

Alyne Toscano Martins

*Estratégias para a redução de ciclos da serra
no problema de corte de estoque
na indústria moveleira*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Alyne Toscano Martins¹

*Estratégias para a redução de ciclos da serra
no problema de corte de estoque
na indústria moveleira*

Orientadora:

Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Nogueira Rangel

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

16 de Abril de 2010

¹alynetoscano@hotmail.com

Martins, Alyne Toscano.

Estratégias para redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque na indústria moveleira / Alyne Toscano Martins. – São José do Rio Preto: [s.n.], 2010.

155 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maria do Socorro Nogueira Rangel

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Pesquisa operacional. 2. Otimização matemática. 3. Indústria de móveis. 4. Problema de corte de estoque. 5. Padrões de corte n-grupos. I. Rangel, Maria do Socorro Nogueira II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas III. Título.

CDU - 519.8

Alyne Toscano Martins

*Estratégias para a redução de ciclos da serra
no problema de corte de estoque
na indústria moveleira*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Nogueira Rangel
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Horacio Hideki Yanasse
Professor Doutor
INPE - São José dos Campos

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 16 de Abril de 2010.

Aos meus amados pais, Vera e Eurides.

Aos meu amado irmão José.

Ao meu amor Cleber.

Aos meus queridos amigos.

Dedico.

Agradecimentos

A Deus por mais uma oportunidade de crescimento intelectual e espiritual.

Aos meus pais Vera e Eurides e ao meu irmão José, pelo amor, apoio incondicional, incentivo, esforços sem medida e por sempre acreditarem em mim quando nem mesmo eu acreditava.

Um agradecimento especial a minha orientadora Prof^a. Dr^a. Socorro Rangel, pela orientação deste trabalho, dedicação, ensinamentos, auxílio, confiança e amizade. Muito obrigada, por ter sido muito mais que orientadora, pelos conselhos e conversas (extra-projeto) que muito me fizeram crescer como pessoa ao longo desses dois anos.

Aos professores de graduação e pós-graduação, em especial à Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade, ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, ao Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo e Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva pela atenção, incentivo e ensinamentos. Agradeço em especial à Prof^a. Dr^a. Cleonice Fátima Bracciali pela atenção, dedicação, incentivo e pelos valiosos ensinamentos durante a graduação.

A todos os colegas de graduação, em especial aos amigos Ana Paula, Ana Cláudia, Cyntia, Fernanda, Gustavo, Inaiá, Íris, Juliana, Jucilene, Junior, Marcos Proença, Manuella, Marjory, Renata, Taísa, Vanessa, Viviane, Wallace e Yen, pelas incontáveis horas de estudo na biblioteca (e fora dela), também pelas risadas, pelos almoços no RA e amizade durante quatro anos de convívio. Um agradecimento especial à Cristiane (Cris) por todo o apoio ao longo da graduação e pela amizade sincera.

Aos amigos de pós-graduação André, Cintya, Cristiane Maria, Diego, Deivid, Eliel, Fábio, Fernando, Guilherme, Heron, José Augusto, Jucilene, Junior, Leandro, Manuella, Marcos Proença, Marcos Willian, Meire, Michelli, Mirela, Regina, Wallace e aos demais colegas, pelos momentos de estudo e conversas na salinha, pelos muitos “cafézinhos” no DCCE e pela amizade.

Um agradecimento especial aos amigos Cristiane (Cris Maria), Manuella (Manuzinha), Marcos (Proença Junior) e Wallace, pelos momentos de muito estudo, de angústias divididas, muitos risos, grande amizade e uma preciosa colaboração à realização deste trabalho.

Ao meu namorado Cleber pelo carinho, compreensão, incentivo e por sempre estar ao meu lado em todos os momentos. Agradeço também a sua família pela admiração e apoio.

Aos todos os meus familiares pelo carinho e por sempre torcerem pelas minhas conquistas. Em especial aos meus tios Bel (Tia Nenem) e Marcos pelo amor, carinho, dedicação e apoio financeiro.

Aos amigos, que sempre fizeram parte da minha vida, mesmo distantes. Agradeço aos

amigos e professores da “ETE Philadelpho Gouvêa Netto” onde vivi os anos mais mágicos da minha vida. Em especial à Angélica por todo o apoio, companheirismo e incentivo.

A Gabriela Perez Mosquera pelo apoio no início deste trabalho e por sempre estar disposta a me ajudar.

A Ana Paula Faccio pelo código de geração dos padrões de corte n -grupos.

Aos professores e/ou pesquisadores Altamir Figueiredo, Horácio Yanasse, Luiz Leduino, Marcos Arenales, Silvio Araujo e Sonia Poltroniere, pela atenção, contribuição e ajuda prestada no desenvolvimento desta dissertação.

A todo o pessoal da Fábrica de Móveis Luapa, em especial, ao Paulo, Antônio e Jarbas, por estarem sempre dispostos a nos receber e colaborar para a realização deste trabalho.

A todos os colegas, pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em especial ao Marcos, Getúlio, Olga e Esther por sempre estarem dispostos a ajudar.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

*A mente que se abre a uma nova
idéia jamais voltará ao seu tamanho original.*
(Albert Einstein)

*Aprender é como remar contra a correnteza,
sempre que se pára, anda-se para trás.*
(Confúcio)

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de corte de estoque bidimensional originado da realidade de uma fábrica de móveis. Descrevemos o sistema de produção de uma fábrica de móveis característica do Polo Moveleiro de Votuporanga, com ênfase no setor de corte da matéria-prima, e propomos um algoritmo para resolver o problema de corte de estoque considerando a minimização do número de objetos cortados e do número de ciclos da serra. A ideia principal do algoritmo proposto (AFM-P) consiste em adicionar ao problema, de forma dinâmica, restrições que imponham uma frequência mínima para a utilização de um dado padrão de corte. A cada iteração uma solução é gerada e no final do algoritmo existe um conjunto de soluções que são analisadas segundo critérios de dominância. Realizamos um estudo computacional utilizando os dados reais da fábrica visitada para analisar o comportamento do AFM-P. O estudo computacional mostrou que através do algoritmo proposto é possível encontrar soluções próximas e, na maioria das vezes, melhores que a prática da indústria tomada como estudo de caso.

Palavras-chave: Problema de Corte de Estoque Bidimensional. Ciclos da Serra. Padrões de corte n -grupos. Indústria Moveleira.

Abstract

In this work we study the two-dimensional cutting stock problem originated from a furniture industry. We describe the production system of a characteristic furniture plant situated at Votuporanga Regional Center and we propose an algorithm to solve the cutting stock problem taking into account the minimization of the number of objects and the number of saw cycles. The main idea of the algorithm (AFM-P) is adding to the problem, in a dynamic way, constraints that impose a minimum frequency to the use of a given cutting pattern. At each iteration a solution is generated and at the end there is a set of solutions that are analyzed according to dominance criteria. The AFM-P algorithm is tested using data from the furniture plant visited. The computational study shows that using the proposed algorithm it is possible to find solutions that are close the ones used in the industry practice and, in most cases, better than theirs.

Keywords: Two-dimensional Cutting Stock Problems. Saw Cycles. n -group Cutting Patterns. Furniture Industry.

Lista de Figuras

1	Equivalência entre os Problemas de Corte e Empacotamento.	p. 19
2	Problema de Corte Unidimensional.	p. 22
3	Problema de Corte Bidimensional.	p. 23
4	Problema de Corte Tridimensional.	p. 23
5	Problema $1\frac{1}{2}$ dimensional.	p. 24
6	Padrão de corte unidimensional.	p. 29
7	Padrão de corte bidimensional.	p. 30
8	Padrões de corte homogêneos maximais unidimensional e bidimensional.	p. 31
9	Exemplo de padrão de corte Guilhotinado e Não-Guilhotinado.	p. 44
10	Exemplo de um padrão de corte guilhotinado 3-estágios.	p. 45
11	Orientação dos itens.	p. 46
12	Padrões de corte bidimensionais equivalentes em termos de itens.	p. 47
13	Efeito de Simetria.	p. 47
14	Efeito de Ordenação.	p. 48
15	Cortes Normais ou Canônicos.	p. 49
16	Exemplo de padrões 1-grupo e 3-grupos.	p. 50
17	Padrões de corte n-grupos [35].	p. 51
18	Padrões do tipo “T” [24], [25].	p. 52
19	Itens incluídos nos padrões de corte exato e não-exato, respectivamente.	p. 55
20	Corte simultâneo de objetos.	p. 58
21	Pseudocódigo da Heurística de Yanasse <i>et al.</i> [91].	p. 71
22	Heurística 2 (Yanasse [89]).	p. 76

23	Matriz de restrições do AFM-P na iteração k	p. 81
24	Pseudocódigo do Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P).	p. 84
25	Fluxograma do Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P).	p. 85
26	Linha de produção da fábrica de móveis Fábrica V [17].	p. 92
27	Ordem de Produção da Fábrica V.	p. 94
28	Esboço da máquina seccionadora semi-automática vista de cima [37].	p. 95
29	Sequência de cortes na seccionadora 1 de um padrão de corte 3-estágios.	p. 97
30	Padrões de corte com itens agrupados.	p. 98
31	Esboço da máquina seccionadora automática vista de cima.	p. 99
32	Sequência de cortes na seccionadora 2 de um padrão de corte 3-estágios.	p. 101
33	Padrão de corte inteiro e $\frac{1}{2}$ padrão de corte.	p. 104
34	Padrão de corte desconsiderando o desgaste da serra.	p. 104
35	Padrão de corte utilizado pela Fábrica V.	p. 105
36	Gráficos da geração de colunas para tempos diferentes.	p. 111
37	Relação de dominância entre as soluções não dominadas do A5P-03 de cada β utilizando padrões 2-grupos.	p. 115
38	Iteração 5 da resolução do A5P-03 pelo AFM-P utilizando padrões 3t-grupos.	p. 116
39	Iteração 5 da resolução do A5P-03 pelo AFM-P utilizando padrões 3t-grupos.	p. 117
40	Relação de dominância entre as soluções não dominadas do A3P-20 de cada β utilizando padrões 2-grupos.	p. 120
41	Fronteira de Pareto [51].	p. 151
42	Relação de dominância entre soluções da região factível [6].	p. 152
43	Procedimento para encontrar um conjunto de soluções não dominadas	p. 153

Lista de Tabelas

1	Alterações no modelo 1-grupo para obtenção dos modelos 2-grupos, $3i$ -grupos e $3t$ -grupos [34].	p. 56
2	Dados do Exemplo 3.2.1.	p. 67
3	Primeira solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.1.	p. 67
4	Segunda solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.1.	p. 68
5	Primeira solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.2.	p. 68
6	Segunda solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.2.	p. 69
7	Conjuntos de exemplares, tipos de lotes, espessuras dos objetos.	p. 107
8	Tamanho dos lotes dos produtos utilizados como exemplares.	p. 108
9	Número de itens em comum entre os lotes simples de mesma espessura.	p. 108
10	Resumo dos dados dos exemplares utilizados.	p. 109
11	Geração de Colunas: Iteração, Função Objetivo e Perda.	p. 111
12	Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 30\%$	p. 112
13	Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 50\%$	p. 113
14	Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 80\%$	p. 113
15	Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 100\%$	p. 113
16	Resumo das soluções não dominadas do A5P-03 para cada β utilizando padrões 2-grupos.	p. 114
17	Soluções para o A5P-03, padrões 3t-grupos, $\beta = 100\%$	p. 115
18	Soluções para o A3P-20, padrões 2-grupos, $\beta = 50\%$	p. 118
19	Soluções para o A3P-20, padrões 2-grupos, $\beta = 80\%$	p. 119
20	Soluções para o A3P-20, padrões 2-grupos, $\beta = 100\%$	p. 119

21	Resumo das soluções não dominadas do A3P-20 para cada β utilizando padrões 2-grupos.	p. 120
22	AFM-P com padrões 2-grupos - Lote Simples - Soluções não dominadas. . .	p. 121
23	AFM-P com padrões 2-grupos - Lotes Duplo e Triplo - Soluções não dominadas.p.	122
24	AFM-P com padrões 3t-grupos - Lotes Duplo e Triplo - Soluções não dominadas.p.	124
25	AFM-P com padrões 3t-grupos - Lotes Duplo e Triplo - Soluções não dominadas.p.	125
26	AFM-P/2-grupos \times AFM-P/3t-grupos - Lote Simples.	p. 126
27	AFM-P/2-grupos \times AFM-P/3t-grupos - Lotes Duplo e Triplo.	p. 128
28	Melhores Soluções \times Indústria - Lote Simples.	p. 130
29	Melhores Soluções \times Indústria - Lotes Duplo e Triplo.	p. 131

Sumário

1	Introdução	p. 16
2	Problemas de Corte e Empacotamento	p. 19
2.1	Aspectos Históricos	p. 20
2.2	Classificação dos Problemas de Corte e Empacotamento	p. 21
2.2.1	Tipologia de Dyckhoff [32]	p. 22
2.2.2	Tipologia de Wäscher, HauBner e Schumann [86]	p. 25
2.3	O Problema de Corte de Estoque	p. 28
2.4	Métodos de Solução para o Problema de Corte de Estoque (PCE) . . .	p. 34
2.4.1	Princípio de Decomposição de <i>Dantzig-Wolfe</i>	p. 34
2.4.2	Método Simplex com Geração de Colunas	p. 37
2.4.3	Métodos de Enumeração Implícita	p. 42
2.5	Geração de Padrões de Corte Bidimensionais	p. 44
2.5.1	Padrão de Corte Guilhotinado e Não Guilhotinado	p. 44
2.5.2	Orientação dos Itens	p. 45
2.5.3	Redução de Padrões de Corte Irrelevantes	p. 46
2.5.4	Geração de Padrões de Corte n -grupos	p. 49
2.5.5	Trabalhos na Literatura	p. 56
2.6	Ciclos da Serra	p. 57
3	A redução do número de preparos no problema de corte de estoque	p. 60
3.1	Redução do Número de Padrões de Corte	p. 61

3.2	Redução do Número de Ciclos da Serra	p. 66
3.3	Nova Contribuição para a Redução de Ciclos da Serra	p. 78
3.3.1	Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P)	p. 79
4	Aplicação: Indústria Moveleira	p. 86
4.1	O Setor Moveleiro	p. 86
4.1.1	O Polo Moveleiro de Votuporanga	p. 90
4.2	Uma Fábrica Característica	p. 90
4.2.1	A Linha de Produção	p. 91
4.2.2	Planejamento da Produção	p. 92
4.2.3	O Corte da Matéria-Prima	p. 95
4.2.4	Padrões de Corte Utilizados pela Fábrica V	p. 101
5	Avaliação Computacional	p. 106
5.1	Descrição dos Exemplos	p. 106
5.2	Resultados do Estudo Computacional	p. 109
5.2.1	Análise Detalhada do Algoritmo AFM-P	p. 112
5.2.2	Resultados do AFM-P - Soluções Não Dominadas	p. 120
5.2.3	Resultados AFM-P - Padrões 2-grupos \times Padrões 3t-grupos	p. 125
5.2.4	Resultados do AFM-P e da Fábrica V	p. 129
6	Conclusões e Propostas Futuras	p. 134
	Referências Bibliográficas	p. 139
	Anexo A Método Simplex Revisado	p. 146
	Anexo B Otimização Multiobjetivo e Critérios de Dominância	p. 149

Capítulo 1

Introdução

Devido a globalização econômica, o esforço das indústrias para se manterem no mercado requer a adoção de um planejamento estratégico mais minucioso para que o retorno sobre investimentos internos seja favorável em médio e longo prazos. Assim, além de fatores críticos de competitividade que merecem uma análise mais detalhada, como por exemplo, diferenciação do produto, incorporação de novas máquinas, equipamentos e matéria-prima, a adoção de inovações organizacionais que visem a modernização e a racionalização dos processos produtivos da empresa e o melhor aproveitamento da matéria-prima utilizada são imprescindíveis neste novo mercado [2].

Em muitas indústrias, como por exemplo de móveis, vidro, papel, têxtil, entre outras, existe a necessidade de cortar peças maiores em estoque a fim atender uma certa demanda de peças menores. Este problema é conhecido como problema de corte de estoque [5]. Pequenas melhorias no processo de corte, como minimização de perdas e tempo de produção ou a combinação destes, pode levar a ganhos substanciais e representar uma vantagem decisiva na competição mundial com outras indústrias do setor.

O tempo de produção das peças menores no problema de corte de estoque pode ser abreviado com a redução do número de preparos da máquina de corte, que pode ser obtida, por exemplo, com a redução do número de padrões de corte (*e.g.* [43, 92, 38, 30, 81]) ou de ciclos da serra (*e.g.* [89, 63, 67, 70, 21]). A maioria dos trabalhos encontrados na literatura tratam o problema de corte de estoque com o objetivo de minimizar a perda da matéria-prima e, até onde sabemos, não existem muitos trabalhos que consideram simultaneamente a minimização da perda da matéria-prima e do número de preparos da máquina de corte.

Neste trabalho propomos um algoritmo, denominados AFM-P, para resolver o pro-

blema de corte de estoque considerando a minimização do número de objetos cortados e do número de ciclos da serra. As ideias utilizadas na elaboração deste procedimento são baseadas, principalmente, nos trabalhos de Diegel *et al.* [30], Vasko *et al.* [83] e Yanasse [89]. Este algoritmo consiste basicamente em adicionar, de forma dinâmica ao problema de corte de estoque, restrições que imponham uma frequência mínima para a utilização de um padrão de corte. A cada iteração uma solução é gerada e no final do algoritmo existe um conjunto de soluções que são analisadas segundo critérios de dominância.

Como aplicação prática, fazemos um estudo de caso em uma fábrica de móveis característica localizada no polo moveleiro de Votuporanga/SP. Nesta fábrica, painéis retangulares de tamanho padrão são cortados em peças retangulares menores e após passarem por outras fases do processo de produção, como por exemplo, furação, lixação e pintura, originam os itens que irão compor o móvel. O objetivo do estudo realizado é obter uma solução para o problema de corte de estoque bidimensional originado nesta fábrica usando estratégias que visam, além de atender a demanda utilizando o menor número de objetos possível, minimizar o número de preparos da máquina, em especial o número de ciclos da serra. Fazemos testes computacionais com o AFM-P utilizando dados reais da fábrica e comparamos os resultados obtidos com a prática da fábrica.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2 apresentamos alguns aspectos históricos dos problemas de corte e empacotamento e a tipologia encontrada na literatura para classificar estes problemas. Abordamos também os métodos de solução do problema de corte de estoque bidimensional, com maior ênfase ao processo de geração de colunas. Tratamos ainda de métodos para a geração de padrões de corte bidimensionais e apresentamos o conceito de ciclos da serra.

No Capítulo 3, discutimos a redução do número de preparos da máquina no problema de corte de estoque, seja como redução do número de padrões de corte ou de ciclos da serra. Fazemos uma breve revisão bibliográfica sobre os trabalhos que tratam da redução de padrões de corte e de ciclos da serra no problema de corte de estoque e descrevemos o algoritmo proposto neste trabalho.

Um panorama geral do setor moveleiro, em especial do polo moveleiro de Votuporanga/SP, é apresentado no Capítulo 4. Descrevemos a linha de produção da indústria visitada, com enfoque no setor de corte, e destacamos as principais características do padrões de corte utilizados por esta.

No Capítulo 5 apresentamos os resultados do estudo computacional feito para o algoritmo desenvolvidos neste trabalho (AFM-P). Desenvolvemos um estudo computacional

detalhado do algoritmo em questão utilizando dados da indústria de móveis visitada e comparamos os resultados obtidos com a prática desta fábrica.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões, considerações finais e propostas para continuação deste trabalho.

Capítulo 2

Problemas de Corte e Empacotamento

Os Problemas de Corte (*Cutting Problems*) consistem basicamente em cortar uma peça grande que esteja disponível, chamada de objeto, para produção de um conjunto de peças pequenas, chamados de itens. Esses problemas podem aparecer em indústrias que têm em seus processos de produção a necessidade de cortar matéria-prima para atender uma determinada demanda, seja interna ou externa, de itens de tamanhos variados. Surge assim a necessidade de planejar o corte de forma a minimizar efeitos negativos, tais como desperdício de matéria-prima, além de outros custos de produção, como por exemplo, a minimização do tempo de uso da máquina de corte.

Um outro tipo de problema encontrado frequentemente na indústria são os Problemas de Empacotamento (*Packing Problems*) que surgem da necessidade de alocar peças pequenas em espaços maiores, visando, por exemplo, o melhor aproveitamento do espaço. O empacotamento de caixas em paletes é um exemplo típico dessa classe de problemas. A ideia de empacotar itens em objetos maiores é equivalente a de cortar objetos para produzir itens menores [5], como pode ser facilmente notado da Figura 1.

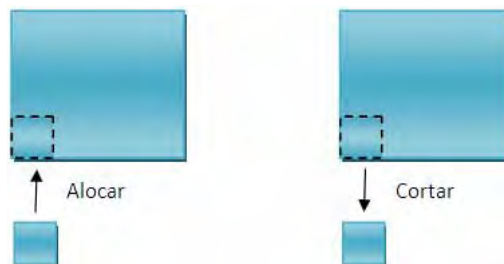


Figura 1: Equivalência entre os Problemas de Corte e Empacotamento.

Devido a essa equivalência esses dois problemas são estudados de forma conjunta e são referenciados na literatura como Problemas de Corte e Empacotamento [5]. O interesse por essa classe de problemas se deve à sua grande aplicabilidade em problemas práticos, especialmente em indústrias de madeira, vidro, papel, plástico, têxtil, metalúrgicas, além de estar presente nas áreas de logística de diversas indústrias no setor atacadista e nas empresas de transporte rodoviário, ferroviário, aéreo e marítimo.

Neste capítulo apresentamos um breve histórico sobre os problemas de corte e empacotamento, discutimos a classificação destes e focamos especialmente nos problemas de corte de estoque.

2.1 Aspectos Históricos

Estima-se que o estudo de programação linear têm raízes nos estudos de Fourier sobre sistemas lineares de inequações em 1826. A programação linear ganhou um maior impulso quando, durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo formado por Dantzig, Wood e seus associados no Departamento da Força Aérea dos Estados Unidos, foi convocado para pesquisar a viabilidade de aplicar a Matemática e técnicas relacionadas para resolver problemas de planejamento e programação militar [55]. Em 1947, Dantzig divulgou o Método Simplex, que foi a ferramenta desenvolvida pelo grupo para resolver problemas de programação linear contínua [55]. Com esta ferramenta a programação linear foi rapidamente aplicada à diversas áreas do conhecimento. Os avanços computacionais também contribuíram para o aumento da utilização do Método Simplex.

A classe dos Problemas de Corte e Empacotamento vem sendo estudada há muitas décadas, e para muitos autores o trabalho do matemático e economista soviético Leonid Vitaliyevich Kantorovich publicado em 1939 [46] é pioneiro na literatura desses problemas. Kantorovich [46] apresenta modelos matemáticos de programação linear para o planejamento e organização da produção, além de métodos de solução para os problemas apresentados. Dentre os diversos problemas abordados, está o problema de corte de estoque unidimensional. Devido à Guerra Fria, este trabalho ficou desconhecido para o Ocidente até 1959 e foi publicado em inglês apenas em 1960.

Na década de 60 surgiram muitos trabalhos importantes sobre problemas de corte e empacotamento. Entre estes, destacam-se os trabalhos de Gilmore e Gomory ([40], [41] e [42]), que tiveram grande repercussão e que apresentam as modelagens e os métodos de solução mais utilizados para resolução destes problemas até os dias de hoje. Em

1961, Gilmore e Gomory [40] formularam o problema de corte de estoque unidimensional e propuseram um método de Geração de Colunas para resolver a relaxação linear da formulação por eles apresentada. Dois anos mais tarde, os métodos descritos em [40] foram estendidos e adaptados para um problema de corte de estoque unidimensional na indústria de papel [41]. Em 1965, Gilmore e Gomory [42] propõem a solução do problema no caso bidimensional com algumas restrições, que são essenciais do ponto de vista prático da indústria, tais como corte guilhotinado e estagiado.

Segundo Garey e Johnson [39] os problemas de corte pertencem à classe dos problemas NP-Completo. Devido ao grau de dificuldade, importância e aplicabilidade dos problemas de corte e empacotamento, muitos pesquisadores de todo o mundo vêm concentrando esforços na busca de métodos novos e eficientes para sua resolução. Este interesse pode ser comprovado, por exemplo, com livros específicos sobre estes problemas como Martelo e Toth [54] (mais especificamente, Problema da Mochila) e Dychoff e Finke [33], livros que dedicam capítulos ao tema, como de Chvátal [22] e Desaulniers *et al.* [29], além de artigos de revisão como de Dyckhoff [32] e Wäscher *et al.* [86], e edições especiais de revistas científicas, como [84] e [65], entre outros.

2.2 Classificação dos Problemas de Corte e Empacotamento

Visto a grande diversidade de problemas de corte e empacotamento que ocorre na prática, bem como o crescente interesse dos pesquisadores pelo assunto, Dyckhoff propôs em 1990 [32] uma tipologia para ajudar a unificar definições e notações, sistematizando os problemas e facilitando a comunicação entre pesquisadores.

Após a publicação do artigo [32], Dyckhoff e Finke, em 1992, publicaram um livro [33] com uma classificação mais completa dos problemas de corte e empacotamento, uma extensa bibliografia de diversos problemas da área, além de relacionar critérios associados à estrutura lógica e real dos problemas de corte e empacotamento, cujo objetivo não era de simplesmente classificar os problemas, mas, estabelecer relações entre eles.

O número de publicações na área de corte e empacotamento tem crescido consideravelmente nas últimas duas décadas. Devido a esse fato, Wäscher *et al.* [86] observaram algumas deficiências na tipologia proposta por Dyckhoff [32] e apresentaram em 2007 ([86]) algumas modificações para esta. A nova tipologia é baseada nas ideias originais de Dyckhoff [32] e propõe uma classificação mais abrangente. A seguir descrevemos as

tipologias de Dyckhoff [32] e Wäscher *et al.* [86].

2.2.1 Tipologia de Dyckhoff [32]

Quatro características principais são utilizadas em Dyckhoff [32] para classificação dos problemas de corte e empacotamento: dimensionalidade, tipo de alocação, sortimento de objetos e sortimento de itens. A seguir faremos uma breve descrição de cada uma dessas características.

i. Dimensionalidade

Segundo Dyckhoff [32] esta é a mais importante característica e está relacionada com o número de dimensões relevantes no processo de corte. Os problemas de corte e empacotamento podem ser classificados com relação à dimensionalidade em:

- Unidimensional, representado por (1): apenas uma das dimensões é relevante no processo de corte e/ou empacotamento. Ocorre, por exemplo, nos processos de corte de barras de aço e de bobinas de papel. A Figura 2 ilustra este tipo de problema;



Figura 2: Problema de Corte Unidimensional.

- Bidimensional, representado por (2): duas dimensões são relevantes no processo de corte e/ou empacotamento. Para resolver este problema é preciso combinar geometricamente os itens ao longo do comprimento e da largura do objeto. A Figura 3 mostra um exemplo deste tipo de problema. Note que as dificuldades aumentam consideravelmente para gerar uma combinação dos itens sobre o objeto sem sobrepô-los. Este problema ocorre por exemplo, no corte de painéis de madeira, de chapas de aço, de placas de vidro, entre outros;

- Tridimensional, representado por (3): nestes problemas três dimensões são relevantes no processo de corte e/ou empacotamento. Basicamente, este problema consiste em arranjar itens espaciais, sem sobrepô-los, dentro de objetos maiores.

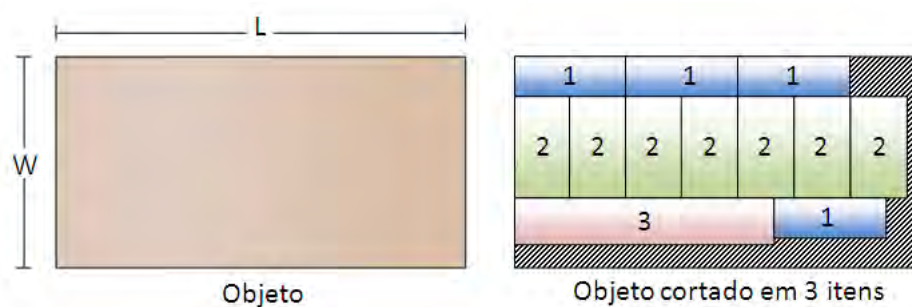


Figura 3: Problema de Corte Bidimensional.

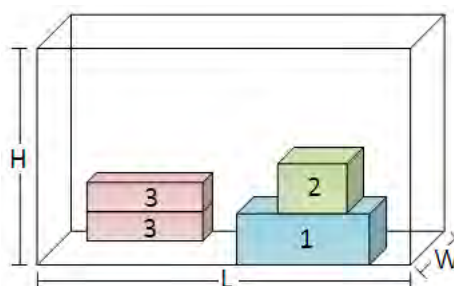


Figura 4: Problema de Corte Tridimensional.

Podemos citar como exemplo o corte de blocos de espuma e o carregamento de *containers* ou paletes, entre outros. A Figura 4 ilustra este tipo de problema;

- N -dimensional ($N > 3$), representado por (N) : essa classificação se dá a problemas em que são relevantes mais que três dimensões. Tais problemas fazem parte dos problemas de dimensões não espaciais na associação de Dyckhoff [32]. Nestes problemas os objetos e itens podem ter dimensões como tempo, peso, memória, etc. Exemplos deste tipo de problema são: problema de alocação de tarefas, problema de carregamento de veículos, programação de rotas de veículos, entre outros.

Ainda sob aspecto geométrico é possível encontrar problemas $N\frac{1}{2}$ -dimensionais que são essencialmente $N + 1$ dimensionais, porém uma das dimensões é variável. Esta dimensão foi apresentada por Haessler [43] em 1978. Um exemplo para este tipo de problema é o corte de bobina de aço em que uma dimensão não é suficiente na definição dos cortes que devem ser feitos para obtenção dos itens, mas duas dimensões também vão além da necessidade, ou seja uma das dimensões pode ser considerada variante e ilimitada. A Figura 5 ilustra um problema $\frac{1}{2}$ -dimensional, a largura W da bobina é fixa e l_{jk} é o comprimento k a ser cortado ao longo do objeto j . Note que o comprimento do objeto é variável. Hinxman [45] faz uma revisão sobre problemas de corte em várias dimensões.

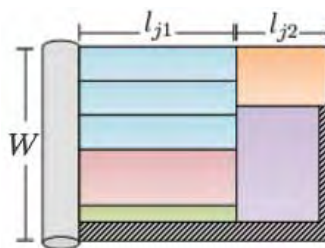


Figura 5: Problema $1\frac{1}{2}$ dimensional.

ii. Tipo de Alocação

Esta característica diz respeito a relação entre os itens e objetos. Os itens a serem produzidos são combinados de tal forma que respeitem as restrições associadas aos objetos. Segundo Dyckhoff [32], itens e objetos podem ser selecionados de duas formas:

- Todos os objetos e uma seleção de itens, representado por (B): neste caso, não há um número suficiente de objetos existentes em estoque para atender a demanda de todos os itens, desta forma é necessário selecionar quais itens serão cortados dos objetos. Um exemplo para este tipo de problema é o problema da mochila [54];

- Uma seleção de objetos e todos os itens, representado por (V): a quantidade de objetos é suficiente para atender a demanda de todos os itens, sendo possível selecionar os objetos que serão cortados. O problema de corte de estoque tratado em [40] é um exemplo para este caso.

iii. Sortimento de Objetos

Esta característica diz respeito aos tipos de objetos considerados no problema.

- Um único objeto, representado por (O). Um exemplo deste problema é o problema da mochila clássico;

- Objetos idênticos, representado por (I). O problema de corte de estoque clássico é um exemplo para este caso;

- Objetos com tamanhos diferentes, representado por (D). Por exemplo, o problema do *bin packing* bidimensional.

iv. Sortimento de Itens

Nesta característica a variedade dos itens é levada em consideração.

- Poucos itens e de tamanhos diferentes, representado por (F). Por exemplo, problema de carregamento de veículos;

- Muitos itens de muitos tamanhos diferentes, representado por (M). O problema de empacotamento clássico é um exemplo para este tipo de problema;
- Muitos itens com poucos tamanhos diferentes, representado por (R). Um exemplo deste tipo de problema é o problema de corte de estoque bidimensional;
- Itens de tamanhos iguais, representado por (C). Por exemplo, problema de carregamento de paletes.

A classificação de Dyckhoff [32] é representada através de uma quádrupla ordenada com as siglas das características apresentadas anteriormente na seguinte ordem: dimensionalidade / tipo de alocação / sortimento de objetos / sortimento de itens. Por exemplo, o problema classificado como 1/V/I/R é o problema de corte de estoque unidimensional (1), em que uma seleção de objetos deve ser feita para o atendimento da demanda de todos os itens (V), os objetos em estoque têm o mesmo tamanho (I) e existem muitos itens com poucos tamanhos diferentes (R).

2.2.2 Tipologia de Wäscher, HauBner e Schumann [86]

Na tipologia proposta por Wäscher *et al.* [86], cinco critérios são utilizados para classificar os problema de corte e empacotamento: dimensionalidade, tipo de alocação, sortimento de itens, sortimento de objetos e forma dos itens. A seguir fazemos uma breve descrição de cada uma dessas características.

i. Dimensionalidade

Esta característica é considerada da mesma forma que na tipologia de Dyckhoff [32], em que os problemas são classificados em unidimensional, bidimensional, tridimensional e N -dimensional dependendo do número de dimensões relevantes no corte e/ou empacotamento.

ii. Tipo de Alocação

Nesta característica também é expressa a relação entre os itens e os objetos, assim como na classificação de Dyckhoff [32]. Wäscher *et al.* [86] referem-se a seleção de itens e objetos como sendo:

- Maximização da Produção (*output maximisation*), que corresponde ao tipo (B) de Dyckhoff [32], onde um conjunto de itens deve ser designado para um conjunto de objetos, cuja quantidade não é suficiente para alocar todos os itens e assim, esta designação deve ser feita de tal forma que maximize a produção;

- Minimização do Consumo (*input minimisation*), que corresponde ao tipo (V) de Dyckhoff [32]. Neste caso, os objetos são suficientes para alocar todos os itens e isto deve ser feito utilizando o menor número possível de objetos.

iii. Sortimento de Itens

Com respeito ao sortimento dos itens, existe uma distinção em três casos:

- Itens idênticos: todos os itens são da mesma forma e tamanho. Esta categoria corresponde ao tipo (C) da classificação de sortimento de itens de Dyckhoff [32].

- Sortimento fracamente heterogêneo: os itens podem ser classificados em poucas classes de itens idênticos e a demanda de cada item é relativamente grande, podendo ser ilimitada ou não. Esta categoria corresponde ao tipo (R) de Dyckhoff [32].

- Sortimento fortemente heterogêneo: poucos itens são idênticos, desta forma estes são tratados como elementos individuais e conseqüentemente a demanda de cada um deles é igual a um. Esta categoria corresponde aos tipos (M) e (F) de Dyckhoff [32].

iv. Sortimento de Objetos

- Um objeto: os objetos disponíveis são todos do mesmo tipo, e as dimensões deste podem ser fixas, ou uma ou mais dimensões serem variáveis.

- Vários objetos: são considerados vários tipos de objetos e somente com dimensões fixas. Neste caso, existe ainda uma classificação idêntica ao sortimento dos itens, na qual os objetos podem ser considerados idênticos, fracamente e fortemente heterogêneos. Logo, esta é uma extensão da classificação da tipologia de Dyckhoff [32] em que são considerados somente objetos com tamanhos idênticos (I) e com tamanhos diferentes (D).

iv. Forma dos Itens

Esta característica é relevante apenas para itens que possuam duas ou mais dimensões e diz respeito a regularidade (caixas, cilindros, retângulos, etc.) ou irregularidades destes.

Wäscher *et al.* [86] propõem ainda uma classificação para os problemas de corte e empacotamento em três tipos: básico, intermediário e refinado. A seguir apresentamos uma breve descrição sobre cada um deles.

- **Tipo Básico**

Estes tipos de problemas são caracterizados pela combinação dos critérios “Sortimento de Itens” e “Tipo de Alocação”. Tais problemas são melhores caracterizados por:

✓ Maximização de Produção: como já mencionado anteriormente, estes problemas caracterizam-se pelo fato de não possuírem todos os objetos necessários para o atendimento da demanda total de todos os itens. Logo, o objetivo é maximizar a produção dos itens e assim todos os objetos são usados, ou seja, o problema é selecionar os itens que serão produzidos. Os problemas de empacotamento de itens idênticos (*identical item packing problem*), de alocação (*placement problem*) e da mochila (*knapsack problem*) são considerados do tipo básico de maximização da produção.

- Problemas de empacotamento de itens idênticos, (*identical item packing problem*) consistem na alocação do maior número possível de itens idênticos para um dado conjunto (limitado) de objetos. Como os itens são idênticos não existe a necessidade de selecionar, agrupar ou distribuir os itens, o problema resume-se apenas a um arranjo do itens em cada um dos objetos.

- Problemas de alocação (*placement problems*), possuem um sortimento fracamente heterogêneo de itens que precisam ser designados a um conjunto limitado de objetos.

- Problemas da mochila (*knapsack problems*) são compostos por um conjunto fortemente heterogêneo de itens que precisam ser alocados em um conjunto limitado de objetos.

✓ Minimização do Consumo: como já discutidos anteriormente, nestes problemas o número de objetos em estoque é suficiente para o atendimento da demanda. Sendo assim, é possível obter todos os itens demandados. Neste caso, o objetivo é atender a demanda de todos os itens minimizando o número de objetos cortados segundo uma função objetivo. Os problemas de dimensão aberta (*open dimension problem*), de corte de estoque (*cutting stock problem*) e de *bin packing* (*bin packing problem*) são considerados problemas do tipo básico de minimização de consumo.

- Problemas de dimensão aberta (*open dimension problem*), possuem ao menos uma das dimensões dos objetos variável.

- Problemas de corte de estoque (*cutting stock problems*), caracterizam-se pelo

sortimento fracamente heterogêneo de itens que devem ser completamente alocados no menor número possível de objetos.

- Problemas de *bin packing*, possuem sortimento fortemente heterogêneo de itens que devem ser alocados em um conjunto de objetos, onde o número ou tamanho total dos objetos necessários tem que ser minimizado.

- **Tipo Intermediário**

A classe de problemas intermediários consiste em nada mais do que a adição da categoria “Sortimento de objetos” ao problemas do tipo básico.

- **Tipo Refinado**

Critérios de dimensionalidade e forma de itens são aplicados aos problemas do tipo intermediário caracterizando assim os problemas do tipo refinado.

Segundo a tipologia de Wäscher *et al.* [86] o problema estudado neste trabalho pode ser caracterizado como bidimensional, minimização de consumo, sortimento de itens fracamente heterogêneo e sortimento de objetos do tipo vários objetos idênticos.

Na seção a seguir o problema de corte de estoque será tratado com mais detalhes.

2.3 O Problema de Corte de Estoque

O problema de corte de estoque (PCE) foi um dos problemas estudados por Kantorovich em seu artigo intitulado “*Mathematical methods of organizing and planning production*”, que foi publicado na Rússia em 1939. Em 1960 este artigo foi traduzido para o inglês e publicado pela revista *Management Science* [46, 29]. Além dos estudos feito por Kantorovich em 1939, muitos trabalhos sobre o assunto surgiram na década de 60, sendo que as modelagens e métodos de resolução publicados por Gilmore e Gomory [40, 41, 42] obtiveram uma grande repercussão.

Tais problemas consistem basicamente em cortar objetos, disponíveis em estoque, para satisfazer uma certa demanda de itens, otimizando algum objetivo, como por exemplo, minimizar o número de objetos cortados, minimizar a perda, minimizar os custos dos objetos cortados, etc. Existem também, vários fatores que podem ser considerados nos dados ou nas restrições, como por exemplo, número de objetos diferentes disponíveis em estoque, quantidade de objetos disponível (ilimitada ou não), tipos de corte permitidos, capacidade da máquina (limitada ou não), tempo de produção, entre outros.

Para apresentarmos os dois modelos clássicos de programação linear para o problema de corte de estoque, introduzidos por Kantorovich em [46], e por Gilmore e Gomory em [40], vamos definir a seguir os problemas de corte de estoque unidimensional e bidimensional, além de apresentar algumas definições básicas.

O problema de corte de estoque unidimensional, pode ser enunciado da seguinte maneira: considere que temos em estoque uma quantidade suficientemente grande de objetos (barras, bobinas, etc) de comprimento L e um conjunto de pedidos de m itens de tamanho l_i , $i = 1, \dots, m$. Cada item deve ser produzido de maneira a atender uma demanda b_i , $i = 1, \dots, m$. O problema consiste em produzir os itens, através do corte dos objetos em estoque, de forma a atender uma demanda requerida, otimizando uma função objetivo, como por exemplo, minimizar custos ou o número total de objetos cortados.

O problema de corte de estoque bidimensional considerado neste trabalho pode ser definido da seguinte forma: considere que temos em estoque um número suficientemente grande de objetos retangulares (placas de madeira, aço, vidro, etc) de um determinado comprimento L e largura W , e um pedido de itens de comprimento l_i , $i = 1, \dots, m$, e largura w_i , $i = 1, \dots, m$. Cada item deve ser produzido de maneira a atender uma demanda b_i , $i = 1, \dots, m$. O problema consiste em produzir os itens a partir do corte dos objetos em estoque de forma a atender a demanda otimizando, também, uma certa função objetivo.

Definição 2.1. *A maneira como um objeto é cortado para a produção dos itens demandados é chamada de padrão de corte. A um padrão de corte associamos um vetor m -dimensional que contabiliza o número de itens produzidos:*

$$A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj}), \quad (2.1)$$

sendo a_{ij} o número de vezes que o item i aparece no padrão j .

As Figuras 6 e 7 representam, respectivamente, exemplos de um padrão de corte unidimensional e bidimensional.

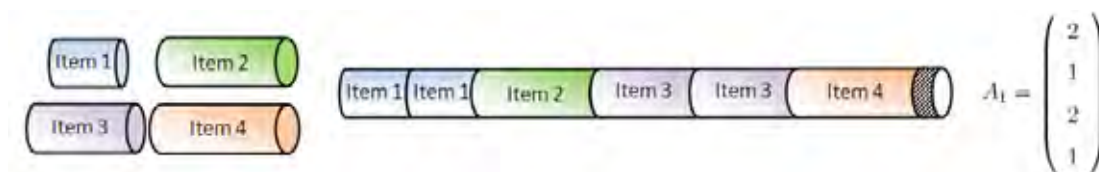


Figura 6: Padrão de corte unidimensional.

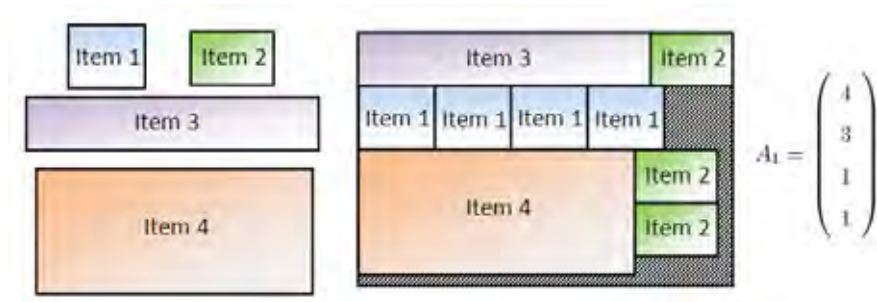


Figura 7: Padrão de corte bidimensional.

Note que no caso unidimensional um vetor $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ corresponde a um padrão de corte se e somente se satisfaz as seguintes restrições:

$$l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + \dots + l_m a_{mj} \leq L \quad (2.2)$$

$$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.3)$$

A restrição (2.2) é conhecida como restrição física do objeto [5].

A parte do objeto cortado, cujas dimensões não foram pré-definidas (parte rachurada das Figuras 6 e 7) é denominada perda total. A perda total para um padrão de corte j no caso unidimensional pode ser calculada por:

$$P_j = L - \sum_{i=1}^m l_i a_{ij}. \quad (2.4)$$

Para o caso bidimensional a perda total gerada pelo padrão bidimensional j é dada por:

$$P_j = LW - \sum_{i=1}^m (l_i w_i a_{ij}). \quad (2.5)$$

Definição 2.2. Um padrão de corte que produza apenas um tipo de item é chamado padrão de corte homogêneo, isto é, o vetor associado a este padrão tem apenas uma das m coordenadas não nula: $A_j = (0, \dots, a_{ij}, \dots, 0)$. Quando o número de vezes que o item aparece no padrão de corte homogêneo é o maior possível, este é chamado de padrão homogêneo maximal.

Os padrões de corte homogêneos maximais podem ser determinados, no caso unidimensional, por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Para o caso bidimensional, quando os itens têm orientação fixa (veja Seção 2.5.2), os padrões homogêneos maximais são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{W}{w_j} \right\rfloor, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Note que os m padrões homogêneos maximais definem uma matriz diagonal.

Na Figura 8 apresentamos um exemplo dos padrões de corte homogêneos unidimensional e bidimensional.

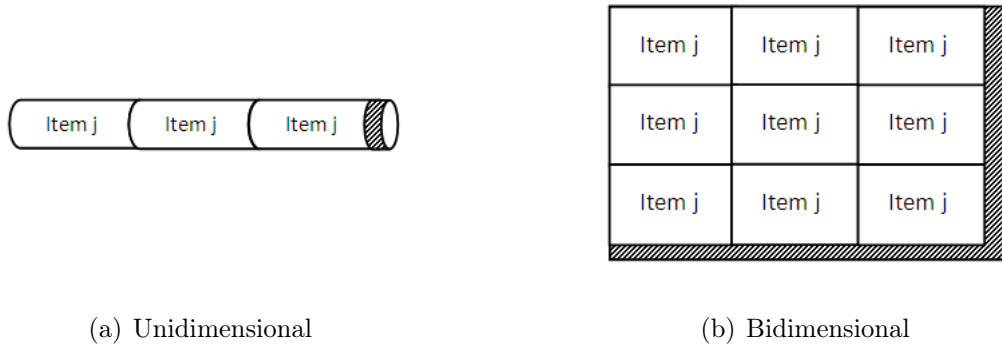


Figura 8: Padrões de corte homogêneos maximais unidimensional e bidimensional.

Utilizando as definições apresentadas anteriormente, mostramos a seguir o primeiro modelo matemático da literatura para o problema de corte de estoque unidimensional desenvolvido por Kantorovich [29], cujo objetivo é minimizar o número de padrões de corte distintos. O parâmetro K é um limitante superior para o número de objetos necessários para o atendimento da demanda, x_{ij} é a variável que define o número de vezes que o item i é cortado no objeto j e $\lambda_j = 1$, se o padrão de corte j é usado e 0, caso contrário, o modelo proposto por Kantorovich é:

$$\min Z_{Kan} = \sum_{j=1}^K \lambda_j, \quad (2.8)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^K x_{ij} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^m l_i x_{ij} \leq L \lambda_j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (2.10)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \lambda_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, K. \quad (2.11)$$

O conjunto de restrições (2.9) garante o atendimento à demanda dos itens, permitindo a produção de excedentes. As restrições (2.10), também conhecidas como restrições de

setup, indicam que, se o objeto j for cortado ($\lambda_j = 1$) então a combinação de itens que nele aparecem deve ser compatível com o tamanho do objeto (são as restrições físicas do objeto). O domínio das variáveis é definido pelas restrições (2.11).

Um limite inferior para a solução ótima inteira do modelo de Kantorovich pode ser dado pela resolução da relaxação linear de (2.8)-(2.11), que resulta da substituição das restrições (2.11) por $a_{ij} \geq 0$ e $0 \leq \lambda_j \leq 1$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, K$. Segundo Martello e Toth [54] este limitante pode ser muito fraco e é igual ao espaço necessário para acomodar todos os itens no objetos, isto é, $\left\lceil \sum_{i=1}^m b_i l_i / L \right\rceil$. Este limitante pode ser muito pobre para instâncias com grande perda e isso é uma desvantagem para o modelo em questão [29]. Além disso, o modelo apresenta muitas soluções simétricas, ou seja, diferentes combinações de padrões de corte que geram soluções equivalentes, o que pode acarretar em um esforço maior na busca da solução ótima [14].

Uma outra forma de modelar este problema é sugerida por Gilmore e Gomory [40]. Supondo conhecidos *a priori* os n padrões de corte possíveis temos:

$$\min \quad Z_{GG} = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (2.12)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.13)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

em que a_{ij} é o número de vezes que o item i aparece no padrão de corte j , c_j é o custo de cortar um objeto de acordo com o padrão j e x_j é a variável do problema que define o número de objetos que serão cortados de acordo com o padrão j . A função objetivo (2.12) impõem a minimização do custo total dos objetos. Note que se $c_j = 1$, $j = 1, \dots, n$, o objetivo torna-se minimizar o número de objetos cortados. As restrições (2.13) garantem o atendimento à demanda permitindo excesso na produção e as restrições (2.14) definem o domínio das variáveis. Note que este modelo pode ser usado nos casos unidimensional e bidimensional.

Em 1985, Marcote [52] apresentou uma conjectura afirmando que algumas classes do problema de corte de estoque unidimensional possuem a propriedade de que a solução obtida do modelo de Gilmore e Gomory (2.12)-(2.14) é maior que a obtida pela relaxação linear a menos de uma unidade, ou seja, o *gap* é menor que 1. Esta propriedade foi chamada de *Integer Round-Up Property* (IRUP) e em 1986 Marcote [53] apresentou um contraexemplo para esta conjectura e contraexemplos com *gap* maior que 1 foram

surgindo, como por exemplo, em Scheithauer e Terno [76], Wäscher e Gau [85] e Rietz *et al.* [72]. Em 1995, com base na observação de que os contraexemplos apresentados na literatura apresentavam *gap* menor que 2, Scheithauer e Terno [76] formularam a conjectura *Modified Integer Round-Up Property* (MIRUP) afirmando que o valor ótimo da resolução do modelo (2.12)-(2.14) é sempre menor ou igual à solução da relaxação linear arredondada para o maior inteiro mais um, ou seja, o *gap* é sempre inferior a 2. Segundo Rietz *et al.* [72], até 2002 não eram conhecidos exemplos com *gap* maior ou igual a 7/6.

Os modelos aqui apresentados para o problema de corte de estoque (bidimensional e unidimensional), consideram que existe em estoque apenas um tipo de objeto em quantidade suficiente para o atendimento à demanda. Porém, em alguns casos, é necessário considerar que existem vários tipos de objetos em estoque e além disso em quantidades limitadas (*e.g.* [90], [59], [8]). Algumas adaptações são necessárias no modelo (2.12)-(2.14) para impor estas novas condições. Considere que existam em estoque N tipos diferentes de objetos, disponíveis em quantidades e_k , $k = 1, \dots, N$ e que o custo de um objeto do tipo k , $K = 1, \dots, N$ seja c_k . Considere ainda que A_j^K seja o padrão de corte j associado ao objeto do tipo k , $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_k$ e que d seja o vetor das demandas dos itens. A variável x_{jk} representa o número de vezes que o objeto do tipo k é cortado segundo o padrão de corte j , $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_k$. O modelo matemático que representa esta situação pode ser formulado como [5]:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n_1} c_1 x_{j1} + \sum_{j=1}^{n_2} c_2 x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n_N} c_N x_{jN} \quad (2.15)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n_1} A_j^1 x_{j1} + \sum_{j=1}^{n_2} A_j^2 x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n_N} A_j^N x_{jN} \geq d \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_{j1} \leq e_1 \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} x_{j2} \leq e_2 \quad (2.18)$$

...

$$\sum_{j=1}^{n_N} x_{jN} \leq e_N \quad (2.19)$$

$$x_{jk} \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.20)$$

A função objetivo a ser minimizada (2.15) é o custo total referente aos objetos cortados. A restrição (2.16) garante que a demanda seja atendida, permitindo uma produção de itens em excesso. As restrições de (2.17) até (2.19) asseguram que a quantidade de

cada objeto disponível em estoque seja respeitada, e a restrição (2.20) define o domínio das variáveis. Note, que da mesma forma que o modelo (2.12)-(2.14), admite-se que todos os padrões de corte são conhecidos *a priori* para todos os tipos de objetos em estoque.

2.4 Métodos de Solução para o Problema de Corte de Estoque (PCE)

Os problemas de corte de estoque (PCE) possuem um grande número de padrões de corte possíveis. Isto denota uma dificuldade para a modelagem explícita, com todos os padrões de corte existentes, e uma resolução direta do problema. Devido a grande importância desses problemas para a prática das indústrias, muitos estudos concentram-se em torno de sua resolução e procuram contornar esse inconveniente de explicitar todos os padrões de corte possíveis.

Na década de 60, a resolução de problemas de grande porte (problemas com grande número de variáveis e restrições) teve avanços significativos com a publicação do Princípio de Decomposição de *Dantzig Wolfe* [27]. Gilmore e Gomory [40, 41, 42] desenvolveram o método de geração de colunas para o problema no caso unidimensional e bidimensional. O método de geração de colunas, além de outras, são detalhadas nesta seção pois serviram de base para a implementação do algoritmo desenvolvido no Capítulo 3.

2.4.1 Princípio de Decomposição de *Dantzig-Wolfe*

O princípio de decomposição de *Dantzig-Wolfe*[13] é um procedimento sistemático para resolver problemas de programação linear de grande porte, sendo mais eficiente quando aplicado a problemas que contenham restrições com uma certa estrutura especial, denominada estrutura bloco angular. Um modelo de programação linear com a estrutura n -bloco angular é dado da seguinte forma [48]:

$$\begin{array}{rcll}
 \min Z = & c_1x_1 + & c_2x_2 + \dots + & c_nx_n \\
 \text{s.a.} & A_1x_1 + & A_2x_2 + \dots + & A_nx_n = b_0 \quad (m_0 \text{ restrições}) \\
 & B_1x_1 & & = b_1 \quad (m_1 \text{ restrições}) \\
 & & B_2x_2 & = b_2 \quad (m_2 \text{ restrições}) \\
 & & & \vdots \quad \vdots \\
 & & & B_nx_n = b_n \quad (m_n \text{ restrições}) \\
 x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & \dots & x_n \geq 0 \quad n > 1.
 \end{array}$$

Observe que parte das restrições formam conjuntos independentes entre si e qualquer problema de programação linear pode ser considerado com tal estrutura, bastando tomar $n = 1$. A restrição $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = b_0$ é chamada de restrição de acoplamento e possui o papel de ligar os blocos de restrições independentes entre si. As demais restrições, $B_jx_j = b_j, \forall j = 1 \dots, n$, são chamadas de restrições com estrutura especial.

A estratégia do procedimento é particionar o problema de grande porte em dois novos problemas de mais fácil resolução: o problema mestre, que é equivalente ao problema original e possui um número reduzido de restrições (as restrições de acoplamento), mas com número de colunas muito maior, e o subproblema que é um problema derivado das restrições com estrutura especial. O problema mestre é resolvido, com apenas um conjunto de colunas explícito (problema mestre restrito), e colunas são geradas de forma iterativa resolvendo-se o problema (subproblema) também chamado de problema *pricing*. O subproblema é resolvido alternadamente com o problema mestre até que se encontre uma solução ótima para este. A vantagem de utilizar esta técnica está em ter um problema principal mais simples e, eventualmente, aproveitar características da estrutura do subproblema para resolver o problema de forma mais eficiente.

Para apresentação do Princípio de Decomposição de *Dantzig-Wolfe* consideremos, sem perda de generalidade, o modelo geral de programação linear contínua com n variáveis:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por simplicidade, considere o problema (2.21) com estrutura n -bloco angular com $n = 1$. Particionando o conjunto de restrições em restrições de acoplamento e restrições com estrutura especial temos:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & \hat{A}x = \hat{b} \quad m_0 \text{ restrições} \\ & B_1x = b_1 \quad m_1 \text{ restrições} \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que as m_0 primeiras restrições são as de acoplamento.

Por simplicidade, consideremos que o poliedro

$$X = \{x \mid B_1x_1 = b_1, x \geq 0\} \tag{2.23}$$

seja limitado, esta condição pode ser relaxada mais tarde [48]. Desta forma podemos reescrever o problema (2.22) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & \widehat{A}x = \widehat{b} \quad m_0 \text{ restrições} \\ & x \in X. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Um poliedro pode ser descrito a partir do conjunto de seus pontos extremos [88].

Definição 2.3. *Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação convexa de pontos de X se existir um conjunto de pontos $\{x^j\}_{j=1}^t \in X$ tal que $x = \sum_{j=1}^t \lambda^j x^j$, $\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$, $\lambda^j \geq 0$. O envoltório convexo de X , denotado por $\text{Conv}(X)$, é o conjunto de todos os pontos que são combinações convexas de pontos de X .*

Assim, podemos escrever as variáveis do problema (2.24) como combinações convexas dos pontos extremos de X , tornando a formulação mais restritiva por considerar o envoltório convexo do conjunto X implicitamente. Seja x um ponto de X , escrevendo-o como combinação convexa de seus pontos extremos, temos:

$$x = \sum_{j=1}^t \lambda^j x^j \quad (2.25)$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda^j = 1 \quad (2.26)$$

$$\lambda^j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, t, \quad (2.27)$$

em que x^1, x^2, \dots, x^t são os pontos extremos de X e a equação (2.26) é chamada de restrição de convexidade.

Para resolver o problema (2.22), a ideia é encontrar uma solução de (2.23) que satisfaça a restrição de acoplamento $\widehat{A}x = \widehat{b}$ e que minimize a função Z . Substituindo as equações (2.25), (2.26) e (2.27) no problema (2.24) temos:

$$\widehat{A}x = \widehat{b} \Leftrightarrow \widehat{A} \left(\sum_{j=1}^t \lambda^j x^j \right) = \widehat{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^t (\widehat{A}x^j) \lambda^j = \widehat{b},$$

e,

$$Z = c^T x \Leftrightarrow Z = c^T \left(\sum_{j=1}^t \lambda^j x^j \right) \Leftrightarrow Z = \sum_{j=1}^t (c^T \lambda^j) x^j.$$

Logo, obtemos um novo problema, em termos da variável λ^j , que é equivalente ao

problema (2.22):

$$\begin{aligned}
 \min Z &= \sum_{j=1}^t (c^T \lambda^j) x^j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^t (\widehat{A} x^j) \lambda^j = \widehat{b} \\
 & \sum_{j=1}^t \lambda^j = 1 \\
 & \lambda^j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, t.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Este problema é o chamado problema mestre. Note que este modelo possui $m_0 + 1$ restrições, menos do que o problema (2.22) que possui $m_0 + m_1$ restrições. Porém, o número de pontos extremos de um poliedro é exponencialmente grande quando se trata de um problema de grande porte, não sendo prático fazer a sua enumeração, o que também acarretaria em milhares ou milhões de colunas. Portanto, para resolver esse problema sem explicitar todas as colunas pode-se utilizar a técnica de geração de colunas. O problema mestre restrito (apenas um subconjunto de colunas é inicialmente considerado) é resolvido pelo Método Simplex. As variáveis duais associadas às m_0 restrições são utilizadas para gerar uma nova coluna ($\widehat{A} x^k$). Se o custo reduzido desta nova coluna for negativo a coluna é acrescentada ao problema mestre restrito, caso contrário, o processo termina. Para mais detalhes sobre esse método veja, por exemplo, [13].

Através da aplicação da decomposição de *Dantzig-Wolfe* no modelo de Kantorovich (2.8)-(2.11) é possível obter o modelo de Gilmore e Gomory (2.12)-(2.14), o que mostra a equivalência entre estes dois modelos [80].

2.4.2 Método Simplex com Geração de Colunas

A resolução de um problema de corte de estoque esbarra em algumas dificuldades, como por exemplo, a restrição de integralidade sobre as variáveis de decisão e o grande número de colunas (variáveis ou padrões de corte) que podem existir. Por esse motivo, uma maneira de resolver este tipo de problema é relaxar a condição de integralidade das variáveis do problema original, admitindo que estas possam atingir valores reais, não-negativos, e resolver a relaxação linear pelo Método Simplex com geração de colunas. O nome geração de colunas vem do fato que cada variável é associada a uma coluna da matriz de restrições (A). Assim, os termos “coluna” e “variável” podem ser intercambiáveis.

O algoritmo Simplex revisado trabalha com um subconjunto inicial de variáveis e, a cada iteração, procura por uma nova variável, com o objetivo de melhorar o valor

da solução corrente. Esta fase é conhecida como *pricing* (para mais detalhes, veja por exemplo Chvátal [22]). Para decidir qual variável deve entrar na base, são analisadas todas as variáveis disponíveis e escolhida aquela com melhor custo reduzido. Mas, dependendo do tamanho da formulação, como por exemplo as que tem um número exponencial de variáveis, a simples enumeração de todas estas variáveis é praticamente impossível. Logo, uma estratégia é a resolução do sistema considerando um pequeno número destas, ou seja, a cada iteração do método Simplex, um pequeno número de variáveis deve estar em foco. Porém uma questão que surge é a de como decidir quais variáveis fornecer ao sistema de modo que ele atinja uma solução ótima, já que o número das que vão fazer parte desta é muito pequeno quando comparado ao total de variáveis disponíveis. Na método de geração de colunas, colunas com custos reduzidos atrativos são geradas e fornecidas ao sistema, de forma a melhorar a solução até então encontrada [29].

Cabe observar que além do problema de corte de estoque, existem outros problemas importantes da literatura, como por exemplo o problema da designação generalizada, cujas formulações agregam um número muito grande de variáveis. Barnhart *et al.* [12] justificam a utilização destes tipos de formulação. Defendem, por exemplo, que uma formulação com um grande número de variáveis pode apresentar limitantes melhores que uma formulação compacta, além de em alguns casos ser a única escolha. Logo, um método que resolva este tipo de problema é de extrema importância.

Para melhor entendimento do método simplex com geração de colunas, apresentamos no Anexo A uma breve descrição do Método Simplex Revisado.

Gilmore e Gomory [40] propuseram a técnica de geração de colunas para a solução do problema de corte de estoque. Considere a relaxação linear do problema (2.12)-(2.14) escrita em notação matricial:

$$\min Z_{RL} = c^T x \quad (2.29)$$

$$s.a. \quad Ax \geq b \quad (2.30)$$

$$x \geq 0, \quad j = 1 \dots, n, \quad (2.31)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $n \gg m$. Note que $\text{posto}(A) = m$ já que para o problema de corte sempre existirá m colunas linearmente independentes na matriz A dadas pelos padrões homogêneos.

Para dar início ao Método Simplex, é necessária uma solução básica viável inicial, ou seja, uma solução não-negativa cuja matriz básica associada é não-singular (invertível). Para o problema de corte de estoque (2.29)-(2.31), encontrar uma solução básica inicial

é muito simples. Basta tomarmos a matriz diagonal básica formada pelos m padrões de corte homogêneos maximais, uma vez que a produção de itens em excesso é permitida. Assim, a base inicial é dada por:

$$B = [A_1 \dots A_m] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que $a_{i,j}$ é dado por (2.6), no caso unidimensional e, por (2.7) no caso bidimensional. A matriz B é não-singular, pois todas as suas colunas são linearmente independentes, ou seja, $\text{posto}(B) = m$. No caso do problema de corte de estoque com atendimento exato da demanda, a escolha da matriz básica inicial com os padrões homogêneos, pode não ser adequada, pois se as demandas dos itens forem baixas, é possível que o corte de um único objeto conforme o padrão homogêneo maximal já ultrapasse a demanda de algum item. Uma possibilidade, neste caso, é considerar uma matriz diagonal em que a_{ii} seja a própria demanda b_i do item i . É possível considerar também padrões homogêneos unitários, sendo a matriz B tomada pela matriz identidade.

A solução básica viável inicial, associada à base B , é

$$x_B = B^{-1}b \quad (2.33)$$

e, considerando que c_B seja o vetor de coeficientes das variáveis básicas na função objetivo, a solução dual associada, ou o vetor dos multiplicadores simplex, é dada por

$$\pi^T = c_B^T B^{-1}. \quad (2.34)$$

Para decidirmos qual variável deve entrar na base, caso exista alguma candidata, ou se a solução atual é ótima, devemos calcular os custos relativos das variáveis não-básicas dado por:

$$\widehat{c}_j = c_j - \pi^T A_j, \quad j \in \mathcal{N}, \quad (2.35)$$

em que \mathcal{N} é o conjunto dos índices das colunas não-básicas de A .

Observe que há m variáveis básicas e, portanto, $(n - m)$ variáveis não-básicas, que é um número muito grande uma vez que $n \gg m$. Desta forma é praticamente impossível calcular os custos relativos de todas as variáveis não-básicas. A ideia, então, é gerar a variável não-básica (coluna), isto é, um novo padrão de corte, utilizando o critério de *Dantzig*, que procura a variável x_k com o menor custo relativo para entrar na base, uma

vez que o objetivo é minimizar Z_{RL} . Isto nos sugere que a coluna A_k procurada seja tal que $\hat{c}_k = c_k - \pi^T A_k = \min\{c_j - \pi^T A_j, j \in \mathcal{N}\}$. Isto é, a coluna procurada pode ser obtida resolvendo o subproblema

$$z_{subp} = \text{Min} (c_j - \pi^T A_j) \quad (2.36)$$

$$s.a. \quad A_j \text{ é um padrão de corte.} \quad (2.37)$$

Este subproblema é chamado também de problema *pricing out* [22].

Considerando o objetivo do problema de corte de estoque como sendo minimizar o número de objetos cortados temos que $c_j = 1, j = 1, \dots, n$, e assim, a função objetivo do subproblema (2.36) é reescrita como:

$$z_{subp} = \text{Min}(1 - \pi^T A_j) = 1 - \text{Min}(-\pi^T A_j) = 1 - \text{Max}(\pi^T A_j). \quad (2.38)$$

Assim, para resolver o subproblema (2.36)-(2.37) basta resolver:

$$z'_{subp} = \text{Max} (\pi^T A_j) \quad (2.39)$$

$$s.a. \quad A_j \text{ é um padrão de corte.} \quad (2.40)$$

Suponha que ao resolver (2.39)-(2.40), a k -ésima coluna seja gerada com custo relativo $\hat{c}_k = 1 - z'_{subp}$. Se:

- $\hat{c}_k = 1 - z'_{subp} \geq 0$, ou seja, $z'_{subp} \leq 1$, a solução básica atual é ótima.

Senão, se:

- $\hat{c}_k = 1 - z'_{subp} < 0$, ou seja, $z'_{subp} > 1$, a coluna A_k entra na base, melhorando o valor de Z_{RL} . A coluna a sair da base segue os passos usuais do Método Simplex.

O Método Simplex segue, então, da forma convencional até a próxima iteração. Em cada iteração, uma coluna é gerada no passo em que se decide se há, ou não uma variável candidata a entrar na base. O processo de geração de colunas continua até que a coluna k gerada tenha custo relativo não negativo, ou seja, $\hat{c}^k \geq 0$. Podemos notar que a vantagem da utilização do método de geração de colunas é que não há necessidade de armazenar todas as colunas do problema, mas sim, as mais interessantes a cada passo do método.

Apesar de o método de geração de colunas ser muito eficiente, este procedimento apresenta problemas de estabilização e pode ter uma convergência lenta para a solução ótima

do problema relaxado. Nas primeiras iterações o valor da função objetivo decresce rapidamente mas, à medida que a solução se aproxima da ótima, este decréscimo é cada vez menor. Este comportamento, conhecido como *tailing-off*, é típico da geração de colunas e ocorre devido as degenerações primais e pelas excessivas oscilações das variáveis duais [9]. Alguns trabalhos da literatura tentam contornar este inconveniente. Por exemplo, du Merle *et al.* [31] apresentam um esquema de estabilização que combina a técnica da perturbação com a das penalidades exatas, e que resulta numa redução muito significativa do número de colunas geradas quando aplicado a diversos problemas de otimização. Recentemente, Liang e Wilhelm [49] propuseram uma generalização da geração de colunas, reformulando o problema mestre com menos variáveis à custa de adicionar mais restrições. Os autores comprovam analiticamente e computacionalmente que a reformulação promove uma convergência mais rápida para a solução ótima.

A solução obtida com o processo de geração de colunas pode ser, na maioria da vezes, fracionária, já que o método está sendo aplicado a relaxação linear do problema. Portanto, o fato de resolver o problema linear através do método de geração de colunas não implica, necessariamente, uma solução ótima para o problema original (inteiro). Assim, depois de resolvido o problema linear contínuo, um novo problema pode surgir: encontrar uma solução inteira para o problema original a partir da solução da relaxação linear.

Gilmore e Gomory propuseram tomar o teto da solução ótima fracionária, ou seja, sendo $x^* \in \mathbb{R}_+^m$ uma solução ótima da relaxação linear do problema, fazer $\bar{x}_i = \lceil x_i^* \rceil$, $i = 1, \dots, m$, é uma solução inteira aproximada. Desde que, o problema esteja sendo resolvido com permissão de produção de itens além da demanda, esta aproximação resulta em uma solução viável para este. Caso contrário, este procedimento pode resultar numa solução que extrapola a demanda dos itens.

Quando não é permitido produzir itens além da demanda, uma forma de obter uma solução inteira aproximada, é tomar o piso de x^* [66], ou seja, $\bar{x} = (\lfloor x_1^* \rfloor, \dots, \lfloor x_n^* \rfloor)$. Se esta solução ainda for inviável para o problema inteiro (2.12)-(2.14), ou seja, $\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j < b_i$, para algum i , $i = 1, \dots, m$, então o problema residual (2.41)-(2.43) deve ser resolvido:

$$\min Z_{Res} = \sum_{j=1}^n x_j \quad (2.41)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = r_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+ \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.43)$$

em que $r_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j$, $i = 1, \dots, m$, é a demanda residual que não foi atendida pelo arredondamento da solução x^* . Note que se existir algum x_j tal que $0 \leq x_j < 1$, ao tomar o piso de x_j obtém-se $x_j^* = 0$ e pode ocorrer de ainda existir demanda residual não atendida. Neste caso, a demanda residual pode ser completada com a aplicação de alguma heurística de construção: *FFD* ou *Gulosa* (para mais detalhes sobre este tipo de heurística veja, por exemplo, [66]).

Segundo Poldi [66], para encontrar uma solução inteira para o problema podemos fazer uso de heurísticas residuais, que consistem basicamente em resolver o problema original relaxado, obter uma solução inteira aproximada, resolver novamente o problema residual resultante relaxado, obter novamente uma solução inteira aproximada e assim, por diante, até que uma solução inteira que satisfaça a demanda do problema original seja obtida. Heurísticas residuais podem ser encontradas, por exemplo, em [85] e [66], entre outros.

2.4.3 Métodos de Enumeração Implícita

Dada a dificuldade em encontrar soluções ótimas para problemas inteiros, métodos de solução exatos têm sido muito estudados e estes estudos têm apresentado bons resultados. Um dos métodos que têm sido muito utilizado na resolução dos problemas inteiros é o *Branch-and-Bound*, que se baseia na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente dos pontos candidatos a solução ótima de um problema inteiro, tentando excluir soluções ruins. A motivação deste método parte do princípio que enumerar todas as soluções viáveis pode ser extremamente custoso e não é uma boa alternativa para a maioria dos problemas, já que muitas vezes o número de soluções viáveis é muito grande.

O algoritmo inicialmente delimita a região de possíveis soluções, calculando dois limitantes chamados de limitantes primais e duais. Os limitantes primais são obtidos à partir das soluções viáveis e os duais à partir da relaxação linear. O objetivo é recalculá-los até que sejam iguais e possamos afirmar que a solução é ótima, ou sua diferença seja a mínima possível, o que limita o espaço de busca do algoritmo. O termo *Branch* refere-se ao fato do método efetuar partições no espaço das soluções e o termo *Bound* ressalta que a prova da otimalidade da solução utiliza-se dos limites calculados ao longo da enumeração. Geralmente, para controlar o processo de enumeração da busca de soluções, o método é representado por uma árvore, chamada de árvore de enumeração (ou de árvore *Branch-and-Bound*), em que cada nó representa uma partição no espaço de soluções do problema. Para mais detalhes veja [88].

Outro método muito utilizado na resolução de problemas de programação inteira é o *Branch-and-Cut*, que combina as estratégias do método *Branch-and-Bound* e de planos de corte, com o objetivo de reduzir o número de nós na árvore *Branch-and-Bound*. O algoritmo *Branch-and-Cut* procede da mesma maneira que o *Branch-and-Bound*, porém neste existe a inclusão de inequações válidas em cada nó da árvore de enumeração, a fim de obter melhores limitantes duais, podendo vir a reduzir o número de nós na árvore *Branch-and-Bound* [88].

Para problemas com um grande número de variáveis, o método de geração de colunas pode ser combinado com o método *Branch-and-Bound*, obtendo o método denominado *Branch-and-Price* [80]. Neste método, a técnica de geração de colunas é aplicada na resolução da relaxação linear em cada nó da árvore *Branch-and-Bound*. O algoritmo *Branch-and-Price* é muito eficiente mas esbarra em uma dificuldade crucial: o problema é modificado quando as restrições da ramificação são adicionadas no problema mestre, o que pode desestruturar o subproblema utilizado na geração de colunas, implicando na destruição da estrutura que é explorada ou necessária para resolução eficiente destes subproblemas [12]. Tendo em vista esta dificuldade, recentemente em 2010, Vanderbeck [82] apresenta um esquema geral de partição do espaço de soluções para contornar este inconveniente.

O algoritmo *Branch-and-Price* têm sido aplicado em diversos tipos de problema, entre estes, o problema de corte unidimensional [80]. Barnhart *et al.* [12] propõem o uso do algoritmo *Branch-and-Price* para solucionar problemas inteiros de grande porte e faz uma breve revisão sobre alguns trabalhos propostos na literatura que utilizam a estratégia *Branch-and-Price*.

Ultimamente, o método *Branch-and-Price* vem sendo combinado com o método de planos de cortes, resultando no algoritmo conhecido como *Branch-and-Cut-and-Price* [88]. Nesta estratégia é considerada não só a inserção de colunas, mas também de planos de corte (linhas), em cada nó da árvore *Branch-and-Bound*. A mesma dificuldade encontrada no *Branch-And-Price* também aparece no *Branch-and-Cut-and-Price*, uma vez que o processo de geração de colunas pode tornar-se muito difícil após a adição dos planos de corte, já que estes podem destruir a estrutura do problema associado à geração de colunas. Belov e Scheithauer [15] utilizam este método para resolver problemas de corte de estoque no caso unidimensional e bidimensional. Alves e Carvalho [8], também fazem uso deste tipo de algoritmos para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com diferentes tamanhos de objetos em estoque. Para mais detalhes sobre os métodos de

enumeração implícita discutidos nesta seção veja, por exemplo, [88, 80, 12, 81, 14, 15, 8, 82].

2.5 Geração de Padrões de Corte Bidimensionais

Durante a resolução do problema de corte de estoque pelo Método Simplex com geração de colunas, a resolução do subproblema (2.36)-(2.37) resulta na geração de um padrão de corte que pode ser feita de acordo com diferentes exigências e objetivos. Um padrão de corte possui várias características que podem ser determinantes na avaliação de sua qualidade no contexto de uma determinada indústria. Nesta seção descrevemos algumas destas características para os padrões de corte bidimensionais, e apresentamos brevemente alguns métodos encontrados na literatura para geração destes padrões. Para um estudo de padrões de corte unidimensionais consultar, por exemplo, [40, 41, 5, 14, 22].

2.5.1 Padrão de Corte Guilhotinado e Não Guilhotinado

Definição 2.4 ([58]). *Um corte é dito guilhotinado ortogonal, ou simplesmente guilhotinado, quando é feito paralelamente a um dos lados de um objeto retangular e o divide em dois novos retângulos. Um padrão de corte composto apenas por cortes guilhotinados é chamado de padrão de corte guilhotinado.*

A Figura 9 ilustra um padrão de corte guilhotinado e um não guilhotinado.

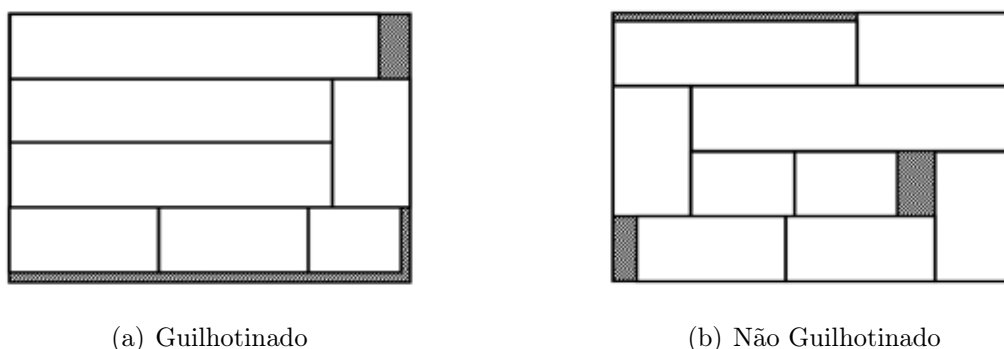


Figura 9: Exemplo de padrão de corte Guilhotinado e Não-Guilhotinado.

Por limitação operacional de alguns equipamentos de corte, os padrões guilhotinados são mais frequentes em indústrias onde existe a necessidade do corte de matéria-prima, enquanto que os padrões de corte não guilhotinados têm uma maior aplicação nos problemas de empacotamento [57]. Os padrões de corte guilhotinados podem ser classificados

de acordo com o número de estágios de corte para obtenção de todos os itens que nele estão alocados.

Definição 2.5 ([5]). *O número de estágios de um padrão de corte guilhotinado é o número de vezes que o objeto deve ser rotacionado de 90° para que os cortes guilhotinados sejam efetuados.*

A Figura 10 mostra um padrão de corte em três estágios, dado que são necessárias duas mudanças de direção do corte. No primeiro estágio, o corte guilhotinado horizontal resulta em um conjunto de faixas. O segundo estágio é caracterizado por cortes guilhotinados verticais em cada faixa, e o terceiro novamente por cortes horizontais. De maneira geral, o número de estágios de um padrão de corte é dado pelo número de rotações necessárias mais uma unidade. Note ainda, que o ajuste a ser feito em um dos itens, indicado na figura por *apara*, pode ser desconsiderado como estágio de corte pois esses ajustes geralmente são feitos em máquinas secundárias. Padrões de corte que apresentam *apara* são chamados de padrões de corte não-exatos e, os que não precisam desse ajuste final são chamados padrões de corte exatos.

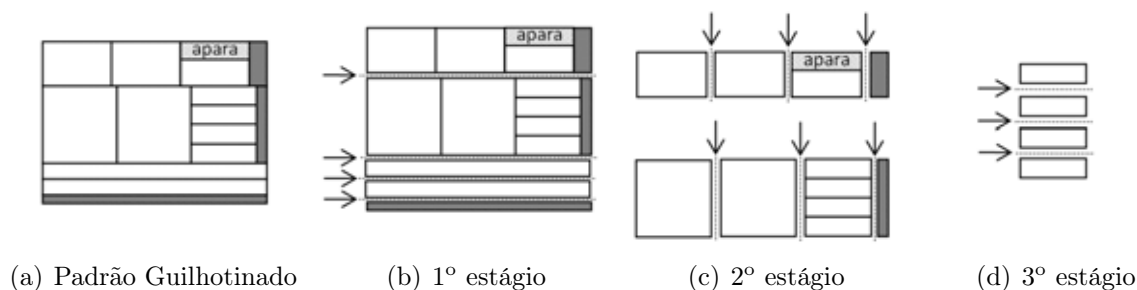


Figura 10: Exemplo de um padrão de corte guilhotinado 3-estágios.

De maneira geral, o número de estágios k é dado por $k = r + 1$, sendo r o número de rotações necessárias.

2.5.2 Orientação dos Itens

Em muitas situações práticas, empresas admitem que os itens possam ser rotacionados de 90° antes de serem incluídos no padrão de corte. Esta estratégia é adotada pelas indústrias com o intuito de se obter um melhor aproveitamento do objeto. Entretanto, se a matéria-prima possui estampas ou veios este procedimento pode não ser interessante. Neste caso, em que os materiais utilizados impõem uma direção de corte, como por exemplo, pranchas de madeira nativa, placas compensado laminado, tecidos estampados, etc,

a rotação de itens pode ter um reflexo direto na qualidade dos itens produzidos [37]. Quando os itens não podem ser rotacionados dizemos que estes possuem orientação fixa e, caso contrário, dizemos que os itens têm rotação permitida. A Figura 11 apresenta dois padrões de corte, um com orientação fixa dos itens e o outro com rotação permitida dos itens. Note na Figura 11 que rotacionar os itens permitiu um melhor aproveitamento do objeto, uma vez que o padrão de corte em que os itens possuem rotação permitida (Figura 11(c)) aloca mais itens do que o padrão em que os itens têm orientação fixa (Figura 11(b)).

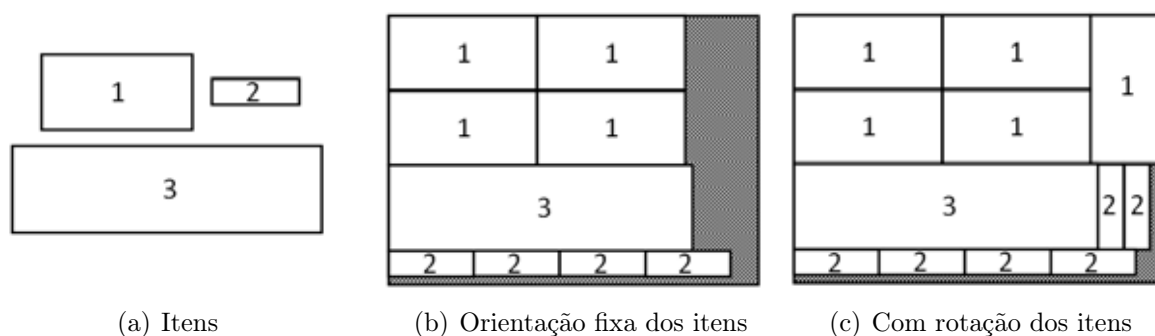


Figura 11: Orientação dos itens.

Quando a orientação dos itens é permitida, se o problema original possui m itens, o número de itens a ser considerado na geração de padrões de corte pode dobrar (número de itens $\leq 2m$). Porém em algumas situações alguns itens não podem ser incluídos no padrão de corte depois de rotacionados ($l_i > W$ ou $w_i > L$). Quando a rotação dos itens é permitida a restrição (2.13) do problema de corte de estoque pode ser modificada para:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + a_{(i+m)j})x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.44)$$

em que o item $i + m$ é o item i rotacionado.

2.5.3 Redução de Padrões de Corte Irrelevantes

Em geral, o número de padrões de corte num problema de corte de estoque é muito alto. Assim, impor algumas regras para evitar padrões de corte desnecessários é uma estratégia interessante. Christofides e Whitlock [20] propõem algumas regras para evitar a geração de padrões de corte equivalentes, ou seja, padrões de corte cujos vetores são os mesmos mas o modo de cortá-los (“desenho” do padrão de corte) é diferente. A utilização de efeitos de simetria, ordenação e de corte normal reduzem consideravelmente o número de padrões de corte possíveis. Descrevemos abaixo estas características.

- Padrões Equivalentes em Termos de Itens

Definição 2.6. Um padrão de corte é dito equivalente a outro, em termos do número de itens, quando os vetores associados aos dois padrões de corte são iguais.

A Figura 12 ilustra dois padrões de corte bidimensionais equivalentes, cujo vetor associado a estes é $(5, 2, 1, 2)^T$.

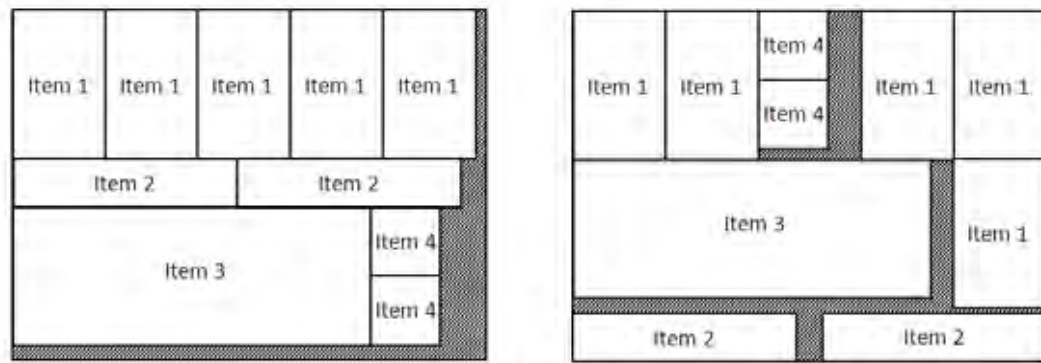


Figura 12: Padrões de corte bidimensionais equivalentes em termos de itens.

- Efeitos de Simetria

Suponha que em um objeto de dimensões (L, W) seja aplicado um corte vertical de tamanho l_1 produzindo dois subobjetos de dimensões (l_1, W) e $(L - l_1, W)$ (Figura 13(a)). Estes mesmos dois retângulos podem ser obtidos com um corte de tamanho $L - l_1$ (Figura 13(b)). Para evitar essa duplicação, basta impor que $l_1 \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$, reduzindo o número de possibilidades de corte pela metade.

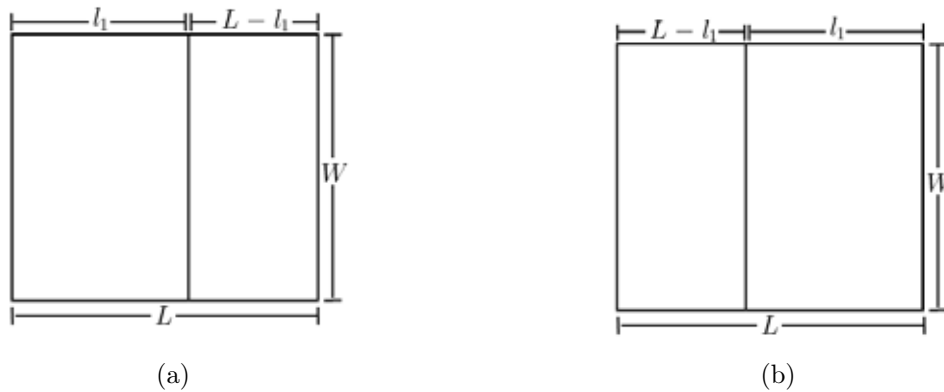


Figura 13: Efeito de Simetria.

- Efeitos de Ordenação

Considere um objeto de dimensões (L, W) . Suponha que seja aplicado neste retângulo um corte vertical de tamanho l_1 , produzindo dois subobjetos de dimensões (l_1, W) e $(L - l_1, W)$, como pode ser visto na Figura 14(a). Em seguida, suponha que o objeto $(L - l_1, W)$ seja cortado, também na direção vertical, em uma posição l_2 , ($l_2 < l_1 \leq \frac{L-l_1}{2}$), logo três objetos são obtidos: (l_1, W) , (l_2, W) e $(L - l_1 - l_2, W)$ (Figura 14(a)). Estes mesmos três objetos poderiam ter sido obtidos se considerássemos primeiro o corte l_2 e (L, W) e depois o corte l_1 no objeto $(L - l_2, W)$ (Figura 14(b)). Para evitar este tipo de duplicação basta considerar uma ordenação nos cortes de tal forma que se um objeto é cortado na posição l_1 , então todos os cortes seguintes devem ser maiores ou iguais a l_1 [68].

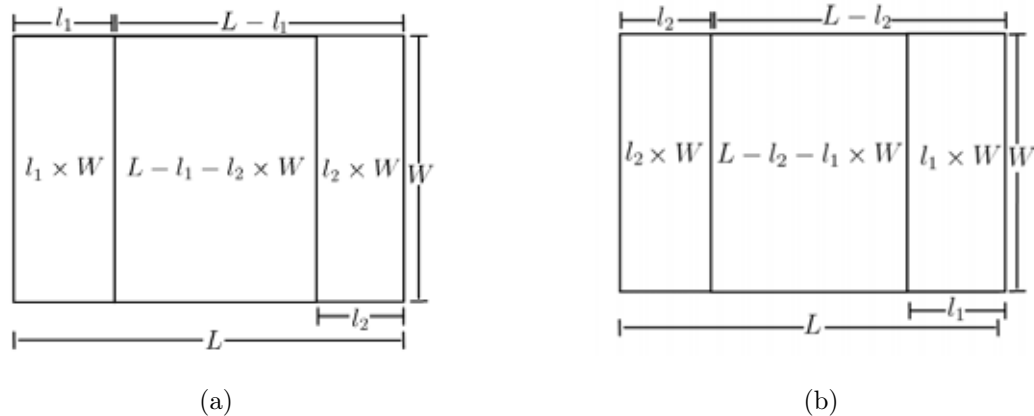


Figura 14: Efeito de Ordenação.

- Cortes Normais ou Canônicos

Se um objeto retangular de dimensões (L, W) é cortado verticalmente na posição l_1 , então no padrão de corte final deve haver uma combinação de itens i ($i = 1, \dots, m$), tais que a soma total de seus comprimentos seja exatamente l_1 . Caso isto não ocorra, um corte em uma posição l_2 , menor ou igual a l_1 , pode ser feito levando ao mesmo modelo de corte final, veja a Figura 15. Assim, o número de cortes verticais ao longo de L pode ser reduzido.

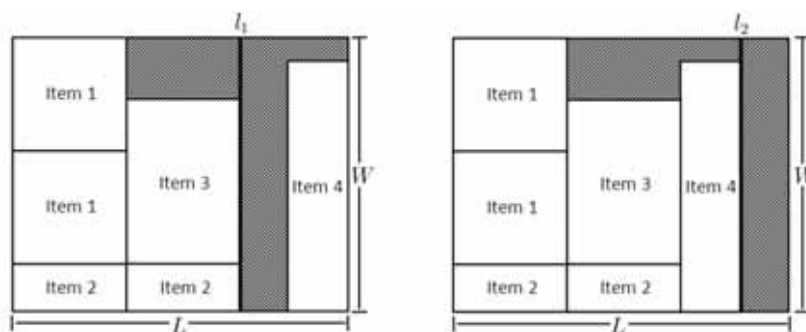


Figura 15: Cortes Normais ou Canônicos.

Além das restrições para reduzir o número de padrões descritas anteriormente, uma outra restrição natural que deve ser considerada é a capacidade física do objeto, ou seja, um padrão de corte não pode conter uma quantidade de itens, cuja soma de suas áreas é maior que a área do objeto. Para que um padrão de corte seja viável, o número de vezes que o item i aparece no padrão de corte j (a_{ij}) deve ser menor ou igual a quantidade máxima (número de itens i no padrão de corte homogêneo maximal) de itens que podem ser cortados do objeto:

$$a_{ij} \leq \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor. \quad (2.45)$$

Em alguns problemas, a demanda b_i de alguns itens é estritamente menor que $\left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor$, ou seja, é preciso considerar que o número de itens nos padrões de corte é restrito às suas demandas. Estes problemas são chamados de problemas restritos, no caso contrário, o problema é dito irrestrito [58].

Neste trabalho, nosso interesse é por padrões de corte guilhotinados 2-estágios já que a empresa de móveis visitada prefere esses tipos de padrões devido a facilidade de manuseá-los, a maior rapidez em cortá-los e também porque a máquina de corte permite apenas cortes guilhotinados. Porém, na prática a indústria trabalha com padrões até três estágios [36], pois estes apresentam um melhor aproveitamento da matéria-prima. Existem várias formas de gerar padrões de corte bidimensionais guilhotinados estagiados. Nas próximas seções descreveremos alguns desses métodos.

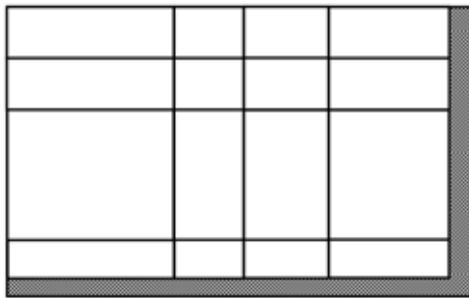
2.5.4 Geração de Padrões de Corte n -grupos

Um caso particular de um padrão 2-estágios é o chamado padrão de corte guilhotinado 1-grupo ou padrão de corte tabuleiro, em que os cortes do segundo estágio são realizados

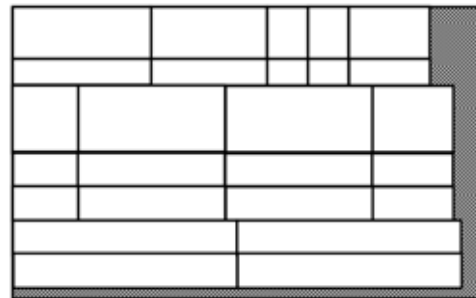
simultaneamente nas faixas resultantes do primeiro estágio [42]. Podemos generalizar este conceito e definir os padrões n -grupos.

Definição 2.7 ([42]). *Padrões de corte n -grupos são formados por n partes em que cada uma das partes é um padrão 1-grupo. Padrão 1-grupo, são padrões 2-estágios em que as faixas resultantes do primeiro estágio podem ser cortadas simultaneamente no segundo estágio*

Os padrões de corte n -grupos podem também ser chamados de padrões tabuleiro composto [37]. A Figura 16 ilustra dois exemplos de padrões de corte n -grupos, um padrão do tipo 1-grupo (ou tabuleiro) e o outro do tipo 3-grupos (ou tabuleiro composto), Figuras 16(a) e 16(b) respectivamente.



(a) 1-grupo



(b) 3-grupos

Figura 16: Exemplo de padrões 1-grupo e 3-grupos.

Yanasse e Morabito [93] apresentam modelos matemáticos para geração de padrões de corte 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos, considerando os casos exato e não exato. A Figura 17 ilustra estes quatro tipos de padrões de corte n -grupos e verticais. São chamados verticais, pois, como pode ser notado na Figura 17, cada um dos grupos que compõem o padrão de corte é separado por um corte vertical principal que divide o objeto em subobjetos, exceto os padrões 1-grupo.

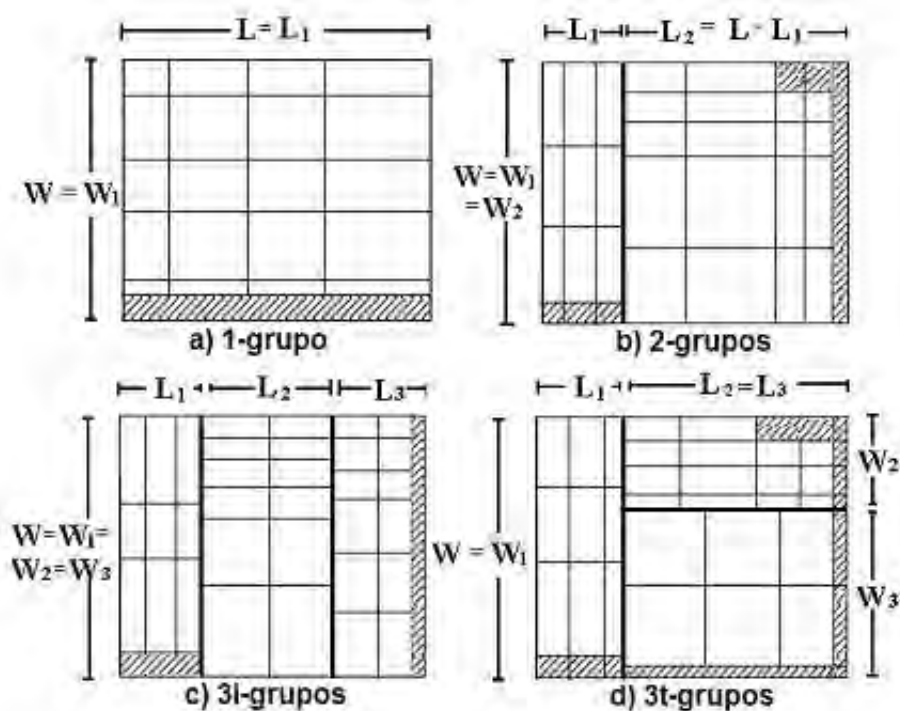


Figura 17: Padrões de corte n-grupos [35].

Note que, em um padrão de corte 2-grupos vertical (Figura 17(b)), por exemplo, após ser feito o corte principal na vertical do objeto, são obtidos dois subobjetos de dimensões (L_1, W) e $(L_2 = L - L_1, W)$. Cada um desses novos subobjetos constituem um padrão 1-grupo, ou seja, este tipo de padrão preserva a característica de ser 2-estágios. A mesma ideia é utilizada para obtenção de padrões 3-grupos (*e.g.* 3i-grupos - Figura 17(c) e 3t-grupos (Figura 17(d))).

Um padrão de corte 3i-grupos é um padrão 2-estágios e se caracteriza pelo fato de que as faixas resultantes do primeiro estágio são divididas em 3 grupos, de modo que todas as faixas de um mesmo grupo são cortadas simultaneamente no segundo estágio. A notação 3i-grupos se deve ao fato dos cortes feitos no objeto serem parecidos com a letra maiúscula “I”. Note na Figura 17(c) que inicialmente dois cortes principais são aplicados na posição vertical ($L_1, L_2: 0 < L_1 \leq L_2 \leq L$), e dividem o objeto (L, W) em três subobjetos de dimensões (L_1, W) , (L_2, W) e $(L - L_1 - L_2, W)$. Cada um desses subobjetos caracterizam um padrão 1-grupo.

Um padrão 3t-grupos é um padrão 3-estágios, e se caracteriza pelo fato de que nos dois primeiros estágios as faixas resultantes são divididas em 3 grupos, de modo que todas as faixas de um mesmo grupo são cortadas simultaneamente no segundo e terceiro estágios. A notação 3t-grupos é devido ao fato dos cortes feitos no objeto serem parecidos com a

letra maiúscula “T”. Note na Figura 17(d) que inicialmente é aplicado um corte vertical L_1 , $0 < L_1 \leq L$, que divide o objeto (L, W) em dois subobjetos de dimensões (L_1, W) e $(L - L_1, W)$ e, em seguida, um corte na horizontal W_2 , $0 < W_2 \leq W$ é efetuado dividindo o objeto $(L - L_1, W)$ em dois subobjetos $(L - L_1, W_2)$ e $(L - L_1, W - W_2)$. Observe também que em cada um dos subobjetos existe sempre um padrão 1-grupo.

Cui [24, 25, 26] também discute a classe especial de padrões de corte bidimensionais do tipo “T”, considerando a produção de itens circulares (Figura 18(a)) ou retangulares (Figura 18(b)).

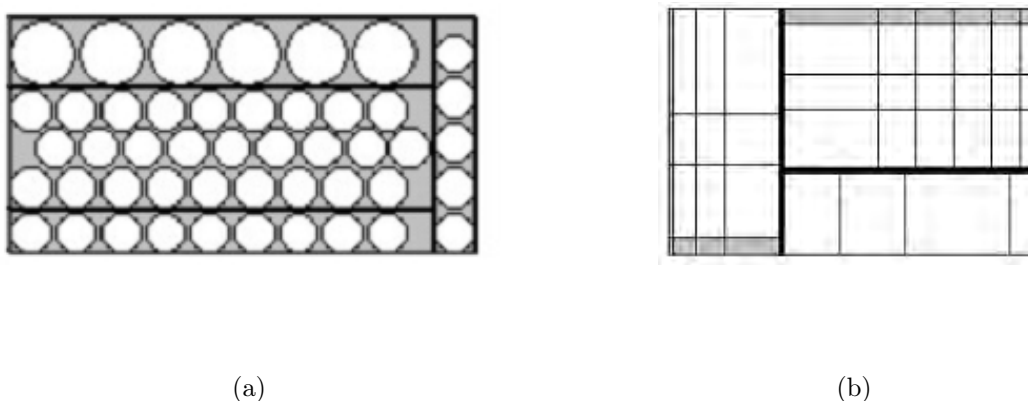


Figura 18: Padrões do tipo “T” [24], [25].

Devido a essa classificação dada por Cui, Yanasse e Morabito [93] denotam por padrões 3t-grupos os padrões do tipo “T” que são formados por subpadrões 1-grupo.

Faccio e Rangel [34] fizeram um estudo para analisar a eficiência dos modelos lineares inteiros propostos em [93, 94, 95] e o seu uso na geração de colunas para resolver o problema de corte de estoque bidimensional utilizando dados reais de uma fábrica de móveis (a mesma fábrica visitada ao longo da elaboração deste trabalho). Os resultados obtidos mostraram que os padrões gerados possuem perdas dentro dos requisitos exigidos pela fábrica, sendo que a menor perda foi encontrada com padrões do tipo 3t-grupos e o menor tempo computacional com padrões do tipo 1-grupo.

A seguir, apresentamos os modelos matemáticos propostos por Yanasse e Morabito [93] para gerar padrões n -grupos. Suponhamos conhecidos:

m - número de itens;

L, W - comprimento e largura do objeto, respectivamente;

l_i, w_i - comprimento e largura do item $i = 1, \dots, m$, respectivamente;

b_i - demanda do item $i = 1, \dots, m$;

J, K - quantidade de comprimentos l_i e larguras w_i diferentes;

v_{ijk} - valor do item i incluído em um retângulo (l_j, w_k) , $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, K$.

s_j - número de dígitos necessários para representar $\left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor$ na notação binária;

M - número real suficientemente grande.

As variáveis do modelo são dadas por:

β_{jsh} - o dígito binário $(0, 1)$ associado a decomposição do número de vezes que o comprimento l_j é cortado ao longo do subobjeto h para cada $s \in s_j$;

μ_{kh} - número de vezes que a largura w_k é cortada ao longo da largura do subobjeto h ;

a_{ijkh} - número de retângulos (l_j, w_k) que contém itens do tipo i no subobjeto h . De outra forma, número de itens do tipo i contidos em todos os retângulos (l_j, w_k) do subobjeto h ;

$f_{jks h}$ - número de retângulos (l_j, w_k) no subobjeto h para cada $s \in s_j$;

L_h - comprimento do subobjeto h ;

W_h - largura do subobjeto h .

O modelo de otimização para gerar um padrão do tipo 1-grupo ($h = 1$) é dado por (2.46)-(2.54) [34].

A função objetivo (2.46) maximiza o valor total dos itens alocados no padrão de corte. As restrições (2.47)-(2.48) garantem que o comprimento e a largura dos retângulos que irão conter os itens não excedam o comprimento e a largura do subobjeto h , respectivamente. As restrições (2.49)-(2.52) limitam o número de retângulos (l_j, w_k) presentes no subobjeto h . As restrições (2.53) impõem a geração de um padrão de corte restrito. Por fim, as restrições (2.54) definem o domínio das variáveis.

$$\text{Max} \quad \sum_{h=1}^1 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijkh} \quad (2.46)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^J l_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{jsh} \leq L_h, \quad \forall h \quad (2.47)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_{kh} \leq W_h, \quad \forall h \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijkh} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks h}, \quad \forall j, k, h \quad (2.49)$$

$$f_{jks h} \leq \mu_{kh}, \quad \forall j, k, s, h \quad (2.50)$$

$$f_{jks h} \geq \mu_{kh} - M(1 - \beta_{jsh}), \quad \forall j, k, s, h \quad (2.51)$$

$$f_{jks h} \leq M\beta_{jsh}, \quad \forall j, k, s, h \quad (2.52)$$

$$\sum_{h=1}^1 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijkh} \leq b_i, \quad \forall i \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} & \beta_{jsh} \in \{0, 1\}; \quad \mu_{kh}, \quad a_{ijkh} \in \mathbb{Z}_+, \quad f_{jks h} \geq 0, \\ & i = 1 \dots m; \quad j = 1, \dots, J; \quad k = 1, \dots, K; \quad s = 1, \dots, s_j. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O modelo (2.46)-(2.54) pode ser usado para gerar padrões de corte irrestritos, basta eliminar a restrição (2.53). Este modelo também pode ser usado para geração de padrões de corte exatos ou não-exatos. Para o caso exato, basta tomar o valor de v_{ijk} por:

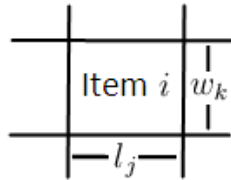
$$\begin{cases} v_i, & \text{se } l_i = l_j \text{ e } w_i = w_k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.55)$$

e para o caso não-exato:

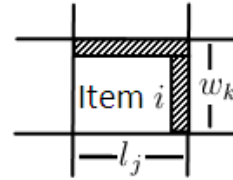
$$\begin{cases} v_i, & \text{se } l_i \leq l_j \text{ e } w_i \leq w_k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.56)$$

Note na Figura 19(a) que a imposição (2.55) garante que os únicos itens que serão

aceitos para maximizar a função objetivo (2.46) são os que preenchem exatamente o retângulo (l_j, w_k) , uma vez que $v_{ijk} \neq 0$ se $l_i = l_j$ e $w_i = w_k$. Da mesma forma, a imposição (2.56) permite que itens que não preencham totalmente os retângulo (l_j, w_k) (itens com aparas, como da Figura 19(b)), sejam aceitos, podendo assim criar padrões de corte não-exatos.



(a) Item sem aparas



(b) Item com aparas

Figura 19: Itens incluídos nos padrões de corte exato e não-exato, respectivamente.

Para geração dos padrões de corte 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos também pode ser utilizado o modelo (2.46)-(2.54). Para isto, basta variar o valor do parâmetro h que controla o número de subobjetos a serem criados e incluir as restrições que limitam os cortes verticais principais no objeto. Para evitar o efeito de simetria, restrições que evitam a duplicação de corte também são adicionadas ao modelo. Na Tabela 1 está um resumo das alterações que devem ser feitas [34]. A primeira coluna denota o tipo de padrão a ser gerado, a segunda coluna define o domínio de h e a terceira apresenta as restrições que devem ser acrescentadas ao modelo (2.46)-(2.54). Cabe notar, que estes padrões (2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos) também podem ser obtidos com o corte principal na horizontal. Para mais detalhes sobre estes modelos de geração de padrões n -grupos veja [93, 94, 95, 34, 35].

Alterações no Modelo 1-grupo (2.46)-(2.54)		
Modelo	N. Subobj	Rest Adicionais
2-grupos	h=1,2	$0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2}$ $L_2 = L - L_1$
3i-grupos	h=1,2,3	$0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2}$ $L_2 \leq L - L_1 - L_2$ $L_3 = L - L_1 - L_2$
3t-grupos	h=1,2,3	$W_1 = W$ $0 \leq W_2 \leq \frac{W_1}{2}$ $W_3 = W_1 - W_2$ $L_2 = L - L_1$ $L_2 = L_3$

Tabela 1: Alterações no modelo 1-grupo para obtenção dos modelos 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos [34].

2.5.5 Trabalhos na Literatura

Além dos trabalhos já citados [93, 94, 95, 34, 35] que tratam da geração de padrões de corte bidimensionais do tipo n -grupo, existem muitos outros trabalhos na literatura que tratam de modelos matemáticos para gerar padrões de corte bidimensionais. Gilmore e Gomory [42] apresentaram formulações baseadas em programação dinâmica para gerar padrões guilhotinados em n -estágios. Katsurayama e Yanasse [47] propõem um algoritmo para gerar padrões de corte tabuleiros exatos que contenham uma combinação de itens previamente determinada. Morabito e Arenales [58] apresentam um algoritmo de enumeração implícita, baseado numa busca em grafo E/OU, para o problema estagiado e restrito. Lodi e Monaci [50] propõem dois modelos lineares para a geração restrita de padrões de corte guilhotinado 2-estágios e consideram algumas restrições para evitar soluções simétricas. Em Riehme *et al.* [71] é estudado o problema de corte bidimensional com cortes guilhotinados em 2-estágios e grande variação de demanda. Alves *et al.* [11] propõem um modelo baseado no problema do fluxo mínimo para a resolução do problema de corte de estoque bidimensional considerando também padrões guilhotinados em 2-estágios. Hifi *et al.* [44] apresentam dois algoritmos para resolver o problema de corte de estoque bidimensional guilhotinado, em que o atendimento às demandas dos itens deve estar entre um limite superior e inferior.

Nos trabalhos [17, 36, 63, 34, 60, 59] são encontrados estudos relacionados ao pro-

blema de corte de estoque bidimensional em indústrias moveleiras. Cavali [17] analisa a utilização do sistema CorteBi [69] que gera padrões em 2 estágios de Gilmore e Gomory [42]. Figueiredo e Rangel [36] propõem uma heurística para a geração de um conjunto de padrões de corte baseados em padrões n -grupos (tabuleiro composto). Um estudo para esta mesma indústria pode ser encontrado em [63, 34]. Faccio e Rangel, [34] estudam eficiência de modelos lineares inteiros para resolver o problema do corte guilhotinado bidimensional propostos em [93, 94], bem como o seu uso na geração de colunas para o problema de corte de estoque. Os trabalhos [17, 36, 63, 34] foram realizados usando dados da mesma fábrica de móveis tomada como estudo de caso nesta dissertação. Morabito e Belluzo [60] utilizam abordagens para gerar padrões de corte bidimensionais que minimizem os desperdícios de matéria-prima em um estudo de caso de uma indústria de móveis de grande porte. Morabito e Arenales [59] propõem um modelo, baseados no trabalho de Gilmore e Gomory [41], para resolver o problema de corte de estoque bidimensional em uma indústria moveleira considerando padrões guilhotinados de 2 e 3-estágios.

Outros estudos do problema de corte de estoque bidimensional e/ou da geração de padrões de corte bidimensionais podem ser encontrados em [42, 90, 61, 63].

Em geral, nos problemas de corte de estoque o objetivo é minimizar os custos de produção. Estes custos podem ser dados não apenas pela minimização do número de objetos ou a perda de material, mas também pelo tempo de utilização da máquina de corte. A seguir descrevemos o conceito de ciclo da serra, que se faz presente em ambientes onde a máquina de corte pode cortar vários objetos simultaneamente, e pode ser um fator imprescindível na redução dos custos operacionais incorridos no problema de corte de estoque.

2.6 Ciclos da Serra

Em algumas indústrias, como por exemplo de móveis (*e.g.* Mosquera [63]) e de tubos de metal (*e.g.* Chu e Antonio [21]), a máquina de corte tem capacidade de cortar simultaneamente vários objetos. O número máximo de objetos que a máquina pode cortar ao mesmo tempo, de acordo com um padrão de corte, é chamado de capacidade da máquina de corte, e será denotado por Cap . A capacidade da máquina pode ser dada por:

$$Cap = \left\lfloor \frac{CpT}{esp} \right\rfloor, \quad (2.57)$$

em que CpT é a altura da serra e esp é a espessura do objeto a ser cortado.

A Figura 20 ilustra o corte simultâneo de objetos.

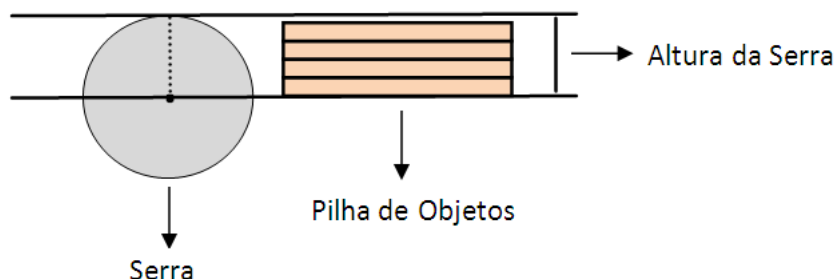


Figura 20: Corte simultâneo de objetos.

Definição 2.8 ([91]). *Ciclo da Serra é o conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos, segundo um mesmo padrão de corte, incluindo o ato de carregar a máquina de corte com um determinado número de objetos e cortá-los simultaneamente, até que todos os itens sejam obtidos.*

O número mínimo de ciclos da serra, y_j , necessários para cortar x_j objetos, de acordo com um padrão de corte j e com a capacidade da máquina é calculado de acordo com:

$$y_j = \left\lceil \frac{x_j}{Cap} \right\rceil. \quad (2.58)$$

Para a realização de um ciclo da serra é necessário utilizar a máquina por um determinado tempo. Admitindo que este tempo não varie com a quantidade de objetos sendo cortados ou com o tipo de padrão que está sendo utilizado, cortar objetos simultaneamente diminui o tempo de utilização da máquina, uma vez que o tempo que seria gasto para cortar um único objeto é utilizado para cortar Cap objetos. Logo, a prática de cortar objetos simultaneamente implica na economia de energia elétrica, isto é, redução de custos operacionais, além de reduzir o número de ciclos da serra significativamente.

Quando a capacidade da máquina (Cap) é totalmente aproveitada durante um ciclo da serra, dizemos que este é um ciclo de capacidade completa, caso contrário, dizemos que é um ciclo de capacidade incompleta [67].

Exemplo 2.6.1. *Suponha que a altura da serra de uma máquina de corte, que permite o corte simultâneo de vários objetos, seja de 60mm e que é necessário cortar 20 objetos, de 9mm de espessura cada, de acordo com um mesmo padrão de corte j . Neste caso, a*

capacidade da máquina (Cap) é dada por: $Cap = \lfloor \frac{60}{9} \rfloor = 6$. Ou seja, a máquina é capaz de cortar, simultaneamente, no máximo 6 objetos de 9mm de espessura cada. Logo, o número de ciclos da serra necessários para cortar os 20 objetos em questão é dado por: $y_j = \lceil \frac{20}{6} \rceil = 4$ ciclos. Portanto, são necessários 3 ciclos de capacidade completa, com 6 objetos cada, e um ciclo de capacidade incompleta, com 2 objetos.

O objetivo de minimizar o número de ciclos da serra pode ser conflitante com o objetivo de minimizar o número de objetos utilizados no atendimento à demanda. No próximo capítulo discutimos melhor esta questão, além de fazer uma revisão bibliográfica sobre a redução do número de preparos na literatura, incluindo a redução de ciclos da serra, e de propor um novo algoritmo para este problema.

Capítulo 3

A redução do número de preparos no problema de corte de estoque

No problema de corte de estoque, o critério de otimização usual é minimizar o número de objetos cortados (ou minimizar a perda de material). Porém, na prática, levar em consideração somente estes critérios nem sempre satisfaz todas as necessidades da indústria. Quando é necessário trocar de padrão de corte, por exemplo, as máquinas devem ser reconfiguradas para o corte do novo padrão o que pode despende um tempo significativo. No caso de um ambiente com alta demanda para ser atendida em um curto espaço de tempo é imprescindível melhorar o aproveitamento nas preparações da máquina, bem como evitar o desperdício de matéria-prima.

O tempo necessário para fazer os ajustes em uma máquina de corte na troca entre um padrão de corte e outro é o que chamamos de tempo de *setup* ou tempo de preparo da máquina. De forma similar, o número de vezes que uma máquina é ajustada para o corte dos objetos em estoque é o que denominamos número de preparos da máquina. Assim, uma maneira de diminuir o número de preparos da máquina, ou número de *setups*, é reduzir o número de padrões de corte diferentes. Porém, no caso dos ciclos da serra (veja Capítulo 2), que também se trata de preparo da máquina de corte, nem sempre a redução de padrões de corte significa a redução de ciclos.

Em geral, os objetivos de minimizar os custos com preparação da máquina de corte e minimizar o número de objetos cortados são conflitantes. Na literatura, até onde sabemos, a maioria dos trabalhos consideram o tratamento desses dois objetivos de forma independente, sendo poucos os trabalhos que consideram simultaneamente a minimização do número de objetos e de padrões diferentes.

Neste capítulo, revisamos alguns trabalhos da literatura que tratam da redução do

número de preparos da máquina, seja como redução de padrões de corte, ou como redução de ciclos da serra. Apresentamos também uma nova contribuições para o problema de redução de ciclos da serra.

3.1 Redução do Número de Padrões de Corte

Haessler [43] propôs o modelo (3.1)-(3.3) para resolver o problema de corte de estoque unidimensional, visando minimizar o número de padrões de corte (*setups*) e a perda total.

$$\min \quad c_1 \sum_{j=1}^n t_j x_j + c_2 \sum_{j=1}^n \delta(x_j) \quad (3.1)$$

$$s.a. \quad b_i - \epsilon \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + \epsilon, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1 \dots, n, \quad (3.3)$$

No modelo (3.1)-(3.3), c_1 é o custo da perda t_j em cada objeto cortado de acordo com o padrão j , c_2 é o custo de *setup* e $\delta(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0 \\ 0, & \text{se } x_j = 0 \end{cases}$. Note que neste modelo é aceita uma tolerância ϵ para o atendimento da demanda requerida. O modelo (3.1)-(3.3) apresenta dois objetivos conflitantes: minimizar a perda de material e o número de padrões de corte distintos.

A grande dificuldade de resolver o problema (3.1)-(3.3) vem da descontinuidade e da não linearidade da função objetivo. Haessler [43] apresenta um procedimento heurístico para a resolução do problema, baseado na construção de padrões de corte em sequência (*Sequential Heuristic Procedure - SHP*), escolhendo a cada iteração padrões que possam ser utilizados muitas vezes. Tais padrões devem satisfazer algumas exigências pré-definidas, também chamadas de “parâmetros de aspiração”, que são atualizadas conforme a demanda é atendida.

Faremos uma descrição um pouco mais detalhada da heurística SHP, pois a maioria dos métodos propostos na literatura para resolver o problema de corte de estoque considerando a redução de ciclos da serra utilizam este procedimento como embasamento.

Sejam L o comprimento do objeto, l_i o comprimento do item i e r_i a demanda remanescente (ou seja, a demanda que ainda não foi atendida) do item i , $i = 1, \dots, m$. O procedimento SHP inicia com a definição de dois parâmetros baseados na análise da

demanda remanescente. O primeiro é uma estimativa do número de objetos necessários para o atendimento da demanda:

$$Est = \frac{\sum_i l_i r_i}{L}, \quad (3.4)$$

e o segundo é um número médio de itens que pode ser obtido de cada objeto:

$$N_m = \frac{\sum_i r_i}{Est}. \quad (3.5)$$

Os parâmetros Est e N_m são utilizados na determinação dos parâmetros de aspiração descritos a seguir:

- perda máxima de material permitida (MAXTL), que é dado como uma porcentagem do comprimento L do objeto, entre 0,6% e 3% de L . Perdas maiores são permitidas a medida que o número de objetos a serem cortados, de acordo com o padrão em questão, diminui;
- número máximo e mínimo de itens por padrão (MAXR e MINR). O valor MAXR é dado pela capacidade máxima de corte da máquina e MINR é dado por uma unidade a menos que o número médio de itens por padrão de corte calculado por (3.5);
- frequência mínima para o uso de um padrão de corte (MINU), cujo valor está definido entre 50% e 90% do número de objetos estimados, Est .

Após a definição dos parâmetros de aspiração, inicia-se uma busca por um padrão de corte j viável que reúna todas as características desejadas, ou seja, com a perda de no máximo MAXTL, com o número de itens entre os limites estipulados MAXR e MINR e que possa ser usado no mínimo MINU vezes sem que a demanda seja excedida.

Para gerar um padrão, os itens são ordenados de acordo com o tamanho l_i de forma não crescente. O item de tamanho maior é utilizado enquanto houver demanda remanescente ou até que não caiba mais no padrão. Este procedimento é repetido para todos os outros itens respeitando a relação de ordem imposta. Caso os níveis de aspiração do padrão sejam satisfeitos, sua frequência é definida como sendo maior ou igual a MINU, e a demanda remanescente é atualizada. Se não aceito, o valor de MINU é reduzido em uma unidade, o que amplia o espaço de padrões de corte que podem ser gerados. O processo é repetido até que as demandas de todos os itens tenham sido atendidas. Se MINU=1, um padrão gerado é necessariamente aceito e o valor de MAXTL é relaxado para zero, sendo possível assim que a demanda seja atendida em uma quantidade finita de iterações.

A heurística SHP, consegue fornecer boas soluções para o problema (3.1)-(3.3), reduzindo o número de padrões de corte e mantendo um compromisso com o número de objetos cortados. Além disso, esta heurística tem como vantagem o baixo custo computacional, sendo por esses motivos utilizada como solução inicial e base para comparação de resultados em alguns trabalhos da literatura que tratam do mesmo problema, como por exemplo, Belov [14], Umetani *et al.* [78], Salles Neto [73] e Yanasse e Limeira [92].

Moretti e Salles Neto apresentam em [62] uma variação do modelo (3.1)-(3.3) considerando a minimização do número de objetos cortados e de *setups*, permitindo a produção de itens em excesso. Isto é, a função objetivo (3.1) é modificada para

$$\min \quad c_1 \sum_{j=1}^n x_j + c_2 \sum_{j=1}^n \delta(x_j), \quad (3.6)$$

e a restrição (3.2) substituída por:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

Os autores propõem uma suavização da função descontínua $\delta(x_j)$ e uma linearização da função objetivo, tornando possível a aplicação do procedimento de Gilmore e Gomory para gerar colunas para o problema original (Capítulo 2). Cada coluna gerada é adicionada ao problema não linear relaxado, que é resolvido pelo Método Lagrangiano Aumentado [16]. Esse processo é repetido até que não seja mais possível gerar colunas. Um procedimento heurístico de arredondamento é aplicado à solução fracionária para obtenção de uma solução inteira.

Foerster and Wäscher [38] desenvolveram um método heurístico de redução de padrões para o caso unidimensional, também chamado de procedimento pós-otimização (KOMBI). Este método baseia-se na substituição de padrões que podem ser combinados, formando novos padrões de corte. Yanasse e Limeira [92], propõem uma heurística híbrida composta de três fases para resolver o problema de redução de padrões de corte de qualquer dimensão. Na primeira fase da heurística é feita uma adaptação da heurística SHP. Padrões de corte são gerados e se forem considerados “bons” segundo alguns critérios são selecionados e usados repetidamente para a redução do problema (a demanda de pelo menos dois itens é totalmente atendida). Em seguida, na segunda fase, o problema residual é resolvido de forma relaxada e a solução é arredondada. Por fim, na terceira fase uma técnica de redução de padrões é aplicada. Os autores apresentam testes computacionais apenas para o caso unidimensional.

Umetani *et al.* [78] apresentam uma metaheurística para solução do problema para o caso unidimensional. O método inicia-se com a definição de um número constante p de diferentes padrões e então um algoritmo de busca local é usado para encontrar uma solução com uma pequena divergência do número de itens demandados. Este processo é realizado para diferentes valores de p e o mais conveniente é escolhido. Umetani *et al.* [79], propõem uma melhora para a metaheurística apresentada em [78] acrescentando na busca local uma restrição para o número máximo de padrões diferentes.

Diegel *et al.* em [30] analisam o efeito de aumentar a frequência de uso dos padrões de corte no problema de corte de estoque unidimensional. Eles sugerem o uso, de forma dinâmica, de restrições de preparo e de frequência mínima para a utilização dos padrões de corte. Inicialmente o problema de corte de estoque é resolvido e a frequência de uso dos padrões de corte é analisada. Se a frequência de algum padrão está abaixo de um valor mínimo $MINU$, adiciona-se ao problema a restrição:

$$MINU \lambda_j \leq x_j \leq M \lambda_j, \quad (3.8)$$

em que M é um valor muito alto e λ_j é uma variável binária que indica se o padrão j é usado ou não. O problema é resolvido novamente e este processo é repetido até que a frequência de todos os padrões estejam acima de $MINU$. A cada restrição adicionada ao problema é permitido o uso de uma unidade adicional de objeto. Nos métodos propostos neste trabalho para a resolução do problema de corte de estoque considerando a minimização de ciclos da serra e do número de objetos, utilizamos também a ideia de adicionar de forma dinâmica, restrições que imponham uma determinada frequência mínima para a utilização dos padrões.

Poucas publicações na literatura abordam o problema de minimização de padrões de corte por procedimentos que forneçam soluções exatas. Vanderbeck [81] propõe uma variação do modelo de Kantorovich (2.8)-(2.11) para resolver o problema no caso unidimensional. Dado que $x_j \in \mathbb{Z}_+$ representa o número de vezes que o padrão j é cortado, Vanderbeck modifica a restrição (2.9) de Kantorovich para:

$$\sum_{j=1}^K a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.9)$$

e adiciona ainda ao modelo (2.8)-(2.11) as restrições:

$$\sum_{j=1}^K x_j \leq K, \quad (3.10)$$

e,

$$x_j \leq K\lambda_j, \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.11)$$

onde K é o número máximo de objetos em estoque, m é o número de itens diferentes, b_i é a demanda associada ao item i , λ_j é uma variável binária que assume 1 se o padrão j está sendo usado e 0 caso contrário, a_{ij} é uma variável que determina o número de vezes que o item i é alocado no padrão j . Assim, o modelo de Kantorovich reformulado é dado pelas expressões (3.12)-(3.19):

$$\min \quad Z = \sum_{j=1}^K \lambda_j \quad (3.12)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^K a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \leq L\lambda_j \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^K x_j \leq K \quad (3.15)$$

$$x_j \leq K\lambda_j \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.16)$$

$$a_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.17)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, K, \quad (3.18)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+ \quad j = 1, \dots, K. \quad (3.19)$$

O objetivo, dado por (3.12), é minimizar o número de padrões de corte que estão sendo usados. As restrições (3.13) garantem o atendimento exato da demanda e são não lineares. A factibilidade dos padrões de corte é assegurada por (3.14). A restrição (3.15) limita o número de objetos utilizados. As restrições (3.16) são as restrições de *setup*. E, as restrições de (3.17) a (3.19) determinam o domínio das variáveis.

Vanderbeck [81] propõe uma reformulação da variação do modelo de Kantorovich através da aplicação da decomposição de *Dantzig-Wolfe* (Capítulo 2) e apresenta um algoritmo *branch-and-cut-and-price* para resolver o problema reformulado. As variáveis duais associadas às restrições de demanda, de limitação do número de objetos e às restrições de *setup* são utilizadas para gerar colunas para o problema mestre. Alves e Carvalho [7] propõem um algoritmo *branch-and-price-and-cut* para resolução exata do problema. Eles adicionam uma nova restrição ao modelo limitando a perda total. Recentemente Alves e Carvalho [10] apresentaram novos limitantes para o problema explorando um novo

modelo, obtido aplicando a Decomposição de *Dantzig-Wolfe* no modelo de Vanderbeck [81].

Michel *et al.* [56] tratam o problema da mochila com *setups*. Os itens são divididos em classes cuja utilização implica em um custo de *setup* e de capacidade de consumo associada. O objetivo é maximizar a diferença entre os benefícios de selecionar um item e do custos fixos incorridos com o *setup* da classe associada. Os autores mostram a maneira com que os resultados clássicos para o problema da mochila podem ser generalizados para este problema variante com *setups*.

Atualmente, alguns trabalhos vêm dando uma abordagem multiobjetivo (Veja Anexo B) para o problema de minimização do número de objetos e padrões de corte simultaneamente. Vasko *et al.* [83] discutem a geração de um conjunto de soluções para o problema no caso unidimensional, cada uma delas dependente de um parâmetro β . Assim são geradas várias soluções para diferentes valores de β e seleciona-se apenas as não dominadas para formar um conjunto de soluções que é apresentado ao decisor para que seja escolhida a solução mais apropriada às circunstâncias. Araujo *et al.* [4] propuseram um algoritmo genético para o problema de corte de estoque no caso unidimensional visando a minimização simultânea da perda e do número de padrões diferentes. Eles consideram o problema com vários objetos diferentes em estoque em quantidades limitadas e transformam o problema multiobjetivo em um mono-objetivo associando pesos a cada objetivo. Lopes [51] faz três adaptações do método proposto Araujo *et al.* [4] baseado nos conceitos dos algoritmos evolutivos multiobjetivos, e trabalha com o caso em que há apenas um tipo de objeto em estoque em quantidade suficiente para o atendimento à demanda. Salles Neto *et al.* [74] propõem um algoritmo genético simbiótico para reduzir o número de diferentes padrões de corte para o problema no caso unidimensional. Andrade *et al.* [3] apresentam um algoritmo evolutivo multiobjetivo para o problema no caso bidimensional.

3.2 Redução do Número de Ciclos da Serra

O custo operacional de uma máquina de corte está diretamente relacionado com o número de ciclos da serra. Se o número de padrões de corte diferentes é reduzido na solução final, então alguns padrões de corte estão sendo cortados repetidas vezes, e podem ser cortados simultaneamente, podendo assim diminuir o número de ciclos da serra. Dessa forma, uma maneira de buscar reduzir o número de ciclos da serra é diminuir o número de padrões de corte distintos. Porém, nem sempre reduzir o número de padrões distintos

implica necessariamente em reduzir o número de ciclos da serra. Reduzir o número de padrões sem levar em consideração a capacidade da serra pode gerar ciclos ruins, ou seja, ciclos em que poucos objetos são cortados simultaneamente. Os exemplos a seguir, mostram a relação entre o número de ciclos da serra e o número de padrões de corte distintos.

Exemplo 3.2.1 (Redução de Padrões e Aumento de Ciclos). *Suponha que a capacidade de uma máquina de corte seja $Cap = 4$, ou seja, é possível cortar no máximo 4 objetos ao mesmo tempo. Considere um problema de corte de estoque com quantidade ilimitada de objetos com dimensões $(L, W) = (100cm, 100cm)$ e com 3 itens cujas demandas e dimensões são dadas pela Tabela 2.*

Item	Dimensão (lcm, wcm)	Demanda
1	(50,20)	68
2	(100,50)	16
3	(25,10)	368

Tabela 2: Dados do Exemplo 3.2.1.

Admita ainda que na construção dos padrões de corte para esse problema seja permitido a rotação dos itens e que a espessura da serra não está sendo levada em consideração.

Uma solução possível para esse exemplo, com o objetivo de minimizar o número de objeto e ciclos da serra é dada pela Tabela 3. Observe que nesta solução todo padrão é repetido em quantidade múltipla da capacidade da serra e não há desperdícios nos padrões de corte.

Padrão	Nº de Objetos Cortados	Nº de Itens Obtidos			Nº de Ciclos
		Item 1	Item 2	Item 3	
Padrão 1	4	5	1	0	1
Padrão 2	4	0	1	20	1
Padrão 3	4	2	0	32	1
Padrão 4	4	4	1	4	1
Padrão 5	4	2	1	12	1
Padrão 6	4	4	0	24	1
Total	24	68	16	368	6

Tabela 3: Primeira solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.1.

Uma outra solução para o mesmo problema é apresentada na Tabela 4. Note que comparando estes resultados com os da Tabela 3, observamos que houve um aumento do

número de ciclos da serra (1 unidade), mesmo com a redução de 2 padrões. Observe ainda que o número de objetos é o mesmo e novamente não há desperdício em nenhum dos padrões. Este é um exemplo de que reduzir o número de padrões nem sempre implica na redução do número de ciclos da serra.

Padrão	Nº de Objetos Cortados	Nº de Itens Obtidos			Nº de Ciclos
		Item 1	Item 2	Item 3	
Padrão 2	4	0	1	20	1
Padrão 6	12	4	0	24	3
Padrão 7	2	10	0	0	1
Padrão 8	6	0	2	0	2
Total	24	68	16	368	7

Tabela 4: Segunda solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.1.

Exemplo 3.2.2 (Redução de Padrões e Redução de Ciclos). *Considere os mesmos dados do Exemplo 3.2.1, porém com demandas diferentes das anteriores, dadas agora por $b = (60, 12, 200)$. Uma solução para esse novo problema é apresentada na Tabela 5.*

Padrão	Nº de Objetos Cortados	Nº de Itens Obtidos			Nº de Ciclos
		Item 1	Item 2	Item 3	
Padrão 1	6	5	1	0	2
Padrão 3	2	2	0	32	1
Padrão 4	2	4	1	4	1
Padrão 6	1	4	0	24	1
Padrão 10	4	1	1	16	1
Padrão 11	2	5	0	20	1
Total	17	60	12	200	7

Tabela 5: Primeira solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.2.

Novamente, todos os padrões de corte considerados não apresentam sobras. Uma outra solução para esse problema é apresentada na Tabela 6. Neste caso o número de objetos continua sendo o mesmo, porém observamos a redução do número de padrões em 3 unidades e dos ciclos da serra em 1 unidade. Ou seja, houve a diminuição de padrões e ciclos simultaneamente.

Apesar do número de trabalhos da literatura sobre a minimização do número de padrões de corte ser relativamente grande o mesmo não acontece para o problema de redução de ciclos da serra. A seguir descrevemos os trabalhos que encontramos sobre esse

Padrão	Nº de Objetos Cortados	Nº de Itens Obtidos			Nº de Ciclos
		Item 1	Item 2	Item 3	
Padrão 7	6	10	0	0	2
Padrão 8	6	0	2	0	2
Padrão 9	5	0	0	40	2
Total	17 objetos	60	12	200	6

Tabela 6: Segunda solução para o problema de corte de estoque do Exemplo 3.2.2.

assunto: Yanasse *et al.* [91], Mosquera [63], Yanasse [89], Rank Jr. [67], Rangel *et al.* [70] e Chu e Antonio [21].

Yanasse *et al.* [91] desenvolveram uma heurística para resolver um problema de corte de estoque bidimensional com os objetivos de reduzir o número de objetos cortados e o número de ciclos da serra. Este procedimento heurístico procura balancear as perdas com sobra de material e o tempo de uso da máquina.

O princípio de funcionamento dessa heurística é similar ao da heurística SHP proposta por Haessler [43]. A ideia é gerar padrões de corte que contenham itens com demandas altas para que possam assim ser repetidos muitas vezes, preferencialmente em quantidades múltiplas da capacidade da serra, contribuindo para uma menor quantidade de ciclos na solução final. Esta estratégia de construção de padrões de corte é mantida enquanto as perdas dos padrões forem aceitáveis. Em cada passo do algoritmo o número de vezes que um padrão deve ser repetido, F_0 , é conhecido antes mesmo da construção deste. Além disso, a quantidade F_0 , bem como o critério de aceitação do padrão, são relaxados em cada iteração, de tal forma que o problema possa ser resolvido em um número finito de iterações.

O processo é iniciado com a definição das variáveis $dmax_1$, $dmax_2$ e $dmax_3$ de acordo com as três maiores demandas max_1 , a maior, max_2 , a segunda maior e max_3 a terceira maior, do problema de corte de estoque original (2.12)-(2.14) (denominado P_0 pelos autores):

- $dmax_1$: o menor múltiplo de Cap que é maior ou igual a $\frac{max_1}{2}$;
- $dmax_2$: o maior múltiplo de Cap que é menor ou igual a max_2 ;
- $dmax_3$: o maior múltiplo de Cap que é menor ou igual a max_3 .

Baseado nessas variáveis o valor de F_0 é definido e um problema auxiliar P_1 idêntico a P_0 é criado com as demandas ajustadas pelo fator F_0 . Padrões de corte são gerados

para o problema P_1 de maneira restrita, isto é, sem exceder a demanda. Caso o padrão de corte seja “bom” o suficiente será aceito e utilizado F_0 vezes. A demanda de P_0 é então atualizada em função dos itens que foram produzidos. Este processo se repete até que toda a demanda de P_0 tenha sido atendida.

O valor inicial de F_0 é $dmax_1$. Nas próximas iterações o valor de F_0 é atualizado como segue. Se o padrão de corte for aceito, F_0 deve ser atualizado por:

$$F_0 = \begin{cases} dmax_2 & \text{se } F_0 > Cap, \\ F_0 - 1 & \text{se } F_0 > 1 \text{ e } F_0 \leq Cap. \end{cases} \quad (3.20)$$

Caso contrário, o valor de F_0 é atualizado da seguinte forma:

$$F_0 = \begin{cases} dmax_3 & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 > dmax_3, \\ F_0 - Cap & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 \leq dmax_3, \\ F_0 - 1 & \text{se } F_0 > 1 \text{ e } F_0 \leq Cap. \end{cases} \quad (3.21)$$

A definição de um “bom” padrão de corte depende do valor atual de F_0 e de um valor de eficiência do padrão, $effpad(A_j)$, dado por:

$$effpad = 100 \frac{A_{U_j}}{A_{Obj}}, \quad (3.22)$$

em que A_{U_j} é a área total ocupada pelo padrão de corte e A_{Obj} a área do objeto a ser cortado. Para ser aceito, o padrão deve satisfazer o seguinte critério de aceitação:

$$effpad(A_j) \geq cutoff, \quad (3.23)$$

onde,

$$cutoff = cofator * effref, \quad (3.24)$$

com $effref$ = definido experimentalmente. O valor de $cofator$ (fator de correção) é dado por:

$$cofator = \begin{cases} 1 & \text{se } F_0 \geq Cap, \\ 1 - (Cap_1 - F_0) * 0,02 & \text{se } F_0 > 1 \text{ e } F_0 < Cap, \\ 0 & \text{se } F_0 = 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

O pseudocódigo contendo os passos da Heurística de Yanasse *et al.* [91] é apresentado na Figura 21.

Heurística de Yanasse *et al.* [91]

1. Defina max_1 , max_2 e max_3 , as três maiores demandas de P_0 .
2. Inicialize as variáveis $dmax_1$, $dmax_2$ e $dmax_3$.
3. Faça $F_0 = dmax_1$.
4. REPITA
5. Inicialize:

$$\bar{b}_i = \left\lfloor \frac{b_i}{F_0} \right\rfloor, \quad i = 1, \dots, m.$$
6. Gere um padrão de corte para o problema P_1 .
7. Se $effpad(A_j) \geq cutoff$ então:
 8. Aceite A_j e atualize b .
 9. Defina o valor de F_0 de acordo com (3.20).
10. Senão
11. Atualize F_0 de acordo com (3.21).
12. ATÉ QUE: toda a demanda do problema P_0 seja atendida.

Figura 21: Pseudocódigo da Heurística de Yanasse *et al.* [91].

Podemos observar que qualquer padrão viável para P_1 é também viável para P_0 , e pode ser utilizado até F_0 vezes sem que haja excessos na produção. A cada iteração um único padrão de corte é gerado para um problema auxiliar P_1 diferente, já que o valor de F_0 é atualizado e conseqüentemente os valores das demandas que compõem o problema auxiliar (Passos 5 e 6). Cabe notar também, que enquanto $F_0 > Cap$ ((3.20) e (3.21)) o algoritmo procura gerar padrões e repeti-los em quantidades múltiplas de Cap . Valores menores para F_0 também são aceitos para que a demanda seja satisfeita exatamente.

O Passo 7 define a aceitação dos padrões de corte que estão sendo gerados. Um padrão que é utilizado muitas vezes deve apresentar uma perda pequena para que o desperdício total não seja muito alto. Por outro lado, um padrão de corte com uma perda alta pode ser aceito caso este seja usado poucas vezes, o que não afeta de forma significativa a perda total da solução final. Portanto, como a definição de um padrão “bom” (3.23) depende do parâmetro $cutoff$, dado por (3.24), é interessante que este valor seja relaxado em função do parâmetro F_0 . Quando o padrão for utilizado uma única vez, ou seja, $F_0 = 1$, o algoritmo aceita-o seja qual for sua perda. Isso garante que o algoritmo termine em um número finito de passos.

Em Yanasse *et al.* [91] foi apresentada uma pequena avaliação computacional para o problema no caso bidimensional. O algoritmo é repetido para diferentes valores de $effref$.

A melhor solução obtida é comparada com a solução do problema de corte de estoque minimizando apenas o número de objetos cortados resolvido por geração de colunas por um *software* comercial. Considerando o custo do ciclo igual ao custo do objeto a heurística mostrou-se 13% melhor que o problema de corte de estoque puro. Dados sobre os exemplares utilizados no teste, como dimensão dos objetos e dos itens, demanda e capacidade da serra não são divulgados no artigo.

Mosquera e Rangel [64], propuseram duas variações da heurística apresentada em Yanasse *et al.* [91] para o estudo de caso do problema de corte de estoque bidimensional em uma indústria moveleira. Estas variações foram denominadas Algoritmo 2 e Algoritmo 3. É proposta também uma variante do Algoritmo 3, denominada Algoritmo 3 Rot, em que a rotação dos itens é permitida.

Na elaboração do Algoritmo 2 são considerados inicialmente os m padrões de corte homogêneos maximais e dentre esses os que apresentam uma eficiência superior ou igual a $effref = 90\%$ são escolhidos e utilizados o maior número de vezes possível de maneira que não sejam produzidos itens em excesso. As demandas dos itens são atualizadas e se a utilização de um padrão de corte homogêneo é suficiente para atender exatamente a demanda de um algum item, este é incluído na solução do problema e a demanda atualizada. A base inicial para a solução do problema P_1 é formada pelos padrões homogêneos maximais associados aos itens cujas demandas não tenham sido ainda satisfeitas. O restante do processo é desenvolvido como na heurística de Yanasse *et al.* [91]. Esta pré-seleção de padrões foi feita a partir da observação que alguns padrões homogêneos com alta eficiência não são gerados na heurística de Yanasse *et al.* [91] uma vez que a geração dos padrões de corte é restrita às demandas auxiliares $\bar{b}_i, i = 1, \dots, m$.

O Algoritmo 3 se diferencia do Algoritmo 2 e da heurística proposta por Yanasse *et al.* [91] na restrição da geração dos padrões de corte com relação à demanda do problema original, no número de vezes que os padrões de corte serão utilizados e na definição do parâmetro *cuttof*.

A geração dos padrões de corte é feita no Algoritmo 3 com base nas demandas residuais do problema original, aumentando assim as chances de padrões com alta eficiência serem gerados e aceitos no início, e esperando-se ainda, que o problema seja resolvido em um número menor de iterações. Neste algoritmo os padrões, quando aceitos, são utilizados o maior número de vezes possível sem exceder a demanda e não mais F_0 vezes como nos outros algoritmos abordados. Além disso propõe-se uma modificação do parâmetro *cofator*, tornando-o uma função crescente de F_0 , para $Cap > F_0 > 1$. É interessante que

cofator seja uma função crescente de F_0 , pois quanto menor o valor de F_0 menos objetos devem compor o ciclo e portanto os padrões devem ser aceitos com mais facilidade.

Mosquera e Rangel [64], propõem também o seguinte modelo para reduzir o número de ciclos da serra:

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) \quad (3.26)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.27)$$

$$x_j = Cap \cdot y_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.28)$$

$$x_j, y_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.29)$$

denominado de Modelo de Multiplicidade, em que x_j é o número de objetos cortados de acordo com o j -ésimo padrão de corte e y_j é o número de ciclos da serra necessário para cortar os x_j objetos (dado por (2.58)). Podemos observar que esse modelo é uma variação do modelo proposto por Gilmore e Gomory (2.12)-(2.14) onde as restrições (3.28) impõem que o número de vezes que o objeto for utilizado seja um múltiplo da capacidade da serra.

A avaliação computacional dos Algoritmos 2, 3, Rot 3 e do Modelo de Multiplicidade é feito por Mosquera e Rangel [64] com base em dados cedidos por uma indústria moveleira. Nos testes realizados, o desgaste provocado pela serra é levado em consideração. Os padrões utilizados nos Algoritmos 2 e 3 são gerados pelo Método de Gilmore e Gomory (Capítulo 2) através do processo de geração de colunas. Já os padrões utilizados na resolução do Modelo de Multiplicidade são conhecidos *a priori* e obtidos através da Heurística TC [36]. Para todos os exemplares o modelo (3.26)-(3.29) produziu soluções com o menor número de ciclos quando comparados com os dados da indústria e a Heurística TC, porém com muitos itens sendo produzidos em excesso. Os Algoritmos 2, 3 e 3 Rot foram comparados entre si, sendo que o Algoritmo 2 obteve em todos os exemplares o menor número de ciclos da serra. A heurística de Yanasse *et al.* [91] não foi comparada. Para mais detalhes sobre esses testes veja [63, 64].

Segundo Yanasse [89], o problema de redução de ciclos da serra pode ser formulado

como:

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{x_j}{Cap} \right\rceil \quad (3.30)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.31)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.32)$$

e, que pode ainda ser reescrito da seguinte forma:

$$\min z_2 = c \sum_{j=1}^n y_j \quad (3.33)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.34)$$

$$y_j \geq x_j/Cap, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.35)$$

$$x_j, y_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.36)$$

Yanasse [89] mostra que resolver o problema de corte de estoque considerando a redução dos ciclos da serra, no caso em que é permitindo excesso de demanda e quando o custo do tempo de máquina é dominante comparado com outros custos, é equivalente a resolver o problema de corte de estoque (2.12)-(2.14) com c_j constante para $j = 1, \dots, n$, e com as demandas escalonadas pelo fator Cap , veja (3.37)-(3.39). Yanasse [89] demonstra ainda que o valor ótimo da função objetivo do modelo (3.33)-(3.36) é igual ao valor ótimo da função objetivo do modelo (3.37)-(3.39):

$$\min z_2 = \sum_{j=1}^n y_j \quad (3.37)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \geq \lceil b_i/Cap \rceil, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.38)$$

$$y_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.39)$$

Quando o número de objetos cortados é levado em consideração juntamente com a redução dos ciclos da serra, Yanasse [89] propõe uma extensão do modelo (3.33)-(3.36)

conforme (3.40)-(3.43):

$$\min z_3 = c_1 \sum_{j=1}^n x_j + c_3 \sum_{j=1}^n y_j \quad (3.40)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.41)$$

$$y_j \geq x_j / Cap, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.42)$$

$$x_j, y_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.43)$$

em que c_1 e c_3 são os pesos associados ao custo por unidade de objeto cortado e ao custo unitário dos ciclos incorridos, respectivamente, de modo a fazer um balanço entre a minimização de objetos e ciclos. Este modelo difere do proposto por Mosquera e Rangel [64] pois o número de ciclos deve ser maior ou igual a um múltiplo da capacidade da serra (restrição (3.42)) e uma ponderação pode ser feita entre os objetivos (3.40).

Yanasse em [89] apresenta também algumas heurísticas simples para obter soluções aproximadas para (3.40)-(3.43). A primeira heurística proposta é denominada de Heurística 1 e consiste em considerar a solução ótima do problema de corte de estoque (2.12)-(2.14), dada por x^* , e tomar $y_j^* = \left\lceil \frac{x_j^*}{Cap} \right\rceil$, $j = 1, \dots, n$. Assim, (x^*, y^*) é uma solução factível para (3.40)-(3.43) e $z_3 \leq Z_{GG} + c_3 \left(\sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{x_j^*}{Cap} \right\rceil \right)$, onde Z_{GG} é o valor ótimo da função objetivo do modelo de Gilmore e Gomory (2.12)-(2.14).

Outra heurística simples para obtenção de uma solução factível para o modelo (3.40)-(3.43) proposta em [89] é denominada de Heurística 2. Seja y^* a solução do modelo (3.37)-(3.39). O número de objetos x^* é obtido de acordo com passos descritos no algoritmo apresentado na Figura 22. Esta solução é modificada de forma a diminuir os excessos de itens produzidos através da redução da frequência dos padrões. Assim, (x^{**}, y^{**}) é uma solução factível para o modelo (3.40)-(3.43) e $z_3 \leq c_1 \sum_{j=1}^n x_j^{**} + c_3 z_2$, em que z_3 e z_2 são os valores ótimos das funções objetivos dos modelos (3.40)-(3.43) e (3.37)-(3.39), respectivamente.

Yanasse [89] observa ainda que no modelo (3.40)-(3.43), quando os valores de x_j , $j = 1, \dots, n$, são menores ou iguais a Cap , as variáveis y_j , $j = 1, \dots, n$, são binárias. Logo, este modelo reduz-se ao problema de minimização do número de padrões de corte. Assim, utilizando-se de bons métodos de solução para resolver o problema de minimização do número de diferentes padrões de corte, alguns já discutidos anteriormente, é possível gerar uma solução factível para o modelo (3.40)-(3.43) através de um procedimento denominado

Heurística 2

1. Faça $x = Cap \cdot y^*$.
2. Para $i = 1, \dots, n$ determine $\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$.
3. Para $j = 1, \dots, m$ tal que $y_j^* > 0$, determine $h_j = \min_{i=1, \dots, m} \{\delta_i/a_{ij}, \text{ com } a_{ij} > 0\}$.
4. Faça $s = h_k = \max_{j=1, \dots, n} \{h_j, \text{ com } y_j^* > 0\}$.
5. Se $s = 0$, faça $x^{**} = x$ e pare, senão faça $x_k = x_k - s$ e retorne ao Passo 2.
6. Recalcule os ciclos da serra $y^{**} = \left\lceil \frac{x^{**}}{Cap} \right\rceil$.

Figura 22: Heurística 2 (Yanasse [89]).

em [89] de Heurística 3 que descrevemos a seguir.

Seja, x^* a solução ótima do problema de corte de estoque (2.12)-(2.14). Tome $y = \left\lceil \frac{x^*}{Cap} \right\rceil$ e $\theta = Cap \cdot y$. Para $i = 1, \dots, m$, determine $\delta_i = d_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot Cap \cdot y_j$. Observe que $\delta_i < Cap$ para todo $i = 1, \dots, m$. Logo o problema residual pode ser resolvido como o seguinte problema de minimização de padrões:

$$\min z_4 = c_1 \sum_{j=1}^n x_j + c_3 \sum_{j=1}^n y_j \quad (3.44)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \delta_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.45)$$

$$x_j \leq M y_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.46)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.47)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.48)$$

em que M é um valor alto. Assim, se (x^{**}, y^{**}) é solução de (3.44)-(3.48), uma solução factível para (3.40)-(3.43) pode ser dada por $\left(\theta + x^{**}, y + \sum_{j=1}^n \left\lceil \frac{x^{**}}{Cap} \right\rceil \right)$.

O Modelo de Multiplicidade (3.26)-(3.29) proposto por Mosquera e Rangel [64] não permite a utilização de ciclos incompletos. Partindo desta observação Rank Jr. [67] propõem o modelo (3.49)-(3.51) para o problema de minimização de ciclos da serra, onde

as demandas devem ser atendidas exatamente:

$$\min z_5 = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{Cap-1} \delta_{\alpha j} x_{\alpha j} \quad (3.49)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{Cap-1} a_{ij} x_{\alpha j} (Cap - \alpha) = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.50)$$

$$x_{\alpha j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n; \quad \alpha = 0, \dots, Cap - 1. \quad (3.51)$$

em que $\delta_{\alpha j}$ é o custo de um ciclo com $(Cap - \alpha)$ objetos cortados simultaneamente de acordo com o padrão j e $x_{\alpha j}$ é a quantidade de ciclos necessários para cortar $(Cap - \alpha)$ objetos simultaneamente de acordo com padrão j ,

Com a formulação (3.49)-(3.51), o autor sugere a minimização do número de ciclos permitindo que $1, 2, \dots, Cap$ objetos sejam cortados simultaneamente em um ciclo da serra. Pode-se observar ainda, que a função objetivo pode ser modificada para minimizar o número de objetos cortados, bastando para isso considerar $\delta_{\alpha j} = (Cap - \alpha)$, $j = 1, \dots, n$; $\alpha = 0, \dots, Cap - 1$.

Considerando que $c_{\alpha j}$ é o custo por unidade de um objeto quando são cortados $(Cap - \alpha)$ objetos simultaneamente de acordo com o padrão j , e ω é o peso para ponderar a grandeza do dois objetivos de interesse (redução de objetos e de ciclos da serra), Rank Jr. [67] também apresenta uma extensão do modelo (3.49)-(3.51) dado por (3.52)-(3.54), para considerar qualquer combinação entre esses dois objetivos:

$$\min z_6 = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{Cap-1} \delta_{\alpha j} x_{\alpha j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{Cap-1} \omega c_{\alpha j} x_{\alpha j} (Cap - \alpha) \quad (3.52)$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=0}^{Cap-1} a_{ij} x_{\alpha j} (Cap - \alpha) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.53)$$

$$x_{\alpha j} \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n; \quad \alpha = 0, \dots, Cap - 1. \quad (3.54)$$

Uma característica dos modelos (3.49)-(3.51) e (3.52)-(3.54), propostos por Rank Jr. [67], é que ciclos com diferentes quantidades de objetos podem ser tratados de maneira particular, por exemplo, quando possuem custos diferenciados. Devido a dificuldade encontrada por Rank Jr. [67] para a resolução desses modelos de forma exata, como por exemplo, colunas linearmente dependentes e o grande número de variáveis, são apresentadas em [67] duas heurísticas para tentar determinar boas soluções para o problema. Estas heurísticas são baseadas na ideia de produzir padrões de corte que possam ser utilizados várias vezes, de preferência em quantidades múltiplas da capacidade da serra (Cap),

associadas a resolução aproximada de um problema de programação linear inteira.

Recentemente Rangel *et al.* [70] apresentaram uma variação da heurística proposta em Yanasse *et al.* [91] utilizando algumas ideias dos Algoritmos 2 e 3 propostos por Mosquera e Rangel [64]. Esta heurística é composta por duas fases, na primeira, a cada iteração um padrão de corte é gerado baseado no número de vezes que poderá ser utilizado e na capacidade da serra. O padrão de corte gerado é aceito se satisfaz um determinado parâmetro de aspiração. Na segunda fase, o problema residual (2.41)-(2.43) é resolvido considerando apenas os padrões aceitos na primeira fase.

Chu e Antonio [21] tratam de um problema de corte de estoque unidimensional com sobras aproveitáveis ([19]) em uma empresa especializada no corte de tubos de metais em que o objetivo não é apenas minimizar a perda mas também o tempo de corte. Uma variedade de restrições técnicas desta indústria são levadas em consideração, como por exemplo a deformação que pode acontecer nos objetos durante o corte e a possibilidade de cortar vários objetos do mesmo tipo simultaneamente (ciclos da serra). Esta indústria denota por “pacotes” um conjunto de objetos que são cortados ao mesmo tempo, isto é, em cada ciclo da serra um pacote de objetos é cortado. Cada tamanho diferente de pacote possui um tempo e um custo de preparação diferenciado. Os autores desenvolveram dois algoritmos de programação dinâmica para o planejamento da produção de um dia da empresa levando em consideração uma função que faz a soma ponderada dos objetivos pretendidos: minimização dos custos incorridos com a perda e a sobra, e minimização dos custos de preparação do corte.

3.3 Nova Contribuição para a Redução de Ciclos da Serra

Nesta seção, descrevemos o algoritmo desenvolvido neste trabalho para encontrar soluções para o problema de corte de estoque com o objetivo de minimizar o número de objetos e o número de ciclos da serra. Este procedimento é baseado principalmente nos trabalhos de Diegel *et al.* [30], Vasko *et al.* [83] e Yanasse [89]. A principal ideia do algoritmo proposto é a adição, de forma dinâmica, de restrições que impõem uma frequência mínima, baseada em Cap , para a utilização de um padrão de corte, e por isso, denominamos **Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P)**. Impondo que um determinado padrão seja utilizado mais vezes, espera-se um melhor aproveitamento da capacidade da máquina de corte e, conseqüentemente, uma redução no número de ciclos

da serra. A cada iteração uma solução é gerada e no final do algoritmo existe um conjunto de soluções. Sendo a minimização do número de objetos um objetivo conflitante com a redução de ciclos da serra, as soluções geradas são analisadas segundo critérios de dominância [83]. Na seção a seguir descrevemos de forma detalhada este procedimento.

3.3.1 Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P)

O algoritmo AFM-P é iniciado com a resolução do problema de corte de estoque ((2.12)-(2.14)) bidimensional por geração de colunas, resolvendo como subproblema o modelo de geração de padrões n -grupos (2.46)-(2.54). A solução do problema de corte de estoque é arredondada tomando, para cada variável x_j , o menor inteiro maior ou igual a x_j , ou seja, $x_j = \lceil x_j \rceil$. O número de ciclos da serra é calculado de acordo com (2.58).

Sendo β um parâmetro pré-definido como uma porcentagem requerida de utilização da capacidade da máquina de corte, a frequência mínima de utilização de um padrão de corte que iremos impor é calculada por:

$$Freq_Min = \beta * Cap, \quad (3.55)$$

ou seja, o padrão deve ser utilizado em pelo menos $Freq_Min$ objetos de tal forma que a capacidade da máquina esteja sendo aproveitada em pelo menos $\beta\%$ para cada padrão de corte j .

Verificamos, então, entre os padrões que compõem a solução do problema de corte de estoque quais estão abaixo de $Freq_Min$, isto é, se $\exists j \in N_3 = \{j : x_j < Freq_Min\}$, e adicionamos para estes as seguintes restrições:

$$Freq_Min * \lambda_j \leq x_j \leq M * \lambda_j, \quad j \in N_3, \quad (3.56)$$

em que M é um valor alto e λ_j é uma variável binária:

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & \text{se o padrão } j \text{ é usado,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.57)$$

No algoritmo aqui proposto tomamos $M = \sum_{i=1}^m b_i$. Denotamos ainda por N_3 o conjunto dos padrões que estão abaixo de $Freq_Min$ e a cardinalidade de N_3 é representada por n_3 .

Com a adição das restrições de frequência mínima, poderia ocorrer um “uso” excessivo

de objetos. Para contornar essa situação definimos também um parâmetro de tolerância, TOL , para o número máximo de objetos que pode ser utilizado na solução do novo problema (PCE-R). A restrição

$$\sum_{j \in N_1 \cup N_2} x_j \leq TOL, \quad (3.58)$$

é também adicionada ao problema. Na restrição (3.58), N_1 o conjunto de padrões de corte gerados durante a resolução do PCE e N_2 é o conjunto de padrões gerados para o PCE-R. Inicialmente $N_2 = \emptyset$. No algoritmo proposto determinamos que o número de objetos utilizados pode ser no máximo 10% maior que a solução do PCE, ou seja, $TOL = Z + 10\%Z$, onde Z é o valor da função objetivo do PCE resolvido por geração de colunas na inicialização do algoritmo. Porém, note que o valor de TOL pode ser definido por outros valores.

Após a adição das restrições (3.56) e (3.58), obtemos o problema de corte de estoque reformulado (PCE-R) dado por:

$$\min \sum_{j \in N_1 \cup N_2} c_j x_j \quad (3.59)$$

$$s.a. \sum_{j \in N_1 \cup N_2} A_j x_j \geq b \quad (3.60)$$

$$Freq_Min * \lambda_j \leq x_j \leq M * \lambda_j, \quad j \in N_3 \quad (3.61)$$

$$\sum_{j \in N_1 \cup N_2} x_j \leq TOL \quad (3.62)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in N_1 \cup N_2 \quad (3.63)$$

$$\lambda_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N_3. \quad (3.64)$$

A técnica de geração de colunas é aplicada na resolução do PCE-R, utilizando os valores duais referentes às restrições (3.60), denotados por π_1 , no subproblema resolvido para gerar colunas.

A geração de colunas utilizada na resolução do PCE-R é similar à proposta por Gilmore e Gomory (Capítulo 2). Note que o problema a ser resolvido em cada iteração da geração de colunas é um problema inteiro misto. As variáveis λ_j , $j \in N_2$ não são relaxadas, e a única diferença entre o método de geração de colunas utilizado na resolução do PCE e do PCE-R está na aceitação da nova coluna gerada. As restrições (3.61) podem ser subdivididas em duas outras restrições:

$$x_j \leq M * \lambda_j, \quad j \in N_2 \quad (3.61 - 1)$$

e,

$$x_j \geq Freq_Min * \lambda_j, j \in N_2. \tag{3.61 - 2}$$

Sejam π_2, π_3 e π_4 as variáveis duais associadas às restrições (3.61-1), (3.61-2) e (3.62), respectivamente. Suponhamos que k padrões de corte tenham sido gerados até o momento, incluindo os homogêneos. Durante o processo de geração de colunas, além da coluna A_{k+1} que determina o padrão de corte $k + 1$ associado à variável x_{k+1} , são geradas de forma implícita mais uma coluna, λ_{k+1} e duas linhas, $x_{k+1} \leq M * \lambda_{k+1}$ e $x_{k+1} \geq Freq_Min * \lambda_{k+1}$.

Se a nova coluna A_{k+1} entrar na base, ela terá valor livre, isto é, o valor da variável λ_{k+1} associada a A_{k+1} será fixo em 1 e o valor de $Freq_Min$ será igual a zero, de maneira que a restrição (3.61) associada à variável x_{k+1} é redundante e juntamente com a coluna associada a λ_{k+1} pode ser excluída do problema. Assim, a nova coluna tem coeficientes diferentes de zero apenas nas restrições relativas à demanda, (3.60), e ao número máximo de objetos, (3.62). Veja na Figura 23, em que $Freq_Min$ é representado por FM e as variáveis de folga representadas por VF , como seria neste caso a matriz de restrições do PCE-R após a inclusão da variável x_{k+1} . Os quadros com as bordas pontilhadas correspondem aos elementos da nova coluna e a parte em branco é composta por zeros.

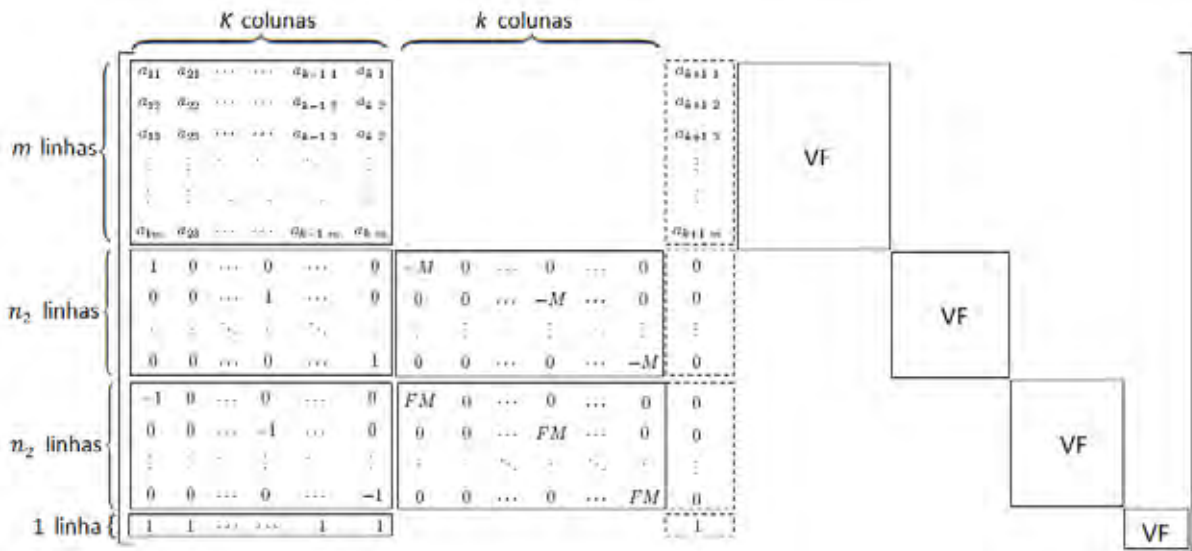


Figura 23: Matriz de restrições do AFM-P na iteração k .

No teste de otimalidade do método simplex usamos a coluna A'_{k+1} :

$$A'_{k+1} = \begin{bmatrix} A_{k+1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow m \text{ linhas} \\ \rightarrow n_3 \text{ linhas} \\ \rightarrow n_3 \text{ linhas} \\ \rightarrow 1 \text{ linha} \end{array}.$$

Se $(1 - [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]A'_{k+1}) < 0$, ou seja, se a condição:

$$z_{subp} > 1 - \pi_4. \quad (3.65)$$

é satisfeita então a coluna A'_{k+1} é aceita, a variável x_{k+1} é incluída no problema PCE-R e o processo de geração de colunas continua. As colunas aceitas são adicionadas ao conjunto N_1 .

Ao final da resolução do PCE-R por geração de colunas, a solução do PCE-R é arredondada pelo método BRURED [85]. O objetivo deste método é diminuir o excesso de produção causado pelo arredondamento da solução pelo maior inteiro $x_j = \lceil x_j \rceil$. Visto que o arredondamento pelo maior inteiro pode causar uma produção excessiva de itens, o método BRURED checa quais variáveis x_j podem ser reduzidas de uma unidade sem deixar de atender a demanda de nenhum item. Assim, verificamos para cada $k \in N_1 \cup N_2$, se a variável x_k , após o arredondamento pelo maior inteiro, satisfaz a desigualdade:

$$a_{ik}(x_k - 1) + \sum_{j=1; j \neq k}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.66)$$

Se (3.66) for verdadeiro, podemos fazer $x_k = x_k - 1$. Note que este procedimento depende da ordem em que os padrões são analisados, porém não levamos isto em consideração. Tomamos os padrões em ordem aleatória.

Cabe notar que existe uma similaridade entre o método BRURED e a Heurística 2 (Figura 22) de redução de ciclos da serra. Ambos tentam diminuir o valor de x_j , $j = 1, \dots, n$ após um arredondamento deste valor. No caso do BRURED após o arredondamento de x_j , $j = 1, \dots, n$ pelo maior inteiro, e na Heurística 2 após o cálculo de x_j por $x_j^* = y_j^* \cdot Cap$, em que y^* é a solução ótima de (3.37)-(3.39). Entretanto, a Heurística 2 trata de um processo iterativo onde o valor de x_j é reduzido o máximo possível, sem deixar de atender a demanda de nenhum item, e o BRURED reduz o valor de x_j em somente uma unidade e uma única vez.

Após a aplicação do procedimento BRURED o número de ciclos da serra é calculado de

acordo com (2.58), e a solução (x^{It_FM}, y^{It_FM}) , em que It_FM indica a iteração atual, é armazenada. Em seguida, o algoritmo verifica na nova solução x^{It_FM} os padrões de corte que estão abaixo de $Freq_Min$ e acrescenta-os a N_3 . Para estes padrões, restrições do tipo (3.56) são adicionadas ao problema. O processo se repete até que não exista mais padrões abaixo de $Freq_Min$ ou que o número máximo de iterações, it_tot , seja atingido. Ao final tem-se um conjunto de soluções que foram armazenadas a cada iteração e o procedimento descrito na Figura 43 (Anexo B) é aplicado neste conjunto para determinar as soluções não dominadas.

Devido as restrições de tolerância do número de objetos (3.62) e de frequência mínima do padrão (3.61), o problema PCE-R ((3.59)-(3.64)) tem possibilidade de ser infactível em alguns casos. Este fato foi realmente constatado em alguns exemplares nos testes computacionais que foram realizados. Quando isto ocorre, reduzimos em 10% o valor da capacidade de utilização da máquina (β) e permitimos um aumento de 10% na tolerância do número de objetos. Alteramos os dois parâmetros ao mesmo tempo, pois nem sempre a mudança de apenas um (β ou TOL) é suficiente para contornar a infactibilidade do PCE-R. Assim, os valores de $Freq_Min$ e TOL são redefinidos e o problema PCE-R atualizado.

O pseudocódigo do AFM-P com as principais considerações em cada passo e o fluxograma do algoritmo são apresentados nas Figuras 24 e 25, respectivamente.

Cabe observar que os valores duais das restrições (3.61-1), (3.61-2), (3.62), ou seja, π_2 , π_3 e π_4 , não são levados em consideração no subproblema de geração de colunas. Este fato pode impedir o subproblema *price* de gerar colunas novas. Isso porque a solução dual associada às restrições (3.62), π_1 , nem sempre se altera após a reotimização do PCE-R.

Para gerar novas colunas para o PCE-R a cada iteração, e assim gerar padrões que possam aproveitar melhor a capacidade da máquina, mantendo um compromisso com o número de objetos cortados, seria interessante fazer uma reformulação de (3.59)-(3.64) para que as variáveis duais associadas às restrições de frequência mínima possam ser incorporados no subproblema *price*. Uma proposta neste sentido é apresentada em Vanderbeck [81]. Neste trabalho o modelo de minimização do número de padrões de corte apresentado na Seção 3.1, é reformulado utilizando a decomposição de *Dantzig Wolfe* (Capítulo 2), de maneira que as variáveis duais das restrições de demanda e de limitação do número de padrões possam ser utilizadas no subproblema *price*.

Pseudocódigo AFM-P

1. INÍCIO - Defina:
 - i) $Freq_Min = \beta * Cap$, β (porcentagem de utilização da capacidade da máquina);
 - ii) $M = \sum_{i=1}^m b_i$.
2. Resolva o PCE (Modelo Gilmore e Gomory (2.12)-(2.14)) por geração de colunas, resolvendo como subproblema o modelo de geração de padrões n -grupos (2.46)-(2.54).
3. Faça $x_j^0 = [x_j]$ e calcule $y_j^0 = \left\lceil \frac{x_j}{Cap} \right\rceil$. Armazene a solução (x^0, y^0) .
4. Inicialize as variáveis:
 - i) $TOL = Z + 10\%Z$, Z é o valor da função objetivo do PCE resolvido por geração de colunas na inicialização do algoritmo;
 - ii) $It_FM = 1$.
 - ii) $N_3 = \emptyset$.
5. Adicione ao PCE a restrição: $\sum_{j \in N_1 \cup N_2} x_j \leq TOL$, obtendo o PCE-R.
6. ENQUANTO ($It_FM \leq it_tot$ e $\exists x_j : x_j < Freq_Min$) faça:
7. Para os padrões j tais que $x_j < Freq_Min$ faça:
 - i) $N_3 = N_3 \cup j$
 - ii) Adicione ao PCE-R restrição: $Freq_Min * \lambda_j \leq x_j \leq M * \lambda_j$.
8. Resolva o PCE-R dado por (3.59)-(3.64), com $x_j \in \mathbb{R}_+$.
9. ENQUANTO o PCE-R (3.59)-(3.64) é infactível e $\beta \neq 0$ faça:
10.
 - i) $\beta = \beta - 0.1$;
 - ii) $Freq_Min = \beta * Cap$;
 - ii) $TOL = TOL + 10\%TOL$.
11. Atualize as restrições (3.61) e (3.62).
12. Resolva o PCE-R atualizado, com $x_j \in \mathbb{R}_+$.
13. FIM_ENQUANTO (9)
14. REPITA
15. Gera colunas para o problema PCE-R (3.59)-(3.64).
16. Se a coluna for aceita, adicione-a ao problema, atualize N_2 e reotimize.
17. ATÉ QUE: A coluna gerada não seja aceita.
18. Arredonda x_j pelo método BRURED e calcula y_j de acordo com (2.58) para $j \in N_1 \cup N_2$.
19. Armazena a solução (x^{It_FM}, y^{It_FM})
20. FIM_ENQUANTO (6)
21. FIM

Figura 24: Pseudocódigo do Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P).

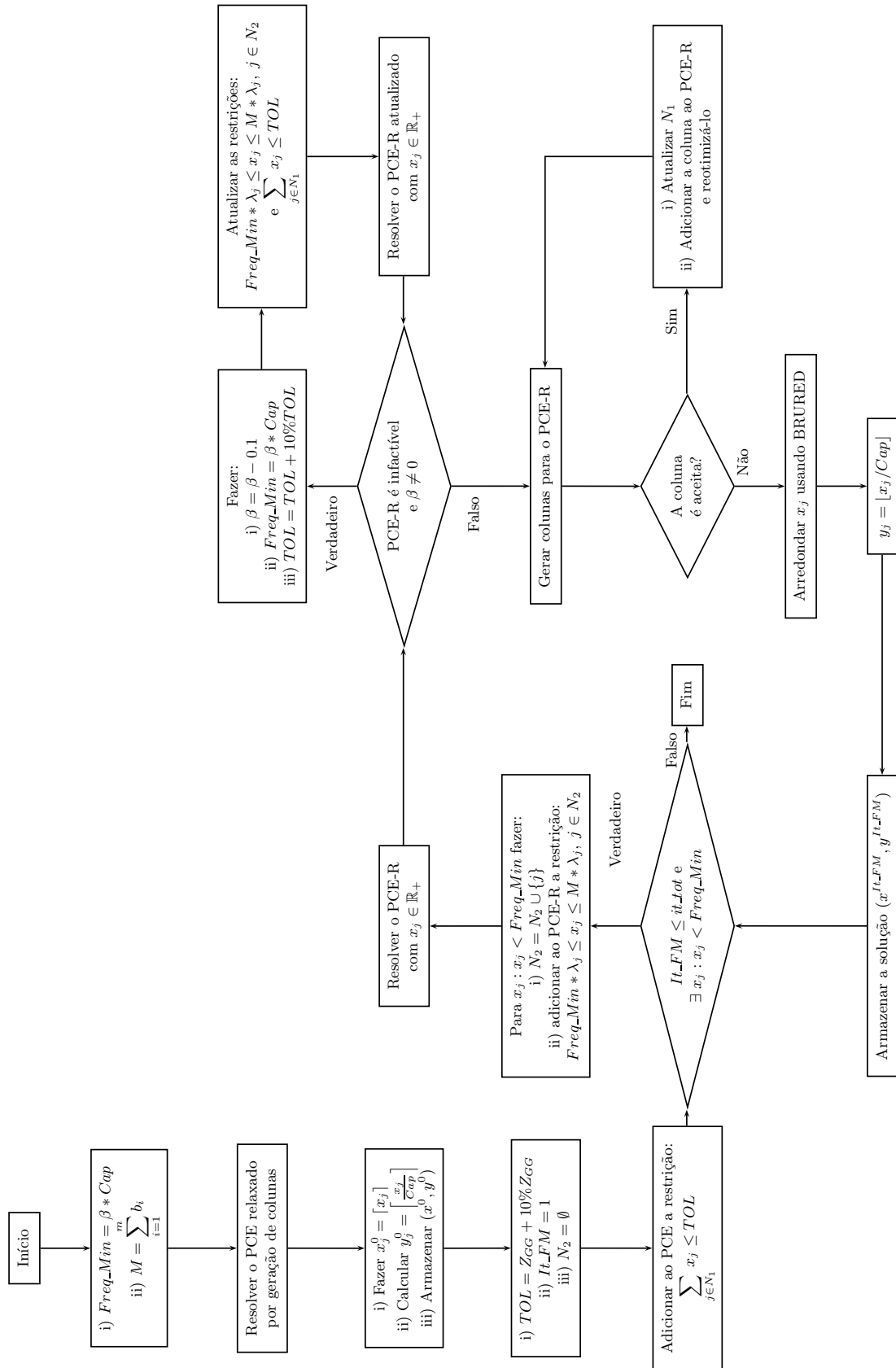


Figura 25: Fluxograma do Algoritmo de Frequência Mínima do Padrão (AFM-P).

Capítulo 4

Aplicação: Indústria Moveleira

O problema de corte de estoque levando em consideração a redução de ciclos da serra pode ser encontrado na prática das indústrias moveleiras. Para demonstrar esta aplicação apresentamos neste capítulo, os aspectos gerais, as características e o perfil das indústrias moveleiras no Brasil. Além disso, detalhamos o processo de produção de uma fábrica característica com enfoque na seção de corte da matéria-prima. Analisamos o processo de corte e as características dos padrões utilizados pela empresa. A empresa visitada está localizada no polo moveleiro de Votuporanga, estado de São Paulo.

4.1 O Setor Moveleiro

A indústria moveleira é um dos setores mais dinâmicos e importantes da indústria nacional. Trata-se de um segmento industrial formado por cerca de 14.442 empresas, que dá emprego a 223.998 mil trabalhadores (2,4% de toda a indústria de transformação do país) e que se faz presente em quase todos os estados do país. São empresas familiares, tradicionais e na grande maioria de capital inteiramente nacional. Esse setor apresenta-se geograficamente disperso por todo o território nacional, porém, se agrupam em polos moveleiros que se concentram principalmente, nas regiões Sul e Sudeste do país, respondendo por 81,8% do total nacional e por aproximadamente 86% da mão de obra empregada pelo setor [1].

Segundo, Silva e Santos [77] a industrialização do mobiliário brasileiro teve suas origens em 1875 pela produção de artesãos, sendo a maioria destes italianos. Essas empresas se caracterizavam por uma estrutura familiar, com pequenas oficinas de produção artesanal, geradas pelo grande aumento do fluxo imigratório no final do século XIX e início do século XX. No início, os móveis eram produzidos com madeira maciça e quase sempre

encomendados sob medida. À partir de 1936, houve um desenvolvimento significativo das empresas moveleiras no Brasil, mas foi somente na década de 1950 que se consolidaram os principais polos moveleiros, organizados nas seguintes regiões: Grande São Paulo (SP), Bento Gonçalves (RS), São Bento do Sul (SC), Arapongas (PR), Ubá (MG), Mirassol (SP), Votuporanga (SP) e Linhares (ES).

A indústria moveleira pode ser segmentada através de diferentes critérios: (1) tipo de material predominante no processo produtivo; (2) uso ao qual se destina; (3) forma organizacional utilizada no processo produtivo; e (4) *design* utilizado. Quanto ao tipo de matéria-prima utilizada, destacam-se: a) móveis de madeira, que podem ser subdivididos em madeira maciça (nativa ou reflorestada) e painéis de madeira reconstituída; b) móveis de metal; c) móveis de plástico; e d) móveis estofados. Com relação ao uso (mercado) ao qual se destina, a indústria moveleira pode ser segmentada em móveis residenciais, móveis para escritório e móveis institucionais. Referente ao processo produtivo, este pode ser seriado ou sob encomenda. O *design* dos móveis pode ser predominantemente torneado ou retilíneo [2]. Os móveis de madeira retilíneos são confeccionados com painéis derivados de madeira, suas faces são lisas, com desenhos simples e sem detalhes complexos de acabamento. Já os torneados, são confeccionados com painéis derivados da madeira em conjunto com madeira maciça ou somente com madeira maciça, possuem muitos detalhes de acabamento, sendo caracterizados por móveis mais sofisticados.

Segundo a Associação Brasileira das indústrias do mobiliário (ABIMÓVEL), dentre todos os tipos de móveis produzidos no país, 60% referem-se a móveis residenciais, 25% a móveis de escritório e 15% a móveis institucionais, que incluem, escolares, médico-hospitalares, móveis para restaurantes, hotéis e similares [1].

A indústria mundial de móveis foi e continua sendo constituída, predominantemente, por pequenas empresas. No Brasil a situação não é diferente, as micro e pequenas empresas somam 97,7% de todas as empresas de móveis do país [1]. A classificação das empresas por porte, no Brasil e no mundo, leva em conta alguns critérios como o número de empregados ou o faturamento anual bruto. Empresas com até 19 empregados são consideradas micro, de 20 a 99 empregados, pequenas, de 100 a 499 empregados são médias e com mais de 499 empregados são consideradas empresas grandes.

Com relação à matéria-prima utilizada na indústria moveleira, mais especificamente as que produzem móveis de madeira, a madeira maciça têm sido substituída por madeiras alternativas que podem ser produzidas a partir de reflorestamento, como por exemplo o pinus e o eucalipto. Além disto, novas matérias-primas foram e estão sendo trazidas pelas

inovações ocorridas nas indústrias química e petroquímica (plásticos mais resistentes, novas tintas, materiais compostos, etc), como por exemplo os painéis fabricados a base de madeira de reflorestamento. A utilização destes painéis permite manter muitas das vantagens da madeira maciça, além de ser possível manter um controle sobre as dimensões dos painéis, o que não é possível na madeira maciça uma vez que esta é restrita às dimensões da árvore, existe a possibilidade de corrigir defeitos da anatomia da árvore como medulas e nós, e pode-se, ainda melhorar a resistência desses painéis ao fogo e à deterioração, por exemplo. Segundo Silva e Santos [77], há quatro tipos de painéis à base de madeira para a produção de móveis:

- **Compensado Laminado:** é feito com lâminas de madeira, em geral de pinus ou de virola, coladas umas sobre as outras e prensadas para formar chapas com espessura de 4 a 20mm. Em geral apresentam estabilidade diminuindo a tendência ao empenamento.
- **Compensado Sarrafeado:** o miolo do painel é formado de diversos sarrafos de madeira com camadas de lâminas nas duas faces. Os sarrafos são colados em um sentido e a chapa externa em um sentido diferente, deixando a chapa mais resistente.
- **MDP (*Medium Density Particleboard* ou Painel Partículas de Média Densidade):** antigamente chamado de aglomerado, é uma chapa fabricada com partículas de madeira em camadas. É um produto ecologicamente correto já que utiliza apenas madeiras provenientes de florestas plantadas, porém possui a desvantagem de não ser resistente à umidade.
- **MDF (*Medium Density Fireboard* ou Painel de Média Densidade):** é um aglomerado mais sofisticado, produzido à partir da aglutinação de fibras de madeira com resinas sintéticas e ação conjunta de temperatura e pressão, resultando em um painel com composição homogênea em toda a superfície como em seu interior. É um produto muito resistente e suas propriedades são muito próximas às da madeira sólida e, em alguns aspectos, superiores, pois este material resiste à umidade e a cupim. Além disso, destaca-se pela possibilidade de ser pintado, cortado, lixado, perfurado, pregado, parafusado, encaixado, proporcionando sempre um excelente acabamento tanto com equipamentos industriais quanto com ferramentas convencionais para madeira.

Dadas todas as vantagens apresentadas pelos painéis de MDF, sua utilização vem crescendo de forma acentuada nas indústrias brasileiras de móveis de madeira, e embora

este material seja mais barato que a madeira maciça, seu custo ainda é muito alto contribuindo, em média, com aproximadamente 50% no preço do produto final. Portanto, um melhor planejamento do corte, para um aproveitamento melhor do material, bem como o investimento de máquinas melhores são fundamentais para as empresas deste ramo.

Segundo a Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial (ABID, 2008) [2], a indústria brasileira de móveis não acompanhou a evolução da indústria brasileira em geral, ao longo da última década. O valor da produção se manteve praticamente estagnado, enquanto a produtividade do trabalho e a agregação de valor ao produto regrediram neste período. Os únicos indicadores que apresentaram resultados positivos foram os referentes à geração de emprego e às exportações, mas, mesmo nestes casos, o desempenho foi bastante inferior ao da indústria brasileira como um todo. Ainda, devido à uma crise mundial ocorrida entre os anos de 2007 e 2008 mais de 30.000 trabalhadores foram demitidos do setor moveleiro brasileiro. Porém, no período de novembro de 2009 a março de 2010, com a intenção de aquecer a economia, o governo brasileiro reduziu a zero o IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados) para móveis de madeira, aço e plástico. Com isso as empresas moveleiras puderam reduzir entre 5% e 10% os preços dos produtos, fazendo com que as indústrias voltassem a contratar e implicando no crescimento em 30% do setor no início de 2010 com relação ao mesmo período de 2008.

Segundo Silva e Santos [77], o esforço para se manter no mercado requer a adoção de um planejamento estratégico mais minucioso para que o retorno sobre investimentos internos seja favorável em médio e longo prazos. Desta maneira, um dos fatores críticos de competitividade que merecem uma análise mais detalhada, além de fatores como diferenciação de produto, incorporação de novas máquinas, equipamentos e matéria-prima, é a adoção de inovações organizacionais que visem a modernização e a racionalização dos processos produtivos da empresa [2]. Daí a grande importância da utilização da matemática, em particular a programação linear, buscando uma melhora nos processos produtivos, bem como no planejamento da produção.

Neste trabalho realizamos um estudo de caso em uma fábrica de móveis, que denotaremos por Fábrica V, localizada no polo moveleiro de Votuporanga/SP, cuja principal matéria-prima utilizada são painéis de madeira. A seguir faremos uma breve descrição do polo moveleiro em questão e da fábrica visitada.

4.1.1 O Polo Moveleiro de Votuporanga

A cidade de Votuporanga, que em tupi-guarani significa “brisas-suaves” ou “bons ares”, foi fundada em 1937 e está situada a 520 km da capital São Paulo, no noroeste do Estado. Essa área era uma rica mata nativa que possuía várias espécies de madeira (cedro, aroeira, etc.). Isto resultou na comercialização da madeira nas décadas de 40 e 50, fase que recebeu o nome de “ciclo da madeira”. O ciclo da madeira originou-se com a derrubada das árvores que constituíam a mata nativa para o preparo da terra e desenvolvimento da agricultura, sendo o produto principal o café. As primeiras serrarias e, conseqüentemente, a confecção de todo tipo de artefato de madeira, dentre eles mobiliário de casa, móveis para escritórios, instalações para igrejas, escolas, clubes, restaurantes, indústrias e comércio em geral, surgiram como subproduto da atividade agrícola [77]. Somente na década de 80, a cidade tomou certo impulso industrial, através do desenvolvimento do setor moveleiro, de implementos rodoviários e de metalurgia.

No início da formação do polo moveleiro em 1994, essa região possuía aproximadamente 75 empresas e empregava 3.159 trabalhadores [77]. Em 2001 houve um aumento para 241 empresas e cerca de 8.083 funcionários. Porém, dados recentes apontam uma queda considerável para um total de 180 empresas e quatro mil funcionários [2]. A maioria das empresas do polo de Votuporanga está voltada para o mercado interno, destacando-se a produção de móveis residenciais de madeira, além da crescente participação das empresas produtoras de móveis estofados e de móveis metálicos.

Para entender melhor o processo produtivo da fábrica de móveis tomada para o nosso estudo de caso, além de aliar aos estudos teóricos a experiência prática, várias visitas foram realizadas à Fábrica V de Janeiro a Setembro de 2009 com o intuito de acompanhar a produção de móveis, obter uma familiarização com o objeto de estudo, observar os imprevistos que acontecem na prática e, principalmente, acompanhar o processo de corte da matéria-prima, que é a principal aplicação do problema estudado neste trabalho.

4.2 Uma Fábrica Característica

Os produtos fabricados no polo moveleiro de Votuporanga são essencialmente, móveis residenciais. Na Fábrica V os móveis produzidos são, também, residenciais (no geral de dormitório) de madeira, retilíneos e de estilo tradicional, cuja matéria-prima principal é o MDF. Os painéis de MDP também são utilizados, mas em apenas alguns produtos. Os móveis produzidos atualmente pela empresa são: guarda-roupas de 3, 4 e 5 portas,

camas e cabeceiras de casal e solteiro, e armários multiuso para quarto e cozinha. Os móveis para dormitório são disponíveis nas cores mogno, marfim, tabaco, tabaco/branco, tabaco/maple e branco/maple. Já o armário multiuso para cozinha é disponibilizado nas cores branco, branco/verde, branco/laranja e branco/tabaco. Sendo que os guarda-roupas são os principais produtos da empresa, correspondendo a aproximadamente 80% da produção mensal da fábrica.

A empresa foi visitada em um período de transição. A utilização da seccionadora semi-automática foi trocada por uma seccionadora automática, além disso móveis como rack, criado-mudo e cômodas antes fabricados pela empresa saíram de linha. Durante a nossa descrição da fábrica visitada vamos usar *1º momento* para denotar o período em que somente a seccionadora semi-automática era utilizada (até abril de 2009) e *2º momento* o período em que a máquina principal de corte passou a ser a seccionadora automática.

O objetivo das visitas à Fábrica V, foi fazer um estudo de caso do problema estudado neste trabalho, além de observar a real utilização da seccionadora, o que é levado em consideração durante o processo de corte, de que forma são tomadas as decisões de que padrão de corte usar e em quais quantidades, entre outros. Durante as várias visitas feitas à Fábrica V nos deparamos com algumas dificuldades, como por exemplo, conseguir informações atualizadas e coerentes sobre os dados atuais da fábrica, já que esta passa por um momento de transição e além disso não possui muito de seus dados sistematizados. Mesmo assim, foi possível observar o processo de produção da empresa, especialmente o processo de corte. Nas próximas seções apresentamos a linha de produção da fábrica, o planejamento da produção e detalhamos o setor de corte.

4.2.1 A Linha de Produção

De maneira geral, os processos de produção nas pequenas e médias empresas de móveis de Votuporanga são bastante próximos, diferindo apenas na tecnologia das máquinas ou em estágios específicos de algum produto [18]. Basicamente, a linha de produção das pequenas e médias empresas de móveis desta região podem ser representadas pelo esquema apresentado na Figura 26.

A primeira etapa do processo de produção de um móvel é o corte da matéria-prima (cortes retangulares), em que os objetos (painéis retangulares de madeira) são cortados em itens (retângulos menores) que irão compor o móvel. Depois de serem cortados, os itens seguem para a usinagem, onde recebem detalhes em sua superfície ou têm suas bordas aparadas ou modeladas por meio de serras e ferramentas específicas. Ainda nesta

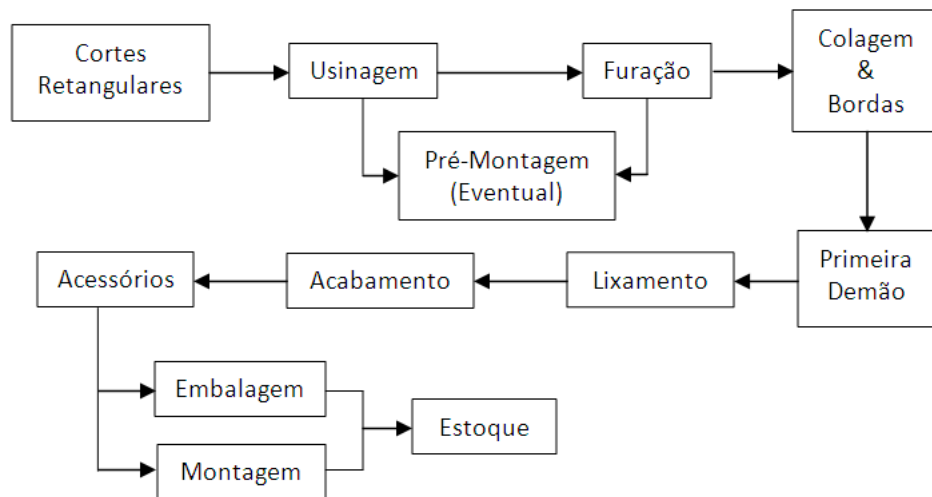


Figura 26: Linha de produção da fábrica de móveis Fábrica V [17].

fase encontra-se o setor de furação, onde são feitos os furos nos itens para o encaixe e montagem do móvel, e o setor de cola e borda, onde são coladas as bordas nos itens. Desta fase, alguns itens passam para o setor da primeira demão, onde são preparados para a pintura. Neste setor, os itens passam por um processo de lixamento e prensa, e em seguida vão para a seção de pintura (acabamento), para serem envernizados e pintados. Após a pintura, os itens vão para o setor de montagem onde recebem uma última vistoria e os acessórios (puxadores, fechaduras, entre outros). Por fim são levados ao estoque, onde são embalados e armazenados.

Em toda a linha de produção a Fábrica V possui aproximadamente 40 máquinas, na maioria manuais, sendo as principais: seccionadora automática, furadeira, coladeira de borda e pintura-UV. O foco das nossas visitas foi coletar dados no setor de corte, em especial na máquina seccionadora automática que é a principal máquina do setor de corte, já que o objetivo deste é fazer um estudo de caso do problema de corte de estoque bidimensional levando em consideração a minimização dos ciclos da serra e da perda. Na próxima seção apresentamos o planejamento da produção da Fábrica V e em seguida fazemos uma discussão mais detalhada do processo de corte.

4.2.2 Planejamento da Produção

O planejamento da produção da Fábrica V é feito semanalmente baseado na carteira de pedidos da semana, no estoque e na média de venda dos últimos três meses. A produção é feita por lotes que variam de acordo com os pedidos e o estoque disponível. Os tamanhos dos lotes são fixos em 100 peças, exceto os lotes de guarda-roupas que variam de acordo

com a demanda.

A sequência em que os produtos serão produzidos é determinada pelas suas respectivas quantidades em estoque. A preferência é iniciar com o produto de maior *déficit* no estoque, com respeito à demanda. Por exemplo, suponha que seja feito um pedido de penteadeira mogno cujo estoque não é suficiente para atender a demanda e que não há em estoque nenhuma cama marfim, porém a mesma não está sendo requisitada naquele período de planejamento. Assim, a prioridade é dada à produção da penteadeira e em seguida à produção da cama. A reposição de estoque varia bastante, por exemplo, as camas, as penteadeiras e os armários multiuso são fabricados, em média, uma vez por mês, enquanto que os guarda-roupas são produzidos quase todos os dias. Em média, um produto demora 5 dias para ficar pronto, alguns demoram um pouco mais e outros um pouco menos.

Na fabricação de um móvel, vários itens devem ser produzidos para compô-lo. Cada item possui características definidas tais como: largura, comprimento, espessura, tipo de material, entre outros. Até o *1º momento*, a Fábrica V utilizava painéis de MDF de espessuras *3mm*, *9mm*, *12mm*, *15mm*, *20mm* e *25mm* e painéis de MDP de *9mm*, *12mm*, *15mm*, *18mm*, *20mm* e *25mm*. Atualmente, os itens provenientes dos painéis de espessura *3mm* e *25mm* são terceirizados e a Fábrica V utiliza somente painéis de MDF e MDP de *15mm*. Segundo o gerente de produção trabalhar com apenas uma espessura é mais prático em termos de armazenamento, de ajuste das máquinas (coladeira de borda, por exemplo) e de reposição de matéria-prima. Do ponto de vista deste trabalho, o tipo de painel de madeira utilizado (MDF ou MDP) é irrelevante, porém na prática esta consideração se faz necessária já que estes dois tipos de materiais são cortados separadamente. Por isto, consideramos neste trabalho apenas o corte do MDF, que é a principal matéria-prima utilizada na Fábrica V.

Os painéis de MDF são cortados separadamente de acordo com a espessura (também chamada de “bitola”) do objeto, porém as dimensões dos painéis são consideradas as mesmas para todas as espessuras. Logo, para resolver um problema de corte de estoque no ambiente desta fábrica até o seu *1º momento*, era necessário a resolução de um problema (2.12)-(2.14) para cada espessura diferente.

Após a determinação dos produtos que serão fabricados e a sequência da produção, as chamadas “ordens de produção” (fichas com os dados dos itens que devem ser cortados) são passadas para os operadores da seccionadora, e dali seguem para a linha de produção. Cada ficha é relativa a um item de um produto que será fabricado e nela estão impressos a data, o produto ao qual aquele item pertence, a cor, a matéria-prima utilizada no corte,

as dimensões do item (largura, comprimento e espessura), a quantidade a ser produzida, e os processos da linha de produção pelo qual o item deve passar. Através dessas fichas de ordem de produção é possível obter um controle de todos os itens e produtos produzidos em um dia ou uma semana. Na Figura 27 pode ser visto uma ordem de produção de um item da Fábrica V.

ORDEM DE PRODUÇÃO		Controle Ficha: 009/018	
Data : 15/07/2008		Lote: 792	
Produto: RACK GRAFITE TABACO			
Setor : 001006000 EMBALAGEM		Serie: AZUL	
Matéria-Prima utilizada: MDF 15 MM		Plano Corte Fir:	
Medida: 0,000 x 0,000 x 0,000			
Peça a ser Cortada: TAMPO SUPERIOR RACK GRAFITE		Qtde.: 30	
Medida Seccionadora: 0,455 x 0,680 x 0,015		Des. Nr.:	
Medida Usinada : 0,455 x 0,680 x 0,015			
PROCESSO	QUANTIDADE PROCESSADA	VISTO OPERADOR	QUANTIDADE REFUGO
SECCIONAR			
FURAR (FUR. F-25)			
FREZAR (FREZ. COPIADORA)			
LIXAR MANUAL (CRU)			
PINTAR PU I			
LIXAR (SELAO I)			
PINTAR PU II			
LIXAR (SELAO II)			
PINTAR PU LACA			
PINTAR UV			
EMBALAR			
DATA EMBALAGEM:			

Figura 27: Ordem de Produção da Fábrica V.

Os operadores da seccionadora recebem a ordem de produção da semana inteira, mas geralmente um único tipo de móvel é cortado por dia, por exemplo, em um dia é cortado apenas um lote de guarda-roupas de 3 portas. Porém, alguns produtos distintos podem ser cortados juntos, por possuírem itens em comum. Por exemplo, quando a Fábrica V ainda produzia cômodas e armários, era comum cortarem juntos guarda-roupa e cômoda, guarda-roupa e criado e criado e cômoda. Atualmente, uma prática adotada pela indústria é o corte simultâneo de guarda-roupas de 3, 4 e 5 portas, por estes possuírem muitos itens em comum. Para melhor entendimento do processo de corte da Fábrica V, detalhamos, a seguir, o corte da matéria-prima.

4.2.3 O Corte da Matéria-Prima

O processo de corte na fábrica de móveis Fábrica V é feito em dois setores. O primeiro setor, denominado corte primário, é composto pelas seccionadoras semi-automática e automática. Neste setor os objetos são cortados nos itens que irão compor o móvel. O segundo setor, denominado corte secundário, é composto por duas máquinas de corte secundárias, onde é feito a apara das sobras. O maior interesse deste trabalho é no setor de corte primário.

Atualmente, no setor de corte primário, o objeto é cortado utilizando a máquina seccionadora automática. A seccionadora semi-automática ainda é utilizada, porém com uma frequência muito pequena. Quando é necessário fazer a reposição de algum item para algum cliente, por exemplo, e apenas um objeto deve ser cortado, os operários optam por utilizar a seccionadora semi-automática que é mais fácil de ser alimentada com poucos objetos.

Para fins de comparação vamos apresentar os esquemas e detalhar o funcionamento das duas seccionadoras da Fábrica V. Para simplificar a exposição vamos chamar a seccionadora semi-automática de seccionadora 1 e a automática de seccionadora 2.

Seccionadora semi-automática (Seccionadora 1)

A seccionadora 1 é composta por um conjunto de três mesas, também chamados “braços”, com uma serra circular que se move entre estes braços, por toda a extensão da máquina, como mostra a Figura 28, que apresenta um esboço do que seria esta máquina vista de cima [37].

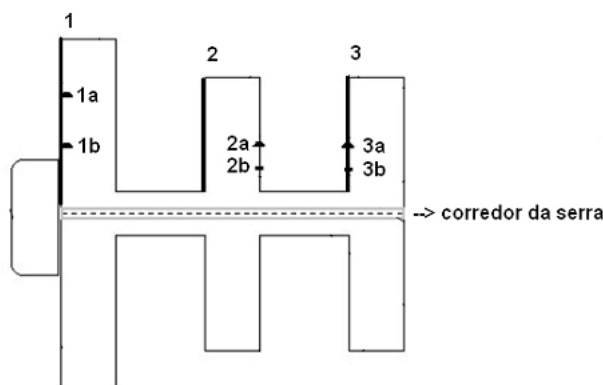


Figura 28: Esboço da máquina seccionadora semi-automática vista de cima [37].

Em cada “braço” existe uma régua, sendo possível colocar dois batentes em cada uma

das réguas. Na Figura 28 os números 1, 2 e 3 representam as réguas que estão fixas e 1a e 1b, 2a e 2b e 3a e 3b denotam os batentes dos braços esquerdo, do meio e da direita, respectivamente. Os batentes são calços metálicos instalados sobre as réguas e fixos nos braços que determinam a largura das faixas que são cortadas.

O número de batentes permite o corte de duas larguras de faixas distintas e dois comprimentos distintos em uma única preparação da máquina (*setup*). Os batentes utilizados para determinar as larguras das faixas que serão produzidas são 2a e 2b, e 3a e 3b. Para determinar os comprimentos dos itens que serão produzidos em cada faixa são utilizados os batentes 1a e 1b.

Acima do corredor da serra existe um braço mecânico, que é acionado por um dos operadores quando os objetos estão devidamente posicionados para serem cortados. A função deste braço mecânico é fixar os objetos sobre a mesa para que estes não deslizem e saiam do lugar quando a serra os atingir.

Na seccionadora 1 existem duas serras, uma pequena com aproximadamente $4mm$ de altura (serra auxiliar) e, a serra principal, com $60mm$ de altura, que determina a capacidade da máquina, ou seja, o maior número de objetos que podem ser cortados ao mesmo tempo, de acordo com a espessura destes. A serra menor serve para reduzir o esforço da serra principal e evitar que esta danifique a borda dos objetos empilhados. Após as serras percorrerem todo o corredor, ou seja, efetuar o corte dos objetos, o braço mecânico sobe (automaticamente ou por intervenção dos operadores) e libera os objetos para que estes possam ser retirados da máquina ou rotacionados para o corte do próximo estágio.

A Fábrica V têm preferência por padrões de corte guilhotinado, devido às restrições da seccionadoras 1 e 2. Quanto ao número de estágios, os padrões utilizados pela Fábrica V são, na maioria, padrões em 2-estágios. Porém, padrões em 3-estágios também são utilizados, porém com menor frequência, já que este tipo de padrão, apesar de permitir um melhor aproveitamento do objeto [36], exige um tempo operacional maior (os tipos de padrões utilizados pela Fábrica V são discutidos na Seção 4.2.4).

Devido as restrições da seccionadora semi-automática, um recurso utilizado pelos operadores da máquina, para economizar tempo, é o corte simultâneo de faixas de dois estágios diferentes. O fato dos padrões serem guilhotinados e, na maioria, em 2-estágios é o que facilita esta prática. Na Figura 29 ilustramos como seriam as etapas de corte efetuadas pelos operadores para cortar um padrão 3-estágios na seccionadora semi-automática.

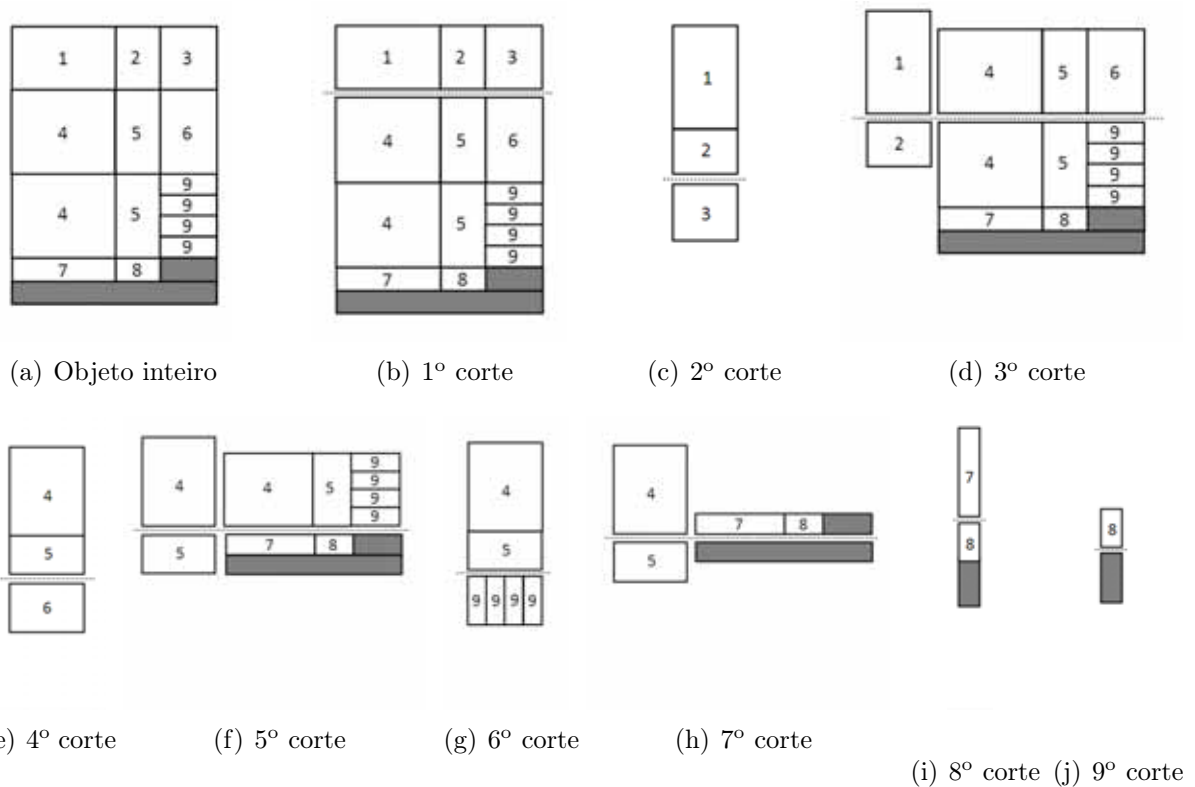


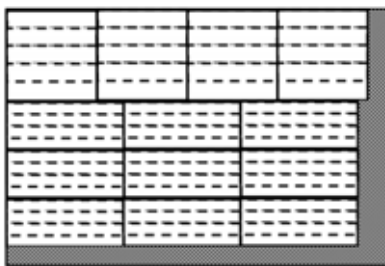
Figura 29: Sequência de cortes na seccionadora 1 de um padrão de corte 3-estágios.

Para efetuar o primeiro corte do primeiro estágio, a pilha de objetos é apoiada aos batentes 2a e 3a ilustrados na Figura 28. O primeiro corte do primeiro estágio é feito no sentido horizontal para a obtenção da faixa 1 (Figura 29(b)). Esta faixa é rotacionada e apoiada no batente 1a (Figura 28). Em seguida, o primeiro corte do segundo estágio é efetuado para obtenção do item 3 (Figura 29(c)). Neste momento, a pilha de objetos resultantes do corte da primeira faixa é posicionado nos batentes 2b e 3b (a largura da segunda faixa é diferente da primeira, Figura 29(a)) e o segundo corte da primeira faixa, isto é o segundo corte do segundo estágio, é efetuado juntamente com o segundo corte do primeiro estágio, como está ilustrado na Figura 29(d). Assim, o item 2 e a segunda faixa (1º e 2º estágios) são cortados simultaneamente. Os próximos cortes procedem da mesma forma como pode ser observado na Figura 29. Note que os itens de número nove do padrão não foram cortados, isto porque por serem considerados pequenos eles serão cortados no setor de cortes secundários. Na Figura aparece o corte da aparas do item 8, caso este item tivesse dimensões menores, este corte também seria efetuado no setor de cortes secundários.

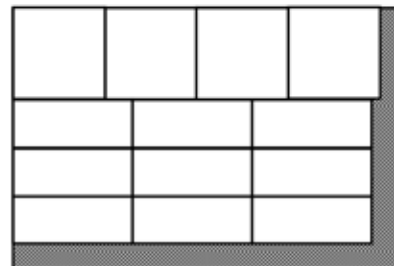
Note que se um padrão de corte têm muitas faixas de largura distintas ou com grande diversidade de itens, são necessários muitos ajustes dos batentes (*setups*) da seccionadora

1, aumentando o tempo do ciclo da serra.

Dada a dificuldade de ajustar a seccionadora 1 e para evitar que esta se tornasse um “gargalo” da produção, a fábrica utilizava o recurso de agrupar itens com dimensões muito pequenas em relação às dimensões dos objetos, formando itens maiores, como pode ser visto na Figura 30 [63]. O padrão de corte original (Figura 30(a)) exigiria vários ajustes na seccionadora 1, o que poderia elevar muito o tempo do ciclo da serra. Então, estes itens pequenos eram agrupados formando um novo conjunto de itens que compunham um padrão de corte como ilustrado na Figura 30(b). Este novo padrão é mais simples e ágil de ser cortado. Os itens menores eram posteriormente obtidos no corte secundário. Com a aquisição da seccionadora 2, padrões de corte com muitos itens de dimensões pequenas, ainda são utilizados, mas a prática de cortar os itens agrupados no setor de corte secundário não é mais utilizada, já que o tempo de *setup* da seccionadora automática é muito inferior ao da semi-automática, como veremos mais adiante. No novo ambiente da Fábrica V, o recurso de agrupar itens é utilizado somente em casos de demanda extremamente alta.



(a) Padrão de corte original.



(b) Padrão de corte considerando itens agrupados

Figura 30: Padrões de corte com itens agrupados.

Seccionadora automática (Seccionadora 2)

A seccionadora 2 é composta por três esteiras rolantes, uma mesa principal, três mesas chamadas de “braços”, um computador e uma serra circular que se move por toda extensão da máquina. A Figura 31 é um esboço desta máquina vista de cima.

A capacidade de corte da seccionadora 2 é quase o dobro da seccionadora 1, já que a serra principal da seccionadora automática possui 105mm .

O processo de corte na seccionadora 2 consiste nos passos descritos a seguir. Uma empilhadeira alimenta a esteira rolante 1 com os objetos. Os operadores (nesta máquina trabalham dois operadores, os mesmos que operavam a seccionadora 1) empurram esta

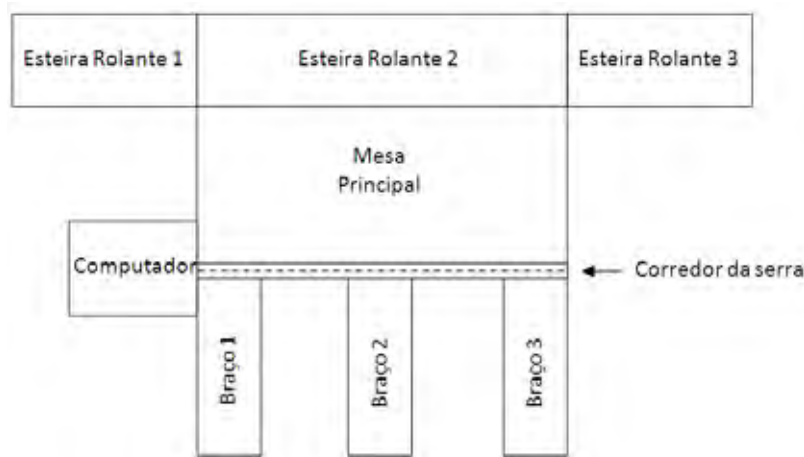


Figura 31: Esboço da máquina seccionadora automática vista de cima.

pilha de objetos e a posicionam na esteira rolante 2. Um dos operadores ajusta, no computador acoplado à máquina, o padrão de corte e o número de objetos a serem cortados de acordo com este padrão. A máquina é então acionada. A esteira rolante 2 levanta um determinado número de objetos que serão cortados simultaneamente até a altura da mesa principal. Em seguida, um braço mecânico com uma pinça na ponta empurra os objetos pela mesa principal na direção da serra. De forma automática, a máquina vai empurrando os objetos e cortando as faixas de acordo com as larguras definidas no padrão de corte pré-definido pelos operadores no computador. Os operadores se posicionam atrás dos braços (1,2 e 3) e rotacionam as faixas que foram cortadas (cortes do primeiro estágio). Nos braços 1 e 2 são colocadas as faixas que contém itens de mesma largura para o corte do segundo estágio, e no braço 3 as faixas com itens de larguras diferentes que serão cortadas nas próximas etapas. Depois de concluído os cortes do primeiro estágio, e com as faixas já rotacionadas a máquina é acionada novamente para o corte dos itens (segundo estágio). O braço mecânico então se aproxima das faixas posicionadas nos braços 1 e 2 e as puxa na direção da esteira rolante 2, até o fim da mesa principal. O conjunto de faixas vai então sendo empurrado na direção da serra para o corte de cada item. Este procedimento é repetido até que sejam feitos todos os cortes do segundo estágio. Se mais estágios forem necessários o processo é repetido.

A esteira rolante 3 é utilizada para armazenar objetos. Geralmente, a empilhadeira leva dois paletes de objetos até a máquina. Os operadores posicionam um deles na esteira rolante 3 e o outro na esteira rolante 1. No momento do corte os objetos são deslocados para a esteira rolante 2.

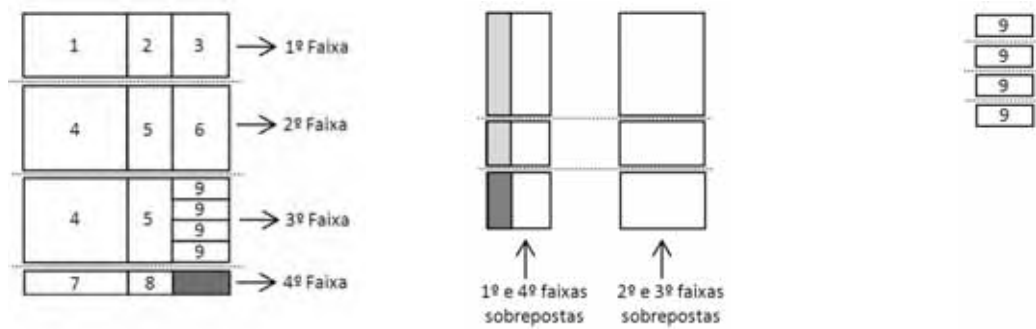
No computador acoplado a máquina são discriminados as dimensões do objeto que

será cortado, as dimensões das faixas e dos itens e a altura da pilha de objetos a serem cortados, ou seja o número de objetos. Por exemplo, se for necessário cortar 5 objetos de $15mm$, a altura da pilha de objetos é de $75mm$. É possível em um único ajuste, determinar a largura de cinco faixas diferentes e para cada faixa é possível registrar até dez itens. O *software* utilizado pela máquina permite ainda que os operadores armazenem os padrões de corte previamente. Apesar dos operadores utilizarem estes recursos, na maioria das vezes eles fazem ajustes nos padrões de corte que já estão armazenados, devido aos tamanhos de lotes diferentes (como no caso dos guarda-roupas) e aos tamanhos de objetos diferentes, que às vezes, podem surgir.

Nos braços (1, 2 e 3) existem vários pequenos furos que liberam ar e tornam mais fácil o manuseio das faixas. Os braços 1 e 2 são mais utilizados para o posicionamento das faixas que estão sendo cortadas, enquanto que o braço 3 é utilizado para armazenar as faixas que ainda serão cortadas. Para faixas com a mesma largura, os operadores também tentam aproveitar ao máximo a capacidade da serra empilhando-as e cortando-as ao mesmo tempo.

Na Figura 32 ilustramos como seriam os cortes na seccionadora 2 de um padrão 3-estágios, o mesmo obtido na Figura 29. A pilha de objetos é empurrada para a mesa principal e, de forma dinâmica, o braço mecânico vai empurrando o objeto e a serra cortando as faixas do primeiro estágio (Figura 32(a)). Em seguida, a primeira e a quarta faixas são sobrepostas e posicionadas no braço 1 e a segunda e terceira faixas são sobrepostas e posicionadas sobre o braço 2. Na sequência, o braço mecânico empurra as faixas para mesa principal. As faixas são então empurradas em direção à serra e cortadas, o que produz todos os itens (Figura 32(b)), exceto os itens de número 9 que são obtidos apenas no terceiro estágio (Figura 32(c)). Como já havíamos comentado, com o uso da seccionadora automática a técnica de agrupamento de itens quase nunca é utilizada devido à facilidade da realização de *setups* desta máquina e da rapidez com que os cortes são efetuados.

O processo de corte é dado por um conjunto de ações necessárias para manipulação dos objetos e para obtenção dos itens (carregamento de objetos na máquina, regulagem da máquina - ajuste de batentes no caso da seccionadora 1 e inclusão dos dados no computador na seccionadora 2, posicionamento de objetos, corte, manuseio do material). De acordo com os trabalhos [37], [63] e [35], dado que todas as ações acima citadas eram feitas de forma manual no *1º momento* da fábrica, o setor de corte era considerado um “gargalo” na produção, sendo imprescindível um planejamento dos cortes e da produção



(a) Cortes do primeiro estágio. (b) Cortes do segundo estágio. (c) Cortes do terceiro estágio.

Figura 32: Sequência de cortes na seccionadora 2 de um padrão de corte 3-estágios.

que visassem uma maior agilidade no processo de corte bem como a minimização da perda de matéria-prima, já que esta é responsável por aproximadamente 50% do preço do produto final. Atualmente o processo de corte não é mais considerado como gargalo da produção, o carregamento da máquina não é mais feito de forma manual, os tempos de *setups* são bem menores, a capacidade da seccionadora 2 é quase o dobro da seccionadora 1 e a manipulação dos objetos, faixas e itens se tornou bem mais fácil. Porém levar em consideração a agilidade do processo de corte ainda é um fator imprescindível na fábrica, pois segundo o gerente de produção da Fábrica V, a seccionadora 2 consome o dobro de energia elétrica que a seccionadora 1 consome, e além disso, toda a linha de produção depende do setor de furação, mas a fábrica já adquiriu uma nova máquina para este setor, portanto todo processo produtivo continuará dependendo da agilidade do processo de corte.

Além da operação da seccionadora, a eficácia do processo de corte da matéria prima está também relacionada com a qualidade dos padrões de corte utilizados e ao modo como estes são executados. A seguir discutiremos sobre os padrões de corte utilizados pela Fábrica V.

4.2.4 Padrões de Corte Utilizados pela Fábrica V

Determinar os padrões de corte que serão utilizados na prática, em geral não é uma tarefa simples, dado que é preciso levar em consideração vários fatores, como por exemplo, a perda de matéria-prima, a carteira de pedidos, os prazos de entrega, a capacidade de produção da fábrica, entre outros. Segundo o gerente de produção da Fábrica V a qualidade de um padrão de corte está diretamente ligada a dois aspectos: a facilidade

de cortá-lo, ou seja, um tempo de corte pequeno, e o menor índice de perda possível. O primeiro aspecto, refere-se a preferência por padrões de corte que necessitem de pouco manuseio do objeto e poucos ajustes na máquina. E o segundo, a busca por trabalhar com padrões de corte que apresentem a menor perda possível.

Apesar de apresentarem menores índices de perda de material, os padrões de corte com maior número de estágios são descartados pela indústria, pois demandam muito tempo da máquina de corte, além de necessitarem de um número maior de *setups*. Por isso, como já mencionamos, a preferência da Fábrica V por padrões de corte guilhotinados em 2-estágios (esporadicamente em 3-estágios) por serem mais fáceis de manusear e mais rápidos de serem cortados. Atualmente, com a nova seccionadora adquirida pela Fábrica V, os *setups* são mais rápidos e o manuseio dos padrões também se tornou mais fácil. Devido a essas mudanças, a empresa está permitindo uma maior utilização de padrões 3-estágios.

Na Fábrica V, os padrões de corte são gerados *a priori* no planejamento de um novo móvel, sendo que os tamanhos dos itens do novo móvel são elaborados pensando em como obter os melhores cortes. A elaboração dos padrões de corte é feita para cada móvel e por lotes, por exemplo, alguns padrões de corte são feitos para produzir 100 camas. Atualmente a fábrica utiliza o *software* “Corte Certo” [23] para auxiliar na geração dos padrões de corte. Depois do planejamento do móvel, as medidas dos itens juntamente com suas quantidades são passadas para o “Corte Certo”. Em seguida, o gerente de produção e sua equipe fazem alguns ajustes nos padrões de corte gerados pelo “Corte Certo” para reduzir a perda e facilitar o processo de corte. Uma perda aceitável para Fábrica V é de no máximo 6%, apesar de encontrarmos padrões gerados pela empresa com perdas de até 7%.

O conjunto de padrões utilizados pela Fábrica V consideram objetos de dimensões $(L,W)=(2750mm,1850mm)$. Porém as dimensões do objeto variam conforme o fornecedor, por exemplo, nas visitas encontramos objetos de dimensões $(2750mm,1830mm)$ e $(2750mm,1850mm)$. Por isto, na prática, é necessário que os operadores da máquina de corte façam alguns ajustes nos padrões de corte pré-estabelecidos. Ajustes também são feitos para o número de objetos que serão cortados de acordo com os padrões pré-estabelecidos para os guarda-roupas, pois os padrões de corte foram gerados para lotes de cinquenta guarda-roupas, mas como já mencionamos estes móveis não são produzidos em tamanhos de lotes fixos. Além disso, como os operadores sabem o que vão cortar ao longo da semana eles cortam concomitantemente itens de dois móveis diferentes. Por

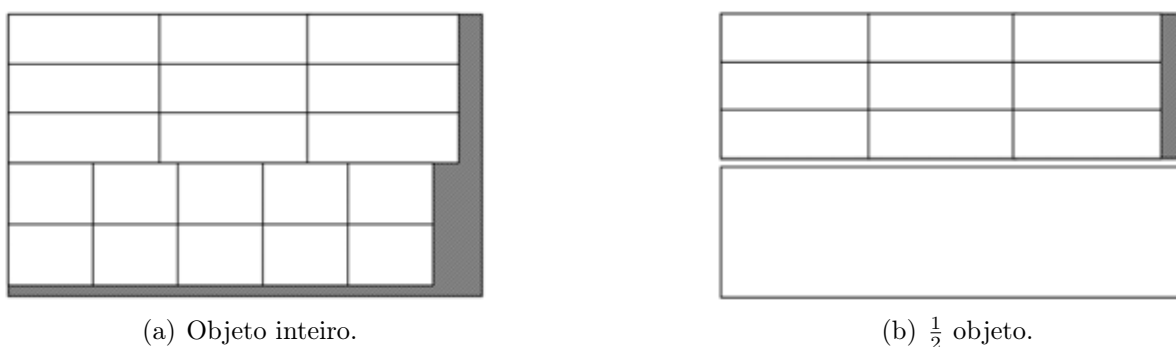
exemplo, suponha que a lateral da gaveta dos guarda-roupas de 3 e 4 portas possuem a mesma medida, então se hoje está sendo cortado o guarda-roupas de 3 portas e amanhã será cortado o de 4 portas, os operadores cortam as laterais de gaveta demandadas dos dois guarda-roupas ao mesmo tempo.

Uma outra preocupação importante é elaborar padrões que possam ser cortados simultaneamente, a fim de utilizar a capacidade da máquina seccionadora e reduzir o número de ciclos da serra. Este aspecto do problema não está incorporado no “Corte Certo”, e por isso o gerente de produção e sua equipe intervém no resultado.

Uma estratégia adotada pela fábrica é a utilização de retalhos, isto é, itens não demandados de matéria-prima de boa qualidade. Para a Fábrica V, retalhos que possuem dimensões (comprimento e largura) menores que 7 cm são considerados perda. Retalhos que apresentam dimensões um pouco maiores podem ser utilizados na confecção de pinázios (itens que compõem a estrutura de alguns móveis) ou colados com outros retalhos para a produção de alguns itens. Na geração dos padrões de corte, a fábrica tenta sempre deixar retalhos maiores que 7 cm para melhorar o aproveitamento do objeto.

Na tentativa de reduzir a produção de itens excedentes, a indústria utiliza o “ $\frac{1}{2}$ padrão de corte” [37]. Isto nada mais é do que a utilização de parte de um objeto. A Figura 33 ilustra esta situação. Esta estratégia contribui não só para redução de itens excedentes, mas também para a redução da perda de matéria-prima. A fábrica busca efetuar cortes no objeto de forma a aproveitar parcialmente um padrão de corte. Estes cortes são feitos geralmente próximos a metade do objeto para evitar que retalhos de tamanhos diferentes sejam armazenados, dificultando seu controle. Por este mesmo motivo, ela não considera a utilização de diferentes frações dos padrões de corte. Neste trabalho não consideramos os “ $\frac{1}{2}$ objetos”, na solução do problema de corte de estoque. Para considerar este tipo de solução seria necessária uma análise detalhada do padrão de corte para verificar a viabilidade de se efetuar um corte deste tipo, como por exemplo, decidir quais itens eliminar do padrão. Na literatura há alguns trabalhos que tratam do aproveitamento da perda (*eg.* [19]).

Uma imposição importante que provém da máquina de corte e que deve ser levada em consideração durante a construção dos padrões de corte e nos custos de produção é a espessura da serra. Inevitavelmente, quando a serra percorre o objeto durante o corte provoca um desgaste no objeto devido à sua espessura. Na fábrica em questão a espessura da serra da seccionadora 1 é de 4 mm e da seccionadora 2 é de $4,5\text{ mm}$. Caso a espessura da serra seja desconsiderada os padrões de corte produzidos podem ser impossíveis de serem produzidos



(a) Objeto inteiro.

(b) $\frac{1}{2}$ objeto.Figura 33: Padrão de corte inteiro e $\frac{1}{2}$ padrão de corte.

na prática. Por exemplo, suponha um objeto com dimensão $(L, W) = (200mm, 100mm)$, dois itens com dimensões $(l_1, w_1) = (70mm, 40mm)$ e $(l_2, w_2) = (45mm, 30mm)$ e a espessura de serra de $4mm$. O padrão de corte da Figura 34 é inviável na prática, pois os cortes horizontais feitos para obtenção das três faixas do primeiro estágio geram uma perda ocasionada pela serra de $8mm$, que se somada a largura dos itens 1 e 2 resulta em $108mm$ e excede a largura do objeto que é de $100mm$.



Figura 34: Padrão de corte desconsiderando o desgaste da serra.

Para que a espessura da serra seja considerada na construção de um padrão de corte, basta somarmos o seu valor aos comprimentos e larguras dos itens e objetos [59]. Porém, a perda calculada por (2.5) não leva em consideração a perda ocasionada pelo desgaste da serra. Quando analisamos a eficiência de um padrão de corte qualquer pela expressão (2.5), a perda gerada pelo desgaste da serra pode significar uma distorção, pois padrões compostos por muitos itens de dimensões pequenas irão sempre apresentar um alto percentual de perda [37]. Podemos calcular um valor estimado da perda de material, se incluirmos na fórmula (2.5) o desgaste provocado pela espessura da serra apenas nos itens [36]. Considerando o desgaste provocado pela serra como sendo σ , o novo cálculo da perda

é dado por (4.1):

$$\bar{P}_j = \max \left\{ 0, LW - \sum_{i=1}^m [(l_i + \sigma)(w_i + \sigma)a_{ij}] \right\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Dadas todas essas observações sobre a geração de padrões de corte na Fábrica V e de algumas discussões que tivemos com o gerente de produção da Fábrica V, utilizaremos nos nossos estudos computacionais padrões de corte 2-grupos e 3t-grupos (Capítulo 2). Esta decisão foi tomada devido a observação de que os padrões utilizados atualmente pela Fábrica V são, na maioria das vezes, padrões 2-grupos (veja a Figura 35) e, além disso, com a nova seccionadora automática, cortar padrões em até 3-estágios (que é o caso de alguns padrões do tipo 3t-grupos) não é mais uma tarefa tão difícil quanto antes. Assim dado que padrões do tipo 3t-grupos conseguem um melhor aproveitamento do objeto, ou seja, uma pequena perda, este tipo de padrão é de muito interesse para a Fábrica V.

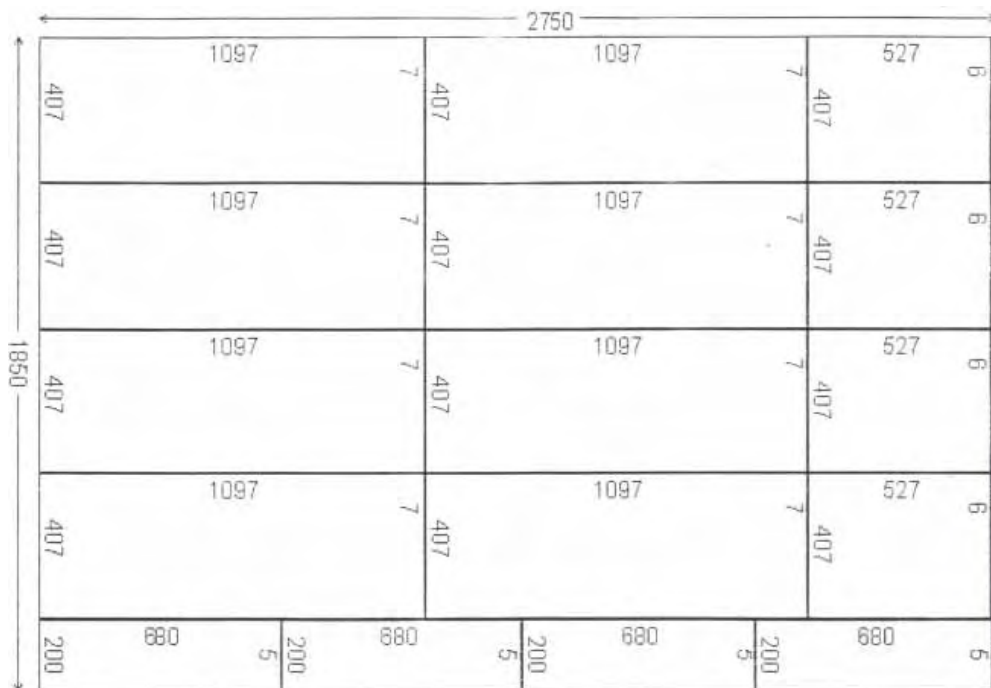


Figura 35: Padrão de corte utilizado pela Fábrica V.

No próximo capítulo, apresentaremos os resultados do estudo computacional realizados com o algoritmo AFM-P propostos no Capítulo 3 utilizando dados da Fábrica V.

Capítulo 5

Avaliação Computacional

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos no estudo computacional realizado com o algoritmo AFM-P (Seção 3.3.1). O objetivo é fazer uma análise do funcionamento deste algoritmo e um estudo comparativo entre as soluções obtidas com esse procedimento e a prática da fábrica visitada.

Os testes foram realizados em um computador Intel Core 2 Duo (2.80 GHz) com 2Gb de memória RAM. O *software* utilizado foi o Xpress^{MP}, sob a plataforma Windows 2000, com a linguagem de modelagem *Mosel*, que está agregada ao *software*. O *solver*, *Xpress-Optimizer*, tem como método *default* para resolver problemas de programação linear, inteira e quadrática, o Método *Branch-and-Cut*. A sintaxe do *Mosel* possibilita uma iteração entre o modelo e o *solver* o que torna possível a implementação da técnica de geração de colunas.

5.1 Descrição dos Exemplos

Devido a fase de transição da Fábrica V, não foi possível obter dados recentes da nova realidade desta, já que esses dados ainda não estão sistematizados. Os dados utilizados nos testes computacionais são do 1^o momento da Fábrica V, onde a principal máquina de corte era seccionadora semi-automática, e ainda eram fabricados criados e cômodas e utilizados objetos com várias espessuras (ver Capítulo 4). Utilizamos os dados de cinco produtos: guarda-roupas 3, 4 e 5 portas, cômoda e criado. Cada um destes produtos corresponde a um conjunto de exemplares, definidos pelas espessuras dos objetos requisitados para compô-los. Logo, um problema de corte de estoque deve ser resolvido para cada espessura de objeto.

Na tentativa de reduzir o tempo gasto com *setups* da máquina de corte (principalmente quando era utilizada a seccionadora semi-automática), a Fábrica V tem como alternativa a programação de lotes duplos e triplos, ou seja, lotes derivados da junção de dois ou três lotes simples (Capítulo 4). Estes tipos de lotes podem ser duplos homogêneos e duplos ou triplos heterogêneos. Os lotes duplos homogêneos são determinados pela união de dois lotes simples de um mesmo produto, ou seja, as demandas dos lotes simples são duplicadas. Os lotes duplos e triplos heterogêneos são gerados pela união de dois ou três lotes simples de produtos diferentes. Neste caso os itens dos dois ou três produtos são mesclados e os itens que são comuns aos produtos diferentes têm suas demandas somadas. Nos exemplares utilizados neste trabalho consideramos os lotes simples, e duplos e triplos heterogêneos.

A Tabela 7 traz os nomes de referências que usamos para identificar os produtos relacionados a cada conjunto dos exemplares, o tipo de lote (simples, duplo ou triplo) e as espessuras dos objetos necessários para compor o produto em questão.

Nomes	Produto e Tipo de Lote	Espessuras
A5P	Guarda-roupas de 5 Portas - Lote Simples	3, 9, 12, 15, 20 e 25 <i>mm</i>
A4P	Guarda-roupas de 4 Portas - Lote Simples	3, 9, 12, 15, 20 e 25 <i>mm</i>
A3P	Guarda-roupas de 3 Portas - Lote Simples	3, 9, 12, 15, 20 e 25 <i>mm</i>
Cmd	Cômoda - Lote Simples	3, 9, 12 e 15 <i>mm</i>
Crd	Criado - Lote Simples	3, 12 e 15 <i>mm</i>
A5P_Cmd	Guarda-roupas de 5 Portas e Cômoda - Lote Duplo Heterogêneo	3, 9, 12, 15, 20 e 25 <i>mm</i>
A5P_Crd	Guarda-roupas de 5 Portas e Criado - Lote Duplo Heterogêneo	3, 9, 12, 15, 20 e 25 <i>mm</i>
Cmd_Crd	Cômoda e Criado - Lote Duplo Heterogêneo	3, 9, 12 e 15 <i>mm</i>
A5P_A4P_A3P	Guarda-roupas de 3, 4 e 5 portas - Lote Triplo Heterogêneo	3, 9, 12, 15, 20 e 25 <i>mm</i>

Tabela 7: Conjuntos de exemplares, tipos de lotes, espessuras dos objetos.

A notação utilizada para indicar os exemplares, a partir dos nomes de referências citados na Tabela 7 e de acordo com suas respectivas espessuras, é dada por: “Nome”-“Espessura”. Por exemplo, o exemplar A4P-03 corresponde ao conjunto de itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 3*mm* de espessura para o lote simples do guarda-roupas de 4 portas.

Os exemplares A5P_Cmd-20, A5P_Cmd-25, A5P_Crd-20 e A5P_Crd-25 não são utilizados nos experimentos computacionais, pois são composto pelos mesmos itens do A5P-20 e A5P-25, respectivamente, já que nem a cômoda e nem o criado apresentam

itens com espessura de $20mm$ e $25mm$. O mesmo acontece com os exemplares Cmd_Crd-09 e $A5p_Crd-09$ uma vez que o criado não tem componentes de $09mm$.

Na Tabela 8 estão descritos os tamanhos de lotes dos dados da Luapa utilizados neste estudo computacional. Na Tabela 9 apresentamos o número de itens em comum, de acordo com a espessura, entre os lotes simples que irão compor os lotes duplos e triplos e a Tabela 10 mostra um resumo dos exemplares utilizados, em que são apresentados o exemplar, o número total de itens (**Nº Tot. Itens**) e a demanda total (**Dem. Tot.**). Consideramos ainda que os objetos a serem cortados têm dimensão $(L,W)=(2750mm, 1830mm)$.

Note na Tabela 10 que os exemplares $A5P-09$, $A4P-09$, $A3P-09$ e $A5P_A4P_A3P-09$ são compostos por um único item. Assim, estes exemplares também não serão considerados no estudo computacional aqui apresentado.

Produto	Dimensão do Lote
Guarda-roupas	3 portas - 60
	4 portas - 45
	5 portas - 40
Cômoda	160
Criado	300

Tabela 8: Tamanho dos lotes dos produtos utilizados como exemplares.

Espessura	Produtos	Nº Itens Comum
03	A5P e Cmd	1
	A5P e Crd	0
	Cmd e Cdr	0
	A5P, A4P e A3P	9
09	A5P e Cmd	0
	A5P, A4P e A3P	1
12	A5P e Cmd	2
	A5P e Crd	0
	Cmd e Cdr	0
	A5P, A4P e A3P	2
12	A5P e Cmd	2
	A5P e Crd	0
	Cmd e Cdr	0
	A5P, A4P e A3P	6
20	A5P, A4P e A3P	8
25	A5P, A4P e A3P	3

Tabela 9: Número de itens em comum entre os lotes simples de mesma espessura.

(a) Lotes Simples			(b) Lotes Duplos e Triplo		
Exemplar	Nº Tot. Itens	Dem. Tot.	Exemplar	Nº Tot. Itens	Dem. Tot.
A5P-03	8	1080	A5P_Cmd-03	10	2680
A5P-09	1	40	A5P_Cmd-09	4	1320
A5P-12	2	480	A5P_Cmd-12	6	3360
A5P-15	7	880	A5P_Cmd-15	10	2160
A5P-20	9	2720	A5P_Crd-03	11	3780
A5P-25	3	400	A5P_Crd-12	4	3180
A4P-03	7	1070	A5P_Crd-15	9	2380
A4P-09	1	45	Cmd_Crd-03	6	4300
A4P-12	2	540	Cmd_Crd-12	8	5580
A4P-15	7	855	Cmd_Crd-15	6	2780
A4P-20	9	2610	A5P_A4P_A3P-03	11	3230
A4P-25	3	315	A5P_A4P_A3P-09	1	145
A3P-03	5	1080	A5P_A4P_A3P-12	2	1740
A3P-09	1	60	A5P_A4P_A3P-15	7	2695
A3P-12	2	720	A5P_A4P_A3P-20	12	8270
A3P-15	6	960	A5P_A4P_A3P-25	3	1115
A3P-20	10	2940			
A3P-25	3	400			
Cmd-03	3	1600			
Cmd-09	3	1280			
Cmd-12	6	2880			
Cmd-15	4	1280			
Crd-03	3	2700			
Crd-12	2	2700			
Crd-15	2	1500			

Tabela 10: Resumo dos dados dos exemplares utilizados.

5.2 Resultados do Estudo Computacional

Nesta seção descreveremos os resultados obtidos com o algoritmo AFM-P (Figura 24). O algoritmo foi testado usando quatro valores diferentes para β (porcentagem mínima de utilização da capacidade da máquina Cap), sendo estes 30%, 50%, 80% e 100%.

Os padrões de corte gerados no Passo 2 e no Passo 16 do AFM-P (ver Capítulo 3) são

do tipo 2-grupos e 3t-grupos (ver Capítulo 2). Estudos realizados por Faccio e Rangel [35], mostraram que estes padrões de corte atendem os requisitos exigidos pela Fábrica V. Na geração dos padrões de corte foi considerado o desgaste provocado pela serra de 4mm. Além disto, admitimos que os itens têm rotação permitida e que pode haver a produção de itens em excesso. Essas considerações são baseadas na realidade da fábrica de móveis visitada.

O tempo máximo de execução do *solver*, na resolução do PCE em cada iteração do algoritmo AFM-P (Passo 2) e do PCE-R (Passos 15 a 18), foi limitado em 600 segundos. A solução do subproblema da geração de colunas foi limitada em 60 segundos. O número máximo de iterações foi definido como 15, com base em alguns testes iniciais. Assim, o tempo total de resolução para cada exemplar pode chegar a 9.600 segundos (600 segundos (PCE) + 15 iterações \times 600 segundos), ou aproximadamente 2 horas e meia.

A definição dos tempos utilizados na geração de colunas foi feita também com base em alguns testes iniciais. Testamos duas estratégias para resolver o exemplar A5P-20, do problema de corte de estoque considerando a geração de padrões de corte do tipo 3t-grupos. Na primeira estratégia o tempo de execução do PCE foi limitado em 3600 segundos e o tempo de resolução do subproblema da geração colunas limitado em 100 segundos (3600s+100s). Na segunda estratégia o tempo para o PCE foi limitado em 600 segundos e para a geração de colunas 60 segundos (600s+60s).

Nas Tabelas 10(a) e 10(b) são apresentados, para cada iteração da geração de colunas (**It**), o valor da função objetivo (**Função Obj.**) do problema mestre e a perda do padrão de corte gerado (**Perda**), onde a perda é calculada de acordo com (2.5). Note que até iteração 3 os valores das funções objetivos são iguais nas duas estratégias. Além disso, a qualidade dos padrões de corte que estão sendo gerados se mantém, tanto para o tempo de resolução do subproblema definido em 60 segundos, como para o definido em 100 segundos. Quando permitimos tempo maior de resolução para o subproblema temos a chance de conseguir padrões de melhor qualidade (como na iteração 3, por exemplo), já que possibilitamos um tempo maior para a busca de soluções na árvore *Branch-and-Cut*. Podemos notar também, que para um tempo maior de resolução (3600s+100s) o *tailing-off* acontece mais cedo do que no tempo menor, como pode ser visto nos gráficos apresentados na Figura 36. O tempo total de resolução do problema de corte de estoque foi de 1.131,77 segundos, para a definição de tempo de 3600s+100s e 616,77 segundos para o problema resolvido com tempo máximo permitido de 600s+60s.

Este mesmo teste foi aplicado para alguns outros exemplares (A5P-03, A5P-15 e

A5P-25) e obtivemos resultados similares. Com base nestes testes, pudemos concluir que optando pelo tempo de 600s+60s é possível gerar bons padrões de corte, mantendo um compromisso com o valor da função objetivo.

O número máximo de iterações para o AFM-P foi definido em 15, isto é $it_tot = 15$. Este valor foi tomado também com base em alguns testes iniciais.

(a) 3600s+100s			(b) 600s+60s		
It	Função Obj.	Perda	It	Função Obj.	Perda
0	31,8979	1,92%	0	31,8979	1,92%
1	31,4139	2,42%	1	31,4139	2,42%
2	31,0719	2,28%	2	31,0719	2,28%
3	30,6586	2,27%	3	30,6586	2,41%
4	29,1539	1,32%	4	29,1861	1,32%
5	29,1413	0,29%	5	29,1734	0,36%
6	29,0583	1,93%	6	29,1343	2,10%
7	29,0522	1,97%	7	29,0969	1,50%
8	29,0362	1,48%	8	29,0641	1,33%
9	29,0211	1,80%	9	29,0408	1,07%
10	29,0161	-	10	29,0188	-

Tabela 11: Geração de Colunas: Iteração, Função Objetivo e Perda.

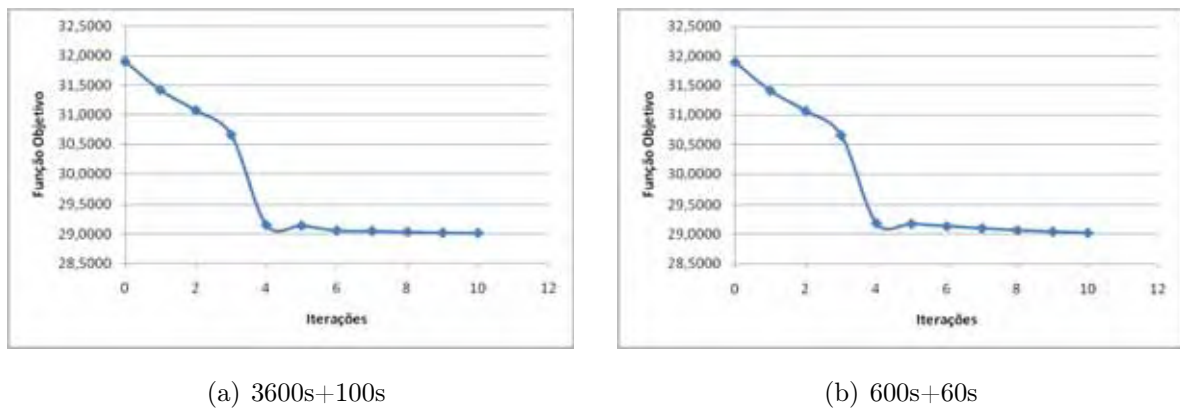


Figura 36: Gráficos da geração de colunas para tempos diferentes.

Nas próximas seções são feitas uma análise computacional mais detalhada do funcionamento do AFM-P e uma comparação dos resultados obtidos com a solução da Fábrica V.

5.2.1 Análise Detalhada do Algoritmo AFM-P

Como discutimos no Capítulo 4, o AFM-P gera uma solução a cada iteração para cada valor de β , estas são armazenadas e ao fim apenas as soluções não dominadas são consideradas. Com o objetivo de analisar o comportamento do AFM-P, nesta seção explicitamos todas as soluções encontradas em cada iteração do AFM-P e, para todos os valores de β , para os exemplares A5P-03 e o A3P-20, utilizando padrões do tipo 2-grupos. Apresentamos também as soluções encontradas com o A5P-03, para $\beta = 100\%$ e fazendo uso de padrões do tipo 3t-grupos.

Nas Tabelas de 12 a 15, 17, e de 18 a 20 são exibidos: a iteração (**It**) em que a solução foi encontrada, o número de objetos cortados (**Obj**), o número de ciclos da serra (**Ciclos**), o número de padrões de corte (**Np**), a perda média (**Pm**) (dada por (2.5)), o número de restrições acrescentadas (**Rest_Acr**), o número de colunas geradas (**Col_Ger**) e o tempo gasto em segundos em cada iteração (**Tempo**). No final de cada uma destas tabelas apresentamos ainda o número total de restrições acrescentadas, de colunas geradas e o tempo total. As soluções não dominadas, com relação ao número de objetos e de ciclos da serra, aparecem em negrito. Cabe notar que a solução da iteração 0 é a solução do PCE, logo é a mesma para as Tabelas de 12 a 15 e para as Tabelas de 18 a 20. Os primeiros resultados a serem analisados (Tabelas 12 a 15) foram obtidos resolvendo o exemplar A5P-03, considerando todos os valores de β definidos acima e utilizando padrões do tipo 2-grupos.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	135	11	7	6,49%	0	6	22,30
1	134	12	8	11,69%	1	0	0,41
2	137	15	12	8,04%	2	1	2,90
3	137	14	11	5,73%	5	3	7,00
4	135	13	10	4,08%	4	0	1,10
5	136	12	9	6,97%	2	0	0,88
6	136	11	8	4,21%	1	0	0,91
Total					15	10	35,50

Tabela 12: Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 30\%$.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	135	11	7	6,49%	0	6	22,3
1	136	11	7	10,76%	2	0	0,40
2	138	11	7	7,49%	2	1	1,00
3	140	11	7	10,01%	2	0	0,60
4	140	13	10	9,89%	2	1	2,50
5	136	11	8	8,21%	4	2	3,20
6	141	11	8	10,63%	2	0	0,70
7	140	10	6	7,22%	2	0	0,25
Total					16	10	30,95

Tabela 13: Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 50\%$.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	135	11	7	6,49%	0	6	22,30
1	139	13	10	12,49%	4	0	2,40
2	142	10	6	10,09%	8	2	1,60
3	146	10	6	15,78%	2	0	0,50
4	148	10	7	10,50%	2	0	0,40
5	148	9	6	7,59%	1	0	0,30
Total					17	8	27,50

Tabela 14: Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 80\%$.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	135	11	7	6,49%	0	6	22,30
1	139	13	10	12,49%	4	0	2,30
2	142	10	6	10,09%	8	2	1,60
3	145	10	6	15,78%	2	0	0,50
4	154	10	6	7,23%	2	0	0,40
5	160	9	6	7,59%	1	0	0,30
Total					17	8	27,40

Tabela 15: Soluções para o A5P-03, padrões 2-grupos, $\beta = 100\%$.

Note que o tempo de resolução do problema de corte de estoque ($It=0$) é, na maioria das vezes, maior que a resolução dos problemas de corte de estoque reformulados (3.59)-(3.64) de cada iteração. Isso é consequência de que poucas colunas são geradas para o PCE-R. É possível observar também que as soluções não dominadas são obtidas na maioria das vezes na última iteração (Tabelas 12 a 15).

Nem sempre a geração de novas colunas durante a resolução do PCE-R ((3.59)-(3.64)) melhora a solução. Veja, por exemplo, para $\beta = 30\%$ (Tabela 12), a geração de 1 coluna na iteração 2, piorou ambos os objetivos (número de objetos e número de ciclos da serra)

da solução já encontrada na iteração 1. É interessante observar o efeito positivo da adição das restrições de frequência mínima (3.56), somente com a reotimização do problema, ou seja sem a geração de nenhuma coluna nova, foi possível encontrar uma solução melhor que a da iteração anterior, ou ainda uma nova solução não dominada. Por exemplo, para $\beta = 80\%$ (Tabela 14), na iteração 5 (148 objetos e 9 ciclos) apenas a reotimização foi capaz de produzir uma solução melhor que a encontrada na iteração 4 (148 objetos e 10 ciclos).

O número total de restrições acrescentadas e de colunas geradas foram próximos para os quatro valores de β , em média 16 restrições acrescentadas e 9 colunas geradas no total. Note que não existe nenhuma regularidade para os números de restrições acrescentadas e o número de colunas geradas a cada iteração, para todos os valores de β .

É possível observar ainda nas Tabelas 14 e 15 que as soluções obtidas nas iterações 1 e 2 são idênticas para $\beta = 80\%$ e $\beta = 100\%$. Isto acontece pois os x_j tais que $x_j < Freq_Min$ são os mesmos para estes dois diferentes valores de β , já que $Freq_Min = \beta * Cap$ é um valor próximo quando $\beta = 80\%$ e $\beta = 100\%$. Assim são acrescentadas restrições de frequência mínima para os mesmos padrões de corte em ambos os valores de β (80% e 100%), e a solução do PCE-R é a mesma nos dois casos.

A perda média foi alta em quase todas as soluções, devido ao tipo de padrão utilizado (2-grupos). Note também que nem sempre a redução do número de padrões de corte implicou na redução do número de ciclos, como por exemplo na iteração 4 da Tabela 14 o número de padrões aumentou com relação à iteração 3, porém o número de ciclos manteve-se o mesmo.

Na Tabela 16 listamos apenas as soluções não dominadas para os diferentes valores de β para o exemplar A5P-03. Dentre estas, as soluções não dominadas estão em negrito. O gráfico ilustrando a relação de dominância entre as soluções (Tabela 16) é apresentado na Figura 37. Note que o β representado por “-” é a solução do PCE (iteração 0).

Obj	Ciclos	Np	Pm	β
135	11	7	6,49%	-
134	12	8	11,69%	30%
140	10	6	7,22%	50%
142	10	6	10,09%	80%
148	9	6	7,59%	80%
142	10	6	10,09%	100%
160	9	6	7,59%	100%

Tabela 16: Resumo das soluções não dominadas do A5P-03 para cada β utilizando padrões 2-grupos.

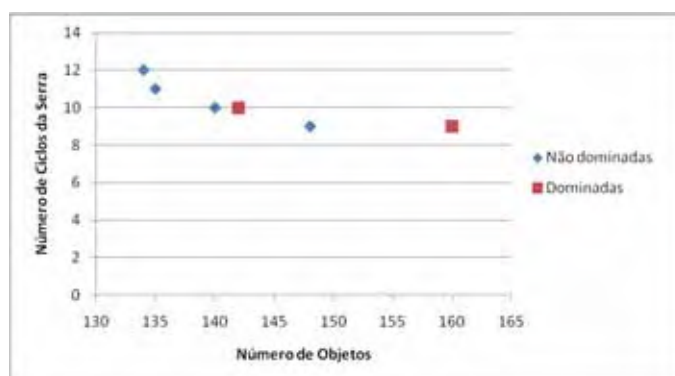


Figura 37: Relação de dominância entre as soluções não dominadas do A5P-03 de cada β utilizando padrões 2-grupos.

Resultados similares foram obtidos na resolução do exemplar A5P-03 utilizando padrões de corte do tipo 3t-grupos. Exibimos na Tabela 17 apenas os resultados obtidos em cada iteração do algoritmo AFM-P para $\beta = 100\%$.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	135	12	8	5,72%	0	9	609,89
1	135	14	10	6,21%	4	1	24,61
2	138	11	7	9,34%	7	3	26,52
3	138	11	7	8,62%	2	0	5,77
4	137	10	6	10,14%	2	1	2,33
5	139	10	5	11,26%	1	1	1,06
6	139	10	5	13,38%	1	1	1,09
7	148	10	6	10,08%	1	1	1,24
8	148	10	6	8,94%	2	0	0,81
Total					20	17	673,32

Tabela 17: Soluções para o A5P-03, padrões 3t-grupos, $\beta = 100\%$.

Observe na Tabela 17 que algumas vezes aparecem soluções repetidas (com relação ao número de objetos, de ciclos e de padrões), como nas iterações 2 e 3, 5 e 6, 7 e 8. Isto acontece porque o AFM-P faz apenas um rearranjo entre os padrões de corte gerados, de forma que os padrões para os quais foram acrescentadas restrições de frequência mínima não sejam utilizados na nova solução. O conjunto de padrões de corte utilizado é quase sempre o mesmo para as soluções repetidas. No caso das iterações 2 e 3, por exemplo, ambas as soluções utilizaram 7 padrões de corte, sendo 5 destes iguais e apenas 2 diferentes. Os dois padrões que foram “trocados” entre as soluções dadas nas iterações 2 e 3 são exatamente os que receberam imposição de frequência mínima no início da iteração 3. Um resumo das soluções encontradas nas iterações 5 e 6 são apresentados nas Figuras 38 e 39,

respectivamente. Note que a única diferença entre as soluções apresentadas nas iterações 5 e 6 é a troca do padrão 7 pelo padrão 15. Observe ainda, que o padrão 7 ($x_7 = 4$) era o único que estava abaixo de $Freq_Min = 20$ ($Freq_Min = 100\%.Cap = 20$) e que recebeu no início da iteração 6 a restrição de frequência mínima. Porém, ambos os padrões 7 e 15 são padrões homogêneos maximais com relação ao item 7, o padrão 7 considera o item 7 com orientação original e no padrão 15 o item 7 está rotacionado. Assim, a única diferença entre as soluções das iterações 5 e 6 está na perda e no número total de itens produzidos além da demanda (198 na iteração 5 e 194 na iteração 6). Para as iterações 7 e 8 observamos o mesmo comportamento encontrado para as soluções das iterações 2 e 3, e 5 e 6.

```

-----
It= 5

x( 7)=  4.00   y( 7)=  1
x(19)= 25.00   y(19)=  2
x(21)= 63.00   y(21)=  4
x(25)= 27.00   y(25)=  2
x(26)= 20.00   y(26)=  1

Total de objetos:  139.0000
Total de ciclos:  10

Padrões
P( 7):[  0  0  0  0  0  0  6  0]   Perda Pad. : 36.67%
P(19):[  0  0  0  0  8  4  0  0]   Perda Pad. :  1.64%
P(21):[  3  0  0  0  0  0  0  3]   Perda Pad. :  8.71%
P(25):[  2  6  0  0  0  0  0  0]   Perda Pad. :  7.91%
P(26):[  0  0  5  4  0  8  1  0]   Perda Pad. :  1.40%

Perda Média: 11.26%

Total de Padrões:  5

Número de Planos de Corte:  1

Nº de Colunas Geradas:  0

Quantidade de Itens Gerados (Demanda)
Item 1= 243.0000 (240)
Item 2= 162.0000 (160)
Item 3= 100.0000 (80)
Item 4=  80.0000 (80)
Item 5= 200.0000 (200)
Item 6= 260.0000 (200)
Item 7=  44.0000 (40)
Item 8= 189.0000 (80)

```

Figura 38: Iteração 5 da resolução do A5P-03 pelo AFM-P utilizando padrões 3t-grupos.

Quando o AFM-P produz soluções repetidas com relação ao número de objetos e de ciclos em iterações diferentes, como discutido acima, e estas estão entre as soluções não dominadas, adotamos como solução a que apresentar o menor índice de perda. Se o índice de perda também for o mesmo, o critério de desempate é o menor número de padrões de corte. Caso existam duas soluções não dominadas iguais para valores de β diferentes, da

mesma forma tomamos como solução a que apresentar o menor índice de perda e o menor número de padrões de corte.

Uma ideia que pode ser explorada em trabalhos futuros é determinar formas de evitar que padrões dominados, como por exemplo o padrão 15 que é dominado pelo 7, sejam gerados.

```

-----
It= 6

x(15)= 4.00   y(15)= 1
x(19)= 25.00  y(19)= 2
x(21)= 63.00  y(21)= 4
x(25)= 27.00  y(25)= 2
x(26)= 20.00  y(26)= 1

Total de objetos: 139.0000
Total de ciclos: 10

Padrões
P( 15):[ 0 0 0 0 0 0 5 0] Perda Pad.: 47.22%
P( 19):[ 0 0 0 0 8 4 0 0] Perda Pad.: 1.64%
P( 21):[ 3 0 0 0 0 0 0 3] Perda Pad.: 8.71%
P( 25):[ 2 6 0 0 0 0 0 0] Perda Pad.: 7.91%
P( 26):[ 0 0 5 4 0 8 1 0] Perda Pad.: 1.40%

Perda Média: 13.38%

Total de Padrões: 5

Número de Planos de Corte: 1

Nº de Colunas Geradas: 0

Quantidade de Itens Gerados (Demanda)
Item 1= 243.0000 (240)
Item 2= 162.0000 (160)
Item 3= 100.0000 (80)
Item 4= 80.0000 (80)
Item 5= 200.0000 (200)
Item 6= 260.0000 (200)
Item 7= 40.0000 (40)
Item 8= 189.0000 (80)

```

Figura 39: Iteração 5 da resolução do A5P-03 pelo AFM-P utilizando padrões 3t-grupos.

Um outro exemplar interessante para ser analisado detalhadamente é o A3P-20. Nas Tabelas 18 a 20 apresentamos as soluções obtidas a cada iteração para todos os valores de β exceto $\beta = 30\%$ já que para esse valor de β a única solução encontrada pelo AFM-P foi a do PCE. Isto ocorreu porque não existia nenhum $x_j < Freq_Min$, onde $Freq_Min = 30\%.3 = 0,9$, já que todos os x_j considerados são valores inteiros.

O tempo de resolução do PCE (iteração 0, das Tabelas 18 a 20) foi maior que 600 segundos. Isto significa que a geração de colunas foi interrompida pelo tempo de execução e não por otimalidade. Sendo assim, na iteração 1 do AFM-P, para todos os valores de β , novas colunas foram geradas. Isto porque, como a geração de colunas não foi

terminada por otimalidade, existe escopo para que colunas sejam geradas para o problema reformulado (PCE-R).

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	35	15	10	3,59%	0	10	614,89
1	33	20	16	3,75%	1	10	541,5
2	35	17	13	5,16%	9	0	61,69
3	32	16	12	2,40%	4	11	624,84
4	33	16	12	2,37%	6	6	413,83
5	33	17	12	2,50%	6	6	430,92
6	33	16	12	3,01%	6	0	61,77
7	33	16	12	2,32%	5	10	497,61
8	33	16	12	2,53%	6	1	123,05
9	33	16	12	3,70%	6	3	133,13
10	34	18	13	3,41%	6	5	226,82
11	34	17	13	3,03%	8	4	221,61
12	33	15	12	2,89%	6	2	151,59
13	33	16	12	7,76%	4	0	23,45
14	35	17	13	9,87%	3	1	12,81
15	32	14	12	3,13%	4	2	156,58
Total					80	71	4296,09

Tabela 18: Soluções para o A3P-20, padrões 2-grupos, $\beta = 50\%$.

Novamente podemos notar o aparecimento de soluções repetidas (com relação ao número de objetos, ciclos e padrões) após a reotimização ou a geração de colunas. Veja, por exemplo, as iterações de 6 à 9 da Tabela 18, em que apenas a perda é diferente. Note ainda que o AFM-P chegou a gerar 10 colunas na iteração 7, e mesmo assim encontrou uma solução igual a anterior, porém com uma perda menor. Isto acontece pelos mesmos motivos explicados para a Tabela 17. Soluções repetidas também podem ser observadas nas Tabelas 19 e 20.

Note na iteração 2 da Tabela 19 que apesar do número de padrões aumentar em uma unidade com relação a iteração 1, o número de ciclos diminuiu cinco unidades e o número de objetos diminuiu 2. Outro fato interessante com relação a número de ciclos, objeto e padrões acontece na iteração 6. O número de padrões aumenta com relação à iteração 5, porém o de ciclos diminui e o de objetos se mantém o mesmo. Ainda na Tabela 19 as soluções apresentadas nas iterações 13, 14 e 15 são as mesmas no que diz respeito ao número de ciclos, objeto, padrões e perda.

Na Tabela 20 apesar da solução tomada como não dominada (iteração 11) ter maior número de padrões que a solução da iteração 12, esta foi tomada como não dominada por apresentar o menor índice de perda. Lembrando que quando temos que decidir entre

duas soluções que apresentam o mesmo número de objetos e o mesmo número de ciclos, optamos pela que apresentar o menor índice de perda e, em seguida o menor número de padrões de corte.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	35	15	14	3,59%	0	10	614,89
1	35	20	11	5,39%	4	2	185,19
2	33	15	12	2,74%	10	16	631,19
3	34	17	11	2,52%	6	8	553,97
4	35	16	12	3,07%	9	1	122,59
5	34	17	10	4,04%	6	1	123,95
6	34	16	11	2,53%	8	2	146,59
7	35	16	13	2,67%	3	2	153,14
8	37	18	11	6,71%	4	0	51,18
9	34	14	9	2,94%	6	2	47,48
10	34	14	9	4,38%	4	0	77,64
11	35	14	9	2,90%	1	1	100,74
12	35	13	9	2,66%	1	0	25,91
13	33	13	9	2,65%	1	0	92,27
14	33	13	9	2,65%	1	0	92,59
15	33	13	13	2,65%	1	0	92,48
Total					65	45	3111,80

Tabela 19: Soluções para o A3P-20, padrões 2-grupos, $\beta = 80\%$.

It	Obj	Ciclos	Np	Pm	Rest_Acr	Col_Ger	Tempo
0	35	15	10	3,59%	0	10	614,89
1	35	20	14	5,39%	4	2	184,64
2	33	15	11	2,74%	10	16	630,61
3	34	17	12	2,52%	6	8	553,14
4	35	16	11	3,07%	9	1	122,28
5	31	15	12	2,57%	6	4	307,34
6	37	18	14	2,44%	8	6	430,53
7	35	17	11	3,10%	8	0	61,89
8	35	17	11	4,27%	5	5	262,69
9	34	16	11	3,95%	5	3	141,78
10	35	16	10	4,48%	6	1	56,7
11	34	14	10	2,12%	4	4	64,19
12	34	14	9	2,67%	3	0	3,52
13	34	15	10	6,39%	2	1	37,83
14	34	14	10	2,48%	3	0	5,19
15	34	14	10	2,83%	2	1	166,86
Total					81	62	3644,08

Tabela 20: Soluções para o A3P-20, padrões 2-grupos, $\beta = 100\%$.

As soluções não dominadas para cada β são apresentadas na Tabela 21 e a relação de dominância entre estas pode ser vista no gráfico mostrado na Figura 40. Note que todas

as soluções não dominadas apresentam perda média menor que 6%.

Obj	Ciclos	Np	Pm	β
35	15	10	3,59%	30%
32	14	12	3,13%	50%
33	13	13	2,65%	80%
31	15	12	2,57%	100%
34	14	10	2,12%	100%

Tabela 21: Resumo das soluções não dominadas do A3P-20 para cada β utilizando padrões 2-grupos.

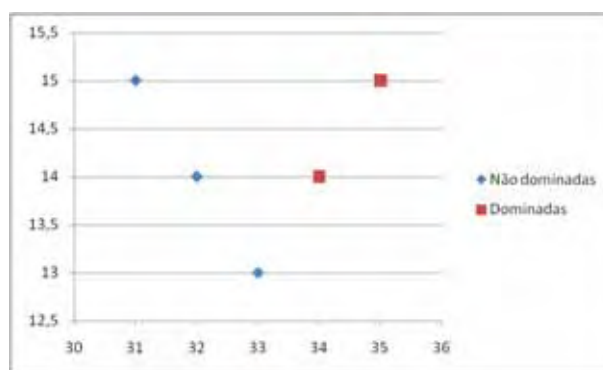


Figura 40: Relação de dominância entre as soluções não dominadas do A3P-20 de cada β utilizando padrões 2-grupos.

5.2.2 Resultados do AFM-P - Soluções Não Dominadas

Nesta seção apresentamos as soluções encontradas para todos os exemplares. Nas Tabelas de 22 a 25 apresentamos apenas as soluções não dominadas, dentre todas encontradas pelo AFM-P com os quatro valores de β pré-determinados, para cada exemplar dos lotes simples, duplos e triplos heterogêneos. As tabelas são apresentadas de acordo com o tipo de padrão de corte utilizado (2-grupos ou 3t-grupos). Além do número de objetos (**Obj**), número de ciclos da serra (**Ciclos**), número de padrões de corte (**Np**) e perda média (**Pm**) apresentados, estas tabelas exibem também o valor de β para o qual a solução não dominada foi encontrada, o tempo gasto, em segundos, pelo algoritmo no Passo 2 para resolução do PCE (**Tempo(PCE)**), o tempo gasto, em segundos, com os outros passos do algoritmo (**Tempo(P)**) para o valor de β associado, o tempo total, em segundos, (**Tempo_Tot=Temp(PCE)+Temp(P)**), a iteração em que a solução não dominada foi obtida (**It**) e o número total de iterações do algoritmo (**It_Tot**). Quando

a solução do PCE é não dominada, os valores de β , Rest_Acr, Tempo(P), It e It_Tot, associados são preenchidos com o símbolo “-”.

Na Tabela 22, podemos observar que dentre as soluções não dominadas, exceto as obtidas com o PCE, a maioria foi obtida para $\beta = 80\%$ e $\beta = 100\%$. Além disso, essas soluções são encontradas, na maioria das vezes, na última iteração do algoritmo. Na maioria das soluções encontradas, podemos observar mais uma vez, que o tempo gasto com a resolução do PCE é maior que o tempo de execução dos outros passos do AFM-P, ou seja, o tempo total para resolver os PCE-Rs.

Exemplar	Obj	Ciclos	Np	Pm	β	Rest_Acr	Tempo(PCE)	Tempo(P)	Tempo_Tot	It	It_Tot
A5P-03	135	11	7	6,59%	-	-	22,26	-	22,26	-	-
	134	12	8	11,69%	30%	1	22,26	13,14	35,4	1	6
	140	10	6	7,22%	50%	16	22,26	7,91	30,7	7	7
	148	9	6	7,59%	80%	17	22,26	5,34	27,6	5	5
A5P-12	10	2	1	4,36%	100%	7	0,34	0,5	0,84	5	5
A5P-15	61	17	7	7,35%	-	-	498	-	498	-	-
A5P-20	32	13	7	2,25%	50%	25	599,84	114,66	714,5	7	7
	33	11	7	2,19%	100%	42	599,84	85,46	685,3	8	8
A5P-25	4	2	2	2,17%	80%	7	2,34	0,5	2,84	3	3
A4P-03	122	11	6	5,71%	-	-	5,67	-	5,67	-	-
	140	9	5	6,57%	80%	16	5,67	5,08	10,75	6	6
A4P-12	11	3	2	4,46%	100%	1	0,33	0,95	1,28	1	8
A4P-15	56	17	8	6,39%	50%	8	563,48	110,81	674,29	4	5
	57	16	6	6,29%	80%	21	563,48	23,88	587,36	5	5
A4P-20	27	12	7	1,87%	80%	64	440,78	1406,8	1847,58	12	15
	29	11	6	2,09%	80%	68	440,78	1406,8	1847,58	15	15
A4P-25	3	2	2	2,46%	100%	10	4,94	2,33	7,27	3	6
A3P-03	117	8	7	12,32%	100%	4	3,09	3,48	6,57	2	6
A3P-12	15	4	2	3,99%	-	-	0,11	-	0,11	-	-
A3P-15	66	18	6	6,67%	-	-	88,14	-	88,14	-	-
	65	19	8	7,17%	100%	1	88,14	16,19	104,33	1	9
	64	20	8	7,17%	100%	21	88,14	16,19	104,33	8	9
A3P-20	32	14	12	3,13%	50%	80	614,89	3681,2	4296,09	15	15
	33	13	9	2,65%	80%	65	614,89	2496,91	3111,8	13	15
	31	15	12	2,57%	100%	35	614,89	3029,19	3644,08	5	15
A3P-25	4	2	1	1,93%	100%	8	2,67	0,64	3,31	3	3
Cmd-03	136	8	3	15,26%	-	-	0,34	-	0,34	-	-
Cmd-09	8	3	3	1,15%	-	-	4,39	-	4,39	-	-
	7	4	4	1,59%	50%	6	4,39	7,81	12,2	2	6
	10	2	2	0,56%	80%	13	4,39	6,28	10,67	5	5
Cmd-12	46	11	6	4,35%	80%	19	349,28	406,8	756,08	11	11
	45	13	9	1,21%	100%	18	349,28	180,34	529,62	4	12
Cmd-15	65	17	6	7,21%	80%	16	106,74	43,7	150,44	7	7
Crd-03	78	5	3	9,66%	-	-	2,53	-	2,53	-	-
Crd-12	25	6	2	0,79%	-	-	0,72	-	0,72	-	-
Crd-15	46	12	2	2,96%	-	-	0,17	-	0,17	-	-

Tabela 22: AFM-P com padrões 2-grupos - Lote Simples - Soluções não dominadas.

Como discutimos da seção anterior, no caso em que a geração de colunas foi interrompida pelo tempo de execução (exemplar A3P-20), o tempo total de resolução dos PCE-Rs nos outros passos do AFM-P (Tempo(P)), foi maior que o tempo gasto com o PCE. Note que isto não é uma regra, já que em alguns exemplares, como por exemplo A4P-12, A4P-20 e Cmd-09, a geração de colunas foi interrompida por otimalidade, porém o tempo gasto com o AFM-P é maior do que com o PCE.

Apenas em dois exemplares (A4P-20 e A3P-20) o número máximo de 15 iterações foi atingido. Quanto a variedade de soluções, apenas em oito dos vinte e cinco exemplares existe mais de uma solução não dominada. O número de restrições acrescentadas não apresenta nenhuma regularidade, sendo esse valor muito diferente para cada exemplar. Os exemplares que apresentaram um maior número de restrições de frequência mínima impostas foram A5P-20, A4P-20 e A3P-20, que são os exemplares que possuem a maior variedade de itens e a maior demanda (Tabela 10), dentre os exemplares dos lotes simples.

Exemplar	Obj	Ciclos	Np	Pm	β	Rest_Acr	Tempo(PCE)	Tempo(P)	Tempo_Tot	It	It_Tot
A5P_Cmd-03	267	18	10	9,08%	-	-	119,83	-	119,83	-	-
	265	19	11	10,66%	50%	20	119,83	32,14	151,97	10	11
A5P_Cmd-09	10	4	4	1,21%	-	-	47,59	-	47,59	-	-
	11	3	3	1,49%	50%	14	47,59	26,92	74,51	7	7
A5P_Cmd-12	55	14	8	1,64%	50%	12	257,36	26,44	283,8	4	10
	56	12	6	1,57%	100%	24	257,36	676,9	934,26	5	15
A5P_Cmd-15	123	32	10	8,38%	100%	31	652,42	574,95	1227,37	12	12
A5P_Crd-03	210	16	11	5,87%	-	-	577,55	-	577,55	-	-
	208	18	13	7,04%	30%	30	577,55	65,33	642,88	5	6
	211	15	11	8,23%	50%	25	577,55	149,72	727,27	4	15
	209	17	12	8,42%	50%	21	577,55	149,72	727,27	3	15
	213	14	10	10,25%	50%	35	577,55	149,72	727,27	8	15
	221	13	7	8,49%	80%	29	577,55	33,25	610,8	4	4
A5P_Crd-12	35	8	4	4,29%	-	-	8,78	-	8,78	-	-
	34	10	6	3,40%	80%	11	8,78	12,2	20,98	8	8
A5P_Crd-15	103	28	11	6,56%	80%	21	626,48	42,5	668,98	6	6
	102	29	11	6,00%	100%	26	626,48	51,94	678,42	7	7
Cmd_Crd-03	208	13	7	8,43%	50%	10	24,6	6,6	31,2	3	6
Cmd_Crd-12	72	16	7	1,35%	100%	41	610,16	75,14	685,3	15	15
Cmd_Crd-15	109	28	7	4,70%	50%	16	522,63	124,9	647,53	5	5
	108	30	9	4,21%	100%	24	525,7	78,1	603,8	8	8
A5P_A4P_A3P-03	374	24	11	10,72%	-	-	78,05	-	78,05	-	-
	378	22	10	10,73%	50%	17	78,05	32,53	110,58	4	4
	375	23	10	10,47%	80%	4	78,05	12,45	90,5	1	7
A5P_A4P_A3P-12	37	9	2	8,69%	-	-	0,13	-	0,13	-	-
A5P_A4P_A3P-15	180	48	7	7,70%	-	-	63,95	-	63,95	-	-
A5P_A4P_A3P-20	83	31	11	2,98%	100%	29	611,28	909,14	1520,42	5	5
A5P_A4P_A3P-25	10	5	5	2,59%	80%	10	2,7	1,88	4,58	4	4

Tabela 23: AFM-P com padrões 2-grupos - Lotes Duplo e Triplo - Soluções não dominadas.

Para os lotes duplos e triplos, a maioria das soluções não dominadas provenientes da resolução do AFM-P com padrões 2-grupos são encontradas para $\beta = 50\%$ e a minoria para $\beta = 30\%$, como pode ser observado na Tabela 23. Uma explicação para isto é que com β pequeno fica difícil para o algoritmo encontrar escopo para melhorar a solução, porque neste caso a maioria das soluções x_j (senão todas), já estão acima de *Freq_Min*. Da mesma forma que ocorreu com os lotes simples a maioria destas soluções não dominadas são encontradas na última iteração do AFM-P. Dos exemplares da Tabela 23, mais da metade (oito de um total de quinze) apresentaram mais que uma solução não-dominada. Note que os exemplares que apresentam um maior número de soluções não dominadas (A5P_Crd-03 e A5P_A4P_A3P-03) são aqueles em que a quantidade de itens e a demanda total são valores altos (Tabela 10). Porém nem sempre o exemplar que tem uma grande quantidade de itens e uma demanda total alta vai apresentar uma grande variedade de soluções não dominadas, como por exemplo o exemplar A5P_A4P_A3P-20. Nos exemplares A5P_A4P_A3P-12 e A5P_A4P_A3P-15 a única solução não dominada é a própria solução do PCE.

As Tabelas 24 e 25 trazem os resultados encontrados com o AFM-P utilizando padrões do tipo 3t-grupos para lotes simples e duplos/triplos respectivamente. Os resultados apresentados são similares aos obtidos com a utilização de padrões 2-grupos (Tabelas 22 e 23). Para os lotes simples (Tabela 24) a maioria das soluções não dominadas, exceto as obtidas com o PCE, são encontradas com $\beta = 100\%$. Para os lotes duplos e triplos, a maioria das soluções não dominadas são obtidas para $\beta = 80\%$. A minoria das soluções não dominadas são provenientes de $\beta = 30\%$. Note também, que como observado anteriormente, a maioria das soluções não dominadas são encontradas na última iteração e poucos são os exemplares em que o AFM-P é interrompido porque atingiu o número máximo de iterações.

Nas soluções apresentados nas Tabelas 24 e 25 os tempos gastos com a resolução do PCE (Tempo (PCE)) e com os outros passos do AFM-P (Tempo(P)) são maiores que os tempos obtidos nas Tabelas 22 e 23, pois o subproblema (2.46)-(2.54) é mais difícil de ser resolvido quando adaptado, de acordo com a Tabela 1, para padrões do tipo 3t-grupos. A perda média obtida considerando todos os exemplares dos lotes simples com padrões do tipo 2-grupos, foi de 4,99% com desvio padrão de 3,49%, e 6,26% para os lotes duplos e triplos com desvio padrão de 3,28%. Utilizando padrões do tipo 3t-grupos, as perdas médias foram de 3,31% para lotes simples, com desvio padrão de 2,95%, e 3,76% para lotes duplos e triplos com desvio padrão de 2,44%. Esse resultado já era esperado, uma vez que os padrões do tipo 3t-grupos conseguem um melhor aproveitamento do objeto e

consequentemente uma perda menor.

A variedade de soluções não dominadas encontradas com o AFM-P utilizando padrões do tipo 3t-grupos não é muito grande. Além disso, em muitos casos (7 exemplares de um total de 22 para lotes simples e 6 exemplares de um total de 15 para lotes duplos e triplos) a única solução não dominada é a do PCE. Este é o tipo de situação em que o AFM-P não é capaz de rearranjar a solução do PCE seja por não efetuar nenhuma iteração (ou seja, não existe nenhum x_j abaixo de $Freq_Min$), ou por não conseguir gerar padrões que contribuam para um melhor balanceamento entre o número de objetos e o número de ciclos da serra.

Exemplar	Obj	Ciclos	Np	Pm	β	Rest_Acr	Tempo(PCE)	Tempo(P)	Tempo_Tot	It	It_Tot
A5P-03	134	9	7	6,25%	30%	9	604,67	128,63	733,3	3	3
A5P-12	11	3	2	3,53%	-	-	7,42	-	7,42	-	-
A5P-15	57	17	7	3,75%	30%	11	609,92	824,88	1434,8	8	8
A5P-20	31	12	6	1,26%	100%	22	613,36	1250,34	1863,7	4	15
A5P-25	4	2	2	0,61%	100%	12	199,74	84,66	284,4	4	4
A4P-03	122	11	6	5,71%	-	-	349,56	-	-	-	-
	128	10	6	6,80%	50%	16	349,56	132,25	481,81	6	6
	137	9	6	7,54%	80%	25	349,56	139,45	489,01	10	10
A4P-12	11	3	2	3,52%	100%	10	1,97	9,27	11,24	6	6
A4P-15	55	16	6	4,02%	100%	24	613,75	912,75	1526,5	6	6
A4P-20	28	12	9	2,03%	100%	73	615,05	5553,02	6168,07	12	15
A4P-25	4	2	2	0,29%	100%	11	89,55	3,13	92,68	4	4
A3P-03	118	9	5	12,65%	-	-	100,06	-	100,06	-	-
A3P-12	15	3	2	3,55%	-	-	0,02	-	0,02	-	-
A3P-15	64	18	6	4,72%	-	-	487,95	-	487,95	-	-
A3P-20	29	11	9	3,49%	100%	48	616,63	1954,49	2571,12	11	11
A3P-25	4	2	2	0,07%	100%	10	108,05	4,7	112,75	5	5
Cmd-03	124	7	2	5,31%	-	-	3,45	-	-	-	-
Cmd-09	7	3	3	0,20%	50%	7	457,33	1026,78	1484,11	3	15
	10	2	2	0,21%	80%	15	457,33	221,81	679,14	5	5
Cmd-12	46	12	6	0,25%	-	-	550,39	-	550,39	-	-
	48	11	6	0,14%	80%	36	550,39	2957,49	3507,88	15	15
	45	14	10	0,95%	100%	14	550,39	2234,67	2785,06	3	15
Cmd-15	64	16	4	5,24%	-	-	341,98	-	341,98	-	-
Crd-03	72	5	3	3,94%	-	-	63,25	-	63,25	-	-
Crd-12	24	6	3	0,89%	100%	9	53,84	55,31	109,15	5	5
Crd-15	46	12	2	2,37%	-	-	15,33	-	15,33	-	-

Tabela 24: AFM-P com padrões 3t-grupos - Lotes Duplo e Triplo - Soluções não dominadas.

Exemplar	Obj	Ciclos	Np	Pm	β	Rest_Acr	Tempo(PCE)	Tempo(P)	Tempo_Tot	It	It_Tot
A5P_Cmd-03	256	18	9	5,99%	30%	13	556,64	235,22	791,86	6	6
	261	17	9	5,50%	50%	18	556,64	336,3	892,94	7	7
	264	16	8	5,49%	80%	32	556,64	558,24	1114,88	10	10
A5P_Cmd-09	10	3	3	0,99%	50%	20	229,8	551,42	781,22	8	8
A5P_Cmd-12	55	13	6	0,52%	80%	10	612,44	2577,67	3190,11	3	15
A5P_Cmd-15	120	33	9	5,29%	100%	14	621,36	1413,3	2034,66	7	8
A5P_Crd-03	203	16	12	4,80%	30%	25	623,33	2003,97	2627,3	8	10
	204	15	11	3,67%	30%	27	623,33	2003,97	2627,3	10	10
	205	14	11	4,92%	50%	28	623,33	1736,72	2360,05	8	13
	220	13	10	10,25%	80%	61	623,33	2202,25	2825,58	15	15
A5P_Crd-12	34	9	4	0,48%	-	-	480,72	-	480,72	-	-
A5P_Crd-15	103	31	11	4,52%	-	-	614,03	-	614,03	-	-
Cmd_Crd-03	191	13	7	2,56%	30%	17	609,4	161,1	770,5	5	5
	193	12	7	2,87%	50%	21	609,4	74,6	684	8	8
Cmd_Crd-12	70	18	10	1,06%	80%	25	613,84	3119,42	3733,26	7	15
	72	17	5	0,94%	100%	39	613,84	1288,08	1901,92	11	11
Cmd_Crd-15	110	30	6	5,38%	-	-	625,53	-	625,53	-	-
A5P_A4P_A3P-03	374	23	11	6,93%	-	-	618,36	-	618,36	-	-
A5P_A4P_A3P-12	35	8	2	3,70%	-	-	3,27	-	3,27	-	-
A5P_A4P_A3P-15	172	45	7	2,99%	-	-	655,48	-	655,48	-	-
A5P_A4P_A3P-20	83	31	12	1,81%	80%	36	627,05	3581,94	4208,99	10	15
A5P_A4P_A3P-25	10	6	3	2,10%	80%	14	154,5	74,42	228,92	7	7

Tabela 25: AFM-P com padrões 3t-grupos - Lotes Duplo e Triplo - Soluções não dominadas.

5.2.3 Resultados AFM-P - Padrões 2-grupos \times Padrões 3t-grupos

Nesta seção fazemos uma comparação mais detalhada dos resultados obtidos com o AFM-P utilizando padrões do tipo 2-grupos (AFM-P/2-grupos) e 3t-grupos (AFM-P/3t-grupos) para os lotes simples e duplos/triplos. Na Tabela 26 apresentamos as soluções não dominadas encontradas com o AFM-P/2-grupos e com o AFM-P/3t-grupos para os exemplares do lote simples. Destacamos em negrito as melhores soluções para cada exemplar, ou seja, as soluções não dominadas entre estes. Podemos notar mais uma vez que utilizando padrões do tipo 2-grupos, conseguimos uma quantidade maior de soluções não dominadas do que quando utilizamos padrões do tipo 3t-grupos. Porém, 76,67% das soluções encontradas utilizando o AFM-P com padrões do tipo 3t-grupos apresentam perdas próximas do valor de 6% exigido pela Fábrica V, enquanto que apenas 51,28% das soluções obtidas com AFM-P/2-grupos possuem a perda média abaixo de 6%.

Exemplar	AFM-P/ 2-grupos					AFM-P/ 3t-grupos				
	Obj	Ciclos	Np	Pm	β	Obj	Ciclos	Np	Pm	β
A5P-03	135	11	7	6,59%	-	134	9	7	6,25%	30%
	134	12	8	11,69%	30%					
	140	10	6	7,22%	50%					
	148	9	6	7,59%	80%					
A5P-12	10	2	1	4,36%	100%	11	3	2	3,53%	-
A5P-15	61	17	7	7,35%	-	57	17	7	3,75%	30%
A5P-20	32	13	7	2,25%	50%	31	12	6	1,26%	100%
	33	11	7	2,19%	100%					
A5P-25	4	2	2	2,17%	80%	4	2	2	0,61%	100%
A4P-03	122	11	6	5,71%	-	122	11	6	5,71%	-
	140	9	5	6,57%	80%	128	10	6	6,80%	50%
						137	9	6	7,54%	80%
A4P-12	11	3	2	4,46%	100%	11	3	2	3,52%	100%
A4P-15	56	17	8	6,39%	50%	55	16	6	4,02%	100%
	57	16	6	6,29%	80%					
A4P-20	27	12	7	1,87%	80%	28	12	9	2,03%	100%
	29	11	6	2,09%	80%					
A4P-25	3	2	2	2,46%	100%	4	2	2	0,29%	100%
A3P-03	117	8	7	12,32%	100%	118	9	5	12,65%	-
A3P-12	15	4	2	3,99%	-	15	3	2	3,55%	-
A3P-15	66	18	6	6,67%	-	64	18	6	4,72%	-
	65	19	8	7,17%	100%					
	64	20	8	7,17%	100%					
A3P-20	32	14	12	3,13%	50%	29	11	9	3,49%	100%
	33	13	9	2,65%	80%					
	31	15	12	2,57%	100%					
A3P-25	4	2	1	1,93	100%	4	2	2	0,07%	100%
Cmd-03	136	8	3	15,26%	-	124	7	2	5,31%	-
Cmd-09	8	3	3	1,15%	-	7	3	3	0,20%	50%
	7	4	4	1,59%	50%					
	10	2	2	0,56	80%					
Cmd-12	46	11	6	4,35%	80%	46	12	6	0,25%	-
	45	13	9	1,21%	100%	48	11	6	0,14%	80%
						45	14	10	0,95%	100%
Cmd-15	65	17	6	7,21%	80%	64	16	4	5,24%	-
Crd-03	78	5	3	9,66%	-	72	5	3	3,94%	-
Crd-12	25	6	2	0,79%	-	24	6	3	0,89%	100%
Crd-15	46	12	2	2,96%	-	46	12	2	2,37%	-

Tabela 26: AFM-P/2-grupos \times AFM-P/3t-grupos - Lote Simples.

Nos dados da Tabela 26 podemos notar que em alguns exemplares, como por exemplo, A5P-03, A3P-12, A3P-15 e Cmd-09 o algoritmo AFM-P/3t-grupos apresenta algumas soluções com o mesmo número de objetos que o AFM-P/2-grupos, porém com um menor número de ciclos. Por exemplo, no exemplar A5P-03 o AFM-P/2-grupos encontra uma solução com 134 objetos e 12 ciclos enquanto que o AFM-P/3t-grupos apresenta uma

solução com o mesmo número de objetos porém com 3 ciclos a menos. Esta mesma observação pode ser feita com exemplares que apresentaram o mesmo número de ciclos, mas um número menor de objetos, por exemplo, A5P-03, A5P-15, A4P-03, A3P-15, Cmd-09, Crd-03 e Crd-12. Note que para o exemplar A5P-03 a abordagem AFM-P/2-grupos obteve uma solução com 148 objetos e 9 ciclos, enquanto que o AFM-P/3t-grupos traz uma solução com o mesmo número de ciclos porém com 14 objetos a menos. Há alguns casos em que o AFM-P/2-grupos traz soluções com o mesmo número de objetos e/ou ciclos que o AFM-P/3t-grupos, porém com menos ciclos e/ou objetos, como pode ser visto nos exemplares Cmd-12 e A4P-25. Logo, não é possível apontar a estratégia (AFM-P/2-grupos ou AFM-P/3t-grupos) que consegue obter o menor número de ciclos e o menor número de objetos.

Dentre os vinte e dois exemplares apresentados na Tabela 26, o algoritmo AFM-P/3t-grupos obteve soluções melhores para onze destes. Nos exemplares A5P-25, A4P-12, A3P-25 e Crd-15 as duas abordagens obtiveram soluções com o mesmo número de objetos e de ciclos, porém em todos estes casos a menor perda média foi obtida com o AFM-P/3t-grupos. Em apenas um exemplar (A5P-20) ambas estratégias apresentaram soluções interessantes (não dominadas entre si), 33 objetos e 11 ciclos para o AFM-P/2-grupos e 31 objetos e 12 ciclos para o AFM-P/3t-grupos. Note também que no exemplar A4P-03 a solução obtida com o PCE é a mesma para as duas estratégias.

A Tabela 27 traz os resultados obtidos com as estratégias AFM-P/2-grupos e AFM-P/3t-grupos para os exemplares dos lotes duplos e triplos. Para estes exemplares o AFM-P/3t-grupos apresentou melhores soluções para sete exemplares de um total de quinze. Neste caso, ambas as estratégias apresentaram soluções competitivas entre si para cinco exemplares: A5P_Cmd-12, A5P_Cmd-15, A5P_Crd-12, Cmd_Crd-12 e A5P_A4P_A3P-03.

Em relação aos índices de perda, a utilização de padrões do tipo 3t-grupos atende melhor as exigências da indústria. Das vinte e duas soluções encontradas com o AFM-P/3t-grupos, apenas duas não apresentaram a perda média abaixo de 6%, ou seja, 9,1% das soluções, enquanto que das vinte e oito soluções obtidas com o AFM-P/2-grupos, quinze não atenderam a exigência da perda mínima, isto é, 53,57% das soluções.

Note que em alguns casos, como por exemplo para o exemplar A5P-25, apesar de o número de objetos ser o mesmo para ambas as estratégias, a perda utilizando a estratégia AFM-P/3t-grupos foi menor que a da estratégia AFM-P/2-grupos. Isto ocorre pois os itens produzidos além da demanda não estão sendo considerados no cálculo da perda.

Assim, pode ser que o AFM-P/3t-grupos tenha produzido mais itens além da demanda do que o AFM-P/2-grupos.

Exemplar	AFM-P/ 2-grupos					AFM-P/ 3t-grupos				
	Obj	Ciclos	Np	Pm	β	Obj	Ciclos	Np	Pm	β
A5P_Cmd-03	267	18	10	9,08%	-	256	18	9	5,99%	30%
	265	19	11	10,66%	50%	261	17	9	5,50%	50%
						264	16	8	5,49%	80%
A5P_Cmd-09	10	4	4	1,21%	-	10	3	3	0,99%	50%
	11	3	3	1,49%	50%					
A5P_Cmd-12	55	14	8	1,64%	50%	55	13	6	0,52%	80%
	56	12	6	1,57%	100%					
A5P_Cmd-15	123	32	10	8,38%	100%	120	33	9	5,29%	100%
A5P_Crd-03	210	16	11	5,87%	-	203	16	12	4,80%	30%
	208	18	13	7,04%	30%	204	15	11	3,67%	30%
	211	15	11	8,23%	50%	205	14	11	4,92%	50%
	209	17	12	8,42%	50%	220	13	10	10,25%	80%
	213	14	10	10,25%	50%					
	221	13	7	8,49%	80%					
A5P_Crd-12	35	8	4	4,29%	-	34	9	4	0,48%	-
	34	10	6	3,40%	80%					
A5P_Crd-15	103	28	11	6,56%	80%	103	31	11	4,52%	-
	102	29	11	6,00%	100%					
Cmd_Crd-03	208	13	7	8,43%	50%	191	13	7	2,56%	30%
						193	12	7	2,87%	80%
Cmd_Crd-12	72	16	7	1,35%	100%	70	18	10	1,06%	80%
						72	17	5	0,94%	100%
Cmd_Crd-15	109	28	7	4,70%	50%	110	30	6	5,38%	-
	108	30	9	4,21%	100%					
A5P_A4P_A3P-03	374	24	11	10,72%	-	374	23	11	6,93%	-
	378	22	10	10,73%	50%					
	375	23	10	10,47%	80%					
A5P_A4P_A3P-12	37	9	2	8,69%	-	35	8	2	3,70%	-
A5P_A4P_A3P-15	180	48	7	7,70%	-	172	45	7	2,99%	-
A5P_A4P_A3P-20	83	31	11	2,98%	100%	83	31	12	1,81%	80%
A5P_A4P_A3P-25	10	5	5	2,59%	80%	10	6	3	2,10%	80%

Tabela 27: AFM-P/2-grupos \times AFM-P/3t-grupos - Lotes Duplo e Triplo.

Note que utilizando o AFM-P/3t-grupos, foi possível encontrar soluções com até 17 objetos (Cmd_Crd-03) a menos do que utilizando o AFM-P/2-grupos, mantendo o mesmo número de ciclos da serra e de padrões de corte. Os exemplares A5P_Cmd-03 e A5P_Crd-03 também apresentaram soluções com o mesmo número de ciclos para ambas as estratégias, porém com menor número de objetos e de padrões de corte para as soluções obtidas com o AFM-P/3t-grupos. Soluções em que o número de objetos se mantém o mesmo para ambas as estratégias, mas o número de ciclos é menor utilizando o AFM-P/3t-grupos são obtidas nos exemplares A5P_Cmd-12 e A5P_Crd-12.

5.2.4 Resultados do AFM-P e da Fábrica V

Analisando os dados das Tabelas 26 e 27 notamos que não é possível distinguir qual das duas estratégias (AFM-P/2-grupos ou o AFM-P/3t-grupos) consegue fazer o melhor balanceamento entre número de ciclos da serra e número de objetos. Assim, tomamos as melhores soluções (não dominadas) encontradas para cada exemplar para fazer uma comparação com os resultados da realidade da empresa estudada. Esses dados são apresentados nas Tabelas 28 e 29 para os lotes simples e duplos/triplos, respectivamente. Apresentamos nestas tabelas, além do número de objetos (**Obj**), de ciclos (**Ciclos**), de padrões (**Np**) e da perda média (**Pm**), o tipo de padrão utilizado no AFM-P (**Tipo Pad**) e o β usado na solução encontrada.

Os resultados para os exemplares dos lotes simples (Tabela 28) mostram que em oito dos vinte e dois exemplares o AFM-P foi capaz de encontrar soluções melhores que a indústria no que diz respeito ao número de objetos e ciclos, sendo estes: A5P-03, A5P-12, A5P-20, A5P-25, A4P-12, A3P-20, Cmd-12 e Crd-03. Dentre estes exemplares, a perda média da indústria foi menor em metade deles. Porém, exceto a solução encontrada para o A5P-03 que apresentou perda de 6,59%, todas as outras soluções para estes exemplares obtiveram a perda menor que 6%. Os resultados para o A5P-03 e para o A4P-12 apresentaram o mesmo número de padrões que a indústria. Já os exemplares A5P-12, A5P-20 e A5P-25 obtiveram menos padrões de corte que a Fábrica V. Note para o exemplar A3P-20 que apesar da indústria conseguir uma solução com 3 padrões de corte a menos, o AFM-P apresenta para este exemplar uma solução com menos ciclos e o mesmo número de objetos. Observe, também, para o exemplar Cmd-12 que apesar do AFM-P apresentar uma solução com 3 padrões a menos que a indústria, este mantém o mesmo número de ciclos e reduz 1 objeto.

Em quatro exemplares (A5P-15, A4P-15, Cmd-03 e Crd-12) a indústria e o AFM-P empataram nos quesitos número de objetos e número de ciclos da serra. Com relação ao número de padrões a indústria apresentou 1 padrão a menos que o AFM-P nos exemplares A5P-15 e Crd-03 e o mesmo número que o AFM-P para os outros dois exemplares. Quanto a perda média, dentre estes seis exemplares, a indústria apresenta menor perda em quatro deles (A5P-09, A5P-15, A4P-15 e A3P-09).

Exemplar	Melhores Resultados						Indústria			
	Obj	Ciclos	Np	Pm	Tipo Pad	β	Obj	Ciclos	Np	Pm
A5P-03	134	9	7	6,59%	3t	30%	134	11	7	3,59%
A5P-12	10	2	1	4,36%	2G	100%	10,5	3	2	3,06%
A5P-15	57	17	7	3,75%	3t	30%	57	17	6	2,53%
A5P-20	31	12	6	1,26%	3t	100%	32	14	8	2,81%
	33	11	7	2,19%	2G	100%				
A5P-25	4	2	2	0,61%	3t	100%	4,5	4	3	2,88%
A4P-03	122	11	6	5,71%	2G/3t	-	124	10	5	3,56%
	128	10	6	6,80%	3t	50%				
	137	9	6	7,54%	3t	80%				
A4P-12	11	3	2	3,52%	3t	100%	12	3	2	3,06%
A4P-15	55	16	6	4,02%	3t	100%	55	16	6	2,02%
A4P-20	27	12	7	1,87%	2G	80%	26,5	12	6	2,86%
	29	11	6	2,09%	2G	80%				
A4P-25	3	2	2	2,46%	2G	100%	2,5	3	3	3,07%
A3P-03	117	8	7	12,32%	2G	100%	126	7	3	3,70%
A3P-12	15	3	2	3,55%	3t	-	14,5	4	2	3,06%
A3P-15	64	18	6	4,72%	3t	-	62,5	18	5	2,95%
A3P-20	29	11	9	3,49%	3t	100%	29	13	6	2,04%
A3P-25	4	2	2	0,07%	3t	100%	3	2	1	2,98%
Cmd-03	124	7	2	5,31%	3t	-	124	7	2	5,49%
Cmd-09	7	3	3	0,20%	3t	50%	6,5	2	1	2,49%
	10	2	2	0,21%	3t	80%				
Cmd-12	46	11	6	4,35%	2G	80%	46	13	6	2,18%
	45	13	9	1,21%	2G	100%				
Cmd-15	64	16	4	5,24%	3t	-	63,5	18	3	2,44%
Cr-d-03	72	5	3	3,94%	3t	-	74	5	2	5,33%
Cr-d-12	24	6	3	0,89%	3t	100%	24	6	2	1,15%
Cr-d-15	46	12	2	2,37%	3t	-	45,5	12	2	4,01%

Tabela 28: Melhores Soluções \times Indústria - Lote Simples.

A indústria apresenta soluções melhores que o AFM-P, em termos do número de objetos, em quatro exemplares: A3P-15, A3P-25, Cmd-09 e Crd-15, porém com o mesmo número de ciclos que o algoritmo AFM-P. No exemplar Crd-15, a diferença do número de objetos entre a solução obtida com o AFM-P e a da indústria é de 0,5 objeto, note que o algoritmo AFM-P não considera o uso do "1/2 padrão". Em seis exemplares (A4P-03, A4P-20, A4P-25, A3P-03, A3P-12 e Cmd-15) o AFM-P encontrou soluções não dominadas com relação à prática da indústria, isto é, soluções que melhoram o número de objetos (ou ciclos), mas não melhora o número de ciclos (ou objetos).

Para os lotes duplos e triplos (Tabela 29), o AFM-P encontrou melhores soluções (soluções que dominam as soluções da fábrica), com relação ao número de ciclos e objetos, em treze dos quinze exemplares, ou seja, em 86,67% dos exemplares.

Exemplar	Melhores Resultados						Indústria			
	Obj	Ciclos	Np	Pm	Tipo Pad	β	Obj	Ciclos	Np	Pm
A5P_Cmd-03	256	18	9	5,99%	3t	30%	258	18	9	3,97%
	261	17	9	5,50%	3t	50%				
	264	16	8	5,49%	3t	80%				
A5P_Cmd-09	10	3	3	0,99%	3t	50%	8,5	3	2	2,19%
A5P_Cmd-12	55	13	6	0,52%	3t	80%	56,5	16	8	1,88%
	56	12	6	1,57%	2G	100%				
A5P_Cmd-15	120	33	9	5,29%	3t	100%	120,5	35	9	2,30%
	123	32	10	8,38%	2G	100%				
A5P_Crd-03	203	16	12	4,80%	3t	30%	208	16	9	3,98%
	204	15	11	3,67%	3t	30%				
	205	14	11	4,92%	3t	50%				
	220	13	10	10,25%	3t	80%				
A5P_Crd-12	34	9	4	0,48%	3t	-	34,5	9	4	2,11%
	35	8	4	4,29%	2G	-				
A5P_Crd-15	103	28	11	6,56%	2G	80%	102,5	29	8	2,90%
	102	29	11	6,00%	2G	100%				
Cmd_Crd-03	191	13	7	2,56%	3t	30%	198	12	4	5,41%
	193	12	7	2,87%	3t	80%				
Cmd_Crd-12	70	18	10	1,06%	3t	80%	70	19	8	1,40%
	72	16	7	1,35%	2G	100%				
Cmd_Crd-15	109	28	7	4,70%	2G	50%	108	30	5	3,07%
	108	30	9	4,21%	2G	100%				
A5P_A4P_A3P-03	374	23	11	6,93%	3t	-	384	25	12	4,09%
	378	22	10	10,73%	2G	50%				
A5P_A4P_A3P-12	35	8	2	3,70%	3t	-	37	9	9	3,06%
A5P_A4P_A3P-15	172	45	7	2,99%	3t	-	176,5	49	10	3,20%
A5P_A4P_A3P-20	83	31	12	1,81%	3t	80%	87,5	37	18	2,72%
A5P_A4P_A3P-25	10	5	5	2,59%	2G	80%	10	7	5	3,01%

Tabela 29: Melhores Soluções \times Indústria - Lotes Duplo e Triplo.

Os resultados obtidos pela indústria são melhores que o AFM-P, com relação ao número de objetos e de ciclos da serra, apenas no exemplar A5P_Cmd-09. Porém, note que para o exemplar A5P_Cmd-09 a perda média encontrada com o resultado do AFM-P é 1,2% menor que o resultado da indústria. No exemplar Cmd_Crd-15 o AFM-P consegue encontrar a mesma solução que a indústria, porém com uma perda um pouco maior. Também, para este mesmo exemplar o AFM-P consegue ainda outra solução com dois ciclos a menos que a indústria, mas utilizando um objeto a mais.

Os resultados mostram que nem sempre uma solução com menos padrões de corte implica em menos ciclos da serra, como discutido no Capítulo 3. Veja, por exemplo, o exemplar A5P_Crd-03, em que o AFM-P encontra uma solução com 16 ciclos (igual a indústria) e 3 padrões de corte a mais. No exemplar Cmd_Crd-12, o AFM-P apresenta uma solução com o mesmo número de objetos que a indústria (70) porém com 1 ciclo a

menos e 2 padrões a mais. A maior diferença entre o número de padrões de corte das soluções obtidas com o AFM-P e da indústria foi de 7 no exemplar A5P_A4P_A3P-12. Neste exemplar o AFM-P obteve uma solução com 2 objetos, 1 ciclo e 7 padrões a menos que a indústria, porém com uma perda um pouco maior.

Com relação a perda média, apenas cinco soluções de um total de vinte e oito mostradas na Tabela 29 apresentaram a perda média acima de 6%.

Para os lotes duplos e triplos (Tabela 29) o AFM-P conseguiu melhorar a resposta da indústria em até cinco objetos, utilizando o mesmo número de ciclos (Cmd_Crd-03), e para o exemplar A5P_A4P_A3P-03 diminuir em 10 objetos e 2 ciclos a solução da Fábrica V. Note que as soluções apresentadas nas Tabelas 28 e 29 são não dominadas, e quase sempre, para melhorar um dos objetivos o outro sempre é sacrificado. Por exemplo, no exemplar A4P-03 dada a solução 122 objetos e 11 ciclos é possível reduzir dois ciclos da serra, porém para isto são sacrificados 15 objetos (137 objetos e 9 ciclos). Um outro exemplo é o A5P_Crd-15 em que reduzir 1 ciclo significa o aumento de 1 objeto.

O AFM-P mostrou-se mais vantajoso quando aplicado aos lotes duplos e triplos. Note na Tabela 10 que os exemplares dos lotes duplos e triplos, em geral, são compostos por mais itens que os lotes simples, e a demanda total é mais alta. Logo, o AFM-P tem maior escopo para fazer um balanceamento entre o número de objetos e ciclos da serra em cenários que envolvam muitos itens e demanda alta.

Uma outra vantagem que o AFM-P apresenta é a geração de um conjunto de soluções permitindo que o decisor escolha a melhor opção para um determinado momento. Por exemplo, no A5P_Crd-03, caso a indústria tenha uma alta demanda para ser atendida em um curto espaço de tempo, o gerente pode optar pela solução que apresenta o menor número de ciclos da serra (13) porém com o maior número de objetos (220). Caso haja disponibilidade de tempo e energia, a solução a ser escolhida pode ser a de menor número de objetos (203) porém com o maior número de ciclos da serra (16).

A ideia geral do AFM-P, conforme discutido no Capítulo 3, é fazer um balanceamento entre o número de objetos e de ciclos da serra de forma a encontrar a maior variedade possível de soluções mantendo o compromisso entre estes dois objetivos. Os resultados mostrados nas Tabelas 28 e 29 mostram a eficiência do AFM-P, uma vez que as soluções encontradas não aumentam excessivamente o número de objetos em sacrifício do número de ciclos e nem o número de ciclos aumenta exageradamente em detrimento da redução do número de objetos. O AFM-P conseguiu encontrar soluções próximas, e na maioria das vezes melhores que a prática da indústria tomada como estudo de caso. Cabe notar

ainda que não levamos em consideração algumas restrições tomadas pela indústria durante a geração dos padrões de corte o que resulta em uma desvantagem na comparação dos resultados com o AFM-P. Por exemplo, a Fábrica V utiliza retalhos e o "1/2 padrão de corte". Além disso, considera a utilização da capacidade total da máquina na elaboração dos padrões de corte, conforme discutido no Capítulo 4.

Os resultados discutidos neste capítulo mostram que existe escopo para melhoras no algoritmo AFM-P. Observamos que em alguns casos não foi possível modificar a solução do PCE seja por não efetuar nenhuma iteração (ou seja, não existe nenhum x_j abaixo de $Freq_Min$), ou por não conseguir gerar padrões que contribuam para um melhor balanceamento entre o número de objetos e o número de ciclos da serra. A primeira situação pode ser contornada com a modificação do critério de definição de $Freq_Min$ (ver Seção ??) e a segunda por uma reformulação do PCE-R de forma a permitir que as restrições de frequência mínima sejam incorporadas na geração de colunas. Uma abordagem deste tipo pode ser encontrada em [81]. Na próxima seção fazemos uma conclusão deste trabalho, descrevemos algumas propostas para melhorar o AFM-P e apresentamos propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 6

Conclusões e Propostas Futuras

Neste trabalho estudamos o problema de corte e empacotamento, com atenção especial para os principais conceitos teóricos sobre o problema de corte de estoque e sobre padrões de corte bidimensionais. Discutimos o conceito de redução do número de preparos na máquina de corte e fizemos uma revisão bibliográfica sobre a redução de padrões de corte e de de ciclos da serra, além de analisarmos a relação entre estes dois conceitos. Propomos um algoritmo (AFM-P - Seção 3.3) para resolver o problema de corte de estoque bidimensional utilizando o menor número possível de objetos e de ciclos da serra. Testamos o algoritmo AFM-P com os dados de uma fábrica de móveis característica do setor com o intuito de analisar o funcionamento do algoritmo e avaliar qualidade das soluções por ele obtidas com relação à realidade da indústria visitada. Os padrões de corte utilizados no algoritmo AFM-P foram do tipo n -grupos [93, 94, 95], mais especificamente padrões do tipo 2-grupos e 3t-grupos.

Ao realizar uma análise do AFM-P para os exemplares A5P-03 e A3P-20 pudemos fazer algumas observações interessantes sobre seu comportamento. Nem sempre a geração de colunas durante a resolução do PCE-R (3.59)-(3.64) melhora a solução atual, sendo que em alguns casos somente a reotimização já é capaz de encontrar melhores soluções. Lembramos que este tipo de comportamento já era esperado, devido à não incorporação no subproblema *price* dos duais das novas restrições acrescentadas. Pudemos observar que a maioria das soluções não dominadas são encontradas na última iteração do AFM-P e que os exemplares que possuem maior variedade de itens e a maior demanda apresentaram um maior número de restrições acrescentadas, não sendo possível notar nenhuma regularidade quanto a este número. Impor a utilização de 30% da capacidade da serra ($\beta = 30\%$) não permitiu melhorar a solução do PCE, isto porque com valores pequenos de β a maioria das soluções x_j (senão todas), já estão acima de $Freq_Min$. Além disso, uma variedade

maior de soluções não dominadas foi encontrada com a utilização de padrões do tipo 2-grupos. Em algumas iterações são encontradas soluções com o mesmo número de ciclos e objetos, e isto ocorre porque o AFM-P faz apenas um rearranjo entre os padrões de corte gerados, de forma que os padrões para os quais foram acrescentadas restrições de frequência mínima não sejam utilizados na nova solução. Uma alternativa para contornar estes tipos de situações seria a utilização de outro critério para definição de $Freq_Min$.

Comparando as soluções encontradas com as estratégias AFM-P/2-grupos e AFM-P/3t-grupos não é possível distinguir qual delas é melhor com relação à redução do número de objetos e dos ciclos da serra. É possível notar apenas que utilizando padrões do tipo 3t-grupos conseguimos um índice de perda média menor, já que estes padrões conseguem um melhor aproveitamento do objeto.

Tomando as melhores soluções entre as duas estratégias (AFM-P/2-grupos e AFM-P/3t-grupos) e comparando estes resultados com a realidade da indústria visitada podemos notar que o AFM-P conseguiu encontrar soluções próximas e, na maioria das vezes melhores, no que diz respeito ao número de ciclos e objetos, sendo pior nos exemplares em que a indústria utiliza o “1/2 padrão de corte”. Além disso, com base nestas soluções, conseguimos constatar que o AFM-P cumpre o seu objetivo de fazer um balanceamento entre o número de objetos e de ciclos da serra de forma a encontrar a maior variedade possível de soluções mantendo o compromisso entre estes dois objetivos. Pudemos observar também que o AFM-P tem maior escopo para fazer um balanceamento entre o número de objetos e ciclos da serra em cenários que envolvam muitos itens e demanda alta. Uma outra vantagem que o AFM-P apresenta é a geração de um conjunto de soluções permitindo que o decisor escolha a melhor opção para um determinado momento.

Sugestões para melhorias no Algoritmo AFM-P

O algoritmo AFM-P pode ser melhorado considerando uma modificação no critério de definição de $Freq_Min$, como pode ser observado no Exemplo 6.0.1.

Exemplo 6.0.1. *Suponhamos que após a resolução de um problema de corte de estoque, foram encontrados os seguintes resultados $x_1 = 24, 3$, $x_2 = 31$ e $x_3 = 28$. Após o arredondamento feito por $x_j = \lceil x_j \rceil$, as soluções obtidas são $x_1 = 25$, $x_2 = 31$ e $x_3 = 28$. Suponha ainda que $Cap = 4$. Calculando os ciclos da serra de cada padrão de acordo com (2.58), obtemos: $y_1 = 7$, $y_2 = 8$ e $y_3 = 7$. Logo, para cortar todos os objetos de acordo com o padrão de corte 1 são necessários 6 ciclos de capacidade completa (24 obje-*

tos) e 1 ciclo de capacidade incompleta utilizando apenas 25% da capacidade da máquina (1 objeto). Da mesma forma, para o padrão de corte 2 são necessários 7 ciclos de capacidade completa (28 objetos) e 1 ciclo de capacidade incompleta utilizando 75% de Cap (3 objetos), e para o corte do padrão de corte 3 serão precisos 7 ciclos de capacidade completa (28 objetos). Assim, se $\beta = 50\%$, de acordo com o algoritmo AFM-P, teríamos $Freq_Min = 50\% * 4 = 2$. Logo todas as soluções do problema de corte de estoque já estariam acima da frequência mínima imposta, impossibilitando a execução de qualquer iteração do algoritmo AFM-P. Porém, se considerarmos a frequência mínima para os padrões baseado nos ciclos da serra, a utilização do padrão de corte 1 estaria abaixo da frequência mínima (50% de Cap), já que este produz um ciclo utilizando apenas 1 objeto, que corresponde a 25% de Cap .

Para contornar a situação descrita no Exemplo 6.0.1, o teste para definição das restrições de frequência mínima no algoritmo AFM-P pode ser modificado para verificar se existem ciclos de capacidade incompleta, ou seja, se:

$$\left(\frac{x_j}{Cap} - \left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor \neq 0 \right) \quad (6.1)$$

e, ainda se a porcentagem de utilização do ciclo é menor que β , isto é, se existe x_j tal que:

$$\left(\frac{x_j}{Cap} - \left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor \right) < \beta. \quad (6.2)$$

Isto é, se algum ciclo da serra referente a uma variável x_j utiliza menos que $\beta\%$ da capacidade da máquina (Cap), e além disso, se x_j não determina apenas ciclos de capacidade completa, então a frequência mínima para x_j deve ser:

$$\left(\left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor + \beta \right) * Cap. \quad (6.3)$$

Porém, impor que x_j seja no mínimo o valor dado em (6.3) pode excluir a possibilidade de que a frequência de uso deste padrão possa ser reduzida de forma a obter ciclos de capacidade completa. Assim, uma maneira interessante de aumentar a possibilidade do uso de ciclos completos seria permitir que a frequência mínima do padrão de corte j , que não satisfizer a condição (6.1) esteja no intervalo:

$$I_1 \cup I_2, \quad (6.4)$$

em que,

$$I_1 = \left[\max \left\{ \left(\left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor - 1 + \beta \right) * Cap, 0 \right\}, \left(\left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor \right) * Cap \right], \quad (6.5)$$

e,

$$I_2 = \left[\left(\left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor + \beta \right) * Cap, \infty \right]. \quad (6.6)$$

Para modelar a situação em que a variável x_j deve estar ou no intervalo I_1 (6.5) ou no I_2 (6.6), podemos fazer uso de restrições disjuntivas (ver [87]).

Sejam $l_0 = \left(\left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor - 1 + \beta \right) * Cap$ e $l_1 = \left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor * Cap$ e $l_2 = \left(\left\lfloor \frac{x_j}{Cap} \right\rfloor + \beta \right) * Cap$. Dessa forma, se x_j não satisfaz a condição (6.1), as restrições de frequência mínima que devem ser acrescentadas ao PCE são

$$\lambda_j^1 + \lambda_j^2 = 1, \quad \lambda_j^1, \lambda_j^2 \in \{0, 1\}, \quad (6.7)$$

$$-M\lambda_j^1 + l_0 \leq x_j \leq l_1 + M(1 - \lambda_j^2), \quad (6.8)$$

e,

$$x_j \geq -M\lambda_j^2 + l_2. \quad (6.9)$$

Note que $\lambda_j^1 = 1$ implica em $\lambda_j^2 = 0$. Assim, a restrição (6.8) torna-se redundante e a restrição (6.9) ativa, de forma a impor que $x_j \in I_2$. Caso contrário, ou seja se $\lambda_j^2 = 1$, então $\lambda_j^1 = 0$ e a restrição (6.9) será redundante e, $x_j \in I_1$.

O Exemplo 6.0.2 é continuação do Exemplo 6.0.1 e mostra como ficariam as restrições de frequência mínima que poderiam ser adicionadas ao problema.

Exemplo 6.0.2. *Para o padrão x_1 temos que:*

$$\left(\frac{x_1}{Cap} - \left\lfloor \frac{x_1}{Cap} \right\rfloor \right) = \left(\frac{25}{4} - \left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor \right) = (6, 25 - 6) = 0, 25 < 0, 5 = \beta.$$

Logo x_5 não possui apenas ciclos de capacidade completa e ainda existe um ciclo que utiliza apenas 25% de Cap, que é menos que o mínimo exigido de 50%. De acordo com (6.5) e (6.6), os valores de I_1 e I_2 , neste caso devem ser:

$$I_1 = [(6 - 1 + 0, 5) * 4; 6 * 4] = [22; 24] \quad e \quad I_2 = [26; \infty[,$$

ou seja, x_1 deve ser tal que:

$$22 \leq x_1 \leq 24 \quad \text{ou} \quad x_1 \geq 26.$$

Assim, as restrições de frequência mínima que devem ser adicionadas ao PCE para modelar esta situação são:

$$\begin{aligned} \lambda_1^1 + \lambda_1^2 &= 1, & \lambda_1^1, \lambda_1^2 &\in \{0, 1\}, \\ -M\lambda_1^1 + 22 &\leq x_1 \leq 26 + M(1 - \lambda_1^2), \\ x_1 &\geq -M\lambda_1^2 + 26. \end{aligned}$$

Impor que um padrão de corte seja utilizado com ciclos com capacidade incompleta de no mínimo $\beta\%$ de Cap pode implicar na produção de itens em excesso e conseqüentemente a utilização desnecessária de objetos. Para contornar esta situação, o número de objetos utilizados desnecessariamente pode ser reduzido aplicando, após o arredondamento pelo método BRURED, a Heurística 2 de Yanasse [89] (descrita da Seção 3.3), à partir do segundo passo, para pós-processar as soluções encontradas em cada iteração do algoritmo.

Propostas de Trabalhos Futuros

- Implementar novos critérios de definição de $Freq_Min$, conforme discutido anteriormente;
- Obter uma reformulação do PCE-R de maneira a incorporar os duais associados às restrições de frequência mínima na resolução do subproblema de geração de colunas;
- Considerar o conceito de sobras aproveitáveis (*e.g.* [19]) no problema de corte de estoque com o objetivo de minimizar o número de objetos e do número de ciclos da serra.

Referências Bibliográficas

- [1] ABIMÓVEL. Brasil Móveis 2008: Relatório Setorial da Indústria de Móveis no Brasil. *Associação Brasileira das Indústrias do Mobiliário*, 2008.
- [2] ABID. Relatório de Acompanhamento Setorial: Indústria Moveleira. Volume I. *Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial e Núcleo de Economia Industrial e da Tecnologia do Instituto de Economia da Universidade Estadual de Campinas - Unicamp*, Junho 2008.
- [3] ANDRADE, M.S.F. de; SOUZA, S.R.; TEMPONI, E.C.C. Um algoritmo evolutivo híbrido aplicado a solução do problema de corte bidimensional guilhotinado. *In: XLI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2009, Porto Seguro-BA. Anais, 2009.
- [4] ARAUJO, S.A. de; HEIS, A.; CONSTANTINO, A.A.; POLDI, K.C. A evolutionary algorithm to the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths. *In: XII Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación de Operaciones y Sistemas - CLAIO*, Montevideo, 2006. Anais do XII CLAIO, 2006.
- [5] ARENALES, M.N.; MORABITO, R.; YANASSE, H.H. Problemas de corte e empacotamento. *Livro-texto de Mini-curso do XXXVI SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, São João del-Rei-MG, 2004.
- [6] ARROYO, J.E.C. *Heurísticas e Metaheurísticas para Otimização Combinatória Multiobjetivo*. Tese de Doutorado, UNICAMP, 2002.
- [7] ALVES, C.; CARVALHO, J.M.V. A branch-and-price-and-cut algorithm for the pattern minimization problem. *RAIRO Operations Research*. v. 42, p. 2944-2954, 2009.
- [8] ALVES, C.; CARVALHO, J.M.V. A stabilized branch-and-price-and-cut algorithm for the multiple length cutting stock problem. *Computers & Operations Research*. v. 35, p. 1315-1328, 2008.
- [9] ALVES, C.; CARVALHO, J.M.V. Accelerating column generation for variable sized bin-packing problems. *European Journal of Operational Research*. v. 183, p. 1333-1352, 2007.
- [10] ALVES, C.; CARVALHO, J.M.V. New lower bounds based on column generation and constraint programming for the pattern minimization problem. *Computers and Operations Research*. v. 36, p. 435-453, 2008.
- [11] ALVES, C.; MACEDO, R.; VALÉRIO DE CARVALHO, J.M. Arc-flow model for the two-dimensional guillotine cutting stock problem. *Computers & Operations Research* 37. v. 37, p. 991-1001, 2010.

- [12] BARNHART, C.; JOHNSON, E.L.; E.L.; N.G.L.; S.M.W.P.; V.P.H. Branch and price: column generation for solving huge integer programs. *European Journal of Operations Research*. v. 46, p. 316-329, 1998.
- [13] BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J.; HANIF, D.S. *Linear Programming and Network Flows*, 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [14] BELOV, G. *Problems, Models and Algorithms in One- and Two-Dimensional Cutting*. Tese de Doutorado, Desdren University of Technology, 2004.
- [15] BELOV, G.; SCHEITAUER, G. A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *European Journal of Operational Research*. v. 171, p. 85-106, 2006.
- [16] BERTSEKAS, D.P. *Nonlinear Programming*, Athena Publishing, 1999.
- [17] CAVALI, R. *Problemas de corte e empacotamento na indústria de móveis: Um estudo de caso*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2004.
- [18] CAVALI, R.; RANGEL, S. Production Planning: A Cutting Stock Problem In The Furniture Industry. In: *XII Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación de Operaciones y Sistemas - CLAIO*, Havana, 2004. Anais do XII CLAIO, 2004.
- [19] CHERRI, A.C. *Algumas extensões do problema de corte de estoque com sobras de material aproveitáveis*. Tese de Doutorado, USP, 2009.
- [20] CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An Algorithm for Two-Dimensional Cutting Problems. *Operations Research*. v. 25, p. 30-44, 1977.
- [21] CHU, C; ANTONIO, J. Approximation algorithms to solve real-life multicriteria cutting stock problems. *Operations Research*, v. 47, p. 495-508, 1999.
- [22] CHVÁTAL, V. *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [23] Manual do Corte Certo. Disponível em <http://www.cortecerto.com>. (última visita em 20/03/2010).
- [24] CUI, Y. Generating optimal T-shape cutting patterns for circular blanks. *Computers and Operations Research*. v. 32, p. 143-152, 2005.
- [25] CUI, Y. An exact algorithm for generating homogenous T-shape cutting patterns. *Computers and Operations Research*. v. 34, p. 1107-1120, 2007.
- [26] CUI, Y. Strips minimization in two-dimensional cutting stock of circular items. *Computers and Operations Research*. v. 37, p. 621-629, 2010.
- [27] DANTZIG, G.B.; WOLFE, P. The decomposition algorithm for linear programming. *Operations Research*. v. 8, p. 101-111, 1960.
- [28] DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. England: John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- [29] DESAULNIERS, G.; DESROSIERS, J.; SOLOMON M.M. *Column Generation*, GERAD 25th anniversary series. New York: Springer, 2005.

- [30] DIEGEL, A.; MILLER, G.; MONTOCCHIO, E.; VAN SCHALKWYK, S.; DIEGEL, O. Enforcing minimum run length in the cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*. v. 171, p. 708-721, 2006.
- [31] DU MERLE, O.; VILLENEUVE, D.; DESROSIERS, J.; HANSEN, P. Stabilized column generation. *Discrete Mathematics*. v. 194, p. 229-237, 1999.
- [32] DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. v. 44, p. 145-159, 1990.
- [33] DYCKHOFF, H.; FINKE, U. *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Springer-Verlag Co, 1992.
- [34] FACCIO, A.P.; RANGEL, S. Geração de padrões de corte n -grupos para a indústria moveleira. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*. v. 27, p. 41-57, 2009.
- [35] FACCIO, A.P. *Propostas de Solução para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional de uma Fábrica de Móveis de Pequeno Porte*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2008.
- [36] FIGUEIREDO, A.; RANGEL, S. O problema de corte de estoque em indústria de móveis de pequeno e médio portes. *Pesquisa Operacional*. v. 28, n. 3, p. 451-472, 2008.
- [37] FIGUEIREDO, A. *Análise de produtividade de padrões de corte na indústria de móveis*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2006.
- [38] FOERSTER, H.; WÄSHER, G. Pattern Reduction in one-dimensional cutting stock problem. *International Journal of Production Research*, v. 38, p. 1657-1676, 2000.
- [39] GAREY, M. R.; JOHNSON, D.S. *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman & Company, 1979.
- [40] GILMORE, P.C.; GOMORY, R.E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*. v. 9, p. 849-859, 1961.
- [41] GILMORE, P.C.; GOMORY, R.E. A linear programming approach to the cutting-stock problem - part ii. *Operations Research*. v. 11, p. 863-888, 1963.
- [42] GILMORE, P.C.; GOMORY, R.E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensional. *Operations Research*. v. 14, p. 1045-1074, 1965.
- [43] HAESSLER, R.W. Controlling Cutting Pattern Changes in One-Dimensional Trim Problems. *Operations Research*. v. 23, n. 3, p. 483-493, 1975.
- [44] HIFI, M.; M'HALLAH, R.; SAADI, T. Approximate and exact algorithms for the double-constrained two-dimensional guillotine cutting stock problem. *Computational Optimization and Applications*. v. 42, p. 303-326, 2009.
- [45] HIXMAN, A.I. The trim loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research* v. 5, p. 8-18, 1980.

- [46] KANTOROVICH, L.V. Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho em Russo datado de 1939). *Management Science* v. 6, p. 366-422, 1960.
- [47] KATSURAYAMA, D. M.; YANASSE, H. H. Um algoritmo para geração de padrões tabuleiros exatos a partir de uma combinação dada de itens. In *XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, São João del-Rei, 2004. Anais do XXXVI SBPO, 2004.
- [48] LASDON, L.S. *Optimization theory for large systems*. New York: Dover Publications, 2002.
- [49] LIANG, D.; WILHELM, W.E. A generalization of column generation to accelerate convergence. *Mathematical Programming*. v. 122, p. 349-378, 2010.
- [50] LODI, A.; MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming* v. 94, p. 257-278 2003.
- [51] LOPES, A.M. *Uma abordagem multiobjetivo para o problema de corte de estoque unidimensional*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2009.
- [52] MARCOTE, O. The cutting stock problem and integer rounding. *Mathematical Programming*. v. 33, n. 1, p. 82-92, 1985.
- [53] MARCOTE, O. An instance of the cutting stock problem for which the rounding property does not hold. *Operations Research Letters*. v. 4, n. 5, p. 39-243, 1986.
- [54] MARTELLO, S.; TOTH, P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. John Wiley & Sons, 1990.
- [55] MENEZES, M.A.F. Programação linear, 2006. Em elaboração. LabPL UCG - Universidade Católica de Goiás. (Último acesso: 18/12/2009).
- [56] MICHEL S.; PERROT N.; VANDERBECK F. Knapsack problems with setups. *European Journal of Operational Research*. v. 196, p. 909-918, 2009.
- [57] MORABITO, R. ARENALES, M.N. An AND/OR-graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*. v. 84, p. 599-617, 1995.
- [58] MORABITO, R.; ARENALES, M.N. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach. *European Journal of Operational Research*. v. 94, p. 548-560, 1996.
- [59] MORABITO, R. ARENALES; M.N. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research*. v. 38, p. 2725-2742, 2000.
- [60] MORABITO, R.; BELLUZO, L. Optimising the cutting of wood fibre plates in the hardboard industry. *European Journal of Operational Research*. v. 183, p. 1405-1420, 2007.

- [61] MORABITO, R.; GARCIA, V. The cutting stock problem in a hardboard industry: a case study. *Computers Operations Research*. v. 25, p. 469-485, 1998.
- [62] MORETTI, A.C.; SALLES NETO, L.L. Nonlinear cutting stock problem model to minimize the number of different patterns and objects. *Computational and Applied Mathematics*. v. 27, n. 1, p. 61-78, 2008.
- [63] MOSQUERA, G.P. *Contribuições para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional na Indústria Moveleira*. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2007.
- [64] MOSQUERA, G.P.; RANGEL, S. Redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional na indústria de móveis. In: *XXX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, Florianópolis, 2007. Anais do XXX CNMAC, 2007.
- [65] OLIVEIRA, J.F.; WÄSCHER, G. (Eds.). Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*. v. 183, 2007.
- [66] POLDI, K.C. *Algumas extensões do problema de corte de estoque*. Dissertação de Mestrado, USP, 2003.
- [67] RANCK JR., R. *Desenvolvimento de alguns métodos de solução para o problema de redução de ciclos da serra*. Dissertação de Mestrado, INPE, 2008.
- [68] RANGEL, S. *O problema de corte bidimensional*. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1989.
- [69] RANGEL, S.; LEMOS, R.B. Manual do sistema CorteBI - Interface Gráfica. Departamento de Ciências de Computação e Estatística - DCCE/UNESP, São José do Rio Preto, 2008 (Relatório Técnico).
- [70] RANGEL, S.; MOSQUERA, G.P.; YANASSE, H.H. *The two-dimensional cutting stock problem with saw machine set ups*. In: *EURO 2009 - European Conference on Operational Research*, 2009, Bonn. Book of Abstracts. Bonn : EURO - Association of European Operational Research Societies, 2009. v. único, p. 154-154.
- [71] RIEHME, J.; SCHEITHAUER, G.; TERNO J. The solution of two-stage guillotine cutting stock problems having extremely varying order demands. *European Journal of Operational Research*. v. 91, p. 543-552, 1996.
- [72] RIETZ, J.; SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. Tighter bounds for the GAP and non-IRUP constructions in the one-dimensional cutting stock problem. *Optimization* v. 51, p. 927-963, 2002.
- [73] SALLES NETO, L.L. *Modelo Não-Linear para Minimizar o Número de Objetos Processados e o Setup num Problema de Corte Unidimensional*. Tese de Doutorado, UNICAMP, 2005.
- [74] SALLES NETO, L.L.; MORETTI, A.C.; GOLFETO, R.R. Post-optimization of the number of setups in the cutting stock problem. In: *XLI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto Seguro-BA, 2009. Anais do XLI SBPO, 2009.

- [75] STEUER, R.E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. Florida: Krieger Publishing Company, 1986.
- [76] SCHEITHAUER, G.; TERNO, J. The modified integer Round-up property of the one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*. v. 84, p. 562-571, 1995.
- [77] SILVA E. M.; SANTOS, F.C.A. Análise do alinhamento da estratégia de produção com a estratégia competitiva na indústria moveleira. *Revista Produção*. v. 15, n. 2, p. 286-299, 2005.
- [78] UMETANI, S.; YAGIURA, M.; IBARAKI, T. One-dimensional cutting stock problem to minimize the number of different patterns. *European Journal of Operational Research*. v. 146, p. 388-402, 2003.
- [79] UMETANI, S.; YAGIURA, M.; IBARAKI, T. One-Dimensional Cutting Stock Problem with a Given Number of Setups: A Hybrid Approach of Metaheuristics and Linear Programming. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*. v. 5, p. 43-64, 2006.
- [80] VANCE, P.H. Branch-and-price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem. *Computational Optimization and Applications*. v. 9, p. 221-228, 1998.
- [81] VANDERBECK, F. Exact algorithm for minimizing the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research*. v. 48, p. 915-926, 2000.
- [82] VANDERBECK, F. Branching in branch-and-price: a generic scheme. *Mathematical Programming*. p. 1-46, 2010.
- [83] VASKO, F.J.; NEWHART, D.D.; STOTT JR, K.L.; WOLF, F.E. Fiddler on the Roof: Balancing Trim Loss and Setups. *OR Insight*. v. 13, n. 3, p. 9-14, 2000.
- [84] WANG,P.Y.; WASCHER,G.,(Eds.), Cutting and packing, *European Journal of Operation Research*. v. 141, 2002.
- [85] WÄSCHER, G.; GAU, T. Heuristics for the Integer One-dimensional Cutting Stock Problem: a computational study. *OR Spektrum*. v. 18, p. 131-144, 1996.
- [86] WÄSCHER, G.; HAUBNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research* v. 183, p. 1109-1130, 2007.
- [87] WILLIAMS, H.P. *Model Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons, 1990.
- [88] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. New York: John Willey & Sons, 1998.
- [89] YANASSE, H.H. A note on the minimization of the number of cutting cycles problem. *In XI SPOLM - XI Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha*, Rio de Janeiro, 2008. Livro de Resumos do XI SPOLM, v. 1, p. 24-24, 2008.
- [90] YANASSE,H.H.; HARRIS,R.G.; ZINOBER, A.S.I. Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes. *Journal Operations Research Society*. v. 42, p. 673-683, 1991.

- [91] YANASSE, H.H.; HARRIS, R.G.; ZINOBER, A.S.I. Uma heurística para redução do número de ciclos da serra no corte de chapas. In *XIII ENEGEP - Congresso Latino Americano de Engenharia Industrial*, São Carlos, 1993. Anais do XII ENEGEP, v.2, p. 879-885, 1993.
- [92] YANASSE, H.H.; LIMEIRA, M.S. A hybrid heuristic to reduce the number of different patterns in cutting stock problems. *Computers and Operations Research*. v. 33, p. 2744-2756, 2006.
- [93] YANASSE, H.H.; MORABITO, R. Linear models for one-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research*. v. 44, p. 3471-3491, 2006.
- [94] YANASSE, H.H.; MORABITO, R. A note on linear models for two-group and three-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research* 46. n. 1, 6189-6206, (2008).
- [95] YANASSE, H.H.; MORABITO, R.; ARENALES, M.N. Linear and non-linear models for staged two-dimensional guillotine cutting problems. In: *A. Bortfeldt, J. Homberger, H. Kopfer, G. Pankratz, R. Strangmeier. (Org.). Intelligent Decision Support*. Wiesbaden: Gabler-Verlag Springer. v. 1, p. 69-88, 2008.

ANEXO A

Método Simplex Revisado

Para melhor compreensão do processo de geração de colunas para resolução do problema de corte de estoque descrito no Capítulo 2 apresentamos nesta seção uma breve revisão sobre o Método Simplex Revisado.

Considere a relaxação linear do problema (2.12)-(2.14) escrita em notação matricial:

$$\min Z_{RL} = c^T x \quad (\text{A.1})$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \geq b \quad (\text{A.2})$$

$$x \geq 0, \quad j = 1 \dots, n, \quad (\text{A.3})$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\text{posto}(A) = m$, ou seja, supomos que sempre existam m colunas linearmente independentes na matriz A . Observe que, como discutimos no Capítulo 2, para o problema de corte sempre existirão m colunas linearmente independentes na matriz A , formadas pelos padrões homogêneos, o que neste caso garante $\text{posto}(A) = m$. Note que o problema (A.1)-(A.3) é o mesmo dado por (2.29)-(2.31).

Sem perda de generalidade, consideremos a restrição (A.2) com o sinal de desigualdade (\geq) trocado pelo sinal de igualdade ($=$). A solução geral do sistema em (A.2)-(A.3) pode ser descrita como segue. Considere uma partição das colunas de A : $A = [B, N]$, também chamada de partição básica. A matriz B , onde $B \in \mathbb{R}^m$, é chamada de matriz básica e é composta por m colunas linearmente independentes da matriz A , ou seja é inversível, e a matriz $N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ é chamada de matriz não-básica. Esta partição nas colunas da matriz A define também uma partição nos vetores x e c : $x = [x_B, x_n]^T$ e $c = [c_B, c_N]^T$, onde x_B é chamado vetor das variáveis básicas e x_N vetor das variáveis não-básicas (ou variáveis livres). Quanto a partição no vetor c , c_B e c_N representam os custos associados a variáveis básicas e não-básicas respectivamente.

Reescrevendo o problema (A.1)-(A.3) com as partições $x = [x_B, x_n]^T$ e $c = [c_B, c_N]^T$,

definidas anteriormente, temos:

$$\min Z_{RL} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \quad (\text{A.4})$$

$$s.a. \quad Bx_B + Nx_N = b \quad (\text{A.5})$$

$$x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

A solução geral do sistema de equações que define as restrições pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \quad (\text{A.7})$$

Uma solução particular é dada quando $x_N^0 = 0$ e $x_B^0 = B^{-1}b$, que é chamada de solução básica. Se $x_B = B^{-1}b \geq 0$ a solução básica e a partição básica são ditas factíveis.

Reescrevendo a função objetivo (A.5) em termos da solução (A.7) obtemos:

$$\begin{aligned} Z_{RL} &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Sendo $x^0 = [x_B^0, x_N^0]$, observe que $Z_{RL}(x^0) = c_B^T B^{-1}b = c_B^T x_B^0$ é o valor da função objetivo para a solução básica. O vetor $\pi \in \mathbb{R}^m$, dado por $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ é o vetor das variáveis duais, também chamado de vetor multiplicador simplex. Substituindo $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ em (A.8) temos:

$$\begin{aligned} Z_{RL} &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ &= \pi^T b + (c_N^T - \pi^T N)x_N \\ &= f(x^0) + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \pi^T A_j)x_j, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde A_j corresponde à coluna j de A e \mathcal{N} é o conjunto dos índices das colunas da matriz N (colunas não-básicas de A). Os valores

$$\hat{c}_j = c_j - \pi^T A_j, \quad j \in \mathcal{N}, \quad (\text{A.10})$$

são chamados custos relativos das variáveis não-básicas. Se $\hat{c}_j \geq 0$, então π é uma solução básica dual-factível, ou seja, é ótima.

A estratégia simplex é definida como uma alteração da solução básica, através da perturbação de uma componente de x_N . Como o objetivo é minimizar Z_{RL} e $x_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, a variável x_k a ser perturbada deve ser tal que $\hat{c}_k = c_k - \pi^T A_k < 0$. Fazendo

$x_k = \varepsilon$ e $x_j = 0$, $j \in \mathcal{N} - \{k\}$, a função objetivo torna-se:

$$Z_{RL} = Z_{RL}(x^0) + \underbrace{(c_k - \pi^T A_k)}_{\widehat{c}_k} \varepsilon. \quad (\text{A.11})$$

Note que a função objetivo (A.11) decresce quando ε cresce, com taxa negativa \widehat{c}_k . Logo, a variável a ser perturbada deve ser a de menor custo relativo (esta escolha é conhecida como critério de *Dantzig* [13]). Com a alteração das variáveis não básicas, as variáveis básicas também são alteradas resultando em uma nova solução dada por:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}x_N = x_B^0 - \underbrace{B^{-1}A_k}_{y} \varepsilon = x_B^0 - \varepsilon y, \quad (\text{A.12})$$

$$x_N = \varepsilon e_k, \quad (\text{A.13})$$

onde $y = B^{-1}A_k$ e $e_k^T = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, com 1 na k -ésima posição.

Note que o vetor y define uma perturbação da solução básica e é chamado direção simplex. Como a função objetivo (A.11) decresce quando ε cresce, é preciso determinar o maior valor possível de ε que mantenha a solução perturbada factível. Impondo que $x_B \geq 0$ temos que $\varepsilon \leq \frac{x_{B_i}^0}{y_i}$, podemos determinar o maior valor possível para x_k na direção encontrada:

$$\varepsilon = -\frac{x_{B_i}^0}{y_i} = \min \left\{ -\frac{x_{B_i}^0}{y_i} \mid y_i < 0, i = 1, \dots, m \right\}, \quad (\text{A.14})$$

onde $x_{B_i}^0$ é a i -ésima componente de x_B^0 . Para esta escolha de ε a l -ésima componente de x_B se anula, enquanto que apenas uma variável de x_N tornou-se positiva: $x_k = \varepsilon > 0$. Isto sugere uma nova partição básica $A = [B' N']$, na qual a l -ésima coluna de B é dada por $A_k \in N$. Esta nova partição básica é primal-factível. Note que se $y_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, então (A.14) não se aplica, ou seja, não há limitante superior para ε , o que significa que a solução perturbada pela estratégia simplex será sempre factível, para todo valor de $\varepsilon \geq 0$. Como a função objetivo decresce com o valor de ε , então $Z_{RL} \rightarrow \infty$, com $\varepsilon \rightarrow \infty$. Do que pode-se concluir que o problema não tem solução ótima.

O processo continua até que a coluna k escolhida tenha custo relativo não-negativo, ou seja, $\widehat{c}_k \geq 0$, pois neste caso a coluna não será candidata a entrar na base, uma vez que o valor da função objetivo será aumentado (ou inalterado) se somarmos a ela um número não-negativo. Para mais detalhes sobre o Método Simplex Revisado, veja [22] e [13].

ANEXO B

Otimização Multiobjetivo e Critérios de Dominância

Nesta seção fazemos uma breve revisão sobre otimização multiobjetivo e apresentamos os conceitos de soluções dominadas e não dominadas utilizados no Capítulo 3.

Um problema de otimização multiobjetivo consiste, geralmente, em otimizar (maximizar ou minimizar) simultaneamente mais que um objetivo satisfazendo um conjunto de restrições. Muitas vezes os objetivos envolvidos são conflitantes, isto é, priorizando um, o outro é penalizado. Dessa forma, não existe uma única solução que otimize cada um dos objetivos, mas sim um conjunto de soluções eficientes, em que nenhuma solução é melhor que a outra para todos os objetivos, uma vez que o *trade-off* entre os objetivos conflitantes é importante. O decisor é o responsável pela escolha de uma solução particular eficiente que pondere os objetivos globais do problema. De maneira geral, um problema de otimização multiobjetivo pode ser definido como [28]:

$$\min \text{ (ou } \max) \quad f_t(x) \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{B.1})$$

$$\text{s.a.} \quad g_k(x) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{B.2})$$

$$h_v(x) = 0 \quad v = 1, 2, \dots, V \quad (\text{B.3})$$

$$x_i^I \leq x_i \leq x_i^S \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{B.4})$$

A solução x é um vetor com n variáveis de decisão $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. O conjunto de restrições (B.4) impõe um limitante inferior x_i^I e um limitante superior x_i^S , para os valores que x_i pode assumir. Associado a este problema podem existir ainda K restrições de desigualdades (B.2) e V restrições de igualdade (B.3). O conjunto de todas as soluções factíveis é denominado região factível ou espaço de busca e é denotado por S .

Note que o problema (B.1)-(B.4) possui T funções objetivos. Uma das principais

diferenças em relação aos problemas com apenas uma função objetivo, é o fato de que, no caso multiobjetivo, as funções objetivo constituem um espaço multidimensional [28].

Quando duas soluções são comparadas entre si e não podemos afirmar qual delas é a melhor em relação aos objetivos envolvidos, dizemos que estas soluções são não dominadas, uma em relação a outra. Seja um conjunto P finito de soluções retirado do espaço de busca S . Fazendo uma comparação entre todas as possíveis combinações par a par, podemos encontrar as soluções que são não dominadas com relação a todas as outras. No fim dessas comparações, podemos obter dois conjuntos disjuntos P' e P'' , de forma que P' contenha todas as soluções não dominadas e P'' contenha todas as soluções dominadas. O conjunto P' é denominado de conjunto não dominado e P'' de conjunto dominado. Especificamente, para que P' seja o conjunto não dominado, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Quaisquer duas soluções de P' devem ser não dominadas, uma com relação a outra;
- Qualquer solução pertencente a P'' é dominada por no mínimo um elemento de P' .

Podemos então definir formalmente o conjunto não dominado como segue:

Definição B.1 (Conjunto Não Dominado [28]). *Dado um conjunto soluções de P , o conjunto de soluções não dominadas P' é aquele em que todos os elementos são soluções não dominados em relação a qualquer elemento de P .*

Se todas as soluções para um problema são conhecidas e entre estas são identificadas as não dominadas em relação a todas as outras, estas soluções são chamadas soluções ótimas de Pareto, ou soluções Pareto-ótimas. Nestas soluções nenhum objetivo pode ser melhorado sem que os demais piorem [75]. Assim, quando o conjunto P é o espaço de busca, isto é, $P = S$, o conjunto P' é chamado de conjunto Pareto-ótimo. A fronteira determinada pelas soluções Pareto-ótimas é denominada fronteira ótima de Pareto (ou fronteira Pareto-ótima), fronteira de Pareto ou frente de Pareto. A Figura 41 ilustra a Fronteira de Pareto de um problema de minimização envolvendo dois objetivos f_1 e f_2 . A parte hachurada em cinza indica o espaço de busca S e a linha em preto a Fronteira de Pareto.

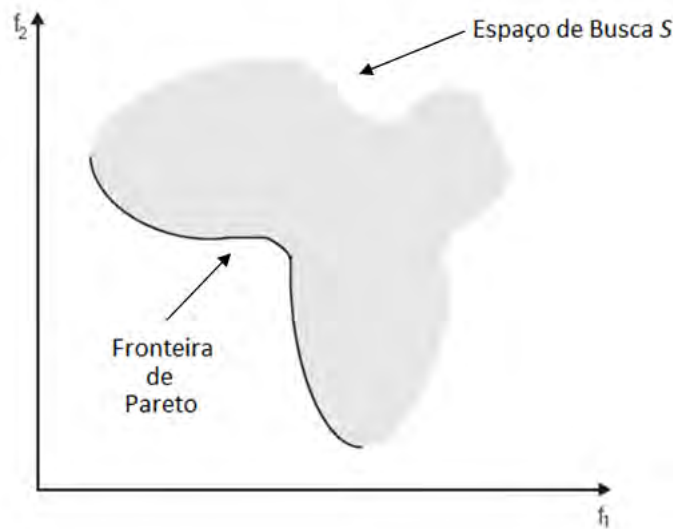


Figura 41: Fronteira de Pareto [51].

Existem várias soluções ótimas de Pareto apenas quando as funções objetivos são conflitantes, caso contrário este conjunto terá no máximo um elemento, pois a melhor solução em relação a cada função objetivo é a mesma. Assim, segundo [28], existem duas metas na otimização multiobjetivo:

- i. Encontrar um conjunto de soluções tão perto quanto possível da fronteira ótima de Pareto;
- ii. Encontrar um conjunto de soluções o mais diverso possível.

A seguir o conceito de dominância é apresentado formalmente. Usaremos o operador \triangleleft entre duas soluções i e j , $i \triangleleft j$, para denotar que a solução i é melhor que a solução j para um objetivo específico. De maneira similar, $i \triangleright j$, implica que a solução i é pior que a solução j para dado objetivo. Por exemplo, se em um objetivo a função deve ser minimizada, o operador \triangleleft pode ser trocado por “<”, e se a função objetivo for de maximização o operador \triangleleft deve ser trocado por “>”.

Definição B.2 ([28]). *Uma solução $x^{(1)}$ domina uma outra solução $x^{(2)}$, se as condições a seguir são verdadeiras:*

1. A solução $x^{(1)}$ não é pior que a solução $x^{(2)}$ em todos os objetivos, ou seja, $f_t(x^{(1)}) \not\triangleright f_t(x^{(2)})$, para todo $t \in \{1, 2, \dots, T\}$;
2. A solução $x^{(1)}$ é estritamente melhor do que $x^{(2)}$ em pelo menos um objetivo, ou seja, $f_t(x^{(1)}) \triangleleft f_t(x^{(2)})$ para pelo menos um $t \in \{1, 2, \dots, T\}$.

Se alguma das afirmações acima não for verdadeira a solução $x^{(1)}$ não domina a solução $x^{(2)}$. Se $x^{(1)}$ domina $x^{(2)}$ (que podemos expressar como $x^{(1)} \preceq x^{(2)}$), valem as seguintes afirmações:

- $x^{(2)}$ é dominada por $x^{(1)}$;
- $x^{(1)}$ não é dominada por $x^{(2)}$, ou;
- $x^{(1)}$ não é inferior a $x^{(2)}$.

Na Figura 42 podemos observar a relação de dominância entre o ponto C com os outros pontos do espaço de busca S em um problema de minimização, envolvendo as funções objetivos f_1 e f_2 . Note que as soluções denominadas indiferentes com C são aquelas em que em um dos objetivos é melhor do que C, mas pior no outro objetivo.

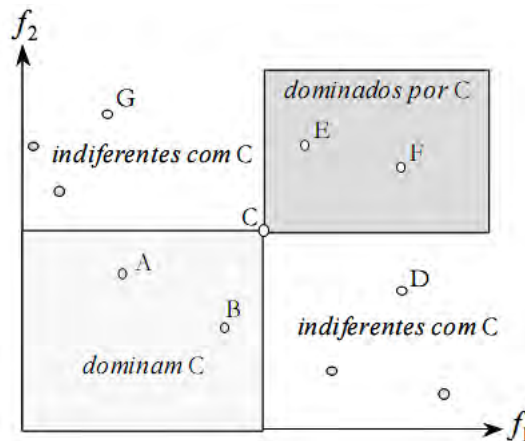


Figura 42: Relação de dominância entre soluções da região factível [6].

A relação de dominância entre duas soluções apresentada pela Definição B.2 é algumas vezes referenciada como uma relação de dominância “fraca”. Esta definição pode ser modificada e uma relação de dominância forte pode ser definida como segue.

Definição B.3. A solução $x^{(1)}$ domina fortemente a solução $x^{(2)}$ (ou $x^{(1)} \prec x^{(2)}$), se a solução $x^{(1)}$ é estritamente melhor que a solução $x^{(2)}$ em todos os T objetivos.

Apresentamos a seguir um procedimento utilizado para encontrar um conjunto de soluções não dominadas P' a partir de um conjunto de soluções P . Este procedimento é dado em [28] e utilizado neste trabalho pra determinar as soluções não dominadas do conjunto de soluções gerados pelo AFM-P (Capítulo 5). Outras maneiras mais eficientes de encontrar um conjunto de soluções não dominadas pode ser visto em [28].

No procedimento descrito na Figura 43, cada solução i é comparada com todas as outras soluções. Se a solução i é dominada por qualquer outra solução, ou seja se alguma solução é melhor que i em todos os objetivos, então ela não pertence ao conjunto não dominado. Contudo, se nenhuma solução domina i , então ela faz parte do conjunto não dominado. Logo, todas as soluções devem ser comparadas. A seguir descrevemos o método passo a passo para encontrar um conjunto não dominado de um dado conjunto P de cardinalidade N .

Passo 1. Inicialize o contador $i = 1$ e crie o conjunto vazio P' .

Passo 2. Para uma solução $j \in P$ (com $i \neq j$), verifique se a solução j domina a solução i . Em caso afirmativo vá para o Passo 4.

Passo 3. Se existem mais soluções em P , incremente j e vá para o Passo 2. Caso contrário, faça $P' = P' \cup \{i\}$.

Passo 4. Faça $i = i + 1$. Se $i \leq N$, vá para o Passo 2. Caso contrário, P' é o conjunto não dominado.

Figura 43: Procedimento para encontrar um conjunto de soluções não dominadas .

Dois aspectos importantes devem ser levados em consideração na solução de problemas multiobjetivo: a busca de soluções e a tomada de decisões. A busca de soluções refere-se aos processos de otimização na qual a busca é direcionada para as soluções ótimas de Pareto. Da mesma forma que a otimização mono-objetivo, esta busca pode tornar-se difícil devido ao tamanho e a complexidade do espaço de busca. O segundo aspecto é referente a tomada de decisões e envolve a seleção de um critério adequado para a escolha de uma solução do conjunto ótimo de Pareto. É necessário que o decisor faça uma ponderação (*trade-off*) entre os objetivos conflitantes. A partir do ponto de vista do decisor, os métodos de otimização multiobjetivos podem ser classificados em três categorias, descritos a seguir [6, 28]:

- Métodos *a priori*: são caracterizados pela participação do decisor antes do processo de busca de soluções, isto é, antes de resolver o problema. Existem dois tipos de métodos *a priori*. No primeiro, os objetivos do problema são combinados em um único objetivo, sendo necessária a determinação de pesos para ponderar a preferência por cada objetivo. A vantagem deste primeiro método é que podem ser aplicadas estratégias clássicas de otimização mono-objetivo sem nenhuma modificação. No segundo tipo, os objetivos são classificados em ordem decrescente de prioridade.

Feito isto, o problema é resolvido para o primeiro objetivo sem considerar os demais. A seguir, o problema é resolvido para o segundo objetivo sujeito ao valor ótimo encontrado para o primeiro objetivo. Este processo continua até que o problema seja resolvido para o último objetivo sujeito aos valores ótimos dos outros objetivos. Alguns métodos *a priori*, denominados também por Deb [28] de Métodos Clássicos, são brevemente apresentados abaixo:

- i. Método da Soma Ponderada: cada objetivo é multiplicado por um peso e , então, são todos somados em uma única função objetivo. O peso de cada objetivo é escolhido de acordo com a sua importância.
 - ii. Método do ϵ -restrito: este método mantém apenas uma função objetivo (geralmente a mais importante) e restringe as outras por um valor pré-definido (ϵ).
 - iii. Método da Métrica Ponderada: neste método também são combinadas várias funções objetivo em uma única função mono-objetivo. Porém, para pesos não negativos otimiza-se a distância, dada por uma certa norma, entre qualquer solução x e um ponto de referência.
 - iv. Método de Benson: este método também é similar ao da soma ponderada e o ponto de referência escolhido é uma solução factível, não ótima de Pareto. Escolhida uma solução factível, a diferença não-negativa entre esta solução e cada objetivo em questão é calculada e a soma destas é maximizada.
 - v. Método da Função de Utilidade: neste método o usuário fornece uma função de utilidade $U : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ que envolve todos os r objetivos. Esta função deve ser válida em toda região factível e o objetivo é maximizar o valor de U .
 - vi. Programação de Metas: a ideia deste método é encontrar soluções que atinjam uma certa meta para um ou mais objetivos. Se não existe nenhuma solução que atinja a meta em todos os objetivos, tenta-se encontrar soluções que minimizem o desvio com relação à meta.
- Métodos *a posteriori*: a busca de soluções é feita considerando-se que todos os objetivos são de igual importância. O processo de decisão é feito logo após a realização da busca de soluções. Ao final do processo da busca existe um conjunto de soluções aproximadas ou Pareto-ótimas. A partir deste conjunto, o responsável pelas decisões deve selecionar uma solução que representa a solução adequada do problema.
 - Métodos iterativos: o responsável pela decisão intervém durante o processo de otimização (busca de soluções) articulando preferências e guiando a busca para regiões

em que existam soluções de interesse.

Devido a algumas dificuldades dos métodos descritos anteriormente, como por exemplo, o envolvimento de muitos parâmetros que devem ser definidos pelo usuário e que os métodos encontram apenas uma solução Pareto-ótima a cada execução, uma nova abordagem vem sendo dada ao tratamento dos problemas multiobjetivos. Trata-se dos Algoritmos Evolutivos, que imitam os princípios da evolução natural para atingir uma solução ótima. Uma população de soluções é utilizada em cada iteração, ao invés de apenas uma, e com isso, o resultado final também é uma população de soluções. No caso dos problemas multiobjetivos em que existem várias soluções eficientes, os algoritmos evolutivos são utilizados para encontrar em sua população final diferentes soluções eficientes. Dentre os algoritmos evolutivos, aparecem ainda os Algoritmos Genéticos, que são métodos flexíveis inspirados na evolução natural das espécies, e têm a capacidade de produzir soluções de boa qualidade para problemas complexos de grande porte, em tempo computacional viável. A eficiência dos algoritmos genéticos pode ser comprovada pela grande quantidade de trabalhos publicados com aplicações em diversas áreas [28]. Para mais detalhes sobre otimização multiobjetivo e sobre os métodos aqui apresentados, veja por exemplo, [75, 28, 6, 51].

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 20 de Maio de 2010.

Alyne Toscano Martins