de Green e propagadores coincidem com os de fixação de gauge na ação. As abordagens anteriores só são compatíveis se em todas quantidades invariantes de gauge a soma dos diagramas que envolvem os novos vértices se anula.

Claramente os novos vértices não alteram o resultado da equivalência com a teoria convencional para gráficos apenas com linhas transversais. Seu caráter direcional torna a análise de linhas longitudinais virtualmente impossível.

Na literatura [1.5], a crença na correção da abordagem de Parisi e Wu tem levado à ignorância de evidências que indicam a falha do método quando aplicado diretamente. Tem sido suposto que, embora a escolha de $\theta(x, \tau)$ (4.34) não leve ao equilíbrio dado por S de (4.28) [Ap. C], outra, provavelmente não-local, o faça; para quantidades invariantes de gauge todas as formas de θ são equivalentes.

IV.2 Regularização

Vamos calcular agora algumas quantidades invariantes de gauge, devidamente regularizadas. Novamente podemos utilizar um dos esquemas usuais ou um dos estocásticos. O problema novo é a preservação da simetria de gauge: naturalmente, procuramos procedimentos em que quantidades invariantes de gauge assim permaneçam após regularizadas. Concentramo-nos na correlação do campo escalar e na polarização do vácuo [veja, p.ex., 4.3] até termos da ordem de e^2 .

a. Dimensional [3.1]

A regularização dimensional tem, entre suas virtudes, a de não quebrar a invariância de gauge, na teoria convencional [0.10]. É um bom ponto de partida para a teoria estocástica.

Em primeiro lugar consideremos a já estudada correlação do campo escalar [1.4]. No Ap. F apresentamos os detalhes do cálculo; obtemos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \varphi(x, \tau) \varphi^*(x, \tau) \rangle = D(x, x) + R(x, x) \quad (4.40)$$

onde

$$\begin{aligned} D(x, x) = & \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2} + \\ & + e^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{(p-p')^2 (p'^2 + m^2)} \left(\frac{(p+p')^2 - (p^2 - p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \frac{-D-1}{p^2} \right\} + O(e^3) \quad (4.41) \end{aligned}$$

é o resultado usual, e

$$R(x,x) = e^2 \frac{\alpha-2\epsilon}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p'^2}{(p-p')^2 (p^2 + m^2)^2 (p^2 + p'^2 + 2m^2)} + 0(e^3) \quad (4.42)$$

sem fixação de gauge, ou

$$R(x,x) = e^2 \frac{\alpha-2}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p'^2}{(p-p')^2 (p^2 + m^2)^2 (p^2 + p'^2 + 2m^2 + \underbrace{(p-p')^2}_{\xi'})} + 0(e^3) \quad (4.43)$$

fixando o gauge na ação.

Como esperado, fixando o gauge na ação, somos levados sem apelação a $\alpha = 2$, conforme o TFD. Igualmente esperado, e pelo mesmo motivo, é $\alpha = 0$ sem fixação de gauge, confirmado por (4.42). Ocorre que $\alpha = 2$ é também admitido por esta fórmula. A razão para isto é que, neste caso particular, os diagramas extras que aparecem na fixação estocástica de gauge com (4.34) se cancelam, quando somados [Ap. F].

A um resultado novo chegamos quando dirigimos nossa atenção para a polarização do vácuo. Cálculos bastante similares aos anteriores mas um pouco mais trabalhosos, apresentados no Ap. G, mostram que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [D_{\mu\rho} \pi_{\rho\sigma} D_{\sigma\nu}] (p, \tau) = D_{\mu\rho}(p) \pi_{\rho\sigma}(p) D_{\sigma\nu}(p) + S_{\mu\nu}(p) \quad (4.44)$$

onde $D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2} (P_{\mu\nu}^T(p) + \xi P_{\mu\nu}^L(p))$ é o propagador de Feynman,

$$\pi_{\rho\sigma}(p) = e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2} \left\{ \frac{(p+2k)_\rho (p+2k)_\sigma - 2\delta_{\rho\sigma}}{(k+p)^2 + m^2} \right\} + O(e^3) \quad (4.45)$$

é a polarização usual transversal (isto é, invariante de gauge), e

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}(p) = & 2e^2 \epsilon P_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2} \left\{ \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2} \frac{\lim_{\tau \rightarrow \infty} (1-\alpha)\tau}{(k^2 + (k+p)^2 + m^2)((k+p)^2 + m^2)} + \right. \\ & + \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2} \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(k^2 + (k+p)^2 + 2m^2)^2} - \frac{1}{((k+p)^2 + m^2)(k^2 + m^2)} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{(k+p)^2 + m^2} + \frac{\alpha(k^2 - (k+p)^2)}{(k^2 + m^2)(k^2 + (k+p)^2 + 2m^2)} \left(\frac{1}{k^2 + (k+p)^2 + 2m^2} + \frac{1}{2(k^2 + m^2)} \right) \right] \right\} \\ & + O(e^3) \quad (4.46) \end{aligned}$$

sem fixação de gauge, ou

$$S_{\mu\nu}(p) = e^2 P_{\mu\nu}^L(p) \frac{2-\alpha}{2} \xi' \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)(k^2+(k+p)^2+2m^2+\frac{p^2}{\xi'})} \cdot \frac{(k^2-(k+p)^2)^2 + 0(e^3)}{p^2} \quad (4.47)$$

fixando o gauge na ação.

Novamente $\alpha = 2$ é imposto por este último caso (4.47). Já em (4.46) temos um termo divergente no tempo τ que só desaparece se $\alpha = 1$. Mas então é o termo finito que não se anula, como se vê, por exemplo, expandindo em potências de $\frac{p^2}{m^2}$ (o primeiro termo, $p = 0$, já é por si só diferente de zero). Podemos ver que $\alpha = 2$ não é apropriado considerando aqueles diagramas com vértices direcionados da fixação estocástica de gauge: eles deixam uma contribuição depois de somados [Ap. G].

Estes resultados⁺ mostram a força do TFD como um guia para a QE: usando uma regularização que preserva a simetria de gauge, somos levados aos resultados corretos se $\alpha = 0$ na abordagem de Parisi - Wu e se $\alpha = 2$ quando fixamos o gauge.

Pode-se adotar postura diferente e sugerir que o problema reside na regularização dimensional, não na QE. É evidentemente difícil excluir esta possibilidade. Mas, note, os esquemas de regularização candidatos a funcionar na QE devem, na teoria convencional, preservar a invariância de gauge (pelo menos), como mostram os termos em ξ dos diagramas estocásticos da correlação escalar e da polarização. Ademais, apenas propriedades de simetria e mudança de variável da regularização dimensional foram utilizadas.

⁺ É óbvia, mas vale ressaltar, a correção de nossa previsão, expressa em (4.13), de que mesmo quantidades invariantes de gauge dependem de η^L , pois α aparece explicitamente em (4.42) e (4.46).

b. Estocástica

A regularização estocástica (não-markoviana) tem atraído muita atenção porque (supostamente) preserva a invariância de gauge, já que não interfere (diretamente) no setor espaço-temporal da teoria. Vamos examinar isto em detalhe.

Seguimos o espírito precedente: por um lado, queremos que, retirando o parâmetro regulador Λ , obtenhamos a teoria usual, não regularizada, no limite de tempos grandes; por outro, que sem regulador tenhamos (4.14) e (4.15). Somos levados então à substituí-las por

$$\langle \eta(k, \tau) \eta^*(k', \tau') \rangle = (2\pi)^D \delta(k-k') \beta_{\Lambda_1}^e(|\tau-\tau'|) \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \langle \eta_\mu(k, \tau) \eta_\nu(k', \tau') \rangle &= (\beta_{\Lambda_2}^g(|\tau-\tau'|) P_{\mu\nu}^T(k) + \alpha_{\Lambda_3}(|\tau-\tau'|) P_{\mu\nu}^L(k)) \cdot \\ &\cdot (2\pi)^D \delta(k+k') \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde as funções β_{Λ}^e , β_{Λ}^g e α_{Λ} são tais que

$$\lim_{\Lambda_1 \rightarrow \infty} \beta_{\Lambda_1}^e(|\tau|) = \lim_{\Lambda_2 \rightarrow \infty} \beta_{\Lambda_2}^g(|\tau|) = 2\delta(\tau) \quad (4.50)$$

$$\lim_{\Lambda_3 \rightarrow \infty} \alpha_{\Lambda_3}(|\tau|) = \alpha\delta(\tau) \quad (4.51)$$

Usualmente se considera $\beta_{\Lambda_1}^e = \beta_{\Lambda_2}^g = \alpha_{\Lambda_3}$ (e portanto $\alpha=2$), $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$.

além de (2.6), (2.48), com $\epsilon = \epsilon_1$.

Nós agora calculamos a polarização do vácuo [Ap. H]. No limite de tempos grandes,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} [D_{\mu\rho} \pi_{\rho\sigma} D_{\sigma\nu}](p, \tau) = & \\
 = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{(p^2)^{1+\epsilon_2} (m^2)^{2-D/2}} & \left\{ P_{\mu\nu}^T(p) \left[\frac{-1(5-5(\epsilon_1+\epsilon_2)C+13}{6} \epsilon_1 - \epsilon_2 + 0(\epsilon^2) \right) \right. \right. \\
 & \cdot \frac{\Gamma(2+\epsilon_1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2+\epsilon_1)} + \\
 & + \frac{1}{2} (1-2\epsilon_1 C + 2\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 + 0(\epsilon^2)) \frac{p^{2\epsilon_2}}{m^{2\bar{\epsilon}}} \cdot \\
 & \cdot \frac{\Gamma(2+\bar{\epsilon} - \frac{D}{2})}{\Gamma(2+\bar{\epsilon})} + \\
 & + \frac{1}{120} \frac{p^2}{m^2} (53 \frac{\Gamma(3+\epsilon_1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3+\epsilon_1)} - 45 \frac{p^{2\epsilon_2}}{m^{2\bar{\epsilon}}} \frac{\Gamma(3+\bar{\epsilon} - \frac{D}{2})}{\Gamma(3+\bar{\epsilon})}) + \\
 & + 0\left(\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^2\right) \left. \right\} + \\
 & + P_{\mu\nu}^L(p) \left[\frac{-\alpha(1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C + 3\epsilon_1 - \epsilon_2 + 0(\epsilon^2))}{4} \right. \\
 & \cdot \frac{\Gamma(2+\epsilon_1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2+\epsilon_1)} + \\
 & + \frac{1}{2} (1-2\epsilon_1 C + 2\epsilon_1 - \bar{\epsilon} + 0(\epsilon^2)) \frac{p^{2\epsilon_2}}{m^{2\bar{\epsilon}}} \cdot \\
 & \cdot \frac{\Gamma(2+\bar{\epsilon} - \frac{D}{2})}{\Gamma(2+\bar{\epsilon})} + \\
 & + \frac{1}{120} \frac{p^2}{m^2} ((53-9\alpha) \frac{\Gamma(3+\epsilon_1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3+\epsilon_1)} - 35 \frac{p^{2\epsilon_2}}{m^{2\bar{\epsilon}}} \frac{\Gamma(3+\bar{\epsilon} - \frac{D}{2})}{\Gamma(3+\bar{\epsilon})}) (1+0(\epsilon)) + 0\left(\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^2\right) \left. \right\} \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Para a regularização preservar a invariância de gauge os termos longitudinais devem desaparecer ordem a ordem na expansão em $\frac{p}{m}$.

Esta última expressão apresenta pólos simples para $D = 4, 6, \dots$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Para qualquer outra dimensão,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [D_{\mu\rho} \pi_{\rho\sigma} D_{\sigma\nu}](p, \tau) = \\ = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{p^2 (m^2)^{2-D/2}} \left\{ \frac{1}{3} P_{\mu\nu}^T(p) \left[-\Gamma(2-\frac{D}{2}) + \frac{1}{5} \frac{p^2}{m^2} \Gamma(3-\frac{D}{2}) + \dots \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} P_{\mu\nu}^L(p) \left[(2-\alpha) \Gamma(2-\frac{D}{2}) + \frac{3}{10} \frac{p^2}{m^2} (2-\alpha) \Gamma(3-\frac{D}{2}) + \dots \right] \right\} \\ D \neq 4, 6, \dots \quad (4.57) \end{aligned}$$

que é transversal se $\alpha = 2$. Naquelas dimensões em que aparecem pólos, entretanto, temos problemas; para $D = 4$, por exemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [D_{\mu\rho} \pi_{\rho\sigma} D_{\sigma\nu}](p, \tau) = \\ = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{p^2 (m^2)^{2-D/2}} \left\{ P_{\mu\nu}^T(p) \left[-\frac{5}{6\epsilon_1} + \frac{1}{2\bar{\epsilon}} + \left(\frac{5}{6} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_1}{\bar{\epsilon}} \right) \frac{C-1+\epsilon_1}{\bar{\epsilon}} + \frac{\epsilon_2}{6\epsilon_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{30} \frac{p^2}{m^2} + \dots \right] + \right. \\ \left. + P_{\mu\nu}^L(p) \left[\frac{1}{4\epsilon_1} \left(\frac{2\epsilon_1}{\bar{\epsilon}} - \alpha \right) + \left(\frac{\alpha(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4\epsilon_1} - \frac{\epsilon_1}{\bar{\epsilon}} \right) \frac{C-1(\alpha+6)}{8} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\alpha}{4} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\bar{\epsilon}} + \frac{3}{80} \frac{p^2}{m^2} (2-\alpha) + \dots \right\} \quad (4.58)$$

Não há valor de α que anule todos os termos longitudinais: sendo $\bar{\epsilon} = 2\epsilon_1$ devemos ter $\epsilon_1 = \epsilon_2$ e $\alpha = 2$ para anular o termo em $\frac{1}{\epsilon_1}$ e C, mas então os demais termos finitos permanecem. Note que sequer se fazemos, de forma completamente arbitrária, $\bar{\epsilon} = \epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ (como sugerido em [4.4]) obtemos transversalidade. O mesmo vale para $D = 6, 8, \dots$

Não é difícil verificar que mesmo se considerássemos um diferente parâmetro ϵ_3 para as linhas longitudinais não obteríamos transversalidade, pois ele afetaria apenas os termos 0 (ϵ^0), não alterando o termo divergente e os finitos de 0 ($\frac{p^2}{m^2}$) e maiores. Assim, concluímos que a regularização estocástica analítica não preserva a invariância de gauge, ao menos enquanto nos limitamos à simplificação (4.52) com (4.53).

É claro que pode-se supor que uma outra escolha de f (mais feliz que (4.53)) dê bons resultados, para alguma quantidade em alguma ordem, como em [4.5]. Mas o fato é que o resultado acima mostra que não há nenhum motivo para supor que a regularização estocástica não-markoviana seja boa, quando fixamos o gauge na ação. O argumento já exposto (que não modificamos o setor espaço-tempo da teoria) é falho: as integrações temporais resultam em fatores de momentos; modificando a dependência em τ alteramos - los

e, com isso, afetamos o espaço-tempo (e as simetrias nele observadas). Isto se manifesta quando, fixando o gauge estocasticamente, encontramos um argumento geral para mostrar a falência do método [4.6].

Enquanto nos limitamos à fixação de gauge, parece portanto que a regularização estocástica deve ser markoviana. Alguns resultados [4.7] mostram que uma generalização apropriada de (2.30) (substituindo derivadas por derivadas covariantes) produz alguns resultados satisfatórios com fixação estocástica de gauge, mas uma análise mais extensa ainda está por vir.

Permanece em aberto também a questão da regularização partindo da ação invariante de gauge. É possível que uma escolha adequada em (4.49) permita obter a teoria regularizada respeitando a invariância, mas não fomos capazes de obtê-la.

CAPÍTULO V

CAMPO DE GAUGE NÃO-ABELIANO

A motivação para introdução da QE foi a perspectiva de quantizar teorias de gauge não-abelianas sem fixação de gauge e, conseqüentemente, sem a introdução de fantasmas. Já vimos no capítulo anterior que no caso abeliano em interação com bosons precisamos de antemão separar as variáveis cíclicas, ao contrário do que sugeriam inicialmente Parisi e Wu. Veremos agora se o mesmo se aplica a um campo de gauge não-abeliano. Analisamos também o método aplicado à ação de Fadeev-Popov, encarando então a simetria de BRST como fundamental. Limitar-nos-emos à regularização dimensional.

Para tanto, consideremos um campo de gauge

$$A_{\mu}(x) = A_{\mu}^a(x) T^a \quad (5.1)$$

onde T^a , $a = 1, \dots, N$, são os geradores de uma álgebra de Lie com constantes de estrutura f^{abc} ; na representação adjunta

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (5.2)$$

com f^{abc} completamente anti-simétrico, e satisfazendo a identidade de Jacobi.

Introduzindo o tensor

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad , \quad (5.3)$$

onde g é a constante de acoplamento, a ação invariante de gauge ("ação de Yang-Mills") na ausência de outros campos se escreve como

$$S_{cl} = \frac{1}{4} \int d^D x (F_{\mu\nu}^a(x))^2 \quad (5.4)$$

Sendo

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c(x)$$

a derivada covariante e

$$I_\mu^a(x) \equiv g f^{abc} [\partial_\nu (A_\nu^b(x) A_\mu^c(x)) - A_\nu^c(x) (\partial_\nu A_\mu^b(x) - \partial_\mu A_\nu^b(x))] \quad (5.5)$$

$$\tilde{I}_\mu^a(x) \equiv g^2 f^{abc} f^{bde} A_\nu^c(x) A_\nu^d(x) A_\mu^e(x) \quad (5.6)$$

temos

$$\frac{\delta S_{cl}}{\delta A_\mu^a(x)} = D_\nu^{ab} F_{\nu\mu}^b(x) = - (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a(x) - I_\mu^a(x) - \tilde{I}_\mu^a(x) \quad (5.7)$$

que, quando igualada a zero, constitui a equação de movimento clássica do campo.

V.1. Quantização

a. Abordagem de Parisi e Wu

Partimos novamente da forma mais simples para a equação de Langevin generalizada, de ruído η_μ^a ,

$$\frac{\partial A_\mu^a(x, \tau)}{\partial \tau} = (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a(x, \tau) + I_\mu^a(x, \tau) + \tilde{I}_\mu^a(x, \tau) + \eta_\mu^a(x, \tau) \quad (5.8)$$

No espaço dos momentos, ela é

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu^a(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2 (\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) A_\nu^a(k, \tau) + \\ & + I_\mu^a(k, \tau) + \tilde{I}_\mu^a(k, \tau) + \eta_\mu^a(k, \tau) \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde

$$\begin{aligned} I_\mu^a(k, \tau) = & -g \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \cdot \\ & \cdot V_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, -k_1, -k_2) A_\kappa^b(k_1, \tau) A_\lambda^c(k_2, \tau) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\mu^a(k, \tau) = & g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \cdot \\ & \cdot W_{\mu\nu\kappa\lambda}^{abcd} A_\nu^b(k_1, \tau) A_\kappa^c(k_2, \tau) A_\lambda^d(k_3, \tau) \end{aligned} \quad (5.11)$$

são os termos de auto-interação, com

$$V_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, k_1, k_2) = \frac{-i}{2} f^{abc} [(k-k_1)_\lambda \delta_{\mu\kappa} + (k_1-k_2)_\mu \delta_{\kappa\lambda} + (k_2-k)_\kappa \delta_{\lambda\mu}] \quad (5.12)$$

$$W_{\mu\nu\kappa\lambda}^{abcd} = -\frac{1}{6} [f^{abe} f^{cde} (\delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\kappa\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa}) + \\ + f^{ade} f^{cbe} (\delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\kappa\lambda})] . \quad (5.13)$$

A idéia é, como antes, resolver tal equação perturbativa_{mente}. Se o campo é pequeno o suficiente, podemos escrever (5.9) como

$$\frac{\partial A_\mu^{aT}(k, \tau)}{\partial \tau} \approx -k^2 A_\mu^{aT}(k, \tau) + \eta_\mu^{aT}(k, \tau) \quad (5.14)$$

e

$$\frac{\partial A_\mu^{aL}(k, \tau)}{\partial \tau} \approx I_\mu^{aL}(k, \tau) + \eta_\mu^{aL}(k, \tau) \quad (5.15)$$

usando as mesmas definições anteriores (3.4). A primeira destas equações, é, de novo, do tipo escalar e não apresenta problemas. A segunda tem também, sempre, um atrito (esperado já que A_μ^L não é mais cíclico): mesmo se fazemos $\eta_\mu^L(k, \tau) = 0$ o lado direito não se anula. Somos levados então a

$$A_{\mu}^a(k, \tau) = \int_0^{\tau} dt G_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau-t) [\eta_{\nu}^b(k, t) + I_{\nu}^b(k, t) + \tilde{I}_{\nu}^b(k, t)] + P_{\mu\nu}^L(k) A_{\nu}^a(k, 0) \quad (5.16)$$

com

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau) = \delta^{ab} [P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 \tau} + P_{\mu\nu}^L(k)] \quad (5.17)$$

Através das regras de Feynman de árvore [Fig. 5.1a] (agora também somando sobre os índices do grupo em cruzes e vértices) escrevemos a solução de (5.16) como

$$A_{\mu}^a(k, \tau) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + 0(g^3) + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \text{diagram 10} + 0(g^2) \quad (5.18)$$

Voltemos nossa atenção para as propriedades do ruído. Não sabendo decompor o campo em variáveis não-cíclicas (invariantes de gauge) e cíclicas, também não podemos utilizar o TFD para anular as componentes do ruído adequadas.

Apelamos para o limite de campos fracos. Neste caso (5.14) mostra que A_{μ}^{aT} se comporta como um campo abeliano livre e, por isso,

$$\langle \eta_{\mu}^{aT}(k, \tau) \eta_{\nu}^{bT}(k', \tau') \rangle = 2P_{\mu\nu}^T(k) (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \delta^{ab}, \quad (5.19)$$

sendo η_{μ}^T gaussiano de média zero. Não é óbvio de (5.15), entretanto, que este mesmo limite para A_{μ}^L seja "suave", visto que A_{μ}^L agora tem caráter de variável dinâmica como A_{μ}^T . Apenas por simplicidade tentamos encarar η_{μ}^L como markoviano,

$$\langle \eta_{\mu}^{aL}(k, \tau) \eta_{\nu}^{bL}(k', \tau') \rangle = \alpha P_{\mu\nu}^L(k) (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \delta^{ab} \quad (5.20)$$

(com $\alpha \geq 0$ um parâmetro a ser ajustado), e gaussiano de média zero. A esperança é que algum valor de α permita obter os resultados usuais (que incluem as contribuições de fantasmas) para quantidades invariantes de gauge, no limite de tempos iguais e grandes. Na literatura, sempre $\alpha = 2$.

Com (5.19) e (5.20) podemos calcular o propagador "livre" (isto é, de $0(g^{\circ})$),

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau, \tau') = \delta^{ab} \left\{ \frac{1}{k^2} \left[P_{\mu\nu}^T(k) (e^{-k^2|\tau-\tau'|} - e^{-k^2(\tau+\tau')}) + \xi P_{\mu\nu}^L(k) \right] + \alpha P_{\mu\nu}^L(k) \min(\tau, \tau') \right\} \quad (5.21)$$

fazendo (arbitrariamente, pelas observações feitas acima) a mesma escolha gaussiana (3.13), isto é,

$$\langle A_{\mu}^{aL}(k,0) A_{\nu}^{bL}(k',0) \rangle = \xi \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2} \delta^{ab} (2\pi)^D \delta(k+k') \quad . \quad (5.22)$$

Definindo novas regras de Feynman [Fig. 5.1b] escrevemos qualquer correlação perturbativamente. Note que os vértices são simétricos e que

$$\left. \begin{aligned} V_{\alpha\beta\gamma}^{abc} &= \frac{1}{2} V_{\alpha\beta\gamma}^{(0)abc} \\ W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} &= \frac{1}{6} W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)abcd} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

onde $v^{(0)}$ e $w^{(0)}$ são os vértices convencionais [4.3].

b. Ação de Fadeev - Popov

Podemos tomar uma postura completamente diferente. Ao invés de considerarmos as equações clássicas de movimento, impomos a simetria de BRST como fundamental, sendo levados então à ação de Fadeev-Popov [0.9]

$$S_{FP} = S_{cl} + \frac{1}{2\xi} \int d^D x \left(\partial_\mu A_\mu^a(x) \right)^2 + \int d^D x \partial_\mu \bar{c}^a(x) D_\mu^{ab} c^b(x) \quad (5.24)$$

onde $\bar{c}$, c são campos fantasmas (grassmanianos, porém escalares). Esta ação não é invariante de gauge, em virtude do segundo termo (fixação de gauge), mas de BRST.

As equações de Langevin correspondentes são

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu^a(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \frac{\delta S_{FP}}{\delta A_\mu^a(x, \tau)} + \eta_\mu^a(x, \tau) = \\ &= \left(\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu^a(x, \tau) + I_\mu^a(x, \tau) + \bar{I}_\mu^a(x, \tau) + \\ &\quad - g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^b(x, \tau)) c^c(x, \tau) + \eta_\mu^a(x, \tau) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^a(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \frac{\delta S_{FP}}{\delta \bar{c}^a(x, \tau)} + \theta^a(x, \tau) = \\ &= \partial^2 c^a(x, \tau) + g f^{abc} \partial_\mu (c^b(x, \tau) A_\mu^c(x, \tau)) + \theta^a(x, \tau) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}^a(x, \tau)}{\partial \tau} &= - \frac{\delta S_{FP}}{\delta c^a(x, \tau)} + \bar{\theta}^a(x, \tau) \\ &= \partial^2 \bar{c}^a(x, \tau) + g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^b(x, \tau)) A_\mu^c(x, \tau) + \bar{\theta}^a(x, \tau) \end{aligned} \quad (5.27)$$

ou, no espaço dos momentos,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_{\mu}^a(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2 (\delta_{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi}) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}) A_{\nu}^a(k, \tau) + I_{\mu}^a(k, \tau) + \bar{I}_{\mu}^a(k, \tau) + \\
 & + ig f^{abc} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k+k_1-k_2) k_{1\mu} \bar{c}^b(k_1, \tau) c^c(k_2, \tau) + \\
 & + \eta_{\mu}^a(k, \tau)
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial c^a(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2 c^a(k, \tau) + ig f^{abc} k_{\mu} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) \cdot \\
 & \cdot c^b(k_1, \tau) A_{\mu}^c(k_2, \tau) + \theta^a(k, \tau)
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{c}^a(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2 \bar{c}^a(k, \tau) - ig f^{abc} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1+k_2) k_{1\mu} \cdot \\
 & \cdot \bar{c}^b(k_1, \tau) A_{\mu}^c(k_2, \tau) + \bar{\theta}^a(k, \tau)
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Com as funções de Green

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau) = \delta^{ab} \left[P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 \tau} + P_{\mu\nu}^L(k) e^{-\frac{k^2 \tau}{\xi}} \right] \tag{5.31}$$

$$G^{ab}(k, \tau) = \delta^{ab} e^{-k^2 \tau} \tag{5.32}$$

e as regras de Feynman de árvore [Fig. 5.1a, 5.2a], escrevemos

$$A_{\mu}^a(k, \tau) = (5.18) + \text{diagramas} + 0(g^3) \quad (5.33)$$

$$c^a(k, \tau) = \text{diagramas} + 0(g^3)$$

$$\bar{c}^a(k, \tau) = \text{diagramas} + 0(g^2) \quad (5.34)$$

(5.35)

já anulando as condições iniciais longitudinais.

Como no caso abeliano com fixação de gauge podemos seguir usando o TFD ao fazer os ruídos gaussianos η_{μ}^a e θ^a obedecerem a

$$\langle \eta_{\mu}^a(k, \tau) \eta_{\nu}^b(k', \tau') \rangle = 2\delta_{\mu\nu} (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \delta^{ab} \quad (5.36)$$

e

$$\langle \theta^a(k, \tau) \bar{\theta}^b(k', \tau') \rangle = 2(2\pi)^D \delta(k-k') \delta(\tau-\tau') \delta^{ab} . \quad (5.37)$$

Elas permitem calcular os propagadores "livres"

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau, \tau') = \delta^{ab} \frac{1}{k^2} \left[P_{\mu\nu}^T(k) e^{-k^2 |\tau - \tau'|} + P_{\mu\nu}^L(k) e^{-\frac{k^2}{\xi} |\tau - \tau'|} \right] \quad (5.38)$$

$$D^{ab}(k, \tau, \tau') = \delta^{ab} \frac{1}{k^2} e^{-k^2 |\tau - \tau'|} \quad (5.39)$$

da maneira usual.

As regras de Feynman de correlações [Fig. 5.1b, 5.2b] são análogas às já apresentadas "ad nauseum". A novidade é que a anticomutação dos θ 's e sua disposição em (5.28) introduzem um sinal (-) a cada "loop" de fantasmas.

c. Fixação de Gauge de Zwanziger

Uma terceira alternativa para quantizar uma teoria de gauge estocasticamente é pela fixação estocástica de gauge na forma originalmente introduzida por Zwanziger [5.1]. Ela pode ser atingida por uma transformação de gauge não-abeliana generalizada [4.2] $U(x, \tau)$, definindo um novo campo

$$A'_\mu(x, \tau) = U(x, \tau) A_\mu(x, \tau) U^{-1}(x, \tau) - \frac{i}{g} U(x, \tau) \partial_\mu U^{-1}(x, \tau). \quad (5.40)$$

A equação de evolução de $A'_\mu(x, \tau)$ é encontrada usando (5.8): retirando a linha de A'_μ ,

$$\frac{\partial A'^a_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} = (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^a_\nu(x, \tau) + I^a_\mu(x, \tau) + \tilde{I}^a_\mu(x, \tau) - D^{ab}_\mu \dot{\Lambda}^b(x, \tau) + \eta^a_\mu(x, \tau) \quad (5.41)$$

onde η^a_μ é um ruído obtido do presente em (5.8) por $U \eta_\mu U^{-1}$, e

$$\dot{\Lambda}(x, \tau) \equiv - \frac{i}{g} U^{-1}(x, \tau) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial \tau}. \quad (5.42)$$

A escolha natural de $\Lambda(x, \tau)$, manifestamente covariante e local, é

$$\dot{\Lambda}(x, \tau) = - \frac{1}{\xi} \partial_\nu A_\nu(x, \tau). \quad (5.43)$$

Portanto, (5.41) torna-se

$$\frac{\partial A'^a_\mu(x, \tau)}{\partial \tau} = (\partial^2 \delta_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu) A^a_\nu(x, \tau) + I^a_\mu(x, \tau) + \tilde{I}^a_\mu(x, \tau) +$$

$$+ J_{\mu}^a(x, \tau) + \eta_{\mu}^a(x, \tau) \quad (5.44)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\mu}^a(k, \tau)}{\partial \tau} = & -k^2 (\delta_{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi}) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}) A_{\nu}^a(k, \tau) + I_{\mu}^a(k, \tau) + \tilde{I}_{\mu}^a(k, \tau) + \\ & + J_{\mu}^a(k, \tau) + \eta_{\mu}^a(k, \tau) \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde

$$\begin{aligned} J_{\mu}^a(k, \tau) = & g \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \vartheta_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, -k_1, -k_2) \cdot \\ & \cdot A_{\kappa}^b(k_1, \tau) A_{\lambda}^c(k_2, \tau) \end{aligned} \quad (5.46)$$

representa uma nova interação, com

$$\vartheta_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, -k_1, -k_2) = \frac{i}{2\xi} f^{abc}(k_1 \delta_{\mu\lambda} - k_2 \delta_{\mu\kappa}) \quad (5.47)$$

Alternativamente, pode-se interpretar os novos termos como oriundos de um vínculo não-holonômico covariante imposto na equação de movimento clássica, generalizando o vínculo (4.27) do caso abeliano [5.2].

Sendo $G_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau)$ dado por (5.31) a expansão em árvores é semelhante à (5.18) com condições iniciais nulas, com um novo vértice [Fig. 5.3]:

$$\begin{aligned}
 A_\mu(k, \tau) = (5.18) &+ \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \\
 &+ \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \\
 &+ \text{diagram 7} + 0(g^3) \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Para formar correlações precisamos das médias de η_μ^a . Quando $\alpha = 2$, (5.19) e (5.20) implicam

$$\langle \eta_\mu^a(x, \tau) \eta_\nu^b(x', \tau') \rangle = 2\delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta(x-x') \delta(\tau-\tau') \quad (5.49)$$

ou

$$\langle \eta_\mu^a(k, \tau) \eta_\nu^b(k', \tau') \rangle = 2\delta_{\mu\nu} (2\pi)^D \delta(k+k') \delta(\tau-\tau') \delta^{ab} \quad (5.50)$$

para o novo ruído gaussiano η_μ^a , de média zero. Neste caso o propagador $D_{\mu\nu}^{ab}$ é dado por (5.38) [Fig. 5.1b].

Esta maneira de fixar o gauge constitui uma ponte entre a abordagem de Parisi - Wu e a fixação de gauge na ação: com a primeira coincide no resultado de quantidades invariantes de gauge; com a segunda, no uso dos mesmos propagadores gluônicos. Sua característica própria é a introdução de um vértice direcionado, que complica bastante qualquer análise de um diagrama geral; a correção da fixação de gauge de Zwanziger repousa sobre a expectativa nada trivial que os diagramas envolvendo os novos vértices se somam para dar a contribuição de fantasmas, em quantidades invariantes de gauge.

V.2 Regularização Dimensional

Como no caso abeliano, vamos calcular [5.3] algumas quantidades na quantização estocástica com regularização dimensional. Começamos com a polarização do vácuo, na teoria convencional transversal, mas não invariante de gauge, e chegamos à $\langle F_{\mu\nu}^a F_{\kappa\sigma}^a \rangle$, esta sim invariante.

a. Polarização do Vácuo

No limite de tempos grandes obtemos, após um longo cálculo apresentado no Ap. I,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [D_{\mu\rho}^{aa'} \pi_{\rho\sigma}^{a'b'} D_{\sigma\nu}^{b'b}] (k, \tau) = \\ = D_{\mu\rho}^{(0)}(k) [\pi_{\rho\sigma}^{ab}(\text{YM}) + \pi_{\rho\sigma}^{ab}(\text{FP}) + \tilde{\pi}_{\rho\sigma}^{ab}] D_{\sigma\nu}^{(0)}(k) + \\ + P_{\mu\rho}^L(k) \Lambda_{\rho\sigma}^{ab} P_{\sigma\nu}^L(k) \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\text{onde } D_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2} (P_{\mu\nu}^T(k) + \xi P_{\mu\nu}^L(k)) ,$$

$$\begin{aligned} \pi_{\rho\rho}^{ab}(\text{YM}) = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) V_{\rho\alpha\beta}^{(0)ade}(k, -k_1, -k_2) \cdot \\ \cdot V_{\rho'\alpha'\beta'}^{(0)bde}(-k, k_1, k_2) D_{\alpha\alpha'}^{(0)}(k_1) D_{\beta\beta'}^{(0)}(k_2) + \\ + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} W_{\rho\alpha\beta\rho'}^{(0)aeeb} D_{\alpha\beta}^{(0)}(k_1) + O(g^3) \end{aligned} \quad (5.52)$$

é o resultado usual dos gráficos só com linhas de campo de gauge, e

$$\pi_{\rho\rho'}^{ab}(\text{FP}) = g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \frac{k_{1\rho} k_{2\rho'}}{k_1^2 k_2^2} +$$

$$+ 0 (g^3) \quad (5.53)$$

é a contribuição dos fantasmas.

Na abordagem de Parisi e Wu, no gauge de Landau ($\xi = 0$),

$$\tilde{\pi}_{\rho\rho'}^{ab} = g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \cdot$$

$$\cdot \{ \Gamma_{\rho\rho'}(\tau) + \Xi_{\rho\rho'} + R_{\rho\rho'} \} + 0 (g^3) \quad (5.54)$$

$$\Gamma_{\rho\rho'}(\tau) = \frac{\alpha^2 \tau^2}{2} (k^2)^2 k_{1\rho} k_{1\rho'} + \alpha \tau \left[P_{\rho\rho'}^T(k_1) ((k^2 - k_1^2)^2 - k_1^2 k_2^2) + \right.$$

$$\left. + P_{\rho\rho'}^L(k_1) \frac{2-3\alpha}{2} k_1^2 k_1^2 \right] \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{\rho\rho'} = & P_{\rho\rho'}^T(k_1) k^2 \left[\left(1 - \frac{3\alpha}{2}\right) + 4(\alpha-1) \frac{k_1^2}{k^2 + k_1^2} \right] + \\ & + P_{\rho\rho'}^L(k_1) k_1^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{7\alpha}{2} - 3 \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$R_{\rho\rho'} = -\frac{1}{2} \delta_{\rho\rho'} \frac{k_1^2}{k^2} (\alpha (k_1^2 - k_2^2) - 2k^2) \quad (5.57)$$

enquanto $\Lambda_{\rho\rho'}^{ab}$ é dado no Ap. I. Dos vários termos acima, $\Gamma_{\rho\rho'}$ e $\Xi_{\rho\rho'}$ não se anulam na regularização dimensional; o segundo, com $\alpha = 2$, foi obtido por Namiki et al. [3.2]. Quanto à $R_{\rho\rho'}$, é nulo se usamos as integrais usuais da regularização dimensional, mais a conjectura de 't Hooft - Veltman [veja Ap. K]. De qualquer forma, permanecem contribuições proporcionais a τ e finitas. Como a polarização não é invariante de gauge, da QE não se esperava outra coisa.

Fixando o gauge na ação, isto é, usando S_{FP} , obtemos automaticamente o resultado correto:

$$\tilde{\pi}_{\rho\rho'}^{ab} = 0 + O(g^3) \quad (5.58)$$

$$\Lambda_{\rho\rho'}^{ab} = 0 + O(g^3) \quad (5.59)$$

[Ap. I].

$$b. \langle F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} \rangle$$

A fim de verificar a correção da QE somos impelidos a calcular quantidades invariantes de gaúge. O único exemplo calculado na literatura, de nosso conhecimento, é $\langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\kappa\lambda}^a(x) \rangle$. Namiki et al. [3.2] utilizaram a abordagem original de Parisi e Wu com $\alpha = 2$ e asseguram ter obtido o resultado correto. Entretanto, eles mantiveram apenas os termos finitos no 5º tempo, os demais supostamente se anulando em "cálculos diretos".

No Ap. J obtemos simplesmente o resultado usual

$$\langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\kappa\lambda}^b(x) \rangle = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab} (FTh) \quad (5.60)$$

quando partimos da ação S_{FP} , mas

$$\begin{aligned} \langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\kappa\lambda}^b(x) \rangle &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab} (FTh) + \\ &+ g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 (k-k_1)^2} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2} \left[\alpha \tau \left(-(k^2)^2 + (k_1^2)^2 - k_1^2 (k-k_1)^2 + k^2 k_1^2 \right) \frac{\delta_{\mu\kappa}}{k^2} + \frac{\alpha-2}{2} k_{1\mu} k_{1\kappa} \right] - \right. \\ &- \frac{1}{k^2} \left(\left(\frac{2-\alpha}{2} (k^2)^2 + \frac{\alpha}{2} (k_1^2)^2 - \frac{\alpha}{2} k_1^2 (k-k_1)^2 - k^2 k_1^2 \right) \frac{\delta_{\mu\kappa}}{k^2} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{(\alpha-2)(\alpha+2)}{4} k_{1\mu} k_{1\kappa} \right) \right] + \\ &- (\mu \leftrightarrow \nu) - (\kappa \leftrightarrow \lambda) + \left. \begin{pmatrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ \kappa \leftrightarrow \lambda \end{pmatrix} \right\} \quad (5.61) \end{aligned}$$

na abordagem de Parisi e Wu no gauge de Landau. Já usamos argumentos de simetria para cancelar alguns termos. Em (5.61) apelamos para as fórmulas explícitas de regularização dimensional [Ap. K] e

$$\begin{aligned}
 \langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\kappa\lambda}^b(x) \rangle &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{FTh}) \Big|_{\text{Reg. Dim.}} + \\
 &+ g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2} \left[-k^2 \delta_{\mu\kappa} \left(\alpha\tau + \frac{2-\alpha}{2k^2} \right) I - \alpha \frac{\delta_{\mu\kappa}}{k^2} \left(\tau - \frac{1}{2k^2} \right) \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\alpha-2}{8(D-1)} k^2 \left(\delta_{\mu\kappa} - D \frac{k_\mu k_\kappa}{k^2} \right) \left(\alpha\tau - \frac{\alpha+2}{2} \frac{1}{k^2} \right) I \right] + \right. \\
 &\quad \left. - (\mu \leftrightarrow \nu) - (\kappa \leftrightarrow \lambda) + \begin{pmatrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ \kappa \leftrightarrow \lambda \end{pmatrix} \right\} \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

com

$$I = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma^2(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(D-2)} (k^2)^{\frac{D}{2}-2}. \quad (5.63)$$

Repare que procuramos não usar a conjectura de 't Hooft-Veltman; se o fazemos, $\int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} = 0$. Neste ponto vemos que nosso resultado (5.62) não se anula para qualquer valor de α (inclusive $\alpha = 2$ quando sobra ao menos um termo linear em τ), a menos que utilizemos também na integral em k que integrais de polinômios se anulam.

Mas neste caso o termo de fantasmas, por exemplo, também desaparece, e qualquer valor de α funciona. Se agirmos de forma consistente, não utilizando a conjectura de 't Hooft - Veltman em $\langle F_{\mu\nu}^a F_{\kappa\sigma}^a \rangle$, concluímos que a QE sem fixação de gauge não produz os resultados corretos, ao contrário da fé geral [1.5].

Enfatizemos que a falência da empreitada pode ser atribuída à invariância de gauge (através do TFD e portanto da correlação (5.20)) e/ou à indefinição do limite livre (através do caráter gaussiano de η_μ^L).

Podemos eventualmente pensar que o problema está na regularização dimensional. Mas ela funciona bem na teoria usual e mesmo na QE, se a ação é S_{FP} . É difícil imaginar um esquema alternativo apropriado: temos a regularização de Slavnov [0.11], de difícil manejo, e as estocásticas. Resultados recentes mostram que a regularização estocástica não-markoviana é incompatível também com a QE de uma teoria não-abeliana: na abordagem de Parisi e Wu com $\alpha = 2$ ela não é suficiente para regular "loops" com linhas longitudinais; com fixação estocástica de gauge [4.6] e com ação invariante por BRST [5.4] quebramos a invariância de gauge. Por outro lado, uma generalização covariante de gauge da outra regularização estocástica parece ser compatível com a fixação estocástica de gauge, como mostra um cálculo em um "loop" e um argumento que repousa na correção da QE sem fixação de gauge [4.7]. Nossos resultados sugerem, porém, um estudo mais extenso deste método.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Neste trabalho procuramos entender porque e quando a QE funciona, enfatizando quais de seus aspectos são responsáveis por atingirmos a teoria quântica usual no limite de tempos grandes. Neste sentido, propuzemos encarar o TFD como um guia para quantização e regularização.

À nível de quantização escolhemos o ruído e o atrito de forma a satisfazer o TFD. Em particular, isto implica anular, de partida, o ruído correspondente a variáveis cíclicas na ação, quando ela age de "potencial" para o atrito.

No caso de teorias de gauge, há basicamente duas abordagens. A mais bem comportada, como vimos, consiste em impor a simetria de BRST sobre a ação, introduzindo uma fixação de gauge e fantasmas. Obtemos então os resultados usuais na QE com regularização dimensional, mas ao custo de abandonar o caráter não-perturbativo do método.

A abordagem original de Parisi - Wu, por outro lado, era suposta capaz de gerar os mesmos resultados sem nunca falar em fixação de gauge na ação e fantasmas, nem discriminar as variáveis físicas (sem, portanto, atender ao TFD). Nós, entretanto, mostramos que ela não o faz, exibindo a polarização do vácuo, na eletrodinâmica escalar, e $\langle F_{\mu\nu}^a F_{\kappa\sigma}^a \rangle$, no caso de Yang - Mills

puro, com termos divergentes e finitos alienígenas. Uma teoria não-abeliana em interação com campos de matéria deve apresentar problemas dos dois lados.

Temos, entretanto, uma liberdade adicional que antes não havia sido notada, proveniente da ausência de equilíbrio nas variáveis cíclicas. Para a teoria abeliana sabemos separá-las de maneira covariante, e verificamos que a única saída é seguir o TFD. Anulando o ruído longitudinal mostramos que tudo corre bem, com um argumento geral e dois exemplos em um "loop".

Para a teoria não-abeliana não sabemos fazer tal decomposição de maneira simples e covariante: esta é toda a dificuldade dos demais métodos de quantização. Talvez com o auxílio de transformações de gauge generalizadas ou de BRST possamos implementar nossa prescrição. Um estudo mais extenso das fixações de gauge estocástica e usual, nesta linha, pode revelar-se interessante.

À nível de regularização, vimos que i) métodos convencionais podem ser aplicados normalmente, ao menos quando não temos o problema acima mencionado de variáveis cíclicas; ii) métodos estocásticos consistem em fazer ruído e atrito não obedecerem ao TFD. Neste último caso a evolução do sistema torna-se mais complicada e o que de fato ocorre no limite de tempos grandes ainda precisa ser melhor entendido.

Em particular, há o problema da invariância de gauge ser ou não preservada. No caso abeliano vimos que um tratamento que não privilegia componentes físicos do campo, fixando o gauge na ação, fracassa, na regularização não-markoviana, ao contrário das expectativas. É compreensível que o mesmo ocorra no caso não-

abeliano. Descobrir porque reguladores diferentes resultam em quebras da invariância em ordens diferentes pode ajudar a compreender quando ela é preservada no limite. Melhor estudo demanda a outra regularização estocástica, cuja virtude de preservar invariância de gauge repousa, a nosso ver, em evidências muito tênues.

Permanecem ainda por examinar as regularizações estocásticas na abordagem de Parisi e Wu. Poderá uma escolha de reguladores permitir tratar variáveis transversais e longitudinais da mesma forma? Se não, como implementar a regularização quantizando apenas os modos transversais? Uma possibilidade talvez seja um método híbrido, regularizando o ruído transversal e a distribuição inicial longitudinal (3.12).

Para cumprir o programa de uma teoria de campos quantizada estocasticamente temos ainda pela frente um grande caminho : há que se renormalizar. Também aqui podemos contentar-nos em obter a teoria renormalizada no limite de tempos grandes de uma equação de Langevin com a ação renormalizada usual. Uma abordagem realmente estocástica consiste, porém, em obter resultados finitos a tempos finitos, aplicando as técnicas de renormalização da dinâmica de fenômenos críticos. Apenas agora esta linha se desenvolve⁺, e poderemos investigar a relevância de nossas observações em teorias de gauge. Desenvolvida tal empreitada, toda a luz e toda a treva da mecânica estatística fora-de-equilíbrio podem ajudar a entender os mecanismos das teorias de campos.

⁺ E tem sido explorada para estudar a criticalidade da teoria em $D = 3$, obtendo os expoentes críticos [6.1].

APÊNDICE A

MOVIMENTO BROWNIANO

1. A Equação de Langevin Generalizada [A.1, A.2, A.3]

Vamos considerar o problema de uma partícula macroscópica de massa m , em suspensão em um fluído à temperatura T . A equação de movimento microscópica da partícula é evidentemente muito complicada, devido aos sucessivos choques com as moléculas do fluído. Queremos uma equação fenomenológica que não despreze as flutuações ao comportamento macroscópico, mas as inclua de forma tratável, utilizando suas propriedades estatísticas.

Por simplicidade tomemos o problema unidimensional, em que a coordenada do centro de massa da partícula é denotada $x(t)$ e sua velocidade $v = \frac{dx}{dt}$.

A interação da coordenada x com os demais graus de liberdade (internos e das moléculas do fluído) é reunida em uma força $F(t)$. Ela depende da posição de muitos átomos em movimento constante: é uma função aleatória do tempo caracterizada por um tempo de correlação τ^* (que mede aproximadamente o intervalo entre máximos de $F(t)$), muito pequeno em escala macroscópica.

Isto é, se t^* é um tempo que caracteriza mudanças na velocidade da partícula, $t^* \gg \tau^*$.

Por simetria, se inicialmente $v = 0$, a média de $F(t)$ em um ensemble de tais sistemas é nula. Se entretanto, a partícula é perturbada, $F(t)$ tende a restabelecer o equilíbrio. Dividimos $F(t)$ em duas partes:

- i) uma sistemática, de variação lenta, $\langle F \rangle$ que é função da velocidade da partícula; para $v(t)$ não muito grande, $\langle F \rangle(v(t)) = -\alpha v(t)$, $\alpha > 0$ a constante de atrito;
- ii) uma puramente aleatória, de variação rápida F' , de média zero

$$\langle F'(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.1})$$

e não correlacionada com qualquer posição ou velocidade anterior:

$$\langle v(t_0) F'(t) \rangle = \langle v(t_0) \rangle \langle F'(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.2})$$

$t_0 < t.$

Chegamos então à equação de Langevin

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F'(t). \quad (\text{A.3})$$

Podemos generalizar um pouco tal equação. Se a partícula não é muito mais pesada que as moléculas que com ela interagem, a escala do movimento molecular não é mais muito menor que a da partícula observada. Neste caso o atrito pode depender da velocidade em instantes anteriores, da história do movimento; introduzimos um núcleo de memória $\alpha(t-t')$ de forma que temos a equação de Langevin generalizada

$$m \frac{dv(t)}{dt} = - \int_{t_0}^t \alpha(t-s)v(s)ds + F'(t) = - \int_{t_0}^{\infty} \theta(t-s)\alpha(t-s)v(s)ds + F'(t) \quad (\text{A.4})$$

onde t_0 é um instante inicial qualquer. Quando

$$\alpha(t) = 2\alpha\delta(t) \quad (A.5)$$

recaímos na equação de Langevin.

2. Teorema de Flutuação - Dissipação [A.3, A.4]

O procedimento seguido acima foi o seguinte: em um sistema com muitos graus de liberdade selecionamos um pequeno número ("sistema") cujos tempos característicos são bem maiores que os demais; todos os graus de liberdade rápidos são reunidos em um ambiente ("reservatório térmico") que troca energia com o sistema e dá origem a duas forças, a sistemática e a aleatória. Como a origem é a mesma, ambas devem estar relacionadas: a manifestação dessa relação é o Teorema Flutuação-Dissipação.

Começamos resolvendo (A.4) através da transformada de Laplace

$$\hat{\alpha}(z) \equiv L\alpha(t) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \alpha(t) dt \quad (\text{A.6})$$

de uma função $\alpha(t)$.

Aplicando L a ambos os lados de

$$m \frac{dv(t+t_0)}{dt} = - \int_0^t \alpha(t-s)v(s+t_0)ds + F(t+t_0) \quad (\text{A.7})$$

e definindo

$$\hat{\chi}(z) \equiv \frac{1}{z + \frac{\hat{\alpha}(z)}{m}} \equiv L\chi(t) \quad (\text{A.8})$$

temos

$$v(t+t_0) = \chi(t)v(t_0) + \frac{1}{m} \int_0^t \chi(t-s)F(s+t_0)ds. \quad (\text{A.9})$$

O teorema segue, se exigimos a existência de um estado estacionário. Quando o sistema é colocado inicialmente neste estado, a distribuição das velocidades $v(t_0)$ é tal que

$$\frac{d}{dt_0} \langle v(t_0)v(t_0+t) \rangle = 0, \quad (\text{A.10})$$

isto é, a origem do tempo é arbitrária. Esta condição implica

$$\langle v(t_0)\dot{v}(t_0+t) \rangle + \langle \dot{v}(t_0)v(t_0+t) \rangle = 0 \quad (\text{A.11})$$

e, em particular,

$$\langle \dot{v}(t_0)v(t_0) \rangle = 0. \quad (\text{A.12})$$

Não é difícil mostrar que

$$\langle F(t+t_0)F(t_0) \rangle = m\alpha(t) \langle v^2(t_0) \rangle \quad (\text{A.13})$$

e, impondo que valha a equipartição de energia neste estado estacionário (este é, então, o estado de equilíbrio), $\langle v^2(t_0) \rangle = \frac{kT}{m}$, que

$$\langle F(t_0)F(t+t_0) \rangle = kT \alpha(t). \quad (\text{A.14})$$

Este é o Teorema de Flutuação-Dissipação: relaciona características da parte sistemática da força (o atrito dado por $\alpha(t)$) com a correlação da força aleatória, se impomos a existência de um estado estacionário.

Podemos já derivar uma consequência de (A.14). Por simplicidade tomemos $t_0 = 0$. Além da média da velocidade, obtida diretamente de (A.9) e (A.1),

$$\langle v(t) \rangle = \chi(t) \langle v(0) \rangle \quad (\text{A.15})$$

podemos encontrar

$$\begin{aligned} \langle v(t_1)v(t_2) \rangle &= \chi(t_1) \chi(t_2) \langle v^2(0) \rangle + \\ &+ \frac{kT}{m^2} \int_0^{t_2} ds_2 \int_0^{t_1} ds_1 \chi(t_2-s_2) \chi(t_1-s_1) \alpha(|s_2-s_1|) = \\ &= \frac{kT}{m} \chi(|t_2-t_1|) + (\langle v^2(0) \rangle - \frac{kT}{m}) \chi(t_1) \chi(t_2) \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

através de um cálculo um tanto longo, mas direto (introduzindo a transformada de Laplace do segundo termo com respeito a t_1 e t_2) [A.5]. Esta expressão exhibe a estacionariedade do processo quando $\langle v^2(0) \rangle = \frac{kT}{m}$.

Note, entretanto, que tal estado estacionário só é alcançado independentemente das condições iniciais quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = 0.$$

3. Propriedades da Força Aleatória [A.2, A.3]

F é uma variável aleatória de média zero. O fato de não estar correlacionada com a velocidade inicial e a imposição de e equilíbrio fixaram a correlação $\langle F(t_2)F(t_1) \rangle$ como uma função conhecida de $t_2 - t_1$. Para especificar completamente suas propriedades estatísticas faltam ainda os momentos mais altos. Como resultado do impacto de um grande número de partículas do fluido, é razoável supor, pelo Teorema do Limite Central, que F tem, em cada instante, uma distribuição gaussiana. Isto implica

$$\left. \begin{aligned} \langle F(t_1) \dots F(t_{2n+1}) \rangle &= 0 \\ \langle F(t_1) \dots F(t_{2n}) \rangle &= \sum_{\substack{\text{todos} \\ \text{os pares}}} \langle F(t_{i_1})F(t_{i_2}) \rangle \dots \langle F(t_{i_{2n-1}})F(t_{i_{2n}}) \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.17})$$

$n \geq 1.$

Dizemos que F é uma variável aleatória estacionária e gaussiana.

4. A Equação de Langevin com Ruído Branco

Voltemos à equação de Langevin (A.3) que é obtida de (A.4) por (A.5):

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\alpha v(t) + F(t)$$

com (A.1), (A.14) e (A.17)

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= 0 \\ \langle F(t_1)F(t_2) \rangle &= 2\alpha kT\delta(t_1 - t_2) \\ \langle F(t_1) \dots F(t_{2n+1}) \rangle &= 0 \\ \langle F(t_1) \dots F(t_{2n}) \rangle &= \sum_{\text{pares}} \langle F(t_{i_1})F(t_{i_2}) \rangle \dots \langle F(t_{i_{2n-1}})F(t_{i_{2n}}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Já vimos que (dado (A.3)) a não correlação entre a força em dois instantes diferentes é condição necessária para o equilíbrio. De fato, de (A.5) e (A.8)

$$\chi(t) = e^{-\frac{\alpha}{m}t}. \quad (\text{A.19})$$

(A.15) e (A.16) resumem-se a

$$\langle v(t) \rangle = e^{-\frac{\alpha}{m}t} \langle v(0) \rangle \quad (\text{A.20})$$

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{kT}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}|t_2 - t_1|} + (\langle v^2(0) \rangle - \frac{kT}{m}) e^{-\frac{\alpha}{m}|t_1 + t_2|} \quad (\text{A.21})$$

que evidenciam a relaxação à configuração estacionária

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle = \frac{kT}{m} \quad (\text{A.23})$$

Podemos também calcular médias de potências maiores de v .
Por exemplo

$$\langle v^3(t) \rangle = \langle v^3(0) \rangle e^{-3\frac{\alpha}{m}t} + 3\langle v(0) \rangle \frac{kT}{m} e^{-\frac{\alpha}{m}t} (1 - e^{-2\frac{\alpha}{m}t}) \quad (\text{A.24})$$

Também vê-se que

$$\left. \begin{aligned} \langle v(\tau) - v(0) \rangle &= -\frac{\alpha}{m} v\tau + o(\tau^2) \\ \langle (v(\tau) - v(0))^2 \rangle &= \frac{2\alpha kT}{m^2} + o(\tau^2) \\ \langle (v(\tau) - v(0))^n \rangle &= o(\tau^2), \quad n \geq 3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.25})$$

5. Equação de Fokker-Planck [A.1, A.6]

Introduzimos agora uma formulação alternativa de um processo estocástico como o movimento browniano. Começamos considerando a probabilidade $P(v, t) = \langle \delta(v(t) - v) \rangle$ de obtermos a velocidade v no tempo t e as probabilidades conjuntas $P_n(v_n, t_n; \dots; v_1, t_1)$ de acontecer $v(t_n) = v_n, \dots$ e $v(t_1) = v_1$ ($n \geq 2$) e definindo as probabilidades condicionais

(A.26)

$$w_{n-1,1}(v_n, t_n; \dots; v_{l+1}, t_{l+1} | v_1, t_1; \dots; v_1, t_1) = \frac{P_n(v_n, t_n; \dots; v_1, t_1)}{P_1(v_1, t_1; \dots; v_1, t_1)}$$

de obtermos $v(t_n) = v_n, \dots, v(t_{l+1}) = v_{l+1}$ dado que $v(t_1) = v_1, \dots, v(t_1) = v_1$. Em particular

$$P(v_2, t_2) = \int dv_1 w_2(v_2, t_2 | v_1, t_1) P(v_1, t_1), \quad (A.27)$$

$$P(v_3, t_3; v_2, t_2; v_1, t_1) = w_{12}(v_3, t_3 | v_2, t_2; v_1, t_1) w_2(v_2, t_2 | v_1, t_1) P(v_1, t_1). \quad (A.28)$$

Fazemos as seguintes hipóteses:

- i) propriedade de Markov; a probabilidade $P(v, t)$ e a probabilidade conjunta $P(v_2, t_2; v_1, t_1)$ definem completamente o processo:

$$w_{1, n-1}(v_n, t_n | v_{n-1}, t_{n-1}; \dots; v_1, t_1) = w_2(v_n, t_n | v_{n-1}, t_{n-1}), \quad (A.29)$$

ou seja, a pré-história da partícula não é envolvida. Usando isto em (A.28), integrando sobre v_2 e dividindo por $P(v_1, t_1)$, obtemos a equação de Chapman-Kolmogorov (ou de Smoluchowski)

$$w_2(vt|v_0t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv' w_2(vt|v't') w_2(v't'|v_0t_0) \quad (A.30)$$

que evidencia que os processos de v_0 a v' e de v' a v são independentes⁺.

ii) propriedade de homogeneidade: A probabilidade

$w_2(vt|v_0t_0)$ só depende de intervalo $t-t_0$:

$$w_2(vt|v_0t_0) = w_2(v, t-t_0|v_0) \quad (A.31)$$

A equação de Chapman-Kolmogorov passa a ser escrita como

$$w_2(v, \tau_1 + \tau_2 | v_0) = \int d\xi w_2(v, \tau_2 | v - \xi) w_2(v - \xi, \tau_1 | v_0) \quad (A.32)$$

e pode ser convertida em uma equação diferencial fazendo τ_2 pequeno e expandindo o integrando $w_2(v, \tau_2 | v - \xi) w_2(v - \xi, \tau_1 | v_0)$ em potências de $w_2(v + \xi, \tau_2 | v) w_2(v, \tau_1 | v_0)$. Definindo

$$a_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int d\xi \xi^n w_2(v + \xi, \tau | v) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (v(\tau) - v(0))^n \rangle \quad (A.33)$$

chegamos à

$$\frac{\partial w_2(v, t | v_0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [a_n w_2(v, t | v_0)] \quad (A.34)$$

a ser resolvida com a condição inicial $w_2(v, 0 | v_0) = \delta(v - v_0)$. De (A.27) também

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} [a_n P(v, t)] \quad (A.35)$$

⁺ Esta propriedade é equivalente, no movimento browniano, à não-correlação de forças em instantes diferentes.

mas com $P(v, t_0) = P_0(v)$, $\int dv P_0(v) = 1$.

Se a velocidade muda pouco em um intervalo de tempo pequeno, $w_2(v, \tau | v - \xi)$ só é apreciável para $|\xi|$ pequeno. Aproximamos (A.35) para a equação Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial v} (a_1(v) P(v, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (a_2(v) P(v, t)). \quad (\text{A.36})$$

No caso da equação de Langevin com ruído branco gaussiano se aplicar, (A.25) e (A.33) mostram que a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{m} \frac{\partial}{\partial v} (v P(v, t)) + \frac{\alpha kT}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} P(v, t) \quad (\text{A.37})$$

vale exatamente.

Note que $P_e(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{mv^2}{kT} \right\}$, a distribuição de Maxwell-Boltzmann, é a distribuição estacionária que satisfaz (A.37). Se resolvemos a equação de Fokker-Planck com uma condição inicial $P_0(v)$ obteremos em geral uma solução que depende de t , apesar de $w_2 = w_2(v, t - t_0 | v_0)$. Isto se reflete em funções de correlação não-estacionárias de v . Ou seja, embora homogêneo, devido a estacionariedade de F , o processo não é estacionário. Podemos encarar tal fato como consequência de "extraírmos um subensemble" de um processo estacionário dado por $P_e(v)$; fisicamente isto significa que o sistema foi preparado em um certo estado de não-equilíbrio [A.2]. Pode-se mostrar [A.7] que após um longo tempo a partícula alcança o equilíbrio, independentemente das condições iniciais.

6. Teoria de Einstein da Difusão [A.8, A.2, A.5]

Para α muito grande, $\frac{dv}{dt}$ pode ser negligenciado em (A.3) e

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \quad (\text{A.38})$$

com $f(t)$ uma força aleatória estacionária, gaussiana e não autocorrelacionada⁺

$$\langle f(t) \rangle = 0$$

$$\langle f(t_1)f(t_2) \rangle = 2D \delta(t_1 - t_2)$$

$$\langle f(t_1) \dots f(t_{2n+1}) \rangle = 0$$

$$\langle f(t_1) \dots f(t_{2n}) \rangle = \sum_{\text{pares}} \langle f(t_{i_1})f(t_{i_2}) \rangle \dots \langle f(t_{i_{2n-1}})f(t_{i_{2n}}) \rangle.$$

(A.39)

Se encaramos tal processo como limite de um movimento browniano que atinge o equilíbrio, $D = \frac{kT}{\alpha}$ por (A.18).

A solução

$$x(t) = \int_0^t f(t') dt' \quad (\text{A.40})$$

para a origem tomada tal que $x(0) = 0$ leva à

$$\langle x(t) \rangle = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = 2D \min(t_1, t_2) \quad (\text{A.42})$$

e, em particular,

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt. \quad (\text{A.43})$$

⁺ portanto markoviana

Este é o tratamento de Einstein do movimento browniano. Pode ser visto como um problema de caminho aleatório: se assumirmos que a partícula sofre impactos sucessivos, separados por um tempo τ^* , não-correlacionados, e pula uma distância fixa l , a probabilidade $P_n(m)$ de encontrarmos a partícula na posição $x = ml$ no instante $t = n\tau^*$ é, se $x(t = 0) = 0$,

$$P_n(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}(n+m)\right)! \left(\frac{1}{2}(n-m)\right)!}$$

$$\approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}} \quad (m, n \text{ grandes}).$$

Obtemos

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (\text{A.44})$$

e

$$\left. \begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= 0 \\ \langle x^2(t) \rangle &= \frac{l^2}{\tau^*} t \equiv 2Dt \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.45})$$

O coeficiente D definido acima em termos das quantidades microscópicas l e τ^* está relacionado ao processo macroscópico de difusão. Sejam $n(x, t) = NP(x, t)$ o número de partículas por unidade de comprimento em um ensemble de N partículas brownianas no instante t , e $j(x, t) = n(x, t)v(x, t)$ a densidade de corrente. Da lei de Fick $j(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} n(x, t)$ e da equação de continuidade $\frac{\partial}{\partial x} j(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = 0$ chegamos à equação de difusão

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = 0 \quad (\text{A.46})$$

que tem como solução, no caso de partículas concentradas inicialmente na origem,

$$n(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (\text{A.44'})$$

Note, comparando com (A.37), que a equação de difusão faz o papel da equação de Fokker-Planck, mas não contém o termo de fricção na primeira derivada. Como consequência, não há uma distribuição limite bem determinada, como se vê fazendo $t \rightarrow \infty$ em (A.44').

7. Problema de Diferenciabilidade [A.5]

É importante notar uma deficiência marcante de processos markovianos como os acima tratados. Como notou Einstein, de (A.42) e (A.43),

$$\frac{1}{t} \sqrt{\langle (x(s+t) - x(s))^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2D}}{t^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A.47})$$

que "se torna infinitamente grande para um intervalo de tempo t indefinidamente pequeno; isto é evidentemente impossível, uma vez que neste caso cada partícula suspensa se moveria com uma velocidade instantânea infinitamente grande. A razão é que nós implicitamente assumimos em nosso desenvolvimento que eventos ocorrendo no tempo t devem ser vistos como fenômenos independentes de eventos no tempo imediatamente precedente. Mas esta hipótese se torna tanto mais difícil de justificar quanto menor o tempo t ". [A.8].

Este problema é parcialmente resolvido com um tratamento completo a partir da equação de Langevin. Introduzindo $x(t) = \int_0^t v(s) ds$ ($x(0) = 0$) e usando (A.9) com (A.19) obtemos

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(s) \rangle &= \frac{m^2}{\alpha^2} \langle v^2(0) \rangle (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}s}) + \\ &+ \frac{mkT}{\alpha^2} \left[2 \frac{\alpha}{m} \min(t,s) - 1 + e^{-\frac{\alpha}{m}s} + e^{-\frac{\alpha}{m}t} - e^{-\frac{\alpha}{m}|t-s|} - (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}s})(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Em particular

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \frac{kT}{\alpha} t \quad (\text{A.49})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle x^2(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \langle v^2(0) \rangle t^2, \quad (\text{A.50})$$

que difere, a tempos pequenos, da difusão. Por isso agora

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sqrt{\langle (x(t+s) - x(s))^2 \rangle} = \sqrt{\langle v^2(0) \rangle} \quad (\text{A.51})$$

que é finito.

Ocorre que a mesma dificuldade aparece com a própria velocidade. De (A.21)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sqrt{\langle (v(t+s) - v(s))^2 \rangle} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{1/2}} \sqrt{\frac{2\alpha kT}{m^2}} \quad (\text{A.52})$$

Este problema desaparece apenas quando abrimos mão do caráter markoviano da força. Se queremos manter a existência de um estado estacionário, somos levados à equação de Langevin generalizada. De (A.16)

$$\frac{1}{t} \sqrt{\langle (v(s+t) - v(s))^2 \rangle} = \frac{1}{t} \left\{ \frac{2kT}{m} (1 - \chi(t)) + (\langle v^2(0) \rangle - \frac{kT}{m}) (\chi(t+s) - \chi(s))^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.53})$$

Na situação estacionária e escolhendo a forma particular

$$\alpha(|t-s|) = \frac{\alpha}{\tau} e^{-\frac{|t-s|}{\tau}} \quad (\text{A.54})$$

chegamos a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sqrt{\langle (v(s+t) - v(s))^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\alpha kT}{m^2} \frac{1}{\tau}}, \quad (\text{A.55})$$

que não diverge. O comportamento singular ocorre quando $\tau \rightarrow 0$ e $\alpha(t) \rightarrow 2\alpha\delta(t)$, que é o limite markoviano.

8. A Equação de Langevin com Força Não-Markoviana

O problema acima mencionado desaparece também se usamos a equação de Langevin (A.3) com uma força aleatória gaussiana e estacionária mas não-markoviana,

$$\langle F(t_1)F(t_2) \rangle = \frac{c}{2\alpha} \alpha(t_2 - t_1) \quad (\text{A.56})$$

onde c é uma constante e $\alpha(t_2 - t_1)$ uma função arbitrária. Ocorre que agora o Teorema de Flutuação-Dissipação não é mais obedecido e inexiste um estado estacionário.

Vemos isto calculando a correlação de velocidades; como a equação é a de Langevin vale (A.19) e, de (A.9), com $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \langle v^2(0) \rangle e^{-\frac{\alpha}{m}(t_1+t_2)} + \frac{c}{2\alpha} \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}(t_1+t_2)}}{m^2} \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \cdot \\ \cdot \alpha(\tau_2 - \tau_1) e^{\frac{\alpha}{m}(\tau_1 + \tau_2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

É difícil prosseguir sem fazer uma escolha de $\alpha(t)$. Para mesma forma particular (A.54),

$$\begin{aligned} \langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \left(\langle v^2(0) \rangle - \frac{c}{2\alpha m} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{m}\tau} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}(t_1+t_2)} + \\ + \frac{c}{2\alpha m} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{m}\tau\right)^2} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{m}|t_2-t_1|} - \frac{\alpha}{m\tau} \left(e^{-\frac{|t_2-t_1|}{\tau}} - e^{-\frac{t_1}{\tau} - \frac{\alpha}{m}t_2} - e^{-\frac{t_2}{\tau} - \frac{\alpha}{m}t_1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Note que a tempos grandes o processo é estacionário,

$$\lim_{\substack{t_1, t_2 \rightarrow \infty \\ |t_1 - t_2| \text{ fixo}}} \langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{c}{2\alpha m} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{m}\tau\right)^2} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{m}|t_2-t_1|} - \frac{\alpha}{m\tau} e^{-\frac{1}{\tau}|t_2-t_1|} \right\}, \quad (\text{A.59})$$

e independe das condições iniciais.

Se impomos que no limite de tempos iguais e grandes valha a equipartição de energia,

$$c = 2\alpha kT \left(1 + \frac{\alpha}{m}\tau\right) \quad (\text{A.60})$$

e

$$\begin{aligned} \langle v(t_1)v(t_2) \rangle = & \left(\langle v^2(0) \rangle - \frac{kT}{m} \frac{1 + \frac{\alpha}{m}\tau}{1 - \frac{\alpha}{m}\tau} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}(t_1+t_2)} + \\ & + \frac{kT}{m} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{m}\tau} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{m}|t_2-t_1|} - \frac{\alpha\tau}{m} \left(e^{-\frac{1}{\tau}|t_2-t_1|} - e^{-\frac{t_1-\alpha}{\tau}t_2} - e^{-\frac{t_2-\alpha}{\tau}t_1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

É fácil ver agora que o estado em que $\langle v^2 \rangle = \frac{kT}{m}$ não é estacionário se $\tau \neq 0$. Em particular, neste caso.

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{kT}{m} \left\{ 1 + \frac{2\frac{\alpha}{m}\tau}{1 - \frac{\alpha}{m}\tau} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) \right\} \quad (\text{A.62})$$

isto é, a distribuição de energia não se mantém. Temos a incômoda situação de um estado que é sempre atingido assintoticamente mas não se mantém.

Podemos observar isto de outra forma, escrevendo a equação de evolução de $P(v,t)$, obtida derivando-a com respeito ao tempo, utilizando a equação de Langevin e o caráter gaussiano da força:

$$\frac{\partial P(v,t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{m} \frac{\partial}{\partial v} (vP(v,t)) + \frac{c}{2\alpha m^2} M(t) \frac{\partial^2}{\partial v^2} P(v,t) \quad (\text{A.63})$$

onde é notável que

$$M(t) = \int_0^t dt' \alpha(t-t') e^{-\frac{\alpha}{m}(t-t')}$$

depende explicitamente do tempo. Para (A.54),

$$M(t) = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{m}\tau} \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{m}\right)t} \right).$$

Não existe solução estacionária para a equação (A.62). No entanto,

$$P(v) = e^{-\frac{\alpha m}{c} \left(1 + \frac{\alpha}{m}\tau\right) v^2} \quad (\text{A.64})$$

satisfaz tal equação no limite $t \rightarrow \infty$.

APÊNDICE B

PROVA DO TEOREMA FLUTUAÇÃO-DISSIPAÇÃO

Para mostrar o teorema, expressemos a condição de estacionariedade (1.11) como

$$\langle \dot{\varphi}_1(x, \tau + \tau_0) \dot{\varphi}_1(x', \tau_0) \rangle = - \langle \dot{\varphi}_1(x, \tau + \tau_0) \varphi_1(x', \tau_0) \rangle$$

$$\left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1(x, \tau + \tau_0)} \dot{\varphi}_1(x', \tau_0) \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_1(x, \tau + \tau_0)} \right) \varphi_1(x', \tau) \right\rangle$$

(B.1)

se $\frac{\delta S}{\delta \varphi}$ é um polinômio em φ . Estas relações se obtêm derivando (1.11) com respeito a τ , fazendo $\tau = \tau_0$ e escolhendo os τ_i convenientemente.

Vamos calcular a correlação da força em dois instantes, segundo o ponto (B.1); encontraremos assim a condição necessária para a existência de um estado estacionário, em uma dinâmica de Langevin. É conveniente introduzir a transformada de Laplace

$$\hat{f}(s) = Lf(\tau) = \int_0^\infty d\tau f(\tau) e^{s\tau} \quad (B.2)$$

de uma função $f(\tau)$, que permite escrever (1.1) como

$$sL\varphi_1(x, \tau + \tau_0) + \int d^D y \hat{K}_{11''}(x, y, s) L \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_{1''}(y, \tau + \tau_0)} = \varphi_1(x, \tau_0) + \int d^D y R_{11''}(x, y) L \eta_{1''}(y, \tau + \tau_0)$$

(B.3)

com as propriedades conhecidas da transformada da derivada e da convolução.

Denotemos $\eta_1(x, \tau_0)$ a força aleatória em um instante $\tau_0 + \epsilon$ infinitamente próximo de τ_0 , mas maior ($\epsilon \rightarrow 0^+$). Então

$$\begin{aligned}
 & \int d^0 y \int d^0 y' R_{1m}(x, y) R_{1'm'}(x', y') L \chi_{mm'}(y, y', \tau + \tau_0, \tau_0) = \\
 & = s L \langle \varphi_1(x, \tau + \tau_0) \dot{\varphi}_1(x', \tau_0) \rangle + \int d^0 y \hat{K}_{11''}(x, y, s) L \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_{1''}(y, \tau + \tau_0)} \dot{\varphi}_1(x', \tau_0) \right\rangle = \\
 & = -s [s L \langle \varphi_1(x, \tau + \tau_0) \varphi_1(x', \tau_0) \rangle + \int d^0 y \hat{K}_{11''}(x, y, s) \cdot \\
 & \cdot L \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_{1''}(y, \tau + \tau_0)} \varphi_1(x', \tau_0) \right\rangle + s \langle \varphi_1(x, \tau_0) \varphi_1(x', \tau_0) \rangle + \\
 & + \int d^0 y \hat{K}_{11''}(x, y, s) \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_{1''}(y, \tau_0)} \varphi_1(x', \tau_0) \right\rangle = \\
 & = \int d^0 y \hat{K}_{11''}(x, y, s) \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_{1''}(y, \tau_0)} \varphi_1(x', \tau_0) \right\rangle
 \end{aligned}$$

usando sucessivamente (1.10), (B.1), a transformada da derivada, (B.3) e (1.10).

Repetindo o procedimento para $\chi_{mm'}(y, y', \tau_0, \tau + \tau_0)$ e lembrando que ambos independem de τ_0 , obtemos (1.9).

APÊNDICE C

OUTRAS ABORDAGENS DA QE

Ao longo do texto trabalhamos com a expansão perturbativa da equação de Langevin para os campos de interesse. Como no caso do movimento browniano que inspira a QE [Ap. A] existem diferentes abordagens, complementares. Neste apêndice resumimos brevemente o papel da equação de Fokker - Planck e da representação integral do processo.

1. Equação de Fokker - Planck

Tomemos um campo escalar $\varphi(x, \tau)$ sujeito à equação de Langevin (2.1). Procuramos uma equação diferencial para a evolução da probabilidade (1.7). Vamos apresentar dois métodos de obtê-la.

O primeiro, mais tradicional, parte da chamada equação de Chapman - Kolmogorov,

$$W([\varphi], s+t | [\varphi_0]) = \int D\varphi' W([\varphi], t | [\varphi-\varphi']) W([\varphi-\varphi'], s | [\varphi_0]), \quad (C.1)$$

à que satisfaz a probabilidade condicional $W([\varphi], \tau | [\varphi'], \tau')$ = $W([\varphi], \tau - \tau' | [\varphi'])$ de um processo markoviano e estacionário [veja Ap. A].

Fazendo t pequeno e expandindo o lado esquerdo em potências de t e o direito, de $W([\varphi + \varphi'], t | [\varphi]) = W([\varphi], s | [\varphi_0])$ obtemos uma equação para W que, em termos de $P([\varphi], \tau)$, é

$$\frac{\partial P([\varphi], \tau)}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^D x_1 \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \dots \int d^D x_n \frac{\delta}{\delta \varphi(x_n)} [P([\varphi], \tau) M_n([\varphi])] \quad (C.2)$$

onde

$$M_n([\varphi]) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (\varphi^\eta(x_1, \tau) - \varphi^\eta(x_1, 0)) \dots (\varphi^\eta(x_n, \tau) - \varphi^\eta(x_n, 0)) \rangle \quad (C.3)$$

Utilizando a equação de Langevin (2.1), os momentos M_n com $n \geq 3$ se anulam e chegamos a

$$\frac{\partial P([\varphi], \tau)}{\partial \tau} = \int d^D x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \right] P([\varphi], \tau) \quad (C.4)$$

a ser resolvida com determinada condição inicial $P([\varphi], 0) = P[\varphi^0]$. Fica claro que a equação de Fokker - Planck (C.4) é um caso particular de uma classe de equações (C.2) que depende do processo ser markoviano.

Uma segunda maneira de obter (C.4) utiliza métodos de cálculo funcional, e tem a vantagem de se generalizar mais facilmente quando o processo não é markoviano (nestes casos a equação de evolução de $P([\varphi], \tau)$ é, às vezes, também chamada de Fokker-Planck). Partimos de (1.7), derivando com respeito ao tempo τ e utilizando a equação de Langevin (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P([\varphi], \tau)}{\partial \tau} &= - \int d^D x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \langle \dot{\varphi}^\eta(x, \tau) (\varphi(x) - \varphi^\eta(x, \tau)) \rangle = \\ &= \int d^D x \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} P([\varphi], \tau) - \langle \eta(x, \tau) \delta(\varphi(x) - \varphi^\eta(x, \tau)) \rangle \right] \quad (C.5) \end{aligned}$$

Mas, sendo $F([\varphi^\eta])$ um funcional qualquer, o caráter gaussiano (1.16) do ruído assegura que

$$\langle F([\varphi^\eta]) \eta(x, \tau) \rangle = 2 \int d^D y \int_0^\infty d\tau' \left\langle \frac{\delta \varphi^\eta(y, \tau')}{\delta \eta(x, \tau)} \frac{\delta F[\varphi^\eta]}{\delta \varphi^\eta(y, \tau')} \right\rangle . \quad (C.6)$$

Voltando à equação de Langevin, temos

$$\frac{\delta \varphi^\eta(y, \tau')}{\delta \eta(x, \tau)} = \theta(\tau - \tau') \delta(x - y) - \int_0^\infty d\tau'' \theta(\tau - \tau'') \theta(\tau'' - \tau') \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^\eta(x, \tau'') \delta \varphi^\eta(y, \tau'')} + \dots \quad (C.7)$$

Como

$$\int_0^\infty d\tau'' \theta(\tau - \tau'') \theta(\tau'' - \tau) = 0 , \quad (C.8)$$

obtemos

$$\langle \delta(\varphi(x) - \varphi^\eta(x, \tau)) \eta(x, \tau) \rangle = - \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} P([\varphi], \tau)$$

que, substituída em (C.5), resulta em (C.4).

Obtida a equação de Fokker - Planck, passemos a estudá-la mais atentamente [A.7, C.1]. Sua forma é a de uma equação de Schrödinger (a tempo imaginário) com hamiltoniano que não é autoadjunto. Introduzindo

$$\psi([\varphi], \tau) = e^{\frac{1}{2}S[\varphi]} P([\varphi], \tau) , \quad (C.9)$$

a equação de Fokker - Planck passa à

$$\frac{\partial \psi([\varphi], \tau)}{\partial \tau} = -H_{FP} \psi([\varphi], \tau) \quad (C.10)$$

com

$$H_{FP} = \int d^D x \, a^\dagger(x) a(x) \quad \left(a(x) = -i \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} - \frac{i}{2} \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \right) \quad (C.11)$$

auto-adjunto e positivo-definido.

É fácil ver que a distribuição de equilíbrio $\psi_0([\varphi]) = e^{-\frac{1}{2}S[\varphi]}$ é auto-estado de H_{FP} com autovalor

$$\lambda_0 = 0 \quad (C.12)$$

pois $a(x) \psi_0([\varphi]) = 0$. Sendo o conjunto de auto-estados $\psi_n([\varphi])$ (com autovalores λ_n , $n = 0, 1, \dots$) de H_{FP} completo,

$$P([\varphi], \tau) = c_0 e^{-S[\varphi]} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n \tau} e^{-\frac{1}{2}S[\varphi]} \psi_n([\varphi]) \quad (C.13)$$

Daqui percebemos que, para que o sistema atinja o equilíbrio independentemente das condições iniciais, o estado fundamental deve ser não-degenerado, existindo um "gap" de energia para o primeiro estado excitado:

$$\text{Re } \lambda_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (C.14)$$

Neste caso vale (1.8).

Quando $D = 1$ temos um número finito de graus de liberdade: a mecânica quântica assegura que, se o potencial S cresce suficientemente rápido, o espectro de H_{FP} é discreto e a função sem

zeros $e^{-\frac{1}{2}S}$ dá um vácuo não-degenerado. No caso de teorias de campo, entretanto, podemos, em geral, ter outros estados ψ satisfazendo $a^+ a \psi = 0$ sem que $a \psi = 0$; a distribuição limite dependerá, então, das condições iniciais [1.5].

Esse é o caso de teorias de gauge, quando tomamos S invariante de gauge: campos ligados por uma transformação de gauge tem a mesma distribuição de equilíbrio que poderia, em princípio, ser fixada pelas condições iniciais.

Limitemo-nos a uma teoria abeliana.

Se o campo é livre, a probabilidade $P([A_\mu], \tau)$ pode ser escrita como o produto $P([A_\mu^T], \tau) \times P([A_\mu^L], \tau)$, já que as componentes são ortogonais, onde cada probabilidade obedece a uma equação de Fokker - Planck. Quando não há fixação de gauge

$$\frac{P([A_\mu^T], \tau)}{\partial \tau} = \int d^D x \frac{\delta}{\delta A_\mu^T(x)} \left[\frac{\delta S_{cl}}{\delta A_\mu^T(x)} + \frac{\delta}{\delta A_\mu^T(x)} \right] P([A_\mu^T], \tau) \quad (C.15)$$

$$\frac{P([A_\mu^L], \tau)}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{2} \int d^D x \frac{\delta^2}{\delta A_\mu^L(x)^2} P([A_\mu^L], \tau) . \quad (C.16)$$

A primeira é formalmente a mesma que a de um campo escalar, admitindo $e^{-S_{cl}}$ como solução. A segunda é, para $\alpha \neq 0$, uma equação de difusão, que não tem uma distribuição de equilíbrio bem determinada [Ap. A]. Quando $\alpha = 0$,

$$P([A_\mu^L], \tau) = P([A_\mu^L], 0) = P([A_\mu^{L0}]) . \quad (C.17)$$

Por outro lado, se fixamos o gauge, (C.16) ganha um termo em $\frac{\delta S_{gf}}{\delta A_\mu^L}$ e tudo fica bem. Para a teoria livre, entretanto, a evolução longitudinal é irrelevante se nos restringimos a quantidades invariantes de gauge, como notamos no texto.

Quando há interação uma análise detalhada através da equação de Fokker - Planck torna-se mais difícil: a probabilidade $P([A_\mu^T, A_\mu^L, \varphi^T, \varphi^{T*}], \tau)$ é agora função de variáveis invariantes de gauge (A_μ^T, φ^T : ver Cap. IV) e não-invariantes (A_μ^L) e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P([A_\mu, \varphi, \varphi^*], \tau)}{\partial \tau} = & \int d^D x \left\{ \frac{\delta}{\delta \varphi} \left(\frac{\delta S_{c1}}{\delta \varphi^*} + \frac{\delta}{\delta \varphi^*} \right) + \frac{\delta}{\delta \varphi^*} \left(\frac{\delta S_{c1}}{\delta \varphi} + \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\delta A_\mu} \left(\frac{\delta S_{c1}}{\delta A_\mu} + \frac{\delta}{\delta A_\mu} \right) + \frac{\alpha-2}{2} \frac{\delta^2}{\delta A_\mu^L^2} \right\} P([A_\mu, \varphi, \varphi^*], \tau) \end{aligned} \quad (C.18)$$

quando S_{c1} é invariante de gauge. Quando $\alpha = 0$

$$P([A_\mu, \varphi, \varphi^*]) = P([A_\mu^{L0}]) e^{-S[A_\mu, \varphi, \varphi^*]} \quad (C.19)$$

é solução. Se $A_\mu^L(x, 0)$ é dado, como no texto, por uma distribuição relativisticamente invariante (3.13),

$$P([A_\mu, \varphi, \varphi^*]) = e^{-S[A_\mu^T, \varphi^T, \varphi^{T*}] - \frac{1}{2\xi} \int d^D x (\partial_\mu A_\mu^0)^2} \quad (C.20)$$

que é o equilíbrio convencional. Para $\alpha \neq 0$, entretanto, não atingimos este limite. De fato, fazendo a transformação de gauge generalizada (4.2), a equação de Fokker - Planck em termos dos novos campos A_μ e φ é, com (4.34) e $\alpha = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P([A_\mu, \varphi, \varphi^*], \tau)}{\partial \tau} = & \int d^D x \left\{ \frac{\delta}{\delta \varphi} \left(\frac{\delta S_{c1}}{\delta \varphi^*} + \frac{ie}{\xi'} (\partial_\nu A_\nu) \varphi + \frac{\delta}{\delta \varphi^*} \right) + \frac{\delta}{\delta \varphi^*} \left(\frac{\delta S_{c1}}{\delta \varphi} - \frac{ie}{\xi'} (\partial_\nu A_\nu) \varphi^* + \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\delta A_\mu} \left(\frac{\delta S_{c1}}{\delta A_\mu} - \frac{1}{\xi'} \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + \frac{\delta}{\delta A_\mu} \right) \right\} P([A_\mu, \varphi, \varphi^*], \tau). \end{aligned} \quad (C.21)$$

Como já foi notado [1.5], $e^{-S - \frac{1}{2\xi} \int d^D x (\partial_\nu A_\nu)^2}$ não é solução devido aos novos termos de interação. Ao invés de se questionar a correção da abordagem de Parisi - Wu, tem-se acreditado que uma outra escolha de $\theta(x, \tau)$ assegura o equilíbrio correto e, sendo irrelevante a escolha de $\theta, \dots$ tudo bem! Vimos, entretanto, no Cap. IV, que há algo de errado.

Lembre-se ainda de que, além de tudo, a prova de (1.8) da da acima é puramente formal, devido às divergências que aparecem graças ao caráter singular de $\varphi(x, \tau)$. Apenas após regularizar e renormalizar a teoria podemos confirmar que as funções de correlação renormalizadas tendem às usuais, renormalizadas.

2. Formulação de Integral de Trajetória

Nosso interesse agora é formular o método estocástico em termos de uma integral funcional nas $D+1$ dimensões, isto é, construir um funcional gerador $Z_{FP}[J]$ que permita calcular médias a tempos finitos como

$$\langle \varphi^\eta(x_1, \tau_1) \dots \varphi^\eta(x_1, \tau_1) \rangle = \frac{\delta^1 Z_{FP}[J]}{\delta J(x_1, \tau_1) \dots \delta J(x_1, \tau_1)} \Big|_{J=0} \quad (C.22)$$

Partimos de (1.5) com ruído gaussiano (1.16) [C.2]. Sendo $\varphi^\eta(x, \tau)$ solução de (1.1), a delta pode ser escrita como

$$\delta(\varphi(x, \tau) - \varphi^\eta(x, \tau)) = \det \frac{\delta \eta}{\delta \varphi} \left(\delta \varphi(x, \tau) + \frac{\delta S}{\delta \varphi(x, \tau)} - \eta(x, \tau) \right) \quad (C.23)$$

onde $\det \frac{\delta \eta}{\delta \varphi}$ é o jacobiano da mudança de variáveis $\eta(x, \tau) \rightarrow \varphi^\eta(x, \tau)$. Se escrevemo-lo como uma integração sobre variáveis grassmanianas descobrimos uma supersimetria escondida [C.2, C.3]. Nós, entretanto, seguimos diretamente obtendo

$$\det \frac{\delta \eta}{\delta \varphi} \sim e^{\frac{1}{2} \int d^D x' \int_0^\tau d\tau' \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x', \tau')^2}} \quad (C.24)$$

a menos de uma contribuição para normalização. Usamos $\theta(0) = \frac{1}{2}$ e (C.8), como antes.

Como consequência,

$$e^{\frac{1}{2} S[\varphi^0]} e^{-S_{FP}([\varphi], \tau)} e^{-\frac{1}{2} S[\varphi(\tau)]} = C e^{-\int d^D x' \int_0^\tau d\tau' \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi} \right)} \quad (C.25)$$

onde C é uma normalização, ou seja,

$$S_{FP} = \int d^D x \, L_{FP} = \int d^D x \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi(x, \tau)} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x, \tau)^2} \right\}, \quad (C.26)$$

formalmente equivalente a ação de uma partícula de velocidade $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ em um potencial $V = -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi} \right)^2 + \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^2}$. Este resultado não é surpreendente: L_{FP} é a lagrangiana "clássica" associada à H_{FP} de (C.11).

O funcional gerador Z_{FP} pode agora ser obtido adicionando um termo de fonte ao propagador (da evolução temporal dada por H_{FP}) resultante de S_{FP} como uma integral de trajetória (e passando de ψ para P com (C.9)) [A.7], ou simplesmente como

$$Z_{FP}[J] = \left\langle e^{-\int_0^\tau d\tau' \int d^D x' \, J(x', \tau') \varphi^\eta(x', \tau')} \right\rangle. \quad (C.27)$$

Com tal funcional pode-se desenvolver a teoria de perturbações com regras ditadas por L_{FP} , em paralelo à expansão advinda diretamente da equação de Langevin. Aqui novos vértices surgem do potencial V .

Em resumo, partimos da dinâmica de Langevin onde φ e η são variáveis dinâmicas do mesmo nível e, integrando sobre η , obtemos uma lagrangiana L_{FP} que depende apenas de φ . Este procedimento é um tanto formal visto que $\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^2}$ dá, em geral, origens à divergências.

Pode-se mostrar, nas condições discutidas na relaxação para o equilíbrio da equação de Fokker - Planck, que $Z_{FP}[J]$ tende ao funcional gerador usual no limite $\tau \rightarrow \infty$. Isto se faz lembrando

de sua relação com o propagador temporal ou integrando diretamente partindo da configuração de equilíbrio [C.4]. De qualquer forma escrevemos (C.27) como

$$Z_{FP}[J] = \int D\varphi^0 e^{-S[\varphi^0] + \int d^D x J(x,0)\varphi^0(x)}$$

a menos de normalização.

Vamos agora apenas mencionar o que ocorre com uma teoria de gauge abeliana livre.

Quando não há fixação de gauge na ação,

$$Z_{FP}[0] = \int DA_\mu^{T0} e^{-S[A_\mu^{T0}]} \int DA_\mu^{L0} P([A_\mu^{L0}]) \quad (C.28)$$

se $\alpha = 0$, ou

$$Z_{FP}[0] = \int DA_\mu^{T0} e^{-S[A_\mu^{T0}]} \int DA_\mu^{L0} P([A_\mu^{L0}]) e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^D x \int_0^\tau d\tau' \left(\frac{\partial A_\mu^L(x', \tau')}{\partial \tau'} \right)^2} \quad (C.29)$$

se $\alpha \neq 0$. Da primeira vemos diretamente o resultado usual com a fixação de gauge surgindo através das condições iniciais longitudinais (3.13). Na segunda este termo é gerado junto com um determinante de "Fadeev - Popov" [C.5], mas isto nada significa neste nosso caso abeliano. Obviamente no cálculo de qualquer quantidade invariante de gauge, escrita apenas em termos de A_μ^T , (C.28) e (C.29) são equivalentes.

APÊNDICE D

UM EXEMPLO: $\lambda\varphi^4$

Nesse apêndice exemplificamos brevemente algumas das considerações do Cap. II, no caso de uma teoria $\lambda\varphi^4$,

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right). \quad (D.1)$$

Vemos facilmente que a expansão em árvore da solução da equação de Langevin, (2.10), é neste caso.

$$\varphi^\eta(k, \tau) = \text{---}x + \text{---}x \begin{array}{c} x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \end{array} + \text{---}x \begin{array}{c} x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad x \end{array} + \text{---}x \begin{array}{c} x \quad x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad x \end{array} + \text{---}x \begin{array}{c} x \quad x \quad x \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad x \quad x \end{array} + \dots \quad (D.2)$$

já fazendo (2.13). Os diagramas de ordens mais baixas da função de correlação $D(k, \tau, \tau')$ estão na Fig. 2.2. A contribuição de cada diagrama a tempos iguais e grandes é obtida diretamente usando as regras de texto:

$$\text{Fig. 2.2a} = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2+m^2} \quad (D.3)$$

$$\text{Fig. 2.2b} = \frac{\lambda^2}{8} \frac{1}{(k^2+m^2)^3} \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{l_1^2+m^2} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{l_2^2+m^2} \quad (D.4)$$

$$\text{Fig. 2.2c} = \frac{\lambda^2}{8} \frac{1}{(k^2+m^2)^3} \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{l_1^2+m^2} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{l_2^2+m^2} \quad (D.5)$$

$$\text{Fig. 2.2d} = \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \int \frac{d^D l_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{l_1^2+m^2} \int \frac{d^D l_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_2^2+m^2)^2} \quad (\text{D.6})$$

$$\text{Fig. 2.2e} = \frac{\lambda^2}{6} \frac{1}{k^2+m^2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{l^2+m^2} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(k-l+q)^2+m^2} \cdot \frac{1}{k^2+q^2+l^2+(k-l+q)^2+4m^2} \quad (\text{D.7})$$

$$\text{Fig. 2.2f} = \frac{\lambda^2}{6} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{l^2+m^2} \frac{1}{q^2+m^2} + \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(k-l+q)^2+m^2} + \frac{1}{l^2+m^2} \frac{1}{(k-l+q)^2+m^2} \right) \frac{1}{k^2+q^2+l^2+(k-l+q)^2+4m^2} \quad (\text{D.7'})$$

Imediatamente reconhecemos que obtemos cada diagrama de Feynman de série usual [Fig. 2.3] pela soma dos diagramas estocásticos topologicamente equivalentes:

$$\text{Fig. 2.2a} = \text{Fig. 2.3a} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{Fig. 2.2b} + \text{Fig. 2.2c} = \text{Fig. 2.3b} \quad (\text{D.9})$$

$$\text{Fig. 2.2d} = \text{Fig. 2.3c} \quad (\text{D.10})$$

$$\text{Fig. 2.2e} + \text{Fig. 2.2f} = \text{Fig. 2.3d} \quad (\text{D.11})$$

Ambas as séries são, entretanto, contaminadas por divergências ultra-violeta. O grau superficial de divergência de um diagrama estocástico qualquer é, por (2.28),

$$\omega = (D-4)L + 6 - E_c - 3E_A \quad (\text{D.12})$$

Para $D = 4$, ω depende apenas do número de pernas externas, como na

teoria convencional. Para a correlação de dois pontos acima, $\omega = 4 - 2E_A$. Vemos que a divergência estocástica é, de fato, menor ou igual a usual.

APÊNDICE E

EQUIVALÊNCIA ENTRE A QE E A TEORIA CONVENCIONAL

Neste apêndice exibimos a prova diagramática de Grimus e Hüffel [2.1] da equivalência entre a QE no limite de equilíbrio e a teoria convencional.

Vamos provar por indução no número de vértices V que os diagramas estocásticos S_F se somam para dar o diagrama de Feynman F topologicamente equivalente, no caso de uma ação polinomial (2.3).

Para $V=1$, um termo do tipo $\frac{g_r}{r!} \varphi^r$ dá origem a gráficos de árvore de r pontos em que apenas uma pata não tem cruz, e

$$\begin{aligned} \sum_j \text{Diagrama} &= - \frac{g}{r!} r! \frac{1}{k_1^2+m^2+\dots+k_r^2+m^2} \frac{(k_j^2+m^2)}{(k_1^2+m^2)\dots(k_j^2+m^2)\dots(k_r^2+m^2)} \\ &= \frac{-g}{(k_1^2+m^2)\dots(k_r^2+m^2)} = \text{Diagrama} \quad (E.1) \end{aligned}$$

O mesmo se aplica para os gráficos de $r-2L$ pontos, onde L é o número de "loops".

Assumimos agora que há equivalência entre os gráficos estocásticos e o gráfico usual correspondente, para $V-1$ vértices.

Para um diagrama F de V vértices consideramos todos os diagramas estocásticos S_F e introduzimos em cada um um ordenamento temporal. O tempo maior τ_v pertencendo a um vértice ligado por uma linha agnóstica a um extremo, temos várias possibilidades, segundo o número de patas externas neste vértice. No caso

geral, trata-se de um vértice do tipo r com $s < r$ patas externas e $r-s$ internas; das externas, apenas uma é agnóstica.

Quando retiramos o dito vértice com as linhas externas, obtemos novos diagramas F' e $\tilde{S}_F$ [Fig. 2.4]. Na mudança de F para F' o número de linhas externas muda em $r-2s$ e o número de vértices em -1 do tipo r ; de (2.17) os diagramas estocásticos correspondentes S_F , tem $(s-1)$ cruces a menos que os S_F . Por outro lado, os $\tilde{S}_F$ têm também $(s-1)$ cruces a menos, já que apenas uma das linhas retiradas era agnóstica. Logo, a topologia de $\tilde{S}_F$ é a de F' . Agora, para obter S_F de $\tilde{S}_F$ devemos multiplicar a contribuição deste último por $-\frac{g_r}{r!}$ (do vértice), $\sum_{j=1}^s \frac{k_j^2+m^2}{(k_1^2+m^2)\dots(k_s^2+m^2)}$ (das linhas externas cristãs), $r!$ (das diversas maneiras de ligar o vértice às linhas externas e a $\tilde{S}_F$) e $\frac{1}{P}$ (da V -ésima integração (2.23)). Somando sobre todos os ordenamentos em que τ_V é o maior, estamos somando sobre todos os diagramas estocásticos com a topologia de F' (já que $\tilde{S}_F$ tem a topologia de F'). Mas esta é justamente a contribuição de F' (por hipótese). Em resumo, a soma sobre todos os diagramas estocásticos S_F com este τ_V como o maior tempo é

$$\begin{aligned}
 -\frac{g}{r!} \left[\sum_{j=1}^s \frac{(k_j^2+m^2)}{(k_1^2+m^2)\dots(k_j^2+m^2)} \right] \frac{r!}{P} F' &= \frac{\sum_{j=1}^s (k_j^2+m^2)}{\sum_{\text{linhas externas}} (k^2+m^2)} \left[-g \frac{F'}{(k_1^2+m^2)\dots(k_s^2+m^2)} \right] \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^s (k_j^2+m^2)}{\sum_{\text{linhas externas}} (k^2+m^2)} F
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

onde $F(F')$ denota a contribuição de $F(F')$.

Por fim somamos sobre todas as possibilidades de colocação de τ_v (isto é, sobre todas as possibilidades em um diagrama estocástico e depois sobre todos eles); estaremos então considerando todos os s 's possíveis de todos os vértices de tipo r que se ligam a um extremo. Portanto, obtemos uma contribuição $(k_j^2 + m^2) \frac{1}{P} F$ de cada pata externa somando-se para dar F .

APÊNDICE F

CORRELAÇÃO ESCALAR COM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Calculamos aqui contribuições $O(e^2)$ para a correlação

$$\langle \varphi(x, \tau) \varphi^*(x, \tau') \rangle$$

do campo escalar, quando $\tau = \tau' \rightarrow \infty$.

Para isso, consideremos os diagramas pertinentes à $\langle \varphi(p, \tau) \varphi^*(p, \tau') \rangle$ [ver Fig. 4.3]. Há apenas uma linha de foton, e nós dividimos sua contribuição em transversal e longitudinal. Faremos $\tau = \tau' \rightarrow \infty$.

Quando a linha é (tomada como) transversal, um cálculo direto mostra que

$$\text{Fig. 4.3b} = e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 (p'^2+m^2) (p^2+p'^2+(p-p')^2+2m^2)} \left(\frac{(p+p')^2 - (p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \quad (\text{F.1})$$

$$\text{Fig. 4.3c} = e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-p')^2 (p^2+m^2) (p'^2+m^2) (p^2+p'^2+(p-p')^2+2m^2)} \left(\frac{(p+p')^2 - (p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \quad (\text{F.2})$$

$$\text{Fig. 4.3d} = e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-p')^2 (p^2+m^2)^2 (p^2+p'^2+(p-p')^2+2m^2)} \left(\frac{(p+p')^2 - (p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \quad (\text{F.3})$$

$$\text{Fig. 4.3e} = 4e^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(q) \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 (p^2+m^2)^2 (p'^2+m^2)} \left(\frac{p \cdot p' - (p \cdot q)(p' \cdot q)}{q^2} \right) \quad (\text{F.3'})$$

$$\text{Fig. 4.3f} = - (D-1) e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 p'^2} \quad (\text{F.4})$$

Se somamos as três primeiras obtemos justamente o diagrama usual topologicamente equivalente no gauge de Landau, enquanto a última já dá seu equivalente; todos juntos são

$$\frac{e^2}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \left\{ \left((p+p')^2 - \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \frac{1}{(p'^2+m^2)(p-p')^2} - \frac{D-1}{p'^2} \right\}. \quad (F.5)$$

A contribuição longitudinal depende da abordagem usada.

Fixando o gauge na ação as contas anteriores se repetem e

$$\text{Fig. 4.3b} = e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 (p'^2+m^2) (p^2+p'^2 + \frac{(p-p')^2}{\xi'})} \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \quad (F.6)$$

$$\text{Fig. 4.3c} = e^2 \frac{\alpha \xi'}{2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-p')^2 (p^2+m^2) (p'^2+m^2) (p^2+p'^2 + \frac{(p-p')^2}{\xi'})} \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \quad (F.7)$$

$$\text{Fig. 4.3d} = e^2 \frac{\alpha \xi'}{2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-p')^2 (p^2+m^2)^2 (p^2+p'^2 + \frac{(p-p')^2}{\xi'})} \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \quad (F.8)$$

$$\text{Fig. 4.3e} = 4e^2 \xi' \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(q) \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 (p^2+m^2)^2 (p'^2+m^2)} \frac{(p \cdot q)(p' \cdot q)}{q^2} \quad (F.8')$$

$$\text{Fig. 4.3f} = -e^2 \frac{\alpha \xi'}{2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 p'^2} \quad (F.9)$$

Sem fixar o gauge (mais corretamente, fixando-o nas condições iniciais) uma álgebra um pouco mais trabalhosa leva à

$$\text{Fig. 4.3b} = \epsilon e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 (p'^2+m^2) (p^2+p'^2 + 2m^2)} \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \quad (F.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 4.3c} = e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2) (p'^2+m^2) (p^2+p'^2+2m^2)} & \left(\frac{\xi}{(p-p')^2} + \right. \\ & \left. + \alpha \left(\tau - \frac{1}{2(p^2+m^2)} - \frac{1}{p^2+p'^2+2m^2} \right) \right) \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \end{aligned} \quad (F.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 4.3d} = e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 (p^2+p'^2+2m^2)} & \left(\frac{\xi}{(p-p')^2} + \right. \\ & \left. + \alpha \left(\tau - \frac{1}{2(p^2+m^2)} - \frac{1}{p^2+p'^2+2m^2} \right) \right) \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \end{aligned} \quad (F.12)$$

$$\text{Fig. 4.3e} = 4e^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(q) \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2 (p'^2+m^2)} \cdot \left(\tau - \frac{1}{2(p^2+m^2)} - \frac{1}{2(p'^2+m^2)} \right) \frac{(p \cdot q)(p' \cdot q)}{q^2} \quad (\text{F.12'})$$

$$\text{Fig. 4.3f} = -e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2+m^2)^2} \left(\frac{\xi}{p'^2} + \alpha \left(\tau - \frac{1}{2(p^2+m^2)} \right) \right) \quad (\text{F.13})$$

Fazemos uma continuação analítica na dimensão D nas expressões acima, de forma a regularizá-las. Podemos, em particular, fazer mudanças de variáveis, usar argumentos de simetria e a álgebra vetorial usual.

Somando (F.6) - (F.9) obtemos ($\xi = \frac{\alpha}{2} \xi'$)

$$\frac{e^2}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \left\{ \left(\frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \frac{1}{p'^2+m^2} - 1 \right) \frac{\xi}{(p-p')^2} - \frac{\alpha-2}{2} \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \cdot \frac{1}{(p'^2+m^2)(p^2+p'^2+(p-p')^2+2m^2)} \right\} \quad (\text{F.14})$$

enquanto (F.10) - (F.13),

$$\frac{e^2}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \left\{ \left[\frac{\xi}{(p-p')^2} + \alpha \left(\tau - \frac{1}{2(p^2+m^2)} \right) \right] \left[\frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \frac{1}{p'^2+m^2} - 1 \right] + \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \frac{\epsilon - \alpha}{(p'^2+m^2)(p^2+p'^2+2m^2)} \right\} \quad (\text{F.15})$$

Reunindo os termos em ξ de (F.14) e (F.15) com a contribuição transversal (F.5), obtemos o resultado da teoria convencional [Fig. 4.5]

$$\frac{e^2}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-p')^2} \left\{ \left(\frac{(p+p')^2 - (p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \frac{1}{p'^2+m^2} - (D-1) + \xi \left(\frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \frac{1}{p'^2+m^2} - 1 \right) \right\} \quad (\text{F.16})$$

Tanto este termo quanto os demais presentes em (F.14) e (F.15) podem ser colocados em forma um pouco mais apropriada. Um pouco de álgebra permite escrever (F.16) como

$$e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-p')^2} \left\{ \left[\left((p+p')^2 - \frac{(p^2-p'^2)^2}{(p-p')^2} \right) \frac{1}{p'^2+m^2} - (D-1) \right] \cdot \frac{1}{(p^2+m^2)^2} + \xi \frac{p^2-p'^2}{(p-p')^2 (p^2+m^2) (p'^2+m^2)} \right\}, \quad (F.17)$$

o último termo em (F.14) como

$$- \frac{\alpha-2}{2} e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{p^2-p'^2}{(p-p')^2 (p^2+m^2) (p'^2+m^2) (p^2+p'^2+(p-p')^2+2m^2)} - \frac{p^2-p'^2}{(p-p')^2 (p^2+m^2)^2 (p^2+p'^2+(p-p')^2+2m^2)} \right\}, \quad (F.18)$$

e os demais de (F.15) como

$$e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2-p'^2}{(p-p')^2 (p^2+m^2) (p'^2+m^2)} \left(\alpha\tau + \frac{\epsilon - \frac{3}{2}\alpha}{p^2+p'^2+2m^2} \right) - \left(\epsilon - \frac{\alpha}{2} \right) e^2 \cdot \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2-p'^2}{(p-p')^2 (p^2+m^2)^2 (p^2+p'^2+2m^2)}. \quad (F.19)$$

Já usamos aqui argumentos de simetria, como

$$\int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} p \cdot (p-p') f((p-p')^2) = 0 \quad (F.20)$$

sendo $f(p')$ uma função qualquer.

Para obter a quantidade invariante de gauge devemos por fim integrar em p . Usando que, também por simetria,

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} (p^2-p'^2) f(p,p') = 0 \quad \text{se } f(p,p') = f(p',p), \quad (F.21)$$

obtemos os resultados apresentados no Cap. IV. Em particular, o termo divergente em τ se anula.

Se utilizamos a fixação de gauge estocástica, devemos acrescentar os diagramas com novos vértices [Fig. 4.4]. Obtemos

$$\text{Fig. 4.4a} = - \frac{1}{\xi'} e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p'^2}{(p^2 + m^2)^2 (p'^2 + m^2) (p^2 + p'^2 + \frac{(p-p')^2 + 2m^2}{\xi'})} \quad (\text{F.22})$$

$$\text{Fig. 4.4b} = -\alpha e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p'^2}{(p-p')^2 (p^2 + m^2) (p'^2 + m^2) (p^2 + p'^2 + \frac{(p-p')^2 + 2m^2}{\xi'})} \quad (\text{F.23})$$

$$\text{Fig. 4.4c} = \frac{\alpha}{2\xi'} e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2) (p'^2 + m^2) (p^2 + p'^2 + \frac{(p-p')^2 + 2m^2}{\xi'})} \quad (\text{F.24})$$

$$\text{Fig. 4.4d} + \text{Fig. 4.4e} = 0$$

$$\text{Fig. 4.4f} = - \frac{\alpha}{2\xi'} e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2 (p^2 + p'^2 + \frac{(p-p')^2 + 2m^2}{\xi'})} \quad (\text{F.25})$$

que somados resultam em

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha-2}{2} \frac{e^2}{\xi'} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p'^2}{(p^2 + m^2)^2 (p'^2 + m^2) (p^2 + p'^2 + \frac{(p-p')^2 + 2m^2}{\xi'})} - \\ & - \alpha e^2 \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{p^2 - p'^2}{(p-p')^2 (p^2 + m^2) (p'^2 + m^2) (p^2 + p'^2 + \frac{(p-p')^2 + 2m^2}{\xi'})} \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

que, quando $\alpha=2$, se anula após integração em p .

APÊNDICE G

POLARIZAÇÃO DO VÁCUO NA ELETRODINÂMICA ESCALAR
COM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Apresentamos aqui o cálculo em primeira ordem da polarização do vácuo $\pi_{\mu\nu}$, no limite de tempos longos. Para tanto, consideramos os diagramas da Fig. 4.6. Como $\pi_{\mu\nu}(p)$ é uma combinação linear do tipo $a\delta_{\mu\nu} + bp_{\mu}p_{\nu}$, só precisamos considerar o caso de ambas as linhas fotônicas transversais ou ambas longitudinais.

No primeiro caso

$$\text{Fig. 4.6a} = \frac{e^2}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{P_{\mu\rho}^T(p) (p+2k)_{\rho} (p+2k)_{\sigma} P_{\sigma\nu}^T(p)}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)(k^2+(k+p)^2+2m^2)} \quad (\text{G.1})$$

$$\text{Fig. 4.6b} = \frac{e^2}{(p^2)^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{P_{\mu\rho}^T(p) (p+2k)_{\rho} (p+2k)_{\sigma} P_{\sigma\nu}^T(p)}{p^2+k^2+(k+p)^2+2m^2} \left(\frac{1}{k^2+m^2} + \frac{1}{(k+p)^2+m^2} \right) \quad (\text{G.2})$$

$$\text{Fig. 4.6c} = - \frac{2e^2}{(p^2)^2} P_{\mu\nu}^T(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2+m^2} \quad (\text{G.3})$$

que se somam para dar o resultado usual no gauge de Landau (válido para ambos os diagramas topologicamente distintos):

$$\frac{e^2}{(p^2)^2} P_{\mu\rho}^T(p) \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{(2k+p)_{\rho} (2k+p)_{\sigma}}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} - \frac{2\delta_{\rho\sigma}}{k^2+m^2} \right) \right] P_{\sigma\nu}^T(p) \quad (\text{G.4})$$

No segundo caso

$$\text{Fig. 4.6a} = \frac{e^2}{(p^2)^2} \xi' p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)(k^2+(k+p)^2+\frac{p^2}{\xi'})} \quad (\text{G.5})$$

$$\text{Fig. 4.6b} = \frac{e^2}{(p^2)^2} \frac{\alpha \xi'^2}{2} p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2(k^2+(k+p)^2+\frac{p^2}{\xi'})k^2+m^2} \left(\frac{1}{k^2+m^2} + \frac{1}{(k+p)^2+m^2} \right) \quad (\text{G.6})$$

$$\text{Fig. 4.6c} = -2 \frac{e^2}{(p^2)^2} \frac{\alpha \xi'^2}{2} p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2+m^2} \quad (\text{G.7})$$

fixando o gauge na ação, e, com mais trabalho,

$$\begin{aligned} \text{Fig. 4.6a} = 2e^2 \epsilon p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} & \left[\frac{\tau}{k^2+(k+p)^2+2m^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2(k^2+(k+p)^2+2m^2)^2} - \frac{1}{2(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 4.6b} = 2e^2 \epsilon p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2} & \left\{ \left(\frac{\alpha \tau^2 + \xi \tau}{2} \frac{\alpha \tau}{p^2} \frac{1}{k^2+(k+p)^2+2m^2} - \frac{\xi}{p^2} \frac{1}{k^2+m^2} \right) \cdot \right. \\ & \cdot \frac{1}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} + \\ & \left. + \frac{\alpha (k^2 - (k+p)^2)}{(k^2+m^2)^2((k+p)^2+k^2+2m^2)^2} \left(\frac{1}{k^2+(k+p)^2+2m^2} + \frac{1}{2(k^2+m^2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 4.6c} = -2e^2 \epsilon p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} & \left\{ \frac{k^2+(k+p)^2+2m^2}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} \left(\frac{\alpha \tau^2}{2} + \frac{\xi \tau}{p^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{2(k^2+m^2)^3} - \frac{\xi}{p^2} \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

sem fixar o gauge. Nestas relações usamos

$$p_{\mu\rho}^L(p)(p+2k)_\rho(p+2k)_\sigma p_{\sigma\nu}^L(p) = p_{\mu\nu}^L(p) \frac{1}{p^2} ((k+p)^2 - k^2)^2 \quad (\text{G.11})$$

Supomos agora que regularizamos as expressões acima dimensionalmente .

Analise as duas alternativas longitudinais separadamente.

Somando (G.5), (G.6) e (G.7) $\left(\xi = \frac{\alpha \xi'}{2} \right)$,

$$\frac{e^2}{(p^2)^2} p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} \left\{ \frac{2\xi^2}{\alpha} \frac{(k^2-(k+p)^2)^2}{k^2+(k+p)^2+p^2+2m^2} + \frac{2-\alpha}{\alpha} \xi \frac{(k^2-(k+p)^2)^2}{\xi'} \right\} . \quad (G.12)$$

Adicionando o termo em ξ^2 à contribuição transversal (G.4) obtemos justamente o resultado usual [Fig. 4.8]. Ocorre que

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2-(k+p)^2) f(k^2, (k+p)^2) = 0 \quad \text{se } f(k^2, (k+p)^2) = f((k+p)^2, k^2) \quad (G.13)$$

como se vê mudando k em $-k-p$, e portanto o tal termo em ξ^2 se anula, como deveria ser, já que $\pi_{\mu\nu}$ é invariante de gauge.

Por outro lado, somando (G.8), (G.9) e (G.10) e usando

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} \frac{(k^2-(k+p)^2)^2 - (k^2+(k+p)^2+2m^2)}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)^2} g(k^2) = -\frac{2p_\alpha}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\alpha}{k^2+m^2} g((k+p)^2) , \quad (G.14)$$

obtemos

$$2e^2 \epsilon p_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \left(\frac{\alpha\tau^2}{2} + \frac{\xi\tau}{p^2} \right) \frac{4p_\alpha}{p^2} \frac{k_\alpha}{k^2+m^2} + \frac{\xi}{p^2} \frac{(k+p)^2 - k^2}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} \right. \\ \left. - \left(\frac{(\alpha-1)\tau}{k^2+(k+p)^2+2m^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2+(k+p)^2+2m^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} \right) \right\} .$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} + \frac{\alpha(k^2 - (k+p)^2)}{(k^2+m^2)^2(k^2+(k+p)^2+2m^2)^2} \left(\frac{1}{k^2+(k+p)^2+2m^2} + \frac{1}{2(k^2+m^2)} \right) \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{p^2} + \frac{\alpha}{2(k^2+m^2)^3} \right\} \cdot \quad (G.15)
\end{aligned}$$

Este resultado não reproduz, para nenhum valor de α , o mesmo termo em ξ^2 usual; mas, igualmente, os termos em ξ se anulam por simetria. Ademais, como no caso da correlação escalar, o termo mais divergente também desaparece, já que

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\alpha f(k^2) = 0 \quad (G.16)$$

O fato realmente notável, entretanto, é que, enquanto podemos anular o termo longitudinal restante em (G.12) fazendo $\alpha=2$ (como antecipado pelo TFD), não podemos fazer o mesmo com (G.15). Se fazemos $\alpha=1$ o termo divergente desaparece, mas um finito mantém-se vivo. Para $\alpha=2$, ambos permanecem.

A razão disto se vê considerando os diagramas adicionais da fixação estocástica de gauge [Fig. 4.7], que trazem uma contribuição

$$\text{Fig. 4.7} = -2 \frac{e^2}{(p^2)^2} \frac{\alpha \xi'}{2} P_{\mu\nu}^L(p) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 - (k+p)^2)^2}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)(k^2+(k+p)^2+\frac{p^2}{\xi'}+2m^2)} \quad (G.17)$$

não nula.

APÊNDICE H

POLARIZAÇÃO DO VÁCUO NA ELETRODINÂMICA ESCALAR
COM REGULARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA ANALÍTICA

Apresentamos aqui o cálculo da polarização do vácuo [Fig. 4.6] pela regularização estocástica analítica, no limite de tempos grandes. As integrais são algo mais trabalhosas que na regularização dimensional, pois o processo é não-markoviano; retendo apenas os termos que não se anulam quando os reguladores são removidos ($\epsilon_1 \rightarrow 0$, $\epsilon_2 \rightarrow 0$),

$$\begin{aligned}
 \text{Fig. 4.6a} = & \frac{1}{p^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{(k^2+m^2)^{1+\epsilon_1} ((k+p)^2+m^2)^{1+\epsilon_1}} \frac{1}{k^2 + (k+p)^2 + p^2 + 2m^2} \cdot \\
 & \cdot \left\{ 1 - 2\epsilon_1 C + \epsilon_1 \left(\frac{k^2+m^2}{p^2+(k+p)^2-k^2} \ln \frac{(k+p)^2+p^2+m^2}{k^2+m^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(k+p)^2+m^2}{p^2+k^2-(k+p)^2} \ln \frac{k^2+p^2+m^2}{(k+p)^2+m^2} \right) + 0(\epsilon^2) \right\} \quad (\text{H.1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Fig. 4.6b} = & \frac{2}{(p^2)^{2+\epsilon_2}} \left(\delta_{\mu\rho} + \frac{\alpha-2}{2} \frac{p_\mu^L}{p_\rho} (p) \right) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)_\rho (2k+p)_\nu}{(k^2+m^2)^{1+\epsilon_1}} \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C}{k^2+(k+p)^2+2m^2} + \left[\epsilon_1 \frac{k^2+m^2}{((k+p)^2+p^2-k^2)(k^2+(k+p)^2+p^2+2m^2)} \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \ln \frac{(k+p)^2+p^2+m^2}{k^2+m^2} + \epsilon_2 \frac{2(p^2)^2}{(k^2+(k+p)^2+2m^2-p^2)^2(k^2+(k+p)^2+2m^2+p^2)} \cdot \\
 & \left. \left. + \ln \frac{p^2}{k^2+(k+p)^2+m^2} + \epsilon_2 \frac{1}{k^2+(k+p)^2+2m^2-p^2} \right] + 0(\epsilon^2) \right\} \quad (\text{H.2})
 \end{aligned}$$

$$\text{Fig. 4.6c} = \frac{2}{(p^2)^{2+\epsilon_2}} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\alpha-2}{2} P_{\mu\nu}^L(p) \right) \left\{ \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2+m^2)^{1+\epsilon_1}} \right\} \cdot \\ \cdot (1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)C + \epsilon_2 + 0(\epsilon^2)) \quad (\text{H.3})$$

($\epsilon = \epsilon_1, \epsilon_2$) onde usamos [H.1, pag. 641, 642]

$$\int_0^\infty dx e^{-\mu x} \text{Ei}(ax) = -\frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{\mu}{a} - 1\right) \quad (a > 0, \text{Re}\mu > 0, \mu > 0)$$

$$\int_0^\infty dx e^{-\mu x} \text{Ei}(-\beta x) x^{\nu-1} = \frac{-\Gamma(\nu)}{\nu(\beta+\mu)^\nu} {}_2F_1\left(1; \nu; \nu+1; \frac{\mu}{\beta+\mu}\right)$$

$$(|\arg \beta| < \pi, \text{Re}\nu > 0, \text{Re}(\beta+\mu) > 0)$$

com ${}_2F_1$ a função hipergeométrica [H.1, pag. 1039, 1041],

$${}_2F_1(1; \nu; \nu+1; 0) = 1$$

$${}_2F_1\left(1; 1; 2; \frac{\mu}{\beta+\mu}\right) = \frac{\beta+\mu}{\mu} \ln\left(1 + \frac{\mu}{\beta}\right).$$

As duas primeiras contribuições, não conseguimos calcular exatamente. Optamos por expandí-las em potências de $\frac{p}{m}$, obtendo, após muita álgebra ($\bar{\epsilon} = 2\epsilon_1$)

$$\text{Fig. 4.6a} = \frac{1}{p^2} \left\{ 2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+m^2)^{3+\bar{\epsilon}}} (1 - 2\epsilon_1 C + 2\epsilon_1 + 0(\epsilon^2)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{p_\mu p_\nu}{(k^2+m^2)^{3+\bar{\epsilon}}} - \frac{6(p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu)k_\alpha p_\alpha + 8p^2 k_\mu k_\nu}{(k^2+m^2)^{4+\bar{\epsilon}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 28 \frac{p_\alpha p_\beta k_\alpha k_\beta k_\mu k_\nu}{(k^2+m^2)^{5+\bar{\epsilon}}} + 0(\epsilon) \right] + 0\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^2 \right\} \quad (\text{H.4})$$

$$\begin{aligned}
\text{Fig. 4.6b} = & \frac{2}{(p^2)^{2+\epsilon_2}} \left(\delta_{\mu\rho} + \frac{\alpha-2}{2} p_{\mu\rho}^L(p) \right) \cdot \\
& \cdot \left\{ 2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\rho k_\nu}{(k^2+m^2)^{2+\epsilon_1}} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C + \epsilon_1 + \epsilon_2 + 0(\epsilon^2)) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{p_\rho p_\nu}{(k^2+m^2)^{2+\epsilon_1}} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C + \epsilon_1 + \epsilon_2) - 2 \frac{(p_\rho k_\nu + k_\rho p_\nu) p_\alpha k_\alpha}{(k^2+m^2)^{3+\epsilon_1}} \right. \\
& \cdot (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C + 2\epsilon_1 + \epsilon_2) - 4 \frac{p^2 k_\rho k_\nu}{(k^2+m^2)^{3+\epsilon_1}} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C + 2\epsilon_1) + \\
& + 4 \frac{p_\alpha p_\beta k_\alpha k_\beta k_\rho k_\nu}{(k^2+m^2)^{4+\epsilon_1}} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C + \frac{10\epsilon_1}{3} + \epsilon_2 + 0(\epsilon^2)) \left. \right] + \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[- \frac{p^2 p_\rho p_\nu}{(k^2+m^2)^{3+\epsilon_1}} + \frac{p_\rho p_\nu p_\alpha p_\beta k_\alpha k_\beta}{(k^2+m^2)^{4+\epsilon_1}} + 4 \frac{(p_\rho k_\nu + p_\nu k_\rho) p^2 p_\alpha k_\alpha}{(k^2+m^2)^{4+\epsilon_1}} \right. \\
& + 4 \frac{(p^2)^2 k_\rho k_\nu}{(k^2+m^2)^{4+\epsilon_1}} - 2 \frac{(p_\rho k_\nu + p_\nu k_\rho) p_\alpha p_\beta p_\gamma k_\alpha k_\beta k_\gamma}{(k^2+m^2)^{5+\epsilon_1}} - \\
& - 12 \frac{k_\rho k_\nu p^2 p_\alpha p_\beta k_\alpha k_\beta}{(k^2+m^2)^{5+\epsilon_1}} + 4 \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta k_\rho k_\nu k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta}{(k^2+m^2)^{6+\epsilon_1}} + \\
& + 0(\epsilon) \left. \right] + 0 \left(\left(\frac{p^2}{m^2} \right)^3 \right) \left. \right\} \quad (H.5)
\end{aligned}$$

Já temos os diagramas escritos em termos de integrais do tipo que encontramos quando fazemos regularização dimensional, por exemplo. Agora, ao invés de continuarmos analiticamente no número de dimensões, calculamos tais integrais para ϵ suficientemente grande e prolongamos para valores menores de ϵ . Usando as relações conhecidas [Ap. K],

$$\begin{aligned}
\text{Fig. 4.6a} = & \frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{p^2(m^2)^{2+\bar{\epsilon}-D/2}} \left\{ \frac{\Gamma(2+\bar{\epsilon}-\frac{D}{2})}{\Gamma(2+\bar{\epsilon})} \delta_{\mu\nu} (1-2\epsilon_1 C + 2\epsilon_1 - \frac{\bar{\epsilon}}{2} + 0(\epsilon^2)) + \right. \\
& - \frac{1}{12} \frac{p^2}{m^2} \frac{\Gamma(3+\bar{\epsilon}-\frac{D}{2})}{\Gamma(3+\bar{\epsilon})} (9\delta_{\mu\nu} - 2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) (1+0(\epsilon)) + 0 \left(\left(\frac{p^2}{m^2} \right)^2 \right) \left. \right\} \quad (H.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Fig. 4.6b} = & \frac{2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\rho} + \frac{\alpha-2}{2} \frac{p_{\mu}^L p_{\rho}}{p^2}}{(p^2)^{2+\epsilon_2} (m^2)^{1+\epsilon_1-D/2}} \left\{ \frac{\Gamma(1+\epsilon_1-\frac{D}{2})}{\Gamma(1+\epsilon_1)} \delta_{\rho\nu} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C+\epsilon_2+0(\epsilon^2)) + \right. \\
& - \frac{1}{12} \frac{p^2}{m^2} \frac{\Gamma(2+\epsilon_1-\frac{D}{2})}{\Gamma(2+\epsilon_1)} \left[\delta_{\rho\nu} (5-5(\epsilon_1+\epsilon_2)C+\frac{13}{2}\epsilon_1-\epsilon_2+0(\epsilon^2)) + \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{p_{\rho} p_{\nu}}{p^2} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C+\epsilon_1+\epsilon_2+0(\epsilon^2)) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{240} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^2 \frac{\Gamma(3+\epsilon_1-\frac{D}{2})}{\Gamma(3+\epsilon_1)} (53\delta_{\rho\nu} - 18 \frac{p_{\rho} p_{\nu}}{p^2}) (1+0(\epsilon)) + 0 \left(\left(\frac{p^2}{m^2} \right)^3 \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{H.7}$$

$$\text{Fig. 4.6c} = - \frac{2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{\alpha-2}{2} \frac{p_{\mu}^L p_{\nu}}{p^2}}{(p^2)^{2+\epsilon_2} (m^2)^{1+\epsilon_1-D/2}} \frac{\Gamma(1+\epsilon_1-\frac{D}{2})}{\Gamma(1+\epsilon_1)} (1-(\epsilon_1+\epsilon_2)C+\epsilon_2+0(\epsilon^2)) .
\tag{H.8}$$

Se somamos tais resultados, vemos que a divergência oriunda de (H.8) é cancelada por (H.6) e obtemos o resultado apresentado no texto.

APÊNDICE I

POLARIZAÇÃO DO VÁCUO NA TEORIA NÃO-ABELIANA
COM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Neste Apêndice calculamos a polarização do vácuo $\pi_{\rho\sigma}^{ab}$ até $O(g^2)$. Para tanto consideramos os diagramas estocásticos de $\langle A_\mu(k, \tau) A_\nu(-k, \tau) \rangle$ no limite $\tau \rightarrow \infty$, em diferentes abordagens à quantização do campo não abeliano. Lembre-se que, sendo $\pi_{\rho\sigma}^{ab}$ uma combinação linear de $\delta_{\rho\sigma}$ e $k_\rho k_\sigma$, precisamos nos deter apenas nos casos em que ambas as patas externas são transversais ou ambas longitudinais.

Tomemos a abordagem de Parisi e Wu no gauge de Landau $\xi=0$. Os únicos diagramas que devemos considerar são os da Fig. 5.4. Obtemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Fig. 5.4a} = & 2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) g V_{\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) g V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) \cdot \\
 & \cdot \{ P_{\mu\rho}^T(k) \left[\frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_1^2 k_2^2 (k^2 + k_1^2 + k_2^2)} + \frac{\alpha P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k^2 k_1^2 (k^2 + k_1^2)} \right. \right. \\
 & \cdot \left(\tau - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k^2 + k_1^2} \right) + \frac{\alpha P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k^2 k_2^2 (k^2 + k_2^2)} \left(\tau - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k^2 + k_2^2} \right) + \\
 & + \alpha^2 \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{(k^2)^2} \left(\tau^2 - \frac{3}{k^2} \tau + \frac{7}{2} \frac{1}{(k^2)^2} \right) \left. \right] P_{\rho'\nu}^T(k) + \\
 & + P_{\mu\rho}^L(k) \left[\frac{2 P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_1^2 k_2^2 (k^2 + k_2^2)} \left(\tau - \frac{3}{2} \frac{1}{k^2 + k_2^2} - \frac{1}{2} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 k_2^2} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{(k_1^2)^2} \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{k_1^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(k_1^2)^2} \right) + \frac{\alpha P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{(k_2^2)^2} \\
& \cdot \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{k_2^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(k_2^2)^2} \right) + \frac{\alpha^2}{6} P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2) \tau^4] P_{\rho,\nu}^L(k) \} \\
\end{aligned} \tag{I.1}$$

Fig. 5.4b = $2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) g_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) g_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) \cdot$

$$\begin{aligned}
& \cdot \{ P_{\mu\rho}^T(k) \left[\frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{(k^2)^2 k_1^2 (k^2 + k_1^2 + k_2^2)} + \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{(k^2)^2 k_1^2 (k^2 + k_1^2)} \right] + \right. \\
& + \frac{\alpha P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{(k^2)^2 (k^2 + k_2^2)} \left(\tau - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k^2 + k_2^2} \right) + \\
& + \alpha \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{(k^2)^3} \left(\tau - \frac{3}{2k^2} \right) \} P_{\rho,\nu}^T(k) + \\
& + P_{\mu\rho}^L(k) \left[\alpha \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k_1^2 (k_1^2 + k_2^2)} \left(\tau^2 - \frac{\tau}{k_1^2 + k_2^2} + \frac{1}{(k_1^2 + k_2^2)^2} - \frac{1}{(k_2^2 - k_1^2)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k_1^2 + k_2^2}{(k_2^2 - k_1^2)(2k_1^2)^2} \right) + \alpha \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{(k_1^2)^2} \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{k_1^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(k_1^2)^2} \right) + \right. \\
& + \frac{2}{3} \alpha^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k_2^2} \left(\tau^3 - \frac{3\tau^2}{k_2^2} + \frac{6\tau}{(k_2^2)^2} - \frac{6}{(k_2^2)^3} \right) + \\
& \left. + \frac{\alpha^2}{6} P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2) \tau^4 \right] P_{\rho,\nu}^L(k) \} \tag{I.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Fig. 5.4c} = & 2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) g V_{\rho\alpha\beta}^{\text{ade}}(k, -k_1, -k_2) g V_{\rho'\alpha'\beta'}^{\text{bde}}(-k, k_1, k_2) \\
& \cdot \left\{ P_{\mu\rho}^T(k) \left[\frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{(k^2)^2 k_2^2 (k^2+k_1^2+k_2^2)} + \alpha \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{(k^2)^2 (k^2+k_1^2)} \left(\tau - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k^2+k_1^2} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{(k^2)^2 k_2^2 (k^2+k_2^2)} + \alpha \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{(k^2)^3} \left. \left(\tau - \frac{3}{2k^2} \right) \right] P_{\rho'\nu}^T(k) + \\
& + P_{\mu\rho}^L(k) \left[\alpha \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_2^2 (k^2+k_2^2)} \left(\tau^2 - \frac{\tau}{k_1^2+k_2^2} + \frac{1}{(k_1^2+k_2^2)^2} - \frac{1}{(k_2^2-k_1^2)^2} - \right. \right. \\
& - \frac{k_1^2+k_2^2}{(k_2^2-k_1^2)^2 (2k_2^2)^2} \left. \right) + \frac{2\alpha^2}{3} \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k_1^2} \left(\tau^3 - \frac{3\tau^2}{k_1^2} + \frac{6\tau}{(k_1^2)^2} - \frac{6}{(k_1^2)^3} \right) + \\
& + \alpha \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{(k_2^2)^2} \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{k_2^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(k_2^2)^2} \right) + \\
& + \frac{\alpha^2}{6} \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{\tau^4} \left. \right] P_{\rho'\nu}^L(k) \right\} . \quad (\text{I.3})
\end{aligned}$$

$$\text{Fig. 5.4d} = 0 \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{aligned}
\text{Fig. 5.4e} = & 3 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} g^2 W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\text{aeeb}} \cdot \left\{ P_{\mu\alpha}^T(k) \left[\frac{P_{\beta\gamma}^T(k_1)}{(k^2)^2 k_1^2} + \alpha \frac{P_{\beta\gamma}^L(k_1)}{(k^2)^2} \right. \right. \\
& \cdot \left(\tau - \frac{1}{2k^2} \right) \left. \right] P_{\delta\nu}^T(k) + P_{\mu\alpha}^L(k) \left[\alpha \frac{P_{\beta\gamma}^T(k_1)}{k_1^2} \left(\tau^2 - \frac{1}{2(k_1^2)^2} \right) + \right. \\
& + \frac{2\alpha^2}{3} P_{\beta\gamma}^L(k_1) \tau^3 \left. \right] P_{\delta\nu}^L(k) \left. \right\} . \quad (\text{I.5})
\end{aligned}$$

Somando tais contribuições temos dois tipos de termos. Um, que está ensanduichado por dois projetores transversais, se divide por sua vez em uma parte proveniente dos diagramas com linhas só transversais,

$$\pi_{\rho\rho'}^{\text{ab}}(\text{IG}) = 2g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) V_{\rho\alpha\beta}^{\text{ade}}(k, -k_1, -k_2) V_{\rho'\alpha'\beta'}^{\text{bde}}(-k, k_1, k_2) .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_2^2} + \\
 & + 3g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} W_{\rho\alpha\beta\rho'}^{aeeb} \frac{P_{\alpha\beta}^T(k_1)}{k_1^2} , \quad (I.6)
 \end{aligned}$$

que coincide com a teoria convencional (no gauge de Landau), e um resto

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\rho\rho'}^{ab} = & 2g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) \cdot \\
 & \cdot V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) \left\{ \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha \left(\tau - \frac{1}{2k^2} \right) - \frac{\alpha-1}{k^2+k_1^2} \right] + \right. \\
 & + \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha \left(\tau - \frac{1}{2k^2} \right) - \frac{\alpha-1}{k^2+k_2^2} \right] + \\
 & + \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k_1^2 k_2^2} \alpha \left[\alpha \tau^2 + \frac{2-3\alpha}{k^2} \left(\tau - \frac{1}{2k^2} \right) + 2(\alpha-1) \frac{1}{(k^2)^2} \right] \Big\} + \\
 & + 3g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} W_{\rho\alpha\beta\rho'}^{aeeb} \frac{P_{\alpha\beta}^L(k_1)}{k_1^2} \alpha \left(\tau - \frac{1}{2k^2} \right) . \quad (I.7)
 \end{aligned}$$

O outro termo vem daqueles com linhas longitudinais externas:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\rho\rho'}^{ab} = & 2g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) \\
 & \cdot V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) \left\{ \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha \tau^2 + (2-\alpha) \frac{\tau}{k_1^2+k_2^2} + \right. \right. \\
 & + \frac{\alpha-3}{(k_1^2+k_2^2)^2} - \frac{\alpha}{(k_2^2-k_1^2)^2} - \frac{1}{k_1^2 k_2^2} + \frac{\alpha}{4} \frac{1}{k_2^2-k_1^2} \left(\frac{k_1^2}{(k_2^2)^2} - \frac{k_2^2}{(k_1^2)^2} \right) \Big] + \\
 & + \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k_2^2} 2\alpha \left[\frac{\alpha \tau^3}{3} - \frac{2\tau^2}{k_1^2} (\alpha-1) + \frac{2\tau}{(k_1^2)^2} (\alpha-1) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(k_1^2)^3} \left(2\alpha - \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k_2^2} 2\alpha \left[\frac{\alpha \tau^3}{3} - \frac{2\tau^2}{k_2^2} (\alpha-1) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\tau}{(k_2^2)^2} (\alpha-1) - \frac{1}{(k_2^2)^3} (2\alpha - \frac{3}{2})] + P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2) \frac{\alpha^2 \tau^4}{2} \} + \\
& + 3g^2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{aeeb} \left[\frac{P_{\beta\gamma}^T(k_1)}{k_1^2} \alpha \left(\tau^2 - \frac{1}{(2k^2)^2} \right) + P_{\beta\gamma}^L(k_1) \frac{2}{3} \alpha^2 \tau^3 \right] . \quad (I.8)
\end{aligned}$$

Nestas duas últimas fórmulas aparecem os produtos característicos desta abordagem: termos divergentes com τ . Podemos reescrevê-las utilizando

$$\begin{aligned}
V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2) V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) &= \frac{1}{4} f^{ade} f^{bde} \frac{1}{k_2^2} . \\
&\cdot \{ (k^2 - k_1^2)^2 \left[\delta_{\rho\rho'} + \frac{1}{2k_1^2} (k_{1\rho} k_{2\rho'} + k_{1\rho'} k_{2\rho}) \right] + \frac{k_\rho}{2} \left[(k_2^2 + \frac{(k \cdot k_2)^2}{k_1^2}) k_{1\rho'} + \right. \\
&+ \left. \frac{(k \cdot k_1)^2}{k_1^2} (k^2 - 2k_1^2) k_{2\rho'} \right] + (\rho \leftrightarrow \rho') \} \quad (I.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2) V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) &= \frac{1}{4} f^{ade} f^{bde} \frac{1}{k_1^2} . \\
&\cdot \{ (k^2 - k_2^2)^2 \left[\delta_{\rho\rho'} + \frac{1}{2k_2^2} (k_{1\rho} k_{2\rho'} + k_{1\rho'} k_{2\rho}) \right] + \frac{k_\rho}{2} \left[(k_1^2 + \frac{(k \cdot k_1)^2}{k_2^2}) k_{2\rho'} + \right. \\
&+ \left. \frac{(k \cdot k_2)^2}{k_2^2} (k^2 - 2k_2^2) k_{1\rho'} \right] + (\rho \leftrightarrow \rho') \} \quad (I.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2) V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) &= -\frac{1}{8} f^{ade} f^{bde} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} . \\
&\cdot \{ (k^2)^2 (k_{1\rho} k_{2\rho'} + k_{1\rho'} k_{2\rho}) - k_\rho \left[(k \cdot k_1^2) k_{2\rho'} + (k \cdot k_2)^2 k_{1\rho'} \right] + (\rho \leftrightarrow \rho') \} \quad (I.11)
\end{aligned}$$

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{aeeb} P_{\beta\gamma}^L(k_1) = \frac{-1}{3} f^{ade} f^{bde} \left(\delta_{\alpha\delta} - \frac{k_{1\alpha} k_{1\delta}}{k_1^2} \right) \quad (I.12)$$

De fato, agora

$$\begin{aligned}
 \frac{P_{\mu\rho}^T(k)}{k^2} \Gamma_{\rho\rho}^{ab}, \frac{P_{\rho',\nu}^T(k)}{k^2} &= \frac{P_{\mu\rho}^T(k)}{k^2} \{g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \cdot \\
 &\cdot \left[\frac{\alpha^2 \tau^2}{2} (k^2)^2 k_{1\rho} k_{1\rho'} + \alpha \tau (P_{\rho\rho'}^T(k_1) ((k^2-k_1^2)^2 - k_1^2 k_2^2) + P_{\rho\rho'}^L(k_1) \frac{2-3\alpha}{2} k^2 k_1^2) + \right. \\
 &\left. + P_{\rho\rho'}^T(k_1) \left(-\frac{\alpha + \alpha - 1}{2k^2 k_1^2 + k_1^2} (k^2 - k_1^2)^2 + \frac{\alpha}{2k^2} k_1^2 k_2^2 + P_{\rho\rho'}^L(k_1) \frac{\alpha(7\alpha - 3)}{2} k_1^2 \right) \right] \frac{P_{\rho',\nu}^T(k)}{k^2} \\
 &\quad (I.13)
 \end{aligned}$$

e termo finito em τ pode ser decomposto, como no texto, em uma contribuição de fantasmas e um resto.

Quanto à $\Lambda_{\rho\rho}^{ab}$, pode-se fazer o mesmo; mas, como a polarização não é invariante de gauge (e portanto não se espera obter o resultado correto com a QE) e não o utilizaremos posteriormente, não vamos nos preocupar com ele.

Estes resultados estão reunidos no texto.

Agora, fixemos o gauge na ação, com um parâmetro ξ . Os resultados dos diagramas da Fig. 5.4 passam a

$$\begin{aligned}
 \text{Fig. 5.4a} &= 2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) g V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) g V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) \cdot \\
 &\cdot \frac{1}{k^2 k_1^2 k_2^2} \left\{ P_{\mu\rho}^T(k) \left[\frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} + \xi \frac{P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^T(k_2)}{k^2 + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \xi \frac{P_{\alpha\alpha'}^L(k_1) P_{\beta\beta'}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \xi \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k^2 + \frac{k_1^2}{\xi} + k_2^2} + \xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + \frac{k_1^2}{\xi} + \frac{k_2^2}{\xi}} \} P_{\rho\nu}^T(k) + P_{\mu\rho}^L(k) . \\
& \cdot \left[\xi \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + k_2^2} + \xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + \frac{k_1^2}{\xi} + k_2^2} + \right. \\
& \left. + \xi^4 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} \right] P_{\rho\nu}^L(k) \} \quad (I.14)
\end{aligned}$$

$$\text{Fig. 5.4b} = 2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) g V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) g V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) .$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1}{(k^2)^2 k_1^2} \{ P_{\mu\rho}^T(k) \left[\frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} + \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \xi \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k^2 + \frac{k_1^2}{\xi} + k_2^2} + \right. \\
& \left. + \xi \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + \frac{k_1^2}{\xi} + \frac{k_2^2}{\xi}} \right] P_{\nu\rho'}^T(k) + \\
& + P_{\mu\rho}^L(k) \left[\xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + k_2^2} + \xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \xi^3 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + \frac{k_1^2}{\xi} + k_2^2} + \right. \\
& \left. + \xi^4 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} \right] P_{\nu\rho'}^L(k) \} \quad (I.15)
\end{aligned}$$

$$\text{Fig. 5.4c} = 2 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) g V_{\rho\alpha\beta}^{ade}(k, -k_1, -k_2) g V_{\rho'\alpha'\beta'}^{bde}(-k, k_1, k_2) .$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1}{(k^2)^2 k_2^2} \{ P_{\mu\rho}^T(k) \left[\frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} + \xi \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{k^2 + \frac{k_1^2}{\xi} + k_2^2} + \right. \\
& \left. + \xi \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + \frac{k_1^2}{\xi} + \frac{k_2^2}{\xi}} \right] P_{\nu\rho'}^T(k) + \\
& + P_{\mu\rho}^L(k) \left[\xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + k_2^2} + \xi^3 \frac{P_{\alpha\alpha}^T(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi}} + \xi^2 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^T(k_2)}{\frac{k^2}{\xi} + \frac{k_1^2}{\xi} + k_2^2} + \right. \\
& \left. + \xi^4 \frac{P_{\alpha\alpha}^L(k_1) P_{\beta\beta}^L(k_2)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} \right] P_{\nu\rho'}^L(k) \} \quad (I.16)
\end{aligned}$$

$$\text{Fig. 5.4d} = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 5.4e} = & 3 \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} g^2 W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{aeeb} \frac{1}{(k^2)^2 k_1^2} \{ P_{\mu\alpha}^T(k) [P_{\beta\gamma}^T(k_1) + \xi P_{\beta\gamma}^L(k_1)] P_{\nu\delta}^T(k) + \\ & + \xi P_{\mu\alpha}^L(k) [P_{\beta\gamma}^T(k_1) + \xi P_{\beta\gamma}^L(k_1)] \xi P_{\nu\delta}^L(k) \} . \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

É fácil de ver que, como esperado, os três primeiros gráficos se somam para dar o resultado do diagrama usual correspondente,

$$\begin{aligned} \text{Fig. 5.4a} + \text{Fig. 5.4b} + \text{Fig. 5.4c} = & \frac{1}{k^2} (P_{\mu\nu}^T(k) + \xi P_{\mu\nu}^L(k)) . \\ & \cdot \left[\frac{g^2}{2} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D (k - k_1 - k_2) V_{\rho\alpha\beta}^{(0)ade}(k, -k_1, -k_2) \frac{1}{k_1^2} . \right. \\ & \cdot (P_{\alpha\alpha'}^T(k_1) + \xi P_{\alpha\alpha'}^L(k_1)) \frac{1}{k_2^2} (P_{\beta\beta'}^T(k_2) + \xi P_{\beta\beta'}^L(k_2)) V_{\rho'\alpha'\beta'}^{(0)bde}(-k, k_1, k_2) \left. \right] . \\ & \cdot \frac{1}{k^2} (P_{\nu\rho'}^T(k) + \xi P_{\nu\rho'}^L(k)) = \text{Fig. 5.6a}, \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

enquanto o último por si só já é seu associado convencional,

$$\begin{aligned} \text{Fig. 5.4e} = & \frac{1}{k^2} (P_{\mu\alpha}^T(k) + \xi P_{\mu\alpha}^L(k)) \cdot \left[\frac{g^2}{2} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} W_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)aeeb} \frac{1}{k_1^2} (P_{\beta\gamma}^T(k_1) + \xi P_{\beta\gamma}^L(k_1)) \right] . \\ & \cdot \frac{1}{k^2} (P_{\nu\delta}^T(k) + \xi P_{\nu\delta}^L(k)) = \text{Fig. 5.6b} . \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Falta ainda a contribuição dos fantasmas. Os diagramas pertinentes estão na Fig. 5.5:

$$\text{Fig. 5.5a} = - g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k+k_1-k_2) \frac{k_{1\rho}}{k_1^2} \frac{k_{2\rho'}}{k_2^2} \cdot \frac{1}{k^2} .$$

$$\cdot \left[\frac{P_{\mu\rho}^T(k)P_{\rho'\nu}^T(k)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} + \xi^2 \frac{P_{\mu\rho}^L(k)P_{\rho'\nu}^L(k)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + k_2^2} \right] \quad (\text{I.21})$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 5.5b} = & -g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k + k_1 - k_2) \frac{k_{1\rho} k_{2\rho'}}{k^2 k_1^2} \frac{1}{k^2} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{P_{\mu\rho}^T(k)P_{\rho'\nu}^T(k)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} + \xi^2 \frac{P_{\mu\rho}^L(k)P_{\rho'\nu}^L(k)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + k_2^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

$$\begin{aligned} \text{Fig. 5.5c} = & -g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k + k_1 - k_2) \frac{k_{1\rho} k_{2\rho'}}{k^2 k_2^2} \frac{1}{k^2} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{P_{\mu\rho}^T(k)P_{\rho'\nu}^T(k)}{k^2 + k_1^2 + k_2^2} + \xi^2 \frac{P_{\mu\rho}^L(k)P_{\rho'\nu}^L(k)}{\frac{k^2}{\xi} + k_1^2 + k_2^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

$$\text{Fig. 5.5d} = 0 \quad (\text{I.24})$$

Sua soma resulta justamente no diagrama com fantasmas de $0(g^2)$,

$$\begin{aligned} \text{Fig. 5.5a} + \text{Fig. 5.5b} + \text{Fig. 5.5c} = & \frac{1}{k^2} (P_{\mu\rho}^T(k) + \xi P_{\mu\rho}^L(k)) \cdot \\ & \cdot \left[-g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k + k_1 - k_2) \frac{k_{1\rho} k_{2\rho'}}{k_1^2 k_2^2} \right] \frac{1}{k^2} \cdot \\ & \cdot (P_{\nu\rho'}^T(k) + \xi P_{\nu\rho'}^L(k)) = \text{Fig. 5.6c.} \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

APÊNDICE J

$\langle F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} \rangle$
 NA TEORIA NÃO-ABELIANA
 COM REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Aqui exibiremos as contas que levam à $\langle F_{\mu\nu}(x) F_{\kappa\lambda}(x) \rangle$, na QE com regularização dimensional, até $O(g^2)$. Sendo

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}^a(k, \tau) = & i k_\mu A_\nu^a(k, \tau) - i k_\nu A_\mu^a(k, \tau) + \\
 & -g f^{abc} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) A_\mu^b(k_1, \tau) A_\nu^c(k_2, \tau)
 \end{aligned}
 \tag{J.1}$$

vemos que

$$\begin{aligned}
 \langle F_{\mu\nu}^a(k, \tau) F_{\kappa\lambda}^b(k', \tau) \rangle = & (2\pi)^D \delta(k + k') \cdot \{ [k_\mu k_\kappa \bar{D}_{\nu\lambda}^{ab}(k, \tau, \tau) - (\mu \leftrightarrow \nu) - (\kappa \leftrightarrow \lambda) + \left(\begin{array}{c} \mu \leftrightarrow \lambda \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{array} \right)] + \\
 & + [k_\mu I_{\nu\kappa\lambda}^{ab}(-k, \tau) - (\mu \leftrightarrow \nu) + \left(\begin{array}{c} \mu \leftrightarrow \kappa \\ \nu \leftrightarrow \lambda \\ \kappa \leftrightarrow -k \\ a \leftrightarrow b \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \mu \leftrightarrow \lambda \\ \kappa \rightarrow \mu \\ \lambda \rightarrow \nu \\ \nu \rightarrow \kappa \\ k \rightarrow -k \\ a \leftrightarrow b \end{array} \right)] + \\
 & + I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(k, \tau) \}
 \end{aligned}
 \tag{J.2}$$

onde

$$(2\pi)^D \delta(k + k') \bar{D}_{\nu\lambda}^{ab}(k, \tau, \tau) \equiv \langle A_\nu^a(k, \tau) A_\lambda^b(k', \tau) \rangle
 \tag{J.3}$$

$$(2\pi)^D \delta(k+k') I_{\nu\kappa\lambda}^{ab}(-k, \tau) = -ig f^{bef} \int \frac{d^D k_1'}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2'}{(2\pi)^D} (2\pi)^D .$$

$$\delta(k'-k_1'-k_2') \langle A_\nu^a(k, \tau) A_\kappa^e(k_1', \tau) A_\lambda^f(k_2', \tau) \rangle \quad (J.4)$$

$$(2\pi)^D \delta(k+k') I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(k, \tau) = g^2 f^{acd} f^{bef} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D .$$

$$\cdot \delta(k - k_1 - k_2) \int \frac{d^D k_1'}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2'}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k' - k_1' - k_2') .$$

$$\cdot \langle A_\mu^c(k_1, \tau) A_\nu^d(k_2, \tau) A_\kappa^e(k_1', \tau) A_\lambda^f(k_2', \tau) \rangle . \quad (J.5)$$

Comecemos pelo mais simples. Como permaneceremos em $O(g^2)$, para $I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}$ só contribuem gráficos de $O(g^0)$ de

$\langle A_\mu^c(k_1, \tau) A_\nu^d(k_2, \tau) A_\kappa^e(k_1', \tau) A_\lambda^f(k_2', \tau) \rangle$ [Fig. 5.7a]. Obtemos diretamente

$$\text{Fig. 5.7a} = (2\pi)^D \delta(k_1 + k_1') (2\pi)^D \delta(k_2 + k_2') \delta^{ce} \delta^{df} .$$

$$\cdot \left[\frac{1}{k_1^2} (P_{\mu\kappa}^T(k_1) + \xi P_{\mu\kappa}^L(k_1) + \alpha\tau P_{\mu\kappa}^L(k_1)) \right] \left[\frac{1}{k_2^2} (P_{\nu\lambda}^T(k_2) + \xi P_{\nu\lambda}^L(k_2) + \alpha\tau P_{\nu\lambda}^L(k_2)) \right] + \quad (J.6)$$

$$+ (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2') (2\pi)^D \delta(k_2 + k_1') \delta^{cf} \delta^{de} .$$

$$\cdot \left[\frac{1}{k_1^2} (P_{\mu\lambda}^T(k_1) + \xi P_{\mu\lambda}^L(k_1) + \alpha\tau P_{\mu\lambda}^L(k_1)) \right] \left[\frac{1}{k_2^2} (P_{\nu\kappa}^T(k_2) + \xi P_{\nu\kappa}^L(k_2) + \alpha\tau P_{\nu\kappa}^L(k_2)) \right] + \quad (J.7)$$

$$+ (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2) (2\pi)^D \delta(k_1' + k_2') \delta^{cd} \delta^{ef} .$$

$$\cdot \left[\frac{1}{k_1^2} (P_{\mu\nu}^T(k_1) + \xi P_{\mu\nu}^L(k_1) + \alpha\tau P_{\mu\nu}^L(k_1)) \right] \left[\frac{1}{k_1'^2} (P_{\kappa\lambda}^T(k_1') + \xi P_{\kappa\lambda}^L(k_1') + \alpha\tau P_{\kappa\lambda}^L(k_1')) \right] \quad (J.8)$$

na abordagem de Parisi e Wu, e

$$\begin{aligned}
 \text{Fig. 5.7a} = & (2\pi)^D \delta(k_1 + k'_1) (2\pi)^D \delta(k_2 + k'_2) \delta^{ce} \delta^{df} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \cdot \\
 & \cdot (P_{\mu\kappa}^T(k_1) + \xi P_{\mu\kappa}^L(k_1))(P_{\nu\lambda}^T(k_2) + \xi P_{\nu\lambda}^L(k_2)) + \\
 & + (2\pi)^D \delta(k_1 + k'_2) (2\pi)^D \delta(k_2 + k'_1) \delta^{cf} \delta^{de} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \cdot \\
 & \cdot (P_{\mu\lambda}^T(k_1) + \xi P_{\mu\lambda}^L(k_1))(P_{\nu\kappa}^T(k_2) + \xi P_{\nu\kappa}^L(k_2)) + \\
 & + (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2) (2\pi)^D \delta(k'_1 + k'_2) \delta^{cd} \delta^{ef} \frac{1}{k_1^2 k_1'^2} \cdot \\
 & \cdot (P_{\mu\nu}^T(k_1) + \xi P_{\mu\nu}^L(k_1))(P_{\kappa\lambda}^T(k'_1) + \xi P_{\kappa\lambda}^L(k'_1)) \quad (\text{J.9})
 \end{aligned}$$

com fixação de gauge na ação.

Escrevemos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(k, \tau) = I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM}) + H_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab} \quad (\text{J.10})$$

onde $I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM})$ é a contribuição usual,

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM}) = & g f^{acd} f^{bcd} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \cdot \\
 & \cdot \{ (P_{\mu\kappa}^T(k_1) + \xi P_{\mu\kappa}^L(k_1))(P_{\nu\lambda}^T(k_2) + \xi P_{\nu\lambda}^L(k_2)) - \\
 & - (P_{\mu\lambda}^T(k_1) + \xi P_{\mu\lambda}^L(k_1))(P_{\nu\kappa}^T(k_2) + \xi P_{\nu\kappa}^L(k_2)) \} \quad , \quad (\text{J.11})
 \end{aligned}$$

e $H_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}$ o resto,

$$\begin{aligned}
 H_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab} = & g^2 f^{acd} f^{bcd} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \cdot \\
 & \cdot \{ \alpha \pi [\frac{P_{\mu\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} P_{\nu\lambda}^L(k_2) - \frac{P_{\mu\lambda}^T(k_1)}{k_1^2} P_{\nu\kappa}^L(k_2) + P_{\mu\kappa}^L(k_1) \frac{P_{\nu\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} - P_{\mu\lambda}^L(k_1) \frac{P_{\nu\kappa}^T(k_2)}{k_2^2}] +
 \end{aligned}$$

$$+ \xi \alpha \tau \left[\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right] + \alpha^2 \tau^2 \left[P_{\mu\kappa}^L(k_1) P_{\nu\lambda}^L(k_2) - P_{\mu\lambda}^L(k_1) P_{\nu\kappa}^L(k_2) \right] \quad \} \quad (J.12)$$

sem fixação de gauge e

$$H_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab} = 0 \quad (J.13)$$

fixando-o.

Passemos aos gráficos 0(g) de $\langle A_\nu^a(k, \tau) A_\kappa^e(k_1', \tau) A_\lambda^f(k_2', \tau) \rangle$

[Fig. 5.7b]:

$$\text{Fig. 5.7b} = -2g (2\pi)^D \delta(k + k_1 + k_2) V_{\xi\zeta\eta}^{aef}(k, k_1, k_2).$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \frac{P_{\nu\xi}^T(k)}{k^2} \frac{P_{\zeta\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} + \frac{P_{\nu\xi}^T(k)}{k^2} \frac{P_{\zeta\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} P_{\eta\lambda}^L(k_2) \right. \\ & \cdot \left[\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k^2+k_1^2} + \frac{\xi}{k_2^2} \right] + \frac{P_{\nu\xi}^T(k)}{k^2} P_{\zeta\kappa}^L(k_1) \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k^2+k_2^2} + \frac{\xi}{k_1^2} \right] + \\ & + \frac{P_{\nu\xi}^T(k)}{k^2} P_{\zeta\kappa}^L(k_1) P_{\eta\lambda}^L(k_2) \left[\alpha^2 \tau^2 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{k^2} \left(\tau - \frac{1}{k^2} \right) + \xi \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \right. \\ & \cdot \left. \left(\alpha\tau - \frac{1-\alpha}{k^2} \right) + \frac{\xi^2}{k_1^2 k_2^2} \right] + P_{\nu\xi}^L(k) \frac{P_{\zeta\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k_1^2+k_2^2} + \frac{\xi}{k^2} \right] + \\ & + P_{\nu\xi}^L(k) \frac{P_{\zeta\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} P_{\eta\lambda}^L(k_2) \left[\alpha^2 \tau^2 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{k_1^2} \left(\tau - \frac{1}{k_1^2} \right) + \xi \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \right. \\ & \cdot \left. \left(\alpha\tau - \frac{1-\alpha}{k_1^2} \right) + \frac{\xi}{k^2 k_2^2} \right] + P_{\nu\xi}^L(k) P_{\zeta\kappa}^L(k_1) \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha^2 \tau^2 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{k_2^2} \right. \\ & \cdot \left. \left(\alpha\tau - \frac{1-\alpha}{k_2^2} \right) + \frac{\xi}{k^2 k_1^2} \right] + P_{\nu\xi}^L(k) P_{\zeta\kappa}^L(k_1) \left(\tau - \frac{1}{k_2^2} \right) + \xi \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_1^2} \right) \left(\alpha\tau - \frac{1-\alpha}{k_2^2} \right) + \frac{\xi^2}{k^2 k_1^2} \right] + P_{\nu\xi}^L(k) P_{\zeta\kappa}^L(k_1) \end{aligned}$$

$$\cdot P_{\eta\lambda}^L(k_2) \left[\alpha^2 \tau^3 + \xi \tau^2 \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + \xi^2 \tau \left(\frac{1}{k^2 k_1^2} + \frac{1}{k_1^2 k_2^2} + \frac{1}{k^2 k_2^2} \right) \right] \}$$

(J.14)

sem fixar o gauge;

$$\text{Fig. 5.7b} = -2g (2\pi)^D \delta(k + k_1 + k_2) V_{\xi\zeta\eta}^{aef}(k, k_1, k_2) \frac{1}{k^2} (P_{\nu\xi}^T(k) + \xi P_{\nu\xi}^L(k)).$$

$$\cdot \frac{1}{k_1^2} (P_{\zeta\kappa}^T(k_1) + \xi P_{\zeta\kappa}^L(k_1)) \frac{1}{k_2^2} (P_{\eta\lambda}^T(k_2) + \xi P_{\eta\lambda}^L(k_2))$$

(J.15)

fixando-o.

Portanto

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I_{\nu\kappa\lambda}^{ab}(-k, \tau) = \frac{1}{k^2} (P_{\nu\xi}^T(k) + \xi P_{\nu\xi}^L(k)) A_{\xi\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM}) + \frac{P_{\nu\xi}^T(k)}{k^2} B_{\xi\kappa\lambda}^{ab} + P_{\nu\xi}^L(k) C_{\xi\kappa\lambda}^{ab}$$

(J.16)

onde $A_{\xi\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM})$ é a contribuição usual,

$$A_{\xi\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM}) = 2ig^2 f^{bef} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) V_{\xi\zeta\eta}^{aef}(k, -k_1, -k_2).$$

$$\cdot \frac{1}{k_1^2} (P_{\zeta\kappa}^T(k_1) + \xi P_{\zeta\kappa}^L(k_1)) \frac{1}{k_2^2} (P_{\eta\lambda}^T(k_2) + \xi P_{\eta\lambda}^L(k_2))$$

(J.17)

e $B_{\xi\kappa\lambda}^{ab}, C_{\xi\kappa\lambda}^{ab}$ os restos,

$$\begin{aligned}
B_{\xi\kappa\lambda}^{ab} = & 2ig^2 f^{bef} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) V_{\xi\zeta\eta}^{aef}(k, -k_1, -k_2) \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{P_{\xi\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} P_{\eta\lambda}^L(k_2) \left[\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k^2 + k_1^2} \right] + P_{\xi\kappa}^L(k_1) \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} \cdot \right. \\
& \cdot \left[\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k^2 + k_2^2} \right] + P_{\xi\kappa}^L(k_1) P_{\eta\lambda}^L(k_2) \left[\alpha^2 \tau^2 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{k^2} \left(\tau - \frac{1}{k^2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \xi \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) (\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k^2}) \right] \right\} \quad (J.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\xi\kappa\lambda}^{ab} = & 2ig^2 f^{bef} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) V_{\xi\zeta\eta}^{aef}(k, -k_1, -k_2) \\
& \cdot \left\{ \frac{P_{\xi\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k_1^2 + k_2^2} \right] + \right. \\
& + \frac{P_{\xi\kappa}^T(k_1)}{k_1^2} P_{\eta\lambda}^L(k_2) \left[\alpha^2 \tau^2 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{k_1^2} \left(\tau - \frac{1}{k_1^2} \right) + \xi \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k_1^2} \right) \right] + P_{\xi\kappa}^L(k_1) \frac{P_{\eta\lambda}^T(k_2)}{k_2^2} \left[\alpha^2 \tau^2 - \frac{2\alpha(\alpha-1)}{k_2^2} \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\tau - \frac{1}{k_2^2} \right) + \xi \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) (\alpha\tau - \frac{\alpha-1}{k_2^2}) \right] + P_{\xi\kappa}^L(k_1) P_{\eta\lambda}^L(k_2) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left[\alpha^2 \tau^3 + \xi \tau^2 \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right) + \xi^2 \tau \left(\frac{1}{k^2 k_1^2} + \frac{1}{k^2 k_2^2} + \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \right) \right] \right\} \quad (J.19)
\end{aligned}$$

sem fixar o gauge, e

$$B_{\xi\kappa\lambda}^{ab} = 0 \quad (J.20)$$

$$C_{\xi\kappa\lambda}^{ab} = 0 \quad (J.21)$$

fixando-o.

Podemos reescrever (J.18) utilizando

$$V_{\xi\zeta\eta}^{abc}(k, -k_1, -k_2) P_{\xi\eta}^T(k_1) P_{\eta\lambda}^L(k_2) = -\frac{i}{2} f^{abc} [(k^2 - k_1^2) P_{\xi\eta}^T(k_1) - k_\xi P_{\eta\alpha}^T(k_1) k_\alpha] \frac{k_{2\lambda}}{k_2^2} \quad (J.22)$$

$$V_{\xi\zeta\eta}^{abc}(k, -k_1, -k_2) P_{\xi\eta}^L(k_1) P_{\eta\lambda}^T(k_2) = \frac{i}{2} f^{abc} [(k^2 - k_2^2) P_{\xi\eta}^T(k_2) - k_\xi P_{\lambda\alpha}^T(k_2) k_\alpha] \frac{k_{1\eta}}{k_1^2} \quad (J.23)$$

$$V_{\xi\zeta\eta}^{abc}(k, -k_1, -k_2) P_{\xi\eta}^L(k_1) P_{\eta\lambda}^L(k_2) = -\frac{i}{2} f^{abc} [k^2 k_{1\xi} - (k \cdot k_1) k_\xi] \frac{k_{1\eta} k_{2\lambda}}{k_1^2 k_2^2} \quad (J.24)$$

Chegamos à

$$\begin{aligned} \frac{P_{\nu\rho}^T(k)}{k^2} B_{\rho\eta\lambda}^{ab} &= g^2 f^{ade} f^{bde} \frac{P_{\nu\rho}^T(k)}{k^2} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \cdot \\ &\cdot \{ b_{\rho\eta\lambda}^{ab}(\tau) + k_\lambda \bar{\Xi}_{\rho\rho'} \frac{P_{\rho'\eta}^T(k)}{k^2} + J_{\rho\eta\lambda} - k_\eta \bar{\Xi}_{\rho\rho'} \frac{P_{\rho'\lambda}^T(k)}{k^2} - J_{\rho\lambda\eta} \} \end{aligned} \quad (J.25)$$

$$\begin{aligned} b_{\rho\eta\lambda}^{ab}(\tau) &= \alpha^2 \tau^2 k^2 k_{1\rho} k_{1\eta} k_{2\lambda} + \alpha \tau [(k^2 - k_1^2) (k_{2\lambda} P_{\rho\eta}^T(k_1) - k_{2\eta} P_{\rho\lambda}^T(k_1)) + \\ &- 2(\alpha - 1) k_{1\rho} k_{1\eta} k_{2\lambda}] \end{aligned} \quad (J.26)$$

$$\bar{\Xi}_{\rho\rho'} = (\alpha - 1) \{ P_{\rho\rho'}^T(k_1) k^2 [-1 + \frac{2k_1^2}{k^2 + k_1^2}] + \alpha k_1^2 P_{\rho\rho'}^L(k_1) \} \quad (J.27)$$

$$J_{\rho\eta\lambda} = (\alpha - 1) \delta_{\rho\eta} \frac{k^2 - k_1^2}{k^2 + k_1^2} k_{1\lambda} \quad (J.28)$$

no gauge de Landau.

Por outro lado $\bar{D}_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau, \tau)$ é obtido somando $D_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau, \tau)$ aos termos advindos da polarização [Ap. I].

Agora somamos todas as contribuições (J.10), (J.16), (5.38) e (5.51) em (J.2):

$$\langle F_{\mu\nu}^a(k, \tau) F_{\kappa\lambda}^b(k', \tau) \rangle = (2\pi)^D \delta(k+k').$$

$$\cdot \{ \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\tau^2) + \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\tau) + \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{FTh}) + \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{Res}) \} \quad (\text{J.29})$$

onde

$$\Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{FTh}) = k_\mu k_\kappa \left[\delta_{\nu\lambda}^{ab} \frac{P_{\nu\lambda}^T(k)}{k^2} + \frac{P_{\nu\rho}^T(k)}{k^2} (\pi_{\rho\rho'}^{ab}(\text{YM}) + \pi_{\rho\rho'}^{ab}(\text{FP})) \frac{P_{\rho'\lambda}^T(k)}{k^2} \right] +$$

$$\begin{aligned} & - (\mu \leftrightarrow \nu) - (\kappa \leftrightarrow \lambda) + \begin{pmatrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ \kappa \leftrightarrow \lambda \end{pmatrix} + \\ & + k_\mu \left[\frac{P_{\nu\xi}^T(k)}{k^2} A_{\xi\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM}) \right] - (\mu \leftrightarrow \nu) + \begin{pmatrix} \mu \leftrightarrow \kappa \\ \nu \leftrightarrow \lambda \\ \kappa \rightarrow -k \\ a \leftrightarrow b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \rightarrow \lambda \\ \kappa \rightarrow \mu \\ \lambda \rightarrow \nu \\ \nu \rightarrow \kappa \\ \kappa \rightarrow -k \\ a \leftrightarrow b \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ I_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{YM}) + O(g^3) \quad (\text{J.30})$$

é o resultado usual. Este é o único termo quando partimos da ação de Fadeev - Popov. Quando, entretanto, partimos da ação invariante de gauge, uma álgebra longa resulta em termos em τ^2 que se cancelam,

$$\Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\tau^2) = 0, \quad (\text{J.31})$$

mais termos em τ ,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\tau) = & g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) \frac{\alpha\tau}{k^2 k_1^2 k_2^2} \cdot \\ & \cdot \{ \delta_{\mu\kappa} [k^2 k_{1\nu} k_{1\lambda} - k_1^2 k_{\nu\lambda} + (k^2 - k_1^2)(k_{\nu} k_{1\lambda} + k_{\lambda} k_{1\nu}) + \\ & + \frac{k_{\nu} k_{\lambda}}{k^2} (- (k^2)^2 + (k_1^2)^2 - k_1^2 k_2^2 + k^2 k_1^2)] + \frac{\alpha-2}{2} k_{1\nu} k_{2\mu} k_{1\lambda} k_{2\kappa} + \\ & - (\mu \leftrightarrow \nu) - (\kappa \leftrightarrow \lambda) + \left(\begin{matrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ \kappa \leftrightarrow \lambda \end{matrix} \right) \} \quad , \end{aligned} \quad (J.32)$$

e mais termos que não dependem de τ ,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu\kappa\lambda}^{ab}(\text{Res}) = & g^2 f^{ade} f^{bde} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k-k_1-k_2) \frac{1}{k^2 k_1^2 k_2^2} \cdot \\ & \cdot \{ \frac{k_{\mu} k_{\kappa}}{2k^2} \left[\frac{1}{k^2} (-\alpha(k_1^2)^2 + \alpha k_1^2 k_2^2 + 2k^2 k_1^2 + (\alpha-2)(k^2)^2) \delta_{\nu\lambda} + \right. \\ & - (\alpha-2) \frac{k^2 + \frac{\alpha}{2} k_1^2}{k_1^2} k_{1\nu} k_{1\lambda} \left. \right] - (\alpha-1) \frac{k^2 - k_1^2}{k^2 + k_1^2} \delta_{\mu\kappa} (k_{\nu} k_{1\lambda} + k_{\lambda} k_{1\nu}) + \\ & - (\mu \leftrightarrow \nu) - (\kappa \leftrightarrow \lambda) + \left(\begin{matrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ \kappa \leftrightarrow \lambda \end{matrix} \right) \} \quad . \end{aligned} \quad (J.33)$$

Neste ponto integramos sobre k e utilizamos propriedades de simetria,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} f(k, k_1) g(k, k_1) = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1) \\ g(k_1, k_2) = -g(k_2, k_1) \end{cases} , \quad (J.34)$$

para obter a quantidade covariante de gauge $\langle F_{\mu\nu}^a(x) F_{\rho\sigma}^b(x) \rangle$ exibida no texto.

APÊNDICE K

ALGUMAS INTEGRAIS

Listamos aqui as integrais necessárias quando utilizamos a regularização dimensional [0.10].

Integrais massivas ($m^2 \neq 0$):

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (m^2 - k^2)^{\alpha - D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (K.1)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{-k_\mu}{(4\pi)^{D/2} (m^2 - k^2)^{\alpha - D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (K.2)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (m^2 - k^2)^{\alpha - D/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot [\Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) k_\mu k_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (m^2 - k^2) \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)] \quad (K.3)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{-1}{(4\pi)^{D/2} (m^2 - k^2)^{\alpha - D/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot [\Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) k_\mu k_\nu k_\rho + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\rho} k_\nu + \delta_{\nu\rho} k_\mu + \delta_{\mu\nu} k_\rho) (m^2 - k^2) \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)] \quad (K.4)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma}{(p^2 + 2kp + m^2)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (m^2 - k^2)^{\alpha - D/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot [\Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} k_\rho k_\sigma + \delta_{\nu\sigma} k_\rho k_\mu + \delta_{\rho\sigma} k_\mu k_\nu + \delta_{\mu\rho} k_\nu k_\sigma + \delta_{\nu\rho} k_\mu k_\sigma + \delta_{\mu\sigma} k_\rho k_\nu) (m^2 - k^2) \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1) + \frac{1}{4} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) (m^2 - k^2)^2 \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 2)] \quad (K.5)$$

Integrais sem massa:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2(p-k)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2})\Gamma^2(\frac{D}{2}-1)}{\Gamma(D-2)} (k^2)^{D/2-2} \equiv I \quad (K.6)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu}{p^2(p-k)^2} = \frac{1}{2} k_\mu I \quad (K.7)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2(p-k)^2} = -\frac{k^2}{4(D-1)} \left(\delta_{\mu\nu} - D \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) I \quad (K.8)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho}{p^2(p-k)^2} = -\frac{k^2}{8(D-1)} \left(\delta_{\mu\nu} k_\rho + \delta_{\nu\rho} k_\mu + \delta_{\mu\rho} k_\nu - (D+2) \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{k^2} \right) I \quad (K.9)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma}{p^2(p-k)^2} &= \frac{(k^2)^2}{16(D^2-1)} \left[\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\rho\nu} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\sigma\nu} \right] + \\ &- (D+2) \left(\delta_{\mu\nu} \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} + \delta_{\nu\rho} \frac{k_\mu k_\sigma}{k^2} + \delta_{\nu\sigma} \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} + \delta_{\mu\rho} \frac{k_\nu k_\sigma}{k^2} \right. \\ &\left. + \delta_{\mu\sigma} \frac{k_\nu k_\rho}{k^2} + \delta_{\rho\sigma} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + (D+2)(D+4) \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{k^2} \Big] I \quad (K.10) \end{aligned}$$

conjectura de 't Hooft - Veltman: $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (k^2)^{\beta-1} = 0$ (D, β complexos)

(K.11)

REFERÊNCIAS

Introdução

- [0.1] Veja, p.ex., P.A.M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", 4ª edição, Oxford, London (1978)
- [0.2] P.A.M. Dirac, Phys. Zeit. der Sowjetunion, Band 3, Heft 1 (1933)
R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 267
- [0.3] P.A.M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Yeshiva University, New York (1964)
- [0.4] J. Goldstone, R.Jackiw, Phys. Lett. 74B (1978) 81
- [0.5] S.N. Gupta, Proc. Phys. Soc. 63A (1950) 681
K. Bleuler, Helv. Phys. Acta 23 (1950) 567
- [0.6] R.P. Feynman, Acta Phys. Pol. 24 (1963) 262
- [0.7] B.S. de Witt, "Relativity, Groups and Topology", Blackie and Son, London (1964)
B.S. de Witt, Phys. Rev. 160 (1967) 1113; 162 (1967) 1195, 1293
- [0.8] V.N. Popov, L.D. Fadeev, Kiev Report ITP 67-36 (1967)
[English translation edited by D.Gordon and B.W. Lee, NAL-THY-57 (1972)]
L.D. Fadeev, V.N. Popov, Phys. Lett. 25B (1967) 29
- [0.9] T. Kugo, S.Uehara, Nucl. Phys. B197 (1982) 378
L. Baulieu, J. Thierry-Mieg, Nucl. Phys. B197 (1982) 477
- [0.10] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189
C.G. Bollini, J.J. Giambiagi, Nuovo Cimento 12B (1972) 20
J.F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. 4 (1972) 289
Para uma revisão veja
G. Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 849
- [0.11] A.A. Slavnov, Theor. Math. Phys. 33 (1977) 977
L.D. Fadeev, A.A. Slavnov, "Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory", Benjamin/Cummings, Reading (1980)
- [0.12] V.N. Gribov, Lecture at the 12th Winter School of the Leningrad Nuclear Physics Institute, 1977 [English translation edited by H.D.I. Abarbanel, SLAC-TRANS-176]
V.N. Gribov, Nucl Phys. B139 (1978) 1

Capítulo I

- [1.1] S.-K. Ma, "Modern Theory of Critical Phenomena", W.A. Benjamin, Reading (1976)
A.Z. Patashinskiĭ, V.L. Pokrovskiĭ, "Fluctuation Theory of Phase Transitions", Pergamon, Oxford (1979)
- [1.2] J.B. Kogut, Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 659
- [1.3] P.C. Hohenberg, B.I. Halperin, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 435
- [1.4] G. Parisi, Wu Yongshi, Sci. Sin. 24 (1981) 483
- [1.5] Algumas revisões disponíveis são:
J.R. Klauder, Acta Phys. Aust. Suppl. 25 (1983) 251
B. Sakita, "Stochastic Quantization" [in R. Ramachandran (ed.), "Recent Advances in Theoretical Physics", World Scientific, Singapore (1985)]
A.A. Migdal, Sov. Phys. Usp. 29 (1986) 389
P.H. Damgaard, H. Hüffel, Preprint CERN (1987) - to appear in Phys. Rep. C.

Capítulo II

- [2.1] W. Grimus, H. Hüffel, Z. Phys. C18 (1983) 129
- [2.2] A. González-Arroyo, Lect. Notes in Phys. 216 (1985) 171
- [2.3] H. Nakazato, M. Namiki, I. Ohba, K. Okano, Prog. Theor. Phys. 70 (1983) 298
- [2.4] S. Chaturdevi, A.K. Kapoor, V. Srinivasan, Phys. Rev. D34 (1986) 3846
- [2.5] Z. Bern. M.B. Halpern, L. Sadun, C. Taubes, Nucl. Phys. B284 (1987) 1
- [2.6] C.R. Doering, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 1657
- [2.7] J.D. Breit, S. Gupta, A. Zaks, Nucl. Phys. B233 (1984) 61
- [2.8] J. Alfaro, Nucl. Phys. B253 (1985) 464

Capítulo III

- [3.1] B.M. Pimentel, U.L. van Kolck, Preprint IFT/P-17/87 (1987)
- [3.2] M. Namiki, I. Ohba, K. Okano, Y. Yamanaka, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1580

Capítulo IV

- [4.1] Y. Kakudo, Y. Taguchi, A. Tanaka, K. Yamamoto, Prog.Theor. Phys. 69 (1983) 1225
T. Fukai, H. Nakazato, I. Ohba, K. Okano, Y. Yamanaka, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1600
P.H. Damgaard, K. Tsokos, Nucl. Phys. B235 [FS11] (1984) 75
- [4.2] M. Horibe, A. Hosoya, J. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. 70 (1983) 1636
- [4.3] C. Itzykson, J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, Singapore (1986)
P. Ramond, "Field Theory, A Modern Primer", Benjamin/Cummings, Reading (1981)
- [4.4] E. Abdalla, M. Gomes, M.C.B. Abdalla, A. Lima-Santos, Preprint IFUSP/P-585 (Revised Version) (1987)
- [4.5] Z. Bern, Nucl. Phys. B251 (1985) 633
- [4.6] Z. Bern, M.B. Halpern, Phys. Rev. D33 (1986) 1184
- [4.7] Z. Bern, M.B. Halpern, L. Sadun, C. Taubes, Nucl. Phys. B284 (1987) 35

Capítulo V

- [5.1] D. Zwanziger, Nucl. Phys. B192 (1981) 259
L. Baulieu, D. Zwanziger, Nucl. Phys. B193 (1981) 163
- [5.2] H. Nakagoshi, M. Namiki, I. Ohba, K. Okano, Prog. Theor. Phys. 70 (1983) 326
- [5.3] B.M. Pimentel, A.T. Suzuki, U.L. van Kolck, Preprint em preparação
- [5.4] A. González-Arroyo, C.P. Martin, Nucl. Phys. B286 (1987) 306

Capítulo VI

- [6.1] J. Alfaro, R. Iengo, N. Parga, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 369

Apêndice A

- [A.1] F. Reif, "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics" McGraw-Hill, New York (1965)
- [A.2] N.G. van Kampen, "Stochastic Processes in Physics and Chemistry", North-Holland, Amsterdam (1981)
- [A.3] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, "Statistical Physics II, Nonequilibrium Statistical Mechanics", Springer-Verlag, Berlin (1985)
- [A.4] R. Kubo, Rep. Prog. Phys. 26 (1966) 255
- [A.5] R. F. Fox, Phys. Rep. 48 (1978) 179
- [A.6] M. C. Wang, G.E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys. 17 (1945) 323
- [A.7] B. Mühlischlegel, "Path Integral Associated with the Fokker-Planck Equation"[in G.J. Papadopoulos, J.T. Devreese, "Path Integrals and Their Applications in Quantum, Statistical, and Solid-State Physics", Plenum, New York, (1978)]
- [A.8] A. Einstein, "Investigations on the Theory of Brownian Movement", Methuen, London (1926)

Apêndice C

- [C.1] M. Namiki, Y. Yamanaka, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1764
- [C.2] E. Gozzi, Phys. Rev. D28 (1983) 1922
- [C.3] S. Chaturdevi, A.K. Kapoor, V. Srinivasan, Z. Phys. B57 (1984) 249
- [C.4] E. Gozzi, Phys. Lett. 130B (1983) 183
- [C.5] E. Gozzi, Phys. Rev. D31 (1985) 1349

Apêndice H

- [H.1] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products", Academic Press, New York (1965)

FIGURAS

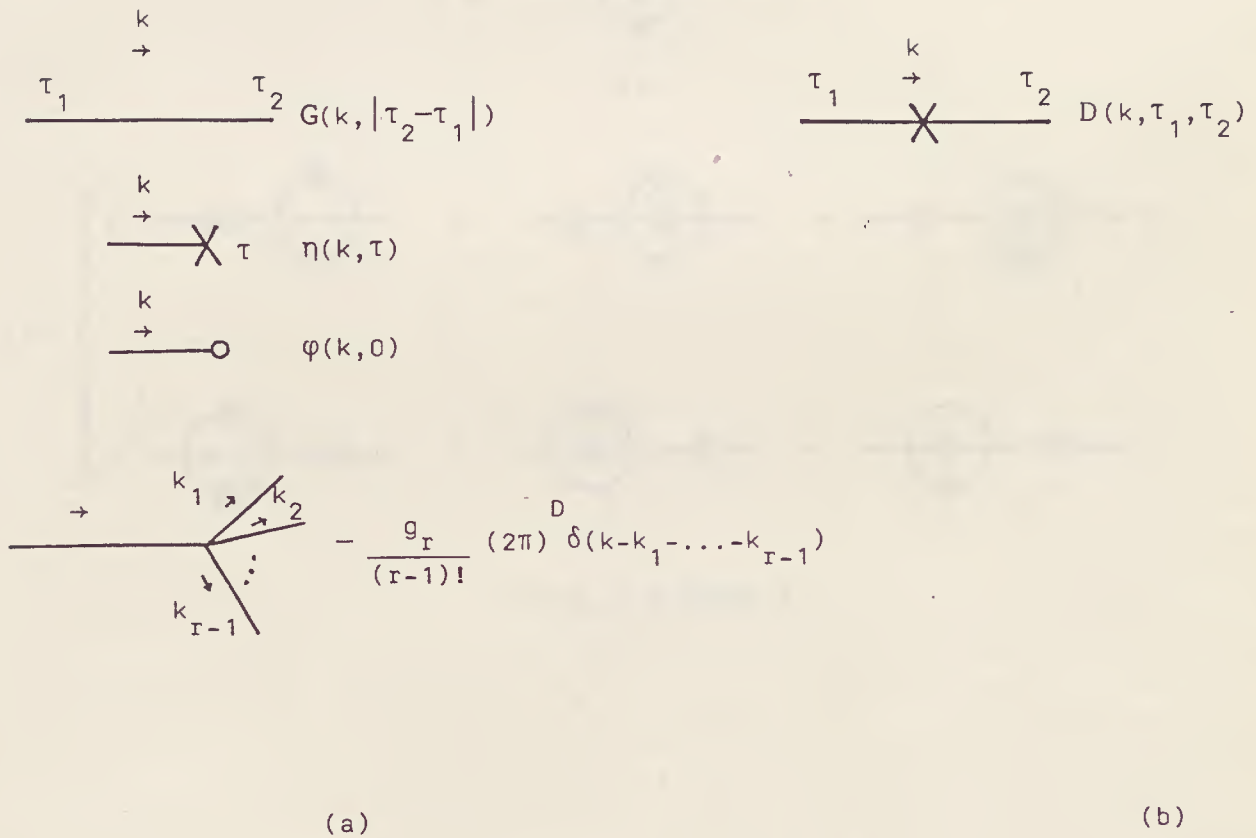


Fig. 2.1

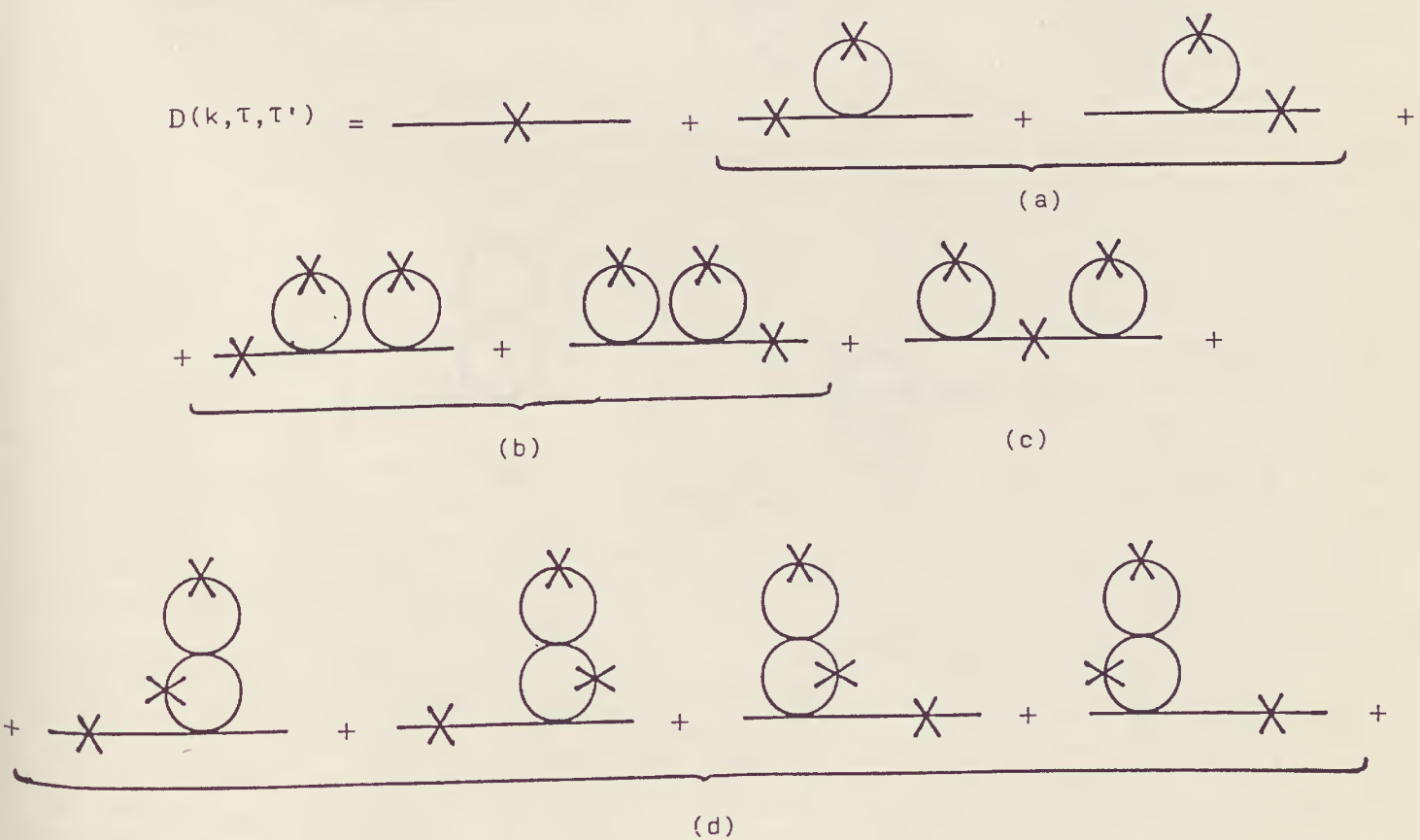


Fig. 2.2

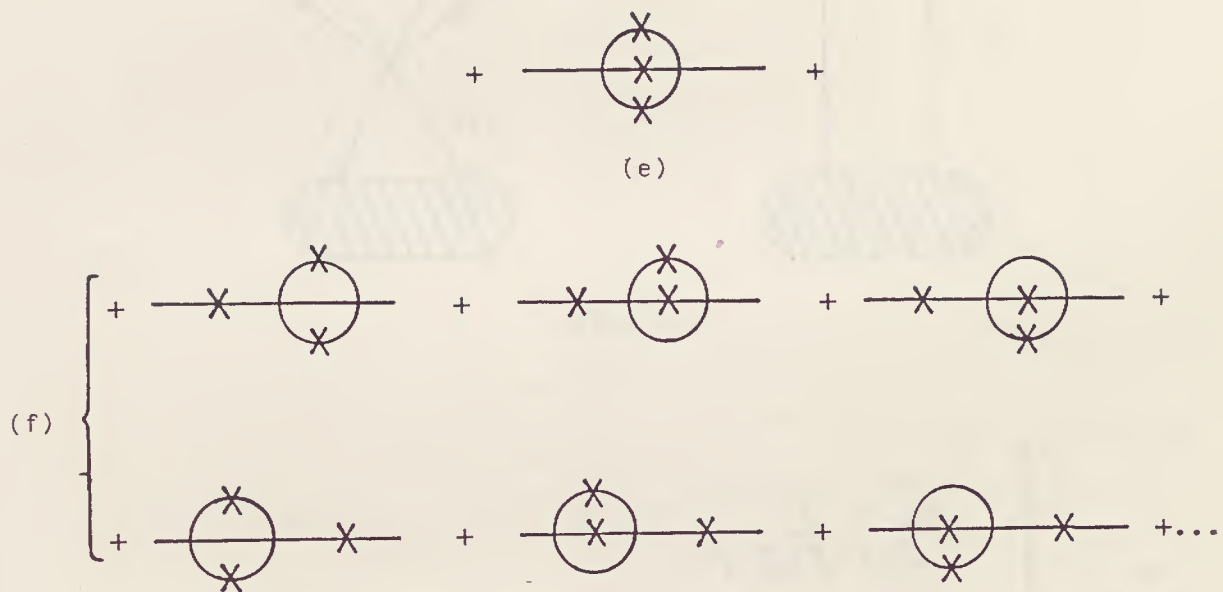


Fig. 2.2 (cont.)

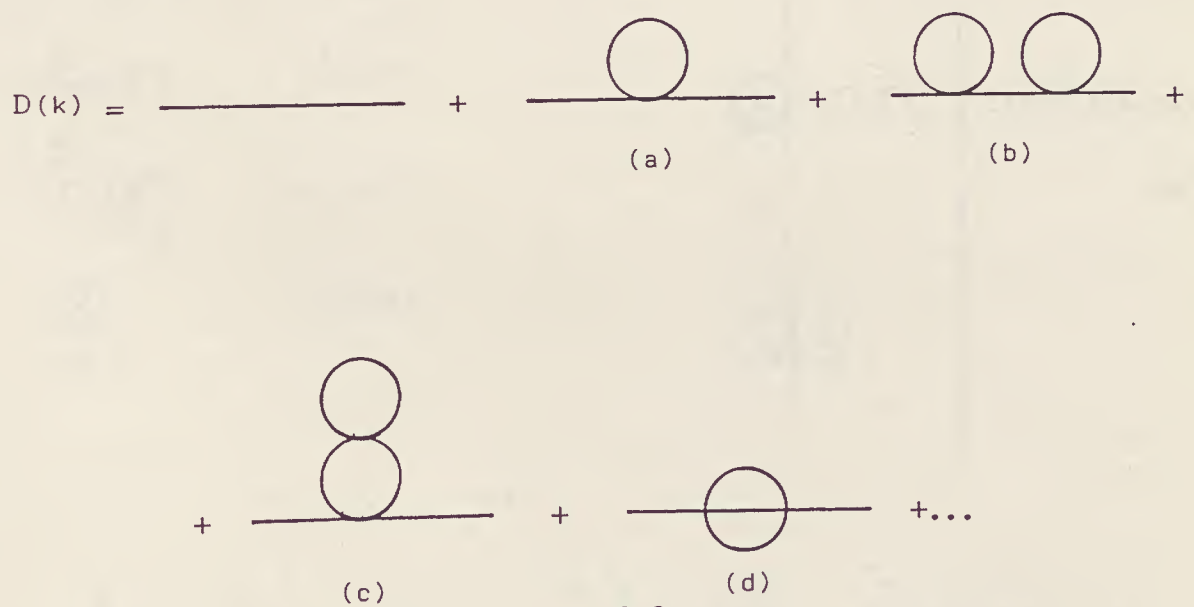


Fig. 2.3

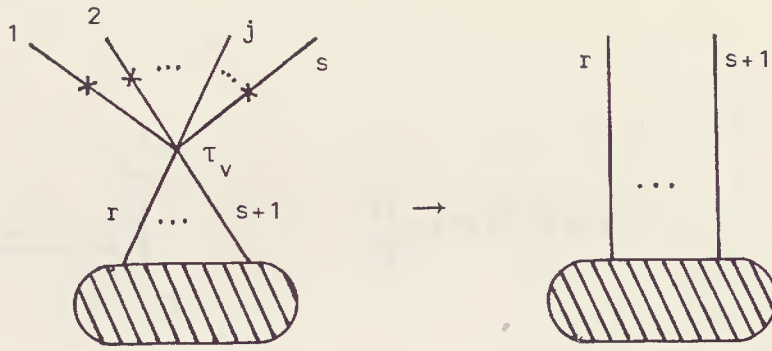
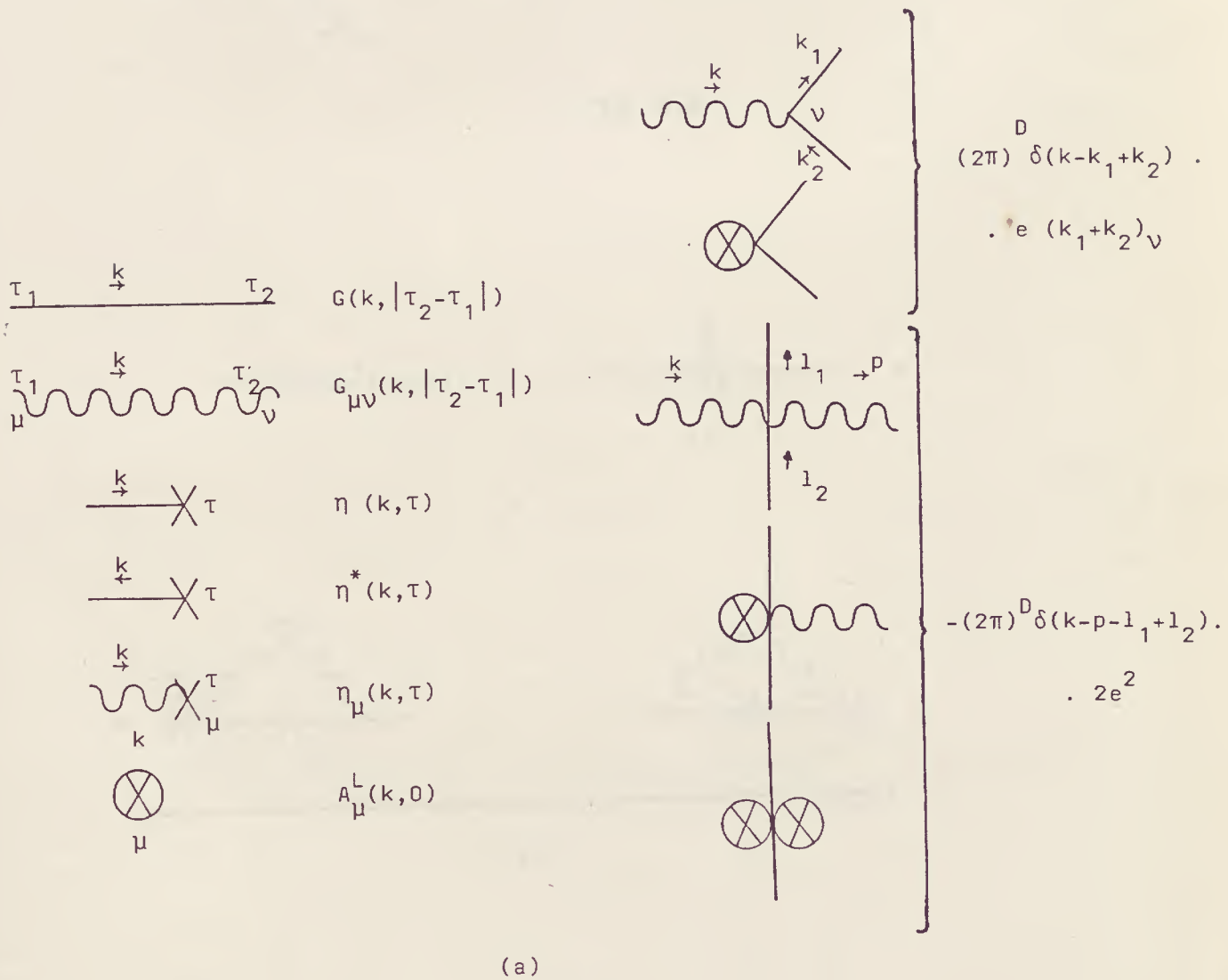
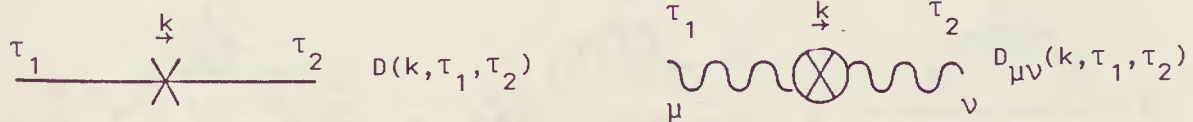


Fig. 2.4

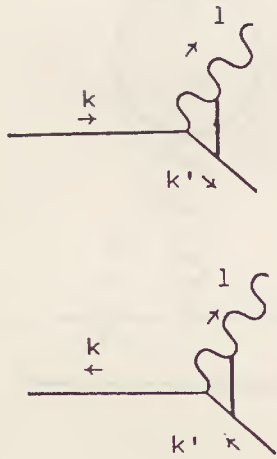


(a)



(b)

Fig. 4.1



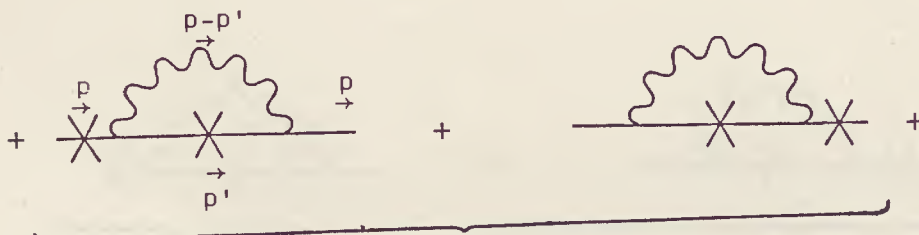
$$: - \frac{e l \mu}{\xi'} (2\pi)^D \delta(k - k' - 1)$$

$$: \frac{e l \mu}{\xi'} (2\pi)^D \delta(k - k' + 1)$$

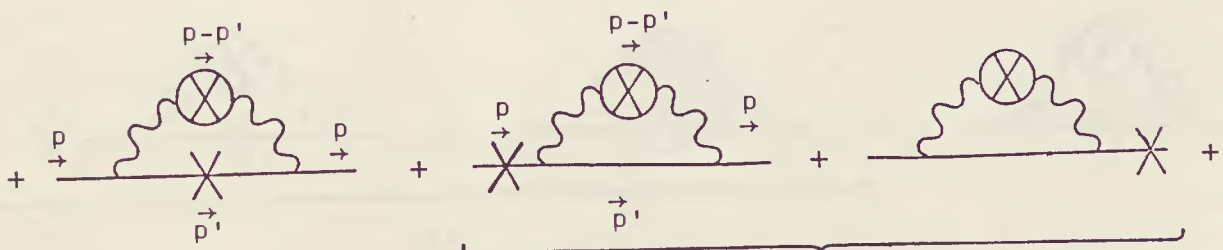
Fig. 4.2

$$\langle \varphi(p, \tau) \varphi^*(p, \tau') \rangle = \text{---} \overline{\text{X}} \text{---} +$$

(a)



(b)



(c) (d)

Fig. 4.3

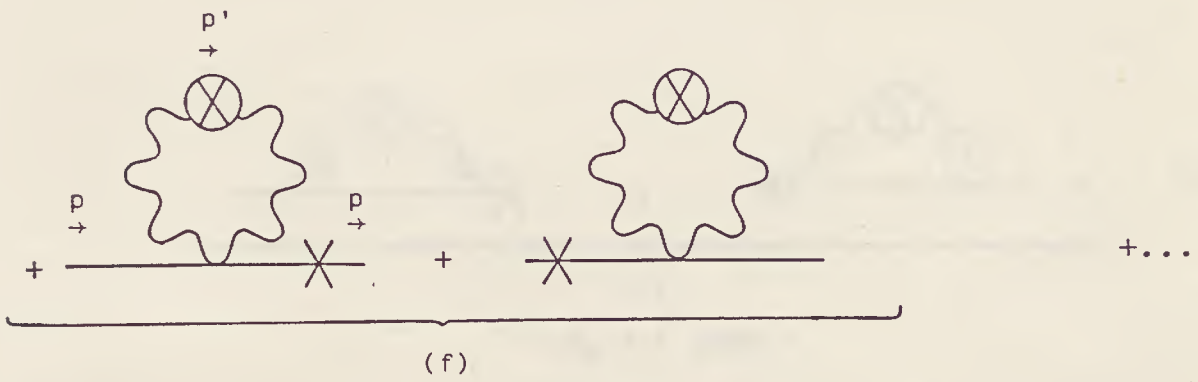
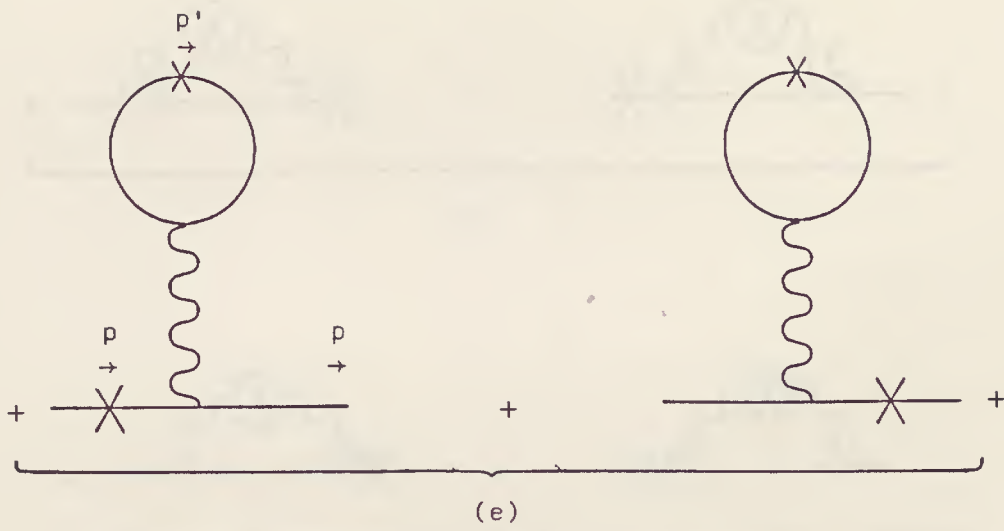


Fig. 4.3 (cont.)

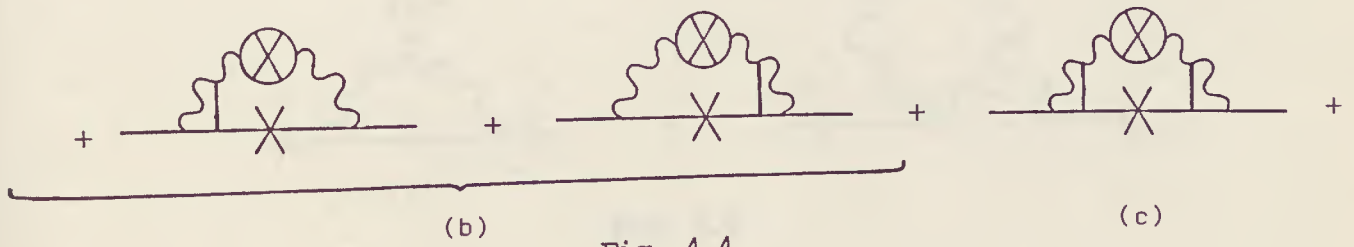
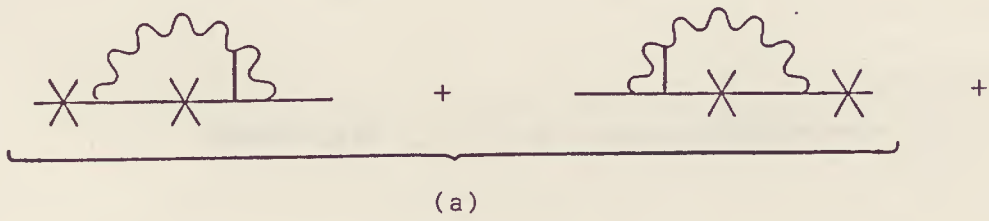


Fig. 4.4

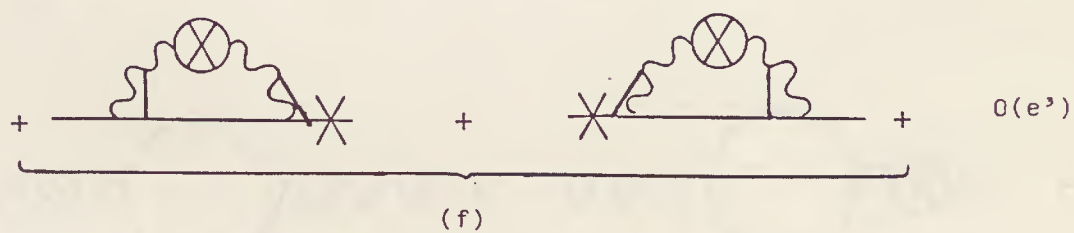
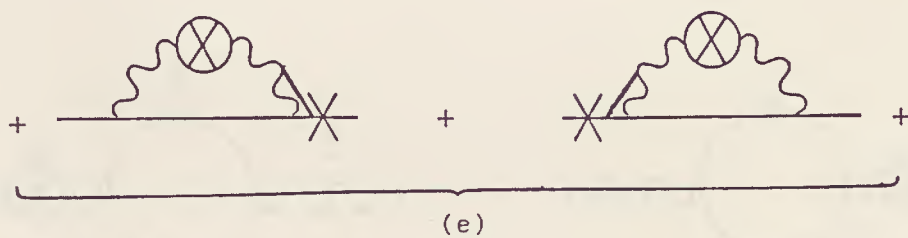
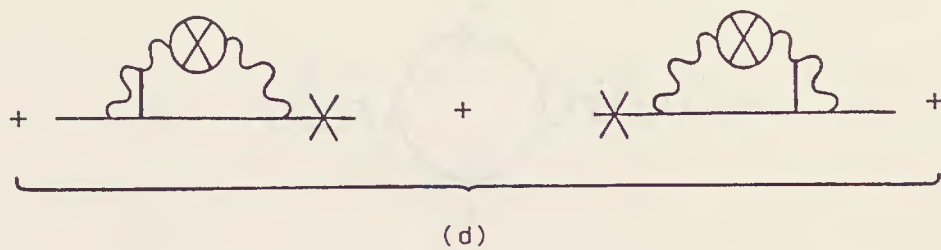
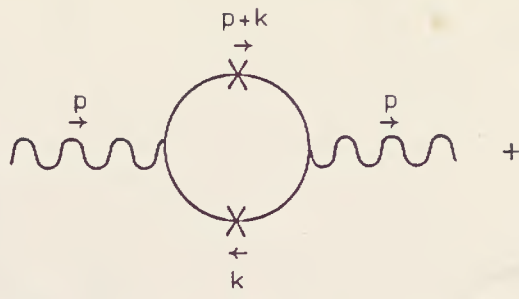


Fig. 4.4 (cont.)

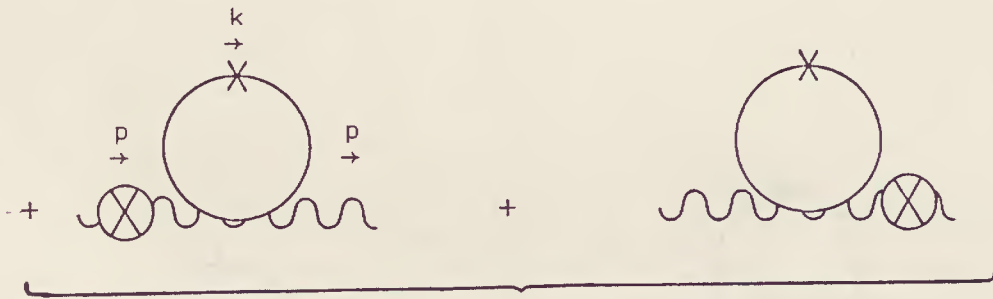
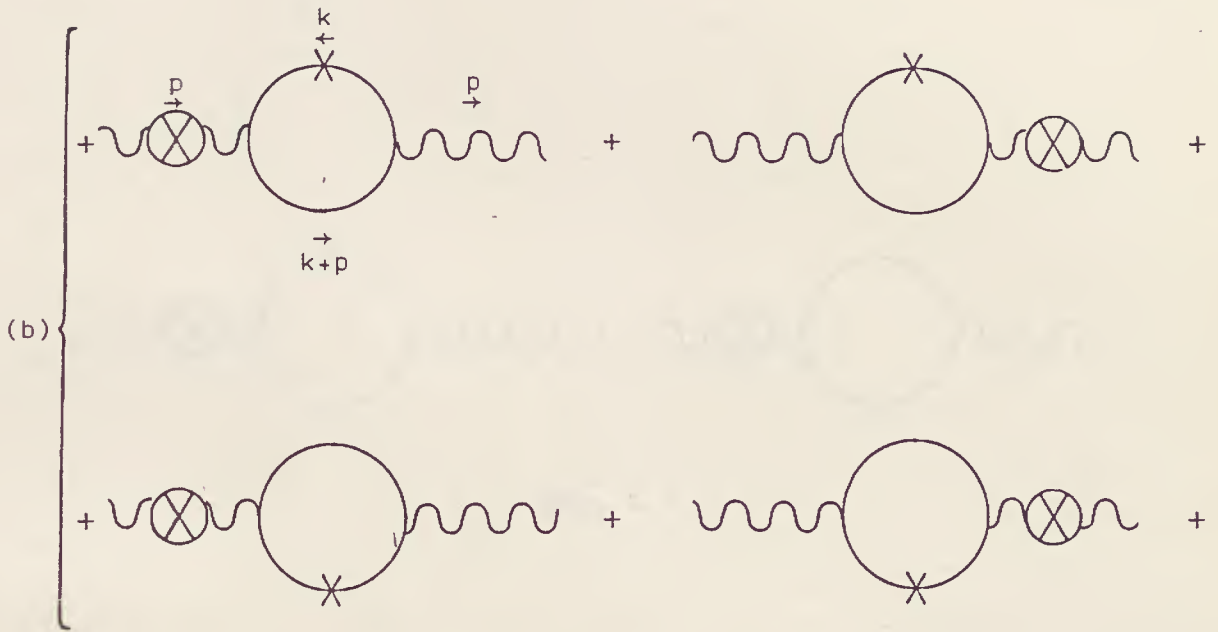
$$\langle \varphi(p) \varphi^*(p) \rangle = \text{---} \overbrace{\text{---}}^p \text{---} +$$

$$\begin{array}{c} p-p' \\ \rightarrow \\ \text{---} \overbrace{\text{---}}^p \text{---} \\ p' \end{array} + \begin{array}{c} p-p' \\ \rightarrow \\ \text{---} \overbrace{\text{---}}^p \text{---} \\ p \end{array} + \dots$$

Fig. 4.5



(a)



(c)

Fig. 4.6

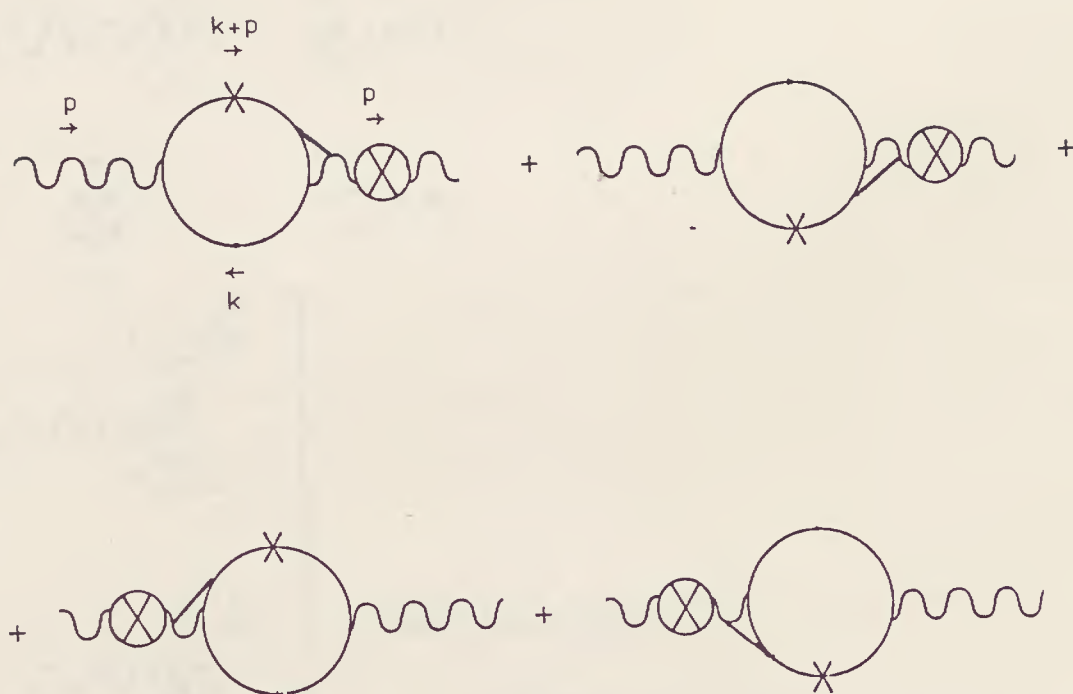


Fig. 4.7

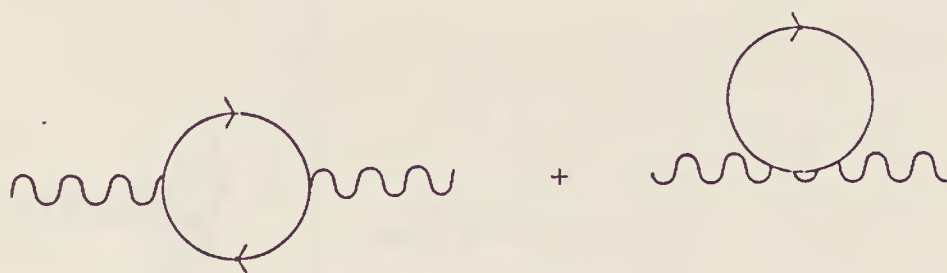


Fig. 4.8

$$\tau \begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} b \\ \nu \end{array} \tau' \quad G_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau - \tau')$$

$$\tau \begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} b \\ \nu \end{array} \tau' \quad D_{\mu\nu}^{ab}(k, \tau, \tau')$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \tau \quad \eta_{\mu}^a(k, \tau)$$

$$\begin{array}{c} k \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \mu a \end{array} \quad A_{\mu}^a(k, 0)$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} b \\ \kappa \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} c \\ \lambda \end{array} \begin{array}{c} k_2 \\ \searrow \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array}$$

$$-(2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2) \cdot$$

$$\cdot g V_{\mu\kappa\lambda}^{abc}(k, -k_1, -k_2).$$

$$\begin{array}{c} a \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} b \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} k_1 \\ \nearrow \end{array} \begin{array}{c} c \\ \kappa \end{array} \begin{array}{c} k_2 \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} d \\ \lambda \end{array} \begin{array}{c} k_3 \\ \searrow \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \end{array}$$

$$(2\pi)^D \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \cdot$$

$$\cdot g^2 W_{\mu\nu\kappa\lambda}^{abcd}$$

(a)

(b)

Fig. 5.1

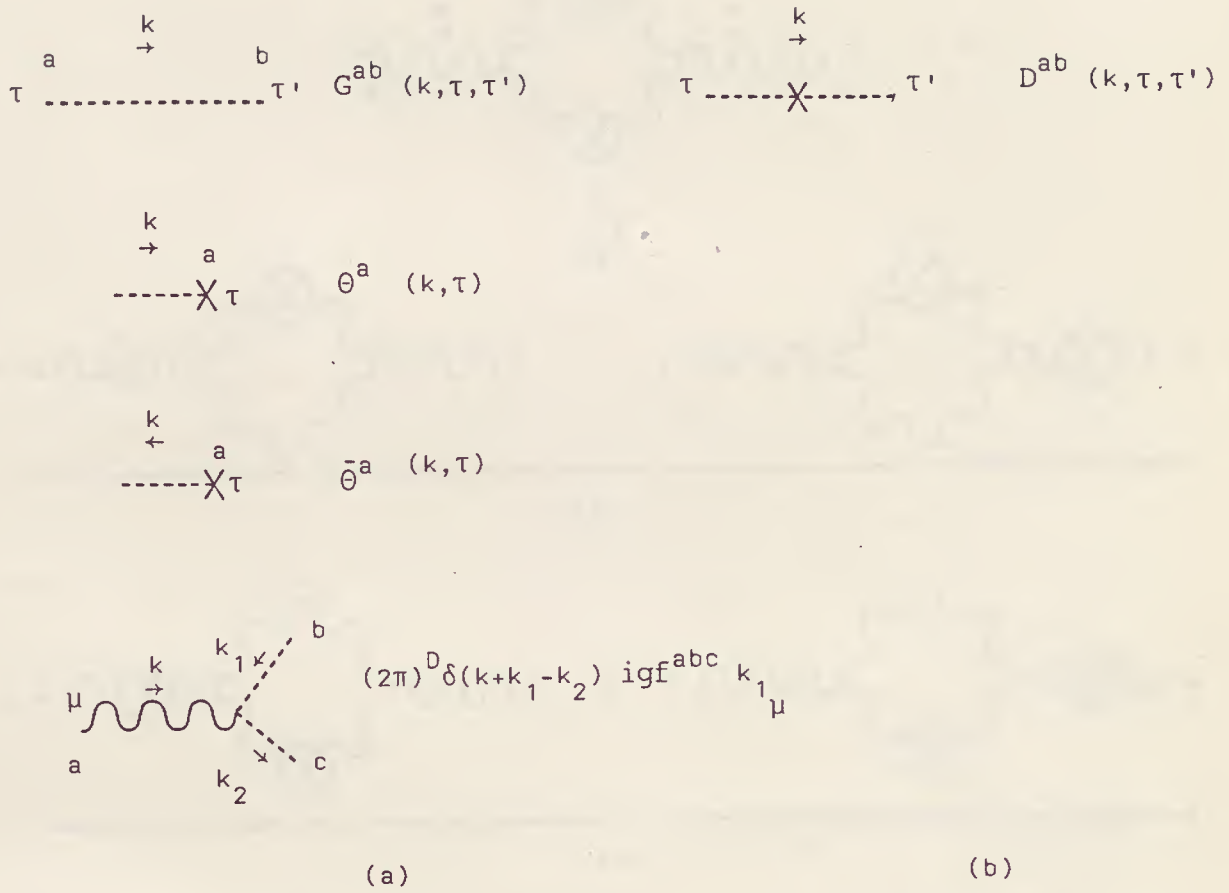


Fig. 5.2

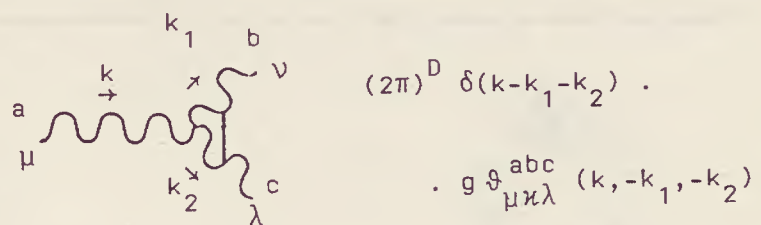


Fig. 5.3

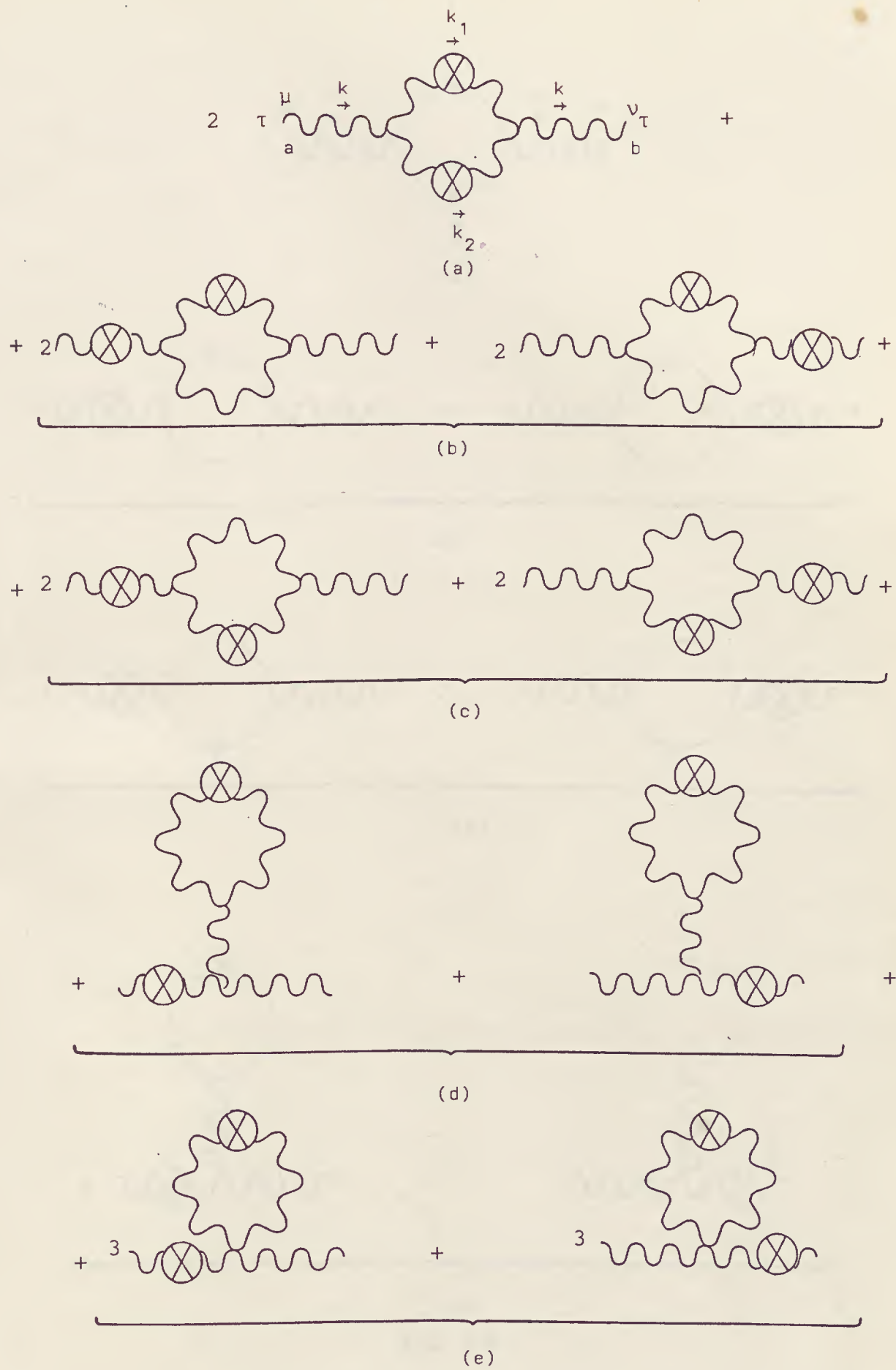


Fig. 5.4

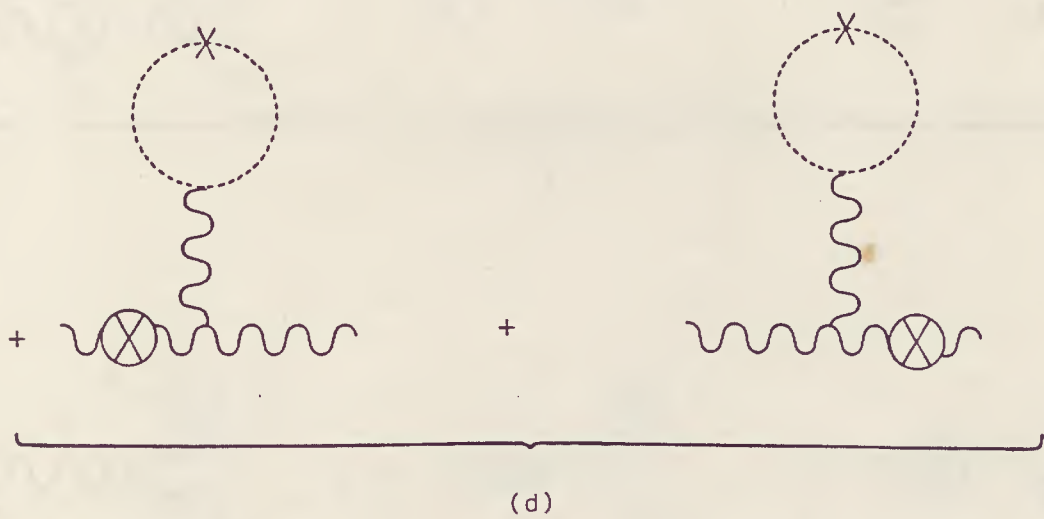
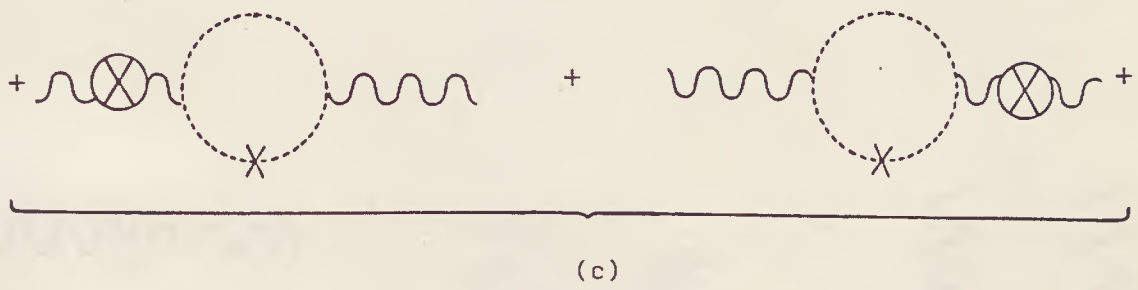
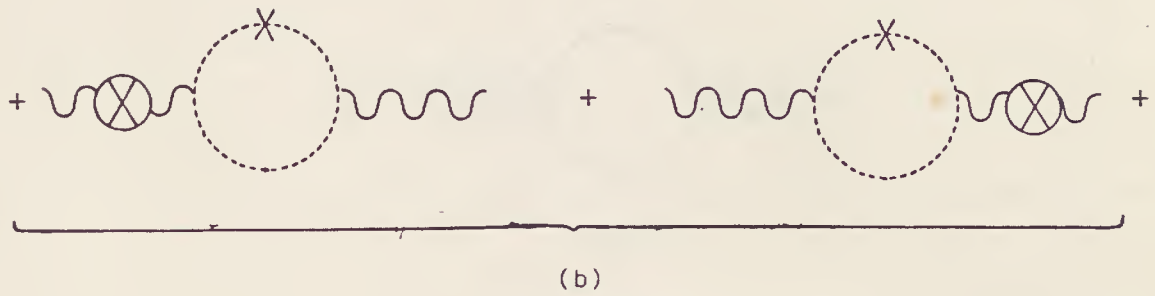
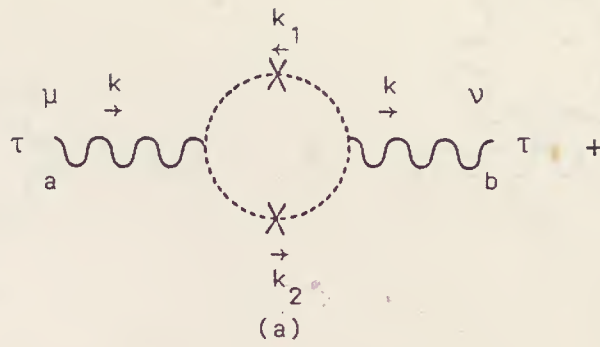


Fig. 5.5

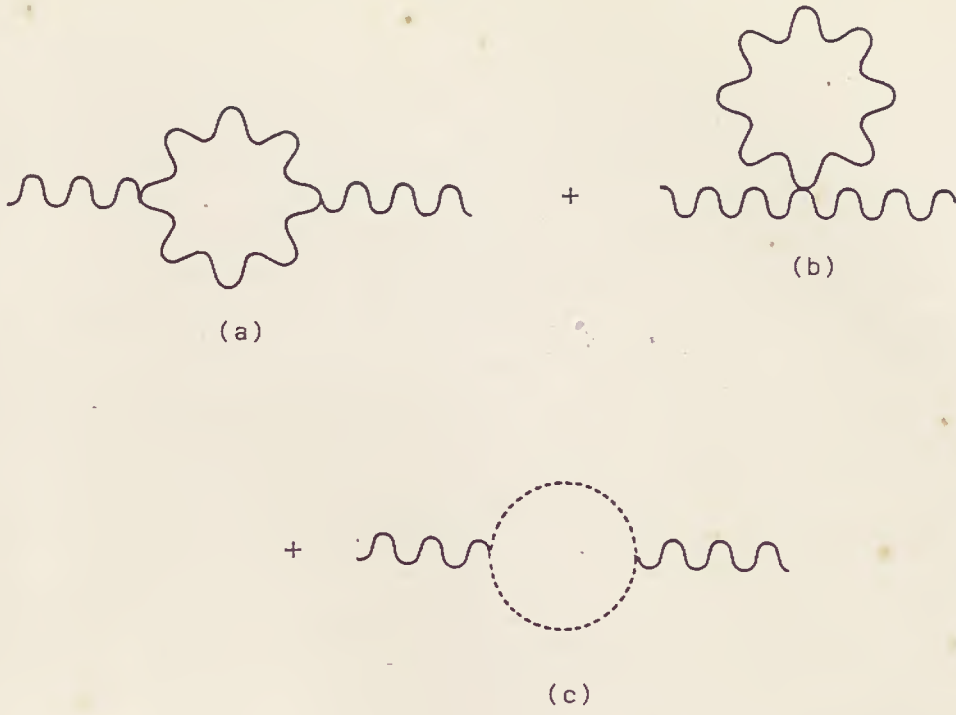


Fig. 5.6

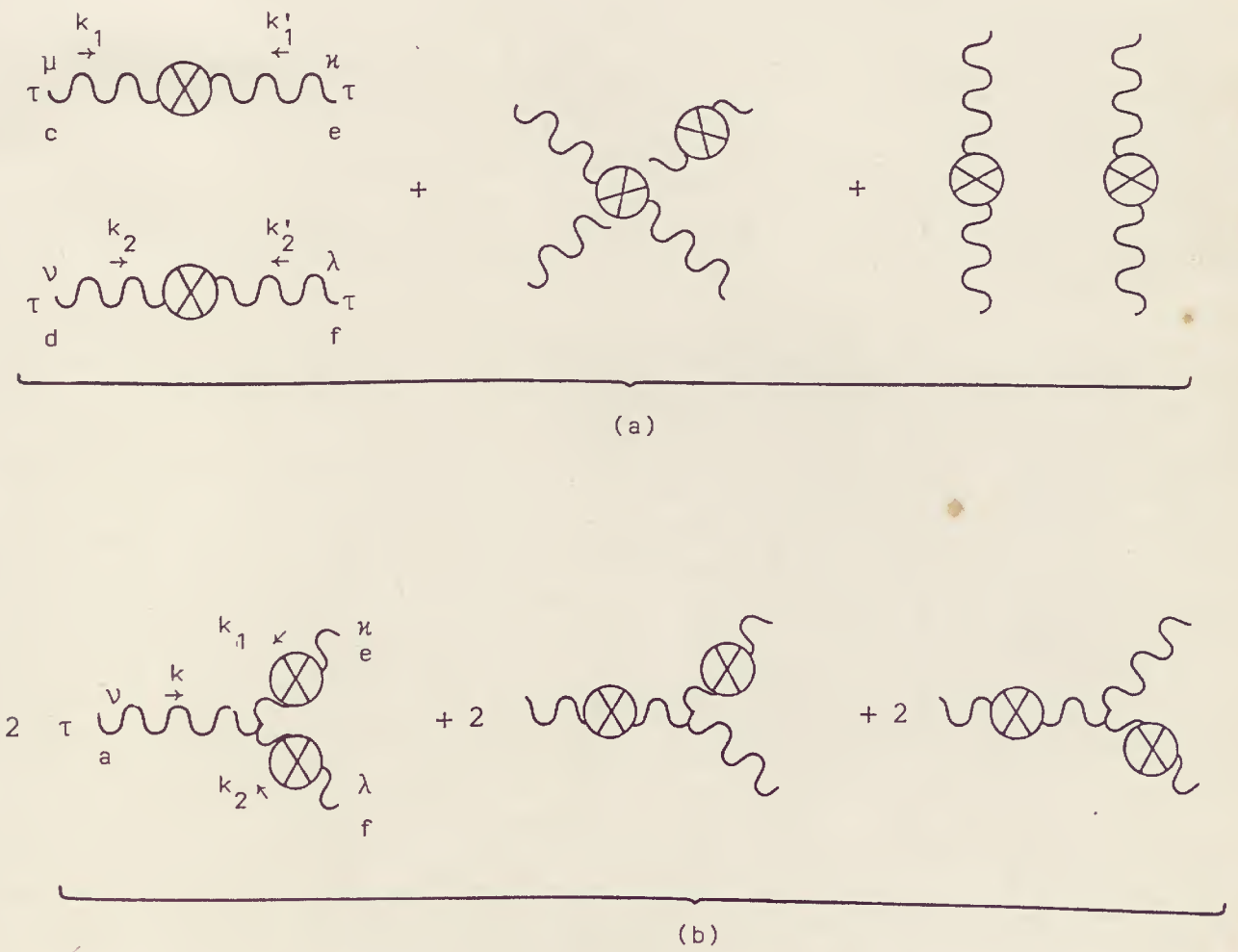


Fig. 5.7

