

MIRELLA FRANCHINI

Função do 2º grau no Ensino Médio: uma abordagem a partir das etapas de modelagem matemática

**Bauru
2025**

MIRELLA FRANCHINI

Função do 2º grau no Ensino Médio: uma abordagem a partir das etapas de modelagem matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Guilherme Francisco Ferreira

**Bauru
2025**

F816f Franchini, Mirella

Função do 2º grau no Ensino Médio: : uma abordagem a partir das etapas de modelagem matemática / Mirella Franchini. -- Bauru, 2025
51 p.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura - Matemática) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências,
Bauru

Orientador: Guilherme Francisco Ferreira

1. Modelagem Matemática. 2. Função Quadrática. 3. Ensino Médio.
4. Material Digital. I. Título.

Dedico este trabalho à minha família, em especial a minha avó Lourdes e meu avô José que não estão mais conosco.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus e a Nossa Senhora que com muita fé me ajudou chegar até aqui.

Agradeço também aos meus familiares que sempre me apoiaram em toda essa trajetória, em especial a minha mãe Rita, meu tio Junior, minha irmã Natália e meu namorado Marcelo, que sempre me fizeram acreditar que sou capaz de realizar meu sonho de ser professora de matemática e nunca desistir dos meus objetivos e sempre foram meu suporte em tudo o que eu precisei.

Agradeço ao meu orientador Guilherme Francisco Ferreira, por toda a paciência e dedicação para me orientar neste trabalho e que sempre esteve disposto a me ajudar em minhas dificuldades.

Agradeço a minhas amigas Maria Clara e Heloísa por estarem comigo nessa caminhada tão importante da minha vida, sempre me dando apoio e me fazendo acreditar no meu potencial.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso aborda o ensino de função quadrática no Ensino Médio, propondo a modelagem matemática como uma abordagem pedagógica alternativa para se trabalhar com esse tema. A pesquisa foi pensada através da minha preocupação com o ensino mecanizado nas escolas estaduais do Estado de São Paulo, intensificados pela adoção dos materiais digitais que vêm de forma padronizada pelo governo. Embora defendidos pela gestão, esses materiais são criticados pelos professores pela falta de flexibilidade pedagógica, que desconsidera a necessidade de cada turma. Diante desse cenário, o objetivo deste trabalho é propor a modelagem matemática como estratégia de ensino para o conteúdo de função do 2º grau, utilizando como base o próprio material digital. A metodologia adotada envolve a análise do material digital da SEDUC do ano de 2025, focado na função quadrática para o primeiro ano do ensino médio. O trabalho se estrutura a partir de uma revisão bibliográfica de modelagem matemática, seguida de duas sequências de aulas adaptadas de função de segundo grau. Concluimos que a modelagem matemática é uma ferramenta potente para superar a abordagem tradicional, promovendo a autonomia dos alunos e uma aprendizagem mais significativa ao conectar a matemática a situações do cotidiano.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Função Quadrática. Ensino Médio. Material Digital.

ABSTRACT

This final project addresses the teaching of quadratic functions in high school, proposing mathematical modeling as an alternative pedagogical approach to this topic. The research was conceived based on my concern about the automated teaching in state schools in the state of São Paulo, intensified by the adoption of digital materials standardized by the government. Although advocated by management, these materials are criticized by teachers for their lack of pedagogical flexibility, which disregards the needs of each class. Given this scenario, the objective of this work is to propose mathematical modeling as a teaching strategy for high school function content, using the digital material itself as a basis. The methodology adopted involves the analysis of the 2025 digital material from the State Education Department (SEDUC), focused on quadratic functions for the first year of high school. The work is structured around a literature review of mathematical modeling, followed by two adapted sequences of lessons on quadratic functions. We conclude that mathematical modeling is a powerful tool for overcoming traditional approaches, promoting student autonomy and more meaningful learning by connecting mathematics to everyday situations.

Keywords: Mathematical Modeling. Quadratic Function. High School. Digital Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Para começar no material digital.....	12
Figura 2 - Foco no conteúdo no material digital.....	12
Figura 3 - Na prática no material digital.....	13
Figura 4 - Encerramento no material digital.....	13
Figura 5 - O aluno e o professor nos casos de modelagem.....	20
Figura 6 - Exemplo de modelo descritivo.....	29
Figura 7 - Exemplo de modelos aritméticos.....	29
Figura 8 - Exemplo de modelo gráfico.....	29
Figura 9 - Exemplo de modelos tabulares.....	30
Figura 10 - Exemplo de modelo textual.....	30
Figura 11 - Dados obtidos com altura de 1 cm no programa GeoGebra.....	36
Figura 12 - Dados obtidos com altura de 2 cm no programa GeoGebra.....	37
Figura 13 - Dados obtidos com altura de 4 cm no programa GeoGebra.....	37
Figura 14 - Ficha de questões 1 a 4.....	38
Figura 15 - Ficha de questões 5 e 6.....	38
Figura 16 - Resposta da 1ª questão.....	39
Figura 17 - Resposta da 2ª questão.....	39
Figura 18 - Resposta da 3ª questão.....	39
Figura 19 - Resposta da 4ª questão.....	39
Figura 20 - Resposta da 5ª questão.....	39
Figura 21 - Resolução dos alunos da questão 5.....	40
Figura 22 - Resposta da 6ª questão.....	40
Figura 23 - O aluno e o professor nos casos de modelagem.....	42
Figura 24 - Relação de materiais por tela.....	43
Figura 25 - Função do custo total no GeoGebra.....	44
Figura 26 - Função da receita total no GeoGebra.....	46
Figura 27 - Função final para achar o lucro total.....	46
Figura 28 - Função do lucro total final.....	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
2	OBJETIVOS.....	10
2.1	Objetivo geral.....	10
2.2	Objetivos específicos.....	10
3	JUSTIFICATIVA.....	11
4	METODOLOGIA.....	15
5	REFERENCIAL TEÓRICO.....	16
6	SÍNTESE.....	31
7	PROPOSTAS DE ATIVIDADES.....	34
7.1	Plano inclinado para o ensino de função quadrática.....	34
7.2	Máximos e mínimos da função quadrática.....	41
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
	REFERÊNCIAS.....	50

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho foi pensado a partir de minhas preocupações com o ensino da matemática nas escolas estaduais, visto que o material digital já vem pronto, o que torna o ensino muito mecanizado. Nesse cenário, o professor tem o papel passivo na sala de aula, sendo apenas o indivíduo que repassa seus conhecimentos para os alunos e os mesmos apenas copiam os tópicos da lousa e resolvem listas de exercícios já propostas no material, muitas vezes sem saber o porquê estão copiando aquilo.

Segundo uma notícia publicada no ano de 2023, o governo do estado de São Paulo defende o uso de materiais digitais nas escolas. Renato Feder, atual secretário da educação do estado afirma: “Não é um livro didático digital. É um material mais assertivo, com figuras, jogos, imagens 3D, exercícios. Ele pode clicar em links, abrir vídeos, navegar por um museu”¹. Ele acredita que por serem bastantes visuais e interativos, esses materiais podem ser grandes aliados para as escolas estaduais. Além de aumentar o rendimento dos estudantes em provas externas, eles promovem um papel ativo dos alunos nas aulas, permitindo a interação com o conteúdo, como acessar links e jogar jogos sugeridos.

Em contrapartida, muitos professores, que são os principais agentes que utilizam o material digital, não compartilham a mesma opinião do governo. Segundo uma notícia divulgada em 2025, um professor de matemática relatou: “Os professores estavam acostumados a elaborar as aulas para o seu público de alunos. Quando chega tudo congelado, padronizado, tem sala que funciona, tem sala que não”². Os docentes afirmam que esse tipo de recurso veio para dificultar o ensino e a aprendizagem, pois não permite que eles façam as adaptações necessárias ao perfil e às necessidades específicas de cada turma. A padronização dos conteúdos pode ignorar as diversidades de ritmos e estilos de aprendizagem, resultando em um ambiente educacional que, em vez de favorecer a interação e a personalização do ensino, impõe limitações que impactam negativamente o engajamento e o desempenho dos alunos.

¹<https://www.poder360.com.br/educacao/escolas-estaduais-de-sp-vaio-trocar-livros-por-material-digital/> Acesso em: 20 set. 2025.

² <https://agenciamural.org.br/desafios-dos-professores-da-rede-estadual-de-sp/> Acesso em: 20 set. 2025.

Sendo assim, me baseei no material digital do ano de 2025 para propor duas sequências de aula pensando na função quadrática como conteúdo e utilizando a modelagem matemática como recurso de ensino e aprendizagem. Optei por trabalhar com a modelagem matemática pois vejo nela uma possibilidade de trabalhar com as habilidades e conteúdos que são indicados no currículo paulista de uma forma distinta da tradicional, ou seja, um aula padronizada e mecanizada que é veiculada nos materiais digitais do Estado.

Este trabalho está dividido em duas partes principais, sendo a primeira uma revisão bibliográfica de alguns autores selecionados que dissertam sobre a modelagem matemática como uma abordagem de ensino e a segunda parte duas propostas de aula que englobam o conteúdo de função do segundo grau utilizando a modelagem como recurso didático na sala de aula do primeiro ano do Ensino Médio.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Problematizar as atividades de função quadrática segundo as indicações do material digital a partir de perspectivas de modelagem matemática.

2.2 Objetivos específicos

- Investigar os fundamentos teóricos da modelagem matemática como abordagem metodológica no ensino de matemática com foco em autores relevantes da produção científica em Educação Matemática;
- Analisar como o material digital aborda a temática de função quadrática, destacando seus aspectos mais relevantes;
- Analisar atividades já propostas de função do segundo grau usando a modelagem matemática e adaptá-las conforme necessário.

3 JUSTIFICATIVA

Em uma notícia publicada no ano de 2023, na atual gestão do secretário da educação de São Paulo, Renato Feder, mostra a decisão do governo de abandonar o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) a partir de 2024. A gestão anunciou que a rede estadual adotaria um material 100% digital, produzido pela própria secretaria, sua justificativa é que o conteúdo próprio seria mais alinhado ao Currículo Paulista e que a transição para o digital representaria uma modernização ao ensino.

No entanto, a implementação desses materiais foi alvo de intensas críticas. Foram apontados inúmeros erros de digitação e informações incorretas nos slides disponibilizados aos alunos e professores. Além disso, a notícia também indica que docentes afirmam que o conteúdo veio de uma forma padronizada e muito mecanizada para os estudantes, no qual o educador teria o papel de passar a matéria da forma em que ela viria e seria de responsabilidade dos discentes copiar e fazer as listas de exercícios já propostas nos slides. Ainda, a qualidade do material digital também foi questionada por especialistas, que o consideraram superficiais e pedagogicamente pobres em comparação com os livros didáticos tradicionais.

O formato em que o material é apresentado é dividido em 4 partes, sendo elas: para começar, foco no conteúdo, na prática e por fim o que aprendemos hoje. No primeiro momento, esta seção tem o objetivo de apresentar o tema da aula, geralmente indicando perguntas norteadoras ou situações problemas que despertem a curiosidade e o conhecimento prévio dos estudantes. Por conseguinte, na próxima etapa são apresentados as definições, informações importantes para aquela aula, ou seja, é a base teórica sobre aquele conteúdo. Adiante, segue de vários exercícios, com o objetivo de conectar a teoria com a prática. E por fim, é exibido uma retomada dos principais pontos abordados para ver se ficou claro os objetivos para aquela aula.

Veja abaixo ilustrações de como o conteúdo de função quadrática vem abordado no material digital disponibilizado pelo governo de São Paulo.

Figura 1 - Para começar no material digital.

Para começar

Reportagem publicada no jornal Nexa (2025) mostra que as coreografias que viralizam em redes sociais de vídeos curtos impactam o mundo da música e dão visibilidade para ritmos e gêneros musicais praticamente desconhecidos. A maior parte dos vídeos virais são publicados por adolescentes e jovens e as coreografias são feitas em pequenos espaços retangulares.

Para criar um tutorial de “dancinha”, uma pessoa quer marcar um retângulo no chão e, para ter um bom enquadramento no vídeo, o comprimento deve medir o triplo da largura. Se a largura do retângulo é x , determine a função da área, $A(x)$.



Adolescente gravando vídeo de coreografia para rede social.

Elaborada pelo autor utilizando inteligência artificial generativa (2025).

Fonte: material digital da seduc

Figura 2 - Foco no conteúdo no material digital.

Foco no conteúdo

Toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c coeficientes reais e $a \neq 0$, é chamada função polinomial do segundo grau ou **função quadrática**.

ax^2 é o termo de segundo grau, bx é o termo de primeiro grau, e c é o termo constante.

O grau de uma função é definido pelo maior expoente variável independente.

Por exemplo:

1. $f(x) = x^2 + 3$
Possui um termo de grau 2 e um termo constante.
2. $f(x) = 3x^2 + 2x$
Possui um termo de grau 2 e um termo de grau 1.

Destaque
★

3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$
Possui um termo de grau 2, um termo de grau 1 e um termo constante.

Já as funções:
 $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 2x^3 + x^2 - 4$
não são quadráticas: $f(x)$ é de grau 1 e $g(x)$, de grau 3.

Fonte: material digital da seduc

Figura 3 - Na prática no material digital.

Na prática

Atividade 1 Veja no livro! 3 minutos TODO MUNDO ESCRIVE

Para cada função a seguir, calcule o valor das solicitadas.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 4$
 $f(0)$ e $f(2)$.

b) $f(x) = x^2 - 5x - 10$
 $f(-2)$ e $f(4)$.

Fonte: material digital da seduc

Figura 4 - Encerramento no material digital.

Encerramento

COM SUAS PALAVRAS 2 minutos

- Qual o maior grau de expoente da variável x que uma função $f(x)$ deve ter para ser classificada como função quadrática?

Fonte: material digital da seduc

Além dos erros contidos no material, a obrigatoriedade do uso das plataformas digitais também gerou descontentamento dos docentes. Professores relataram instabilidade no sistema e um aumento na carga de trabalho devido à necessidade de registrar as aulas e atividades na plataforma. Diante da forte repercussão negativa e da pressão de educadores, o governo estadual reconsiderou a decisão de abandonar completamente o PNLD. A gestão de Feder, então, optou por um modelo híbrido, mas mantendo o foco no desenvolvimento e utilização de

seus próprios materiais e plataformas digitais como parte central da política educacional do estado.³

Seguindo uma análise dos materiais digitais, a Associação dos Autores de Livros Educativos (Abrale), produziu um relatório que destaca um ponto importante:

Os materiais só estão adequados para funcionar como roteiros de aulas expositivas padronizadas que abarcam todo o tempo letivo, mas não dão a chance para outras estratégias didáticas e desconsideram a necessidade de o docente atender às especificidades da turma. As chances de os docentes adaptarem essas aulas padronizadas são reduzidas, também, pela quantidade de aulas oferecidas e a rígida determinação de tempo definida para suas etapas (Abrale, 2023, p. 2).

A partir da análise realizada pela Abrale é possível salientarmos que os slides apresentam um padrão muito repetitivo, tornando assim o conteúdo cansativo e pouco atrativo para os estudantes, independente da área do conhecimento abordada. Com isso, fica evidente a dificuldade da absorção da aula e a motivação para o aprendizado.

Contudo, com base nesses materiais, elaboramos uma proposta mais didática e acessível para os alunos utilizando a modelagem matemática como estratégia de ensino, podendo assim ampliar a aula daquele conteúdo, dando mais entendimento para os estudantes e tornando o aprendizado mais significativo.

Dadas as características de modelagem matemática dos autores analisados, essa abordagem tem o potencial de criar mais autonomia nos alunos visto que ela permite que os estudantes elaborem hipóteses para a resolução de diferentes tipos de problemas, além de conectar conceitos matemáticos a situações reais do dia a dia tornando assim para o aluno um aprendizado mais profundo e relevante. Além disso, ela possui a capacidade de implementar a interdisciplinaridade, ou seja, interagir com outras áreas do conhecimento.

Considerando a realidade das escolas estaduais e o formato que as aulas vêm planejadas digitalmente, o tema escolhido para se trabalhar com a modelagem foi função quadrática, pois vejo que os alunos sentem uma certa dificuldade quando se trata desse assunto, por isso acho vantajoso usá-la com o apoio dessa abordagem de ensino.

3

<https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2023/09/06/erros-em-materiais-falta-de-psicologos-e-saida-d-o-pnld-10-momentos-de-feder-na-educacao-de-sp-que-foram-alvos-de-criticas.ghtml>. Acesso em 20 set. 2025.

4 METODOLOGIA

No desenvolvimento deste trabalho, iniciei com a escolha da temática, ou seja, propor o trabalho para desenvolver o conteúdo de função do segundo grau; em seguida, acessei o material digital do Estado de São Paulo e destaquei as aulas nas quais o assunto de funções quadráticas é desenvolvido; tema que é abordado no primeiro ano do Ensino Médio, mais especificamente no terceiro bimestre. Essa temática foi dividida em 11 aulas, onde cada aula aborda um tópico específico deste conteúdo como por exemplo, sua definição, zeros da função, estudo de sinal, gráfico, entre outros; por conseguinte, fiz uma análise do currículo paulista do Ensino Médio e destaquei quais são as habilidades específicas desenvolvidas nas aulas.

Depois, selecionei autores relevantes sobre modelagem matemática para fazer um aprofundamento na temática no âmbito da educação matemática e compreender como os aspectos propostos pelos autores poderiam permitir uma adaptação ou elaboração de atividades que abordem os aspectos destacados nos materiais digitais sobre funções, mas através de uma perspectiva de modelagem matemática.

Por fim, selecionei duas atividades e adaptei às perspectivas de modelagem escolhidas e aos objetivos do material digital.

Dessa forma, este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, pois não busca quantificar dados ou estabelecer análises estatísticas, mas compreender, descrever e interpretar como a modelagem matemática pode ser integrada ao material digital disponibilizado pela SEDUC e de que maneira essa abordagem contribui para o ensino de função quadrática. Assim, o foco está na análise das propostas pedagógicas, no diálogo com os referenciais teóricos e na elaboração de atividades adaptadas, o que reforça o caráter qualitativo.

“Na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc” (Goldenberg, 2004, p. 14).

5 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta revisão bibliográfica não pretende dissipar todos os trabalhos existentes na área de modelagem matemática, mas sim proporcionar um cenário abrangente que permita uma melhor compreensão do contexto das atividades de modelagem. A partir desse panorama, busquei me posicionar de forma crítica em relação às práticas e metodologias envolvidas na modelagem matemática, destacando suas principais características, aplicações e importâncias no ensino e aprendizagem.

Portanto, o objetivo desta seção é apresentar a opinião de diferentes autores sobre a modelagem matemática na Educação Matemática, uma metodologia essencial para a construção do conhecimento de uma forma diversificada, dinâmica, contextualizada e significativa. Ao explorar diferentes perspectivas teóricas, busquei mostrar a importância dessa forma de abordagem no contexto educacional, promovendo uma compreensão mais aprofundada sobre seu impacto na aprendizagem e na formação dos estudantes.

O ensino da matemática é fundamental para a formação dos alunos, uma vez que os conhecimentos podem ser aplicados em diversas situações do cotidiano. Todavia, quando penso na disciplina aplicada em sala de aula, é evidente a falta de interesse e desmotivação dos estudantes, principalmente por conta da descontextualização e falta de significação dos conteúdos. Dado que o processo de aprendizado é construtivo e exige que o aluno exerça um papel ativo por meio da interação com o objeto de estudo, torna-se essencial adotar modelos de ensino que aproxime o conteúdo da realidade do estudante.

Inicialmente, trago Dionísio Burak, que a partir de uma de suas obras publicadas no ano de 2010, apresenta respectivamente seu pensamento sobre modelagem, seguido de um passo a passo para a realização em sala de aula.

Através da metodologia de modelagem matemática está envolvida uma discussão sobre o papel da educação no século XXI, ou seja, quais os desafios que nessa época traz a prática educacional. Para formarmos um cidadão crítico, não basta apenas usar a matemática pela matemática no ensino, pois isso não traria autonomia para os alunos. Devemos trazer a realidade com que esses estudantes vivem para que assim ele seja um indivíduo mais crítico. “Desejamos um cidadão que desenvolva autonomia, que seja: crítico, capaz de trabalhar em grupo, capaz de

tomar decisões diante das situações do cotidiano, da sua vida familiar, da sua vida profissional, ou de sua condição de cidadão” (Burak, 2010, p. 17).

A modelagem é um processo que se desenvolve dentro de contextos reais e significativos, ou seja, está diretamente ligada ao ambiente e à realidade vivida pelas pessoas envolvidas. Sua aplicação depende de um interesse em comum do grupo, o que garante motivação e engajamento nas etapas da modelagem. Dessa forma, a modelagem matemática é apresentada como uma prática interdisciplinar, situada no contexto humano e social em que está inserida. Segundo Burak:

A modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões (Burak, 2010, p. 18).

Na visão delineada por Burak, o processo de ensino e aprendizagem fundamenta-se nas teorias cognitivas e na teoria da aprendizagem significativa. Tais concepções reconhecem o estudante como sujeito ativo na construção do próprio conhecimento. “Essa visão que possibilita ao estudante tornar-se um buscador mais do que seguidor, aquele em permanente busca do conhecimento, de novos campos, novas visões, que interroga, discute, reflete e, forma suas convicções” (Burak, 2010, p. 19).

Em seguida ele sugere um exemplo de etapas a serem seguidas para que a modelagem matemática em sala de aula possa favorecer um ensino mais significativo, vale ressaltar que em todos os tópicos o aluno tem seu papel principal, ele está no centro de tudo, apenas na última etapa o professor se demonstra como papel principal. São elas: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e análise crítica das soluções.

Na escolha do tema é feita a escolha dos temas a serem trabalhados, essa escolha deve partir de situações que façam sentido para os alunos, envolvendo questões do cotidiano, tornando o aprendizado mais motivador, garantindo o engajamento dos alunos em sua aprendizagem. Neste tópico, o aluno tem um papel ativo, ou seja, pode fazer suas próprias escolhas, enquanto o professor tem o papel de mediar essas discussões.

A pesquisa exploratória, momento que os temas já foram escolhidos, os alunos iniciam a fase de investigação, eles buscam informações que contextualizem o problema, podendo utilizar diversas fontes (livros, internet, observação de campo,

entrevistas, coleta de dados, etc). Aqui o aluno também é visto como ativo para construir conhecimentos sobre o tema escolhido e o professor atua como mediador, ou seja, ele orienta as pesquisas e ajuda a organizar as informações coletadas.

Levantamento dos problemas: este momento é muito importante no processo de modelagem matemática, pois é aqui que os estudantes começam a transitar da realidade para a matemática. A partir dos dados, observações e informações coletadas, eles identificam aspectos da situação que podem ser transformados em problemas matemáticos. Vale ressaltar nessa etapa que um mesmo tema pode gerar diferentes problemas, dependendo do foco de interesse do grupo. Aqui o aluno tem ainda seu papel central como sujeito ativo, ele é o responsável por formular os problemas, já o professor fica ajudando eles a perceberem quais problemas são viáveis ou não.

Na etapa de resolução dos problemas os alunos criam estratégias para resolver tais problemas levantados anteriormente. Não há uma única resposta correta, porque diferentes grupos podem propor técnicas distintas para o mesmo problema, dependendo de como entenderam a situação, dos dados disponíveis e dos conhecimentos matemáticos que dominam. A resolução envolve experimentação, testes e ajustes, muitas vezes o primeiro procedimento proposto precisa ser corrigido ou substituído. O aluno atua como protagonista, desenvolvendo estratégias, testando hipóteses e fazendo cálculos, já o professor fica novamente como mediador acompanhando o processo e esclarecendo dúvidas.

Por fim, na análise crítica das soluções os alunos são convidados a refletir sobre o modelo que construíram, questionando: o modelo resolve de fato o problema proposto? Ele se aplica a outras situações semelhantes? Que simplificações foram feitas? Elas comprometem a análise? Essa análise também pode incluir a validação prática, isto é, comparar os resultados obtidos com dados reais, simulações, entrevistas ou observações, verificando se a solução é viável, eficaz e ética. Aqui o aluno reflete sobre os resultados, identifica limitações do modelo, propõe melhorias e relaciona as conclusões com o mundo real, já o professor tem papel principal agora, ele fica responsável por estimular a reflexão crítica e conduzir discussões sobre a validade das soluções (Burak, 2010).

Embora Burak (2010) enfatiza que a modelagem matemática depende da autonomia dos estudantes e de um ambiente investigativo, essa perspectiva diverge com o material digital analisado. Conforme aponta a ABRALE, os slides

padronizados da SEDUC dificultam a criação de situações que permitam a escolha de temas, o levantamento de problemas e a participação ativa dos alunos, que são as etapas que o autor sugere. Assim, a estrutura do material digital limita a implementação da modelagem nos moldes defendidos por Burak (2010).

Por conseguinte, outro autor que será apresentado é o Jonei Cerqueira Barbosa, com seu texto escrito no ano de 2001. Aqui ele irá apresentar o que entende por modelagem matemática e vai exibir três casos diferentes de como ela pode ser aplicada em sala de aula.

No Brasil, a modelagem matemática é uma ferramenta flexível no ensino, podendo assumir diferentes formatos conforme os objetivos didáticos e os conteúdos a serem trabalhados. Ela valoriza o interesse dos alunos e conecta a matemática com situações do mundo real. Segundo ele,

No Brasil, a Modelagem está ligada à noção de trabalho de projeto. Trata-se em dividir os alunos em grupos, os quais devem eleger temas de interesse para serem investigados por meio da matemática, contando com o acompanhamento do professor (Barbosa, 2001, p. 1).

O autor defende uma corrente conhecida como sócio-crítica, na qual a modelagem passa a ser uma prática educativa com potencial político, social e ético que pode formar sujeitos mais conscientes sobre o mundo em que vivem. Nessa corrente, quando dado um problema os alunos devem ser instigados a fazerem questionamentos nas seguintes direções: “Este resultado é válido?”, “Por que?”, “Como podemos garantir?”, “Ao traduzirmos a situação em termos matemáticos, o que perdemos?”, “O que ganhamos?”, “É seguro tomar a decisão baseada nesta abordagem matemática do problema?”. Assim eles podem criar um olhar reflexivo para a modelagem matemática. Ou seja, concluímos que o autor ao se referir a corrente sócio-crítica quer nos passar a visão das resoluções de problemas matemáticos segundo um olhar mais reflexivo. “No que chamamos de corrente sócio-crítica de modelagem sublinha que as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria modelagem e seu significado social” (Barbosa, 2001, p. 5).

Nesse sentido, a modelagem é vista como uma forma dos alunos explorarem problemas usando a matemática de maneira criativa sem um caminho fixo. Os conceitos usados vão surgindo conforme eles desenvolvem as atividades, e cada situação pode levar a diferentes ideias matemáticas. “Do nosso ponto de vista,

trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento” (Barbosa, 2001, p. 5).

O ambiente de aprendizagem de matemática é visto como diferentes possibilidades de organização curricular da modelagem, podendo ser classificadas de três formas diferentes:

Figura 5 - O aluno e o professor nos casos de modelagem.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Barbosa, 2001, p. 9

Caso 1: O professor apresenta uma situação problema com suas informações necessárias, cabendo aos alunos e ao professor o processo de resolução. Neste caso, o professor apresenta aos alunos uma situação-problema já formulada, com todas as informações necessárias para sua resolução. O papel dos estudantes se limita a aplicar procedimentos matemáticos previamente ensinados para chegar à resposta. A modelagem, nesse sentido, funciona como uma ferramenta pedagógica para reforçar conteúdos já previstos no currículo.

Caso 2: O professor traz um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta de informações e dados necessários para sua resolução, podendo ou não ter ajuda do professor. Nesse tipo de modelagem, o professor propõe um problema aberto, relacionado a alguma situação real externa à sala de aula, mas não fornece todos os dados nem a solução pronta. Cabe aos alunos

investigar, levantar informações, fazer estimativas e construir o modelo matemático por conta própria, o que torna o processo mais ativo, significativo e interdisciplinar.

Caso 3: A partir de temas não matemáticos os alunos junto com o professor formulam e resolvem problemas sendo também responsáveis pela coleta de informações. Neste caso, em todas as etapas do quadro abaixo, tem uma interação entre os alunos e o professor, o que nos outros casos percebemos que é diferente (Barbosa, 2001).

Tendo em vista as considerações de Barbosa, professores e alunos podem adotar diversas formas de inserir a modelagem no currículo, adaptando-a conforme as condições e restrições do ambiente escolar (Barbosa, 2001).

A perspectiva de Barbosa (2001), especialmente nas abordagens que exigem investigação, formulação de problemas e reflexão crítica, também entra em conflito com o formato do material digital. Segundo a ABRALE, a padronização dos slides impede que os alunos colem dados, investiguem e construam modelos próprios, o que inviabiliza principalmente os casos 2 e 3 de modelagem propostos pelo autor.

Em sequência, o texto apresentado pela próxima autora, Ana Paula dos Santos Malheiros (2007), traz uma breve revisão bibliográfica de vários autores a respeito da modelagem matemática. Por conseguinte, faz novamente uma revisão bibliográfica, mas agora a respeito de pedagogia de projetos e afirma haver interseções e diferenças entre essas duas abordagens.

A autora notou que algumas características apresentadas para projetos podem ser aplicadas à modelagem no contexto educacional quando a escolha do tema a ser investigado parte dos alunos. Outro fator comum entre projeto e modelagem matemática é a singularidade, ou seja, mesmo que os estudantes escolham o mesmo tema para se trabalhar, os resultados não serão iguais, pois cada um utiliza um método diferente. Outra semelhança que ela encontrou, foi que em ambos o professor tem o papel secundário, ele segue sendo o mediador durante todo o processo.

Uma diferença notada por ela entre pedagogia de projetos e modelagem matemática é o fato de que na pedagogia de projetos, ele vê o aluno como um ser protagonista, isto é, ele escolhe o tema, levanta as questões, planeja, executa e reflete sobre o projeto. Já em muitas práticas de modelagem em sala de aula, o professor já leva um tema pronto, uma situação pré-definida para os alunos

investigarem. Então, quando o tema é imposto pelo professor e não escolhido pelo aluno, o estudante deixa de ser o idealizador do projeto. Nesse momento, a modelagem se afasta dos princípios da pedagogia de projetos, porque não segue a ideia de que o projeto deve nascer do aluno.

E, por último, um ponto destacado por Machado e Boutinet recorre à escolha do tema no desenvolvimento de projetos, na medida em que afirmam que as ações devem ser executadas por aquele que idealiza o projeto. Tecendo um paralelo com a modelagem, ao se determinar um tema para que o aluno investigue, está 'se projetando' por ele (Malheiros, 2007, p. 12).

A partir daí ela se questiona, quando o aluno escolhe um tema a ser estudado, ele faz trabalho com projetos ou modelagem? E sua resposta dada é que quando trabalha-se com projeto na sala de aula, envolve a interdisciplinaridade, ou seja, outras áreas do conhecimento podem aparecer dependendo do foco do projeto. Já quando se trabalha com modelagem, a principal fonte para se desenvolver é a matemática, este é um segundo ponto que diferencia os dois temas: “em um projeto a Matemática pode estar presente, mas na Modelagem ela deve estar presente” (Malheiros, 2007, p. 12).

Partindo para outro texto da autora, é possível comparar sua nova visão sobre o assunto com a já apresentada. Segundo ela, a modelagem matemática em território nacional, surgiu na década de 1980 no estado do Paraná, a partir da prática de docentes em curso de formação de professores, com o intuito de mudanças no ensino da matemática.

A autora afirma que a modelagem é “uma estratégia pedagógica, onde os alunos, a partir de um tema ou problema de interesse deles, utilizam conteúdos matemáticos para investigá-lo ou resolvê-lo, tendo o professor como um orientador durante todo o processo” (Malheiros, 2024, p. 5).

O processo de escolha do tema a ser desenvolvido deve partir dos estudantes, do interesse deles pelos assuntos. Mas, diante da realidade que ela presenciou, ela agora afirma que nem sempre os temas escolhidos pelos estudantes são eficazes, na maioria das vezes vira bagunça na sala de aula, então ela acredita que a melhor forma de se escolher o tema é o professor já levando ele pronto. Nesse caso, entendo que o professor tem um papel fundamental, sendo ele o

motivador dos temas e os alunos ficam com a função de realização dos problemas e coleta de dados quando necessário.

Quando a autora concluiu o doutorado, ela foi convidada a escrever um livro de modelagem em educação matemática, junto com diversos pesquisadores, e eles evidenciaram que a modelagem não tem um fim, mas sim um caráter cíclico e contínuo. Ou seja, ela é vista como algo flexível, renovável e baseada no diálogo, e não como um processo fechado com início, meio e fim fixos. Então,

Evidenciamos, em um processo de Modelagem, não haver um fim e sim um possível retorno ao início, no qual outras questões e cenários podem ser considerados, outras hipóteses podem ser levantadas, outros procedimentos podem ser adotados, em um movimento dinâmico e sem ser considerado datado (Malheiros, 2024, p. 6).

Ao observar escolas estaduais do estado de São Paulo, ela percebeu que não era usada a estratégia da modelagem, pois as escolas estão apenas preocupadas em cumprir o currículo e ter um alto desempenho nas provas externas em larga escala, assim a escola que se destaca mais ganha prêmios financeiros. O desejo da autora era que a modelagem chegasse nas escolas públicas, principalmente as paulistas.

A solução que ela achou para isso foi implementar a modelagem matemática nas aulas juntamente com os slides dos materiais digitais que já são fornecidos pelo governo, fazer uma ligação entre eles seria o ideal para se usar modelagem nas escolas estaduais paulistas, mas para os professores o fato de não existir um roteiro pronto é um empecilho para se trabalhar modelagem nas aulas.

Ela encontrou uma relação entre o Novo Ensino Médio e a modelagem, pois a modelagem, segundo a autora, propicia uma perspectiva interdisciplinar, ou seja, o estudante trabalha com um tema de seu interesse e utiliza a matemática para compreendê-lo, assim como acontece nos itinerários formativos (Malheiros, 2024). Ao “buscar uma educação de qualidade, crítica, problematizadora e emancipadora, entendo que a Modelagem pode contribuir” (Malheiros, 2024, p. 16).

As reflexões de Malheiros (2007, 2024) sobre as limitações práticas da modelagem tornam-se ainda mais evidentes diante das críticas da ABRALE. O material digital, ao impor uma sequência fixa de conteúdos, intensifica a falta de tempo e a dificuldade de propor temas investigativos, reforçando justamente os

obstáculos que a autora observa nas escolas. Assim, a própria dinâmica dos slides restringe o potencial da modelagem no contexto paulista.

Consequentemente, vou apresentar outro autor, Rodney Carlos Bassanezi, com seu livro escrito no ano de 2002, trazendo algumas etapas para seguir e diferente dos outros, aqui ele traz os desafios para implementar a modelagem matemática em sala de aula.

O autor inicia seu livro falando que na matemática precisam ser criadas novas estratégias de ensino-aprendizagem que facilitem a compreensão dos alunos. E ele afirma que a modelagem matemática é vista como uma estratégia de ensino, pois ele acredita facilitar a combinação de aspectos lúdicos da matemática com suas aplicações na vida real. Nesse sentido,

“A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado” (Bassanezi, 2002, p. 38).

Na perspectiva do autor, “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Bassanezi, 2002, p. 16).

Ao introduzir a modelagem em sala de aula, tanto em ensino regular quanto em ensino superior é evidente que surgem alguns obstáculos, o autor cita 3 deles.

Obstáculos instrucionais: são as dificuldades práticas e pedagógicas enfrentada pelos professores ao implementar a modelagem matemática em sala de aula, como por exemplo a limitação do tempo, pois os professores têm um currículo para ser seguido e sente insegurança em não conseguir realizar tudo por demandar muito tempo a modelagem. Outro exemplo são as dúvidas dos próprios professores em relação à modelagem, muitos não têm conhecimento sobre tal abordagem.

Obstáculos para os estudantes: o uso da modelagem rompe com a rotina do ensino tradicional, e os estudantes, por não estarem habituados a esse tipo de abordagem, podem se sentir desorientados ou até desmotivados durante as aulas, eles estão acostumados a olhar o professor como o centro do ensino-aprendizagem, e quando eles passam a ser o protagonista, eles se sentem como se estivessem em um outro mundo completamente do que estão inseridos, com isso surge uma dificuldade maior em se aplicar a modelagem.

Obstáculos para os professores: muitos professores não se sentem preparados para utilizar a modelagem em suas aulas, seja por desconhecimento do processo, seja pelo receio de enfrentarem situações constrangedoras ao lidar com aplicações matemáticas em áreas que não dominam. Há também a preocupação de que o planejamento dessas aulas exija muito tempo e de que isso comprometa o cumprimento do conteúdo programático previsto.

Segundo Bassanezi (2002), o início da modelagem matemática começa com a escolha do tema, onde é feito um levantamento por parte dos alunos para escolherem um tema pertinente e abrangente para que os trabalhos possam ir para diversas direções, uma informação importante é que para ele essas etapas devem ser feitas todas em grupos. Ele destaca a importância da autonomia dos alunos na escolha dos temas nas atividades de modelagem, pois quando eles participam dessa decisão, assumem mais responsabilidade pelo próprio aprendizado, o que tende a torná-los mais engajados e ativos no processo. Porém, ele também ressalta que a escolha dos temas não deve ser feita de forma totalmente livre, o professor tem um papel essencial de orientador, ajudando a avaliar se o tema é viável, ou seja, se é possível obter dados, fazer visitas, encontrar referências, etc (Bassanezi, 2002).

Por conseguinte, vem a próxima etapa que é a coleta de dados, na qual os alunos buscam informações relevantes sobre o tema escolhido, podendo ser feitas através de entrevistas, questionários, pesquisas bibliográficas ou a própria experiência dos estudantes. Vale ressaltar que ele pede para os alunos organizarem os dados em formato de tabela pois futuramente poderão ser usados para a construção de um gráfico.

Por fim, a última etapa é a formulação de modelos, de modo que segundo o autor, “chamaremos simplesmente de modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (Bassanezi, 2002, p. 20), no qual ele destaca apenas dois tipos, destacadas a seguir. Formulação estática: “são formulações matemáticas envolvendo equações ou funções com uma ou mais variáveis onde os modelos matemáticos traduzem uma correspondência biunívoca entre as variáveis da formulação e as variáveis físicas do sistema caracterizado” (Bassanezi, 2002, p. 46). Formulação dinâmica: “a formulação de modelos dinâmicos, em geral, envolve dois tipos de variáveis (dependentes e independentes) onde a variável independente é geralmente o tempo” (Bassanezi, 2002, p. 51).

Os obstáculos apontados por Bassanezi (2002), como falta de tempo, insegurança docente e ruptura com o modelo tradicional, são agravados pelo material digital analisado. De acordo com a ABRALE, os slides prontos e padronizados da SEDUC não permitem a coleta de dados nem a formulação de modelos, etapas centrais da modelagem. Assim, o material digital amplia as dificuldades já previstas pelo autor.

Em seguimento dessas definições de autores, o próximo será o Tiago Emanuel Klüber, com pesquisa escrita no ano de 2012, nesse texto ele traz as perspectivas da modelagem matemática, classificadas em seis tipos.

A modelagem matemática no Brasil vem sendo estudada a mais de 30 anos, com isso não podemos considerá-la como um modismo, que vem e logo já passa. Ela é considerada uma tendência que tem um grande destaque tanto nacionalmente quanto internacionalmente, desde a educação básica até o ensino superior.

O autor classifica as perspectivas de modelagem matemática em 6 tipos:

Realística: seu principal objetivo é desenvolver nos estudantes a capacidade de aplicar a matemática em problemas práticos do cotidiano, há uma ênfase na construção de modelos que representem fielmente situações reais, promovendo o uso funcional da matemática como ferramenta de resolução de problemas concretos.

Epistemológica: busca utilizar a modelagem como meio para promover a compreensão e o aprofundamento dos próprios conteúdos matemáticos. Aqui, o foco não está no contexto externo, mas na matemática em si, seus conceitos, estruturas e relações. A modelagem serve como instrumento para refletir sobre a natureza do conhecimento matemático e reforçar sua aprendizagem.

Educacional: entende a modelagem como uma estratégia para organizar o ensino e a aprendizagem da matemática. Nesse caso, a modelagem é empregada com o intuito de facilitar a assimilação de conteúdos matemáticos, estruturando atividades que integrem teoria e prática, e aproximem o conteúdo escolar dos alunos por meio de situações motivadoras e didaticamente eficazes.

Contextual: parte de estudos na área da psicologia educacional e busca entender como os contextos vivenciados pelos alunos influenciam o aprendizado matemático. Ela utiliza a modelagem como recurso para ensinar conteúdos, mas com atenção especial às experiências, realidades e significados atribuídos pelos próprios alunos durante o processo de aprendizagem.

Cognitiva: está centrada na investigação dos processos mentais que ocorrem durante a atividade de modelagem. O objetivo é analisar como os alunos pensam, tomam decisões, constroem representações e resolvem problemas ao lidar com a modelagem. Essa abordagem é comum em pesquisas que buscam compreender o funcionamento do raciocínio matemático e os mecanismos de aprendizagem.

Sócio-crítica: propõe o uso da modelagem matemática como instrumento para o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos. Através dela, busca-se promover a conscientização sobre o papel da matemática na sociedade e discutir criticamente os modelos matemáticos utilizados em contextos sociais, econômicos e ambientais. Essa abordagem valoriza a formação cidadã e a reflexão ética, política e social sobre os usos da matemática.

O autor defende que a implementação da modelagem na educação matemática deve ser acompanhada de uma reflexão crítica sobre as metodologias de ensino. Ele propõe que a modelagem deve ser vista como uma alternativa pedagógica que desafia as abordagens tradicionais, incentivando os alunos a se tornarem participantes ativos no processo de aprendizagem.

Ele destaca a importância de formar professores que sejam capazes de integrar a modelagem em suas práticas de ensino, reconhecendo seu papel como mediadores do conhecimento matemático.

O capítulo conclui com a afirmação de que a modelagem matemática é um fenômeno em construção, que requer contínua investigação e reflexão. O autor sugere que a busca por uma compreensão mais profunda da modelagem deve abranger não apenas aspectos técnicos, mas também filosóficos e sociais.

As perspectivas de Klüber (2012) dependem de flexibilidade curricular e de atividades contextualizadas, elementos que contrastam com a crítica da ABRALE ao material digital da SEDUC. A padronização das aulas e a ausência de espaço para investigação dificultam a realização tanto da perspectiva realística quanto da contextual e da sócio-crítica. Assim, o material digital limita a exploração das múltiplas dimensões da modelagem apresentadas pelo autor.

Para finalizar essa caminhada de aprendizado sobre modelagem matemática, o último autor Emerson Tortola escreveu seu livro junto com Lourdes Maria Werle de Almeida, no ano de 2016, porém aqui ele vai evidenciar que essa

ferramenta pode também ser aplicada no Ensino Fundamental I, criando autonomia nos alunos desde pequenos.

Nesse texto, os autores vão aplicar uma atividade de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º), para que assim possamos observar que não tem uma série em específico para que se possa trabalhar com a modelagem, com o intuito de fazer com que os alunos aprendam a interpretar e analisar várias situações problemas do mundo real, a fim de produzir modelos matemáticos que são eficaz para a resolução dos problemas (Tortola e Almeida, 2016). Os autores definem modelagem como

Um procedimento criativo e interpretativo que faz uso ou estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno, indicando uma possível solução para um problema associado a este fenômeno (Tortola e Almeida, 2016, p. 3).

A atividade de modelagem foi aplicada nas turmas do fundamental I, onde 112 alunos participaram e teve como tema o crescimento das unhas, assunto de escolha do professor, mas eles perceberam que os alunos adoraram e sentiram interesse por pesquisar sobre esse assunto. Onde os alunos ficaram responsáveis por coletar os dados, eles fizeram isso através de produções escritas, gravação de áudio e imagens, mas os professores disponibilizaram algumas informações pertinentes também.

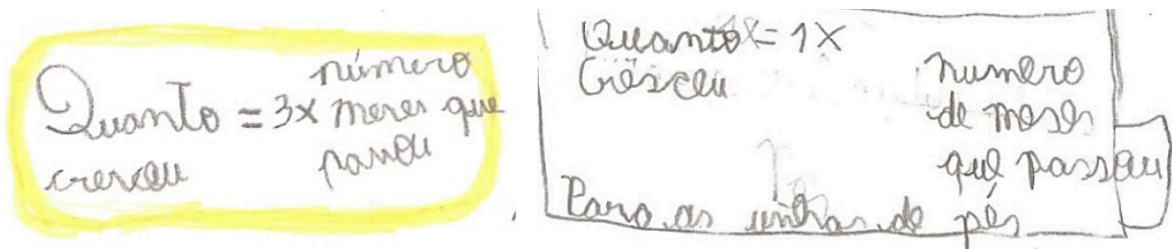
Antes de apresentar os modelos descritos pelos autores, é de suma importância entendermos o significado da expressão “modelos matemáticos”, para explicar esse termo, eles trouxeram a definição segundo os autores Doerr e English

Um modelo matemático pode ser entendido como um sistema de elementos, operações, relações e regras, e pode ser utilizado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema conhecido, associado a uma situação proveniente do mundo real (Doerr e English, 2003, p. apud. Tortola e Almeida, 2002, p.3).

Com isso foram classificados os modelos matemáticos que os alunos usaram para descrever o problema, destacadas a seguir.

Modelos descritivos: representam a relação entre o tempo e o crescimento das unhas, incorporando um determinado nível de abstração e generalização.

Figura 6 - Exemplo de modelo descritivo.



Tortola e Almeida, 2016, p. 7

Modelos aritméticos: relação entre a variável do tempo e o crescimento das unhas, que fundamentam-se nas operações matemáticas.

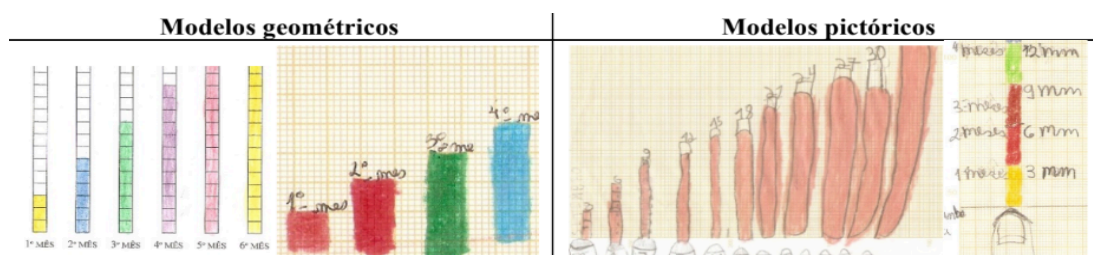
Figura 7 - Exemplo de modelos aritméticos.

Modelos aditivos	Modelos multiplicativos								
1 $3+1=4$ 2 $3+3=6$ 3 $3+3+3=9$ 4 $3+3+3+3=12$	<table><tr><td>$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 9 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$</td><td>$\begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array}$</td></tr><tr><td></td><td>$\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \text{ mês} \\ 2^{\text{o}} \text{ mês} \\ 3^{\text{o}} \text{ mês} \\ 4^{\text{o}} \text{ mês} \\ 5^{\text{o}} \text{ mês} \\ 6^{\text{o}} \text{ mês} \end{array}$</td></tr></table>	$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array}$		$\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \text{ mês} \\ 2^{\text{o}} \text{ mês} \\ 3^{\text{o}} \text{ mês} \\ 4^{\text{o}} \text{ mês} \\ 5^{\text{o}} \text{ mês} \\ 6^{\text{o}} \text{ mês} \end{array}$
$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array}$				
	$\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \text{ mês} \\ 2^{\text{o}} \text{ mês} \\ 3^{\text{o}} \text{ mês} \\ 4^{\text{o}} \text{ mês} \\ 5^{\text{o}} \text{ mês} \\ 6^{\text{o}} \text{ mês} \end{array}$								

Tortola e Almeida, 2016, p. 7

Modelos gráficos: apresenta os dados de maneira mais visual, ou seja, figuras geométricas, diagramas, desenhos, ou, imagens.

Figura 8 - Exemplo de modelo gráfico.



Tortola e Almeida, 2016, p.8

Modelos tabulares: os dados e informações são organizados em formato de tabelas, de forma mais objetiva.

Figura 9 - Exemplo de modelos tabulares.

mes	quanto cresceu
1	3 mm
2	6 mm
3	9 mm
4	12 mm
5	15 mm
6	18 mm
7	21 mm

1º mês = a unha	cresceu em 3 mm
2º mês = a unha	cresceu em 6 mm
3º mês = a unha	cresceu em 9 mm
4º mês = a unha	cresceu em 12 mm
5º mês = a unha	cresceu em 15 mm

Tortola e Almeida, 2016, p.8

Modelos textuais: são descritas em formato de textos, mais completos e objetivos.

Figura 10 - Exemplo de modelo textual.

as unhas dos pés
crescem em mm a
mesma quantidade
de meses que a unha
ficou sem cortar

Tortola e Almeida, 2016, p.9

O trabalho de Tortola e Almeida (2016) mostra que a modelagem exige autonomia, coleta de dados e produção de diferentes modelos pelos estudantes. Contudo, segundo a ABRALE, o material digital padronizado restringe atividades investigativas e limita práticas que envolvam experimentação e participação ativa.

6 SÍNTESE

Os textos do Dionísio Burak (2010) e do Jonei Cerqueira Barbosa (2001) convergem em vários pontos, um complementa o outro, pois no do Burak (2010) sugere uma sequência de etapas para se desenvolver a modelagem em sala de aula para garantir um aprendizado mais significativo e engajamento dos estudantes, sendo elas: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e análise crítica das soluções. Já Barbosa (2001) vê a modelagem como diversas possibilidades de organização curricular, divididas em 3 casos, no primeiro caso o professor apresenta a situação problema com todas as informações necessárias para a resolução e os alunos ficam responsáveis por resolver os problemas; no segundo caso o professor traz o problema porém de outra área da realidade e os alunos buscam informações pertinentes para a resolução; e por fim no terceiro caso, os alunos junto com o professor que decidem o tema e formulam as situações problemas.

Ao escolher o caso que deseja usar no texto do Barbosa (2001), pensando nas condições da sala de aula, a quantidade de alunos, como a sala é, como os alunos realmente vão se envolver, ele opta qual será o melhor caso para se trabalhar naquela aula, naquele momento. Após essa escolha, eles podem seguir o modelo de sequência apresentado pelo Burak (2010). Concluimos que eles se complementam nesse quesito, que através de um usamos o outro para dar continuidade e, em ambos os estudantes têm um papel principal no desenvolvimento, sendo ativos durante todo o processo, já o professor fica como mediador, em segundo plano dando as orientações quando acharem pertinentes.

Um ponto importante de Tiago Klüber (2012) e Rodney Carlos Bassanezi (2002) é que eles seguem o mesmo propósito quando definem o que é modelagem, ambos afirmam que ela é uma estratégia de ensino usada na sala de aula, para trazer problemas do cotidiano e resolvê-lo matematicamente, assim podendo haver uma relação entre a matemática e o mundo real. Eles acreditam que pelo tema ser algo relacionado a situações do dia a dia dos alunos, eles vão se sentir mais interessados.

Klüber (2012) e Barbosa (2001) apresentam uma relação de concordância entre eles, no fato de apresentarem uma visão sócio-crítica da modelagem. Enquanto Barbosa (2001) acredita que a modelagem matemática passa a ser uma prática educativa com potencial político, social e ético podendo formar sujeitos mais

conscientes sobre o mundo em que vivem e cidadãos mais reflexivos, Klüber (2012) traz essa questão sócio-crítica como uma das perspectivas da modelagem no Brasil, tornando os alunos com um olhar mais crítico.

Um ponto que Bassanezi (2002) e Burak (2010) têm em comum são as etapas a serem seguidas para a realização de modelagem matemática em sala de aula, mas Bassanezi (2002) apresenta menos tópicos, sendo eles: escolha do tema, levantamento dos dados e formulação de modelos matemáticos. Um dado interessante que ele cita é que para a modelagem ser eficaz, a opção do tema deve ser feito em grupos, nunca individualmente e, os dados coletados devem ser colocados em formato de tabela para que assim futuramente possam ser construídos gráficos com essas informações. É evidente que segundo ele o aluno tem um papel de protagonista em ambas as etapas e o professor atua como um mediador, orientando-os conforme necessário.

No texto da Ana Paula dos Santos Malheiros (2007), o pensamento dela sobre modelagem matemática diverge dos demais autores, ela acredita que o tema na maioria das vezes é levado pelo próprio professor, e fica de responsabilidade do aluno a coleta de informações, fazendo assim com que o estudante não seja protagonista para tomar suas próprias decisões acerca do tema dos problemas, mas sim apenas para coletar os dados necessários.

Assim como Bassanezi (2002) acredita em haver obstáculos para implementar a modelagem nas escolas, Malheiros (2024) também acredita nisso. Segundo ela, um dos empecilhos são os materiais didáticos que as escolas fornecem e os materiais digitais disponibilizados pelo governo, pois os professores têm um cronograma de atividades para serem seguidos e quase nunca sobra tempo para implementar a modelagem em sala de aula. Já os impasses descritos por Bassanezi (2002) são classificados em 3 tipos: o primeiro são os obstáculos instrucionais, ou seja, a limitação do tempo e a própria dúvida dos professores em relação a modelagem; o segundo são os obstáculos para os estudantes, isto é, eles não se sentem confortáveis com essa prática por estarem acostumados com um ensino mais tradicional, com isso sentem insegurança em desenvolver a modelagem; e por fim os obstáculos pelos professores, ou seja, eles não se sentem preparados para aplicar essa técnica por não conhecerem muito sobre ela.

Diferente dos outros autores, Malheiros (2024) enfatiza mais o professor como tendo um papel principal na modelagem, pois ele leva pronto o tema a ser

trabalhado, pois acredita virar confusão os próprios alunos escolherem o tema. Já os estudantes são responsáveis por resolver os problemas e a coleta de dados quando necessário.

No texto do Emerson Tortola e Lourdes Maria Werle de Almeida (2016), eles enfatizam que a modelagem matemática pode ser inserida na escola já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, fazendo assim com que os alunos desde pequenos já comecem a ter essa relação de matemática com a vida real. Um ponto interessante desse texto, é que eles usaram o mesmo tema “crescimento das unhas” nas diferentes séries do Ensino Fundamental I e, cada sala usou um modelo matemático diferente para descrever o que ocorria na situação problema. Com isso, os estudantes criam autonomia e são protagonistas no processo de resolução dos problemas, ficando evidente que eles possuem um papel principal no processo de ensino e aprendizagem e o professor fica como mediador interferindo quando necessário.

Para finalizar esta seção, entendo que a modelagem matemática vista como uma estratégia de ensino pode superar a desmotivação e falta de interesse dos estudantes quando nos referimos a disciplina de matemática nas escolas. Usando essa estratégia de aprendizagem, a matemática terá mais significado para os alunos, já que ela é usada com temas do cotidiano dos estudantes, assim transformando a realidade vivida em problemas para resolver matematicamente. Ela oferece uma abordagem mais prática e interdisciplinar, além de proporcionar várias vantagens, como por exemplo, desenvolver pensamento crítico e raciocínio lógico, promover trabalho em grupos e a comunicação entre os alunos, entre outros.

Para a próxima etapa, que será a elaboração de duas atividades envolvendo modelagem matemática e função quadrática, vou me basear em uma das atividades no texto do Jonei Cerqueira Barbosa, no qual ele apresenta três casos diferentes para implementar a modelagem em sala de aula, irei considerar qual se adapta melhor ao contexto escolar e qual será mais propício para aquela aula daquele tema, e a outra atividade seguindo as etapas do Dionísio Burak, pois ele oferece uma estrutura clara e organizada, facilitando a compreensão dos alunos e criando autonomia, porque são incentivados a pesquisar, levantar dados e tomar suas próprias decisões.

7 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

7.1 Plano inclinado para o ensino de função quadrática.

Analisei uma proposta de aula de função do segundo grau em uma dissertação de mestrado do autor Paulo Eduardo Barillari, defendida no ano de 2020, e achei interessante trabalhar com ela fazendo as devidas adaptações para seguir as etapas de modelagem matemática do autor Dionísio Burak.

No início, ele constrói um plano inclinado, usando um trilho de alumínio de cortina, no qual fez marcações de 10 cm em 10 cm com uma caneta permanente, totalizando ao final do trilho 200 cm. Em seguida ele trouxe cortado pedaços de madeira com diferentes espessuras para estabelecer o plano inclinado, e usou uma esfera para deslizar sob o trilho. Os alunos eram responsáveis por soltar a bolinha, inicialmente na marcação 0 cm e cronometrar quanto tempo ela demorava para percorrer até o final do trilho. Por conseguinte, eles iam mudando a bolinha da marcação de 0 cm para 10 cm, 20 cm e assim por diante, sempre anotando os tempos que ela demorava para percorrer.

Em seguida foi adicionado um pedaço de madeira no início do trilho para ele ficar inclinado e novamente cronometrar o tempo em diferentes distâncias, e assim sucessivamente com alturas de 1 cm, 2 cm e 4 cm. Para finalizar, organizaram os dados em tabelas e os plotaram no GeoGebra.

Esse experimento foi baseado no experimento de Galileu Galilei da queda de corpos no plano inclinado, o professor e autor da dissertação fez uma “releitura” do trabalho original de Galileu, fazendo adaptações necessárias e deixando-o mais contemporâneo.

Vale lembrar que o autor fez esse experimento em uma escola estadual de Ribeirão Preto - SP e participaram todas as salas do primeiro ano do ensino médio, totalizando 81 alunos. Seu principal objetivo com a função quadrática e com o experimento é aprofundar os saberes dos estudantes, incentivando-os a trabalhar em equipe e de forma participativa, explorando pontos que muitas vezes são vistos com grande desinteresse por parte dos alunos (Barillari, 2020).

Nesta aula, para essa proposta de atividade, já presume que os alunos tenham uma boa noção das parábolas, quando sua concavidade é para baixo e quando é para cima, além de no próprio material digital disponibilizado pela SEDUC ele sugerir o uso do GeoGebra, que é o site que vamos usar para plotar os dados obtidos no experimento e gerar o gráfico. Além disso, já foram apresentadas a

definição de função do segundo grau, o domínio real que para nós deve ser maior que zero, já que não existe nem tempo e nem distância negativa e a imagem da função.

Agora, para dar continuidade no nosso trabalho, vamos trazer esse experimento para a proposta de sequência de etapas de modelagem matemática do Dionísio Burak.

Passo 1: Escolha do tema.

Reconheço o potencial da proposta do Dionísio Burak, mas essa etapa em particular não dá para ser trabalhada exatamente como ele propõe, pois considerando o contexto da educação paulista que tem um conteúdo específico para ser trabalhado e habilidades específicas a serem desenvolvidas, adaptei a proposta do Burak no sentido de que vou levar uma situação um pouco mais fechada, ou seja, entendo que o professor pode colocar uma temática mais geral e os alunos poderiam caminhar para diferentes problemáticas como por exemplo: queda livre, lançamento de projéteis, movimento em rampas, entre outros. Mas, nesse caso, proponho uma ideia mais situada sobre o movimento em rampas e trago algumas problemáticas a partir da qual os alunos vão fazer a pesquisa exploratória.

Passo 2: Pesquisa exploratória.

Os alunos podem fazer pesquisas mais aprofundadas sobre os conceitos de física envolvidos no movimento em um plano inclinado, isto é, gravidade, aceleração, atrito, entre outros (sugestão da própria sequência de aula do autor Paulo Eduardo Barillari). Além disso, podem fazer um levantamento de informações de onde encontram a aplicação do plano inclinado no nosso dia a dia, seja numa rampa de acesso, em um simples escorregador, em uma tirolesa, em uma estrada, etc. Ademais, os estudantes podem pesquisar nessa etapa também um pouco sobre o Galileu Galilei, já que o experimento da proposta de aula é baseado nele, e aprofundar um pouco mais sobre o plano inclinado, como deve ser feito, e assim por diante.

Passo 3: Levantamento dos problemas.

Após a pesquisa, os alunos serão orientados para formular os seus próprios problemas, o professor pode instigar os estudantes com perguntas como “Qual a relação entre a distância percorrida pela esfera e o tempo?”, “Será que a inclinação da rampa afeta essa relação? Como?”.

A ideia aqui é que os alunos sejam protagonistas para elaborar as próprias questões que serão respondidas ao longo do desenvolvimento do experimento.

Passo 4: Resolução dos problemas.

Os discentes realizam o experimento, anotam os valores das distâncias escolhidas e o tempo que demorou para a bolinha percorrer o percurso. Aqui, o professor pode dar a dica deles organizarem esses dados em formato de tabela, para facilitar futuramente a criação do gráfico.

Vejamos abaixo alguns exemplos da dissertação.

Nessa parte do experimento, o professor coloca no início da rampa inicialmente uma madeira com 1 cm de altura e os alunos cronometram o tempo que a bolinha demora para percorrer o percurso inteiro do trilho em diferentes distâncias. Em seguida, ele troca a madeira de 1 cm para uma de 2 cm e refaz a tabela com os novos dados obtidos, com essa relação de distância e tempo. Para finalizar, ele troca a madeira de 2 cm para uma de 4 cm e novamente refaz a tabela com as novas medidas obtidas.

Figura 11 - Dados obtidos com altura de 1 cm no programa GeoGebra.

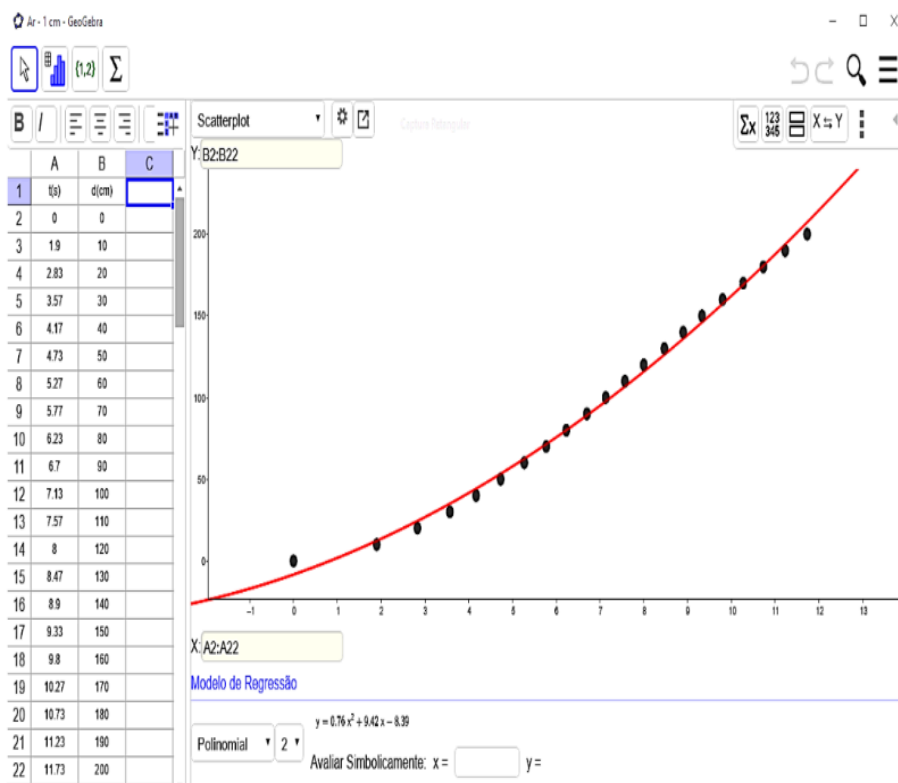
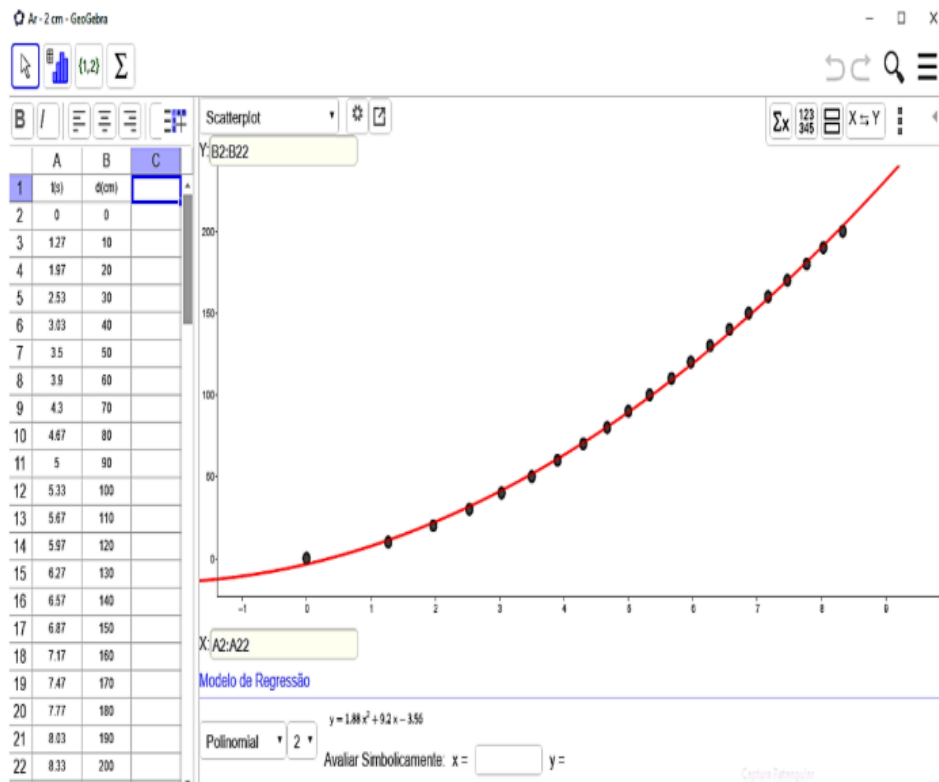
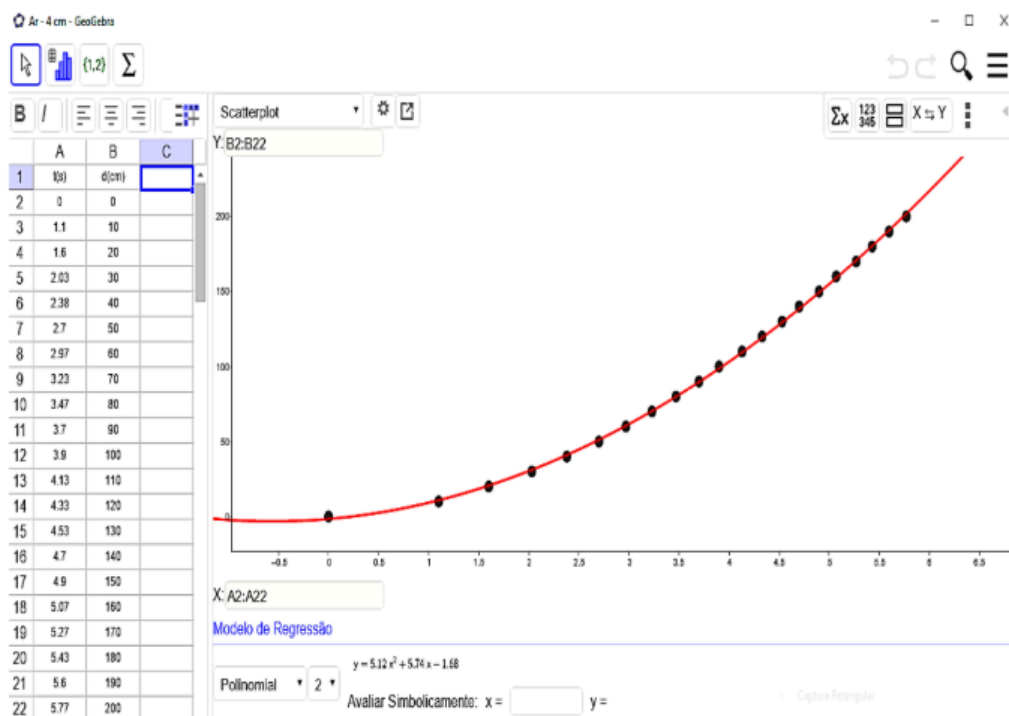


Figura 12 - Dados obtidos com altura de 2 cm no programa GeoGebra.



Barillari, 2020, p. 49

Figura 13 - Dados obtidos com altura de 4 cm no programa GeoGebra.



Barillari, 2020, p. 49

Por conseguinte, ele propôs uma ficha de questões de análise do gráfico.

Figura 14 - Ficha de questões 1 a 4.

ATIVIDADE 2 - FOLHA 3

Responda as questões com o seu grupo:

- 1) No gráfico de pontos produzido, vocês observaram algum padrão com relação à **curva**? Qual?

- 2) O padrão observado é indicativo de algum tipo de função? Qual?

- 3) Escreva a expressão algébrica da função que espera responder esse padrão? (Use **a**, **b** e **c** para os coeficientes).

$d(t) =$ _____

- 4) Observando que o par ordenado (0,0) é um ponto do gráfico, essa informação implica em uma forma particular para a função descrita no item (3)? Qual?

$d(t) =$ _____

Barillari, 2020, p. 58

Figura 15 - Ficha de questões 5 e 6.

- 5) Encontre os coeficientes **a** e **b** da função descrita no item (4).
Utilize o verso dessa folha para realizar os cálculos.
(Sugestão: escolher dois pontos do gráfico que estão melhor posicionados).

a = _____ **b** = _____

- 6) Escreva a função da curva apresentada no gráfico:

$d(t) =$ _____

Barillari, 2020, p. 59

Eles concluíram a atividade respondendo às questões acima, veja a seguir algumas das respostas obtidas.

Figura 16 - Resposta da 1ª questão.

1) No gráfico de pontos produzido, vocês observaram algum padrão com relação a curva? Qual?

Sim, o padrão se trata de uma parábola.

Barillari, 2020, p. 84

Figura 17 - Resposta da 2ª questão.

2) O padrão observado é indicativo de algum tipo de função? Qual?

Sim, uma função quadrática ou de 2º grau.

Barillari, 2020, p. 84

Figura 18 - Resposta da 3ª questão.

3) Escreva a forma algébrica geral da função que espera responder esse padrão?
(Use **a**, **b** e **c** para os coeficientes)

$d(t) = at^2 + bt + c$

Barillari, 2020, p. 84

Figura 19 - Resposta da 4ª questão.

4) Observando que o par ordenado (0,0) é um ponto do gráfico, essa informação implica em uma forma particular para a função descrita no item (3)? Qual?

$d(t) = at^2 + bt$

Barillari, 2020, p. 85

Figura 20 - Resposta da 5ª questão.

5) Encontre os coeficientes **a** e **b** da função descrita no item (4).

Utilize o verso dessa folha para realizar os cálculos.

(Sugestão: escolher dois pontos do gráfico que estão melhor posicionados).

$a = 2,86$ $b = 4,88$

Barillari, 2020, p. 85

E acharam a expressão algébrica da função a partir dos gráficos, pegando dois pontos quaisquer e fazendo as devidas operações necessárias. Veja a seguir.

Figura 21 - Resolução dos alunos da questão 5.

t(s)	d(cm)
0	0
1,50	10
2,23	20
2,80	30
3,30	40
3,73	50
4,17	60
4,50	70
4,87	80
5,20	90
5,50	100
5,80	110
6,13	120
6,32	130
6,79	140
7,03	150
7,30	160
7,52	170
7,82	180
8,19	190
8,43	200

$$d(t) = at^2 + bt$$

$$A = (4,5; 70) \quad B = (7,0; 150) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}} \right\} y = ax^2 + bx$$

$$70 = a(4,5)^2 + b(4,5)$$

$$4,5^2 a + 4,5 b = 70$$

$$y = ax^2 + bx$$

$$150 = a(7)^2 + b(7)$$

$$49a + 7b = 150$$

$$\begin{cases} 4,5^2 a + 4,5 b = 70 \quad (-4,5) \\ 49a + 7b = 150 \quad (-7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4,5a + b = 15,5 \quad (-1) \\ 7a + b = 21,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4,5a - b = -15,5 \quad (+) \\ 7a + b = 21,4 \end{cases}$$

$$2,5 = 5,9$$

$$a = \frac{5,9}{2,5} = 2,36$$

$$7a + b = 21,4$$

$$7(2,36) + b = 21,4$$

$$16,52 + b = 21,4$$

$$b = 21,4 - 16,52 = 4,88$$

* Breves:

$$49a + 7b = 150$$

$$49(2,36) + 7(4,88) = 150$$

$$115,64 + 34,16 = 149,8 = 150 \quad (v)$$

$$d(t) = at^2 + bt$$

$$d(t) = 2,36t^2 + 4,88t$$

Barillari, 2020, p. 86

Figura 22 - Resposta da 6ª questão.

6) Escreva a função da curva apresentada no gráfico:

$$d(t) = 2,36t^2 + 4,88t$$

Barillari, 2020, p. 86

Aqui os alunos escolheram dois pontos aleatórios da tabela construída com o objetivo de encontrar o valor de a e b descritos na função quadrática at^2+bt , daí, eles substituíram os valores e chegaram em um sistema com duas incógnitas e resolvendo-o eles chegaram que $a=2,36$ e $b=4,88$.

Observamos que por essa resolução que um aluno fez, podemos perceber que os estudantes estão desenvolvendo a capacidade de determinar qual a expressão algébrica de uma função quadrática a partir dos pontos obtidos na tabela.

Passo 5: Análise das soluções.

Após encontrarem a função que modela o experimento, os alunos podem ser incentivados a discutir as limitações do modelo, ou seja, “o modelo encontrado é

perfeito?”. “Quais fatores podem ter influenciado os resultados (atrito, erros de medição, etc.)?”. “O que aconteceria se a inclinação da rampa fosse maior ou menor?”. “E se o experimento fosse realizado com uma esfera de material diferente?”. Portanto, nessa etapa, é crucial que os estudantes observem o experimento como um todo e as resoluções das atividades também, para concluir se essas medições são realmente confiáveis e o que eles poderiam fazer para melhorar.

Pensando no material digital disponibilizado pela SEDUC no primeiro ano do ensino médio, no terceiro bimestre, esse tipo de experimento eu faria na aula 11 - parábola: gráfico de uma função quadrática - parte 3, pois aqui já está na parte 3 de gráficos, ou seja, como dito anteriormente, espera-se que os alunos já tenham uma boa noção das parábolas, além de no próprio material ele sugerir o uso do GeoGebra, que é o site que usamos para plotar os dados obtidos no experimento e gerar o gráfico. Além disso, já foram apresentadas a definição de função do segundo grau, o domínio e o contradomínio.

Analisando agora as habilidades do Currículo Paulista, esta proposta pode abordar: (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais e (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

7.2 Máximos e mínimos da função quadrática.

Analisando outra proposta de aula de função do segundo grau em uma dissertação apresentada no ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) da autora Hellena Christina Fernandes Apolinário, divulgada no ano de 2016, achei interessante trabalhar com ela fazendo as devidas adaptações para seguir um dos casos de modelagem matemática defendida pelo autor Jonei Cerqueira Barbosa.

O caso que vou usar será o 2, que nos diz o seguinte: o professor traz um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta de informações e dados necessários para sua resolução, podendo ou não ter ajuda do professor. Nesse tipo de modelagem, o professor propõe um problema aberto, relacionado a

alguma situação real externa à sala de aula, mas não fornece todos os dados nem a solução pronta. Cabe aos alunos investigar, levantar informações, fazer estimativas e construir o modelo matemático por conta própria, o que torna o processo mais ativo, significativo e interdisciplinar (Barbosa, 2001).

Figura 23 - O aluno e o professor nos casos de modelagem.

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Barbosa, 2001, p. 9

Essa aula foi realizada em 2015 na Escola Girassol de Tempo Integral Meira Matos, no estado de Tocantins, em uma turma de 1º ano do Ensino Médio, contendo no total 35 alunos. O objetivo dessa aula segundo a autora é evidenciar de maneira mais adequada a praticidade desse conteúdo de máximo e mínimo de função quadrática com a realidade dos estudantes (Apolinário, 2016).

A dissertação traz como abordagem uma empresa chamada “GGDArtes” que produz telas de capim dourado e o dono gostaria de saber por quantos reais teriam que vender cada tela para que seu lucro mensal seja máximo.

Trazendo essa atividade para o caso 2 do Jonei Cerqueira Barbosa (2001), ele não sugere uma sequência de etapas para serem seguidas como no caso anterior do Dionísio Burak (2010), mas dá os comandos no qual o professor apresenta um problema de outra área da realidade, nesse caso a problemática seria qual o valor de cada tela para que o lucro da empresa seja máximo e cabe aos alunos a coleta dos dados. Para isso, a professora levou os estudantes para a

empresa para eles juntarem as informações necessárias para a resolução do problema. Eles anotaram os preços de cada material para fazer uma tela de capim dourado. Vale lembrar que o proprietário disse que a capacidade de produção mensal é de 200 telas.

Figura 24 - Relação de materiais por tela.

RELAÇÃO DE MATERIAIS POR TELA	TOTAL EM R\$
Mão de obra da preparação da tela	5,00
Compra, Transporte e serragem das madeiras	10,00
Tecido	10,00
Tinta para pintura da tela branca	0,90
Pincel	1,00
Massa Corrida	0,42
Tiner	0,20
Brocha	0,016
Grampo	0,93
Secante de Cobalto	0,96
Óleo de Linhaça	0,92
Cola Branca de Cascorex	1,87
Pincel para borda	0,50
Estilete	0,10
Tecbond	0,16
Bambu	0,15
MDF – Mandala	10,00
Capim dourado	16,00
Energia	0,30
Água	0,15
Artista plástico	65,00
Outros gastos	5,424
TOTAL	130,00

Apolinário, 2016, p. 9

Ou seja, os alunos chegaram à conclusão de que para fazer apenas uma tela de capim dourado a empresa gasta R\$130,00.

Em seguida eles começaram a pensar em hipóteses para chegar à solução do problema, os estudantes descobriram que a função usada para achar o custo total no final dos mês é o valor gasto para produzir cada tela vezes o número de telas fabricadas. Como a capacidade máxima de produção é de 200 telas no mês, chegam à seguinte função de custo total: $CT = 130 \cdot (200 - x)$. Com essa informação, eu sugiro que eles construam o gráfico dessa função no GeoGebra.

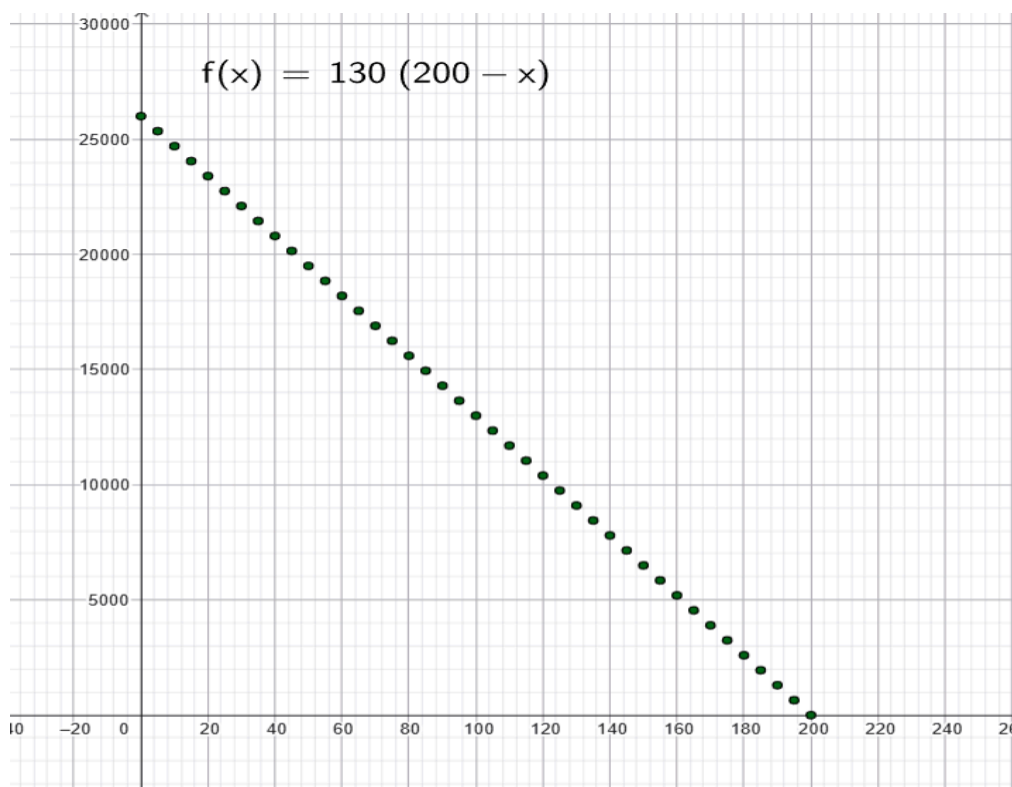
É importante lembrar que essa busca pode ser feita pelo aluno mas com o auxílio do professor, remetendo ao caso 2 da perspectiva defendida pelo autor Jonei

Cerqueira Barbosa (2001), no qual existe uma interação entre o aluno e professor em todos os processos, exceto na elaboração da situação problema.

Vale ressaltar que no texto lido da autora Hellen Christina Fernandes Apolinário (2016), ela apresenta os gráficos de forma contínua, mas, aqui neste trabalho, fiz de outra forma pois sei que a melhor representação para fazer esses gráficos não é a contínua, mas sim a discreta, visto que eles se referem às telas que são vendidas por unidade.

Os estudantes devem fazer a análise do gráfico, observando o que cada coisa significa. O número 130 é o custo de produção de uma única tela. A expressão $200-x$ nos mostra a quantidade de telas que serão vendidas naquele mês.

Figura 25 - Função do custo total no GeoGebra.



Fonte : autora

Podemos discutir aspectos relacionados ao domínio desta função tendo em vista o contexto do problema, ou seja, o preço das telas, por exemplo, não pode ser negativo, tem que ser $x \geq 0$ e a quantidade de telas vendidas também não pode ser um número negativo, com isso também temos que $x \geq 0$ pois não existe nem preço e nem quantidade de telas vendidas negativas.

Podemos perceber também que essa função se trata de um domínio discreto, isto é, a quantidade de telas vendidas tem que ser representada por um número inteiro, pois o proprietário não vai conseguir vender, por exemplo, 30.5 telas.

Com base no gráfico, os alunos podem perceber que a reta se trata de uma função do primeiro grau, onde podem fazer algumas análises, como por exemplo, o custo total é inversamente proporcional ao preço de venda, ou seja, se o preço da venda aumenta, menos telas serão vendidas e se o preço de venda diminui, mais telas serão vendidas.

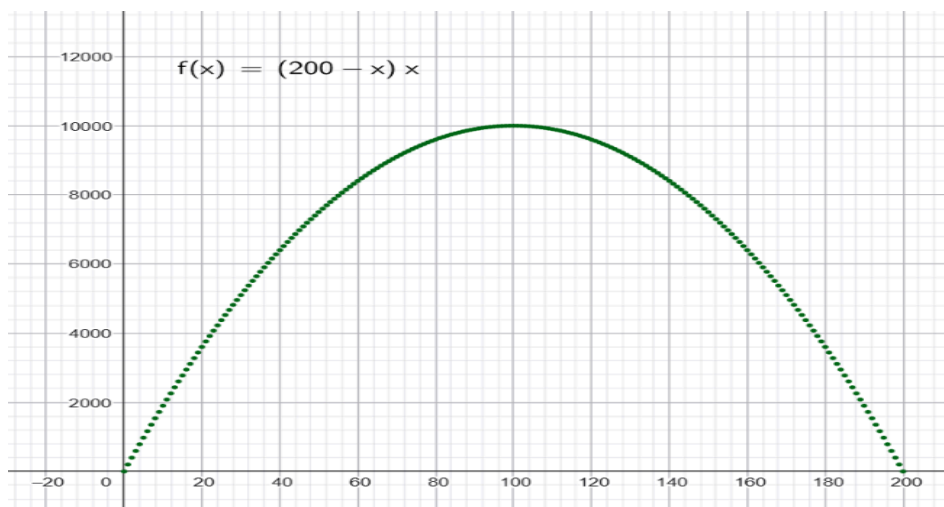
Outra análise possível de se fazer é que se o proprietário não vender nenhuma tela naquele mês, ele terá um prejuízo de R\$26000,00, isto é, o valor do x será 0 e fazendo a multiplicação de $130 \cdot 200 = 26000$. Se o proprietário vender 40 telas, ele terá um prejuízo de R\$20800,00, pois o valor do x será 40 e $200 - 40 = 160$, multiplicado por 130 resulta em 20800,00 e assim por diante.

Outra função que os alunos identificaram é o da receita total, $RT = x \cdot (200 - x)$, esta função calcula o dinheiro arrecadado pela venda de um determinado produto, onde $200 - x$ é a quantidade de telas que serão vendidas naquele mês e o x do lado de fora multiplicando é o preço de venda de cada tela.

Até aqui os alunos estão elaborando hipóteses para chegarem nessas funções obtidas, que são os dados levantados junto com um modelo matemático apropriado para a resolução do problema. Essa etapa ainda é uma relação entre professor e aluno, eles fazem isso de maneira coletiva, e o professor sempre mediando quando necessário, que é exatamente o caso 2 do Jonei Cerqueira Barbosa (2001).

Novamente eles podem fazer análises, como por exemplo, se eles fizerem a “distributiva” vão chegar em uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx$, podem analisar também a concavidade da parábola, que é para baixo pois o coeficiente a é igual a -1. E que, portanto, a função terá um ponto de máximo.

Figura 26 - Função da receita total no GeoGebra.



Fonte: autora

Aqui os alunos podem novamente fazer a análise do domínio da função, que podemos definir como $D = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 200\}$, ou seja, os pontos tem que estar entre 0 e 200 pois não é possível existir preço de tela negativo e nem quantidade vendida de tela negativo e, o proprietário no início disse que a capacidade de produção mensal de telas é de 200 telas, então não pode ultrapassar o valor de 200. Ademais, como dito anteriormente, é impossível o dono da empresa vender 25,5 telas, por isso que o domínio será os números naturais.

Novamente aqui temos uma função onde seu domínio é discreto, visto que estamos se tratando do nosso sistema monetário brasileiro, o centavo, com isso o preço das telas tem que ser um número inteiro ou com até duas casas decimais e, o total de telas fabricadas também tem que ser um número inteiro.

Para concluir as análises e chegar na resposta do problema proposto, os estudantes concluíram que o lucro total se dá pela fórmula:

Figura 27 - Função final para achar o lucro total.

$$\begin{aligned}
 LT(x) &= RT(x) - CT(x) \\
 LT(x) &= (200 - x) \cdot x - 130 \cdot (200 - x) \\
 LT(x) &= 200x - x^2 - 26000 + 130x \\
 LT(x) &= -x^2 + 330x - 26000
 \end{aligned}$$

Vale lembrar que a função lucro encontrada pelos estudantes é a diferença entre a receita total de x (RT) e o custo total de x (CT). Os estudantes substituíram as expressões encontradas anteriormente e chegaram na função final do lucro total.

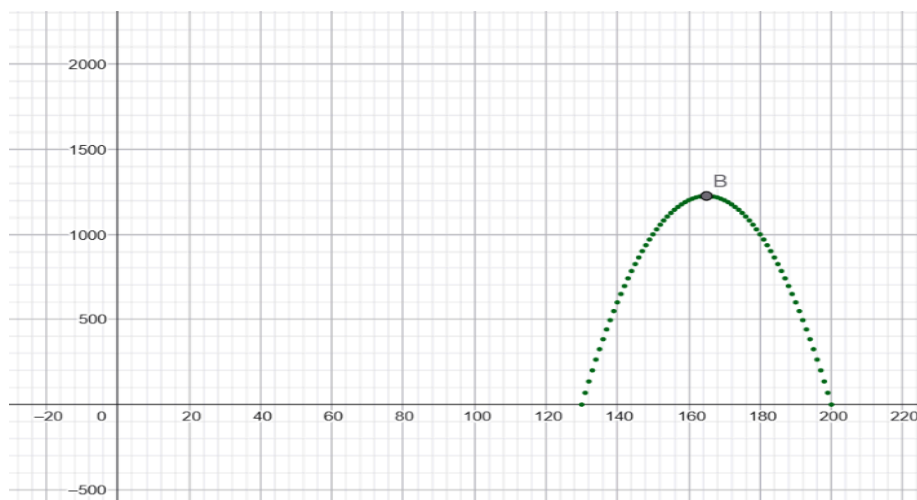
Já é de conhecimento da turma do 1º ano do ensino médio que para achar o valor máximo da função, ou seja, maximizar o lucro, eles devem achar o valor do x do vértice, dado pela fórmula: $-b/2a$, onde b é o valor que acompanha o x , isto é, 330 e, $2a$ é o valor que acompanha o x^2 , ou seja, -1.

Substituindo os valores, eles chegam na seguinte conclusão $-330/-2=165$.

Concluimos, então, que para o proprietário da empresa obter lucro máximo nas vendas de tela de capim dourado, ele deverá vender cada uma por R\$165,00.

Com isso, substituindo o valor de R\$165,00 na fórmula do lucro total, obtemos: $-(165)^2+330*(165)-26000= - 27225 + 54450 - 26000 = 1225$. Portanto, o valor máximo de lucro que ele terá mensalmente é de R\$1225,00.

Figura 28 - Função do lucro total final.



Fonte : autora

Como já vimos, o domínio dessas funções do problema é o intervalo $[0, 200]$, mas nesse caso em específico o gráfico está plotado apenas usando o domínio de lucratividade, ou seja, o intervalo de preços x para o qual o lucro é positivo ou zero. Quando calculamos as raízes da função, chegamos em $x=130$ e $x=200$ que é exatamente os pontos onde cortam o eixo x , isso significa que a empresa só terá lucro se o preço da tela estiver no intervalo $[130, 200]$, ou seja, um preço maior que R\$130,00 e menor que R\$200,00, que é exatamente o domínio

que o gráfico representa. Lembrando que estamos tratando de um domínio discreto por conta de estarmos trabalhando com centavos.

Uma coisa interessante a ser pontuada nesta atividade é que as telas de capim dourado não são comuns no Estado de São Paulo, mas essa temática pode servir como uma forma de conhecer e valorizar aspectos culturais de outras regiões do Brasil. Com isso, pensando na adaptação aqui em São Paulo, seria viável levar para os alunos uma lista de materiais que são necessários para a produção do capim dourado, visto que os alunos não conseguirão ir a campo para fazer essa coleta de dados.

Pensando nessa aula nas escolas estaduais do Estado de São Paulo, onde o material já vem pronto e temos um currículo específico para seguir, sugiro que essa adaptação de aula seja feita na aula 19 - O máximo ou o mínimo de uma função quadrática - Parte 3, pois assim eles já viram em algumas aulas anteriores a definição de máximo e mínimo da função quadrática e já fizeram bastante exercícios sobre esse tema, facilitando assim no desenvolvimento do problema proposto.

Agora pensando nas habilidades do Currículo Paulista de função do segundo grau, dentre as citadas sobre esse assunto, as melhores habilidades para se trabalhar com essa adaptação de aula são: (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais e, (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho começou com minha inquietação com o ensino de matemática nas escolas estaduais do estado de São Paulo, visto que os materiais digitais estão cada vez mais mecanizados e de uma forma padronizada. O professor, muitas vezes, vira só um transmissor do conteúdo e o aluno é responsável por decorar as fórmulas e, na maioria das vezes sem entender o porquê.

O objetivo principal deste TCC foi propor uma maneira para fazer diferente. A ideia foi adaptar duas propostas para ensinar função quadrática de um jeito mais interessante, usando como estratégia de ensino a modelagem matemática, mas o desafio era não dispensar o material digital que é fornecido pela SEDUC, a proposta foi adaptar esse material.

Depois de toda a pesquisa e análise, cheguei a algumas conclusões importantes.

A primeira, é que é possível usar a modelagem matemática para concretizar o material digital. Conclui-se que o professor não precisa dispensar os slides mas, ele pode usá-lo como ponto de partida, ou seja, o começo de uma investigação.

A segunda, é que ao fazer essa adaptação o professor pode deixar de ser o emissor da matéria e passa a ser um mediador. Ele é responsável por guiar os alunos na busca de soluções, ajudando-os a testar e entender o conteúdo de forma mais significativa.

A maior contribuição deste trabalho é que não ficamos apenas na teoria, ou seja, essas duas sequências de aula são a prova concreta de que o objetivo foi atingido. Elas servem como um guia para outros professores que passam pela mesma dificuldade e querem tentar uma aula diferente.

Porém, este é um trabalho teórico, isto é, estas aulas foram planejadas com base no material digital de 2025 e análise do currículo paulista do Ensino Médio, mas elas não foram aplicadas na prática. Não sabemos quais seriam os reais desafios dentro da sala de aula e nem quanto tempo a aula realmente demoraria.

Por conta dessa limitação, a sugestão para trabalhos futuros é levar essas sequências de aulas para a escola, seria interessante aplicar esse plano e analisar os resultados obtidos.

Dessa forma, este trabalho se encerra cumprindo meu objetivo de criar duas propostas viáveis para o ensino de função quadrática usando uma metodologia ativa.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira dos Autores de Livros Educativos (ABRALE). Análise crítica do material didático do estado de São Paulo. Disponível em: https://abrale.org/wp-content/uploads/Analise-critica-do-material-didatico-ESP_Abral-e-versao-final.pdf. Acesso em 15 de set. 2025.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: 24a. Reunião da ANPED, 2001, Caxambu. **Anais da 24a. Reunião Anual da ANPED**. Rio de Janeiro: ANPED, 2001. v. único.

BARILLARI, Paulo Eduardo. **Aplicação em sala de aula do experimento Deslocamento no Plano Inclinado para o ensino da função quadrática**. 2020. 167 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/server/api/core/bitstreams/dcc13f56-eec8-4ba0-a8e0-9f2d4cbebc68/content>. Acesso em: 25 set. 2025.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002. v. 2000. 389p.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, p. 10-27, 2010.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

KLUBER, Tiago Emanuel. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Florianópolis, Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. Modelagem Matemática e Pedagogia de Projetos: possíveis interseções. In: Encontro Nacional de educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática - Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa**. Belo Horizonte: Sbem, 2007. v. 1. p. 1-15.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. O Movimento de Práxis na Constituição de uma Concepção de Modelagem em Educação Matemática. **Boletim de Educação Matemática. BOLEMA**, v.38, p. 1-21, 2024.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**, Seduc/Undime SP. São Paulo: Seduc/SP, 2019. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/> . Acesso em: 30 set. 2025.

SÃO PAULO (Estado). **Função quadrática**. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, Centro de Mídias da Educação de São Paulo, 2025. Disponível em: <https://centrodemidiasp.educacao.sp.gov.br/> . Acesso em: 30 set. 2025.

SILVA, Alexandre Oliveira; APOLINÁRIO, Hellen Christina Fernandes. Máximos e mínimos de uma função quadrática e sua aplicabilidade no cotidiano dos alunos do ensino médio. In: XII ENEM- Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais** do 12 Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016. v. 12.

TORTOLA, Emerson; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Modelos Matemáticos e Linguagem de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo**. A Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016.