

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

UM ESTUDO DE TRANSIÇÃO DE FASES EM SISTEMAS DINÂMICOS

Lucas Kenji Arima Miranda

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro (SP)

2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Lucas Kenji Arima Miranda

Um estudo de transição de fases em sistemas dinâmicos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física. **Orientador:** Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

Rio Claro - SP

2021

M672e Miranda, Lucas Kenji Arima
Um estudo de transição de fases em sistemas dinâmicos / Lucas Kenji Arima Miranda. -- Rio Claro, 2021
48 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Física. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3.
Transformações de fase (Física estatística). I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

LUCAS KENJI ARIMA MIRANDA

**UM ESTUDO DE TRANSIÇÃO DE FASES EM SISTEMAS
DINÂMICOS**

**Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.**

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel (orientador)

Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

Prof. Dr. Diego Fregolent Mendes de Oliveira

Rio Claro, 02 de dezembro de 2021.

Assinatura do aluno

Lucas Kenji Arima Miranda

assinatura do orientador

Edson Denis Leonel

AGRADECIMENTOS

Agradeço do fundo do coração por toda oportunidade, atenção, apoio e cuidado dado por meu orientador, Prof. Edson Denis Leonel. Sou muitíssimo grato por todo trabalho realizado até agora e por todo este novo mundo me proporcionado.

Sou eternamente grato a minha família, minha mãe; meu pai e; meu irmão, por todo apoio direto, ou indiretamente me atribuído. Jamais teria sido capaz de realizar tais feitos sem a ajuda e apoio de todos.

Agradeço também o apoio ao projeto de iniciação científica pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo n° 2020/10602-1, sendo este o principal pilar para confecção deste Trabalho de Conclusão de Curso.

RESUMO

O tema abordado é a transição de fase dinâmica em sistemas Hamiltonianos, que é a transição de integrabilidade para não integrabilidade. Utilizando a dinâmica definida por um mapeamento discreto nas variáveis de ação I e ângulo θ , realizamos uma descrição do comportamento da difusão caótica das partículas para o mar de caos utilizando duas metodologias. A primeira é uma descrição fenomenológica obtendo os expoentes críticos através de simulações numéricas, e a segunda é um resultado analítico obtido a partir da solução da equação da difusão. A invariância de escala é observada no mar de caos levando a uma difusão caótica universal. Esta é uma assinatura clara de que o sistema passa por uma transição de fase. Nós investigamos também um conjunto de quatro perguntas que caracterizam uma transição de fase: (1) identificar a quebra de simetria; (2) definir o parâmetro de ordem; (3) identificar quem são as excitações elementares e; (4) detectar os defeitos topológicos que impactam na difusão das partículas.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos; Caos; Transição de fase; Difusão de partículas.

ABSTRACT

The subject approached here is a dynamical phase transition observed in Hamiltonian systems, which is a transition from integrability to non-integrability. Using the dynamics defined by a discrete mapping on the variables action I and angle θ , we perform a description of the behaviour of the chaotic diffusion to particles in the chaotic sea using two methods. One is a phenomenological description obtaining the critical exponents via numerical simulation, and the other is an analytical result obtained by the solution of the diffusion equation. The scaling invariance is observed in the chaotic sea leading to an universal chaotic diffusion. This is a clear signature that the system is passing through a phase transition. We investigate a set of four questions that characterize a phase transition: (1) identify the broken symmetry; (2) define the order parameter; (3) identify what are the elementary excitations and; (4) detect the topological defects which impact on the transport of the particles.

Keywords: Dynamics systems; Chaos; Phase transition; Particles diffusion.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Sistemas dinâmicos, caos e transições de fase	8
1.2	Organização do trabalho	10
2	Família de mapeamentos discretos e suas propriedades	11
2.1	Obtenção do mapeamento conservativo bidimensional	11
2.2	Conservação de área no espaço de fases para o mapeamento de estudo . . .	15
2.3	Expoentes de Lyapunov	16
2.4	Obtenção dos pontos fixos elípticos	20
2.5	Posição da primeira curva invariante do tipo <i>spanning</i>	21
3	Descrição da difusão caótica de partículas no mar de caos	25
3.1	Abordagem fenomenológica e os expoentes críticos	25
3.1.1	Simulações numéricas e obtenção dos três expoentes críticos	28
3.2	Descrição analítica da ação quadrática média	32
3.2.1	Equação da Difusão	32
3.2.2	Solução da equação da difusão	33
4	Um <i>insight</i> sobre a transição de fase	39
4.1	(1) Quebra de simetria	39
4.2	(2) Parâmetro de ordem	39
4.3	(3) Excitações elementares	41
4.4	(4) Defeitos topológicos	42
5	Discussões e conclusão	43
6	Referências Bibliográficas	45

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro Capítulo introduziremos os conceitos básicos sobre sistemas dinâmicos e suas principais características. Abordaremos também uma breve caracterização das transições de fases de forma a conectar como este estudo será aplicado neste trabalho.

1.1 Sistemas dinâmicos, caos e transições de fase

Em meados dos séculos XV e XVI, após as primeiras investigações sobre os sistemas dinâmicos, Isaac Newton, utilizando o formalismo de leis matemáticas e equações do movimento, introduziu o conceito de um sistema evoluindo no tempo [1, 2]. Esta ideia orientou a física para o conceito conhecido como **sistemas dinâmicos**. Em um sistema dinâmico descrito por leis e equações matemáticas temos que, a partir do conhecimento de um estado configuracional inicial x_0 , dado em um instante de tempo t_0 , torna-se possível a obtenção de qualquer estado subsequente a este para qualquer tempo $t > t_0$. Desta forma, um sistema dinâmico refere-se essencialmente a **mudanças** [3], ou então, sistemas que evoluem no tempo. De forma geral, estes sistemas podem ser classificados como lineares e não lineares. Os lineares são majoritariamente caracterizados por possuírem potências de primeira ordem em suas equações dinâmicas. Por outro lado, os não lineares são aqueles que apresentam ordens diferentes de 1 em suas equações, ou mesmo, aqueles descritos por funções do tipo seno; cosseno; exponenciais; logarítmicas e; entre outras funções não lineares.

Pode-se dizer que Henri Poincaré [4] foi o responsável pela grande revolução no que diz respeito ao estudo dos sistemas dinâmicos. Ele trouxe um pensamento mais qualitativo sobre estes sistemas, questionando a duração da estabilidade dos corpos presentes no sistema solar [3]. Neste sentido, verificou também a sensibilidade às condições iniciais e como esta impactaria em toda evolução do sistema estudado para longos tempos. Esta abordagem encaminhou-se para um moderno assunto da dinâmica, cujas aplicações estão

muito além do estudo da mecânica celeste, o estudo sobre *Caos*.

A invenção dos computadores de alta velocidade, em meados de 1950, permitiram a experimentação com modelos de equações que jamais seriam possíveis anteriormente. Este fato levou Edward Lorenz [5] a descobrir, em 1963, o movimento caótico de um "atrator estranho" em sua tentativa de entender os fenômenos de imprevisibilidade sobre a meteorologia do tempo. Desta forma, Lorenz verificou em seus trabalhos [5] que a solução de suas equações oscilavam de maneira irregular e não periódica. Posteriormente confirmou também a sensibilidade às condições iniciais, percebendo que simulações com duas condições iniciais infinitesimalmente diferentes levavam a resultados imensamente distintos, concluindo assim que os fenômenos meteorológicos seriam intrinsecamente imprevisíveis, pois pequenos erros nas medidas dos estados atuais da atmosfera resultariam em previsões completamente errôneas. Este último resultado recebeu o nome popular de *efeito borboleta* (sensibilidade às condições iniciais).

Lorenz apresentou uma marcante estrutura no que diz respeito ao estudo de caos: ao suas soluções de equações fossem graficadas em um plano tridimensional, estas trariam um formato similar a de asas de uma borboleta, como pode ser observado pela Figura 1.1. Este ficou conhecido como *o atrator de Lorenz*.

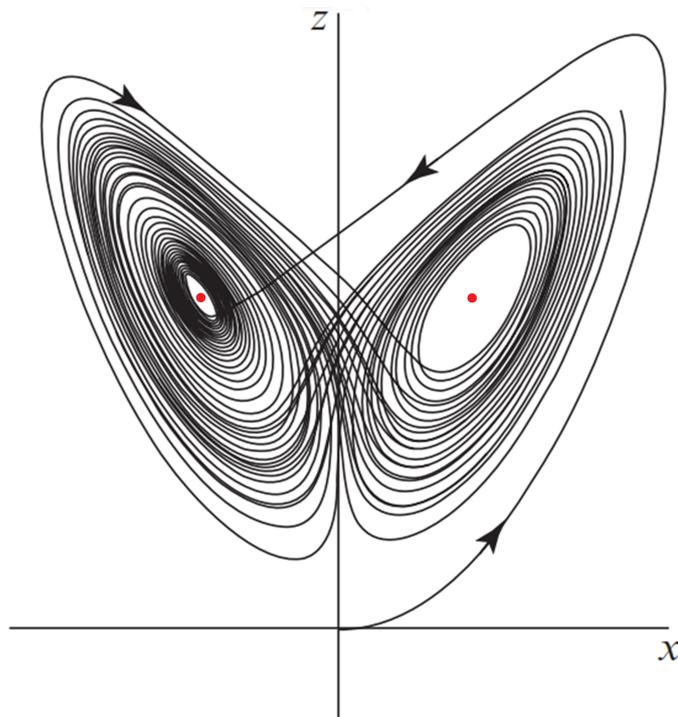


Figura 1.1: Ilustração do atrator de Lorenz em um plano tridimensional. Imagem extraída e modificada da Ref. [3].

Em determinados sistemas, como por exemplo os fluidos, a densidade e viscosidade são parâmetros que podem colaborar com termos não lineares em suas equações dinâmi-

cas [1, 2]. Conforme será observado neste trabalho, a modificação destes parâmetros de controle, em uma criticalidade específica, poderá levar o sistema a uma transição de fase. Uma transição de fase é facilmente identificada por uma mudança, às vezes abrupta, de propriedades entre estados dinâmicos de um sistema, ou mesmo, nas estruturas espaciais deste [6, 7]. Os fluidos clássicos constituem os exemplos mais familiares de transições de fases, tais como: vapor-líquido; vapor-sólido; líquido-sólido e; entres outras.

As transições de fases podem ser classificadas em duas no que diz respeito ao comportamento das derivadas da energia livre de Gibbs [8, 9]. As transições que são acompanhadas por uma descontinuidade nas derivadas de primeira ordem da energia livre do sistema são chamadas de transições de fase de primeira ordem. Já aquelas que são acompanhadas por descontinuidades de ordens superiores a 1 são denominadas transições de fase contínuas.

Neste projeto utilizaremos um formalismo proposto em [10], que caracteriza uma transição de fase a partir de uma análise feita sobre quatro perguntas essenciais para esta descrição: (1) qual é a quebra de simetria do sistema; (2) qual é o parâmetro de ordem; (3) quem são as excitações elementares e; (4) quais são os defeitos topológicos que impactam no transporte de partículas.

1.2 Organização do trabalho

Primeiramente, no Capítulo 2 será apresentada uma família de mapeamentos discretos obtidos a partir de uma função Hamiltoniana. Também mostraremos as principais propriedades e características do mapeamento conservativo estudado neste trabalho, tais como: o espaço de fases; as ilhas periódicas e seus pontos fixos elípticos; as curvas invariantes *spanning* e; o comportamento dos expoentes de Lyapunov. Seguindo para o Capítulo 3 faremos uma abordagem completa sobre a difusão das partículas no mar de caos utilizando duas metodologias. A primeira (Seção 3.1) é uma abordagem fenomenológica através de simulações numéricas em busca dos expoentes críticos. A outra (Seção 3.2) é uma descrição analítica a partir da solução da equação da difusão. Faremos também uma comparação entre estes dois métodos identificando suas propriedades de escala, bem como mostraremos a invariância de escala desta difusão presente no mar de caos. Já no Capítulo 4 responderemos às 4 perguntas essenciais que caracterizam uma transição de fase, são elas: (1) qual é a quebra de simetria do sistema; (2) quem é o parâmetro de ordem; (3) quais seriam as excitações elementares e; (4) quais são os defeitos topológicos que impactam no transporte de partículas. Por fim, no Capítulo 5 é abordada uma discussão geral sobre os principais resultados obtidos neste trabalho, concluindo a descrição da transição de fase observada para o mapeamento estudado.

Capítulo 2

Família de mapeamentos discretos e suas propriedades

Neste Capítulo serão apresentados os passos que levam à obtenção de uma família de mapeamentos discretos, que são descritos através de duas variáveis dinâmicas, ação I e ângulo θ , a partir de uma função Hamiltoniana com dois graus de liberdade. Mostraremos também algumas propriedades destes mapeamentos, tais como as condições que levam a estes mapeamentos serem conservativos, os espaços de fases na transição estudada, bem como suas principais estruturas: o mar de caos, as ilhas periódicas, os pontos fixos elípticos e as curvas invariantes do tipo *spanning*. O mar de caos será justificado a partir dos resultados obtidos para os expoentes de Lyapunov na Seção 2.3.

2.1 Obtenção do mapeamento conservativo bidimensional

Nesta Seção discutiremos as propriedades dinâmicas apresentadas por uma família de mapeamentos discretos. Estes mapeamentos serão obtidos através de uma função Hamiltoniana com dois graus de liberdade [11]. Este sistema genérico pode ser caracterizado por dois pares de variáveis canônicas:

$$(I_i, \theta_i) \quad i = 1, 2,$$

sendo I a ação do sistema e θ o ângulo.

A função Hamiltoniana genérica pode ser escrita como:

$$H(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2), \quad (2.1)$$

onde H_0 identifica a parte integrável do sistema e H_1 caracteriza sua parte não integrável. Este último é acompanhado de um parâmetro ϵ que será responsável por controlar a transição de integrabilidade para não integrabilidade do sistema. De fato pode-se perceber

que ao passo em que o parâmetro de controle $\epsilon = 0$, temos que não apenas a energia do sistema é conservada como a ação I também é, de forma que:

$$H(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) \longrightarrow H(I_1, I_2) = H_0(I_1, I_2). \quad (2.2)$$

Em outras palavras, o número de graus de liberdade é igual ao número de constantes do movimento, caracterizando assim um sistema integrável. É importante notarmos que nestas condições a função Hamiltoniana torna-se independente das variáveis angulares θ_1 e θ_2 , portanto temos que:

$$\frac{\partial H_0}{\partial \theta_1} = \frac{\partial H_0}{\partial \theta_2} = 0. \quad (2.3)$$

Por outro lado, quando $\epsilon \neq 0$, temos uma quebra da integrabilidade, visto que apenas a energia é conservada.

Pela expressão (2.1) podemos observar um fluxo quadridimensional de soluções para o espaço de fases, contudo como a energia independe do tempo, temos que esta passa a ser uma constante para o sistema, portanto é possível eliminarmos uma das quatro variáveis. É escolhida a variável I_2 , resultando assim em um fluxo tridimensional de soluções:

$$H = E \quad \longrightarrow \quad H = H(I_1, \theta_1, E, \theta_2). \quad (2.4)$$

É possível também realizarmos uma interceptação deste fluxo por um plano constante em θ_2 , sendo esta uma superfície de seção de Poincaré [11], levando assim este fluxo tridimensional à um fluxo bidimensional de soluções (I_1 vs. θ_1) no espaço de fases.

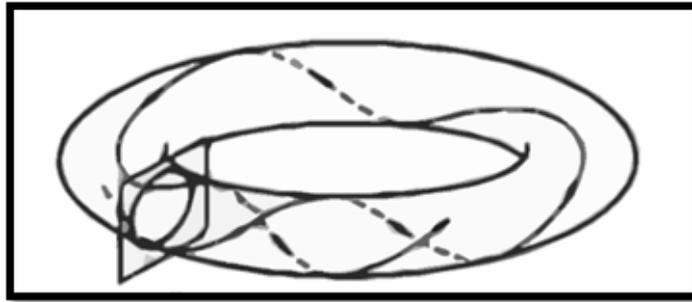


Figura 2.1: Ilustração de um "corte" feito pela superfície de seção de Poincaré em um fluxo tridimensional. Figura retirada e adaptada de [12].

Um mapeamento genérico [11] que descreve esta dinâmica é dado por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \pmod{2\pi} \end{cases} . \quad (2.5)$$

Aqui o índice n representa o processo iterativo do mapeamento, $h(\theta_n, I_{n+1})$, $K(I_{n+1})$ e $p(\theta_n, I_{n+1})$ são quaisquer funções não lineares em suas variáveis e ϵ identifica o parâmetro que controla a intensidade da não linearidade do sistema. É importante notar também que a variável angular θ_{n+1} está modulada em $[0, 2\pi]$.

Como o mapeamento (2.5) foi obtido através de um Hamiltoniano, a área em seu espaço de fases deve ser preservada [1, 2, 13]. Esta condição será satisfeita quando a determinante da matriz Jacobiana for igual a unidade. Esta matriz pode ser dada pela seguinte expressão:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

em que os termos da matriz são dados por:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 + \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{1}{1 - \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}}}$;
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial I_n}{\partial \theta_n} + \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} + \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_n} = \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} + \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n}$;
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial \theta_n}{\partial I_n} + \frac{\partial K_{n+1}}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \left[\frac{\partial K_{n+1}}{\partial I_{n+1}} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}$ e;
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + \frac{\partial K_{n+1}}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial \theta_n} \longrightarrow$
 $\longrightarrow \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \left(1 + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \right) + \left[\frac{\partial K_{n+1}}{\partial I_{n+1}} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}$.

A determinante da matriz Jacobiana pode ser escrita por:

$$\det J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n}. \quad (2.7)$$

Substituindo apenas os termos J_{12} e J_{21} temos que:

$$\det J = \left(1 + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} \right) \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} + \left[\frac{\partial K_{n+1}}{\partial I_{n+1}} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} - \left[\frac{\partial K_{n+1}}{\partial I_{n+1}} + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}, \quad (2.8)$$

desta forma temos que:

$$\det J = \frac{1 + \frac{\partial \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n}}{1 - \frac{\partial ch(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}}} \quad (2.9)$$

Este mapeamento genérico preserva área somente sobre a condição em que $\det J = 1$, portanto:

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0. \quad (2.10)$$

Considerando $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$ obtemos diferentes sistemas dinâmicos bem conhecidos na literatura, tais como:

- $K(I_{n+1}) = I_{n+1}$, chamado de mapeamento padrão [14–16];
- $K(I_{n+1}) = 2/I_{n+1}$, que é o modelo de Fermi-Ulam [17, 18];
- $K(I_{n+1}) = \zeta I_{n+1}$, que descreve o modelo *bouncer* [19], com ζ sendo uma constante ;
- $K(I_{n+1}) = I_{n+1} + \zeta I_{n+1}^2$, é obtido o mapa logístico *twist* [20] e;
- para o caso em que

$$K(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\zeta^2(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 - 1/\zeta^2}) & I_{n+1} > 1/\zeta \\ 4\zeta^2 I_{n+1} & I_{n+1} \leq 1/\zeta \end{cases},$$

com ζ constante, obtemos o modelo de Fermi-Ulam *bouncer* [21–23].

Para este projeto são consideradas as seguintes transformações: $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$, $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $K(I_{n+1}) = \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma}$, sendo $\gamma > 0$. Portanto, é obtido o seguinte mapeamento de estudo:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right] \pmod{2\pi} \end{cases}. \quad (2.11)$$

Nota-se que para este mapeamento temos a existência de dois diferentes parâmetros de controle. Um deles é ϵ , que controla a intensidade da não linearidade do sistema. Para $\epsilon = 0$ o espaço de fases apresenta apenas estruturas regulares e periódicas, portanto simétricas, como pode ser observado pela Figura 2.2(a). Por outro lado, para $\epsilon \neq 0$ a regularidade é quebrada e o espaço de fases passa a ser misto, composto pelo mar de caos, ilhas de periodicidade e por curvas invariantes *spanning*, como visto pela Figura 2.2(b).

O outro é $\gamma > 0$, esta escolha é feita para controlar a velocidade da divergência do ângulo θ no limite em que a ação I é suficientemente pequena. De fato, percebe-se que no momento em que a ação I é muito pequena, o termo $\theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma}$ diverge, não apresentando correlação entre θ_{n+1} e θ_n . Assim, o comportamento de $\sin(\theta_n)$ torna-se totalmente aleatório, trazendo então órbitas caóticas para a dinâmica do sistema. Na medida em que I passa a crescer, estas variáveis angulares passam a apresentar correlação entre si e portanto passam a apresentar regularidade no espaço de fases, sendo identificadas pelas ilhas periódicas e curvas invariantes.

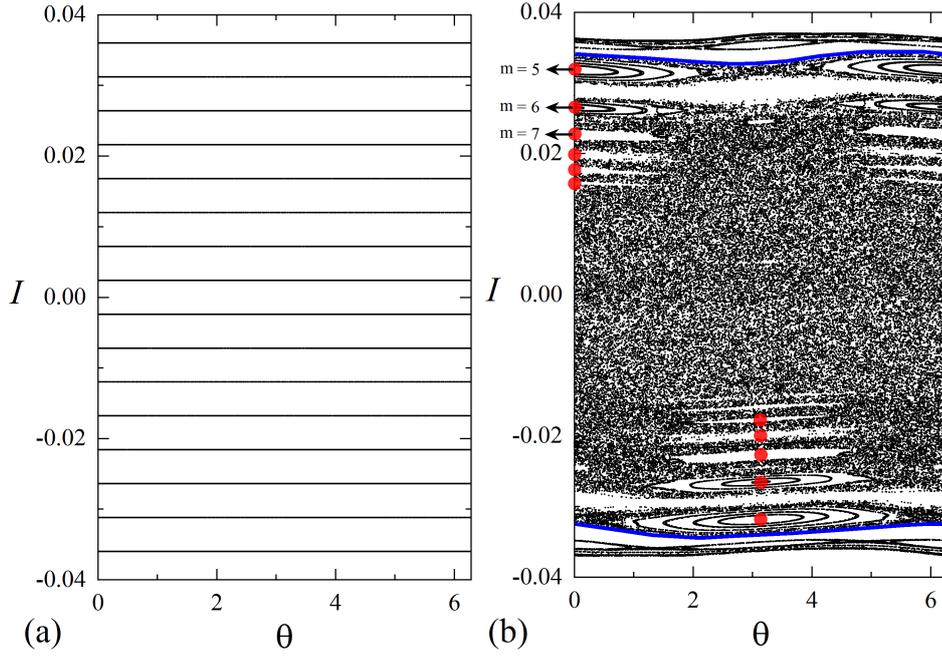


Figura 2.2: Espaço de fases para o mapeamento (2.11) com $\gamma = 1$ e: (a) $\epsilon = 0$ e; (b) $\epsilon = 10^{-3}$. Em (a) o espaço de fases apresenta uma dinâmica periódica e regular, e é simétrico. Em (b) o espaço de fases torna-se misto, com a presença do mar de caos, ilhas periódicas (centradas por pontos fixos elípticos demarcados em vermelho) e as primeiras curvas invariantes do tipo *spanning* identificadas pelas curvas azuis. A letra m caracteriza a frequência da função seno.

2.2 Conservação de área no espaço de fases para o mapeamento de estudo

Os coeficientes da matriz Jacobiana para o mapeamento (2.11) serão dados por:

- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial(I_n + \epsilon \sin \theta_n)}{\partial I_n} = 1;$
- $\frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial(I_n + \epsilon \sin \theta_n)}{\partial \theta_n} = \epsilon \cos(\theta_n);$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial(\theta_n + |I_{n+1}|^{-\gamma})}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \frac{\partial |I_{n+1}|}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} (\pm 1) e;$
- $\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial(\theta_n + |I_{n+1}|^{-\gamma})}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \frac{\partial |I_{n+1}|}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \epsilon \cos(\theta_n) (\pm 1).$

Igualmente que em (2.7), temos que a determinante da matriz Jacobiana $\det J$ pode ser escrita por:

$$\det J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n}. \quad (2.12)$$

Substituindo na equação (2.12) os termos da matriz encontrados, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\det J &= 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \epsilon \cos(\theta_n)(\pm 1) - \left[-\epsilon \cos(\theta_n) \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} (\pm 1) \right], \\
&\implies \boxed{\det J = 1}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Segundo o Teorema de Liouville [24], seja $dA_n = dI_n d\theta_n$ um elemento infinitesimal de área no espaço de fases, ao realizarmos uma transformação nas variáveis ação I e ângulo θ de um instante n para $n + 1$, a transformação de área nesses instantes será dada por:

$$dA_{n+1} = (\det J) dA_n, \tag{2.14}$$

desta forma, como observado pela Eq. (2.13), temos que $\det J = 1$, portanto podemos concluir que existe uma conservação de área no espaço de fases, embora a forma geométrica possa variar.

2.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são utilizados para determinação de caos nos sistemas dinâmicos [1,2]. Estes indicam se as órbitas estudadas são sensíveis às condições iniciais. Seguindo o mesmo procedimento que em [25], primeiramente será realizado o cálculo teórico dos expoentes de Lyapunov para mapeamentos unidimensionais, e posteriormente este conceito será expandido para o caso bidimensional.

Dado um mapa unidimensional escrito pela seguinte expressão:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.15}$$

em que x são os possíveis estados configuracionais do sistema e f é uma função de operação do mapeamento. Ao evoluirmos este mapeamento para a n -ésima iteração, terá sido criada uma órbita. Desta forma, é definida a distância entre duas órbitas, na n -ésima iteração como:

$$d = |f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|, \tag{2.16}$$

onde x_0 identifica uma condição inicial e ε é uma pequena perturbação sobre x_0 .

Podemos definir também a distância relativa d/ε e admitir que esta razão tenha um comportamento exponencial do tipo $d/\varepsilon \equiv e^{\lambda n}$, sendo que λ é definido como o expoente de Lyapunov. Como mencionado, ε é um fator muito pequeno, portanto considerando $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon} \right| = e^{\lambda n}. \tag{2.17}$$

Da equação (2.17), podemos notar que ao passo em que o expoente de Lyapunov λ for positivo ($\lambda > 0$), temos um afastamento exponencial das órbitas geradas a partir do fornecimento de duas condições iniciais muito próximas, portanto uma confirmação de caos (sensibilidade às condições iniciais). Por outro lado, se $\lambda \leq 0$ teremos que as órbitas permanecem próximas ($\lambda < 0$), ou então sofrerão um afastamento linear ($\lambda = 0$), estes dois casos indicam órbitas não caóticas pelo sistema.

Podemos notar que o limite escrito em (2.17) é exatamente a definição de derivada, portanto podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon} \right| = |f'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}. \quad (2.18)$$

Tomando a função logarítmica de ambos os lados da equação (2.18) temos que:

$$\lambda n = \ln |f'^{(n)}(x_0)| = \ln |f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})f'(x_{n-3})\dots f'(x_0)|. \quad (2.19)$$

Pela propriedade logarítmica ($\ln(A.B) = \ln(A) + \ln(B)$) e também isolando o expoente de Lyapunov λ , temos que:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.20)$$

A convergência do expoente de Lyapunov será dada para um número de iterações suficientemente grande, portanto:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.21)$$

Agora, para estender este procedimento para mapeamentos bidimensionais, como por exemplo o estudado neste trabalho (2.11), os expoentes de Lyapunov serão dados pela seguinte expressão:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_n^{(j)}|, \quad (2.22)$$

em que o índice $j = 1, 2$ e $\Lambda_n^{(j)}$ identifica os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(I_i, \theta_i) = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1$, sendo que J é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita (I_i, θ_i) . Como os expoentes de Lyapunov são avaliados para um número grande de iterações n , o produto das matrizes Jacobianas J_i pode levar a uma indeterminação de seus coeficientes (*overflow*), não sendo viável esta aplicação. Contudo, um algoritmo de triangularização criado por Eckmann e Ruelle [26] nos permite reescrevermos a matriz Jacobiana J em termos do produto $J = \Theta T$, em que Θ é uma matriz ortogonal, i.e. sua inversa é igual a transposta [27] ($\Theta^{-1} = \Theta^t$) e; T é uma matriz triangular superior. Estes últimos são escritos por:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

e que,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

A matriz M pode ser reescrita convenientemente da seguinte forma:

$$M = J_{n-1}J_{n-2}\dots J_2(\mathbf{I})J_1 = J_{n-1}J_{n-2}\dots J_2\Theta_1\Theta_1^{-1}J_1, \quad (2.25)$$

desta forma podemos definir $T_1 = \Theta_1^{-1}J_1$ e $\tilde{J}_2 = J_2\Theta_1$, assim temos que:

$$M = J_{n-1}J_{n-2}\dots J_3\Theta_2\Theta_2^{-1}\tilde{J}_2T_1. \quad (2.26)$$

Agora realizando o mesmo procedimento para $T_2 = \Theta_2^{-1}\tilde{J}_2$. Podemos perceber que o algoritmo resumiria-se a analisar os elementos de T . Desta forma, para que possamos obtê-los, usaremos que $T_1 = \Theta_1^{-1}J_1$, portanto:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

O elemento T_{21} da matriz T_1 nos leva a seguinte relação:

$$\begin{aligned} -j_{11}\sin(\theta) + j_{21}\cos(\theta) &= 0 \quad \implies \\ \implies \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{j_{21}}{j_{11}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Elevando todos os termos da Eq. (2.28) ao quadrado e utilizando a relação fundamental da trigonometria ($\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\theta)}{1 - \sin^2(\theta)} &= \frac{j_{21}^2}{j_{11}^2} \implies \sin^2(\theta)[j_{11}^2 + j_{21}^2] = j_{21}^2 \implies \\ \implies \sin(\theta) &= \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

consequentemente,

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} \quad (2.30)$$

Desta forma, como temos que $T_{11} = j_{11}\cos(\theta) + j_{21}\sin(\theta)$ e $T_{22} = -j_{12}\sin(\theta) + j_{22}\cos(\theta)$ pela Eq.(2.27), podemos utilizar as equações (2.29) e (2.30) para obter os elementos da diagonal principal da matriz T_1 (T_{11} e T_{22}), portanto:

$$T_{11} = j_{11} \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} + j_{21} \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.31)$$

e também,

$$T_{22} = -j_{12} \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} + j_{22} \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.32)$$

Agora basta obtermos $\tilde{J}_2 = J_2\Theta_1$, que pode ser dado pela expressão:

$$\begin{pmatrix} \tilde{j}_{11} & \tilde{j}_{12} \\ \tilde{j}_{21} & \tilde{j}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

desta forma este procedimento utilizado para a obtenção dos elementos T_{11} e T_{22} da matriz $T_{n=1}$ (primeira iteração) deve ser repetido até o final da série de matriz $J_1J_2\dots J_{n-2}J_{n-1}J_n$. Portanto, os expoente de Lyapunov serão dados por:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{jj}^{(i)}|, \quad j = 1, 2. \quad (2.34)$$

Em sistemas Hamiltonianos (como é o caso deste trabalho), os expoentes de Lyapunov aparecerão em pares e com sinais contrários [25], de forma que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{n_{par}} = 0$, ou mesmo, $\sum_{i=1}^{n_{par}} \lambda_i = 0$.

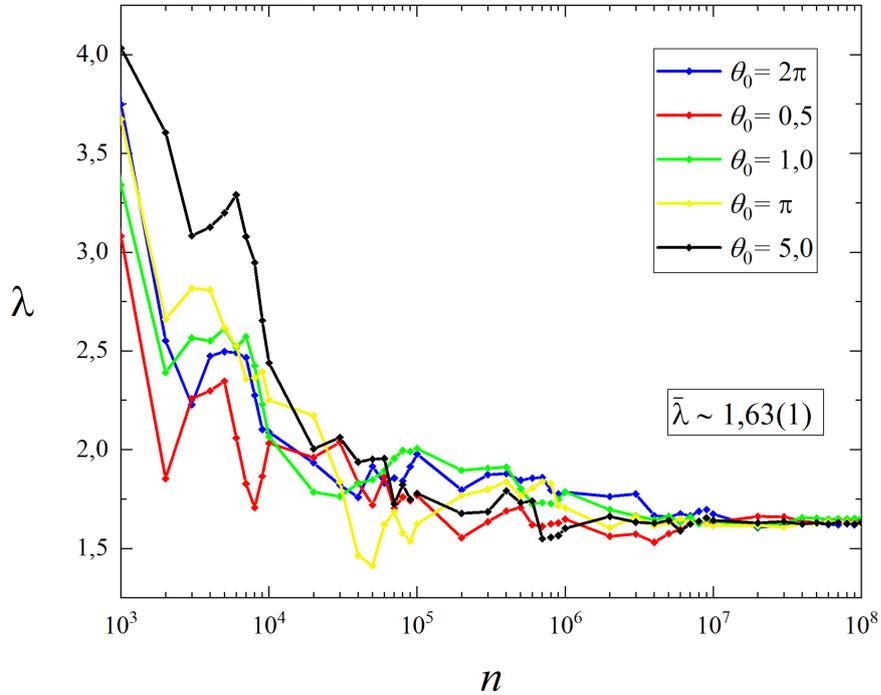


Figura 2.3: Convergência do expoente de Lyapunov positivo para 5 diferentes condições iniciais de θ_0 evoluídas 10^8 iterações para $I_0 = 10^{-4}\epsilon$. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 10^{-3}$ e $\gamma = 1$. O valor médio do expoente obtido foi $\bar{\lambda} = 1,63(1)$.

A Figura 2.3 mostra a convergência do expoente de Lyapunov positivo dado pela equação (2.34) para cinco diferentes condições iniciais de θ_0 , iteradas 10^8 vezes na região de mais baixa ação do espaço de fases ($I_0 = 10^{-3}\epsilon$), o mar de caos. O valor assintótico obtido no regime de saturação das curvas foi de $\bar{\lambda} = 1,63(1)$, portanto indicando um comportamento caótico para o mapeamento (2.11).

Podemos também avaliar o comportamento de $\bar{\lambda}$ em função do parâmetro de controle ϵ , como pode ser visto pela Figura 2.4. Podemos notar que o expoente de Lyapunov médio não exibe variação representativa em resposta ao parâmetro de controle ϵ .

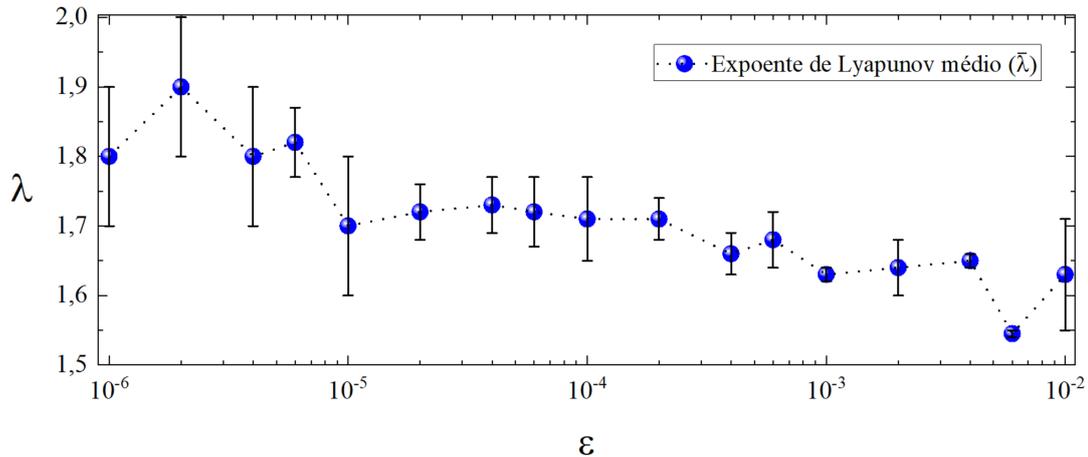


Figura 2.4: Comportamento de $\bar{\lambda}$ em função do parâmetro de controle ϵ para $\gamma = 1$.

2.4 Obtenção dos pontos fixos elípticos

Um ponto fixo pode ser definido da seguinte forma [28]: seja uma função $f : S \rightarrow S$ sendo S um conjunto genérico, dado que $x^* \in S$, se $f(x^*) = x^*$ então x^* é dito um ponto fixo de f .

Como visto em [1], podemos tomar este conceito para avaliar os pontos fixos de um mapa discreto iterativo genérico, que é dado por:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.35)$$

A obtenção dos pontos fixos x^* deste mapeamento unidimensional pode ser feita a partir da condição:

$$x^* = x_{n+1} = x_n, \quad (2.36)$$

desta forma, os pontos fixos para o mapeamento bidimensional (2.11) são obtidos pelas condições [1, 3, 28]:

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= I_n = I^*, \\
\theta_{n+1} &= \theta_n = \theta^* + 2m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

Aqui I^* e θ^* são as coordenadas para os pontos fixos apresentados pelo mapeamento (2.11). O termo $2m\pi$ refere-se à periodicidade da segunda expressão dada no mapa modulada em 2π . Aplicando o resultado da equação (2.37) no mapeamento (2.11), temos que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \mathfrak{X} + \epsilon \sin(\theta^*), & \sin(\theta^*) &= 0, \\
\mathfrak{I} + 2m\pi &= \mathfrak{I} + \frac{1}{|I^*|^\gamma}, & \implies & I^* = \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}},
\end{aligned}$$

logo temos que:

$$\implies \begin{cases} \theta^* = k\pi & k = 0, 1, 2, \dots \\ I^* = \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{cases} .
\tag{2.38}$$

Pode-se notar que pelo mapeamento (2.11) a variável angular θ_{n+1} está modulada em 2π , desta forma pela equação (2.38) o espaço de fases possuiria apenas pontos fixos para valores de $k = 0, 1$, portanto temos que as coordenadas de ação e ângulo que definem os pontos fixos serão dados por:

$$\underbrace{(\theta^*, I^*) = \begin{cases} 0, \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ \pi, \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{cases}}_{\text{Pontos Fixos}} .
\tag{2.39}$$

Observando a Figura 2.2(b) podemos notar a existência de um grupo de ilhas periódicas. Os pontos centrais à estas ilhas, identificados em vermelho, são denominados pontos fixos elípticos. As condições iniciais dadas nas proximidades de um ponto fixo elíptico formam as ilhas periódicas ao serem iteradas pelo mapeamento. A Figura 2.2(b) nos mostra alguns destes pontos fixos elípticos ($m = 5, 6$ e 7) em boa concordância com a Eq. (2.39).

2.5 Posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*

O mar de caos visto no espaço de fases é limitado pelas primeiras curvas invariantes do tipo *spanning*. Elas previnem que uma órbita caótica se difunda ilimitadamente. A curva mais baixa determina uma região de transição de um caos local (acima da curva) para um caos global (abaixo da curva).

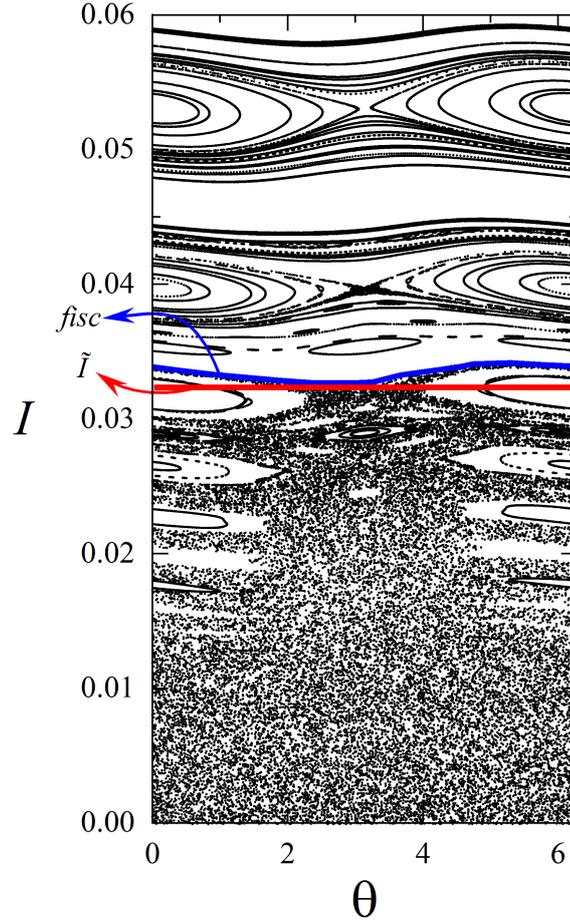


Figura 2.5: Parte do gráfico do espaço de fases para $\epsilon = 10^{-3}$ e $\gamma = 1$, comparando o resultado teórico da equação (2.52) obtido para a posição da primeira curva invariante do tipo *spanning* \tilde{I} (curva em vermelho), com o observacional, através da identificação da quebra de estruturas (curva azul).

A partir da Figura 2.5, nota-se que considerando $\epsilon = 10^{-3}$ e para $I \gg \epsilon$, as flutuações da curva invariante *spanning* são muito pequenas ao serem comparadas com o mar de caos. Portanto, torna-se possível assumirmos [13,25] que em sua proximidade, a dinâmica apresentada pela ação I pode ser dada por:

$$I_n = \tilde{I} + \Delta I_n, \quad (2.40)$$

consequentemente,

$$I_{n+1} = \tilde{I} + \Delta I_{n+1}, \quad (2.41)$$

onde \tilde{I} corresponde a um valor característico de I ao longo da curva invariante *spanning* e ΔI é uma pequena perturbação feita sobre \tilde{I} . É importante acentuar que esta aproximação teórica é apenas adequada para pequenos valores de ϵ , i.e. perto da transição

de integrabilidade ($\epsilon = 0$) para não integrabilidade ($\epsilon \neq 0$), não sendo elegível em outros casos.

Utilizando o resultado apresentado pela Eq. (2.41), a primeira equação do mapeamento em (2.11) pode ser escrita como:

$$\tilde{X} + \Delta I_{n+1} = \tilde{X} + \Delta I_n + \epsilon \sin \theta_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta I_{n+1} = \Delta I_n + \epsilon \sin \theta_n}. \quad (2.42)$$

Considerando esta mesma aproximação para a segunda equação do mapeamento (2.11) temos que:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{\left[\tilde{I} + \Delta I_{n+1}\right]^\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \left[\tilde{I} + \Delta I_{n+1}\right]^{-\gamma} \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left[1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right]^{-\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como ΔI_{n+1} é assumido infinitesimalmente pequeno temos que $\frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} \rightarrow 0$, portanto torna-se possível realizarmos uma expansão em série de Taylor em torno de $\frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} = 0$ (série de Maclaurin):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^{-\gamma} &= (1 + [0])^{-\gamma} + [-\gamma(1 + [0])^{-(\gamma+1)}] \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}} + \underbrace{\dots}_{\text{Ordens superiores}} \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \left(1 + \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right)^{-\gamma} = \boxed{1 - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Desta forma, substituindo a expressão destacada em (2.44) na equação (2.43) temos que:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} \left[1 - \gamma \frac{\Delta I_{n+1}}{\tilde{I}}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}}}. \quad (2.45)$$

Agora, para estabelecermos uma relação com o “mapa padrão” [14–16], a equação (2.41) será multiplicada pelo termo $\frac{-\gamma}{\tilde{I}^{\gamma+1}}$, assim temos que:

$$-\frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}} = -\frac{\gamma \Delta I_n}{\tilde{I}^{\gamma+1}} - \frac{\gamma \epsilon \sin \theta_n}{\tilde{I}^{\gamma+1}}, \quad (2.46)$$

também somaremos $\frac{1}{\tilde{I}^\gamma}$ em ambos os lados da equação (2.46), adquirindo:

$$\frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}} = \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta I_n}{\tilde{I}^{\gamma+1}} - \frac{\gamma \epsilon \sin \theta_n}{\tilde{I}^{\gamma+1}}. \quad (2.47)$$

Por conveniência, são definidas as seguintes variáveis:

$$\begin{cases} J_{n+1} = \frac{1}{\tilde{I}^\gamma} - \frac{\gamma \Delta J_{n+1}}{\tilde{I}^{\gamma+1}}, \\ \phi_n = \theta_n + \pi. \end{cases} \quad (2.48)$$

Portanto torna-se possível reescrevermos as equações (2.47) e (2.45) da seguinte forma:

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n + \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}} \sin(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + J_{n+1} \end{cases} . \quad (2.49)$$

Podemos observar que a última definição em (2.48) ($\phi_n = \theta_n + \pi$), ao ser aplicada no argumento da função seno, de fato é verificada através da propriedade trigonométrica da soma de dois arcos, retornando assim o valor positivo no fator conjunto ao seno, observado na primeira equação em (2.49):

$$\sin(\theta_n) = \sin(\phi_n - \pi) = \sin(\phi_n) \overset{-1}{\cancel{\cos(-\pi)}} + \overset{0}{\cancel{\sin(-\pi)}} \cos(\phi_n) = -\sin(\phi_n). \quad (2.50)$$

Observando o novo mapeamento obtido em (2.49) podemos verificar que o mapeamento inicial (2.11), nas proximidades de uma curva invariante do tipo *spanning*, é descrito pelo mapa padrão. Também podemos identificar um parâmetro de controle efetivo, dado por:

$$K_{ef} = \frac{\gamma \epsilon}{\tilde{I}^{\gamma+1}}. \quad (2.51)$$

Como discutido em [11, 14, 29], próximo a transição de um caos local para o global (i.e. nas proximidades da primeira curva invariante *spanning*), $K_{ef} \simeq 0,9716\dots$, portanto o valor teórico obtido para a posição da primeira curva invariante do tipo *spanning* \tilde{I} pode ser dado por:

$$\tilde{I} = \left[\frac{\gamma \epsilon}{0,9716} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (2.52)$$

A Figura 2.5 mostra que o resultado teórico \tilde{I} obtido pela equação (2.52) está bem de acordo com a posição da curva invariante *spanning* (*fisc*) identificada observacionalmente para o espaço de fases do mapeamento (2.11) para os parâmetros de $\epsilon = 10^{-3}$ e $\gamma = 1$. As órbita caóticas no mar de caos não podem adentrar às ilhas periódicas, ao mesmo tempo em que também não poderão cruzar pelas primeiras curvas invariantes *spanning*, em troca de violar o teorema de Liouville.

Capítulo 3

Descrição da difusão caótica de partículas no mar de caos

Neste Capítulo serão abordados duas metodologias para investigarmos a caracterização da difusão das partículas no mar de caos para o espaço de fases referente ao mapeamento conservativo (2.11). A primeira é uma abordagem fenomenológica através de processos iterativos e simulacionais. A outra será uma descrição analítica a partir da solução da equação da difusão. Faremos também uma comparação entre estes dois métodos de forma a identificar suas propriedades de escala, bem como mostrar a invariância de escala presente no mar de caos, sendo este um grande indicativo de que o sistema experimenta uma transição de fase.

3.1 Abordagem fenomenológica e os expoentes críticos

Aqui discutiremos algumas propriedades que são observados para o mar de caos através de uma descrição fenomenológica [24]. Como visto no espaço de fase, o mar de caos é limitado pela primeira curva invariante *spanning*. Ele permite que a partícula se espalhe ao longo do eixo da ação. A fim de caracterizar as propriedades de escala da ação média, ou seja, a difusão de partículas no mar caótico, usamos o mesmo procedimento de [1, 2, 13, 25], uma vez que este formalismo já foi aplicado para diversos outros sistemas e mapeamentos com grande êxito [30–38].

Podemos verificar que como a parte positiva ($I > 0$) é simétrica a parte negativa ($I < 0$) no espaço de fases, fica claro que a ação média $\bar{I} = 0$, não sendo um bom candidato à descrever as propriedades de escala. Desta forma, será utilizada a ação quadrática média \bar{I}^2 , que define então $I_{rms} = \sqrt{\bar{I}^2}$. O observável I_{rms} será dado através de duas médias:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2 \right]}, \quad (3.1)$$

em que M identifica o número de condições iniciais utilizadas, e n caracteriza o número de iterações do mapeamento. O somatório em i identifica a média do conjunto de condições iniciais utilizadas, já o somatório em j corresponde a média das órbitas produzidas pela iteração do mapeamento. É definido então uma média no *ensemble* de condições iniciais do sistema.

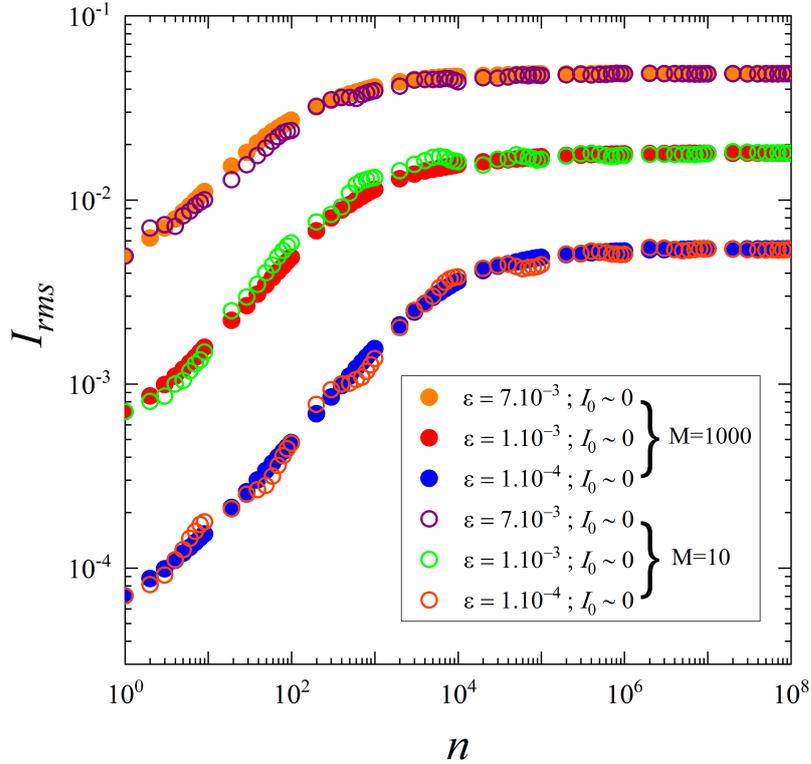


Figura 3.1: Gráfico de I_{rms} vs. n para $\gamma = 1$; 3 diferentes parâmetros de controle ϵ e; 2 diferentes números de condições iniciais M . Os símbolos preenchidos identificam as curvas para um conjunto de $M = 1000$ condições iniciais, já os símbolos não preenchidos representam as curvas feitas para um *ensemble* de $M = 10$ condições iniciais. Todas as condições iniciais utilizadas foram de M valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ uniformemente distribuídos para um valor inicial $I_0 = 10^{-3}\epsilon$.

A Figura 3.1 mostra o gráfico de $I_{rms} \times n$ para $\gamma = 1$, três diferentes parâmetros de controle ϵ e dois diferentes números de condições iniciais M . Foram utilizados M valores iniciais de ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$ escolhidos uniformemente distribuídos para uma ação inicial fixa $I_0 = 10^{-3}\epsilon$.

Nesta figura foram apresentadas três curvas considerando $M = 1000$, identificadas pelos símbolos preenchidos, e três curvas para $M = 10$ (símbolos não preenchidos). Esta

comparação foi realizada para identificarmos a influência apresentada pelo número de condições iniciais M ao serem feitas as médias no *ensemble* de condições iniciais. Desta forma, dado um número pequeno de condições iniciais a curva da ação quadrática média I_{rms} pelo tempo n passam a apresentar certas irregularidades e oscilações ao longo da mesma. Por outro lado, aquelas associadas à números maiores de condições iniciais denotam maior simetria e atenuação. Verifica-se assim que, quanto maior o número de condições iniciais utilizadas para a realização das médias, melhor é o resultado esperado no que diz respeito a realidade da natureza apresentada pela curva.

Observando a Figura 3.1, é possível notarmos que, para tempos pequenos da iteração ($n \ll n_x$), as curvas apresentam um regime de crescimento acelerado. Por outro lado, para valores de n muito grandes ($n \gg n_x$) passamos a ter um regime constante de saturação. A mudança do primeiro regime de crescimento para o de um platô constante é dado por um número característico de tempo n_x , identificando assim o número de *crossover*. Estes três comportamentos apresentados pelas curvas de I_{rms} em função do tempo n serão caracterizados por três expoentes críticos (α, β e γ). Para obtermos estes três expoentes críticos nós assumimos as seguintes hipóteses de escala [13, 25]:

1-) Para valores de $n \ll n_x$, o comportamento de I_{rms} é dado por:

$$I_{rms} \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (3.2)$$

em que β identifica o expoente crítico de aceleração.

2-) Para valores de $n \gg n_x$, as curvas atingem um regime de saturação, podendo ser descritas por:

$$I_{rms,sat} \propto \epsilon^\alpha, \quad (3.3)$$

em que α é o expoente de saturação.

3-) E por último, temos a mudança do regime de crescimento acelerado para o de um platô constante, identificados pelo número de *crossover* n_x , dado por:

$$n_x \propto \epsilon^z, \quad (3.4)$$

em que z é o expoente de *crossover*.

Portanto a partir destas três hipóteses de escala, podemos descrever o comportamento de I_{rms} pela função homogênea generalizada. Tal função é dada por:

$$I_{rms}(n\epsilon^2, \epsilon) = l I_{rms}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon), \quad (3.5)$$

em que l é um fator de escala e a e b são expoentes característicos. Primeiramente, é escolhido de forma conveniente que $l^a n\epsilon^2 = 1$, portanto temos também que:

$$l^a n \epsilon^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l = (n \epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}}. \quad (3.6)$$

Levando este último resultado (3.6) na equação (3.5), temos que:

$$I_{rms}(n \epsilon^2, \epsilon) = (n \epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_{rms}(1, (n \epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon), \quad (3.7)$$

em que $I_{rms}(1, (n \epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon)$ é assumido constante para valores de $n \ll n_x$, portanto comparando a equação (3.7) com a primeira hipótese de escala (3.2), fica claro que $(n \epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} = (n \epsilon^2)^\beta \rightarrow \beta = -1/a$.

Realizando o mesmo procedimento, contudo agora escolhendo $l^b \epsilon = 1$, temos que:

$$l^b \epsilon = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l = \epsilon^{-\frac{1}{b}}}. \quad (3.8)$$

Levando este resultado na equação (3.5), temos que:

$$I_{rms}(n \epsilon^2, \epsilon) = \epsilon^{-\frac{1}{b}} I_{rms}(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n \epsilon^2, 1), \quad (3.9)$$

em que $I_{rms}(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n \epsilon^2, 1)$ é considerado constante para valores de $n \gg n_x$ (regime de saturação). Desta forma comparando a equação (3.9) com a segunda hipótese de escala (3.3), temos que $\epsilon^\alpha = \epsilon^{-\frac{1}{b}} \rightarrow \alpha = -1/b$.

Por fim, o expoente crítico z pode ser obtido através de uma combinação entre os dois fatores de escala (3.6) e (3.8). Considerando que $\alpha = -1/b$ e $\beta = -1/a$ obtemos:

$$(n \epsilon^2)^\beta = \epsilon^\alpha \quad \Longrightarrow \quad \boxed{n_x = \epsilon^{\frac{\alpha}{\beta} - 2}}, \quad (3.10)$$

em que n_x corresponde ao número de iteração n no qual ocorrerá a mudança de um regime de crescimento para o de um platô constante de saturação, portanto comparando a equação (3.10) com a última hipótese de escala (3.4), temos:

$$\epsilon^z = \epsilon^{\frac{\alpha}{\beta} - 2} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\boxed{z = \frac{\alpha}{\beta} - 2}}_{\text{Lei de Escala}}. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) nos dá uma expressão analítica para os três expoentes críticos definindo então uma lei de escala. De fato, pelo conhecimento de dois expoentes críticos, pode-se também obter o terceiro.

3.1.1 Simulações numéricas e obtenção dos três expoentes críticos

Através de simulações numéricas, foi possível calcularmos o expoente β a partir de um ajuste em lei de potência dada pelo gráfico de $I_{rms} \times n \epsilon^2$ (Figura 3.2(a) e (b)). Esta figura

estabelece a relação proposta pela primeira hipótese de escala (3.2) em que para valores de $n \ll n_x$ temos que $I_{rms} \propto (n\epsilon^2)^\beta$. O valor obtido para o expoente foi de $\beta = 0,501(5)$.

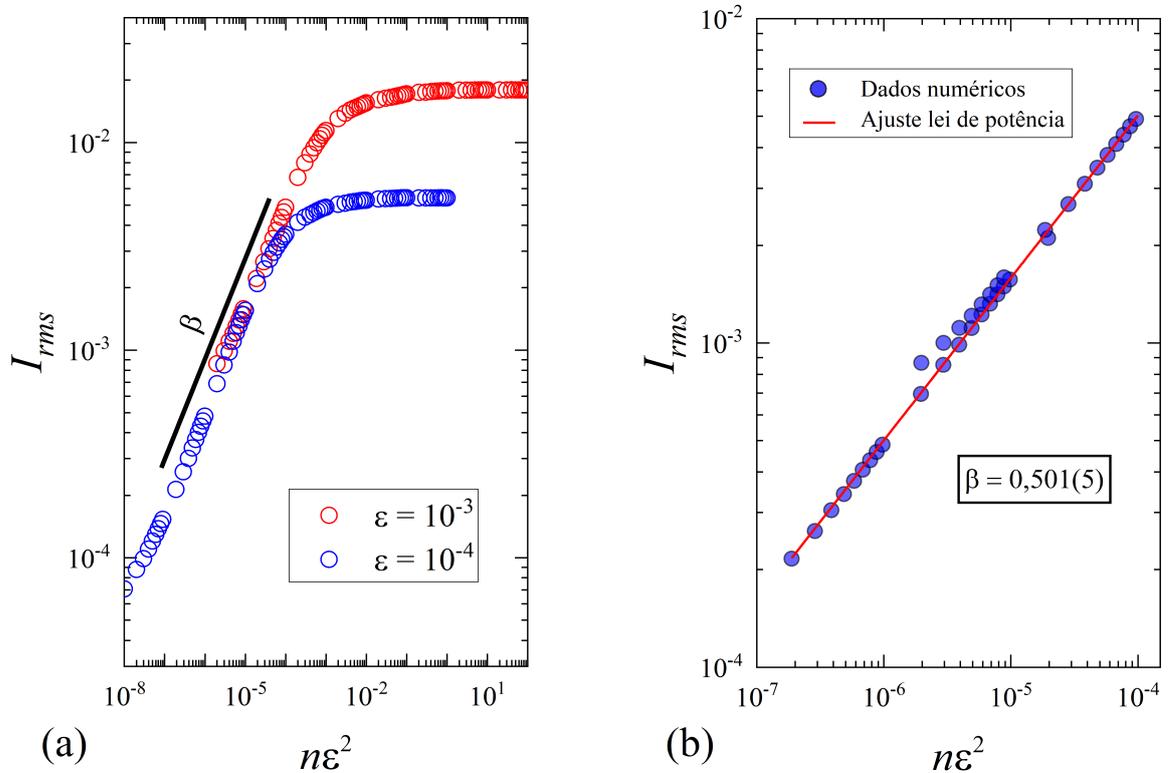


Figura 3.2: (a) Mesmo *plot* realizado para a Figura 3.1, para dois parâmetros de controle ϵ e com $M = 1000$ condições iniciais, depois da transformação de $n \rightarrow n\epsilon^2$. (b) Ajuste linear do regime de crescimento apresentado em (a). O expoente crítico obtido foi $\beta = 0,501(5)$.

O expoente α pode ser obtido pela relação proposta para a segunda hipótese de escala ($I_{rms,sat} \propto \epsilon^\alpha$), em que temos um regime de saturação no limite em que $n \gg n_x$. Portanto foi possível graficarmos o comportamento de $I_{rms,sat}$ para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ , como é visto na Figura 3.3. O valor encontrado para o expoente foi de $\alpha = 0,515(6)$.

Por último temos o expoente crítico z , que pode ser obtido a partir da relação dada pela terceira hipótese de escala ($n_x \propto \epsilon^z$), em que n_x é um número característico da iteração que indica a mudança do comportamento de crescimento acelerado para um regime de saturação, desta forma a partir do gráfico de $n_x \times \epsilon$ apresentado pela Figura 3.4, foi obtido o valor de $z = -0,97(2)$.

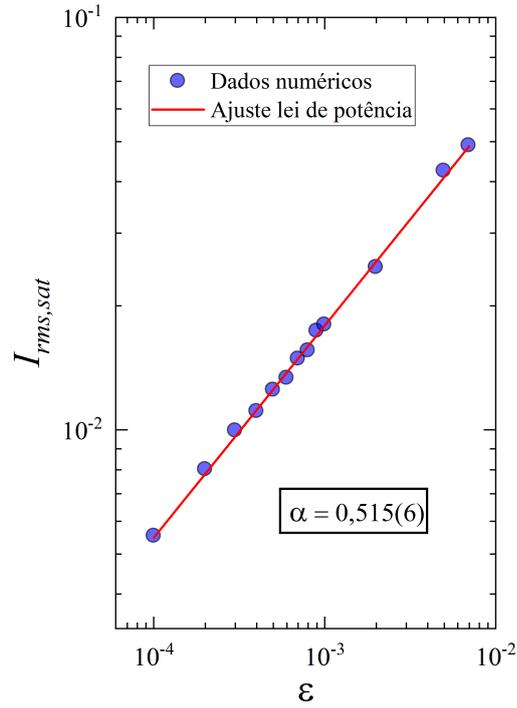


Figura 3.3: Comportamento de $I_{rms,sat} \times \epsilon$ para $n \gg n_x$. O expoente crítico obtido foi de $\alpha = 0,515(6)$.

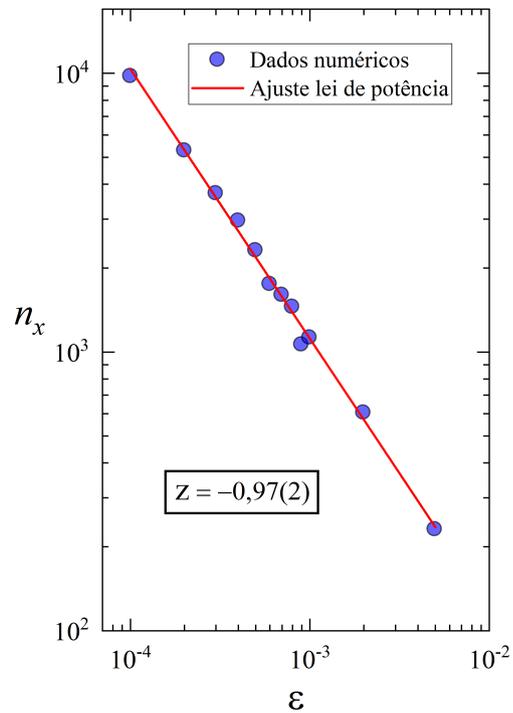


Figura 3.4: Comportamento de $n_x \times \epsilon$. O expoente crítico obtido foi $z = -0,97(2)$.

Por outro lado, podemos também analisar o resultado destacado em (3.11) juntamente aos valores obtidos para os expoentes α e β simulacionalmente, portanto temos que:

$$z = \frac{0,515(6)}{0,501(5)} - 2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z = -0,97(2)}. \quad (3.12)$$

O valor obtido para z pela lei de escala está de acordo com aquele encontrado numericamente através do ajuste para a lei de potência visto pela Figura 3.4.

O conjunto dos expoentes críticos obtidos confirmam a invariância de escala encontrada no mar de caos do espaço de fases. Para tal verificação podemos realizar uma sobreposição das curvas de I_{rms} para quaisquer diferentes valores de ϵ em uma única curva universal. A transformação a ser feita deve ser $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/\epsilon^\alpha$ e $n \rightarrow n/\epsilon^z$.

A Figura 3.5(a) mostra o gráfico de $I_{rms} \times n$ para cinco diferentes valores do parâmetro de controle ϵ . Já a Figura 3.5(b) apresenta todas as curvas exibidas em (a) sobrepostas em uma curva universal após a transformação de escala mencionada. Está é uma confirmação evidente da invariância de escala apresentada no mar de caos para o mapeamento (2.11), sendo este um importante indicador de que o sistema está passando por uma transição de fase. De fato, temos uma transição de fase de integrabilidade para não integrabilidade.

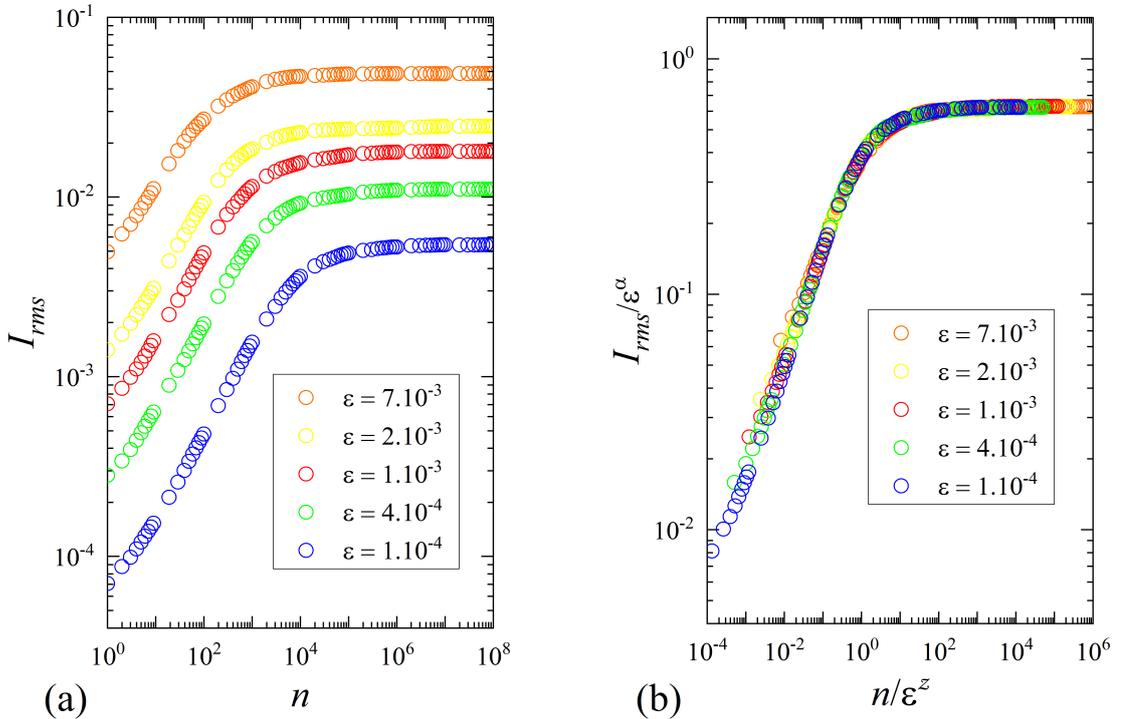


Figura 3.5: (a) Gráfico de $I_{rms} \times n$ para cinco diferentes parâmetros de controle ϵ . (b) Sobreposição das curvas apresentadas em (a) em uma única curva universal depois da transformação de $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/\epsilon^\alpha$ e de $n \rightarrow n/\epsilon^z$.

3.2 Descrição analítica da ação quadrática média

Nesta Seção será visto como podemos obter uma descrição das curvas de $I_{rms} \times n$ a partir da ação quadrática média \bar{I}^2 , contudo ao invés da metodologia utilizada anteriormente, em que fora realizada uma caracterização fenomenológica, será utilizada uma descrição analítica através da solução da equação da difusão (como feito em [39–41]).

3.2.1 Equação da Difusão

A equação da difusão [42], é escrita como:

$$\frac{\partial P(I, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(I, n)}{\partial I^2}, \quad (3.13)$$

em que P é a probabilidade de observarmos uma determinada ação I em um instante n conhecido e D é o coeficiente de difusão. Como pode ser observado pela Figura 3.6, a difusão das partículas no mar de caos é limitada pelas primeiras curvas invariantes do tipo *spanning* marcadas pelas linhas em azul, de forma em que $I_{caos} \in [-I_{fisc}, +I_{fisc}]$.

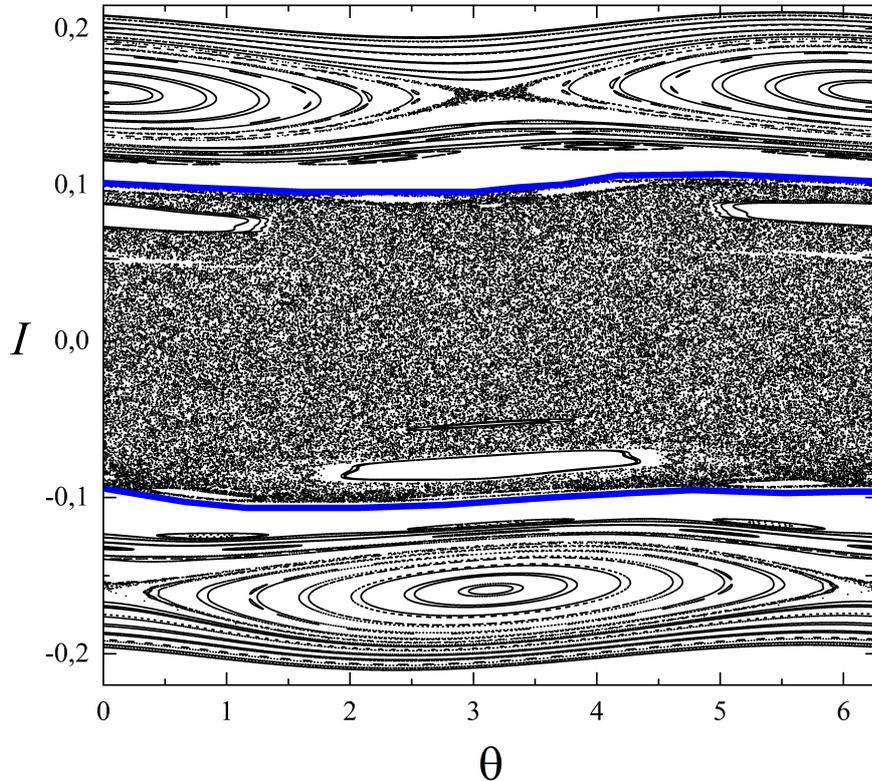


Figura 3.6: Espaço de fases para o mapeamento (2.11) com parâmetros de controle $\gamma = 1$ e $\epsilon = 10^{-2}$. As curvas em azul representam as primeiras curvas invariantes *spanning*, são responsáveis por delimitar o mar de caos em uma região limitada e fechada.

Vemos também que dada uma condição inicial fornecida ao longo destas curvas, as par-

tículas permanecem confinadas nas mesmas para qualquer tempo $n \geq 0$, portanto temos como condição de contorno que:

$$\left. \frac{\partial P(I, n)}{\partial I} \right|_{I=\pm I_{fisc}} = 0. \quad (3.14)$$

Também as condições iniciais são escolhidas de forma em que todas estão centradas em $I = I_0$ e $n = 0$, portanto $P(I_0, n) = \delta(I - I_0)$.

3.2.2 Solução da equação da difusão

Primeiramente será determinado o coeficiente D a partir da primeira equação do mapeamento. Elevando ao quadrado ambos os lados da primeira equação do mapeamento (2.11), temos que:

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + \epsilon^2 \sin^2(\theta_n), \quad (3.15)$$

a média desta expressão nos fornece o valor para o coeficiente de difusão:

$$D = \frac{I_{n+1}^2 - I_n^2}{2} = \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (3.16)$$

Para resolvermos a equação da difusão, será utilizada o método de separação de variáveis [42], portanto defini-se:

$$P(I, n) = X(I)Y(n), \quad (3.17)$$

sendo $X(I)$ e $Y(n)$ funções quaisquer que dependem respectivamente somente de I e n . Reagrupando a equação (3.13), temos que:

$$\frac{1}{Y(n)} \frac{\partial Y(n)}{\partial n} = \frac{D}{X(I)} \frac{\partial^2 X(I)}{\partial I^2} = -\eta, \quad (3.18)$$

desta forma torna-se possível separarmos a expressão (3.18) em duas equações diferenciais ordinárias da seguinte forma:

$$\frac{dY(n)}{dn} = -\eta Y(n), \quad (3.19)$$

e

$$D \frac{d^2 X(I)}{dI^2} + \eta X(I) = 0. \quad (3.20)$$

A solução para a equação (3.19) pode ser dada da seguinte forma:

$$\int_{Y_0}^{Y(n)} \frac{dY'(n)}{Y'(n)} = -\eta \int_0^n dn \implies$$

$$\implies \ln\left(\frac{Y(n)}{Y_0}\right) = -\eta n \implies \boxed{Y(n) = Y_0 e^{-\eta n}}. \quad (3.21)$$

Para a solução da equação (3.20), iremos considerar que $X(I) = Ae^{RI}$, em que R assume duas raízes a serem determinadas e A é uma constante. Desta forma suas derivadas ficam:

$$\frac{dX(I)}{dI} = AR e^{RI}, \quad (3.22)$$

e também,

$$\frac{d^2X(I)}{dI^2} = AR^2 e^{RI}. \quad (3.23)$$

Agora reescrevendo a equação (3.20), temos que:

$$\cancel{DAR^2 e^{RI}} + \cancel{\eta A e^{RI}} = 0 \implies DR^2 + \eta = 0 \implies$$

$$\implies R_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\eta}{D}}, \quad \text{em que } i = \sqrt{-1}. \quad (3.24)$$

A solução geral para $X(I)$ pode ser escrita como $Ae^{R_1 I} + Be^{R_2 I}$, portanto:

$$X(I) = Ae^{i\sqrt{\frac{\eta}{D}}I} + Be^{-i\sqrt{\frac{\eta}{D}}I}. \quad (3.25)$$

Utilizando a relação de Euler, $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$, podemos reescrever o resultado de (3.25) da seguinte forma:

$$X(I) = A \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right) + i \sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right) \right] + B \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right) - i \sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right) \right]. \quad (3.26)$$

Agora reagrupando os termos em comum, temos que:

$$X(I) = (A + B) \cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right) + (A - B)i \sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right). \quad (3.27)$$

Com o objetivo de termos apenas soluções reais é feito $A = B$, desta forma obtemos:

$$\boxed{X(I) = 2A \cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right)}. \quad (3.28)$$

Utilizando os resultados das equações (3.21) e (3.28), temos como possível solução para a probabilidade $P(I, n)$ como:

$$P(I, n) = 2A \cos\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I\right) Y_0 e^{-\eta n}. \quad (3.29)$$

Aplicando a condição de contorno (3.14), temos que:

$$\left. \frac{\partial P(I, n)}{\partial I} \right|_{I=\pm I_{fisc}} = -2A \sqrt{\frac{\eta}{D}} \sin\left(\sqrt{\frac{\eta}{D}}I_{fisc}\right) Y_0 e^{-\eta n} = 0, \quad (3.30)$$

que só será nula quando $\sqrt{\frac{\eta}{D}}I_{fisc} = k\pi$, com $k = 1, 2, 3, \dots$. Portanto temos que:

$$\eta = \frac{k^2 \pi^2}{I_{fisc}^2} D. \quad (3.31)$$

Contudo para o caso específico de $k = 0 \rightarrow \eta = 0$, desta forma podemos obter novas soluções para as EDOs apresentadas na equação (3.18). Assim, as novas soluções são dadas por:

$$Y(n) = Y_0, \quad (3.32)$$

$$X(I) = X_0 + cI, \quad (3.33)$$

portanto a nova solução para a equação (3.17) é dada por:

$$P(I, n) = Y_0(X_0 + cI), \quad (3.34)$$

com Y_0 , X_0 e c constantes. Desta forma, aplicando novamente a condição de contorno de (3.14), obtemos:

$$\frac{dP(I, n)}{dI} = Y_0 c = 0 \quad \implies \quad c = 0. \quad (3.35)$$

Podemos então escrevermos uma solução geral para $P(I, n)$ da seguinte forma:

$$P(I, n) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\left[\frac{k\pi I}{I_{fisc}}\right] e^{-\frac{k^2 \pi^2 D}{I_{fisc}^2} n}, \quad (3.36)$$

em que C_0 e C_k são coeficientes a serem determinados. Como visto em [39], os coeficientes podem ser obtidos através de simples integrações e também utilizando a normalização da probabilidade em que $\int_{-I_{fisc}}^{+I_{fisc}} P(I, n) dI = 1$, o que nos leva:

$$C_0 = \frac{1}{2I_{fisc}}, \quad (3.37)$$

$$C_k = \frac{1}{I_{fisc}}. \quad (3.38)$$

Reescrevendo a equação (3.36) temos que:

$$P(I, n) = \frac{1}{2I_{fisc}} + \frac{1}{I_{fisc}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left[\frac{k\pi I}{I_{fisc}} \right] e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} n}. \quad (3.39)$$

Por fim, podemos calcular o observável I_{rms} analiticamente. Na Seção 3.1 vemos que $\bar{I} = 0$, portanto não sendo um bom candidato para a descrição do fenômeno. Assim temos como um bom candidato para a descrição da difusão das partículas no mar de caos a ação quadrática média $\overline{I^2}$. A média no *ensemble* de condições iniciais via solução da equação de difusão é dada por:

$$\overline{I^2}(n) = \int_{-I_{fisc}}^{+I_{fisc}} I^2 P(I, n) dI = I_{fisc}^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} n} \right]. \quad (3.40)$$

Igualmente ao que foi realizado para descrição fenomenológica, tínhamos uma média no conjunto de condições iniciais e também uma média referente as orbitas produzidas pela iteração do mapeamento. Portanto nos resta realizar a média em n , referente às orbitas $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} I_j^2$. Vale notar que apenas o último termo da expressão (3.40) possui dependência com n , logo esta média pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} j} &= \frac{1}{n} \left[e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}} + e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} 2} + \dots + e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} n} \right], \\ &= \frac{1}{n} \left[e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} n}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Reescrevendo a equação (3.40), temos que:

$$\overline{I^2}(n) = I_{fisc}^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \frac{1}{n} \left[e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} n}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}}} \right) \right] \right\}. \quad (3.42)$$

Por fim podemos descrever analiticamente o comportamento de $I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2}(n)}$:

$$I_{rms} = I_{fisc} \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \frac{1}{n} \left[e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2} n}}{1 - e^{-\frac{k^2\pi^2 D}{I_{fisc}^2}}} \right) \right]}. \quad (3.43)$$

Este último resultado apresentado pela Eq. (3.43) descreve analiticamente o comportamento da difusão das partículas dadas no mar de caos do espaço de fases.

A Figura 3.7 nos mostra um gráfico de $I_{rms} \times n$ para cinco diferentes parâmetros de controle ϵ comparando as duas diferentes metodologias utilizadas (simulacional e analítica). Os círculos representam as simulações numéricas obtidas a partir das equações do mapeamento (2.11) (descrição fenomenológica) e as linhas contínuas descrevem os resultados analíticos, realizados a partir da solução da equação da difusão.

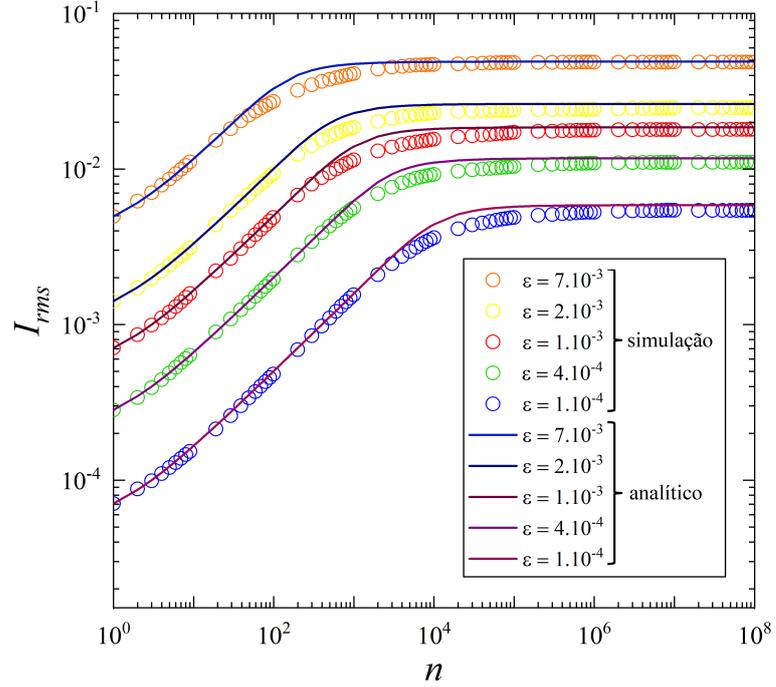


Figura 3.7: Gráfico de I_{rms} vs. n para 5 diferentes parâmetros de controle ϵ . Os círculos representam uma descrição fenomenológica da ação quadrática média, já as linhas contínuas representam este mesmo observável, contudo para uma descrição analítica através da solução da equação da difusão.

A Figura 3.8 apresenta todas as curvas exibidas em Fig. 3.7 sobrepostas em uma curva universal após as transformações de escala $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/\epsilon^\alpha$ e $n \rightarrow n/\epsilon^z$, a partir dos expoentes críticos obtidos na Subseção 3.1.1.

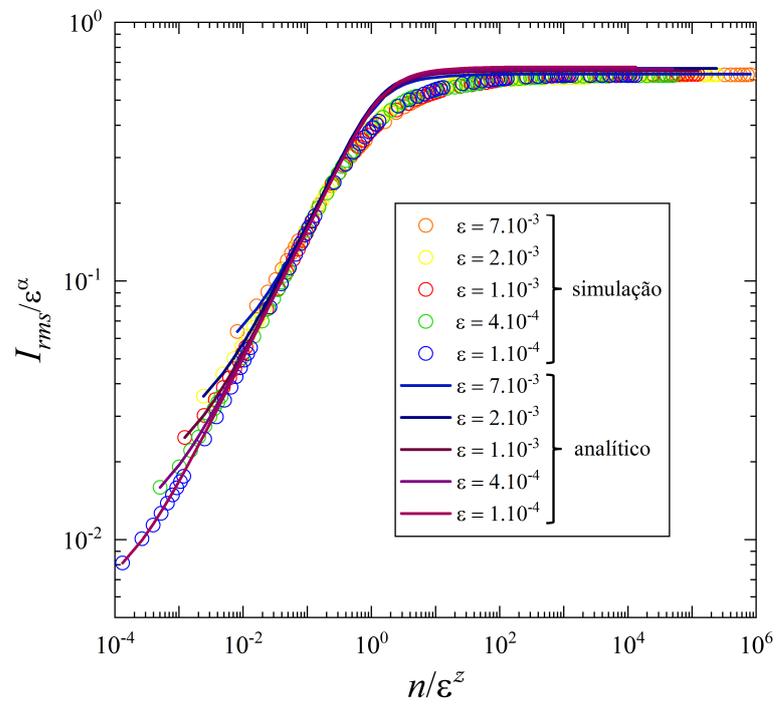


Figura 3.8: Sobreposição das curvas apresentadas na Figura 3.7 em um única curva universal depois da transformação $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/\epsilon^\alpha$ e $n \rightarrow n/\epsilon^z$.

Capítulo 4

Um *insight* sobre a transição de fase

Como proposto inicialmente, devemos responder a 4 perguntas essenciais propostas em [10] que levam a caracterização de uma transição de fase, são elas: (1) qual é a quebra de simetria do sistema; (2) quem seria um bom candidato para parâmetro de ordem; (3) quais são as excitações elementares e; (4) quais são os defeitos topológicos que dificultam o transporte de partículas.

4.1 (1) Quebra de simetria

A primeira pergunta pode ser respondida ao observarmos os espaços de fases das Figura 2.2(a) e (b) encontradas na Seção 2.1. Foi apresentado que, dada uma mudança do parâmetro de controle de $\epsilon = 0$ (sistema integrável) para $\epsilon = 10^{-3}$ (sistema não integrável), o espaço de fases que possuía curvas simétricas e regulares, transforma-se em um espaço de fases misto com estruturas características e bem definidas, são elas: o mar de caos, que por sua vez rodeia as ilhas de periodicidade, e que também é limitado pelas primeiras curvas invariantes do tipo *spanning*. Desta forma, é identificada a quebra de simetria do sistema no que diz respeito ao espaço de fases, sendo este um dos fatores que caracterizam uma transição de fase.

4.2 (2) Parâmetro de ordem

Como visto em [10] o parâmetro de ordem pode ser definido como as importantes variáveis que descrevem um determinado sistema. O parâmetro de ordem escolhido deve ir a zero continuamente a medida em que $\epsilon \rightarrow 0$.

O expoente de Lyapunov apresentado na Seção 2.3, não é um bom candidato a parâmetro de ordem, visto que pela Figura 2.4 podemos observar que $\bar{\lambda}$ não vai a zero continuamente ao passo em que o parâmetro de controle da transição de fase ϵ vai a zero.

Neste sentido, pode-se verificar que um ótimo observável à ser parâmetro de ordem é $I_{rms,sat}$.

Para tal verificação iremos primeiramente retomar o resultado já apresentado posteriormente na Seção 2.5 sobre a posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*:

$$\tilde{I} = \left[\frac{\gamma \epsilon}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad (4.1)$$

ou então,

$$\tilde{I} = \left[\frac{\gamma}{K_{ef}} \right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad (4.2)$$

em que $K_{ef} \simeq 0,9716$ é o parâmetro de controle efetivo.

A posição das primeiras curvas invariantes delimitam a região do mar de caos, e como visto em [13], \tilde{I} está diretamente relacionado com o comportamento apresentado por I_{rms} , de fato, para $n \gg n_x$. Desta forma, \tilde{I} define uma regra de I_{rms} para valores grandes de n como uma função de ϵ (este já visto pela Figura 3.3). Portanto torna-se possível compararmos a equação (4.2) com a segunda hipótese de escala (3.3), $I_{rms,sat} \propto \epsilon^\alpha$, situada na Seção 3.1, o que nos leva:

$$\alpha = \frac{1}{\gamma + 1} \quad \text{onde } \gamma > 0. \quad (4.3)$$

Portanto, reescrevendo a segunda hipótese de escala temos que:

$$\boxed{I_{rms,sat} \propto \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}} \quad (4.4)$$

Para que possamos justificar a escolha do parâmetro de ordem $I_{rms,sat}$, duas condições devem ser satisfeitas:

1. Primeiramente devemos ter que, ao passo em que o parâmetro de controle do sistema ϵ tende a zero ($\epsilon \rightarrow 0$), o parâmetro de ordem escolhido deve se aproximar continuamente de zero (definindo assim um parâmetro de ordem);
2. O resultado de uma perturbação externa sobre o parâmetro de ordem deve divergir em seu limite ($\epsilon \rightarrow 0$), ou seja, a susceptibilidade $\chi \rightarrow \infty$. Este último por sua vez caracteriza uma transição de fase de segunda ordem.

Podemos notar pela nova segunda hipótese de escala ($I_{rms,sat} \propto \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}$) e pela Figura 3.3, que ao passo em que o parâmetro de controle $\epsilon \rightarrow 0$, o termo escolhido ($I_{rms,sat}$) aproxima-se de zero continuamente, portanto sendo um bom candidato à parâmetro de ordem deste sistema. Por fim, a segunda proposição pode ser verificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \chi = \left. \frac{\partial I_{rms,sat}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} &\implies \chi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\gamma + 1} \right] \epsilon^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}} \implies \\ &\implies \chi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\gamma + 1} \right] \frac{1}{\epsilon^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como γ é sempre um número maior que zero, temos que no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ a susceptibilidade $\chi \rightarrow \infty$. Este um fator característico de uma transição de fase de segunda ordem (transição de fase contínua).

4.3 (3) Excitações elementares

Para a investigação das excitações elementares devemos lembrar algumas características já discutidas anteriormente sobre o mapeamento (2.11) apresentado no Capítulo 2. Foi observado a presença de dois diferentes parâmetros de controle. Um deles é ϵ , que controla a intensidade da não linearidade do sistema. Este fato se dá à existência do termo não linear $\sin(\theta_n)$. O segundo parâmetro é dado por $\gamma > 0$, este último controla a velocidade da divergência do ângulo θ para o limite de I suficientemente pequeno. De fato, foi possível percebermos que ao passo em que I é muito pequeno o termo $\theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma}$ diverge, o que faz com que não ocorra correlação entre θ_{n+1} e θ_n . Desta forma, o comportamento de $\sin(\theta_n)$ na primeira equação do mapeamento (2.11) apresentaria um comportamento totalmente aleatório (*random walk* [10, 24]), trazendo então uma difusão de órbitas caóticas para o espaço de fases (como pode ser visto pela Figura 2.2 (b)). Conforme I passa a crescer, as variáveis angulares passam a apresentar correlação, trazendo regularidade para o espaço de fases (presença de ilhas periódicas e curvas invariantes).

A amplitude média I_a para este comportamento aleatório pode ser obtida a partir de uma média feita sobre a primeira equação do mapeamento (2.11), portanto analogamente a (3.15) temos que:

$$I_{n+1}^2 = I_n^2 + \epsilon^2 \sin^2 \theta_n, \quad (4.6)$$

assim, realizando a média dos valores para cada termo da equação (4.6), e considerando que as condições iniciais fornecidas estão próximas a zero obtemos:

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \epsilon^2 \overline{\sin^2 \theta_n} \implies I_a^2 = \frac{\epsilon^2}{2} \implies \boxed{I_a = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}}. \quad (4.7)$$

Estes fatos nos levam a concluir que a excitação elementar deste sistema é definida pela função não linear $\epsilon \sin(\theta)$, encontrada na primeira equação do mapeamento (2.11), cuja amplitude média é dada por $I_a = \epsilon/\sqrt{2}$. Este termo leva a uma dinâmica totalmente

aleatória no limite de baixos valores da ação I , trazendo assim as primeiras órbitas caóticas para espaço de fases.

4.4 (4) Defeitos topológicos

Os defeitos topológicos estão diretamente relacionados com a probabilidade de distribuição das partículas ao longo do espaço de fases. A presença das ilhas de estabilidade, centradas por um ponto fixo elíptico, serão as principais estruturas responsáveis por estes defeitos. Este fato se dá devido a perda de previsibilidade da distribuição das partículas nestas regiões. Esta perda de previsibilidade na dinâmica do sistema ocorre devido ao efeito de *stickiness* [43]. Este, por sua vez, é caracterizado como um aprisionamento temporário sobre a trajetória de órbitas caóticas presentes nas fronteiras destas estruturas regulares (ilhas periódicas). Portanto, temos uma distribuição de partículas mais densa nestas regiões.

Devemos analisar também a probabilidade de sobrevivência ρ , que define a probabilidade de uma partícula sobreviver ao longo da dinâmica caótica sem que esta escape desta região. Como visto em [40], foi percebido uma modificação desta probabilidade em resposta ao efeito de *stickiness*, sendo este identificado pela transição de um decaimento exponencial, de ρ ao longo do tempo n , para um decaimento desacelerado em lei de potência. O decaimento exponencial desta probabilidade define um sistema cuja a dinâmica do transporte das partículas é normal (difusão Browniana [43]), por outro lado, a mudança para um decaimento desacelerado em lei de potência caracteriza a presença do efeito de *stickiness*, em que as órbitas caóticas permanecem temporariamente aprisionadas próximas a estas ilhas periódicas. Portanto as ilhas periódicas podem ser classificadas como sendo os defeitos topológicos que impactam no transporte de partículas do sistema.

Capítulo 5

Discussões e conclusão

Utilizando a dinâmica de um mapeamento discreto sob as variáveis ação I e ângulo θ , caracterizamos uma transição de fase dinâmica de integrabilidade para não integrabilidade, a qual ocorre na variação do parâmetro de controle ϵ . Para $\epsilon = 0$ temos um sistema integrável, já para $\epsilon \neq 0$ o sistema passa a ser não integrável. No início desta descrição foi caracterizada uma família de mapeamentos discretos e suas principais propriedades, tais como a construção dos espaços de fases e a descrição de suas estruturas (mar de caos, ilhas periódicas e curvas invariantes *spanning*). Mais adiante fizemos uma abordagem completa sobre a caracterização da difusão das partículas apresentadas no mar de caos do espaço de fases através de duas diferentes metodologias. Primeiramente recorreremos a uma descrição fenomenológica utilizando um processo simulacional. Assim, analisando as curvas de $I_{rms} \times n$, assumindo três hipóteses de escala e utilizando uma função homogênea generalizada foi possível a obtenção da lei de escala que correlaciona os três expoentes críticos responsáveis pela descrição da dinâmica desta difusão: α (expoente de saturação), β (expoente de aceleração) e z (expoente de *crossover*). Estes três expoentes de escala são também obtidos numericamente confirmando a lei de escala. O segundo método é analítico, através da solução da equação da difusão. A comparação destas duas metodologias é feita na Seção 3.2, em que é possível observarmos uma boa concordância entre esses dois formalismos. Utilizando a transformação $I_{rms} \rightarrow I_{rms}/\epsilon^\alpha$ e de $n \rightarrow n/\epsilon^z$ a invariância de escala é mostrada para o mar de caos, sendo este um bom indicador de que o sistema está passando por uma transição de fase.

Por fim, no Capítulo 4 a transição de fase é caracterizada, respondendo à quatro perguntas propostas em [10]. Primeiramente, a quebra de simetria dada pelo espaço de fases com o parâmetro de controle ϵ próximo a transição de integrabilidade ($\epsilon = 0$) para não integrabilidade ($\epsilon \neq 0$). Segundo, o parâmetro de ordem identificado por $I_{rms,sat} \propto \epsilon^{\frac{1}{\gamma+1}}$, pois $I_{rms,sat} \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Também temos que a susceptibilidade $\chi \rightarrow \infty$ no limite de $\epsilon \rightarrow 0$. Esta última é uma assinatura clara de uma transição de fases de segunda

ordem (contínua). Em terceiro, as excitações elementares são definidas pela função não linear $\epsilon \sin(\theta_n)$, que trás um comportamento semelhante a uma caminhada aleatória para a dinâmica no limite de valores pequenos de I , portanto criando órbitas caóticas para o espaço de fases. Os defeitos topológicos que impactam na difusão das partículas são dados pelas estruturas regulares presentes no espaço de fases, as ilhas periódicas. A trajetória de uma órbita caótica evoluindo próxima à superfície de uma ilha periódica sofre do efeito de *stickiness*, comprometendo o transporte das partículas. Todos estes fatores nos permitem concluir que a transição de fase de integrabilidade para não integrabilidade deste sistema é uma transição de segunda ordem.

Com base no sucesso da descrição da transição de fase apresentada neste projeto, temos como perspectiva, entender a aplicabilidade deste formalismo para o estudo da transição de fase de difusão limitada para ilimitada em um sistema dissipativo.

Capítulo 6

Referências Bibliográficas

- [1] LEONEL, E. D. **Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019.
- [2] LEONEL, E. D. **Scaling laws in dynamical systems**. 1. ed. Cingapura: Springer, 2021.
- [3] STROGATZ, S.H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**. 2. ed. Nova York: CRC Press, 2018.
- [4] POINCARÉ, H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Méthodes de MM. Newcomb, Glydén, Lindstedt et Bohlin**. Vol. 2. França: Gauthier-Villars it fils, 1893.
- [5] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of atmospheric sciences**, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.
- [6] NETO, A. M. F.; SALINAS, S. R. A. **The physics of lyotropic liquid crystals: phase transitions and structural properties**. EUA: Oxford University Press on Demand, 2005.
- [7] KADANOFF, L. P. **Statistical physics: statics, dynamics and renormalization**. Cingapura: World Scientific Publishing Company, 2000.
- [8] REICHL, L. E. **A modern course in statistical physics**. 2. ed. Nova York: Wiley-Interscience, 1999.
- [9] JAEGER, G. The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 53, n. 1, p. 51–81, 1998.
- [10] SETHNA, J.P. **Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters, and Complexity**. 2. ed. Nova York: Oxford University Press 2020.

- [11] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and chaotic dynamics**. 2. ed. Nova York: Springer Science, 2013.
- [12] POLLNOW, H. **Descrição Clássica para a Interação de dois átomos de Rydberg**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1884/25686>
- [13] LEONEL, E. D. et al. A dynamical phase transition for a family of Hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents. **Physics Letters A**, v. 379, n. 32-33, p. 1808–1815, 2015.
- [14] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Physics Report**, v. 52, n. 05, p. 263–379, 1979.
- [15] LASKAR, J.; FROESCHLÉ, C.; CELLETTI, A. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 56, n. 2-3, p. 253–269, 1992.
- [16] PIÑA, E.; LARA, L. J. On the symmetry lines of the standard mapping. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v.26, n. 1-3, p. 369–378, 1987.
- [17] SILVA, J. K. L. D. et al. Scaling properties of the Fermi-Ulam accelerator model. **Brazilian Journal of Physics**, v. 36, n. 3A, p. 700-707, 2006.
- [18] LIEBERMAN, M. A.; LICHTENBERG, A. J. Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces. **Physical Review A**, v. 5, n. 04, p. 1852, 1972.
- [19] PUSTYL'NIKOV, L. D. Stable and oscillating motions in nonautonomous dynamical systems. **Transactions of the Moscow Mathematical Society**, v. 34, p. 3-103, 1977.
- [20] HOWARD, J. E.; HUMPHERYS, J. Nonmonotonic twist maps. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 80, p. 256–276, 1995.
- [21] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E. A hybrid Fermi–Ulam-bouncer model. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 38, n. 04, p. 823–839, 2005.
- [22] LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. Dynamical properties of a dissipative hybrid Fermi-Ulam-bouncer model. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 17, n. 01, p. 013119, 2007.
- [23] OLIVEIRA, D. F. M.; BIZÃO, R. A.; LEONEL, E. D. Scaling Properties of a Hybrid Fermi-Ulam-Bouncer Model. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 1–13, 2009.

- [24] REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. 1. ed. Nova York: Waveland Press, 2009.
- [25] PENALVA, J. **Expoentes de escala e mapeamentos discretos bidimensionais**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/123870>.
- [26] ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, v. 57, n. 03, p. 617–656, 1985.
- [27] LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA 2015.
- [28] FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. **Caos: uma introdução**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 1994.
- [29] GREENE, J. M. A method for determining a stochastic transition. **Journal of Mathematical Physics**, v. 20, n. 06, p. 1183–1201, 1979.
- [30] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E.; DA SILVA, J. K. L. Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 01, p. 014101, 2004.
- [31] MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A.; AGUILAR-SÁNCHEZ, R. Scaling properties of discontinuous maps. **Physical Review E**, v. 85, n. 05, p. 056212, 2012.
- [32] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model. **Physical Review E**, v. 73, n. 02, p. 026201, 2006.
- [33] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Scaling properties of a simplified bouncer model and of Chirikov’s standard map. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, n. 38, p. 11467–11483, 2007.
- [34] LADEIRA, D. G.; DA SILVA, J. K. L. Scaling features of a breathing circular billiard. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 41, n. 36, p. 365101, 2008.
- [35] DE ALCANTARA BONFIM, O. F. Dynamical properties of an harmonic oscillator impacting a vibrating wall. **Physical Review E**, v. 79, n. 05, p. 056212, 2009.
- [36] DE ALCANTARA BONFIM, O. F. Fermi acceleration in a periodically driven Fermi-Ulam model. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 22, n. 06, p. 1250140, 2012.

- [37] OLIVEIRA, D. F. M.; ROBNIK, M. In-flight dissipation as a mechanism to suppress Fermi acceleration. **Physical Review E**, v. 83, n. 02, p. 026202, 2011.
- [38] DE OLIVEIRA, J. A.; BIZÃO, R. A.; LEONEL, E. D. Finding critical exponents for two-dimensional Hamiltonian maps. **Physical Review E**, v. 81, n. 04, p. 046212, 2010.
- [39] Kuwana, C. M. **Investigação da difusão caótica em mapeamentos Hamiltonianos**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/154008>
- [40] LEONEL, E. D.; KUWANA, C. M. An Investigation of Chaotic Diffusion in a Family of Hamiltonian Mappings Whose Angles Diverge in the Limit of Vanishingly Action. **Journal of Statistical Physics**, p. 170, n. 01, p. 69–78, 2017.
- [41] LEONEL, E. D. et al. Application of the diffusion equation to prove scaling invariance on the transition from limited to unlimited diffusion. **EPL (Europhysics Letters)**, p. 131, n. 01, p. 10004, 2020.
- [42] BUTKOV, E. **Mathematical physics**. 1. ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1968.
- [43] KRÜGER, T. S. **Grau de Hiperbolicidade do espaço de fases e sua relação com o efeito stickiness em sistemas conservativos**. Dissertação (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Paraná, 2016. Disponível em: <https://hdl.handle.net/1884/43665>