IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/17

Um estudo dos modelos BF de $D = 1 + 1$ até $D = 3 + 1$ dimensões via Hamilton-Jacobi

Gabriel Brandão de Gracia

Orientador:

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Fevereiro de 2017

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela oportunidade de ter tido contato com excelentes professores, colegas e amigos que muito me ensinaram ao longo do período do meu mestrado. Agradeço também a toda minha família, minha namorada e, principalmente, aos meus pais pelo apoio incondicional durante estes anos de estudo.

Eu também devo agradecimentos ao meu orientador **Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar** que me mostrou o prazer da boa e verdadeira leitura.

Agradeço a minha amiga **Dra. Tatiana Ramos Cardoso** por todo o apoio.

Agradeço ao **Dr. Carlos Enrique Valcárcel Flores** pelos ensinamentos sobre modelos BF.

Agradeço ao **Cnpq** (132619/2015-6) pelo apoio financeiro.

Finalmente, dedico esta dissertação ao meu querido avô, falecido em julho de 2016, que desde os tempos da minha infância veio incentivando o meu contato com a ciência.

" *A unidade é a variedade, e a variedade na unidade é a lei suprema do universo.*"

Isaac Newton

Resumo

Ao longo desta dissertação desenvolvemos o formalismo de Hamilton-Jacobi para teorias de campo para o caso de sistemas singulares e não-singulares. Em seguida, aplicamos tal formalismo nos modelos BF em $D = 1 + 1$, $D = 2 + 1$ e $D = 3 + 1$ dimensões a fim de caracterizar os seus espaços de fase. Mostramos que a partir desse formalismo é possível obter as simetrias locais desses modelos assim como os seus respectivos geradores.

Palavras chave: Hamilton-Jacobi, integrabilidade, modelos BF.

Abstract

Throughout this dissertation we develop the Hamilton-Jacobi formalism for field theories in the case of singular and non-singular systems. Next, apply such formalism on the BF models in $D = 1 + 1$, $D = 2 + 1$ e $D = 3 + 1$ dimensions in order to characterize their phase spaces. We show from this formalism, that is possible to find the local symmetries of those models as well as their respective generators.

Key words: Hamilton-Jacobi, integrability, BF models.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

As chamadas teorias BF estão fortemente relacionadas à gravitação [1], mais especificamente à sua formulação de Einsten-Cartan [2] . Essas teorias são invariantes por transformações gerais de coordenadas e também pela ação de um grupo de simetria interno. As suas ações são independentes da métrica do espaço-tempo assim como as suas funções de correlação quânticas [3]. Esses modelos são classificados como topológicos do tipo de Schwarz [4]. Eles são compostos pelos possíveis invariantes formados por uma 2-forma de curvatura $F = dA + A \wedge A$, dada em função da 1-forma A, e uma $D - 2$ forma B. A fim de se prover uma interpretação física para tais teorias é preciso associar os seus campos a objetos geométricos como as D-adas e a conexão de spin. Essa associação varia para cada modelo e para cada dimensão espaço-temporal considerada.

As características apresentadas pelos modelos BF os tornam bons candidatos para abordar uma possível quantização da gravitação. Como a sua física não depende da métrica do espaço-tempo espera-se que a sua quantização seja mais simples do que a das teorias gravitacionais que fazem uso desse objeto. Nesses modelos a estrutura do espaço-tempo não é assumida como dada a priori, ela é gerada dinamicamente. Os resultados da formulação métrica da gravitação são recuperados quando trabalhamos no subconjunto das D-adas inversíveis, aquelas que são compatíveis com uma determinada métrica. Nas teorias BF, assim como na formulação de Einsten-Cartan, as D-adas são independentes da conexão de spin e tais quantidades se correlacionam apenas nas suas configurações ditadas pelas equações de movimento na ausência de fontes de torção. Porém, tendo em vista a quantização destas teorias, nada impede, à princípio, que esses objetos geométricos possuam flutuações quânticas independentes, uma situação que não pode ser tão facilmente descrita por uma abordagem métrica da gravitação. Desse modo, as teorias BF foram usadas com sucesso no que diz respeito a quantização da gravitação em $D = 1+1$ [5] e $D = 2+1$ dimensões [6, 7], porém ainda não há uma teoria quântica consistente para o caso de $D = 3 + 1$ dimensões.

As equações de movimento da relatividade geral em $D = 1 + 1$ dimensões possuem um conteúdo trivial. A razão disso se deve ao fato de que os objetos geométricos como o tensor de curvatura de Riemann se tornam muito simples devido a baixa dimensionalidade. Assim, para contornar tal dificuldade adiciona-se à teoria um campo escalar, conhecido como dilaton e obtém-se a ação de Jackiw-Teitelboim (JT) [8]. O estudo dos modelos BF nessa dimensão deve recuperar o conteúdo das equações de movimento do modelo de (JT) sendo que a sua principal motivação reside no fato de que a sua quantização pode servir de laboratório para a quantização da gravidade em dimensões mais altas. Em $D = 2+1$ dimensões a geometria ainda é bem mais simples que a do caso quadridimensional sendo que na ausência de fontes acaba por ser idêntica ao do caso bidimensional. Pode-se mostrar que o modelo BF reproduz a ação da formulação de Einstein-Cartan (A qual só existe para $D > 2$.) assim como as suas equações de movimento. Quanto a sua quantização, podemos afirmar que ela é bem entendida e que ela também foi estudada com o intuito de se ganhar experiência para uma futura abordagem em quatro dimensões.

O estudo da teoria BF em $D = 3 + 1$ dimensões não pode ser diretamente relacionado à gravitação. Isso se deve ao fato de que a gravitação em dimensões mais baixas não possui graus de liberdade assim como as teorias BF, as quais são topológicas. Já em $D = 3 + 1$ dimensões a gravitação possui quatro graus de liberdade no seu espaço de fase e portanto uma teoria puramente topológica não pode descrevê-la. O modelo BF quadridimensional possui uma estrutura altamente simétrica exibindo invariância pelas transformações de gauge e de shift as quais serão introduzidas mais adiante. Essas simetrias são tais que todas as configurações de campo podes ser alcançadas por elas, tornando a teoria "puro gauge"o que implica na ausência de graus de liberdade. Assim, para descrever a gravitação em termos de uma teoria BF é preciso adicionar termos que violem parte destas simetrias de uma maneira tal que a teoria passe a propagar os graus de liberdade pertinentes à gravitação. Essa quebra de simetria pode ser feita através da adição de multiplicadores de Lagrange que impõem vínculos sobre o campo B ou então através da introdução de um termo que quebre explicitamente uma simetria interna pentadimensional, o que leva aos modelos de Plebanski [9] e de Freidel-Starodubtsev [10], respectivamente.

Uma completa caracterização do espaço de fase das teorias BF pode ser um ponto de partida interessante para o entendimento da quantização destes modelos. Atualmente, existe uma ampla gama de trabalhos nos quais as suas estruturas canônicas são analisadas, em geral em termos do algorítmo de Dirac-Bergmann [11]. O intuito desta dissertação é fornecer uma caracterização alternativa destes modelos ao abordar o seu espaço de fase através do formalismo de Hamilton-Jacobi à la-Caratheódory. Acreditamos que esta abordagem alternativa se faz necessária porque, como veremos em breve, ela se baseia em teoremas matemáticos que garantem a sua solidez e, além disso, é possível obter os geradores das simetrias de gauge de um dado modelo de uma maneira natural, que se origina da sua estrutura interna.

O formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ) consiste basicamente no método das Lagrangianas equivalentes de Caratheodory em cálculo variacional [12]. Esse formalismo se caracteriza por um conjunto de equações diferenciais de Hamilton-Jacobi, as chamadas Hamiltonianas. Ele possui uma extensão para sistemas singulares, primeiramente introduzida em [13]. A evolução do sistema é obtida da diferencial fundamental a qual depende de parâmetros locais arbitrários e do tempo, os quais se relacionam com uma classe de Hamiltonianas chamadas de involutivas e com a Hamiltoniana canônica, respectivamente [14, 15]. Esse procedimento é baseado nas condições de integrabilidade de Frobenius. As transformações canônicas são obtidas ao se considerar a dinâmica dos campos gerada pelos parâmetros locais arbitrários. As transformações de gauge são obtidas naturalmente deste procedimento ao se considerar o subconjunto das trasnformações canônicas que deixam a ação invariante. Nesse ponto é interessante notar que no caso do procedimento de Dirac conjectura-se que as transformações de gauge são geradas pelos vínculos primários, por meio do algoritmo de Castellani [16], o que de fato ocorre em muitos casos, porém existem contra-exemplos [17] que demonstram a sua falta de generalidade. Já no procedimento de Hamilton-Jacobi, como mencionado anteriormente, estes geradores surgem naturalmente da estrutura interna da teoria. Esse formalismo não se trata de um método de consistência, ele é um formalismo propriamente dito, embasado no método de Caratheodory das Lagrangianas equivalentes e do teorema de Frobenius. Alguns exemplos de aplicações do formalismo estão no campo das teorias de gauge, como as teorias topologicamente massivas [18], modelos gravitacionais [19] e no estudo dos modelos BF em $D = 1 + 1$ e $D = 2 + 1$ dimensões [20, 21]. Esse formalismo também foi estendido para sistemas Berezinianos [22].

O conteúdo apresentado nessa dissertação será abordado da seguinte maneira: Primeiramente, no capítulo 2 vamos introduzir o formalismo de Hamilton-Jacobi voltado para teorias de campo. De posse deste formalismo vamos aplicá-lo nas teorias BF em $D = 1+1$, $D = 2+1$ e $D = 3+1$ dimensões nos capítulos 3, 4 e 5, respectivamente. Cada um desses capítulos possuirá uma seção destinada à introdução e à motivação ao estudo do modelo BF em questão. Quanto ao modelo quadridimensional nos limitaremos a estudar a sua versão puramente topológica que servirá como base a um futuro estudo dos modelos BF gravitacionais em $D = 3+1$ dimensões. No capítulo 6 finalmente concluímos. No que diz respeito às notações, as seguintes observações serão pertinentes no momento da leitura desse trabalho:

Ao longo dessa dissertação, sempre que forem apresentados funcionais como $F^a(x, B(x))$ e $B^a(x)$, estaremos implicitamente utilizando a definição:

$$\frac{\delta F^a}{\delta B^b} \equiv \int d^D x \, \frac{\delta F^a(x)}{\delta B^b(y)} \; ; \qquad \frac{\delta B^a(x)}{\delta B^b(y)} = \delta^a_b \delta^D(x-y)$$

Sendo que D se refere a dimensão do espaço-tempo. Assim, sempre que os argumentos não forem mostrados explicitamente deve-se ler a expressão da maneira exposta acima. Em muitas situações vamos trabalhar com funcionais tomados a tempos iguais. Neste caso, a definição deve ser modificada da seguinte maneira :

$$\frac{\delta F^a}{\delta B^b} \equiv \int d^{D-1} x \, \frac{\delta F^a(x)}{\delta B^b(y)} \; ; \qquad \frac{\delta B^a(x)}{\delta B^b(y)} = \delta^a_b \delta^{(D-1)}(x-y)$$

Bibliografia

[1] L. Freidel and S. Speziale,*On the relations between gravity and BF theories*, SIGMA **8** 032 (2012).

[2] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific Publishing Co, Singapore (1985).

[3] E. Witten,*Topological Quantum Field Theory*, Commun. Math. Phys. **117**, 353 (1988).

[4] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, G. Thompson, Topological field theory, Phys. Rept. 209, 129 (1991).

[5] A. H. Chamseddine and D. Wyler, *Topological Gravity in* $1+1$ *dimensions*, Nucl. Phys. B **340** 595-616 (1990).

[6] I. Oda, S. Yahikozawa,*Effective Actions of* $(2+1)$ *dimensional Gravity and BF Theory*,Class. Quantum Grav. **11**, 2653 (1994).

[7] E. Witten, *Topology-changing amplitudes in 2 + 1 dimensional gravity*, Nucl. Phys. B **323** 113-140 (1989).

[8] R. Jackiw and C. Teitelboim, *Quantum Theory of Gravity*, edited by S. Christensen (Adam Hilger, Bristol, 1984).

[9] J. F. Plebanski, *On the separation of Einstenian substructures*, J. Math. Phys. **18** 2511 (1977).

[10] L. Freidel and A. Starodubtsev, *Quantum gravity in terms of topological observables* arXiv:hep-th/0501191 (2005).

[11] P. A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J.Math. **2** 129 (1950);
P. A.M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3** 1 (1951);
P. A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics* New York:Yeshiva University (1964).

[12] C. Caratheódory, *Calculus of Variations and Partial Diferential equations of the First Order* 3rd edn (American Mathematical Society) (1999).

[13] Y. Güler, Il Nuovo cimento B **100** 251 (1987);

[14] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C.E. Valcárcel, *Non-involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, Ann. Phys. **323** 3137 (2008).

[15] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C. E. Valcárcel, *Involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, J. Math. Phys. **55** 112901 (2014).

[16] L. Castellani , *Symmetries in constrained Hamiltonian systems*, Ann. of Phys. **143** 357 (1982).

[17] D.M. Gitman, I. V. Tyutin, *Symmetries and physical functions in general gauge theory*, Int. J. Mod. Phys. A **21** 327 (2006).

[18] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel and G.R. Zambrano, *Topologically mas sive Yang-Mills field: A Hamilton-Jacobi approach*, J. Math. Phys. **55** 042902 (2014).

[19] B.M. Pimentel, P.J. Pompéia and J.F. da Rocha-Neto, *The Hamilton-Jacobi approach to teleparalelism*, Il Nuovo cimento B **120** 981 (2005);
M.C. Bertin, B.M. Pimentel and P. J. Pompeia *General relativity in two dimensions: A Hamilton-Jacobi constraint analysis*, Ann.Phys. **325** 2499 (2010).

[20] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel, *Two dimensional background field gravity: A Hamilton-Jacobi analysis*, J. Math. Phys. **53** 102901 (2012).

[21] N.T. Maia, B.M. Pimentel and C.E. Valc arcel, *Three dimensional background field gravity:A Hamilton-Jacobi analysis*, Class. Quantum Grav. 32 185013 (2015).

[22] B.M. Pimentel , R.G. Teixeira and J.L. Tomazelli, *Hamilton-Jacobi approach to Berezinian singular systems*, Ann. Phys. **267** 75 (1998);
M.C Bertin , B.M. Pimentel and P.J. Pompeia, *First order actions: A new view*, Mod. Phys. Lett. A **20** 2873 (2005); M.C. Bertin , B.M. Pimentel and P.J. Pompeia, *Hamilton-Jacobi approach for first order actions and theories with higher derivatives*, Ann. Phys. **323** 527 (2008).

Capítulo 2

Formalismo de Hamilton-Jacobi

O objetivo deste capítulo é o de construir o formalismo de Hamilton-Jacobi aplicado em teorias de campo a partir da abordagem do problema variacional à la Carathéodory [1].

A construção do formalismo se dará no contexto de teorias de campo cuja densidade Lagrangiana [1] $\mathcal{L}$ depende dos campos e de suas primeiras derivadas espaço-temporais, ou seja, ela é da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))$.

O funcional que representa a ação correspondente à densidade Lagrangiana $\mathcal{L}(x, \phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x))$ segue dado abaixo:

$$A[\phi] = \int \mathcal{L}(x, \phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) dw \tag{2.1}$$

Em que $dw = dx^{d+1}$ denota o elemento de volume espaço-temporal numa dimensão arbitrária. Assumiremos que a ação acima é invariante pelo grupo de simetria correspondente à métrica que adotarmos para o espaço-tempo.

As equações de movimento, as quais representam o conteúdo físico da teoria, são obtidas a partir do princípio de Hamilton, ou seja, a partir da configuração de campos que torna a ação seja estacionária. Assim, a sua primeira variação induzida pela variação dos campos dos quais ela depende deve se anular $\delta A = 0$.

Desse modo, ações definidas a menos de termos do tipo $\int \delta S \equiv \int \frac{dS^\mu}{dx^\mu} dw$ em que S^μ depende apenas das coordenadas do espaço-tempo e dos campos $S^\mu = S^\mu(x, \phi^a)$ dão origem ao mesmo problema variacional se considerarmos que a variação dos campos é nula nas fronteiras $\partial\Omega$ da região do espaço-tempo Ω em que a ação está definida.

$$\delta \bar{A}[\phi] \equiv \delta\left(A[\phi] - \int \delta S\right) = \delta\left(A[\phi] - \int_{\partial\Omega} S^\mu \eta_\mu \; d\partial\Omega\right) = \delta A[\phi] \tag{2.2}$$

Consideramos que na expressão acima $\int \delta S$, de acordo com o teorema de Gauss-Ostrogradski, depende apenas do fluxo de S^μ na hipersuperfície representada pela fronteira $\partial\Omega$ de Ω, sendo que η_μ é o vetor unitário normal a esta hipersuperfície. Assim, uma variação de $\bar{A}[\phi]$ com relação aos campos $\phi^a(x)$ deve corresponder a variação de $A[\phi]$ e isso se deve ao fato de que estamos assumindo que a configuração dos campos na fronteira $\partial\Omega$ é fixa.

A fim de construirmos o formalismo de Hamilton-Jacobi pela abordagem de Carathéodory precisamos fazer do uso do conceito de Lagrangianas equivalentes [2]:

$$\bar{\mathcal{L}}(x, \phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) \equiv \mathcal{L}(x, \phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x)) + \frac{dS^\mu}{dx^\mu} \tag{2.3}$$

[1] A qual muitas vezes, por abuso de linguagem, chamaremos simplesmente de Lagrangiana.

Para que $\bar{\mathcal{L}}$ descreva a mesma física que $\mathcal{L}$ é preciso assumir que a variação dos campos seja nula na fronteira $\partial\Omega$, o que limita nossa análise aos casos que Ω tenha fronteira fixa, ou seja, $\delta x^\mu\big|_{\partial\Omega} = 0$ pois caso contrário teríamos $\delta\phi^a(x)\big|_{\partial\Omega} \neq 0$ já que os campos iriam variar devido a uma mudança correspondente de seu argumento.

De acordo com Carathéodory, a condição suficiente para que $A[\phi]$ seja estacionária, assumindo que $\partial_\mu\phi^a(x) = \beta^a_\mu(x, \phi^a)$ seja a solução do problema variacional, está em encontrar uma função S^μ tal que:

$$\bar{\mathcal{L}}(x, \phi^a(x), \beta^a_\mu) = 0 \tag{2.4}$$

Sendo que $\bar{\mathcal{L}}$ deve ser sempre maior que zero, quando calculado numa configuração de campos na vizinhança [2] daquela em que o problema variacional está definido.

A afirmação acima é equivalente a condição de extremização:

$$\left.\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\partial_\mu\phi^a}\right|_{\partial_\mu\phi^a=\beta^a_\mu} = 0 \tag{2.5}$$

2.1 A equação de Hamilton-Jacobi

O formalismo de Hamilton-Jacobi pode ser construído a partir das condições impostas pela abordagem de Carathéodory e consistirá na obtenção das funções S^μ. Assim, de acordo com a condição de extremização, temos que:

$$\left.\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\partial_\mu\phi^a}\right|_{\partial_\mu\phi^a=\beta^a_\mu} = 0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a} - \frac{\delta}{\delta\partial_\mu\phi^a}\left(\frac{dS^\mu}{dx^\mu}\right) \tag{2.6}$$

A equação acima pode ser reescrita se fizermos uso da igualdade $\frac{dS^\mu}{dx^\mu} = \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\delta S^\mu}{\delta\phi^a}\partial_\mu\phi^a$, do fato de que para sistemas com fronteira fixa as derivadas espaço-temporais comutam com as variações com relação aos campos e de que $S^\mu = S^\mu(x, \phi^a)$:

$$\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\partial_\mu\phi^a} = 0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a} - \frac{\delta S^\mu}{\delta\phi^a} \tag{2.7}$$

Ao usar esse resultado na equação (2.4), temos:

$$\bar{\mathcal{L}}(x, \phi^a(x), \beta) = 0 = \mathcal{L} - \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} - \partial_\mu\phi^a\frac{\delta S^\mu}{\delta\phi^a} = \mathcal{L} - \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} - \partial_\mu\phi^a\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a} \tag{2.8}$$

Dessa maneira acabamos por obter a importante relação que dará origem a chamada equação de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = \mathcal{L} - \partial_\mu\phi^a\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a} \tag{2.9}$$

[2] A vizinhança da configuração de campos $\phi^a(x)$ é definida com relação a uma outra configuração $\tilde{\phi}^a(x)$, para x^μ pertencentes à variedade Ω, da seguinte maneira: $|\phi^a(x) - \tilde{\phi}^a(x)| \leq \epsilon^a$. Além disso, para todo x^μ pentencente à Ω também devemos ter $|\partial_\mu\phi^a(x) - \partial_\mu\tilde{\phi}^a(x)| \leq \gamma^a_\mu$. Tanto ϵ^a quanto γ^a_μ representam um conjunto de números reais positivos e infinitesimais.

Nesse ponto será importante fazer uma rápida digressão a respeito do papel que a função de Weierstrass E_w, ainda a ser definida, representa no contexto do problema variacional estudado. Consideremos a expansão da Lagrangiana numa vizinhança muito próxima (Consideraremos que as configurações físicas são obtidas do extremo da ação, nesse caso, o seu mínimo.) da configuração da solução do problema variacional:

$$\mathcal{L}^*(x,\phi^*) = \mathcal{L}(x,\phi) + \left.\frac{\delta\mathcal{L}^*}{\delta\partial_\mu\phi^{a*}}\right|_{\phi^*=\phi}\gamma^a_\mu + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2\mathcal{L}^*}{\delta\partial_\mu\phi^{a*}\delta\partial_\nu\phi^{b*}}\right|_{\phi^*=\phi}\gamma^a_\mu\gamma^b_\nu + ... \tag{2.10}$$

Em que $\gamma^a_\mu = \partial_\mu\phi^{a*} - \partial_\mu\phi^a$.

A função de Weierstrass segue definida abaixo:

$$E_w \equiv \mathcal{L}^* - \mathcal{L} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a}\gamma^a_\mu \tag{2.11}$$

Ao comparar as expressões acima temos que:

$$E_w = \frac{1}{2}\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a\delta\partial_\nu\phi^b}\gamma^a_\mu\gamma^b_\nu + ... \tag{2.12}$$

Portanto, podemos concluir que se $\phi^a(x)$ é uma configuração de mínimo, correspondente ao campo de velocidades $\partial_\mu\phi^a(x) = \beta^a_\mu$, temos que $E_w > 0$ e portanto *det* $W^{\mu\nu}_{ab} > 0$, sendo que a matriz $W^{\mu\nu}_{ab}$ é dada pela expressão:

$$W^{\mu\nu}_{ab} = \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a\delta\partial_\nu\phi^b} \tag{2.13}$$

A matriz acima, chamada de Hessiana, está relacionada a possibilidade de ocorrência de um isomorfismo no mapeamento entre o espaço tangente dos campos ϕ^a e as novas variáveis canônicas que cobrem o espaço cotangente que será definido por uma transformação de Legendre. Mais adiante veremos que se *det* $W^{\mu\nu}_{ab} \neq 0$ esse mapeamento é inversível. A partir das discussões acima, podemos concluir que esta condição também está relacionada a ocorrência de um extremo no problema variacional.

Após a conclusão dessa pequena digressão, retornaremos ao estudo da equação dada abaixo:

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = \mathcal{L} - \partial_\mu\phi^a\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^a} \equiv -\mathcal{H}_c \tag{2.14}$$

Na expressão acima definimos $\mathcal{H}_c$ como a versão covariante da Hamiltoniana canônica aplicada ao contexto das teorias de campo. Desse modo surge a necessidade de se obter um análogo das transformações de Legendre para o caso em que se trabalha com esse tipo de teoria.

Na mecânica clássica o funcional de ação é do tipo $A[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t))dt$, sendo que $q^i(t)$ são as coordenadas generalizadas do espaço de configuração. Assim, quando variamos $A[q]$ e impomos que as equações de movimento sejam obedecidas, temos:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i\right] = p_i\delta q^i|_{t_2} - p_i\delta q^i|_{t_1} \tag{2.15}$$

Sendo que $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$.

A $1-$ forma $p_i \delta q^i$, de acordo com a teoria das transformações canônicas, é a função geratriz das transformações de ponto no espaço de configuração, sendo que p, o momento conjugado, é o gerador das transformações canônicas no espaço das coordenadas.

O análogo dessa situação em teoria de campos é dado pela expressão abaixo (Estamos considerando que as equações de movimento estão sendo satisfeitas.):

$$\delta A = \int dw \frac{d}{dx^\mu}\left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a}\delta\phi^a - T^\mu{}_\beta \delta x^\beta\right] \tag{2.16}$$

Na expressão acima, o tensor de energia momento é dado por $T^\mu{}_\beta = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a}\partial_\beta \phi^a - \delta^\mu{}_\beta \mathcal{L}$.

Por analogia com a expressão obtida da mecânica clássica inferimos que $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a}$ gera transformações nas "coordenadas generalizadas" $\phi^a(x)$. O tensor de energia momento gera translações nas coordenadas do espaço-tempo, do mesmo modo que a Hamiltoniana canônica, no contexto da mecânica clássica, gera translações no parâmetro temporal.

Essas analogias sugerem que o mapeamento dos campos tangentes $\partial_\mu \phi^a(x)$ com as novas variáveis canônicas que denotam os campos cotangentes, os momentos canônicos, deve ser definido da seguinte maneira [3]:

$$\pi_a^\mu(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a} \tag{2.17}$$

Podemos também concluir que deve haver uma forte analogia entre a Hamiltoniana canônica covariante e o tensor de energia momento. A princípio, somos levados a pensar em relacioná-la com o traço desse tensor, porém tal associação iria depender da dimensão do espaço-tempo. Para evitar essa situação acabamos por concluir que será melhor associarmos $\mathcal{H}_c(x)$ com uma dada projeção do tensor de energia momento ao longo de uma certa direção pré-determinada do espaço-tempo. Essa associação quebraria a invariância por reparametrizações da teoria, porém, como veremos logo adiante, essa característica será bem vinda.

Após levar em conta as considerações anteriores, concluímos que a equação de Hamilton-Jacobi pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \partial_\mu \phi^a \pi_a^\mu - \mathcal{L}(x, \phi^a, \partial_\mu \phi^a) = 0 \tag{2.18}$$

Em que $\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi^a} = \pi_a^\mu(x)$ e $\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu}$ pode ser definido como $\pi^0(x)$.

Se for possível expressar toda a equação de Hamilton-Jacobi em termos dos momentos $\pi_\mu^a = \frac{\delta \mathcal{S}_\mu}{\delta \phi^a}$, ou seja, se pudermos inverter a relação $\pi_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a} = \psi_a^\mu(\partial_\mu \phi^a, x, \phi^a)$, esta equação irá possuir apenas derivadas espaço-temporais parciais, assim como derivadas funcionais de S^μ.

Isso nos permitiria, em tese, obter tal função. Para isso, a condição abaixo se faz necessária:

$$det\left[\frac{\delta \psi_a^\mu}{\delta \partial_\nu \phi^b}\right] = det\left[\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a \delta \partial_\nu \phi^b}\right] \neq 0 \tag{2.19}$$

Como a matriz Hessiana é dada por $W_{ab}^{\mu\nu} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a \delta \partial_\nu \phi^b}$, acabamos por concluir que para encontrar S^μ é preciso que essa matriz não seja singular. Assim, essa condição está relacionada à inversibilidade do mapeamento entre os campos tangentes e as novas variáveis canônicas cotangentes e, como visto anteriormente, ela também está relacionada à obtenção de extremos do problema variacional.

Se a condição de não-singularidade da Hessiana for respeitada, a equação de Hamilton-Jacobi pode ser escrita apenas em termos de S^μ, das coordenadas do espaço-tempo e das coordenadas generalizadas ϕ^a, pois $\partial_\mu\phi^a$será expresso em termos de π^a_μ:

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \mathcal{H}_c(x, \phi^a, \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi^a}) = 0 \tag{2.20}$$

A equação acima é uma equação diferencial funcional para S^μ que é em geral não linear e que é de primeira ordem nas derivadas de S^μ. Para resolvermos a equação para S^μ seria preciso conhecer a Lagrangiana como função de $\partial_\mu\phi^a = \beta^a_\mu(x, \phi^a)$, porém ainda não temos um meio de se obter a configuração de campos que minimiza o funcional de ação. No entanto, sabe-se que equações diferenciais parciais de primeira ordem possuem sempre um sistema de equações diferenciais ordinárias (E.D.O) relacionado. Esse sistema pode ser encontrado pelo método das características desenvolvido primeiramente por Cauchy. Esse sistema de E.D.O nada mais é que o equivalente para campos das equações de Hamilton, as quais nos permitem conhecer as configurações físicas do sistema.

2.2 Nulidade da Hamiltoniana covariante

Um dos problemas com os quais a formulação Hamiltoniana covariante depara é o fato de que para sistemas descritos por ações invariantes por reparametrizações pode-se mostrar que a função Hamiltoniana canônica se anula identicamente. Na realidade, a nulidade da Hamiltoniana covariante é condição necessária e suficiente para que a ação seja invariante por reparametrizações e são justamente as teorias descritas por este tipo de ação que nos interessam pois as teorias de campo relativísticas são desse tipo.

A fim de se demonstrar a afirmação acima, consideraremos a seguinte reparametrização representada por uma transformação de coordenadas [3] , assim como sua matriz Jacobiana:

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\mu) \ ; \ b^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \ ; \ J \equiv det\left[b^\mu{}_\nu\right] \tag{2.21}$$

Em que $\bar{x}^\mu$ denotam as coordenadas transformadas, que são funções das coordenadas antigas, e $b^\mu{}_\nu$ é a matriz que relaciona as coordenadas $\bar{x}^\mu$ e x^μ.

A ação se transforma da seguinte maneira sob reparametrizações[4]:

$$A[\phi] = \int_{\bar{\Omega}} \mathcal{L}(\phi^a, \bar{\partial}_\mu\phi^a) d\bar{w} = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi^a, b^\nu_\mu \partial_\nu\phi^a)|J|^{-1} dw \tag{2.22}$$

Usamos o fato de que sob uma transformação de coordenadas $d\bar{w} = |J|^{-1}dw$. A notação $\bar{\partial}_\mu$ significa $\bar{\partial}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu}$.

[3]Neste ponto é importante frisar que essa transformação de coordenadas não representa uma transformação de simetria do espaço-tempo, trata-se apenas de uma maneira de renomear as $d+1$ coordenadas dos vetores. Um exemplo no espaço Minkowiskiano quadri-dimensional seria assumir $x^0 = t$ e $\vec{x} = x^i$ em que se fixa uma dada parametrização ou então podemos citar o uso de coordenadas do cone de luz $x_+ = (x_0 + x_3)$, $x_- = (x_0 - x_3)$, x_1, x_2 as quais não são atingíveis por uma transformação de Lorentz e se tratam de uma dada fixação de parâmetros. Vale dizer ainda que os índices vetoriais dos campos não se transformam por reparametrizações pois eles, por definição, se transformam pelo grupo de simetria do espaço em que estão definidos. Desse modo, a transformação ligada à reparametrização age somente nos seus argumentos.

[4]Estamos considerando uma Lagrangiana explicitamente independente dos parâmetros.

Para que a ação seja invariante por reparametrizações, é preciso que a Lagrangiana obedeça a relação:

$$\mathcal{L}(\phi^a, b^\nu_\mu \partial_\nu \phi^a) = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)|J| \tag{2.23}$$

Ao variar o lado esquerdo da equação acima com relação à matriz b^ν_μ, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\phi^a, b^\nu_\mu \partial_\nu \phi^a)}{\partial b^\nu_\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a_\omega} \frac{\partial b^\gamma_\omega}{\partial b^\nu_\mu} \phi^a_\gamma = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a} \partial_\nu \phi^a \tag{2.24}$$

Na expressão acima usamos $\frac{\partial b^\gamma_\omega}{\partial b^\nu_\mu} = \delta^\gamma_\nu \delta^\mu_\omega$.

Ao variar o lado direito da equação (2.23), pode-se mostrar que:

$$\frac{\partial(\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a)|J|)}{\partial b^\nu_\mu} = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) \frac{\partial |J|}{\partial b^\nu_\mu} = \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\mu \phi^a) \delta^\mu_\nu \tag{2.25}$$

A partir do resultado acima e de (2.24) aplicado na equação (2.23), mostramos que a condição necessária para que a ação seja invariante por reparametrizações é que o seu tensor de energia momento se anule:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a} \partial_\nu \phi^a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} = 0 \tag{2.26}$$

A partir dessa informação podemos concluir que a Hamiltoniana canônica covariante também deve ser identicamente nula. Pode-se mostrar que a expressão acima também é uma condição suficiente para que haja invariância por reparametrizações.

Existem diferentes maneiras de se contornar a dificuldade apresentada acima. Aquelas que pretendem manter uma abordagem covariante fazem uso de condições que acabam por descartar aplicações de interesse físico.

Assim, a melhor alternativa para resolução desta dificuldade está em quebrar essa invariância por reparametrizações. Dessa maneira, fazeremos uma decomposição $d+1$ do espaço-tempo, em que d designa as coordenadas espacias, de modo que o espaço-tempo será foliado em hipersuperfícies que são ortogonais ao eixo temporal. O simples uso dessa foliação já deixa implícita a escolha de uma parametrização particular o que claramente quebra a invariância por reparametrizações da teoria.

Essas são as chamadas hipersuperfícies de Cauchy que são ortogonais ao eixo temporal em cada ponto e nunca se interceptam [5] . A evolução dinâmica do sistema se caracteriza pela evolução de uma dessas hipersuperfícies em um tempo $t = 0$, $\Sigma(x, t = 0)$ para outra num tempo t qualquer $\Sigma(x, t)$. A evolução temporal dessas hipersuperfícies é ditada pela Hamiltoniana canônica:

$$H = \int_\Sigma \mathcal{H}_c d\sigma \tag{2.27}$$

Na expressão acima temos uma integração nas coordenadas espaciais da superfície $\Sigma(x, t = t_0)$ num dado tempo fixo.

[5] Veremos mais adiante que esta caracterísitica está relacionada à integrabilidade do sistema a qual será verificada via teorema de Frobenius.

Essa expressão quebra parte da covariância inicial da teoria porém continua sendo invariante pelo subgrupo das transformações espaço-temporais que deixam $\Sigma(x,t)$ invariante, como por exemplo, rotações e translações espaciais. A densidade de Hamiltoniana $\mathcal{H}_c$ que figura acima é obtida de uma projeção do tensor de energia–momento ao longo de um vetor unitário V^α tangente ao eixo temporal:

$$V^\alpha V^\beta T_{\alpha\beta} = \mathcal{H} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a}\partial_0\phi^a - \mathcal{L} = \pi_a^0\partial_0\phi^a - \mathcal{L} \tag{2.28}$$

Uma condição de fronteira adequada ao presente caso e que passaremos a utilizar é a de que os campos devem se anular na fronteira $\partial\Sigma$, que se encontra no infinito espacial, da superfície de Cauchy:

$$\lim_{x\to\partial\Sigma}\phi^a(x) = 0 \tag{2.29}$$

A condição acima é bem razoável haja vista que estamos interessados em campos que representem uma configuração centrada numa certa região de interesse e que tenha os seus efeitos diminuídos drasticamente para distâncias muito maiores do que aquelas típicas do problema físico em que estão envolvidos.

2.3 Formalismo de Hamilton-Jacobi parametrizado

Agora procederemos com a decomposição $d+1$ aplicada aos resultados obtidos anteriormente. A ação equivalente $\bar{A}[\phi]$ possui a forma:

$$\bar{A}[\phi] = A[\phi] - \int\frac{dS^\mu}{dx^\mu}dw = A[\phi] - \int\frac{dS^0}{dt}dw \tag{2.30}$$

Na expressão acima foi usado que $\int(\int_\Sigma \frac{dS^i}{dx^i}d\sigma)dt$, de acordo com o teorema de Gauss-Ostrogadski, está na fronteira $\partial\Sigma$ e se anula devido a imposição das condições de fronteira (2.29).

Dessa maneira, definindo $S^0 \equiv S$ temos que:

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \frac{dS}{dt} \tag{2.31}$$

A projeção no eixo temporal da condição de que $\bar{\mathcal{L}}(x,\phi^a,\beta_\mu^a)$ representa um extremo de $\bar{\mathcal{L}}$, que é oriunda de uma das condições obtidas da abordagem de Carathéodory do problema variacional, vem dada abaixo:

$$\left.\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}}{\delta\partial_0\phi^a}\right|_{\partial_0\phi^a=\beta_0^a} = 0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a} - \frac{\delta}{\delta\partial_0\phi^a}\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \partial_0\phi^b\frac{\delta S}{\delta\phi^b}\right] = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a} - \frac{\delta S}{\delta\phi^a} \tag{2.32}$$

Para deduzir a expressão acima usamos que $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \partial_0\phi^a\frac{\delta S}{\delta\phi^a}$ e que $S = S(\phi^a, x)$.

Dessa expressão, concluímos que :

$$p_a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a} = \frac{\delta S}{\delta\phi^a} \tag{2.33}$$

Em que $p_a \equiv \pi_a^0$.

A segunda condição oriunda da abordagem de Carathéodory do problema variacional implica no resultado abaixo:

$$\bar{\mathcal{L}}\bigg|_{\partial_0\phi^a=\beta_0^a} = 0 = \mathcal{L} - \frac{dS}{dt} = \mathcal{L} - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\delta S}{\delta \phi^a}\partial_0\phi^a = -\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{L} - p_a\partial_0\phi^a \tag{2.34}$$

Na última igualdade usamos $p_a = \frac{\delta S}{\delta \phi^a}$.

A expressão acima representa a equação de Hamilton-Jacobi. Se a matriz Hessiana projetada no eixo temporal $W_{ab}^{00} \equiv W_{ab}$ [6] for não singular, as velocidades $\partial_0\phi^a$ poderão ser escritas como funções dos momentos $\partial_0\phi^a = \eta^a(p^a, \phi^a)$ e obteremos uma equação diferencial funcional que relaciona S e ϕ^a. Assim, a equação de Hamilton-Jacobi no formalismo parametrizado segue dada abaixo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \bigg(p_a\partial_0\phi^a - \mathcal{L}(\phi^a, \eta^a(p^a, \phi^a)\bigg) = 0 \to \Phi_0 \equiv p_t + \mathcal{H}_c = 0 \tag{2.35}$$

Em que $p_t \equiv \frac{\partial S}{\partial t}$ e $\mathcal{H}_c = \bigg(p_a\partial_0\phi^a - \mathcal{L}(\phi^a, \eta^a(p^a, \phi^a)\bigg)$.

2.4 Equações características

Conforme havíamos comentado, a equação de Hamilton-Jacobi, é uma equação diferencial funcional parcial, não-linear e de primeira ordem nas derivadas. Não temos garantia de que podemos sempre encontrar uma solução para essa equação, mas se caso isso for possível, obteríamos informações a respeito dos momentos $p_a = \frac{\delta S}{\delta \phi^a}$, porém ainda desconheceríamos a configuração física dos campos, aquela que extremiza a ação. Como as equações parciais de primeira ordem possuem sempre um sistema de E.D.O's relacionado pelo método das características, desenvolvido por Cauchy, mostraremos que esse sistema, para modelos com Hessiana não-singular, corresponde justamente às equações de Hamilton, as quais permitem a obtenção de $\phi^a(x)$. Além dessas equações, acabamos por obter também uma equação para a função S. Tais equações aliadas às condições relacionadas à abordagem de Carathéodory do problema variacional formam o chamado quadro completo de Carathéodory.

A fim de obtermos as equações características variaremos a equação de Hamilton-Jacobi (H-J) Φ_0 com relação ao momento canônico p_a:

$$\frac{\delta \Phi_0}{\delta p^a} = \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta p^a} = \frac{\delta}{\delta p^a}\bigg(\partial_0\phi^a p_a - \mathcal{L}(\phi^a, \beta^a)\bigg) = \partial_0\phi_a \tag{2.36}$$

Da expressão acima acabamos por recuperar uma das equações de Hamilton na sua versão para campos:

$$\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta p^a} = \partial_0\phi_a \tag{2.37}$$

[6] Apenas a sua projeção no eixo temporal nos interessa pois ao quebrar a invariância por reparametrizações da teoria acabamos por trabalhar apenas com os momentos $\pi_a^0 \equiv p_a$. Assim, W_{ab}^{00} nos informa a respeito da inversibilidade da transformada de Legendre não covariante que está relacionada ao mapeamento entre p_a e $\partial_0\phi_a$.

Para obter as demais equações características tomaremos a derivada total de p_a com relação ao tempo:

$$\frac{dp_a}{dt} = \frac{\partial p_a}{\partial t} + \partial_0 \phi^b \frac{\delta p_a}{\delta \phi^b} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta S}{\delta \phi^a}\right) + \partial_0 \phi^b \frac{\delta p_a}{\delta \phi^b} = \frac{\delta p_t}{\delta \phi^a} + \partial_0 \phi^b \frac{\delta p_a}{\delta \phi^b} \tag{2.38}$$

Em que $p_t = \frac{\partial S}{\partial t}$.

Um resultado útil pode ser obtido ao variar a equação de H-J com relação aos campos ϕ^a :

$$\frac{\delta \Phi_0}{\delta \phi^a} + \frac{\delta \Phi_0}{\delta p_t}\frac{\delta p_t}{\delta \phi^a} + \frac{\delta \Phi_0}{\delta p_b}\frac{\delta p_b}{\delta \phi^a} = 0 \tag{2.39}$$

Ao inserirmos as informações $\frac{dp_a}{dt} = \frac{\delta p_t}{\delta \phi^a} + \partial_0 \phi^b \frac{\delta p_a}{\delta \phi^b}$ e $\frac{\delta \Phi_0}{\delta p_t} = 1$ na equação acima, obtemos:

$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\delta \Phi_0}{\delta \phi^a} + \partial_0 \phi^b \frac{\delta p_a}{\delta \phi^b} - \frac{\delta \Phi_0}{\delta p_b}\frac{\delta p_b}{\delta \phi^a} \tag{2.40}$$

Para prosseguir no desenvolvimento dessa equação usamos a primeira equação característica $\partial_0 \phi^b = \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta p_b} = \frac{\delta \Phi_0}{\delta p_b}$ e o fato de que:

$$\frac{\delta p_a}{\delta \phi^b} = \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^a \delta \phi^b} = \frac{\delta p_b}{\delta \phi^a} \tag{2.41}$$

Assim, ao utilizar esse resultado na expressão (2.40) obtemos a equação:

$$\partial_0 p_a = -\frac{\delta \Phi_0}{\delta \phi^a} = -\frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \phi^a} \tag{2.42}$$

Essa é mais uma das equações de Hamilton em sua versão para campos.

Quando tomamos a derivada total de $S = S(x, \phi^a)$ com relação ao tempo chegamos na expressão:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \partial_0 \phi^a \frac{\delta S}{\delta \phi^a} = \partial_0 \phi^a p_a - \mathcal{H}_c \tag{2.43}$$

Para obter o resultado acima usamos que $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}_c$ e $p_a = \frac{\delta S}{\delta \phi^a}$.

Desse modo, temos que:

$$dS(x) = \int \left[\partial_0 \phi^a p_a - \mathcal{H}_c\right] dt \tag{2.44}$$

Essa expressão nos mostra que o funcional $S(x)$ possui a mesma diferencial que a ação $A[\phi]$. Isso indica que a diferença entre tais funcionais deve estar relacionada com as diferentes condições iniciais que podem ser adotadas a fim de se proceder com a integração.

Assim, ao integrar o funcional $S(x)$ no tempo e com relação às variáveis da hipersuperfície de Cauchy, temos:

$$S = \int_{\Sigma} (\phi^a p_a)\big|_{t=0} d\sigma + \int_0^t \left[\int_{\Sigma} (\partial_0 \phi^a p_a - \mathcal{H}_c) d\sigma \right] dt \tag{2.45}$$

Esta escolha de condições iniciais está relacionada ao fato de que uma maneira alternativa para se obter o formalismo de Hamilton-Jacobi se dá ao considerar S como uma função geradora, do tipo F_2, de uma transformação canônica que leve a uma Hamiltoniana transformada nula [4]. Essa transformação canônica é tal que as variáveis do espaço de fase transformadas são constantes e portanto podem ser associadas àquelas das condições iniciais, ou seja, quando $t = 0$ na hipersuperfície de Cauchy Σ.

2.5 Considerações sobre integrabilidade

Os resultados obtidos até agora dependem de um teorema que garanta a existência de uma configuração de campos ϕ^a e de funções S tais que:

$$p_a = \frac{\delta S}{\delta \phi^a} \tag{2.46}$$

O nosso objetivo é desenvolver uma condição necessária para a equação acima ser válida e em seguida argumentar que ela também é suficiente. Para tal vamos supor que ϕ^a e p_a dependam de n parâmetros u^a [7] em que n denota a quantidade de campos ϕ^a :

$$\phi^a = \phi^a(x^\mu, u^b) \ ; \ p_a = p_a(x^\mu, u^b) \tag{2.47}$$

Admitiremos também a condição:

$$det \left[\frac{\partial \phi^a}{\partial u^b} \right] \neq 0 \tag{2.48}$$

Se ϕ^a for uma configuração que extremiza a ação, a equação (2.46) é válida.
Como $S = S(x^\mu, \phi^a(x^\mu, u^a))$, temos:

$$\frac{\partial S}{\partial u^a} = \frac{\partial S}{\partial \phi^b} \frac{\partial \phi^b}{\partial u^a} = p_b \frac{\partial \phi^b}{\partial u^a} \tag{2.49}$$

Ao derivar parcialmente a equação acima com relação à u^b, obtemos:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^a \partial u^b} = \frac{\partial p_c}{\partial u^b} \frac{\partial \phi^c}{\partial u^a} + p_c \frac{\partial^2 \phi^c}{\partial u^a \partial u^b} \tag{2.50}$$

Na expressão acima assumimos que os campos possuem, no mínimo, até as segundas derivadas não-nulas com relação à u^a.

Como o lado esquerdo da equação acima é simétrico com relação à troca dos índices a e b o

[7] A fim de tornar essa demonstração a mais abrangente possível tomaremos, no final dos cálculos, o limite no qual esses parâmetros são nulos.

lado direito também deve ser. Por isso é necessário que a parte antissimétrica do lado direito da equação acima se anule. Caso o parênteses de Lagrange, definido logo abaixo, seja nulo, essa condição será satisfeita:

$$[u^a, u^b] \equiv \left[\frac{\partial\phi^c}{\partial u^a}\frac{\partial p_c}{\partial u^b} - \frac{\partial\phi^c}{\partial u^b}\frac{\partial p_c}{\partial u^a}\right] = 0 \tag{2.51}$$

Agora vamos mostrar que essa também é uma condição suficiente para que existam funções S tais que $p_a = \frac{\delta S}{\delta\phi^a}$. A equação acima pode ser reescrita como:

$$[u^a, u^b] = \left[\frac{\partial}{\partial u^b}\left(p_c\frac{\partial\phi^c}{\partial u^a}\right) - \frac{\partial}{\partial u^a}\left(p_c\frac{\partial\phi^c}{\partial u^b}\right)\right] = 0 \tag{2.52}$$

Desse modo é preciso que haja uma função $\sigma(x^\mu, u^a)$ tal que:

$$p_c\frac{\partial\phi^c}{\partial u^a} = \frac{\delta\sigma}{\delta u^a} \tag{2.53}$$

De acordo com a equação (2.48), podemos escrever $u^a = u^a(x^\mu, \phi^a)$. Por isso, temos que $\sigma(x^\mu, u^a(x^\mu, \phi^a))$. Assim, ao derivar parcialmente com relação à u^a, obtemos:

$$\frac{\delta\sigma}{\delta u^a} = \frac{\delta\sigma}{\delta\phi^b}\frac{\partial\phi^b}{\partial u^a} \tag{2.54}$$

Ao comparar esse resultado com as expressões anteriormente obtidas temos que $p_a = \frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}$, sendo que $\sigma(x^\mu, u^a(x^\mu, \phi^a))$ é uma função do mesmo tipo que $S(x,\phi)$ o que significa que a nulidade dos parênteses de Lagrange também é condição suficiente para a integrabilidade do sistema. Além disso, estamos em condições de calcularmos a expressão abaixo:

$$\frac{d}{dt}\left[p_a - \frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}\right] = \frac{dp_a}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}\right) = -\frac{\delta\mathcal{H}_c}{\delta\phi^a} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}\right) - \frac{\delta^2\sigma}{\delta\phi^a\delta\phi^b}\partial_0\phi^b \tag{2.55}$$

Na expressão acima assumimos que p_a obedece as equações canônicas.

A equação acima pode ser reescrita, ao fazermos uso do fato de que derivadas espaciais e derivadas funcionais com relação aos campos comutam no caso em que consideramos fronteiras fixas, como:

$$0 = \frac{\delta\mathcal{H}_c}{\delta\phi^a} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}\right) + \frac{\delta^2\sigma}{\delta\phi^a\delta\phi^b}\frac{\delta\mathcal{H}_c}{\delta\phi^a} = \frac{\delta}{\delta\phi^a}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H_c(x, \phi^a, \frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a})\right) \tag{2.56}$$

Para obter o resultado acima usamos $p_a = \frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}$ e que $\partial_0\phi^a$ é obtido das equações de Hamilton. Além disso, fizemos $\frac{\delta}{\delta\phi^a}\big(\mathcal{H}_c\big) = \frac{\delta\mathcal{H}_c}{\delta\phi^a} + \frac{\delta^2\sigma}{\delta\phi^a\delta\phi^b}\frac{\delta\mathcal{H}_c}{\delta\phi^a}$. A solução para a equação acima é:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}_c(x, \phi^a, \frac{\delta\sigma}{\delta\phi^a}) = F(x) \tag{2.57}$$

Em que $F(x)$ é uma função arbitrária que só depende dos parâmetros, no caso, o espaço-tempo.

Sem perda de generalidade podemos tomar $F(x) = 0$ e obter a equação de Hamilton-Jacobi para o caso em que $\sigma(x, \phi^a)$ faz o papel de S. Além disso, no final de nossos cálculos eliminamos a dependência dos campos com relação aos parâmetros u^a a qual foi usada apenas como um artifício de demonstração. Como a equação de H-J pode ser obtida a partir da nulidade dos parênteses de Lagrange podemos concluir, sob um ponto de vista alternativo, que essa condição é suficiente para termos $p_a = \frac{\delta S}{\delta \phi^a}$, pois se a equação de H-J é válida essa última relação também o é.

2.6 Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares

Os sistemas ditos singulares são aqueles para os quais a matriz Hessiana tem determinante nulo $\det W = 0$. Isso significa que parte das velocidades $\partial_0 \phi^a$ não poderão ser expressas em função dos momentos canônicos. A princípio poderíamos pensar que o procedimento anterior se tornaria inválido nessa circunstância haja vista que o método que desenvolvemos depende da existência de uma Hamiltoniana $\mathcal{H}_c$ que dependa apenas dos momentos canônicos e dos campos ϕ^a. No entanto, vamos mostrar que o quadro completo de Carathéodory ainda pode ser obtido nesse caso [5, 6].

O fato de ser possível generalizar o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares é de grande importância física pois as teorias de gauge, as quais descrevem a física do modelo padrão, são um caso especial de sistemas vinculados. Por exemplo, as Lagrangianas que possuem uma determinada quantidade de campos sendo que nem todos eles possuem derivadas temporais acabam por exibir singularidade (determinante nulo.) na matriz Hessiana $W_{ab} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi^a \delta \partial_0 \phi^b}$ devido ao fato de que haverá uma quantidade de linhas ou colunas com todos os elementos nulos. Podemos citar como exemplo a Lagrangiana que descreve o eletromagnetismo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \ ; \ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.58}$$

Em que temos a liberdade de gauge na definição do potencial vetor $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$.

Na Lagrangiana acima não temos termos do tipo $\partial_0 A_0$ e por isso a Hessiana deste sistema é singular, $\det W = 0$. É interessante notar que existe um modelo, topológico no sentido de que não possui graus de liberdade locais, em analogia com parte dos modelos BF que vamos estudar mais adiante, que exibe simetria de gauge e também possui as características que estamos discutindo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu B^\mu)^2 \tag{2.59}$$

Esse modelo é invariante pela transformação de simetria de gauge $B_\mu \to B_\mu + \partial^\nu \Gamma_{[\nu\mu]}(x)$. Em que $\Gamma_{[\nu\mu]}(x)$ é uma dada função tensorial arbitrária e [,] denotam antissimetrização [7].

Notamos da expressão acima que $\mathcal{L}$ não exibe derivadas temporais do tipo $\partial_0 B_i$ sendo que i denota um índice espacial. Isso indica que $\det W = 0$ pois a sua matriz Hessiana possuirá parte de suas linhas ou colunas com todos os elementos nulos.

Para prosseguirmos no estudo de sistemas singulares vamos supor que temos uma matriz Hessiana composta por uma sub-matriz $p \times p$ inversível e uma outra sub-matriz $r \times r$ não inversível, sendo que $r + p = n$ é o total de campos presentes na Lagrangiana. Dessa maneira, as derivadas temporais de um certo conjunto dos campos ϕ^a poderão ser expressas em termos dos momentos canônicos sendo que isso não será possível para o conjunto restante. A matriz Hessiana, nesse caso, seria da forma:

$$W(x,y) = \delta^{(d)}(x-y)\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}_{p\times p} & \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}_{p\times r} \\ \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}_{r\times p} & \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}_{r\times r} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

Sendo que há r autovalores nulos e p não nulos.

Os momentos inversíveis e seus campos conjugados serão denotados por um índice "linha"$p_{a'}$ e $\phi^{a'}$, com $a' = 1, ..., p$ enquanto que os momentos não inversíveis e seus campos conjugados serão denotados por p_z, ϕ^z, com $z = 1, ..., r$. Assim, as velocidades inversíveis são da forma:

$$\partial_0\phi^{a'} = \beta^{a'}(x, \phi^a, p_{a'}) \tag{2.61}$$

Por outro lado, os momentos não inversíveis são dados pela expressão abaixo:

$$p_z = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^z} \equiv -\mathcal{H}_z(x, \phi^a, p^{a'}) \tag{2.62}$$

As relações de vínculo serão denotadas por:

$$\Phi_z \equiv p_z + \mathcal{H}_z = 0 \tag{2.63}$$

As relações de vínculo Φ_z serão chamadas de Hamiltonianas. A motivação para essa nomenclatura se deve ao fato de que assim como a Hamiltoniana canônica gera evoluções parametrizadas pelo tempo, os vínculos Φ_z, como veremos mais adiante, geram evoluções parametrizadas por funções locais arbitrárias, sendo que as transformações de gauge são casos particulares desse tipo de evolução.

Podemos mostrar que a Hamiltoniana canônica, que figura na equação de Hamilton-Jacobi, não depende das velocidades não-inversíveis:

$$\frac{\delta\mathcal{H}_c}{\delta\partial_0\phi^z} = \frac{\delta}{\delta\partial_0\phi^z}\left(p_z\partial_0\phi^z + p_{a'}\partial_0\phi^{a'} - \mathcal{L}\right) = p_z - \frac{\delta\mathcal{L}}{\partial_0\phi^z} = \Phi_z = 0 \tag{2.64}$$

O resultado acima indica que a Hamiltoniana canônica é bem definida na região em que esses vínculos são satisfeitos. Será conveniente unificar a notação usada para definir a equação de Hamilton-Jacobi com aquela usada para se definir os vínculos:

$$\Phi_\alpha = p_\alpha + \mathcal{H}_\alpha \ ; \ \alpha = 0, 1, ..., r \tag{2.65}$$

Como $p_\alpha = \frac{\delta S}{\delta\phi^\alpha}$ as equações acima são um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem em derivadas de S e serão chamadas de equações de Hamilton-Jacobi.

Estamos usando implicitamente a definição $\phi^\alpha = (t, \phi^z)$.

2.7 Equações características para o caso de sistemas singulares

Para que possamos encontrar as equações características relacionadas às Φ_α equações de Hamilton-Jacobi, variaremos Φ_0 primeiramente com relação aos momentos inversíveis $p_{a'}$:

$$\frac{\delta\Phi_0}{\delta p_{a'}} = \frac{\delta}{\delta p_{a'}}\left(p_t + p_{a'}\partial_0\phi^{a'} - \mathcal{H}_z(x,\phi^a,p_{a'})\partial_0\phi^z - \mathcal{L}(x,\phi^a,\beta^a)\right) = \partial_0\phi^{a'} - \frac{\delta\mathcal{H}_z}{\delta p_{a'}}\partial_0\phi^z \quad (2.66)$$

Agora usaremos o fato de que $\phi^0 = t$ e portanto $\partial_0\phi^0 = 1$ na equação acima:

$$\partial_0\phi^{a'} = \frac{\delta\Phi_0}{\delta p_{a'}}\partial_0\phi^0 + \frac{\delta\mathcal{H}_z}{\delta p_{a'}}\partial_0\phi^z = \frac{\delta\Phi_\alpha}{\delta p_{a'}}\partial_0\phi^\alpha \quad (2.67)$$

De acordo com a definição dada para as derivadas funcionais usadas nesse capítulo, temos a primeira das equações características:

$$\delta\phi^{a'}(x) = \int_\Sigma d\sigma_y \frac{\delta\Phi_\alpha(y)}{\delta p_{a'}(x)}\delta\phi^\alpha(y) = \int_\Sigma d\sigma_y \frac{\delta\mathcal{H}_\alpha(y)}{\delta p_{a'}(x)}\delta\phi^\alpha(y) \quad (2.68)$$

Para o caso particular em que a matriz Hessiana não tem nenhum autovetor nulo $\phi_\alpha = \delta_{\alpha 0}\, t$ e a equação acima se reduz às equações de Hamilton para $\phi^{a'}$ conforme visto anteriormente para sistemas não-singulares. Dessa maneira, fica claro o porquê da nomenclatura "Hamiltonianas"para designar as relações de vínculo que surgem na definição dos momentos canônicos. Assim como a Hamiltoniana canônica gera evoluções nos campos $\phi^{a'}$ que são parametrizadas pelo tempo, as demais Hamiltonianas geram evoluções parametrizadas pelas funções $\phi^z(x)$.

É interessante notar que os campos $\phi^{a'}(x)$ fazem o papel, na relação acima, das variáveis dependentes enquanto que o tempo e os ϕ^z assumem o papel de parâmetros, ou seja, a partir dos cálculos que faremos adiante veremos que de fato as variáveis $(\phi^{a'}, p_{a'})$ formam o espaço de fase reduzido dos sistemas singulares.

A segunda equação característica é obtida ao tomar a variação de $p_a(x)$ com relação às variáveis canônicas das quais ele depende:

$$\delta p_a(x) = \int_\Sigma d\sigma_y \left[\frac{\delta p_a(y)}{\delta\phi^{b'}(x)}\delta\phi^{b'}(y) + \frac{\delta p_a(y)}{\delta\phi^\alpha(x)}\delta\phi^\alpha(y)\right] = \int_\Sigma d\sigma_y \left[\frac{\delta p_{b'}(y)}{\delta\phi^a(x)}\delta\phi^{b'}(y) + \frac{\delta p_\alpha(y)}{\delta\phi^a(x)}\delta\phi^\alpha(y)\right] \quad (2.69)$$

Em que usamos $\frac{\delta p_a}{\delta\phi^{b'}} = \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^a\delta\phi^{b'}} = \frac{\delta p_{b'}}{\delta\phi^a}$ e de modo análogo $\frac{\delta p_a}{\delta\phi^\alpha} = \frac{\delta p_\alpha}{\delta\phi^a}$.

A equação acima pode ser reescrita por meio do uso da primeira equação característica que substituirá a expressão de $\delta\phi^{b'}(y)$:

$$\delta p_a(x) = \int_\Sigma d\sigma_y \left[\frac{\delta p_{b'}(y)}{\delta\phi^a(x)}\left(\int d\sigma_z \frac{\delta\Phi_\alpha(z)}{\delta\phi_{b'}(y)}\delta\phi^\alpha(z)\right) + \delta\phi^{b'}(y) + \frac{\delta p_\alpha(y)}{\delta\phi^a(x)}\delta\phi^\alpha(y)\right] \quad (2.70)$$

Para que possamos reescrever essa equação de uma forma mais conveniente fazeremos uma rápida digressão a fim de obtermos um resultado que nos será útil:

$$0 = \frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta \phi^a(x)} + \int d\sigma_z \left[\frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta p_{b'}(z)} \frac{\delta p_{b'}(z)}{\delta \phi^a(x)} + \frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta p_\beta(z)} \frac{\delta p_\beta(z)}{\delta \phi^a(x)} \right] = \frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta \phi^a(x)} + \frac{\delta p_\beta(y)}{\delta \phi^a(x)} + \int d\sigma_z \left[\frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta p_{b'}(z)} \frac{\delta p_{b'}(z)}{\delta \phi^a(x)} \right] \tag{2.71}$$

Na expressão acima usamos que $\Phi_\alpha = 0$ e que como Φ_α é linear nos momentos p_β temos[8] $\frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta p_\beta(z)} = \delta^\beta_\alpha \delta^d(y-z)$.

Ao inserir o resultado acima na equação (2.69) concluímos que:

$$\delta p_a(x) = -\int_\Sigma d\sigma_y \frac{\delta \Phi_\alpha(y)}{\delta \phi^a(x)} \delta \phi^\alpha(y) \tag{2.72}$$

Essa é mais uma das equações características. É fácil notar que quando o sistema é não-singular, $\phi^\alpha = \delta^{\alpha 0}\ t$ e as equações de Hamilton usuais são recuperadas. Para o caso singular temos também evoluções relacionadas à parâmetros locais. Veremos ao longo dessa dissertação que as evoluções paramétricas locais estão fortemente relacionadas à liberdade de gauge que ocorre em determinadas teorias de campo.

A última das equações características é aquela que define $S = \int d\sigma_x S(x)$:

$$\delta S = \int d\sigma_y \left[\frac{\delta S}{\delta \phi^{a'}(y)} \delta \phi^{a'}(y) + \frac{\delta S}{\delta \phi^\alpha(y)} \delta \phi^\alpha(y) \right] = \int d\sigma_y \left[p_{a'}(y) \delta \phi^{a'}(y) - \mathcal{H}_\alpha(y) \delta \phi^\alpha(y) \right] \tag{2.73}$$

Em que usamos $p_{a'}(y) = \frac{\delta S}{\delta \phi^{a'}(y)}$ e $p_\alpha(y) = \frac{\delta S}{\delta \phi^\alpha(y)} = -\mathcal{H}_\alpha(y)$.

A equação acima pode ser reescrita como:

$$\delta S = \int d\sigma_y \left[p_{a'}(y) \partial_0 \phi^{a'}(y) - \mathcal{H}_\alpha(y) \partial_0 \phi^\alpha(y) \right] dt \tag{2.74}$$

Ao integrarmos essa expressão no tempo, temos:

$$S = \int_\Sigma (p_a \phi^a)\big|_{t=0} + \int_0^t \int_\Sigma \left[p_{a'}(y) \partial_0 \phi^{a'}(y) - \mathcal{H}_\alpha(y) \partial_0 \phi^\alpha(y) \right] dw \tag{2.75}$$

Ao comparar $A = \int \mathcal{L} dw$ com S vemos que A se torna uma solução da equação de Hamilton-Jacobi (Com outras condições iniciais.) se:

$$\mathcal{L} = p_{a'}(y) \partial_0 \phi^{a'}(y) - \mathcal{H}_\alpha(y) \partial_0 \phi^\alpha(y) = p_{a'}(y) \partial_0 \phi^{a'}(y) + p_z(y) \partial_0 \phi^z(y) - \mathcal{H}_\alpha(y) \partial_0 \phi^\alpha(y) - p_z(y) \partial_0 \phi^z(y) \tag{2.76}$$

[8] Nesta expressão surge uma delta de Dirac espacial pois como as integrações na expressão de interesse são feitas apenas sobre as coordenadas espaciais, temos que os argumentos, que de maneira geral denotamos por y e z, estão sob tempos iguais.

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = p_{a'}(y)\partial_0\phi^{a'}(y) + p_z(y)\partial_0\phi^z(y) - \mathcal{H}_c - \Big(\mathcal{H}_z(y) + p_z(y)\Big)\partial_0\phi^z(y) =$$
$$p_{a'}(y)\partial_0\phi^{a'}(y)+p_z(y)\partial_0\phi^z(y)-\Big(\mathcal{H}_c+\Phi_z\partial_0\phi^z(y)\Big) = p_a\partial_0\phi^a(y)-\Big(\mathcal{H}_c+\Phi_z\partial_0\phi^z(y)\Big) \tag{2.77}$$

Ao menos nesse ponto podemos notar uma certa analogia com o formalismo de Dirac [8] no qual se define uma Hamiltoniana primária da forma:

$$\mathcal{H}_p \equiv \mathcal{H}_c + \tilde{\Phi}_z\Lambda^z(y) \tag{2.78}$$

Em que $\tilde{\Phi}_z$ designa apenas vínculos primários (oriundos da definição dos momentos canônicos.) e $\Lambda^z(y)$ é um dado conjunto de multiplicadores de Lagrange que fazem um papel análogo aos campos $\partial_0\phi^z(y)$.

2.8 Parênteses de Poisson e espaço de fase

Consideraremos o espaço de fase como sendo representado pelas variáveis canônicas relacionadas ao setor não-singular da matriz Hessiana $\varepsilon^A \equiv (\phi^{a'}, p_{a'})$. Como essas variáveis são funções de ϕ_α temos que qualquer observável F no espaço de fase deve depender das variáveis canônicas e dos parâmetros locais:

$$F = F(\phi^{a'}, p_{a'}, \phi^\alpha, x) \tag{2.79}$$

A variação desse observável vem dada abaixo:

$$\delta F(x) = \int d\sigma_y\left[\frac{\delta F(x)}{\delta\phi^{a'}(y)}\delta\phi^{a'}(y) + \frac{\delta F(x)}{\delta p_{a'}(y)}\delta p_{a'}(y) + \frac{\delta F(x)}{\delta\phi^\alpha(y)}\delta\phi^\alpha(y)\right] \tag{2.80}$$

Podemos escrever $\delta\phi^{a'}(y)$ e $\delta p_{a'}(y)$ por meio das equações características. Assim, a expressão acima assume a forma:

$$\delta F(x) = \int\int d\sigma_y d\sigma_z\left[\frac{\delta F(x)}{\delta\phi^{a'}(y)}\frac{\delta\Phi_\alpha(z)}{\delta p_{a'}(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p_{a'}(y)}\frac{\delta\Phi_\alpha(z)}{\delta\phi^{a'}(y)}\right]\delta\phi^\alpha(y) + \int d\sigma_y\frac{\delta F(x)}{\delta\phi^\alpha(y)}\delta\phi^\alpha(y) \tag{2.81}$$

Devemos lembrar que está implícito que há soma sobre os índices repetidos.

A equação acima sugere que podemos definir os parênteses de Poisson como:

$$\{A(x), B(y)\} \equiv \int d\sigma_z\left[\frac{\delta A(x)}{\delta\phi^{a'}(z)}\frac{\delta B(y)}{\delta p_{a'}(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta p_{a'}(z)}\frac{\delta B(y)}{\delta\phi^{a'}(z)}\right] \tag{2.82}$$

Os parênteses de Poisson acima possuem de fato as características necessárias de antissimetria, satisfazer a identidade de Jacobi e a bilinearidade.

Dessa maneira, podemos escrever:

$$\delta F(x) = \int d\sigma_y \left[\{F(x), \Phi_\alpha(y)\} + \frac{\delta F(x)}{\delta \phi^\alpha(y)} \right] \delta \phi^\alpha(y) \tag{2.83}$$

Agora vamos generalizar os resultados acima de modo a estendermos o nosso espaço de fase para incluir p_α e ϕ^α. Esse generalização é conveniente pois poderemos exprimir os resultados de uma maneira ainda mais compacta. Então, reescreveremos a equação acima como:

$$\delta F(x) = \int\int d\sigma_y d\sigma_z \Bigg\{ \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi^{a'}(y)} \frac{\delta \Phi_\alpha(z)}{\delta p_{a'}(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p_{a'}(y)} \frac{\delta \Phi_\alpha(z)}{\delta \phi^{a'}(y)} \right] \delta \phi^\alpha(y) +$$

$$\left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi^\beta(y)} \frac{\delta \Phi^\alpha(z)}{\delta p_\beta(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p_\beta(y)} \frac{\delta \Phi^\alpha(z)}{\delta \phi^\beta(y)} \right] \delta \phi^\alpha(y) \Bigg\} \tag{2.84}$$

Usamos o fato de que F não depende dos p_α e de que $\frac{\delta \Phi_\alpha(z)}{\delta p^\beta(y)} = \delta^\beta_\alpha \, \delta^{(d)}(z-y)$ (quando z e y estão em tempos iguais.).

Pela análise da expressão acima fica claro que estamos lidando com um parêntese de Poisson definido no espaço de fase estendido $\varepsilon^I = (\phi^i, p_i)$ sendo que $i = 0, 1, ...r, ..., r{+}p$. Isso nos permite escrever as equações características de forma compacta:

$$\delta F(x) = \int d\sigma_y \{F(x), \Phi_\alpha(y)\} \delta \phi^\alpha(y) \tag{2.85}$$

Essa expressão será chamada de diferencial fundamental. A forma explícita dos parênteses de Poisson definidos no espaço de fase extendido segue dada abaixo:

$$\{F(x), G(z)\} = \int d\sigma_y \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi^i(y)} \frac{\delta G(z)}{\delta p_i(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p_i(y)} \frac{\delta G(z)}{\delta \phi^i(y)} \right] \; ; \; i = 0, 1, ...r + p$$

O Parênteses de Poisson definidos acima possuem todas as características relevantes, anteriormente mencionadas, de antissimetria, bilinearidade e de obedecer a identidade de Jacobi.

A partir da expressão da diferencial fundamental notamos claramente que a evolução de qualquer observável no espaço de fase é parametrizada pelo tempo e pelos parâmetros locais ϕ_z e que Φ_α são os geradores dessas evoluções.

Os parênteses de Poisson fundamentais são [9] (Note que o índice i designa todo o espaço de fase extendido.):

$$\begin{aligned} \{\phi^i(x), \phi^j(y)\} &= 0 \\ \{p_i(x), p_j(y)\} &= 0 \\ \{\phi^i(x), p_j(y)\} &= \delta^i_j \, \delta^d(x-y) \end{aligned} \tag{2.86}$$

[9] Como a definição de parênteses de Poisson leva em conta apenas uma integração espacial, os argumentos das variáveis em questão são tomadas sob tempos iguais e por isso a diferenciação funcional leva a ocorrência de deltas de Dirac espaciais.

2.9 Uma abordagem geométrica do formalismo de Hamilton-Jacobi

A partir da abordagem de Carathéodory do problema variacional foi possível obter a equação de Hamilton-Jacobi, além de suas equações características para sistemas não-singulares. Para o caso de sistemas cuja matriz Hessiana é singular também foi possível obter o quadro completo de Carathéodory assim como o espaço de fase estendido das variáveis canônicas.

Dessa maneira, apenas nos resta avaliar sob quais condições as evoluções paramétricas dos observáveis do espaço de fase, as quais representam todas as informações físicas de um dado sistema, são integráveis. Vamos mostrar que ao escrever as equações canônicas em termos de[10] α vetores que possuem uma quantidade de componentes iguais a dimensão do espaço de fase estendido estaremos em posição de utilizar o teorema de Frobenius a fim de obter as condições necessárias e suficientes para que o nosso sistema físico seja integrável.

Definiremos um conjunto de α campos vetoriais de $2n+2$ componentes[11]:

$$X_\alpha(x) = \int d\sigma_y \chi^I_\alpha(x,y)\frac{\delta}{\delta\varepsilon^I(y)} \tag{2.87}$$

Em que $\varepsilon^I = (\phi^i, p_i)$ com $I = 0, ..., 2n+2$ e $i = 0, ..., n$. Temos que χ^I_α é definido como $\chi^I_\alpha(x,y) = \{\varepsilon^I(y), \Phi_\alpha(x)\}$.

Para um dado observável $F(\phi^a, p_a, \phi^\alpha)$ no espaço de fase, temos:

$$X_\alpha(x)F(z) = \int d\sigma_y \chi^I_\alpha(x,y)\frac{\delta F(z)}{\delta\varepsilon^I(y)} = \int d\sigma_y \{\varepsilon^I(y), \Phi_\alpha(x)\}\frac{\delta F(z)}{\delta\varepsilon^I(y)} \tag{2.88}$$

Como podemos considerar $F = F(\varepsilon^I)$, concluímos que $\{F(z), \Phi_\alpha(x)\} = \int d\sigma_y \{\varepsilon^I(y), \Phi_\alpha(x)\}\frac{\delta F(z)}{\delta\varepsilon^I(y)}$. Assim, a variação $\delta F(z)$ pode ser escrita como [1, 3]:

$$\delta F(z) = \int d\sigma_y \delta\phi^\alpha(y) X_\alpha(y) F(z) \tag{2.89}$$

Desse modo, acabamos por notar que as equações características e as equações de Hamilton-Jacobi podem ser postas, respectivamente, na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \phi^\alpha} + X^a_\alpha \frac{\partial S}{\partial \phi^a} &= 0 \\ \frac{\delta\varepsilon^I(x)}{\delta\phi^\alpha(y)} &= X_\alpha(y)\varepsilon^I(x) \\ \Phi_\alpha &= X_\alpha S = X^i_\alpha\, p_i = 0 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Como temos a relação $X^i_\alpha\, p_i = 0$, os vetores X_α devem ser ortogonais ao momento e portanto tangentes à família de hipersuperfícies S haja vista que $p_i = \frac{\delta S}{\delta\phi^i}$. Para que o sistema seja integrável, de acordo com o teorema de Frobenius [9], esses vetores devem formar um conjunto completo de campos vetoriais Hamiltonianos linearmente independentes, ou seja, eles devem formar uma base completa para uma dada subvariedade de S. Se essa condição for

[10]É o índice que designa as equações de H-J.

[11]$n+1$ é a soma da quantidade de campos $\phi^{a'}$ e ϕ^α que definem nosso espaço de configuração

satisfeita, o teorema de Frobenius garante que as subvariedades do espaço de fase, oriundas das soluções da equação de (HJ), geradas por tais vetores, as quais são parametrizadas pelas variáveis independentes, nunca se interceptam, o que garante a integrabilidade [12] do sistema. Essas subvariedades, que são cruzadas pela congruência de curvas oriundas das soluções das equações características, são chamadas de distribuições $\Delta(\phi^a(\phi^\alpha), \phi^\alpha)$. Uma maneira alternativa de se abordar a questão da integrabilidade do sistema se dá ao considerarmos que quando transportamos um vetor de base ao longo dos demais, a sua variação, que pode ser expressa por sua derivada de Lie, não pode admitir componentes ortogonais à subvariedade do espaço de fase em questão para que os elementos da distribuição não se interceptem. Essa condição, que é equivalente à da busca por um conjunto completo de vetores X_α, pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{X_\beta} X_\alpha = \big[X_\alpha, X_\beta\big] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma \tag{2.91}$$

Estamos utilizando a definição $X_\alpha = \int d\sigma_x X_\alpha(x)$. A expressão $[A, B]$ denota o comutador, que nesse caso chamaremos de colchetes de Lie, entre as variáveis A e B. O termo $C^\gamma_{\alpha\beta}$, para o caso em que X_α formam uma álgebra de Lie sobre a operação de anticomutação, designará as constantes de estrutura. No caso mais geral, admite-se que $C^\gamma_{\alpha\beta}$ pode depender da posição no espaço-tempo . Da expressão acima lê-se que o comutador de dois vetores definidos sobre a distribuição Δ também deve ser proporcional a uma combinação linear de vetores tangentes a ela.

As condições de Frobenius possuem consequências diretas sobre as funções Φ_α que geram as evoluções no espaço de fase. Para entender tais conquências vamos atuar com este comutador sobre um observável F do espaço de fase:

$$\big[X_\alpha, X_\beta\big] F(z) = \{\{F(z), \Phi_\beta\}\Phi_\alpha\} - \{\{F(z), \Phi_\alpha\}\Phi_\beta\} \tag{2.92}$$

Estamos usando a definição $\Phi_\alpha = \int d\sigma_y \Phi_\alpha(y)$ e $\{,\}$ designam parênteses de Poisson (PP).

Neste ponto vamos fazer uso de uma das propriedade dos parênteses de Poisson que é o fato de que eles obedecem a identidade de Jacobi [13]. Assim, a expressão acima pode ser reescrita de uma maneira mais interessante:

$$\big[X_\alpha, X_\beta\big] F(z) = \{\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}, F(z)\} \tag{2.93}$$

Desse modo, a condição $\big[X_\alpha, X_\beta\big] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma$ implica no fato de que os vínculos devem obedecer a àlgebra:

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = C^\gamma_{\alpha\beta} \Phi_\gamma \tag{2.94}$$

As condições acima são muito importantes e significam que num dado sistema integrável os vínculos devem formar uma álgebra de Lie. Isso indica que a sua evolução paramétrica é dada por:

$$\delta\Phi_\alpha(x) = \int d\sigma_y \{\Phi_\alpha(x), \Phi_\beta(y)\} \delta\phi^\beta(y) = C^\gamma_{\alpha\beta} \Phi_\gamma(x) \delta\phi^\beta(x) = 0 \tag{2.95}$$

[12]As condições de integrabilidade do sistema podem ser obtidas, por uma abordagem algébrica, através dos parênteses de Lagrange.

[13]Para todo X, Y, Z os (PP) obedecem $\{X, \{Y, Z\}\} + \{Y, \{Z, X\}\} + \{Z, \{X, Y\}\} = 0$

Os vínculos que obedecem as condições acima são chamados de involutivos enquanto que aqueles que não as obedecem são chamados de não-involutivos.

Podemos concluir que as condições de integrabilidade implicam no fato de que os vínculos devem ser mantidos inalterados ao longo dos fluxos Hamiltonianos gerados por Φ_α. Essa afirmação possui um paralelo com a condição de consistência oriunda do formalismo de Dirac-Bergmann no qual se conjectura que os vínculos, por consistência física, devem se manter constantes durante a evolução temporal. A diferença entre as duas abordagens é que no formalismo aqui construído, a condição $\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = C^\gamma_{\alpha\beta}\Phi_\gamma$ não é obtida através de uma conjectura de consistência física mas a partir de um teorema matemático de integrabilidade. Além disso, essa condição garante não só a invariância temporal das Hamiltonianas Φ_α como também a sua constância ao longo das trajetórias no espaço de fase que são parametrizadas pelas funções locais $\phi^z(x)$.

2.10 A obtenção dos parênteses de Poisson generalizados

As condições de integrabilidade obtidas anteriormente nem sempre serão respeitadas. Nesta subseção pretendemos mostrar como se deve proceder em tais situações. Suponhamos que estamos analisando via formalismo de Hamilton-Jacobi um determinado modelo para uma teoria de campos. Em um dado estágio é possível que deparemos com um certo conjunto de Hamiltonianas (vínculos). Para prosseguirmos com a análise devemos investigar a sua integrabilidade. Em geral, a condição de integrabilidade não será identicamente satisfeita e vamos precisar adicionar mais Hamiltonianas ao sistema de modo que no final de contas teremos em mãos um conjunto de Hamiltonianas totalmente integráveis.

Vamos supor que estamos fazendo uma análise canônica de um determinado sistema e que num dado estágio tenhamos definido uma Hamiltoniana canônica e um conjunto de Hamiltonianas Φ_z. Isso significa que estamos trabalhando com a diferencial fundamental:

$$\delta F(x) = \int d\sigma_z \bigg[\{F(x)\Phi_0(z)\}dt + \{F(x), \Phi_z(z)\}\delta t^z(z) \bigg] \tag{2.96}$$

Em que $\delta t^z(z)$ designam os parâmetros locais arbitrários relacionados à evolução de um dado observável $F(x)$ gerada por Φ_z.

Como visto anteriormente, a condição de consistência sobre os vínculos Φ_z, oriunda do teorema de Frobenius, é a de que a sua evolução paramétrica no espaço de fase seja nula ou então proporcional a uma combinação linear de outras Hamiltonianas. Desse modo, devemos analisar:

$$\delta\Phi_{\tilde{y}}(x) = \int d\sigma_z \bigg[\{\Phi_{\tilde{y}}(x), \Phi_0(z)\}dt + \{\Phi_{\tilde{y}}(x), \phi_{\tilde{z}}(z)\}\delta t^{\tilde{z}}(z) + \{\Phi_{\tilde{y}}(x), \Phi_A(z)\}\delta t^A(z) \bigg] \neq 0 \tag{2.97}$$

Estamos considerando $\neq 0$ como significando que a evolução de $\Phi_{\tilde{y}}(x)$ não atende aos requisitos de integrabilidade.

Da expressão acima veremos mais adiante que será útil introduzir um abuso de linguagem com relação à terminologia Hamiltonianas involutivas para as Hamiltonianas Φ_z cujo parênteses de Poisson com qualquer outra Hamiltoniana, que não seja a canônica, seja nula ou represente uma combinação linear das demais Hamiltonianas. As Hamiltonianas que serão chamadas de não-involutivas serão então definidas como aquelas cujos parênteses de Poisson com as demais não seja uma combinação linear de Hamiltonianas. Assim, vamos fixar que o índice $\tilde{z}$, presente na equação acima, designa este segundo tipo de Hamiltoniana enquanto que o índice A designa o primeiro tipo.

Ao definirmos a matriz de vínculos $M_{yz}(x,z) \equiv \{\Phi_{\tilde{y}}(x), \Phi_{\tilde{z}}(z)\}$, a qual é não nula (pois é construída a partir de Hamiltonianas que são não-involutivas.) e inversível, podemos mostrar que os parâmetros $\delta t^{\tilde{z}}(z)$, ligados às Hamiltonianas não-involutivas, não são linearmente independentes caso impormos que elas obedeçam as condições de integrabilidade. Assim, para que uma dada Hamiltoniana não-involutiva seja constante ao longo dos fluxos Hamiltonianos, acabamos por gerar vínculos entre os parâmetros de evolução do sistema:

$$\delta t^{\tilde{z}}(y) = -\int d\sigma_x d\sigma_z \left[M^{-1}(x,y)\right]^{\tilde{z}\tilde{a}} \left[\{\Phi_{\tilde{a}}(x), \Phi_0(z)\}dt + \{\Phi_{\tilde{a}}(x), \Phi_A(z)\}\delta t^A\right] \tag{2.98}$$

Em que $\left[M^{-1}(x,y)\right]^{\tilde{z}\tilde{a}}$ é definida como:

$$\delta^d(y-z)\delta_{\tilde{z}}^{\tilde{z}'} = \int d\sigma_x \left[M^{-1}(x,y)\right]_{\tilde{z}\tilde{a}} \left[M(x,z)\right]^{\tilde{a}\tilde{z}'} \tag{2.99}$$

Assim, para que possamos escrever a diferencial fundamental apenas em termos de parâmetros linearmente independentes vamos expressar a dependência de $\delta t^{\tilde{z}}(y)$ com relação aos parâmetros dt e t^A, que denotaremos por $\delta t^{\bar{A}}$ (Com $\bar{A} = 0, 1, ..., A$), por meio do uso dos parênteses de Poisson generalizados (PPG).

$$\delta F(x) = \int d\sigma_z \left[\left(\{F(x), \Phi_{\bar{A}}(z)\} - \int d\sigma_y d\sigma_w \{F(x), \Phi_{\tilde{z}}(z)\} \left[M^{-1}(z,y)\right]^{\tilde{z}\tilde{a}} \{\Phi_{\tilde{a}}(y), \Phi_{\bar{A}}(w)\}\right)\right]\delta t^{\bar{A}}$$

Esta equação sugere a definição de parênteses de Poisson generalizados (PPG) que vem dada abaixo:

$$\{F(x), B(z)\}^* = \left(\{F(x), B(z)\} - \int d\sigma_y d\sigma_w \{F(x), \Phi_{\tilde{z}}(z)\} \left[M^{-1}(z,y)\right]^{\tilde{z}\tilde{a}} \{\Phi_{\tilde{a}}(y), B(w)\}\right) \tag{2.101}$$

É importante frisar que esses parênteses de Poisson generalizados obedecem a todas as identidades que caracterizam os parênteses de Poisson. Além disso, temos que pela definição da matriz $M_{yz}(x,z)$ e pela equação (2.98), os parênteses de Poisson generalizados em que uma Hamiltoniana não-involutiva esteja presente é identicamente nulo:

$$\{F(x), \Phi_{\tilde{a}}(z)\}^* = 0 \tag{2.102}$$

A partir dessa consideração podemos concluir que o papel das Hamiltonianas não-involutivas é apenas o de reduzir o espaço de fase através da definição dos (PPG). Assim, caso um dado sistema possua Hamiltonianas não-involutivas ele só será integrável numa sub-variedade do espaço de fase gerada pelos PPG's.

Dessa maneira, podemos escrever a diferencial fundamental nessa subvariedade integrável como:

$$\delta F(x) = \int d\sigma_z \Big[\{F(x), \Phi_0(z)\}^* dt + \{F(x), \Phi_A(z)\}^* \delta t^A(z) \Big] \tag{2.103}$$

Em que A é um índice que designa Hamiltonianas involutivas. Portanto, são as Hamiltonianas involutivas que de fato geram as evoluções paramétricas no espaço de fase.

De acordo com esta última expressão obtida para a diferencial fundamental, a condição de que uma dada Hamiltoniana seja integrável, implica que ela seja involutiva, propriamente dita, sob os parênteses de Poisson generalizados:

$$\delta \Phi_A = 0 \rightarrow \{\Phi_A, \Phi_{\hat{A}}\}^* = C^{\hat{B}}_{A\hat{A}} \Phi_{\hat{B}} \tag{2.104}$$

Nesse ponto estamos em condições de fornecer uma metodologia para o estudo de teorias de campo através do formalismo de Hamilton-Jacobi (H-J). Primeiramente definimos as variáveis do espaço de fase através de uma transformação de Legendre. A partir dessa transformação, em geral, acabamos por obter Hamiltonianas que surgem da definição dos momentos canônicos. De posse destas quantidades, podemos definir uma diferencial fundamental. Novamente fazeremos uso da conceito de involutividade dentro do contexto do abuso de linguagem adotado anteriormente. Assim, se estivermos de posse de Hamiltonianas não-involutivas devemos construir um PPG para que possamos trabalhar numa região do espaço de fase em que o sistema seja integrável.

Devemos testar a integrabilidade das demais Hamiltonianas agora por meio da diferencial fundamental redefinida por meio dos PPG. Ao impormos que elas são constantes ao longo dos fluxos Hamiltonianos podemos obter duas situações: Ou esta condição será identicamente satisfeita ou então, será preciso adotar novas Hamiltonianas que decorrem de tal imposição. De posse desse novo conjunto de vínculos, redefinimos a diferencial fundamental adicionando a ela novos vínculos ou redefinindo novamente os parênteses de Poisson. Em seguida repetimos o processo anteriormente descrito até que estejamos de posse de um conjunto de Hamiltonianas que obedeçam as condições de integrabilidade identicamente sem a necessidade de imposição de novas Hamiltonianas ou do uso de novos PPG.

2.11 Transformações canônicas e simetrias

Para que possamos introduzir sucintamente o que há de essencial no que diz respeito ao tema das transformações canônicas é preciso definir primeiramente a 2-forma simplética[14]:

$$\omega = \int d\sigma_x \delta\phi^a(x) \wedge \delta p_a(x) \tag{2.105}$$

Em que $\delta \equiv d$ e $d^2 = 0$.

Podemos entender essa 2-forma simplética como mapas antissimétricos e bilineares que relacionam um par de campos vetoriais que habitam o espaço de fase $\chi(x, \epsilon^i)$ a uma dada função não-nula $\mathcal{F}$ [10]:

$$\omega : \chi \times \chi \rightarrow \mathcal{F} : X \times Y \rightarrow < Y, \omega X > \equiv \omega(X, Y) \ ; \ X = X^i \frac{\delta}{\delta \epsilon^i(x)} \ , \ Y = Y^i \frac{\delta}{\delta \epsilon^i(x)} \tag{2.106}$$

[14]O termo simplético designa a qualidade relacionada a esta forma de ser não-degenerada, o que significa que seu determinate é não-nulo.

Na expressão acima o simbolo $<,>$ designa o produto escalar definido no espaço de fase e os vetores X são expressos como $X = X^i \frac{\delta}{\delta \epsilon^i(x)}$. A forma ω é simplética, ou não-degenerada, se $\omega(X,Y) = 0$ apenas se $X = 0$ ou $Y = 0$. Os campos vetoriais pertencem ao espaço tangente ao espaço de fase $T\mathcal{Q}$ e a 1-forma gerada pela aplicação[15] $\omega X =< \omega, X >\equiv \omega(X,*)$, está definida no espaço dual à $T\mathcal{Q}$ que denotaremos por $T^*\mathcal{Q}$.

O símbolo $\wedge$, que foi introduzido acima, é usado na definição de produto exterior. A quantidade ω, que é independente das coordenadas, não-degenerada e fechada $d\omega = 0$, junto com a operação de contração que definiremos logo a seguir, pode ser usada para se obter a diferencial de qualquer função do espaço de fase e também os parênteses de Poisson. Dessa maneira, todo o conteúdo físico do espaço de fase está contido nesta quantidade e nesta operação.

Assim, uma transformação canônica deve preservar a 2-forma simplética para que os parênteses de Poisson entre as novas variáveis canônicas seja o mesmo daquele entre as variáveis antigas pois isso significa que as equações de Hamilton manterão sua forma nesse novo sistema de variáveis. Se estas transformações forem tais que a sua contrapartida no espaço de configuração deixe a Lagrangiana invariante, podemos afirmar que essa transformação canônica representa também uma transformação de simetria.

A operação de contração é definida da seguinte maneira. Consideremos o campo vetorial dado abaixo [3]:

$$X_{F(y)} = \left(\int d\sigma_w \frac{\delta F(y)}{\delta p_b(w)} \frac{\delta}{\delta(\delta \phi^b(w))}, - \int d\sigma_w \frac{\delta F(y)}{\delta \phi^b(w)} \frac{\delta}{\delta(\delta p_b(w))} \right) \tag{2.107}$$

Em que F é um observável do espaço de fase.

Através desse campo vetorial podemos definir a atuação do operador de contração i_{X_F}:

$$i_{X_F} \delta \phi^a(x) \equiv \frac{\delta F(y)}{\delta p_a(x)} \quad ; \quad i_{X_F} \delta p_a(x) \equiv - \frac{\delta F(y)}{\delta \phi^a(x)} \tag{2.108}$$

A atuação desse operador na 2-forma simplética segue dada abaixo:

$$\begin{aligned} i_{X_F} \omega &= i_{X_F} \int d\sigma_x \left(\delta \phi^a(x) \wedge \delta p_a(x) \right) \\ &= \int d\sigma_x \left(\frac{\delta F(y)}{\delta p_a(x)} \delta p_a(x) + \frac{\delta F(y)}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi^a(x) \right) = \delta F(y) \end{aligned} \tag{2.109}$$

Do resultado acima notamos a importante propriedade, anteriormente citada, de que a operação de contração unida a definição da 2-forma simplética nos permite obter a diferencial de qualquer função no espaço de fase. Agora vamos mostrar que o parênteses de Poisson, no qual as equações de Hamilton estão codificadas, podem ser recuperados a partir da forma simplética e da operação de contração:

$$\begin{aligned} i_{X_{G(z)}} i_{X_{F(y)}} \omega &= \int d\sigma_x \left(\frac{\partial F(y)}{\partial p_a(x)} i_{X_{G(z)}} \delta p_a(x) + \frac{\partial F(y)}{\partial \phi_a(x)} i_{X_{G(z)}} \delta \phi_a(x) \right) \\ &= \int d\sigma_x \left(- \frac{\delta F(y)}{\delta p_a(x)} \frac{\delta G(z)}{\delta \phi^a(x)} + \frac{\delta F(y)}{\delta \phi_a(x)} \frac{\delta G(z)}{\delta p^a(x)} \right) = \{G(z), F(y)\} \end{aligned} \tag{2.110}$$

[15]Consideramos que o produto escalar entre uma 2-forma e um vetor se dá com relação a uma das entradas de ω e que seu resultado é uma 1-forma.

Quanto à forma simplética, podemos escrever:

$$\omega = \int d\sigma_x \delta\phi^a(x) \wedge \delta\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a}\right) = \int d\sigma_x \Bigg[\left(\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a\delta\phi^b}\right)\delta\phi^a(x)\wedge\delta\phi^b(x) + \left(\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi^a\delta\partial_0\phi^b}\right)\delta\phi^a(x)\wedge\delta\partial_0\phi^b(x)\Bigg] \tag{2.111}$$

Ao levarmos em conta a definição da matriz Hessiana notamos que apenas no caso de sistemas não-singulares teremos uma forma simplética não-degenerada. Assim, é preciso definirmos uma forma simplética que leve em conta os vínculos da teoria para podermos aplicar os conceitos desenvolvidos acima, por exemplo, no contexto das teorias de gauge. Para isso vamos lançar mão da equação (2.73) que define a 1-forma canônica:

$$\theta \equiv \delta S = \int d\sigma_y \Bigg[p_{a'}(y)\delta\phi^{a'}(y) - \mathcal{H}_\alpha(y)\delta\phi^\alpha(y)\Bigg] \tag{2.112}$$

Uma boa definição para uma forma simplética no contexto de sistemas vinculados segue abaixo:

$$\omega \equiv -d\theta = \int d\sigma_y \Bigg(\delta\phi^{a'}(x)\wedge\delta p_{a'}(x) + \delta\mathcal{H}_\alpha(y)\wedge\delta\phi^\alpha(y)\Bigg) \tag{2.113}$$

A expressão acima designa a forma simplética no contexto de sistemas vinculados. Podemos notar que o primeiro termo é análogo à definição inicial que usamos de ω com a diferença de que ela está definida apenas sobre as variáveis canônicas dependentes, que estão ligadas ao setor inversível da matriz Hessiana. Já o segundo termo traz consigo informações sobre os vínculos do sistema haja vista que $\Phi_\alpha = p_\alpha + \mathcal{H}_\alpha$.

Mostraremos que se os vínculos obedecem as condições de integrabilidade, o segundo termo de ω não contribui. Para isso precisamos calcular $\delta H_\alpha(x)$:

$$\begin{aligned}\delta H_\alpha(x) &= \int d\sigma_y \{\Phi_\alpha(x) - p_\alpha(x), \Phi_\beta(y)\}\delta\phi^\beta(y) = \int d\sigma_y \frac{\delta\Phi_\beta(x)}{\delta\phi^\alpha(y)}\delta\phi^\beta(y) \\ &= \int d\sigma_y \frac{\delta H_\beta(x)}{\delta\phi^\alpha(y)}\delta\phi^\beta(y) = \int d\sigma_y \frac{\delta^2 L(t)}{\delta\partial_0\phi^\beta(x)\delta\phi^\alpha(y)}\delta\phi^\beta(y)\end{aligned} \tag{2.114}$$

Na expressão acima temos que $L(t) = \int d\sigma_y \mathcal{L}(y)$ e além disso, usamos o fato de que o parênteses de Poisson entre vínculos é uma combinação linear de vínculos, caso as condições de integrabilidade forem obedecidas.

De posse deste resultado podemos expressar o segundo termo de ω como:

$$\int d\sigma_w \delta\mathcal{H}_\alpha(w)\wedge\delta\phi^\alpha(w) = \int d\sigma_w d\sigma_y \frac{\delta^2 L(t)}{\delta\partial_0\phi^\beta(w)\delta\phi^\alpha(y)}\delta\phi^\beta(y)\wedge\delta\phi^\alpha(w) = 0 \tag{2.115}$$

O resultado acima se anula pois temos a contração de um objeto simétrico em α e β com um outro objeto que é antissimétrico com relação a estes índices. Portanto:

$$\omega = -d\theta = \int d\sigma_y \Bigg(\delta\phi^{a'}(y)\wedge\delta p_{a'}(y)\Bigg) \tag{2.116}$$

Após a obtenção do resultado acima, esse parece ser o momento certo para se fazer uma digressão a respeito dos operadores que representam uma transformação canônica dentro do formalismo de Hamilton-Jacobi. Em seguida mostraremos que esta transformação deixa a forma simplética invariante e que portanto ela é de fato canônica.

Pretendemos mostrar que o operador que gera evoluções paramétricas nos campos é, na verdade, um operador que representa uma transformação canônica caso as condições de integrabilidade forem obedecidas. Assim, de acordo com a equação (2.89), temos:

$$\delta F(y, \phi^a, \phi_\alpha) = F(y, \phi^a, \phi_\alpha + \delta\phi'_\alpha) - F(y, \phi^a, \phi_\alpha) = \bar{X}[F(y, \phi^a, \phi_\alpha)] \tag{2.117}$$

Na expressão acima temos que $\bar{X}[F] \equiv \int d\sigma_x X_\alpha(x) F \delta{\phi'}^\alpha(x)$.

De acordo com o resultado acima podemos escrever:

$$F(y, \phi^a, \phi_\alpha + \delta\phi'_\alpha) \equiv gF(y) = 1 + \bar{X}[F(y)] \tag{2.118}$$

O nosso objetivo é mostrar que $g = 1 + \bar{X}[\ ]$ representa uma transformação canônica, caso $X_\alpha(x)$ obedeça as condições de integrabilidade. Para isso, será útil definirmos $\bar{X}[\ ] \equiv X_\alpha * [\ ]\delta\phi^\alpha$. Assim, supondo $\delta\phi^\alpha$ infinitesimal, avaliaremos como duas dessas transformações se compõem:

$$gf = (1 + X_\alpha * \delta\phi^\alpha)(1 + X_\beta * \delta\bar{\phi}^\beta) = 1 + X_\beta * (\delta\phi^\beta + \delta\bar{\phi}^\beta) + O(\bar{\phi}\phi) \tag{2.119}$$

Na expressão acima, para obter a segunda identidade, renomeamos os índices α.

Da expressão acima concluímos que a aplicação de duas destas transformações paramétricas também é uma transformação porém com um novo parâmetro que nada mais é que a soma dos parâmetros anteriores, caso os termos de segunda ordem forem desprezíveis.

As definições anteriores parecem sugerir a existência de uma inversa, porém, para tal, é preciso que $gg^{-1} = g^{-1}g = I$. Essas expressões seguem abaixo [11]:

$$gg^{-1} = (1 + X_\alpha * \delta\phi^\alpha)(1 - X_\beta * \delta\phi^\beta) = 1 - \delta\phi^\alpha * \delta\phi^\beta * X_\alpha X_\beta \tag{2.120}$$

$$g^{-1}g = (1 - X_\beta * \delta\phi^\beta)(1 + X_\alpha * \delta\phi^\alpha) = 1 - \delta\phi^\beta * \delta\phi^\alpha * X_\beta X_\alpha \tag{2.121}$$

A operação inversa existe apenas se as condições de integrabilidade forem satisfeitas pois nesse caso $gg^{-1} = g^{-1}g = I$. Assim, como uma transformação canônica possui sempre uma inversa, a única maneira de se relacionar a transformação acima com uma transformação canônica é se as condições de integrabilidade forem satisfeitas. Isso não parece ser uma limitação significativa haja vista que de acordo com discussões anteriores acabamos por concluir que apenas as Hamiltonianas involutivas estão relacionadas aos fluxos Hamiltonianos dos observáveis do espaço de fase. Ao considerar as propriedades que provamos para as transformações geradas por g, podemos concluir que elas formam um grupo.

Para que possamos analisar qual o efeito de uma transformação geral no espaço de fase sobre a 2- forma simplética ω vamos fixar a notação:

$$\{\varepsilon^{a'}(x), \varepsilon_{b'}(y)\} = {\omega^{a'}}_{b'}(x, y) = \delta^d(x - y)\begin{pmatrix} 0 & \delta^{a'}_{b'} \\ -\delta^{a'}_{b'} & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo que $\varepsilon^{a'}(x) = (\phi^{a'}(x), p_{a'}(x))$ representa o espaço de fase reduzido e a 2- forma simplética ω pode ser escrita como:

$$\omega = \int d\sigma_y d\sigma_z \; \varepsilon^{a'}(y) \; \omega_{a'b'}(y,z) \; \varepsilon^{b'}(z) \tag{2.122}$$

Desse modo, sob uma transformação geral das coordenadas do espaço de fase dada por $\tilde{\varepsilon}^{i'} = g^{i'}{}_{k'}\varepsilon^{k'}$, a matriz $\omega_{i'j'}$ se transforma da seguinte maneira:

$$\tilde{\omega}_{k'l'} = g^{j'}{}_{k'}\omega_{j'i'}g^{i'}{}_{l'}$$

A partir da expressão acima podemos concluir que a 2- forma simplética ω se transforma como $g\omega g^{-1}$, sendo que g representa a matriz de transformação das coordenadas do espaço de fase. Como toda a física do espaço de fase, diferencial de observáveis, parênteses de Poisson, etc, está contida em ω, impõe-se que uma transformação canônica é um subconjunto das transformações g que deixam essa forma invariante $g\omega g^{-1} = \omega$. Isso significa, que no caso de uma transformação canônica, a 2 -forma simplética mantém a estrutura que possuía nas coordenadas antigas $\phi^{a'}, p_{a'}$ também nas coordenadas novas $\tilde{\phi}^{a'}, \tilde{p}_{a'}$:

$$\omega = \int d\sigma_x \delta\phi^{a'}(x) \wedge \delta p_{a'}(x) = \int d\sigma_x \delta\tilde{\phi}^{a'}(x) \wedge \delta\tilde{p}_{a'}(x)$$

Assim, para analisarmos se a transformação $g = (1 + X_\alpha * \delta\phi^\alpha)$ é de fato canônica, devemos verificar se ela preserva ω:

$$g\omega g^{-1} = (1 + X_\alpha * \delta\phi^\alpha)\omega(1 - X_\beta * \delta\phi^\beta) = \omega + X_\alpha * \delta\phi^\alpha \omega X_\beta * \delta\phi^\beta \tag{2.123}$$

O último termo da expressão à direita pode ser melhor analisado como:

$$X_\alpha * \delta\phi^\alpha \omega X_\beta * \delta\phi^\beta = \delta\phi^\alpha\delta\phi^\beta \left(\frac{\delta\Phi_\alpha}{\delta\phi^{a'}}\delta\phi^{a'} + \frac{\delta\Phi_\alpha}{\delta p_{a'}}\delta p_{a'}\right) X_\beta = \int d\sigma_x d\sigma_y \delta\phi^\alpha(x)\delta\phi^\beta(y)\{\Phi_\alpha(x), \Phi_\beta(y)\} \tag{2.124}$$

Como estamos assumindo que as condições de integrabilidade são satisfeitas, temos que ω é preservado pelas transformações g que, como vimos, possuem todas as características de uma transformação canônica.

Ao consultarmos a definição de $X_\alpha(x)$ e da diferencial fundamental, notamos que se estamos considerando Hamiltonianas involutivas, com a informação a respeito das não-involutivas devidamente codificada nos PPG, podemos concluir que os fluxos Hamiltonianos gerados pela diferencial fundamental são transformações canônicas. É interessante notar que dentre estes fluxos estamos também considerando a evolução temporal, ou seja, ela pode ser entendida como uma transformação canônica. As chamadas transformações de gauge representam um subconjunto das transformações canônicas parametrizadas por funções locais arbitrárias e que não estão relacionadas à evolução temporal. Elas se caracterizam como as transformações a ponto fixo, que não agem sob os argumentos espaço-temporais dos campos, agindo apenas em suas formas funcionais.

O subconjunto das transformações canônicas que correspondem às transformações de gauge são aquelas parametrizadas por funções locais arbitrárias e que apresentam uma interdependência entre tais parâmetros imposta pela condição:

$$\delta_g \mathcal{L} = 0 \tag{2.125}$$

Em que δ_g denota a variação da Lagrangiana induzida por variações correspondentes dos seus campos que se dão através de transformações canônicas a tempo fixo.

Assim, o gerador das transformações de gauge possui a forma:

$$G_{gauge}(x) = \Phi_z(x)\delta t^z(x)\Big|_{\delta_g \mathcal{L}=0} \; ; \; \delta_g \phi^a(x) = \int d\sigma_y \{\phi^a(x), G_{gauge}(z)\}^*$$

Na expressão acima $G_{gauge}(x) = \Phi_z(x)\delta t^z(x)\Big|_{\delta_g \mathcal{L}=0}$ significa que os parâmetros locais estão relacionados pela condição imposta pela equação (2.125).

Bibliografia

[1] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C.E. Valcárcel, *Non-involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, Ann. Phys. **323** 3137 (2008).

[2] C. Caratheódory, *Calculus of Variations and Partial Diferential equations of the First Order* 3rd edn (American Mathematical Society) (1999).

[3] M. C. Bertin, *Formalismo de Hamilton-Jacobi generalizado: Teorias de campos com derivadas de ordem superior*, tese de doutorado, http://www.ift.unesp.br/posgrad/mcbertin.pdf (2010).

[4] W. F. Wreszinski, *Mecanica Clássica moderna*, 1 st edn (Editora Unesp.) (1997).

[5] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C. E. Valcárcel, *Involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, J. Math. Phys. **55** 112901 (2014).

[6] Y. Güler, Il Nuovo cimento B **100** 251 (1987)

[7] R. C. Santos, *Partículas de spin-1 em D-dimensões via tensor simétrico*, dissertação de mestrado, http://repositorio.unesp.br/handle/11449/91813 (2012).

[8] P. A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J.Math. **2** 129 (1950);
P. A.M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3** 1 (1951);
P. A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics* New York:Yeshiva University (1964).

[9] C. Von Westenholz, *Differential forms in mathematical physics*, North Holland Publishing company (1978).

[10] J. V. José and E. J. Saletan, *Classical Dynamics: A contemporary approach*, 1 st edn, (Cambrige Univesity Press.) (1998).

[11] C.E. Valcárcel, *Estudo clássico completo do formalismo de Hamilton-Jacobi*, tese de doutorado, http://www.ift.unesp.br/posgrad/mcbertin.pdf (2012).

Capítulo 3

Modelo BF em D=1+1 dimensões

Até os dias de hoje não foi encontrada uma teoria quântica consistente para a gravitação em $D = 3 + 1$ dimensões. Esse fato acaba por motivar o estudo da gravitação em dimensões mais baixas [1] já que nelas os objetos geométricos usados para descrever a teoria se simplificam e dessa maneira espera-se que seja possível entender melhor a sua quantização [2].

Esse estudo serve como um bom laboratório para uma futura abordagem da gravitação em quatro dimensões. Um exemplo interessante de uma aplicação desse tipo de procedimento é a análise feita por Schwinger da eletrodinâmica quântica em $D = 1 + 1$ dimensões.

O modelo de Jackiw-Teitelboim (JT) [3] foi criado como uma abordagem alternativa ao modelo de Einstein-Hilbert para que se pudesse fazer um estudo da gravitação em $D = 1 + 1$ dimensões. O tensor de Riemann bidimensional é escrito em função do escalar de Ricci, numa forma compatível com um espaço maximalmente simétrico caso o escalar de Ricci seja constante[1]:

$$R_{\mu\nu\beta\alpha} = \frac{R}{2}(g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}) \tag{3.1}$$

A identidade acima implica em que as equações de Einstein sejam identicamente nulas:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\frac{R}{2} = g_{\mu\nu}\frac{R}{2} - g_{\mu\nu}\frac{R}{2} = 0 \tag{3.2}$$

Desse modo, o modelo de Jackiw-Teitelboim foi criado justamente para que o problema da gravitação bidimensional fosse superado. A sua ação segue dada abaixo:

$$S = \int dx^2\sqrt{g}\phi(R - k) \tag{3.3}$$

A variação da ação com relação ao campo escalar auxiliar ϕ, conhecido como dilaton, leva à equação:

$$R = k \tag{3.4}$$

A equação acima expressa o fato de que estamos escolhendo uma geometria compatível com um escalar de Ricci bidimensional constante e igual a curvatura Gaussiana que nesse caso esta sendo representada por uma espécie de constante cosmológica. A equação de movimento para o dilaton é dada pela seguinte expressão:

[1] $g_{\mu\nu}$ denota a métrica do espaço-tempo

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{k}{2} g_{\mu\nu} \phi = 0 \tag{3.5}$$

As características desse modelo acabaram por inspirar uma teoria de gauge não abeliana e topológica, o modelo BF bidimensional, que assim como o modelo de (JT), é descrito por um campo escalar a multiplicar uma curvatura. Esse modelo é descrito pela seguinte ação [4]:

$$S = tr \int (B \wedge F) \tag{3.6}$$

As suas equações de movimento são mostradas abaixo:

$$F = 0 \ ; \ DB = 0 \tag{3.7}$$

Na expressão acima, a qual é descrita num espaço-tempo bidimensional, $B = B^a J_a$ é uma 0-forma e $F \equiv DA = dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu J_a$ é a 2-forma de curvatura [2] escrita em termos de uma conexão de gauge dada por $A = A^a_\mu dx^\mu J_a$ que é uma 1-forma. Os operadores J^a são os geradores, na representação adjunta, de um grupo de gauge G ainda a se determinar.

Ao investigar a forma da ação e as definições dos seus campos podemos concluir que ela é invariante pela seguinte transformação de simetria de gauge:

$$\delta A = D\epsilon \quad ; \quad \delta B = [B, \epsilon] \tag{3.8}$$

Nessa expressão, o parâmetro de simetria ϵ é uma 0-forma.

Algumas características relevantes desse modelo são a sua invariância por transformações gerais de coordenadas e o fato dele não depender da métrica. Essa independência da métrica nos leva a esperar que a quantização da gravitação em $D = 1 + 1$ dimensões via modelo BF [2] seja mais simples que aquela feita em termos do modelo de (JT).

Para que possamos contrair índices internos (relacionados a projeção sobre os geradores do grupo G.) é preciso escolher um grupo cuja métrica de Killing correspondente seja não degenerada, ou seja, que admita inversa. O grupo $ISO(1,1)$, o grupo de Poincaré bidimensional, não pode ser usado nesse caso devido a essa condição. Desse modo consideraremos um grupo gerado pela deformação dessa álgebra, com $J_a = (P_0, P_1, \Lambda)$:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I{}^J P_J, \quad [P_I, P_J] = k \ \epsilon_{IJ} \Lambda \quad ; \quad I, J = 0, 1 \tag{3.9}$$

Em que P_a são os geradores de translações e Λ é o gerador das transformações de isometria do grupo de de-Sitter ou anti de-Sitter a depender do sinal de k. É interessante notar que, nesse caso, o grupo de simetria interna coincide com aquele do espaço-tempo pois para o caso em que o escalar de curvatura é uma constante, o grupo de simetria é a versão bidimensional do de de-Sitter (ou anti de-Sitter.).

A métrica de Killing é obtida a partir do traço dos geradores tomado na representação adjunta [5]:

$$g_{ab} \equiv tr(J_a J_b) = \begin{pmatrix} k\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

[2] $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A_{a\mu} A_{b\nu}$ em que f^{abc} é a constante de estrutura do grupo interno.

Temos que η_{IJ} é dado por $diag(\sigma^2,+)$. Se $k>0$ e $\sigma=1$ podemos redefinir as bases do espaço interno de modo a obtermos o grupo $SO(3)$ e se fixarmos $\sigma=i$, temos o grupo $SO(1,2)$ de de-Sitter (ou anti de-Sitter para $k<0$.).

A álgebra do grupo pode ser posta na forma:

$$\begin{aligned}
[J_a, J_b] &\equiv f_{ab}{}^{c} J_c = \epsilon_{abd} g^{dc} J_c, \\
g_{ab} &= \frac{1}{2} f_{ad}{}^{m} f_{bm}{}^{d}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, para que possamos fazer uma conexão com o modelo de Jackiw-Teitelboim assumimos que B é um campo auxiliar e que o campo A é dado pela expansão:

$$A = e_I P^I + \omega\Lambda \tag{3.12}$$

Sendo que e^I é diada e ω está relacionado com a conexão de spin que em $D=1+1$ tem apenas uma componente independente $\omega_{IJ}=\epsilon_{IJ}\,\omega$.

A equação $F=0$ oriunda da minimização da ação do modelo BF bidimensional pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
F &= dA + A\wedge A = de^I P_I + dw\Lambda + \frac{1}{2}e^I\wedge e^J[P_I,P_J] + \frac{1}{2}e^I\wedge\omega[P_I,\Lambda] + \frac{1}{2}\omega\wedge e^J[\Lambda,P_J] \\
&= (dw + \frac{1}{2}k\epsilon_{IJ}e^I\wedge e^J)\Lambda + (de^I - \omega\epsilon^{IJ}\wedge e_J)P_I = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

O termo proporcional a P^I está relacionado a nulidade da torção, o que garante que a conexão de spin pode ser escrita em termos das diadas, e o proporcional a Λ é a equação de movimento de (JT), $R=k$.

$$dw + \frac{1}{2}k\epsilon_{IJ}e^I\wedge e^J = dw + ke_0\wedge e_1 \equiv \left[R_{\mu\nu}{}^{01} + \frac{1}{2}k(e^0_\mu e^1_\nu - e^1_\nu e^0_\mu)\right]dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{3.14}$$

$$\left(e^\mu_0 e^\nu_1 - e^\nu_0 e^\mu_1\right)\left[R_{\mu\nu}{}^{01} + \frac{1}{2}k(e^0_\mu e^1_\nu - e^1_\nu e^0_\mu)\right] = -R + k = 0 \tag{3.15}$$

Nessa expressão estamos implicitamente trabalhando no subconjunto de soluções no qual as diadas são inversíveis, sendo que tal subconjunto corresponde a espaços nos quais se pode definir uma métrica.

Como a condição de torção nula é imposta a priori em (JT) enquanto que no contexto do modelo BF ela pode ser deduzida, temos que esse modelo é uma abordagem alternativa daquele, sendo que a sua equivalência se dá apenas no nível das equações de movimento, ou seja, classicamente. Isso pode ser inferido pelo fato de que a ação do modelo BF bidimensional escrita em termos dos objetos geométricos (diadas e conexão de spin.) não reproduz a ação de (JT), o que parece impedir que esses modelos sejam equivalentes quanticamente. Para levar a cabo um possível processo de quantização é preciso, antes de mais nada, conhecer bem o espaço de fase reduzido de uma dada teoria. Assim, nosso próximo passo será a caracterização do espaço de fase do modelo BF em $D=1+1$ dimensões através do formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory [6, 7, 8].

3.1 Análise do modelo BF em $D = 1{+}1$ dimensões através do formalismo de Hamilton-Jacobi

O estudo do modelo BF através do formalismo de Hamilton-Jacobi [9] representa uma boa maneira de se caracterizar o seu espaço de fase pois esse formalismo se baseia numa estrutura matemática sólida gerada pelas contribuições de Carathéodory e Frobenius [6, 10]. Quanto aos geradores de simetria, eles surgem naturalmente da estrutura interna da teoria sem que haja a necessidade de se apelar para conjecturas e algoritmos complementares.

Para iniciarmos a análise via formalismo de Hamilton-Jacobi do modelo BF em $D = 1 + 1$ dimensões será útil considerar a sua ação dada explicitamente em termos das componentes dos campos:

$$S = tr \int B \wedge F = \frac{1}{2} tr(J_a J_b) \int d^2x \; \epsilon^{\mu\nu} B^a F^b_{\mu\nu} = \int d^2x \; B_a \Big(\partial_0 A^a_1 - \partial_1 A^a_0 + f_{bc}{}^a A^b_0 A^c_1 \Big) \qquad (3.16)$$

Ao variar a ação com relação aos campos, obtemos:

$$\delta S = \int d^2x \left\{ \delta B_a \Big(\partial_0 A^a_1 - \partial_1 A^a_0 + f_{bc}{}^a A^b_0 A^c_1 \Big) - \Big(\partial_0 B_d + f_{db}{}^a A^b_0 B_a \Big) \delta A^d_1 + \Big(\partial_1 B_d + f_{dc}{}^a A^c_1 B_a \Big) \delta A^d_0 \right\} \qquad (3.17)$$

Para deduzir a expressão da variação da ação foi necessário fazer integrações por partes e usar o fato de que a constante de estrutura do grupo relacionado a simetria interna dos campos é antissimétrica em seus dois primeiros índices. Ao impor que a variação da ação é nula, obtemos as equações de movimento:

$$\Big(\partial_0 A^a_1 - \partial_1 A^a_0 + f_{bc}{}^a A^b_0 A^c_1 \Big) = 0 \; ; \; \Big(\partial_0 B_d + f_{db}{}^a A^b_0 B_a \Big) = 0 \; ; \; \Big(\partial_1 B_d + f_{dc}{}^a A^c_1 B_a \Big) = 0 \qquad (3.18)$$

Essas equações podem ser reescritas ao se fazer uso da definição de derivada covariante, a qual é dada pela expressão $D_\mu \theta^a_\nu \equiv \partial_\mu \theta^a_\nu + f^a_{\;bc} A^b_\mu \theta^c_\nu$. Dessa maneira, temos:

$$\Big(\partial_0 A^a_1 - \partial_1 A^a_0 + f_{bc}{}^a A^b_0 A^c_1 \Big) = 0 \quad ; \quad D_0 B_d = 0 \quad ; \quad D_1 B_d = 0 \qquad (3.19)$$

Os momentos canônicos podem ser calculados a partir da densidade Lagrangiana $\mathcal{L} = B_a(\partial_0 A^a_1 - \partial_1 A^a_0 + f_{bc}{}^a A^b_0 A^c_1)$ do modelo BF:

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_a)} = 0 \;\; ; \;\; \pi^\mu_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^a_\mu)} = \delta^{1\mu} B_a \qquad (3.20)$$

Notamos que a estrutura dessa densidade de Lagrangiana é tal que a definição dos momentos canônicos nos permite obter duas Hamiltonianas (vínculos). O procedimento relacionado ao formalismo de Hamilton-Jacobi consiste na classificação das Hamiltonianas em involutivas ou não involutivas, na redefinição dos parênteses de Poisson e finalmente no teste de integrabilidade das Hamiltonianas involutivas [7, 8]. Se elas forem integráveis o processo termina, já em caso contrário, as condições de integrabilidade (IC) irão definir novos vínculos e todo o processo recomeça até que as (IC) de todas as Hamiltonianas involutivas sejam satisfeitas.

A densidade Hamiltoniana do modelo BF possui a forma:

$$\mathcal{H} = \pi^{\mu}_{a}\partial_0 A^a_{\mu}+\Pi^a B_a-\mathcal{L} = B_a\Bigg(\partial_1 A^a_0-f_{bc}{}^{a}A^b_0 A^c_1\Bigg) = \Bigg(-\partial_1 B_a A^a_0-(f_{bc}{}^{a}A^c_1 B_a\Bigg)A^b = -A^a_0 D_1 B_a \tag{3.21}$$

Na segunda igualdade da expressão acima foi feita uma integração por partes apesar do fato de que não há integral alguma. Claramente trata-se de um abuso de notação e fica subtendido que como a Hamiltoniana é a integral volumétrica dessa expressão, sempre podemos defini-la, a menos de termos de superfície.

Agora definiremos as Hamiltonianas e os parâmetros associados a elas. Assim, temos:

$$H' = \pi + \mathcal{H} = 0 \rightarrow x^0 \equiv t \ ; \ H'_{0(a)} = \pi^0_a = 0 \rightarrow A^a_0 \equiv \lambda^a_0 \tag{3.22}$$

$$H'_{1(a)} = \pi^1_a - B_a = 0 \rightarrow A^a_1 \equiv \lambda^a_1 \ \ ; \ H'_a = \Pi_a = 0 \rightarrow B_a \equiv \epsilon_a$$

A primeira das Hamiltonianas definidas está relacionada à equação de Hamilton-Jacobi pois $\pi = \frac{\partial S}{\partial t}$ sendo que as demais entram na definição dos momentos canônicos. Para prosseguirmos com essa análise fixaremos os parênteses de Poisson fundamentais:

$$\{A^a_{\mu}(x), \pi^{\nu}_b(y)\} = \delta^a_b \delta^{\nu}_{\mu}\delta(x-y) \ \ ; \ \{B_a(x), \Pi^b(y)\} = \delta^b_a \delta(x-y) \tag{3.23}$$

De acordo com a definição das Hamiltonianas e dos parênteses de Poisson fundamentais podemos notar que as Hamiltonianas (estamos nos referindo àquelas obtidas na definição dos momentos canônicos.) que possuem parênteses de poisson não nulos entre si são $H'_{(a)}$ e $H'_{1(a)}$:

$$\{H'_{1(a)}, H'_{(b)}\} = \{\pi^1_a - B_a, \Pi_b\} = -\delta^b_a \delta(x-y) \tag{3.24}$$

As Hamiltonianas acima são não involutivas e por isso vão entrar na definição dos parênteses de Poisson generalizados (PPG), reduzindo o espaço de fase do sistema. Já a Hamiltoniana $H'_{0(a)}$ se caracteriza como involutiva sendo que a sua integrabilidade vai ser testada por meio do uso da diferencial fundamental que será calculada no espaço de fase reduzido gerado pelos PPG. A fim de obter os PPG definiremos uma matriz da forma $M^{rs} = \{h^r, h^s\}$ em que $h^1 = H'_{1(a)}$ e $h^0 = H'_{(b)}$. Os elementos de matriz não nulos são dados por $M^{01} = -M^{10}$:

$$M^{10} = \{(\pi^1_a - B_a), \Pi^b\} = -\delta^b_a \delta(x-y) \tag{3.25}$$

Em termos matriciais podemos escrever M^{rs} como:

$$M^{ij} = \delta^a_b \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (M^{ij})^{-1} = -\delta^a_b \delta(x-y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

De posse da matriz inversa $(M^{ij})^{-1}_{ab}$ podemos definir os parênteses de Poisson generalizados que são denotados pela expressão abaixo:

$$\{F(x), G(y)\}^* = \{F(x), G(y)\} - \int dzdw\{F(x), h^a_i(z)\}(M^{ij})^{-1}_{ab}(z,w)\{h^b_j(w), G(y)\} \tag{3.27}$$

É fácil notar que os PPG $\{A^a_\mu(x), \pi^\nu_b(y)\}^*$ serão iguais àqueles definidos inicialmente. Isso se deve ao fato de que $\{\pi^\nu_a(x), h^s\} = 0$ (Desse modo, os parênteses de Poisson generalizados em que $\pi^\nu_a(x)$ figura serão idênticos àqueles da definição inicial.). Os parênteses de Poisson generalizados $\{B_a(x), \Pi^b(y)\}^*$ serão nulos:

$$\begin{aligned}\{B_a(x), \Pi^b(y)\}^* &= \{B_a(x), \Pi^b(y)\} - \int dzdw \{B_a(x), h^c_0\}(M^{01})^{-1}_{cd}(z,w)\{h^d_0(w), \Pi^b(y)\} \\ &= \delta^a_b\delta(x-y) - \int dw\ dz(\delta^d_a\delta(x-z))\delta_{df}\delta(z-w)(-1)\delta^{fb}\delta(w-y)(-1) = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

Os parênteses de Poisson generalizados $\{A^a_\mu(x), B_b(y)\}^*$ são calculados abaixo:

$$\begin{aligned}\{A^a_\mu(x), B_b(y)\}^* &= \{A^a_\mu(x), B_b(y)\} - \int dzdw\{A^a_\mu(x), h^c_0\}(M^{10})^{-1}_{cd}(z,w)\{h^d_0(w), B_b\} \\ &= \int dzdw\delta^a_d\delta(x-z)\delta_\mu\delta^{df}\delta(z-w)\delta(w-y) = \delta^1_\mu\delta^a_b\delta(x-y)\end{aligned} \tag{3.29}$$

Em que $B_b(x)$ faz o papel do momento canônico $\pi^1_b(x)$.

Os parênteses de Poisson generalizados $\{A^a_\mu(x), \Pi_b(y)\}^*$ são nulos devido ao fato de que $A^a_\mu(x)$ e $\Pi_b(x)$ possuem parêntese de Poisson não nulo apenas com o vínculo h^1, o que implica que o termo extra presente na definição dos PPG será nulo pois $M_{11} = 0$.

A diferencial fundamental é definida de acordo com a expressão abaixo:

$$dF(x) = \int dy \left[\{F(x), \mathcal{H}(y)\}^* dt + \{F(x), \pi^a_0\}^* d\lambda_a\right] \tag{3.30}$$

Em que λ_a é um parâmetro local arbitrário.

Agora chega o momento propício para analisarmos a integrabilidade da Hamiltoniana involutiva $H'^0_a(x) = \pi^0_a(x)$:

$$dH'^0_a(x) = \int dy \left[\{H'^0_a(x), \mathcal{H}(y)\}^* dt + 0 d\lambda_a\right] = -\int dy \{\pi^0_a(x), A_0(y)D_1B_a(y)\}^* dt = D_1B_a(x)dt = 0 \tag{3.31}$$

Na expressão acima estamos impondo a condição de integrabilidade sobre o vínculo $H'^0_a(x)$ e esse procedimento dá origem à uma nova Hamiltoniana $C_a(x) = D_1B_a(x)$. Através da definição de D_1 e dos PPG não nulos, podemos concluir que os vínculos $H'^0_a(x)$ e $C_a(x) = D_1B_a(x)$ estão em involução. Assim, não é necessário definir novos parênteses de Poissons e o passo seguinte será o teste das condições de integrabilidade sobre a Hamiltoniana $C_a(x)$. Para procedermos dessa maneira, será útil, antes de mais nada, considerarmos o fato de que os seus PPG's formam uma álgebra de Lie com a mesma constante de estrutura f^{abc} que a do grupo interno:

$$\{C_a(x), C_b(y)\}^* = \delta(x-y)f_{ab}{}^c C_c(x) \tag{3.32}$$

Assim, as condições de integrabilidade podem ser obtidas ao usarmos a álgebra de $C_a(x)$. Para tal, será importante notarmos que podemos escrever a densidade de Hamiltoniana $\mathcal{H}(x)$

como $\mathcal{H}(x) = -A_0^a(x)D_1B_a(x) = -A_0^a(x)C_a(x)$. Assim, a diferencial fundamental de $C_a(x)$ pode ser escrita como:

$$dC_a(x) = \int dy\left[\{C_a(x),\mathcal{H}(y)\}dt + \{C_a(x),\pi_0^b(y)\}d\lambda_b(y)\right] = -\int dy\left[\{C_a(x),A_0^b(y)C_b(y)\}dt\right]$$

$$= -f_{ab}{}^cC_c(x)A^b(x) \tag{3.33}$$

A expressão acima nos permite concluir que as condições de integrabilidade foram satisfeitas pois $dC_a(x)$ é uma combinação linear de Hamiltonianas.

3.2 Equações características do modelo BF bidimensional

Nessa seção temos como objetivo estudar as equações características do modelo BF bidimensional. Para isso redefiniremos a diferencial fundamental devido ao surgimento da Hamiltoniana $C_a(x)$. Como se trata de uma Hamiltoniana involutiva não haverá necessidade de se redefinir novamente os parênteses de Poisson, porém a definição da diferencial fundamental deverá levar em conta a evolução ao longo do parâmetro arbitrário dw^a gerada por tal Hamiltoniana. Desse modo, a diferencial fundamental de um observável arbitrário do espaço de fase assume a forma:

$$df(x) = \int dy\left[\{f(x),\mathcal{H}(y)\}^*dt + \{f(x),\pi_0^b(y)\}^*d\lambda_b + \{f(x),C_a(y)\}^*dw_a\right] \tag{3.34}$$

As equações características do modelo BF são obtidas ao considerar a diferencial fundamental das variáveis canônicas. Comecemos então pelo campo $A_\mu^a(x)$:

$$\begin{aligned} dA_\mu^a(x) &= \int dy\left[\{A_\mu^a(x),\mathcal{H}(y)\}^*dt + \{A_\mu^a(x),\pi_0^b(y)\}^*d\lambda_b + \{A_\mu^a(x),C_a(y)\}^*dw_a\right] \\ &= \int dy\left[\{A_\mu^a(x),(D_1A_0(y))B_a(y)\}^*dt + \{A_\mu^a(x),\pi_c^0(y)\}^*d\lambda^c + \{A_\mu^a(x),D_1B^b(y)\}^*dw_b(y)\right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

A forma da Hamiltoniana usada nessa expressão foi obtida através de integrações por partes da definição original. Elas são equivalentes a menos de uma quantidade que dará origem a um termo de superfície. Assim, ao fazer uso da definição dos PPG, a diferencial de $A_\mu^a(x)$ vem dada abaixo:

$$dA_\mu^a(x) = \delta_\mu^1\left[D_1A_0^a(x)dt - D_1dw^a\right] + \delta_\mu^0 d\lambda^a \tag{3.36}$$

Agora vamos analisar a diferencial fundamental do campo $B_a(x)$:

$$
\begin{aligned}
dB_a(x) &= \int dy \Bigg[\{B_a(x), \mathcal{H}(y)\}^* dt + \{B_a(x), \pi_b^0(y)\}^* d\lambda^b + \{B_a(x), C_b(y)\}^* dw^b \Bigg] \\
&= A_0^c(x) f_{cak} B^k(x) dt + f_{cak} B^k(x) dw^c
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

Ao considerar a definição dos PPG não é difícil concluir que $d\Pi_a(x) = 0$. Quanto aos momentos canônicos $\pi_a^\mu(x)$, temos:

$$
\begin{aligned}
d\pi_a^\mu(x) &= \int dy \Bigg[\{\pi_a^\mu(x), \mathcal{H}(y)\}^* dt + \{\pi_a^\mu(x), \pi_b^0(y)\}^* d\lambda^b + \{\pi_a^\mu(x), C_b(y)\}^* dw^b \Bigg] \\
&= \delta_0^\mu D_1 B_a(x) dt - \delta_1^\mu f_{ac}{}^d B_d(x) \Bigg(A_0^c(x) dt - dw^c \Bigg)
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

A diferencial fundamental dos campos canônicos nos permite avaliar a sua evolução através dos diferentes parâmetros relacionados às diferentes Hamiltonianas que geram essas evoluções. A transformação dos campos com relação ao tempo acaba por nos fornecer a sua dinâmica e deve, portanto, ser equivalente às equações de movimento obtidas via equações de Euler-Lagrange. Já as evoluções com relação aos parâmetros locais arbitrários estão ligadas às transformações canônicas do sistema. Quando se impõe que a Lagrangiana ou a ação sejam invariantes por essas transformações, acabamos por vincular os seus parâmetros de modo que esse subconjunto de transformações definirá as simetrias do modelo em questão.

3.3 Equações de movimento via Hamilton-Jacobi

As equações de movimento relacionadas ao modelo BF podem ser obtidas ao se considerar a variação dos campos canônicos apenas com relação ao parâmetro temporal, ou seja, com os demais parâmetros fixados como sendo nulos. Assim, a evolução temporal de $B_a(x)$ com $dw^c = d\lambda^c = 0$, é dada pela expressão:

$$
\partial_0 B_a - f_{ca}{}^k A_0^c B_k = 0 = \partial_0 B_a + f_{ac}{}^k A_0^c B_k \rightarrow D_0 B_a = 0 \tag{3.39}
$$

Essa expressão recupera uma das equações de movimento de B^a. Agora, avaliaremos a evolução temporal da componente do momento canônico $\pi_a^0(x)$:

$$
\partial_0 \pi_a^0(x) = D_1 B_a(x) \rightarrow D_1 B_a(x) = 0 \tag{3.40}
$$

Na expressão acima usamos o fato de que $\pi_a^0(x) = 0$ e assim acabamos por obter a parte espacial das equações de movimento de B^a. Quanto à evolução temporal do campo $A_\mu(x)$, temos:

$$
\partial_0 A_\mu(x) = \delta_\mu^1 D_1 A_0^a(x) \tag{3.41}
$$

A componente 0 dessa equação nos fornece $\partial_0 A_0(x) = 0$ o que se reflete no fato de que o momento canônico $\pi_a^0(x)$ é nulo. Essa equação significa que o campo A_0 faz o papel de um multiplicador de Lagrange. Quando se considera a componente espacial da referida equação, temos:

$$\partial_0 A_{1a}(x) = D_1 A_{0a}(x) \rightarrow 0 = \partial_0 A_{1a}(x) - \partial_1 A_{a0}(x) + f_{ab}{}^c A_1^b A_{0\ c}(x) \tag{3.42}$$

Essa é mais uma das equações de Euler-Lagrange e dessa maneira mostramos que elas também podem ser obtidas pelo formalismo de Hamilton-Jacobi.

3.4 Transformações canônicas e simetrias da ação

Na seção anterior as equações de movimento foram calculadas ao considerar apenas a evolução temporal dos campos. Já nessa seção, consideraremos apenas a evolução dos campos com relação aos parâmetros locais arbitrários o que claramente deve estar ligado às transformações canônicas do modelo. Para que uma transformação canônica represente uma simetria do modelo BF é preciso que a variação da Lagrangiana (ou pelo menos da ação.) seja nula quando se considera a variação dos seus campos induzidas por essas transformações. Esse requisito de invariância nos permitirá obter vínculos entre os parâmetros da transformação sendo que a partir desse ponto será possível obter os geradores das transformações de gauge do modelo.

As variações dos campos induzidas pela variação dos parâmetros arbitrários são dadas abaixo[3]:

$$\delta A_\mu^a = \delta_\mu^0 \delta\lambda^a - \delta_\mu^1 D_1 \delta w^a \tag{3.43}$$

$$\delta B_a = f_{ab}{}^c \delta w^b B_c \tag{3.44}$$

Para que possamos identificar o conjunto de transformações que deixam a Lagrangiana do modelo BF invariante, precisamos primeiro determinar como ela varia com relação à uma dada transformação arbitrária dos seus campos :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta B^a (F_a^{01}) + B^a(\partial_0 \delta A_a^1 - \partial_1 \delta A_a^0 + f_{ab}{}^c \delta A^{0\ b} A_c^1 + f_{ab}{}^c A^{0\ b} \delta A_c^1) \\ &= \delta B^a (F_a^{01}) + B_a D_0 \delta A_1^a - B_a D_1 \delta A_0^a \end{aligned} \tag{3.45}$$

Na expressão acima usamos que $F_{01\ a} = \partial_0 A_{1\ a} - \partial_1 A_{0\ a} + f_{ab}{}^c A_0^b A_{c\ 1}$. Quando substituímos na expressão da variação da Lagrangiana a forma explícita das variações dos campos A_μ^a e B^a, obtemos:

$$\delta\mathcal{L} = f_{ab}{}^c \delta w^b B_c (F_{01}^a) + \left[D_0 \left(- D_1 \delta w^a \right) - D_1 \delta\lambda^a \right] B_a \tag{3.46}$$

Para isolar um conjunto de transformações que represente uma simetria do modelo, fixaremos os parâmetros da seguinte maneira $\delta w^a \equiv -\epsilon^a$ e $\delta\lambda^a \equiv D_0 \epsilon^a$. Assim, a variação da Lagrangiana assume a forma:

[3] Vamos trocar a notação $d\alpha(x)$ (em que $\alpha(x)$ é um dado parâmetro arbitrário.) por $\delta\alpha(x)$ que é mais comumente usada no contexto do estudo de simetrias de gauge

$$\delta\mathcal{L} = -f_{ab}{}^{c}\epsilon^{b}B_{c}(F^{a}_{01}) + \left[\left(D_0 D_1\epsilon^{a}\right) - \left(D_1 D_0\epsilon^{a}\right)\right]B_a \tag{3.47}$$

A expressão de $\delta\mathcal{L}$ nos remete ao fato de que o comutador de derivadas covariantes na representação adjunta é dado por $[D_\mu, D_\nu]_{bc} = -f_{dbc}F^{d}_{\ \mu\nu}$. Dessa maneira, na expressão da variação da lagrangiana temos um termo da forma $[(D_0D_1\epsilon^a)-(D_1D_0\epsilon^a)]B_a$ que pode ser escrito como $[D_0^{(ac)}D_1^{(cx)} - D_1^{(ac)}D_0^{(cx)}]\epsilon_x B_a = -f_{dax}F^{d}_{01}\epsilon^x B^a$ sendo que $D_{1(ax)}\epsilon^x = (\partial_1\delta_{ax} + f_{ab}{}^{c}A^{b}_{1}\delta_{cx})\epsilon^x$.

Assim, a variação da ação pode ser posta na forma:

$$\delta\mathcal{L} = -f_{ab}{}^{c}\epsilon^{b}B_{c}F^{a}_{01} + f_{kx}{}^{a}\epsilon^{x}B_{a}F^{k}_{01} = 0 \tag{3.48}$$

Na expressão acima foi feito uso da antissimetria das constantes de estrutura. Agora, de posse desses resultados, podemos escrever a transformação de simetria dos campos que deixam a lagrangiana invariante como:

$$\delta A^{a}_{\mu} = \delta^{0}_{\mu}D_0\epsilon^a + \delta^{1}_{\mu}D_1\epsilon^a = D_\mu\epsilon^a \tag{3.49}$$

$$\delta B_a = -f_{ab}{}^{c}B_c\epsilon^b \tag{3.50}$$

O gerador das transformações de gauge é tal que podemos escrever as variações (de simetria) dos campos canônicos como $\delta A^{a}_{\mu}(x) = \{A^{a}_{\mu}(x), G\}$ e $\delta B_a(x) = \{B_a(x), G\}$. A expressão do gerador segue abaixo:

$$G = \int dy\left[H^{0}_{a}(y)D_0\epsilon^a(y) - C_a(y)\epsilon^a(y)\right] \tag{3.51}$$

A variação do campo $A^{k}_{\mu}(x)$ é dada por:

$$\delta A^{k}_{\mu}(x) = \{A^{k}_{\mu}(x), G\}^{*} = \int dy\left[\{A^{k}_{\mu}(x), H^{0}_{a}(y)\}^{*})D_0\epsilon^a(y) - \{A^{k}_{\mu}(x), -C_a(y)\}^{*}\epsilon^a(y)\right] =$$
$$\int dy\left[\{A^{k}_{\mu}(x), \pi^{0}_{a}(y)\}^{*})D_0\epsilon^a(y) - \{A^{k}_{\mu}(x), -D_1B_a\}^{*}\epsilon^a(y)\right] = \delta^{0}_{\mu}D_0\epsilon^k(x) + \delta^{1}_{\mu}D_1\epsilon^k(x) \equiv D_\mu\epsilon^k(x) \tag{3.52}$$

Para deduzir a expressão acima fizemos uma integração por partes com relação a derivada covariante D_1. Concluímos por esse resultado que, ao menos para o campo $A^{k}_{\mu}(x)$, G cumpre o papel de um gerador das transformações de simetria.

A variação do campo B^k vem dada pela expressão:

$$\delta B^{g}(x) = \{B^{g}(x), G\}^{*} = \int dy\left[\{B^{g}(x), H^{0}_{a}(y)\}^{*}D_0\epsilon^a(y) - \{B^{g}(x), -C_a(y)\}^{*}\epsilon^a(y)\right] =$$
$$\int dy\left[\{B^{g}(x), \pi^{0}_{a}(y)\}^{*})D_0\epsilon^a(y) - \{B^{g}(x), -\left(\partial_1B_a(y) + f_{ab}{}^{c}A^{b}_{1}(y)B_c(y)\right)\}^{*}\epsilon^a(y)\right] = -f^{gac}B_c(x)\epsilon_a(x) \tag{3.53}$$

Esses resultados demonstram que de fato G é o gerador das transformações de simetria do modelo BF. A expressão desse gerador foi obtida naturalmente dentro do contexto do formalismo de Hamilton-Jacobi sem que tenha sido necessário o uso de nenhum algoritmo como, por exemplo, o de Castelani [11] (presente no contexto do formalismo de Dirac [12].). Também não usamos a conjectura de que os vínculos de primeira classe (equivalentes, na nossa terminologia, às Hamiltonianas involutivas.) geram transformações de gauge. Em nosso desenvolvimento tais vínculos surgem naturalmente na definição da diferencial fundamental e portanto geram transformações canônicas que, no presente caso, possuem um subgrupo relacionado às transformações de gauge.

Quanto aos graus de liberdade propagados por este modelo podemos afirmar que a sua contagem é feita da seguinte maneira: De início tínhamos 18 graus de liberdade $\{A^a_\mu, \pi^a_\mu, B^a, \Pi^a\}$. Ao construir os parênteses de Poisson generalizados notamos que os momentos Π^a são eliminados da dinâmica e B^a pode ser associado à π^a_1. Desse modo, o espaço de fase reduzido passa a ter 12 graus de liberdade. Além disso, temos 6 Hamiltonianas involutivas (Que estão relacionadas à seis parâmetros arbitrários da teoria.). Para se ter uma dinâmica univocamente determinada é preciso adicionar mais seis Hamiltonianas (fixadoras de gauge.) de modo que o sistema se torne não-involutivo e não haja mais liberdade local na teoria. Logo, a existência de uma certa quantidade de Hamiltonianas involutivas implica na necessidade de se vincular o dobro dessa quantidade de graus de liberdade. Isso significa que, neste caso, no final de contas, temos 0 graus de liberdade.

Bibliografia

[1] J. D. Brown, *Lower Dimensional Gravity*, (World Scientific,1988).

[2] A. H. Chamseddine and D. Wyler, *Topological Gravity in* $1+1$ *dimensions*, Nucl. Phys. B **340** 595-616 (1990).

[3] C. Teitelboim,Phys. Lett. B **126**, 41 (1983); **126** , 46 (1983); **126** , 49 (1983); R. Jackiw and C. Teitelboim, *Quantum Theory of Gravity* , edited by S. Christensen (Adam Hilger, Bristol, 1984); R. Jackiw, Nucl. Phys. B **252** , 343 (1985).

[4] M. Weis, *Topological Aspects of Quantum Gravity*, Ph. D thesis, Niels Bohr Institute, (1997).

[5] M. Hamermesh, *Group theory and its applications to physical problems*, Dover, (1989).

[6] C. Carathеódory, *Calculus of Variations and Partial Diferential equations of the First Order* 3rd edn (American Mathematical Society) (1999).

[7] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C.E. Valcárcel, *Non-involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, Ann. Phys. **323** 3137 (2008).

[8] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C. E. Valcárcel, *Involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, J. Math. Phys. **55** 112901 (2014).

[9] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel, *Two dimensional background field gravity: A Hamilton-Jacobi analysis*, J. Math. Phys. **53** 102901 (2012).

[10] C. Von Westenholz, *Differential forms in mathematical physics*, North Holland Publishing company (1978).

[11] L. Castellani , *Symmetries in constrained Hamiltonian systems*, Ann. of Phys. **143** 357 (1982).

[12] P. A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J.Math. **2** 129 (1950);
P. A.M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3** 1 (1951);

P. A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics* New York:Yeshiva University (1964).

Capítulo 4

Modelo BF em D=2+1 dimensões

A gravitação em $D = 2 + 1$ dimensões ainda é bem mais simples em termos geométricos e também com relação a sua quantização [1] do que a gravitação em $D = 3 + 1$ dimensões. Num espaço-tempo tridimensional temos de fato zero graus de liberdade propagantes pois a sua contagem formal em D dimensões é dada pela expressão $\frac{D(D-3)}{2}$. Desse modo, suas soluções podem ser alcançadas pelas transformações de gauge dos objetos geométricos usados para se descrever a física. Essas características nos induzem a pensar que essa teoria deve possuir algum paralelo com um dado tipo de modelo topológico. Na realidade tanto o modelo BF quanto o de Chern-Simons [2] possuem forte relação com a gravitação tridimensional sendo que nessa dissertação optaremos por abordar apenas o primeiro modelo.

Uma peculiaridade interessante da gravitação em $D = 2 + 1$ dimensões é o fato de que o tensor de Riemann pode ser escrito em função do tensor de Einstein:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\nu\beta} f(G_{\mu\alpha}) - g_{\nu\alpha} f(G_{\mu\beta}) + g_{\mu\alpha} f(G_{\nu\beta}) - g_{\mu\beta} f(G_{\nu\alpha}) \tag{4.1}$$

Em que $f(G_{\nu\alpha}) = G_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} R g_{\nu\alpha}$ sendo que $G_{\nu\alpha} = R_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} R$ é o tensor de Einstein.

Assim como no caso bidimensional, em $D = 2 + 1$ dimensões também podemos notar uma simplificação dos objetos geométricos relacionados à gravitação. O tensor de Riemann pode ser expresso em termos de outros objetos geométricos como o tensor e o escalar de Ricci. Nas regiões do espaço-tempo em que não há fontes de energia-matéria o tensor de Einstein se anula e o tensor de Riemann se simplifica ainda mais assumindo a mesma forma que ele possui em $D = 1 + 1$ dimensões a qual, para R constante, é a de um espaço maximalmente simétrico. Essa simplicidade motiva o estudo da gravitação em $D = 2 + 1$ dimensões como uma maneira de ganhar experiência para um melhor entendimento de sua versão em $D = 3 + 1$ dimensões.

Para dimensões maiores que $D = 1 + 1$, a ação de Einstein-Hilbert pode ser escrita na formulação de Cartan como sendo proporcional a [3]:

$$S = tr \int e \wedge e ... \wedge e \wedge R \tag{4.2}$$

Em que temos $D-2$ "$D-adas''$ e $R^{ab} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{ab} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ (a, b são índices internos.) denota a 2-forma de curvatura.

Essa expressão nos convida a pensar num modelo BF tridimensional da forma:

$$S = tr \int (B \wedge F) \tag{4.3}$$

Na expressão acima $F \equiv DA = dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} J_a$ é uma 2-forma de curvatura (Em que $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}$) construída a partir da conexão $A = A^a_\mu dx^\mu J_a$

e $B = B^a_\mu dx^\mu J_a$ é, agora, uma 1-forma, que diferentemente do caso bidimensional (Em que B era uma 0-forma.), não se trata de um campo auxiliar arbitrário e sim da triada e. É importante notar que a associação da 1-forma B a uma triada e (com a escolha de um grupo de gauge adequado.) não é uma relação de vínculo pois ambos objetos dispõem das mesmas características e graus de liberdade. Vale dizer que em $D = 3 + 1$ dimensões associa-se uma 2-forma B ao produto exterior das tetradas $e \wedge e$ sendo que essa associação caracteriza um vínculo que, no caso do modelo de Plebanski [4], é implementado na ação através de multiplicadores de Lagrange. À ação do modelo BF em $D = 2 + 1$ dimensões podemos adicionar mais um invariante $tr(B \wedge B \wedge B)$ que estará relacionado à constante cosmológica:

$$S = tr \int (B \wedge F + kB \wedge B \wedge B) \tag{4.4}$$

Em que k é uma constante ainda a ser fixada.

A ação acima é invariante por dois grupos de simetria distintos. Uma simetria de gauge que deixa a Lagrangiana invariante e uma simetria chamada de shift que é uma simetria da ação no caso em que os termos de fronteira podem ser descartados.

A transformação relacionada a simetria de gauge da ação é dada por:

$$\delta A = D\epsilon \quad ; \quad \delta B = [B, \epsilon] \tag{4.5}$$

Em que o parâmetro local ϵ é uma 0-forma.

A transformação de shift que deixa a ação invariante tem a forma:

$$\delta B = D\eta \quad ; \quad \delta A = 3k[B, \eta] \tag{4.6}$$

Na expressão acima η, o parâmetro local de simetria, é também uma 0-forma.

Para que possamos associar a ação do modelo BF com a de Einstein-Cartan será preciso fazer:

$$A = w^a_\mu dx^\mu J_a \tag{4.7}$$

Em que w^a_μ é o dual da conexão de spin $w^a_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{abc} w_{(bc)\mu}$ (Sendo que $w_{(bc)\mu}$ é a conexão de spin.). O operador J_a é o gerador na representação adjunta de um grupo interno G ainda a se determinar.

A 2-forma de curvatura pode ser escrita em termos de w^a_μ como:

$$R^{ab} = \epsilon^{abc} dw_c + w^a \wedge w^b \tag{4.8}$$

A 2-forma de curvatura F^a se relaciona com R^{ab} através da relação de dualidade $F^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc} R_{bc}$:

$$F^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc} R_{bc} = dw^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc} w_b \wedge w_c \tag{4.9}$$

Para que essa associação entre os campos do modelo BF e os objetos geométricos da gravitação seja verdadeira, precisamos de um grupo interno G com constante de estrutura dada por $f_{abc} = \epsilon_{abc}$.

Uma boa escolha seria o grupo SO(1,2) [5]:

$$[J_a, J_b] = f_{abc} J^c \tag{4.10}$$

Sendo que a métrica de Kiliing [5] é dada por $tr(J_a J_b) = \frac{1}{2}\eta_{ab}$ em que $\eta_{ab} = diag(-,+,+)$. A ação escrita em termos desses objetos geométricos assume a forma:

$$S = tr \int (B \wedge F + kB \wedge B \wedge B) = \int (\epsilon^{abc} e_a \wedge R_{bc} + k\epsilon^{abc} e_a \wedge e_b \wedge e_c) \tag{4.11}$$

Da expressão acima podemos concluir que de fato a ação do modelo BF é proporcional à de Einstein-Cartan no caso em que existe a presença de constante cosmológica que é dada por $\Lambda = -3k$.

As equações de movimento do modelo BF são obtidas ao variar a ação com relação aos campos dos quais ela depende:

$$DB = 0 \quad ; \quad F + 3kB \wedge B = 0 \tag{4.12}$$

Ao lançar mão da interpretação geométrica temos que a primeira equação se refere a condição de torção nula, o que vincula a conexão de spin e as triadas. Já a segunda equação está relacionada com a interação entre a curvatura e um termo de constante cosmológica.

As considerações acima nos permitem concluir que a formulação de Einstein-Cartan e o seu equivalente em termos do modelo BF são uma generalização da teoria gravitacional na qual a condição de torção nula não é imposta a priori e sim deduzida e não há necessidade de se trabalhar com a métrica como entidade fundamental.

Como o modelo BF em $D = 2+1$ dimensões é equivalente à formulação de Einstein-Cartan para a gravitação em $D = 2+1$ a sua quantização pode nos fornecer informações importantes a respeito da quantização da gravidade e para levar adiante um processo desse tipo é necessário que se conheça bem o espaço de fase da teoria. Para esse fim, embora já existam aplicações [6] do procedimento de Dirac [7] para o modelo BF tridimensional, nosso próximo passo será analisar esse modelo a partir do formalismo de Hamilton-Jacobi que possui uma sólida base matemática [8, 9].

4.1 Análise do modelo BF em $D = 2+1$ dimensões através do formalismo de Hamilton-Jacobi

A ação que descreve o modelo BF em $D = 2+1$ dimensões é dada, explicitamente em termos de suas componentes, pela expressão abaixo [10]:

$$S = \int tr \left[B \wedge F + kB \wedge (B \wedge B) \right] = \frac{1}{2} tr(J_a J_b) \left[\int d^3x \; \epsilon^{\mu\nu\beta} B^a_\mu F^b_{\nu\beta} \right]$$
$$+ \frac{1}{2} k tr(J_a J_d) \int d^3x \epsilon^{\mu\gamma\nu} f^{abc} B^d_\mu B_{\gamma b} B_{\nu c} = \int d^3x \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\gamma\nu} \left(B_{a\mu} F^a_{\gamma\nu} - \frac{\Lambda}{3} f_{abc} B^a_\mu B^b_\gamma B^c_\nu \right) \tag{4.13}$$

Em que $F^a_{\gamma\nu} = \partial_\gamma A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\gamma + f^a{}_{bc} A^b_\gamma A^c_\nu$ e $k = -\Lambda/3$.

Agora, a fim de obter as equações de movimento, vamos variar a ação com relação ao campo $A^a_\mu(x)$ e em seguida, com relação à $B_{c\mu}(x)$. Desse modo, ao variar com relação ao campo $A^a_\mu(x)$, temos:

$$\delta S = \int d^3x \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu} B_{a\alpha}\delta F^a_{\mu\nu} = \int d^3x \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu} B_{a\alpha}\Big(\partial_\mu \delta A^a_\nu - \partial_\nu \delta A^a_\mu + f^a{}_{bc}\delta A^b_\mu A^c_\nu + f^a{}_{bc} A^b_\mu \delta A^c_\nu\Big)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu} B_{a\alpha}\Big(D_\mu \delta A^a_\nu - D_\nu \delta A^a_\mu\Big) = -\int d^3x \epsilon^{\alpha\mu\nu} D_\mu B_{a\alpha}\delta A^a_\nu = 0 \tag{4.14}$$

Para obter a expressão acima fizemos uso do fato de que é possível fazer integrações por partes com D_μ pelo mesmo procedimento utilizado com ∂_μ. Assim, a equação de movimento é expressa por:

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu} D_\mu B_{a\alpha}(x) = 0 \tag{4.15}$$

Quando variamos a ação com relação ao campo $B_{a\mu}$, obtemos:

$$\delta S = \int d^3x \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\nu}\Big(\delta B_{a\mu} F^a_{\gamma\nu} - \frac{\Lambda}{3} f_{abc}\delta B^a_\mu B^b_\gamma B^c_\nu - \frac{\Lambda}{3} f_{abc} B^a_\mu \delta B^b_\gamma B^c_\nu - \frac{\Lambda}{3} f_{abc} B^a_\mu B^b_\gamma \delta B^c_\nu\Big)$$

$$= \int d^3x \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\nu}\Big(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f^a{}_{bc} B^b_\gamma B^c_\nu\Big)\delta B_{a\mu} = 0$$

Portanto, a equação de movimento segue dada abaixo:

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\gamma\nu}\Big(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f^a{}_{bc} B^b_\gamma B^c_\nu\Big) = 0 \tag{4.16}$$

A partir da densidade de lagrangiana cuja integral dá origem a ação do modelo BF tridimensional, podemos calcular os momentos canônicos:

$$\pi^\mu_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^b_\mu} = \frac{\partial(\epsilon^{\beta 0\nu} F^a_{0\nu} B_{a\beta})}{\partial \dot{A}^b_\mu} = \epsilon^{\beta 0\mu} B_{b\beta} \quad ; \quad \Pi^\mu_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^b_\mu} = 0 \tag{4.17}$$

É fácil notar que os momentos canônicos relacionados ao campo $B^a_\mu(x)$, $\Pi^\mu_a = 0$ são nulos. Então, de posse desses momentos canônicos podemos definir a densidade de Hamiltoniana canônica:

$$\mathcal{H} = \epsilon^{i0j} B_{bi}\partial_0 A^b_j - \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\epsilon^{0ji} B_{0a}(F^a_{ji} - \Lambda f^a{}_{bc} B^b_j B^c_i) - \epsilon^{i0j}(\partial_j B_{ai} A^a_0 + f_{abc} A^b_0 A^c_j B^a_i) \tag{4.18}$$

O resultado acima pode ser reescrito em termos da definição de derivada covariante:

$$\mathcal{H} = -\epsilon^{0\gamma\nu}\left[(D_\gamma B^a_\nu)A_{a0} + B_{a0}\frac{1}{2}(F^a_{\gamma\nu} - \Lambda f^a_{\ bc}B^b_\gamma B^c_\nu)\right] \tag{4.19}$$

Dessa maneira, podemos definir as Hamiltonianas primárias e associá-las com um determinado parâmetro de evolução:

$$H' \equiv \mathcal{H} + \pi = 0 \rightarrow t \ ; \ A'^0_a \equiv \pi^0_a = 0 \rightarrow \lambda^0_a \ ; \ A'^1_a \equiv \pi^1_a - B_{a2} = 0 \rightarrow \lambda^1_a \tag{4.20}$$

$$A'^2_a \equiv \pi^2_a + B_{a1} = 0 \rightarrow \lambda^2_a \ ; \ B'^\mu_a \equiv \Pi^\mu_a = 0 \rightarrow \epsilon^\mu_a$$

Em que $\pi = \frac{\partial S}{\partial t}$.

Para podermos classificar as Hamiltonianas acima como involutivas ou não involutivas vamos primeiramente definir os parênteses de Poisson fundamentais:

$$\{A^a_\mu(x), \pi^\nu_b(y)\} = \delta^a_b\delta^\nu_\mu\delta^2(x-y) \ ; \ \{B^a_\mu(x), \Pi^\nu_b(y)\} = \delta^a_b\delta^\nu_\mu\delta^2(x-y) \tag{4.21}$$

A partir da definição dos parênteses de Poisson concluímos que B'^0_a e que A'^0_a são as únicas Hamiltonianas que possuem parênteses de Poisson nulo com todas as demais e portanto são involutivas. Já as demais Hamiltonianas vão fazer parte da construção dos parênteses de Poisson generalizados (PPG). Para tal vamos definir as hamiltonianas não involutivas como:

$h^0_a \equiv A'^1_a$, $h^1_a \equiv A'^2_a$, $h^2_a \equiv B'^1_a$ e $h^3_a \equiv B'^2_a$. A matriz gerada por tais Hamiltonianas é dada por:

$$M^{IJ}_{ab}(x,y) = \{h^I_a(x), h^J_b(y)\} = \delta_{ab}\delta^2(x-y)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

A matriz acima é facilmente calculada ao se levar em conta os parênteses de Poisson das Hamiltonianas definidas anteriormente. Agora, para definir os PPG calcularemos a inversa dessa matriz, a qual é expressa por:

$$[M^{IJ}_{ab}(x,y)]^{-1} = \delta_{ab}\delta^2(x-y)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Os parênteses de Poisson generalizados são definidos pela expressão abaixo [11, 12]:

$$\{f(x), g(y)\}^* = \{f(x), g(y)\} - \int dzdw\{f(x), h^{Ia}(z)\}[M^{IJ}_{ab}(z,w)]^{-1}\{h^{Jb}(w), g(y)\} \tag{4.24}$$

Podemos notar imediatamente que $\{A^a_\mu(x), \pi^\nu_b(y)\} = \{A^a_\mu(x), \pi^\nu_b(y)\}^*$ pois $\{h^I_d, \pi^b_\nu\}$ é sempre nulo, assim, todo PPG em que π^b_ν figura mantém sua definição original. De modo análogo, $\{B_{0a}(x), \Pi^{0b}(y)\} = \{B_{0a}(x), \Pi^{0b}(y)\}^*$ pois $\{B_{0a}, h^I_b\} = 0$ o que nos leva a concluir que os PPG em que o campo B_{0a} está presente são os mesmos da definição original. Quanto à sua parte espacial, temos que $\{B_{ia}, P^{bj}\}^* = 0$.

Para calcular os PPG $\{A^a_\mu(x), B^b_\nu(y)\}^*$ podemos notar de antemão que $\{A^a_0(x), B^b_\nu(y)\}^* = 0$ pois $\{A^a_0(x), h^I_c(z)\} = 0$.

Seguem abaixo os demais PPG referentes às componentes não nulas que ainda não foram consideradas:

$$\{A^a_\mu(x), B^b_\nu(y)\}^* = \epsilon_{0\mu\nu}\delta^{ab}\delta^2(x-y) \tag{4.25}$$

O PPG acima nos permite concluir que $P^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\alpha}B^a_\alpha$ possui PPG equivalentes aos da parte espacial do momento canônico $\pi^{a\mu}$.

Os demais PPG são identicamente nulos. Assim, como estamos de posse de todos os PPG e sabemos quais são as Hamiltonianas involutivas podemos definir a diferencial fundamental:

$$df(x) = \int d^2y\left[\{f(x), H'(y)\}^*dt + \{f(x), \pi^0_a(y)\}^*d\lambda^a_0 + \{f(x), \Pi^0_a(y)\}^*d\epsilon^a_0\right] \tag{4.26}$$

A partir da definição acima podemos calcular as condições de integrabilidade para as Hamiltonianas involutivas. Comecemos por $\pi^0_a(x)$:

$$\begin{aligned} d\pi^0_a(x) &= \int d^2y\{\pi^0_a(x), H'(y)\}^*dt = -\int d^2y\epsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma B^c_\nu(y)\{\pi^0_a(x), A_{0c}(y)\}^*dt \\ &= \int d^2y\epsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma B^c_\nu(y)\delta^2(x-y)\delta_{ac}\ dt = \epsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma B_{\nu a}(x)\ dt = 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Para impormos a integrabilidade da Hamiltoniana $\pi^0_a(x)$ fomos a definir uma nova Hamiltoniana da forma $C_a(x) = \epsilon^{0\gamma\nu}D_\gamma B_{\nu a}(x)$.

Agora, testaremos a integrabilidade da Hamiltoniana $\Pi^0_a(x)$:

$$\begin{aligned} d\Pi^0_a(x) &= \int d^2y\{\Pi^0_a(x), H'(y)\}^*d\epsilon^a_0 = \int d^2y\left[-\epsilon^{0\gamma\nu}\{\Pi^0_a(x), B_{c0}(y)\}^*\frac{1}{2}\left(F^c_{\gamma\nu}(y) - \Lambda f^c{}_{bu}B^b_\gamma(y)B^u_\nu(y)\right)\right]d\epsilon^a_0 \\ &= \int d^2y\left[-\epsilon^{0\gamma\nu}(-)\delta^2(x-y)\delta_{ac}\frac{1}{2}\left(F^c_{\gamma\nu}(y) - \Lambda f^c{}_{bu}B^b_\gamma(y)B^u_\nu(y)\right)\right]d\epsilon^a_0 \\ &= \frac{1}{2}\left[\epsilon^{0\gamma\nu}\left(F_{a\gamma\nu}(x) - \Lambda f_{abu}B^b_\gamma(x)B^u_\nu(x)\right)\right]d\epsilon^a_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

As condições de integrabilidade da Hamiltoniana $\Pi^0_a(x)$ levam a definição da nova Hamiltoniana $D_a(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{0\gamma\nu}\left(F_{a\gamma\nu}(x) - \Lambda f_{abu}B^b_\gamma(x)B^u_\nu(x)\right)$.

Agora, podemos analisar os PPG entre essas novas novas Hamiltonianas a fim de classificá-las como involutivas ou não involutivas. Assim, para as Hamiltonianas $C_a(x)$, temos:

$$\{C_a(x), C_b(y)\}^* = f_{abc}C^c(x)\delta^2(x-y) \tag{4.29}$$

Os PPG entre as Hamiltonianas $D^a(x)$ seguem abaixo:

$$\{D^a(x), D^b(y)\}^* = 0 \tag{4.30}$$

Agora nos resta obter os seguintes PPG entre as Hamiltonianas $C_a(x)$ e $D_b(y)$:

$$\{C_a(x), D_b(y)\}^* = f_{abc}D^c(x)\delta^2(x-y) \tag{4.31}$$

Como conhecemos a álgebra das Hamiltonianas $C_a(x)$ e $D_a(x)$, estamos aptos a fazer os seus testes de integrabilidade, já utilizando a diferencial fundamental redefinida que leva em contas as Hamiltonianas $C_a(x)$ e $D_a(x)$:

$$\begin{aligned} dC_a(x) = \int d^2y \Bigg[&\{C_a(x), H'(y)\}^* dt + \{C_a(x), \pi_a^0(y)\}^* d\lambda_0^a + \{C_a(x), \Pi_a^0(y)\}^* d\epsilon_0^a + \\ &\{C_a(x), C_b(y)\}^* dw_2^b + \{C_a(x), D_b(x)\}^* dw_3^b \Bigg] = -A_0(x)^b(x) f_{ab}{}^c C_c(x) - B_0^b f_{abc} D^c(x) \\ &+ f_{abl} C^l(x) dw_2^b + f_{abl} D^l(x) dw_3^b \end{aligned} \tag{4.32}$$

Para deduzir o resultado acima fizemos uso dos PPG $\{C_a(x), A_0^b(x)\}^* = 0 = \{C_a(x), B_0^b(x)\}^*$ e da álgebra definida pelos PPG das Hamiltonianas. Além disso levamos em conta que a Hamiltoniana canônica pode ser reescrita como $\mathcal{H}(y) = -A_0^b(y)C_b(y) - B_{b0}(y)D^b(y)$. A partir do resultado que obtivemos podemos concluir que as condições de integrabilidade serão satisfeitas pois temos uma combinação linear de Hamiltonianas.

Agora vamos testar as condições de integrabilidade para $D_a(x)$:

$$\begin{aligned} dD_a(x) = \int d^2y \Bigg[&\{D_a(x), H'(y)\}^* dt + \{D_a(x), \pi_a^0(y)\}^* d\lambda_0^a + \{D_a(x), \Pi_a^0(y)\}^* d\epsilon_0^a + \\ &\{D_a(x), C_b(y)\}^* dw_2^b + \{D_a(x), D_b(x)\}^* dw_3^b \Bigg] = B_0^b(x) f_{abc}\, \Lambda\, C^c(x) + A_0^b(x) f_{abc} D^c(x) \\ &- \Lambda f_{abl} C^l(x) dw_3^b - f_{abc} D^c(x) dw_2^b \end{aligned} \tag{4.33}$$

Novamente podemos concluir que as condições de integrabilidade são satisfeitas pois o resultado acima é, novamente, uma combinação linear de Hamiltonianas. Ao fazermos uso dos PPG concluímos imediatamente que as Hamiltonianas $C_a(x)$, $D_a(x)$, $\pi_b^0(x)$ e $\Pi_a^\mu(x)$ estão em involução. O próximo passo é obter as equações características de onde podemos obter as equações de movimento e os geradores das tranformações de simetria.

4.2 Equações características do modelo BF tridimensional

Para obter as equações características do modelo BF em $D = 2+1$ dimensões precisamos primeiramente, redefinir a diferencial fundamental de maneira a levar em conta as Hamiltonianas involutivas $C_a(x)$ e $D_a(x)$ as quais geram transformações parametrizadas pelas funções arbitrárias $dw^2(x)$ e $dw^3(x)$ respectivamente. A diferencial fundamental redefinida assume a forma:

$$df(x) = \int dy \Bigg[\{f(x), H(y)\}^* dt + \{f(x), \pi_b^0(y)\}^* dw_0^b + \{f(x), \Pi_b^0(y)\}^* dw_1^b + \{f(x), C^b(y)\}^* dw_b^2$$
$$+ \{f(x), D^b(y)\}^* dw_b^3 \Bigg] \tag{4.34}$$

Agora podemos obter as equações características. Começaremos pela equação referente ao campo $A_\mu^a(x)$:

$$dA_\mu^a(x) = \int dy \Bigg[\{A_\mu^a(x), H(y)\}^* dt + \{A_\mu^a(x), \pi_b^0(y)\}^* dw_0^b + \{A_\mu^a(x), \Pi_b^0(y)\}^* dw_1^b$$
$$+ \{A_\mu^a(x), C^b(y)\}^* dw_2^b + \{A_\mu^a(x), D^b(y)\}^* dw_3^b \Bigg] = \epsilon^{0\gamma\nu} D_\gamma A_b^0(y) \delta^{ab} \epsilon_{0\mu\nu} dt$$
$$- \epsilon^{0\gamma\nu}(D_\gamma dw_{b2})\epsilon_{0\mu\nu}\delta^{ab} + \delta^{ab}\delta_\mu^0 dw_{b0} + B_{b0}(x)\Lambda f^{ab}{}_d B_\mu^d(x) dt - \Lambda f^{ab}{}_d B_\mu^d dw_{b3} \tag{4.35}$$

Ao usarmos a identidade $\epsilon^{0\gamma\nu}\epsilon_{0\alpha\nu} = \delta_\alpha^\gamma$ podemos expressar o resultado acima como:

$$dA_\mu^a(x) = \delta_\mu^0 dw_0^a + \delta_\mu^i \Bigg[(D_i A_0^a(x) + \Lambda f^{ab}{}_d B_i^d(x) B_{b0}(x))dt - D_i(dw_2^a) - \Lambda f^{ab}{}_d B_i^d(x) dw_{b3} \Bigg] \tag{4.36}$$

As equações características para o campo $B_\mu^a(x)$ são dadas abaixo:

$$dB_\mu^a(x) = \int dy \Bigg[\{B_\mu^a(x), H(y)\}^* dt + \{B_\mu^a(x), \pi_b^0(y)\}^* dw_0^b + \{B_\mu^a(x), \Pi_b^0(y)\}^* dw_1^b$$
$$+ \{B_\mu^a(x), C^b(y)\}^* dw_{2b} + \{B_\mu^a(x), D^b(y)\}^* dw_b^3 \Bigg] = \delta_\mu^0 dw_1^a(x) + \delta_\mu^i \Bigg[\Big(D_i B_0^a(x) - f^{abd} A_b^0(x) B_{di}(x) \Big) dt$$
$$- f^{adb} B_\mu^d(x) dw_{2b}(x) - D_i dw_3^a(x) \Bigg] \tag{4.37}$$

As equações características para os momentos canônicos $\Pi_a^\mu(x)$ são dadas por:

$$d\Pi_a^\mu(x) = \int d^2y \; \{\Pi_a^\mu(x), -B_{b0}(y) D^b(y)\}^* dt = \delta_0^\mu D_a(x) \; dt \tag{4.38}$$

O resultado acima é bem simples devido ao fato de que $\Pi_a^\mu(x)$ possui PPG não nulos apenas com $B_{0b}(x)$.

Agora vamos calcular as equações características relacionadas à $\pi_a^\mu(x)$:

$$
d\pi^{\mu}_{a}(x) = \int dy \Bigg[\{\pi^{\mu}_{a}(x), H(y)\}^{*}dt + \{\pi^{\mu}_{a}(x), \pi^{0}_{b}(y)\}^{*}dw^{b}_{0} + \{\pi^{\mu}_{a}(x), \Pi^{0}_{b}(y)\}^{*}dw^{b}_{1}
$$

$$
+ \{\pi^{a}_{\mu}(x), C^{b}(y)\}^{*}dw_{2b} + \ \{\pi^{\mu}_{a}(x), D^{b}(y)\}^{*}dw_{3b} \Bigg] = \epsilon^{0\gamma\nu} \Bigg[\delta^{\mu}_{0} D_{\gamma} B^{a}_{\nu}(x) - \delta^{\mu}_{\nu} \big(D_{\gamma} B^{a}_{0}(x)
$$

$$
- f^{abd} B_{d\gamma}(x) A^{0}_{b}(x) \big) \Bigg] dt + \epsilon^{0\gamma\nu} f^{abd} B_{d\nu}(x) dw_{b2} \delta^{\mu}_{\gamma} + \epsilon^{0\gamma\mu} D_{\gamma} dw_{3a} \qquad (4.39)
$$

4.3 Equações de movimento do modelo BF tridimensional

Para obtermos as equações de movimento do modelo BF em $D = 2 + 1$ dimensões consideraremos apenas evoluções parametrizadas pelo tempo:

$$
\partial_{0} A^{a}_{\mu}(x) = \delta^{i}_{\mu} (D_{i} A^{a}_{0}(x) + \Lambda f^{a}{}_{bd} B^{b}_{0}(x) B^{d}_{i}(x)) \qquad (4.40)
$$

$$
\partial_{0} B^{a}_{\mu}(x) = \delta^{i}_{\mu} (D_{i} B^{a}_{0}(x) - f^{a}{}_{bd} A^{b}_{0}(x) B^{d}_{i}(x)) \qquad (4.41)
$$

Notamos imediatamente que $A^{a}_{0}(x)$ não possui evolução temporal e portanto trata-se de um campo auxiliar. Quanto às componentes espaciais, concluímos que:

$$
\partial_{0} A^{a}_{i}(x) = D_{i} A^{a}_{0}(x) + \Lambda f^{a}{}_{bd} B^{b}_{0}(x) B^{d}_{i}(x) \rightarrow -\Bigg(F^{a}_{0i}(x) - \Lambda f^{a}{}_{bd} B^{b}_{0}(x) B^{d}_{i}(x) \Bigg) = 0 \qquad (4.42)
$$

As equações de movimento acima são equivalentes às equações de Euler-Lagrange para A^{a}_{μ}.

A análise da componente temporal da equação de movimento do campo $B^{a}_{\mu}(x)$ nos fornece a informação de que $B_{0a}(x)$ não possui evolução temporal e é, portanto, um campo auxiliar.

As equações de movimento relacionadas às componentes espaciais são dadas abaixo:

$$
\partial_{0} B^{a}_{i}(x) = \partial_{i} B^{a}_{0}(x) + f^{a}{}_{bc} A^{b}_{i}(x) B^{c}_{0}(x) - f^{abd} A_{0b}(x) B_{di}(x) \rightarrow D_{i} B^{a}_{0}(x) - D_{0} B^{a}_{i}(x) = 0 \qquad (4.43)
$$

A equação de movimento acima é de fato compatível com as equações de Euler-Lagrange para $B^{a}_{\mu}(x)$. Desse modo, o fato de as equações de movimento poderem ser reobtidas através das equações características, as quais por sua vez estão relacionadas ao formalismo de Hamilton-Jacobi, serve como um teste de consistência dos cálculos que foram feitos até agora.

4.4 Transformações canônicas e simetrias da ação

As equações características estão relacionadas com as diferentes possíveis evoluções dos campos parametrizadas pelo tempo e pelos demais parâmetros locais arbitrários. As equações de movimento são obtidas quando se considera a evolução parametrizada pelo tempo. Desse modo, as evoluções parâmetrizadas pelos parâmetros arbitrários estão relacionadas com as transformações canônicas. Ao adotar uma notação padrão que é mais comumente usada no contexto do estudo das simetrias de gauge, temos:

$$\delta A_\mu^a(x) = \delta_\mu^0 \delta w_0^a - D_i(\delta w_2^a) - \Lambda f^{ab}{}_d B_i^d(x) \delta w_b^3 \tag{4.44}$$

$$\delta B_\mu^a(x) = \delta_\mu^0 \delta w_1^a(x) + \delta_\mu^i \Bigg[- f^{adb} B_\mu^d(x) \delta w_b^2(x) - D_i \delta w_3^a(x) \Bigg] \tag{4.45}$$

O nosso objetivo é encontrar, dentre todas as transformações canônicas possíveis, aquele conjunto que deixa a Lagrangiana invariante. Para isso vamos obter a forma da variação da Lagrangiana e substituir as variações dos campos pelas expressões dadas acima:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu\nu}\Bigg(F_{\mu\nu}^a - \Lambda f^a{}_{bc} B_\mu^b B_\nu^c\Bigg)\delta B_{\alpha a} + \epsilon^{\alpha\mu\nu} B_\mu^a D_\nu \delta A_{\alpha a} = \epsilon^{0ij}\Bigg[\frac{1}{2}F_{ij}^a\Bigg(\delta w_{a1} + f_{abc} B_0^b \delta w_2^c\Bigg)$$

$$+ B_i^a D_j \Bigg(D_0 \delta w_{a2} + \delta w_{0a}\Bigg)\Bigg] - \frac{1}{2}\Lambda f_{abc}\epsilon^{0ij}\Bigg[B_i^b B_j^c \Bigg(\delta w_1^a + f^a{}_{nm} B_0^n \delta w_2^m\Bigg)\Bigg] \tag{4.46}$$

A expressão acima possui variações escritas em termos de 4 parâmetros arbitrários. Uma maneira de resolver o problema de se encontrar a solução para $\delta\mathcal{L} = 0$ seria ao considerar casos particulares em que determinados parâmetros são fixados como sendo nulos. Uma boa escolha para a fixação dos parâmetros é $\delta w_3^a = 0$ pois para obter $\delta\mathcal{L} = 0$ teremos que impor que os termos remanescentes entre parênteses se anulem o que nos fornece imediatamente os vínculos entre os parâmetros que caracterizam o subespaço das transformações canônicas que representam uma transformação de simetria de gauge (Para o caso particular em que $\delta w_3^a = 0.$). Desse modo, de acordo com essa fixação de parâmetros, temos:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^{0ij}\Bigg[\frac{1}{2}F_{ij}^a\Bigg(\delta w_{a1} + f_{abc} B_0^b \delta w_2^c\Bigg) + B_i^a D_j \Bigg(D_0 \delta w_{a2} + \delta w_{0a}\Bigg)\Bigg] - \frac{1}{2}\Lambda f_{abc}\epsilon^{0ij}\Bigg[B_i^b B_j^c\Bigg(\delta w_1^a + f^a{}_{nm} B_0^n \delta w_2^m\Bigg)\Bigg] \tag{4.47}$$

Da expressão acima concluímos que a solução para $\delta\mathcal{L} = 0$ corresponde a fazer $\delta w_{0a} = -D_0 \delta w_{a2}$ e $\delta w_{a1} = -f^a{}_{bc} B_0^b \delta w_2^c$. Para esse conjunto de transformações de simetria as variações dos campos podem ser escritas como:

$$\delta A_\mu^a(x) = \delta_\mu^0 \delta w_0^a - D_i(\delta w_2^a) = -D_\mu \delta w_{2a} \tag{4.48}$$

$$\delta B_\mu^a(x) = \delta_\mu^0 \delta w_1^a(x) + \delta_\mu^i [-f^{adb} B_\mu^d(x) \delta w_{2b}(x)] = -f^a{}_{bc} B_\mu^b \delta w_2^c \tag{4.49}$$

Podemos concluir, a partir da expressão da diferencial fundamental e dos vinculos obtidos entre os parâmetros, que o gerador das transformações de gauge é dado por:

$$G^{gauge} = \int \Bigg[\pi_0^a D_0 + \Pi_0^b f^a{}_{bc} B_0^c - C^a\Bigg]\delta\chi_a d^2x \tag{4.50}$$

Em que $w_2^a \equiv -\chi^a$.

Agora, vamos analisar o caso em que $\delta w_2^a = 0$. A variação da Lagrangiana assume a seguinte forma:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^{0ij}\left[\frac{1}{2}F_{ij}^a\delta w_{a1} + B_i^a D_j\delta w_a^0 + F_{0j}^a D_i\delta w_3^a\right] - \Lambda f_{abc}\epsilon^{0ij}\left[\frac{1}{2}B_i^b B_j^c\delta w_1^a - B_0^a B_j^c D_i\delta w_3^b\right]$$

$$- \Lambda f_{abc}\epsilon^{0ij}\left[-B_0^a D_i\left(B_j^b\delta w_3^c\right) + B_i^a D_0\left(B_j^b\delta w_3^c\right)\right] \tag{4.51}$$

Devemos mencionar que esse segundo conjunto de transformações de simetria corresponde a uma invariância da ação (a chamada simetria de shift.) e não da Lagrangiana, por isso é permitido fazer integrações por partes convenientes na expressão acima, o que nos permite reescrever δS como:

$$\delta S = \int d^3x\Bigg\{\epsilon^{0ij}\left[\frac{1}{2}F_{ij}^a\delta w_{a1} + B_i^a D_j\delta w_{a0} - D_i F_{0j}^a\delta w_{a3}\right] - \Lambda f_{abc}\epsilon^{0ij}\Bigg[\frac{1}{2}B_i^b B_j^c\delta w_1^a + B_0^a D_j B_i^b\delta w_3^c$$
$$- D_0 B_i^a\left(\delta w_3^c B_j^b\right)\Bigg]\Bigg\} \tag{4.52}$$

Para simplificarmos ainda mais o resultado usaremos a identidade de Bianchi $\epsilon^{\mu\nu\beta}D_\mu F_{\nu\beta}^a = 0$ que é equivalente à relação $-\epsilon^{0ij}D_i F_{0j}^a = -\frac{1}{2}\epsilon^{0ij}D_0 F_{ij}^a$. Além disso, a menos de termos de superfície, temos que $-\epsilon^{ij}f_{abc}[D_0 B_i^a(B_j^b\delta w_3^c)] = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}f_{abc}B_i^a B_j^b D_0\delta w_3^c$. Assim, δS assume a forma:

$$\delta S = \int d^3x\Bigg\{\epsilon^{0ij}\left[\frac{1}{2}F_{ij}^a\left(D_0\delta w_a^3 + \delta w_a^1\right) - D_j B_i^a\left(\delta w_a^0 - \Lambda f_{abc}B_0^b\delta w_3^c\right)\right]$$
$$- \epsilon^{0ij}\Lambda f_{abc}\left[\frac{1}{2}B_i^a B_j^b\left(D_0\delta w_3^c + \delta w_1^c\right)\right]\Bigg\} \tag{4.53}$$

Da expressão acima concluímos que $\delta S = 0$ corresponde a fixar $\delta w_1^a = -D_0\delta w_3^a$ e $\delta w_{a0} = \Lambda f_{abc}B_0^b\delta w_3^c$. As variações dos campos parametrizadas pelos parâmetros acima são dadas por:

$$\delta B_\mu^a(x) = \delta_\mu^0\delta w_1^a - \delta_\mu^i D_i\delta w_3^a = -\delta_\mu^0 D_0\delta w_3^a - \delta_\mu^i D_i\delta w_3^a = -D_\mu\delta w_3^a \tag{4.54}$$

$$\delta A_\mu^a(x) = \delta_\mu^0\delta w_0^a(x) - \delta_\mu^i\Lambda f^{ab}{}_c B_i^c(x)\delta w_{b3}(x) = \Lambda f_{abc}B_\mu^b(x)\delta w_3^c \tag{4.55}$$

Podemos obter a forma do gerador dessas transformações quando consideramos a diferencial fundamental escrita em termos dos parâmetros que estão vinculados de acordo com os desenvolvimentos anteriores. Assim, quando fazemos $\eta^a \equiv -w_3^a$, obtemos:

$$G^{shift} = \int d^2y\left[-\pi^{0a}(y)\Lambda f_a{}^{mb}B_{0m}(y) + \Pi^{0b}(x)D_0 - D^b(x)\right]\delta\eta_b(x) \tag{4.56}$$

Por meio do formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ) mostramos que é possível obter os geradores relacionados às duas transformações de simetria do modelo BF tridimensional, as de gauge e as de shift. Elas surgem naturalmente dentro do contexto do formalismo de (HJ), como um subconjunto das transformações canônicas, as quais são geradas pelas Hamiltonianas involutivas dentro da estrutura da diferencial fundamental que fornece toda a evolução paramétrica do sistema.

Quanto aos graus de liberdade sabemos que o espaço de fase reduzido gerado pelos PPG é dado por $\{A^a_\mu, B^a_i, \pi^a_0, B^a_0, \Pi^a_0\}$, ou seja 24 graus de liberdade (Já estamos usando o fato de que B^a_i é equivalente à π^a_i.). Como temos ao todo 12 Hamiltonianas, e estas são do tipo involutivas (Sob os PPG.), podemos concluir que no final de contas teremos 0 graus de liberdade propagados por esse modelo.

Bibliografia

[1] E. Witten, *Topology-changing amplitudes in 2 + 1 dimensional gravity*, Nucl. Phys. B **323** 113-140 (1989).

[2] S. S. Chern and J. Simons, *Characteristic Forms and Geometric Invariants*,Ann. Math.**99**, 48, (1974).

[3] D. K. Wise, *Topological Gauge theory, Cartan Geometry and Gravity*, Ph.D thesis, university of Califonia, Riverside, (2007).

[4] J. F. Plebanski, *On the separation of Einstenian substructures*, J. Math. Phys. **18** 2511 (1977).

[5] I. Oda, S. Yahikozawa, *Effective Actions of (2+1)-dimensional Gravity and Bf Theory*, Class.Quantum Grav. **11**, 2653 (1994) equivalente sob SO(1,2)

[6] *Hamiltonian dynamics and gauge symmetry for three- dimensional Palatini theory with cosmological constant*, JHEP, **1405**, 073 (2014).

[7] P. A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J.Math. **2** 129 (1950);
P. A.M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3** (1951);
P. A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics* New York:Yeshiva University (1964).

[8] C. Von Westenholz, *Differential forms in mathematical physics*, North Holland Publishing company (1978).

[9] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Diferential equations of the First Order* 3rd edn (American Mathematical Society) (1999).

[10] N.T. Maia, B.M. Pimentel and C.E. Valc arcel, *Three dimensional background field gravity:A Hamilton-Jacobi analysis*, Class. Quantum Grav. 32 185013 (2015).

[11] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C.E. Valcárcel, *Non-involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, Ann. Phys. **323** 3137 (2008).

[12] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C. E. Valcárcel, *Involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, J. Math. Phys. **55** 112901 (2014).

Capítulo 5

Modelo BF em D=3+1 dimensões

O modelo BF em $D = 3 + 1$ dimensões é uma extensão natural dos modelos BF que estudamos em dimensões mais baixas. A sua ação segue dada pela expressão [1]:

$$S = tr \int (B \wedge F - \frac{\beta}{2} B \wedge B) \tag{5.1}$$

Em que $B = \frac{1}{2} B^{IJ}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu M_{IJ}$ é uma 2-forma assim como a curvatura de gauge $F \equiv dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F^{IJ}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu M_{IJ}$ sendo que $A = A^{IJ}_\mu dx^\mu M_{IJ}$ é uma 1-forma e M_{IJ} são os geradores de um grupo interno G, na representação adjunta, ainda a se determinar.

As equações de movimento seguem abaixo:

$$F = \beta B \qquad ; \qquad DB = 0 \tag{5.2}$$

Em que $DB = dB + A \wedge B$.

Assim como em $D = 2+1$ dimensões, ação é invariante por dois grupos de simetria distintos. O grupo relacionado à simetria de gauge e à simetria de shift em sua versão quadridimensional. As transformações de gauge pelas quais a ação é invariante são mostradas abaixo:

$$\delta A = D\epsilon \quad ; \quad \delta B = [B, \epsilon] \tag{5.3}$$

Em que ϵ é uma 0-forma.

As transformações relacionadas à simetria de shift são as seguintes:

$$\delta A = \beta \eta \quad ; \qquad \delta B = D\eta \tag{5.4}$$

Em que η é uma 1-forma.

Quando analisamos o modelo BF em $D = 2 + 1$ dimensões comentamos que esse modelo possui uma grande analogia com a formulação de Einstein-Cartan [2] para a relatividade geral $S = \int (e \wedge e ... \wedge e \wedge R)$ sendo que nessa dimensão a relação entre esses modelos se dá sem que seja necessário fixar vínculos extras na ação. Isso faz sentido pois tanto o modelo BF, que é topológico, quanto a gravitação em $D = 2 + 1$ dimensões possuem a mesma quantidade de graus de liberdade locais, que no caso é zero.

Em $D = 3 + 1$ dimensões a situação é diferente pois o modelo BF, por ser topológico, não possui graus de liberdade locais [3] ao passo que a gravitação é descrita por quatro graus de liberdade no espaço de fase. A ausência de graus de liberdade locais do modelo BF está refletida no fato de que as soluções de suas equações de movimento podem ser alcançadas pelas transformações de simetria dos seus campos. Assim, uma possível correspondência entre esse modelo e a gravitação só seria possível se adicionássemos à sua ação um termo que quebrasse parte dessa simetria e que permitisse, desse modo, a propagação dos graus de liberdade pertinentes para que essa correspondência ocorra.

A relação com a formulação de Einstein-Cartan da gravitação se daria, a princípio, através da seguinte identificação $B = e \wedge e$. Como $B^{IJ}_{\mu\nu}$ possui 36 componentes independentes (Estamos supondo, no momento, um grupo interno de isometria quadridimensional.) enquanto que e^I_μ possui 16, essa identificação só será possível se vincularmos o campo B de modo a forçar tal correspondência. O modelo de Plebanski [4] se baseia nessa idéia e para tal ele adiciona o seguinte termo de multiplicador de Lagrange na ação $tr \int(\Phi^{IJKL} B_{IJ} \wedge B_{KL})$ em que Φ^{IJKL} é uma 0-forma com as seguintes propriedades em seus índices internos $\Phi^{IJKL} = \Phi^{[IJ][KL]}$ sendo que os colchetes designam antissimetria. Além disso, temos que $\Phi^{[IJKL]} = 0$. Tais propriedades asseguram que este campo possui 20 componentes independentes gerando assim 20 vínculos sobre B o que possibilita a identificação do modelo BF com a gravitação (No presente caso com constante cosmológica.) na formulação de Einstein-Cartan. Devemos notar que a adição desse termo quebra parte da simetria original do modelo BF e esse fato está de acordo com as observações que fizemos no parágrafo anterior.

Um outro modo de se relacionar a gravitação com o modelo BF em $D = 3 + 1$ dimensões é através do uso de um grupo de gauge interno relacionado a uma isometria pentadimensional e um termo de quebra de simetria que permitisse apenas uma simetria residual relacionado a um subgrupo quadridimensional em que F^{ab} com $a, b = 0...3$ estaria relacionado com a 2-forma de curvatura de Riemann e F^{a4} estaria relacionado à torção. Para $\beta = 0$ abordaríamos a idéia original de Mac-Dowell [5] enquanto que para $\beta \neq 0$ teríamos o modelo de Freidel-Starodubtsev [6] no qual, além do termo de Einstein-Cartan, sua interpretação em termos dos objetos geométricos levaria a termos extras na ação que não contribuem para as equações de movimento (Na ausência de fontes.) porém possuem relevância quando se consideram efeitos quânticos.

Nessa seção consideraremos o estudo do modelo BF sem esses termos extras relacionados à uma quebra de simetria pois o seu conhecimento nos ajudará a entender qual o efeito que a adição desses termos geraria na sua estrutura canônica altamente simétrica [7]. Embora o seu estudo já tenha sido feito [3] via procedimento de Dirac [8], acreditamos que uma abordagem via formalismo de Hamilton-Jacobi pode fornecer uma caracterização alternativa do espaço de fase do sistema com vantagem no que se refere ao tratamento das suas simetrias.

Para prosseguirmos com a análise vamos escolher trabalhar com um grupo de simetria interna do tipo $SO(n^+, n^-)$ com $n^+ + n^- = 4$ que satisfaz à àlgebra:

$$[M_{IJ}, M_{KL}] = \eta_{IL} M_{JK} - \eta_{IK} M_{JL} + \eta_{JK} M_{IL} - \eta_{JL} M_{IK} \equiv 2 f_{IJKL}{}^{MN} M_{MN} \tag{5.5}$$

Em que $M_{IJ} = -M_{JI}$ e $f_{IJKL}{}^{MN}$ são as constantes de estrutura do grupo e $\eta_{IJ} = diag(n^+, n^-)$ é a métrica do espaço interno. As constantes de estrutura do grupo são dadas explicitamente por:

$$f_{IJKL}{}^{MN} = -\frac{1}{2}(\eta_{IK} \Delta^{MN}_{JL} + \eta_{JL} \Delta^{MN}_{IJ} - \eta_{IL} \Delta^{MN}_{KJ} - \eta_{JK} \Delta^{MN}_{IL}) \tag{5.6}$$

Em que $\Delta^{MN}_{JL} \equiv \frac{1}{2}(\delta^M_L \delta^N_J - \delta^M_L \delta^N_J)$.

De maneira mais específica vamos fazer uso do grupo $SO(\eta)$ com $\eta_{IJ} = diag(-\sigma^2, -1, -1, -1)$. Portanto, $\sigma = 1$ nos leva ao grupo $SO(4)$ e $\sigma = i$ nos leva ao grupo $SO(1, 3)$.

A métrica de Killing do grupo é dada pela expressão [9]:

$$K_{IJKL} = tr(M_{IJ} M_{KL}) = (\eta_{IL} \eta_{KJ} - \eta_{IK} \eta_{LJ}) \tag{5.7}$$

5.1 Análise do modelo BF em $D=3+1$ dimensões através do formalismo de Hamilton-Jacobi

Para que possamos proceder com a análise do modelo BF via formalismo de Hamilton-Jacobi [10] será mais prático trabalhar com componentes. Assim, a Lagrangiana do modelo pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = tr\left(B\wedge F - \frac{\beta}{2}B\wedge B\right) = \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}K_{IJKL}\left(B^{KL}_{\mu\nu}F^{IJ}_{\alpha\beta} - \frac{\beta}{2}B^{IJ}_{\mu\nu}B^{KL}_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(B_{IJ\mu\nu}F^{IJ}_{\alpha\beta} - \frac{\beta}{2}B^{IJ}_{\mu\nu}B_{\alpha\beta IJ}\right) \tag{5.8}$$

Em que $F^{IJ}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{IJ}_\nu - \partial_\nu A^{IJ}_\mu + f^{IJ}{}_{KLMN}A^{KL}_\mu A^{MN}_\nu$.

As equações de Euler-Lagrange são as seguintes:

$$0 = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(F^{IJ}_{\alpha\beta} - \beta B^{IJ}_{\alpha\beta}\right) \tag{5.9}$$

$$0 = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}D_\nu B^{IJ}_{\alpha\beta} \tag{5.10}$$

A definição de derivada covariante segue dada abaixo:

$$D_\mu\theta^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_\mu\theta^{IJ}_{\alpha\beta} + f^{IJ}{}_{KLMN}A^{KL}_\mu\theta^{MN}_{\alpha\beta} \tag{5.11}$$

Os momentos canônicos π^μ_{IJ} e $\Pi^{\mu\nu}_{IJ}$ conjugados à A^{IJ}_μ e $B^{IJ}_{\mu\nu}$, respectivamente, são dados pelas expressões:

$$\pi^\mu_{IJ} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^{IJ}_\mu)} = \epsilon^{0\mu\alpha\beta}B_{\alpha\beta\ IJ} \tag{5.12}$$

$$\Pi^{\mu\nu}_{IJ} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B^{IJ}_{\mu\nu})} = 0 \tag{5.13}$$

Os momentos canônicos não dependem de nenhuma das velocidades $\partial_0 A^{IJ}_\mu$ e $\partial_0 B^{IJ}_{\mu\nu}$. Portanto, eles são vínculos da teoria. A partir do uso da definição desses momentos podemos obter a Hamiltoniana canônica:

$$\mathcal{H}_0 = -\epsilon^{0\mu\nu\omega}\left(D_\mu B^{IJ}_{\nu\omega}A_{0IJ} + B^{IJ}_{0\mu}F_{\nu\omega IJ} - \beta B^{IJ}_{0\mu}B_{\nu\omega IJ}\right) \tag{5.14}$$

Agora definiremos $\pi \equiv \partial_0 S$ em que S é a ação do modelo BF em $D = 3+1$ dimensões. Essa definição nos permite escrever todas as equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi na mesma forma [11, 12]:

$$\mathcal{H}' \equiv \pi + \mathcal{H} = 0 \tag{5.15}$$

$$\mathcal{A}^0_{IJ} \equiv \pi^0_{IJ} = 0 \tag{5.16}$$

$$\mathcal{A}^k_{IJ} \equiv \pi^k_{IJ} - \epsilon^{0k}{}_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}_{IJ} = 0 \tag{5.17}$$

$$\mathcal{B}^{\mu\nu}_{IJ} \equiv \Pi^{\mu\nu}_{IJ} = 0 \tag{5.18}$$

A primeira Hamiltoniana é associada ao parâmetro $t \equiv x_0$ enquanto que as demais são relacionadas à parâmetros locais que, à princípio, são arbitrários. Os índices latinos minúsculos denotam coordenadas espaciais.

Para que possamos caracterizar as Hamiltonianas como involutivas ou não-involutivas é preciso, antes de mais nada, definir os parênteses de Poisson fundamentais da teoria:

$$\{A_{\mu}^{IJ}(x), \pi^{\nu}_{KL}(y)\} = \delta^{\nu}_{\mu}\Delta^{IJ}_{\ KL}\delta^3(x-y) \tag{5.19}$$

$$\{B_{\mu\nu}^{IJ}(x), \Pi^{\alpha\beta}_{KL}(y)\} = \Delta^{\alpha\beta}_{\ \mu\nu}\Delta^{IJ}_{\ KL}\delta^3(x-y) \tag{5.20}$$

A diferencial fundamental fornece a evolução de qualquer função do espaço de fase em termos do tempo e dos parâmetros locais:

$$df(x) = \int \Big(\{f(x), \mathcal{H}(y)\}dt + \{f(x), \mathcal{A}^{\mu}_{IJ}(y)\}d\lambda^{IJ}_{\mu}(y) + \{f(x), \mathcal{B}^{\mu\nu}_{IJ}(y)\}d\beta^{IJ}_{\mu\nu}(y)\Big)d^3y \tag{5.21}$$

As Hamiltonianas que possuem parênteses de Poisson nulos (Ou uma combinação linear das outras.) consigo próprias e com as demais são chamadas de involutivas. As suas condições de integrabilidade não geram relações entre os parâmetros de evolução da teoria. Em particular, as Hamiltonianas involutivas são $\mathcal{A}^{0'}_{IJ}$,$\mathcal{B}^{0k}_{IJ}$.

As demais Hamiltonianas serão usadas para se definir os parênteses de Poisson generalizados, os quais são obtidos a partir da inversa da matriz $M^{ab}_{IJKL}(x,y) = \{h^a_{IJ}(x), h^b_{KL}(y)\}$, em que a e b são índices que correm de 1 à 6 e serão usados para se contar o número de Hamiltonianas não involutivas. Quanto às quantidades h^x_{IJ}, elas são definidas como:

$$\Pi^{12}_{IJ} \equiv h^1_{IJ}\ ;\ \Pi^{13}_{IJ} \equiv h^2_{IJ}\ ;\ \Pi^{23}_{IJ} \equiv h^3_{IJ}\ ;\ \pi^1_{IJ} - 2B^{23}_{IJ} \equiv h^4_{IJ}\ ;\ \pi^2_{IJ} + 2B^{13}_{IJ} \equiv h^5_{IJ}\ ;\ \pi^3_{IJ} - 2B^{12}_{IJ} \equiv h^6_{IJ} \tag{5.22}$$

Assim, a matriz $M^{ab}_{IJKL}(x,y)$ possui a forma:

$$M^{ab}_{IJKL}(x,y) = \Delta^{IJ}_{\ KL}\delta^3(x-y)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

A matriz inversa é dada abaixo:

$$[M^{-1}(x,y)]^{ab}_{IJKL} = \frac{1}{2}\Delta^{IJ}_{\ KL}\delta^3(x-y)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Os parênteses de Poisson generalizados são definidos como:

$$\{f(x),g(y)\}^* = \{f(x),g(y)\} - \int \{f(x),h_a^{IJ}(z)\}[M^{-1}(z,w)]^{ab}_{IJKL}\{h_b^{KL}(w),g(y)\}d^3z\ d^3w \quad (5.25)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais generalizados da teoria são listados abaixo:

$$\{A_n^{IJ}(x), B_{KL(lm)}(y)\}^* = \frac{1}{2}\delta^3(x-y)\Delta^{IJ}{}_{KL}\epsilon_{nlm} \quad (5.26)$$

$$\{A_\mu^{IJ}(x), \pi^\nu_{KL}(y)\}^* = \{A_\mu^{IJ}(x), \pi^\nu_{KL}(y)\} \quad (5.27)$$

$$\{B_{0k}^{IJ}(x), \Pi^{0i}_{KL}(y)\}^* = \{B_{0k}^{IJ}(x), \Pi^{0i}_{KL}(y)\} \quad (5.28)$$

Em termos dos parênteses de Poisson fundamentais generalizados, a diferencial fundamental assume a forma:

$$df(x) = \int \Big(\{f(x),\mathcal{H}(y)\}^*dt + \{f(x),\mathcal{A}^0_{IJ}(y)\}^*d\lambda_0^{IJ}(y) + \{f(x),\mathcal{B}^{0k}_{IJ}(y)\}^*d\beta^{IJ}_{0k}(y)\Big)d^3y \quad (5.29)$$

Agora precisamos obter as condições de integrabilidade de $\mathcal{A}^0_{IJ}(y)$ e $\mathcal{B}^{0k}_{IJ}(y)$. Ao impor $d\mathcal{A}^0_{IJ}(y) = 0$ e $d\mathcal{B}^{0k}_{IJ}(y) = 0$ precisamos introduzir as novas Hamiltonianas:

$$\epsilon^{0kij}D_kB^{IJ}_{ij} \equiv C^{IJ} \quad (5.30)$$

$$\epsilon^{0kij}\Big(F^{IJ}_{ij} - \beta B^{IJ}_{ij}\Big) \equiv \mathcal{D}^{kIJ} \quad (5.31)$$

A Hamiltoniana canônica pode ser escrita como uma combinação linear das Hamiltonianas acima:

$$\mathcal{H}_0 = -A_0^{IJ}C_{IJ} - B^{IJ}_{0k}\mathcal{D}^k_{IJ} \quad (5.32)$$

As condições de integrabilidade são satisfeitas pelo conjunto de Hamiltonianas $\mathcal{A}^0_{IJ}$, $\mathcal{B}^{0k}_{IJ}$, C^{IJ}, $\mathcal{D}^{kIJ}$. Além disso, temos as relações:

$$\{C^{IJ}(x), C^{KL}(y)\}^* = f^{IJKL}{}_{WZ}C^{WZ}(x)\delta^3(x-y) \quad (5.33)$$

$$\{\mathcal{D}^{IJ}_k(x), \mathcal{D}^{KL}_m(y)\}^* = 0 \quad (5.34)$$

$$\{C^{IJ}(x), \mathcal{D}^{KL}_k(y)\}^* = f^{IJKL}{}_{OP}\mathcal{D}^{OP}_k(x)\delta^3(x-y) \quad (5.35)$$

Devemos observar que as Hamiltonianas acima obedecem a relação de redutibilidade em primeiro estágio [13], fato que é importante para que se possa fazer a correta contagem dos graus de liberdade da teoria:

$$D_i\mathcal{D}^{iIJ} = \beta C^{IJ} \quad (5.36)$$

Como os parênteses de Poisson fundamentais generalizados das Hamiltonianas formam uma álgebra, concluímos que elas são involutivas e que não há mais Hamiltonianas extras na teoria. É importante frisar que no formalismo de Hamilton-Jacobi não há nenhum tratamento especial para vínculos que obedecem relações como as que foram mostradas acima [14]. O procedimento continua o mesmo, porém o conhecimento das relações de redutibilidade é essencial no que se refere à contagem de graus de liberdade.

5.2 Equações características do modelo BF quadridimensional

A diferencial fundamental nos permite definir a evolução de qualquer função do espaço de fase como função do tempo e dos demais parâmetros locais. As equações características são aquelas que governam a evolução das variáveis canônicas do espaço de fase. Assim, antes de fazer isso, vamos renomear as Hamiltonianas e os seus parâmetros relacionados:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^0_{IJ} &\equiv \mathcal{A}^0_{IJ} \rightarrow \omega_{IJ} \\
\mathcal{H}^k_{IJ} &\equiv \mathcal{B}^{0k'}_{IJ} \rightarrow \lambda^k_{IJ} \\
\mathcal{H}'^k_{IJ} &\equiv \mathcal{D}^k_{IJ} \rightarrow \chi^k_{IJ} \\
\mathcal{H}'^0_{IJ} &\equiv C_{IJ} \rightarrow \varepsilon_{IJ}
\end{aligned}$$

A forma final da diferencial fundamental vem dada abaixo:

$$df(x) = \int \Bigg(\{f(x), \mathcal{H}(y)\}^* dt + \{f(x), \mathcal{H}^0_{IJ}(y)\}^* d\omega^{IJ}(y) + \{f(x), \mathcal{H}^k_{IJ}(y)\}^* d\lambda^{IJ}_k(y) + \{f(x), \mathcal{H}'^k_{IJ}\}^* d\chi^{IJ}_k + \{f(x), \mathcal{H}'^0_{IJ}\}^* d\varepsilon_{IJ} \Bigg) d^3y \tag{5.37}$$

Agora, usaremos a diferencial fundamental para obter as equações características:

$$dA^{IJ}_\mu = \delta^\mu_i \Bigg\{ \Bigg[D_\mu A^{IJ}_0 + \beta B^{IJ}_{0\mu} \Bigg] dt - D_\mu d\varepsilon^{IJ} - \beta d\chi^{IJ}_\mu \Bigg\} + \delta^0_\mu d\omega^{IJ} \tag{5.38}$$

$$dB^{IJ}_{mn} = f^{IJKM}{}_{OP} d\varepsilon_{KM} B^{OP}_{mn} + (D_n d\chi^{IJ}_m - D_m d\chi^{IJ}_n) + (D_m B^{IJ}_{0n} - D_n B^{IJ}_{0m}) dt - f^{IJKM}{}_{OP} A^0_{KM} B^{OP}_{mn} dt \tag{5.39}$$

$$dB^{IJ}_{0k} = d\lambda^{IJ}_k \tag{5.40}$$

$$d\pi^{kIJ} = \epsilon^{0kln}(2D_n d\chi_l^{IJ} - f^{KLIJ}_{\ \ OP} B^{OP}_{mn} d\omega_{KL}) - \epsilon^{0kln}(2D_n B^{IJ}_{0l} - f^{KLIJ}_{\ \ OP} B_{ln}^{\ \ OP} A^0_{KL})dt \tag{5.41}$$

$$d\pi^{0IJ} = \epsilon^{0lmn} D_l B^{IJ}_{mn} dt \tag{5.42}$$

$$d\Pi^{\mu\nu IJ} = \Delta^{\mu\nu}_{\ \ k0}\left\{\epsilon^{0kij}\left[F^{IJ}_{ij} - \beta B^{IJ}_{ij}\right]dt\right\} \tag{5.43}$$

5.3 Equações de movimento do modelo BF quadridimensional

A forma final da diferencial fundamental, como já mencionado, é dada em termos dos parâmetros independentes. Portanto, como t é um parâmetro independente nós podemos analisar a evolução temporal das variáveis canônicas independentemente das transformações associadas aos parâmetros arbitrários locais:

$$\partial_0 A^{IJ}_\mu = \delta^\mu_i\left[D_\mu A^{IJ}_0 + \beta B^{IJ}_{0\mu}\right] \tag{5.44}$$

$$\partial_0 B^{IJ}_{\mu\nu} = \Delta^{mn}_{\ \ \mu\nu}[(D_m B^{IJ}_{0n} - D_n B^{IJ}_{0m}) - f^{IJKM}_{\ \ OP} A^0_{KM} B^{OP}_{mn}] \tag{5.45}$$

A partir das equações acima concluímos que A^{IJ}_0 e B^{IJ}_{0i} não possuem dinâmica e pode ser entendidos como multiplicadores de Lagrange, como podemos inferir da forma da Hamiltoniana canônica em termos das demais Hamiltonianas.). A primeira equação nos permite recuperar as componentes $\mu\ \nu = i\ j$ da equação de Euler-Lagrange $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(F^{IJ}_{\alpha\beta} - \beta B^{IJ}_{\alpha\beta}\right) = 0$. A segunda equação nos fornece as componentes $\mu = k$ de $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_\nu B^{IJ}_{\alpha\beta} = 0$.

A evolução temporal dos momenta são mostradas abaixo:

$$\partial_0 \pi^{kIJ} = -\epsilon^{0kln}(2D_n B^{IJ}_{0l} - f^{KLIJ}_{\ \ OP} B_{ln}^{\ \ OP} A^0_{KL}) \tag{5.46}$$

$$\partial_0 \pi^{0IJ} = \epsilon^{0lmn} D_l B^{IJ}_{mn} \tag{5.47}$$

$$\partial_0 \Pi^{\mu\nu IJ} = \Delta^{\mu\nu}_{\ \ k0}\epsilon^{0kij}\left(F^{IJ}_{ij} - \beta B^{IJ}_{ij}\right) \tag{5.48}$$

A evolução temporal de π^{kIJ} é compatível com a definição dos momentos canônicos. A evolução temporal de π^0_{IJ} é dada pela Hamiltoniana $\mathcal{H}'^0_{IJ}$ deixando π^0_{IJ} indeterminado assim como sua variável conjugada A^0_{IJ}. A evolução temporal de Π^{lk}_{IJ} é nula o que está de acordo com o fato de que Π^{lk}_{IJ} não é mais uma variável canônica quando se considera o espaço de fase reduzido gerado pelos Parênteses de Poisson generalizados. A evolução temporal de Π^{0k}_{IJ} é igual a Hamiltoniana $\mathcal{H}'^k_{IJ}$ e desse modo indeterminada, assim como sua variável conjugada B^{IJ}_{0k}.

5.4 Transformações canônicas e simetrias da ação

As transformações canônicas da teoria são obtidas ao fixar $dt = 0$ e considerar a evolução descrita pelos parâmetros locais arbitrários.

$$dA^{IJ}_{\mu} = \delta^{\mu}_{i}\Bigg[-D_{\mu}d\varepsilon^{IJ} - \beta d\chi^{IJ}_{\mu}\Bigg] + \delta^0_{\mu}d\omega^{IJ} \tag{5.49}$$

$$dB^{IJ}_{mn} = f^{IJKM}{}_{OP}d\varepsilon_{KM}B^{OP}_{mn} + (D_n d\chi^{IJ}_m - D_m d\chi^{IJ}_n) \tag{5.50}$$

O gerador dessas transformações podem ser obtidas da diferencial fundamental:

$$G^{can} = \int \Bigg[\mathcal{H}^0_{IJ}(y)d\omega^{IJ}(y) + \mathcal{H}^k_{IJ}(y)d\lambda^{IJ}_k(y) + \mathcal{H}'^k_{IJ}d\chi^{IJ}_k + \mathcal{H}'^0_{IJ}d\varepsilon_{IJ}\Bigg]d^3y \tag{5.51}$$

Assim, temos que:

$$dA^{IJ}_{\mu} = \{A^{IJ}_{\mu}, G^{can}\}^* , \tag{5.52}$$

$$dB^{IJ}_{\mu\nu} = \{B^{IJ}_{\mu\nu}, G^{can}\}^* \tag{5.53}$$

Para obter o conjunto de transformações canônicas que deixam a Lagrangiana invariante precisamos calcular a sua variação $\delta\mathcal{L}$ induzida pelas transformações canônicas dos campos e, em seguida, impor $\delta\mathcal{L} = 0$. Esse procedimento acaba por gerar vínculos entre os parâmetros locais do sistema e assim somos levados a obter o subconjunto de transformações canônicas que representam as simetrias da teoria.

Antes de prosseguir, mudaremos nossa notação para:

$$\delta A^{IJ}_{\mu} = \delta^{\mu}_{i}\Bigg[-D_{\mu}\delta\varepsilon^{IJ} - \beta\delta\chi^{IJ}_{\mu}\Bigg] + \delta^0_{\mu}\delta\omega^{IJ} \tag{5.54}$$

$$\delta B^{IJ}_{mn} = f^{IJKM}{}_{OP}\delta\varepsilon_{KM}B^{OP}_{mn} + (D_n\delta\chi^{IJ}_m - D_m\delta\chi^{IJ}_n) \tag{5.55}$$

A variação da Lagrangiana segue abaixo:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^{0kij}\delta B_{0k}^{KL}F_{KLij} + 2\epsilon^{0kij}B_{0k}^{OP}D_i\delta A_{OPj} + \epsilon^{ij0k}\delta B_{ij}^{MN}F_{MN0k} +$$

$$\epsilon^{ij0k}B_{ij}^{MN}\bigg(D_0\delta A_{kMN} - D_k\delta A_{0MN}\bigg) - \epsilon^{0kij}\beta\bigg(\delta B_{IJ0k}B_{ij}^{IJ} + B_{IJ0k}\delta B_{ij}^{IJ}\bigg) \tag{5.56}$$

Ao substituir as variações dos campos na expressão da variação da Lagrangiana acima, obtemos:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^{0kij}\Bigg\{\delta\lambda_k^{MN}F_{ijMN} + 2B_{0k}^{MN}D_i\Bigg[-D_j\delta\varepsilon_{MN} - \beta\delta\chi_{MNj}\Bigg] +$$

$$\Bigg(-f^{MNOP}{}_{RS}B_{OPij}\delta\varepsilon^{RS} + 2D_j\delta\chi_{iMN}\Bigg)F_{0k}^{MN} + B_{ijMN}D_0\Bigg[-D_k\delta\varepsilon^{MN} - \beta\delta\chi_k^{MN}\Bigg]$$

$$-\beta\Bigg[\delta\lambda_{kIJ}B_{ij}^{IJ} + \Bigg(-f^{IJOP}{}_{LH}B_{ij}^{OP}\delta\varepsilon^{LH} + 2D_j\delta\chi_i^{IJ}\Bigg)B_{0kIJ}\Bigg]\Bigg\} \tag{5.57}$$

Ao usar a identidade $U_{IJ}[D_\mu, D_\nu]G^{IJ} = -f_{OPRS}{}^{IJ}U^{RS}G_{IJ}F_{\mu\nu}^{OP}$, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon^{0kij}\Bigg\{\Bigg(F_{ij}^{IJ} - \beta B_{ij}^{IJ}\Bigg)\Bigg(\delta\lambda_{kIJ} + f_{IJOPMN}B_{0k}^{OP}\delta\varepsilon^{MN}\Bigg)$$

$$+ B_{ij}^{IJ}\Bigg(f_{IJRS}{}^{OP}\delta\varepsilon^{RS}F_{0k}^{IJ} - D_0D_k\delta\varepsilon_{IJ} - D_k\delta\omega_{IJ} - \beta D_0\delta\chi_{IJ}\Bigg) + 2F_{0k}^{IJ}D_j\delta\chi_{iIJ}\Bigg\} \tag{5.58}$$

Uma boa abordagem para resolver $\delta\mathcal{L} = 0$ se dá ao considerar casos especiais nos quais fixamos alguns parâmetros como sendo nulos. O conjunto de transformações de gauge pode ser obtido ao fixar $\delta\chi_k^{IJ}$ como sendo nulo e em seguida fixar $\delta\lambda_k^{IJ} = -f^{IJRSOP}B_{0k\ RS}\ \delta\varepsilon_{OP}$ e $\delta\omega^{IJ} = -D_0\delta\varepsilon^{IJ}$.

$$\delta A_\mu^{IJ} = -D_\mu\delta\varepsilon^{IJ} \tag{5.59}$$

$$\delta B_{\mu\nu}^{IJ} = -f^{IJ}{}_{RSOP}B_{\mu\nu}^{RS}\delta\varepsilon^{OP} \tag{5.60}$$

O gerador das transformações de gauge pode ser obtido da diferencial fundamental com os parâmetros fixados da maneira prescrita acima. Ele é dado por:

$$G^{gauge} = \int\Bigg[-\mathcal{H}_{IJ}^{0'}(y)D_0 - \mathcal{H}_{OP}^{k'}(y)f^{OP}{}_{RSIJ}B_{0k}^{RS}(y) + \mathcal{H}_{IJ}^{''0}\Bigg]\delta\varepsilon^{IJ}(y)\ d^3y \tag{5.61}$$

A fim de obter as transformações de shift é conveniente reescrever δS, após integrações por partes e uso da identidade de Bianchi, como:

$$\delta S=\int\ \epsilon^{0kij}\Bigg\{-\beta B_{ijKL}\Bigg(\delta\lambda_k^{KL}+D_0\delta\chi_k^{KL}+f^{KL}{}_{RSMN}B_{0k}^{RS}\delta\varepsilon^{MN}\Bigg)+$$

$$B_{ij}^{IJ}\Bigg(f_{IJRS}{}^{OP}\delta\varepsilon^{RS}F_{0k}^{IJ}-D_0D_k\delta\varepsilon_{IJ}-D_k\delta\omega_{IJ}\Bigg)+F_{ij}^{RS}\Bigg(\delta\lambda_{k\ RS}+f_{RSIJOP}B_{0k}^{IJ}\delta\varepsilon^{OP}+D_0\delta\chi_{k\ RS}\Bigg)\Bigg\}d^3y \tag{5.62}$$

Ao fixar $\delta\varepsilon^{IJ}=0$ e $\delta\lambda_k^{IJ}=(D_k\delta\chi_0^{IJ}-D_0\delta\chi_k^{IJ})$, a variação da ação δS assume a forma:

$$\delta S=\int\ \epsilon^{0kij}\Bigg\{-\beta B_{ijKL}D_k\delta\chi_0^{KL}-B_{ij}^{OP}D_k\delta\omega_{OP}\Bigg)\Bigg\}d^3y \tag{5.63}$$

Podemos resolver $\delta S=0$ ao fixar $\delta\omega^{LP}=-\beta\delta\chi_0^{LP}$. Portanto, as transformações de shift são dadas por:

$$\delta A_\mu^{IJ} = -\beta\delta\chi_\mu^{IJ} \tag{5.64}$$

$$\delta B_{\mu\nu}^{IJ} = (D_\nu\delta\chi_\mu^{IJ}-D_\mu\delta\chi_\nu^{IJ}) \tag{5.65}$$

O gerador das transformações de shift possui a forma:

$$G^{shift} = \int\Bigg[\mathcal{H}_{IJ}^{0'}(y)\beta\delta\chi_0^{IJ}+\mathcal{H}_{IJ}^{k'}(y)(D_k\delta\chi_0^{IJ}-D_0\delta\chi_k^{IJ})+\mathcal{H}_{IJ}^{'k}\delta\chi_k^{IJ}\Bigg]d^3y \tag{5.66}$$

Dessa maneira, obtivemos através do formalismo de Hamilton-Jacobi, o conjunto completo de transformações de simetria do modelo BF em $D=3+1$, as transformações de gauge e as de shift, assim como os seus respectivos geradores.

Quanto à contagem de graus de liberdade temos, sob os PPG, as 84 variáveis canônicas $\{A_\mu^{IJ},B_{\mu\nu}^{IJ},\pi_0^{IJ},\Pi_{0k}^{IJ}\}$ (Sendo que a informação de que B_{kl}^{IJ} é equivalente à π_k^{IJ} já está sendo utilizada.). Quantos aos vínculos no espaço de fase reduzido, são 42, todos involutivos, e seguem dados por $\{\mathcal{D}^{iIJ},\pi^{iIJ},\Pi^{0i\ IJ}\}$. Não estamos levando em consideração o vínculo C^{IJ} pois ele pode ser escrito em termos de $\mathcal{D}^{iIJ}$. Esta relação de redutibilidade, apesar de não mudar em nada o procedimento de Hamilton-Jacobi, é de suma importância no que se refere a obtenção da dimensão do espaço de fase. Como para cada vínculo involutivo devemos retirar 2 graus de liberdade do sistema, temos um espaço de fase adimensional.

Bibliografia

[1] J.C. Baez, *4-Dimensional BF Theory with Cosmological Term as a Topological quantum field theory.*, Lett. Math. Phys. **38**, 129-143 (1996).

[2] V.de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific Publishing Co, Singapore (1985).

[3] M. Celada, M. Montesinos, *Lorentz covariant Hamiltonian analysis of gravity with the Immirzi parameter.*, Class. Quant. Grav. **29**, 20 (2012).

[4] J. F. Plebanski, *On the separation of Einstenian substructures*, J. Math. Phys. **18** 2511 (1977).

[5] S.W. MacDowell, F. Mansouri, *Unified geometric theory of gravity and supergravity*,Phys. Rev. Lett. **38**:739,(1977). Erratum-ibid.38:1376,(1977).

[6] L. Freidel and A. Starodubtsev, *Quantum gravity in terms of topological observables*, arXiv:hep-th/0501191 (2005).

[7] M. Mondragon , M. Montesinos, *Covariant canonical formalism for four dimensional BF theory*, J. Math. Phys. **47** 022301 (2006).

[8] P. A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J.Math. **2** 129 (1950);
P. A.M. Dirac, *The Hamiltonian form of field dynamics*, Can. J. Math. **3** (1951);
P. A.M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics* New York:Yeshiva University (1964).

[9] M. Hamermesh, *Group theory and its applications to physical problems*, Dover, (1989).

[10] G.B. de Gracia, B.M. Pimentel and C.E. Valcárcel, *Hamilton-Jacobi analysis of the four dimensional BF model with cosmological term*, (Em preparação.).

[11] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C.E. Valcárcel,*Non-involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism*, Ann. Phys. **323**, 3137 (2008).

[12] M. C. Bertin, B.M. Pimentel and C. E. Valcárcel, Involutive constrained systems and the Hamilton-Jacobi formalism, J. Math. Phys. **55**, 112901 (2014).

[13] I.A. Batalin and E.S. Fradkin,*A Generalized Canonical Formalism and Quantization of Reducible gauge Theories.* Phys. Lett. **122B** 157 (1983).

[14] C. Von Westenholz, *Differential forms in mathematical physics*, North Holland Publishing company (1978).

Capítulo 6

Conclusão

Ao longo dessa dissertação abordamos primeiramente a construção do formalismo de Hamilton-Jacobi em sua versão para campos. Ele é baseado na abordagem de Carathéodory das Lagrangianas equivalentes e nas condições de integrabilidade oriundas do teorema de Frobenius. Esse formalismo já foi usado com sucesso para fins de caracterização do espaço de fase de uma boa quantidade de teorias de gauge. Portanto, a segunda parte desse trabalho foi voltada a sua aplicação nos modelos BF em $D = 1 + 1$, $D = 2 + 1$ e $D = 3 + 1$ dimensões.

Os modelos BF possuem um espaço de fase com uma estrutura altamente simétrica e com uma estrutura de vínculos não trivial. Em cada um dos modelos analisados o seu conjunto total de Hamiltonianas possuia algumas do tipo involutivo e também do tipo não-involutivo o levou a necessidade de se obter parênteses de Poisson generalizados que reduzissem o espaço de fase do sistema. Em cada um dos capítulos nos preocupamos em ressaltar a relação entre o modelo estudado com alguma abordagem da gravitação. As suas transformações de simetria, que podem ser relacionadas às transformações dos campos induzidas por difeomorfismos, assim como os seus geradores foram obtidas para cada um dos modelos estudados. O fato dos modelos BF não possuírem graus de liberdade também foi refletido em suas respectivas análises via formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ). Também foi possível constatar que as suas estruturas canônicas, de $D = 1 + 1$ à $D = 3 + 1$ dimensões, são muito parecidas.

Uma perspectiva futura para o trabalho desenvolvido ao longo do período do mestrado seria considerar aplicações do formalismo de HJ nos modelos de Plebanski e de Freidel-Starodubtsev, os quais de fato descrevem a gravitação em $D = 3 + 1$ dimensões. O tipo de variável utilizada no contexto dos modelos BF, as tetradas e a conexão de spin, são compatíveis com uma extensão supersimétrica desses modelos. Assim, como o formalismo de HJ possui uma versão para tratamento de sistemas Berezinianos, acreditamos que ele também seja uma ferramenta interessante no que se refere ao estudo do espaço de fase dessas extensões.

Ao estar de posse da estrutura canônica desses modelos, o próximo passo seria abordar a sua quantização. Esse é mais uma de nossas perspectivas futuras e pretendemos atingí-la por meio do desenvolvimento de uma extensão quântica do formalismo de HJ, idéia que é embasada pelas boas propriedades de sua versão clássica.