



---

# Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

---

## Método das aproximações sucessivas e aplicações

Gilberto Rodrigues dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Co-orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina  
Prokopczyk Arita

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,  
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual  
Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte  
dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2012

**Gilberto Rodrigues dos Santos**

Método das aproximações sucessivas e aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof.Dr. Waldemar Donizete Bastos  
Co-orientadora: Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita

São José do Rio Preto, 27 de fevereiro de 2012

**Gilberto Rodrigues dos Santos**

## Método das aproximações sucessivas e aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Matemática junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

Profa. Dra. Juliana Conceição Precioso Pereira  
Professor assistente doutor  
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato  
Professor assistente doutor  
UNESP - Rio Claro

São José do Rio Preto, 27 de Fevereiro de 2012

Aos meus pais,  
Manoel e Josefa  
a minha irmã Cristiane  
e a minha querida noiva  
Karina.  
*dedico.*

# Agradecimentos

Sem a presença contínua de Deus em minha vida eu nada seria. Por isso, meu primeiro e maior agradecimento é a Deus.

Agradeço profundamente à minha família, meus pais, Manoel e Josefa, e à minha irmã Cristiane, por serem meu porto seguro durante esta fase difícil e, ao mesmo tempo, maravilhosa. Agradeço de todo coração à Karina, minha noiva, pela paciência, compreensão e apoio ao longo de todo este período. Sem vocês, tenho certeza que eu não conseguiria chegar até aqui. Amo todos vocês.

Obrigado, Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos e Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita pela orientação e acolhida, pela paciência e amizade durante este período, por todo o aprendizado e conselhos acadêmicos e profissionais.

Agradeço à banca examinadora: Profa. Dra. Suzi, pela disponibilidade e a Profa. Dra. Juliana Precioso, também pela disponibilidade.

Aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce, por todo aprendizado transmitido e pela disponibilidade nas horas de precisão.

À todos os amigos da pós-graduação, em especial, Rodrigo, Leandro, Everton e Admar pelos momentos de descontração e também pelas tardes e até noites em que passamos juntos estudando.

Agradeço, aos meus colegas de república, Wanderson e Rafael, pela agradável convivência e companheirismo. E à Dona Mercedes, pela acolhida e pelo carinho.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo aplicar o método das aproximações sucessivas na demonstração do Teorema do ponto fixo de Banach e em resultados que garantem a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais definidas em espaços de Banach.

**Palavras chave:** Método das aproximações sucessivas, ponto fixo, equações diferenciais.

# Abstract

This work aims to apply the method of successive approximations in the proof of Banach fixed point Theorem and in results that guarantee the existence and uniqueness of solutions of differential equations defined in Banach spaces.

**Key words:** Method of successive approximations, fixed point, differential equations.



“Por mais longa que seja a caminhada o mais importante é dar o primeiro passo.”  
(Vinícius de Moraes)

# Sumário

|          |                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Cálculo de funções abstratas</b>                    | <b>14</b> |
| 1.1      | Funções abstratas . . . . .                            | 14        |
| 1.2      | O Teorema do valor médio . . . . .                     | 16        |
| 1.3      | A integral de Riemann para funções abstratas . . . . . | 18        |
| <b>2</b> | <b>Teoremas de ponto fixo</b>                          | <b>23</b> |
| <b>3</b> | <b>Aplicações</b>                                      | <b>29</b> |
| 3.1      | Equações diferenciais . . . . .                        | 29        |
| 3.2      | Equações de evolução abstratas . . . . .               | 34        |
| 3.3      | Equações diferenciais funcionais com retardo . . . . . | 59        |
| 3.4      | Equações de evolução com retardo . . . . .             | 64        |
| <b>A</b> | <b>Resultados complementares</b>                       | <b>73</b> |
| <b>B</b> | <b>O operador derivada</b>                             | <b>80</b> |
|          | <b>Referências bibliográficas</b>                      | <b>83</b> |

# Introdução

O método das aproximações sucessivas consiste de um processo iterativo, baseado em uma fórmula de recorrência. Mais especificamente, consiste na construção de uma sequência convergente, que tem seus termos dependentes uns dos outros, partindo de uma condição inicial escolhida arbitrariamente e cujo limite é solução de um problema proposto.

Este método é muito usado na matemática, na área de análise. Dentre as várias aplicações possíveis para este processo, temos a demonstração do Teorema do ponto fixo de Banach e resultados que garantem existência e unicidade de soluções para equações diferenciais.

Teoremas de pontos fixos e o estudo de equações diferenciais são tópicos de grande importância, o primeiro devido às suas aplicações em diversas áreas da matemática e o segundo por suas aplicações em física, química e biologia.

Na verdade, muitos fenômenos naturais podem ser modelados por problemas matemáticos envolvendo equações diferenciais, em particular, por equações de evolução, onde levamos em consideração o tempo e o estado do fenômeno em observação. Porém, em alguns fenômenos naturais o princípio da casualidade, isto é, o estado futuro é independente do estado passado, envolve um lapso de tempo entre causa e efeito, por exemplo, em fenômenos naturais biológicos, onde devem ser considerados períodos de incubação ou gestação. Um modelo mais realista poderia incluir alguns dos estados passados do sistema considerado. Estes modelos são descritos por equações diferenciais funcionais com retardo.

Portanto, a garantia da existência e unicidade de soluções para problemas de equações diferenciais é de suma importância para o desenvolvimento do estudo sobre esses modelos.

Por esta razão, apresentamos neste trabalho alguns teoremas de ponto fixo, em especial, o Teorema do ponto fixo de Banach, cuja demonstração consiste na aplicação do método das aproximações sucessivas. Além disso, apresentamos o estudo de alguns tipos de equações diferenciais, cuja existência de solução é garantida

---

pelo Teorema do ponto fixo de Banach ou por aplicação direta do método das aproximações sucessivas.

Mais especificamente, iniciamos este trabalho apresentando algumas definições básicas e estudando as funções abstratas. Veremos que alguns resultados de cálculo em  $\mathbb{R}$  também são válidos para funções com valores em espaços de Banach.

Em seguida, no Capítulo 2, apresentamos o Teorema do ponto fixo de Banach e algumas de suas variações.

O Capítulo 3 se refere ao estudo de equações diferenciais e está dividido em 4 seções. Na primeira seção, provamos o Teorema de Picard - Lindelöf, que garante existência e unicidade de soluções (no sentido clássico) para equações que podem ser escritas na forma  $x'(t) = f(t, x(t))$ . Em seguida, estudamos a existência e unicidade de soluções, agora no sentido fraco, para equações diferenciais escritas na forma  $x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t))$ , onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo. Porém, antes disso, fazemos um breve estudo da teoria de semigrupos.

Por fim, consideramos duas equações com retardo finito. Primeiramente, estudamos o problema de existência e unicidade de soluções (clássico) para equações da forma  $x'(t) = f(t, x_t)$ , onde  $x_t$  representa o termo com retardo. E terminamos estudando equações descritas por  $x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x_t)$ , onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo.

No final do trabalho encontram-se dois apêndices: o Apêndice A, que contém alguns resultados utilizados ao longo da dissertação, e o Apêndice B, onde provamos as propriedades do operador derivada segunda que garantem que ele seja o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo.

# Capítulo 1

## Cálculo de funções abstratas

### 1.1 Funções abstratas

Neste capítulo estudaremos funções que assumem valores em espaços completos. Em particular, veremos alguns resultados do cálculo que também são válidos para este tipo de funções. Iniciamos nosso trabalho com algumas definições básicas.

**Definição 1.1** *Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma função  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  é dita ser uma métrica em  $X$  se possuir as seguintes propriedades:*

- a)  $d(a, b) \geq 0$  para todo  $a, b \in X$ ;
- b)  $d(a, b) = 0$  se, e somente se,  $a = b$ ;
- c)  $d(a, b) = d(b, a)$ , para todo  $a, b \in X$ ;
- d)  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ , para todo  $a, b$  e  $c \in X$ .

Ao par  $(X, d)$  damos o nome de espaço métrico.

**Definição 1.2** *Se  $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K}$  é  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , então uma função  $\|\cdot\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$  é chamada de norma se verifica as seguintes propriedades:*

- a)  $\|x\|_E \geq 0$  para todo  $x \in E$ ;
- b)  $\|x\|_E = 0$  se e só se  $x = 0$ ;
- c)  $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$  para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ ;

d)  $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$  para todos  $x, y \in E$ .

O espaço vetorial  $E$ , munido da norma  $\|\cdot\|_E$ , é chamado de espaço normado e será denotado por  $(E, \|\cdot\|_E)$  ou simplesmente por  $E$ .

**Definição 1.3** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma sequência  $(x_n)$  em  $(X, d)$  é chamada de sequência de Cauchy se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  para todo  $m, n \geq N$ . Se  $(x_n)$  é uma sequência em um espaço vetorial normado  $(E, \|\cdot\|_E)$ , então  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon$  para todo  $m, n \geq N$ .

**Definição 1.4** Um espaço métrico  $(X, d)$  é dito ser completo se toda sequência de Cauchy converge em  $X$ .

**Definição 1.5** Um espaço vetorial normado completo é chamado espaço de Banach.

Sejam  $(E, \|\cdot\|_E)$  um espaço de Banach sobre o corpo dos números reais e  $I$  um intervalo da reta.

**Definição 1.6** Uma função  $f : I \rightarrow E$  é chamada função abstrata.  $f$  será fortemente contínua, ou apenas contínua, em  $t_0 \in I$ , se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - f(t_0)\|_E = 0.$$

Se  $f$  é contínua para todo ponto de  $I$ , dizemos que  $f$  é contínua em  $I$  e escrevemos  $f \in C(I, E)$ .  $f$  será uniformemente contínua em  $I$  se para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|f(t) - f(x)\|_E < \varepsilon, \quad \forall x, t \in I,$$

tais que  $|x - t| < \delta$ .

Funções abstratas comportam-se muitas vezes como funções ordinárias. Por exemplo, uma função abstrata contínua aplica conjuntos compactos em conjuntos compactos. Além disso, uma função abstrata contínua em um conjunto compacto é uniformemente contínua. A prova destas afirmações é analoga as do caso das funções ordinárias.

**Definição 1.7** Uma função abstrata  $f : I \rightarrow E$  é dita:

(i) *Lipschitz contínua em  $I$ , com constante de Lipschitz  $K > 0$ , se*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_E \leq K|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in I.$$

(ii) *Uniformemente Hölder contínua em  $I$ , com constante de Hölder  $K > 0$  e expoente  $0 < \beta \leq 1$ , se*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_E \leq K|t_1 - t_2|^\beta, \quad \forall t_1, t_2 \in I.$$

Observe que se  $f$  é Lipschitz contínua, então  $f$  é também Hölder contínua, mas não vale o contrário caso,  $\beta \neq 1$ .

**Definição 1.8** Dizemos que  $f : I \rightarrow E$  é fortemente diferenciável em  $t \in I$  se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existe. Em caso afirmativo, denotamos o limite por  $f'(t)$ .

Seja  $E^* = \{\phi : E \rightarrow \mathbb{R}; \phi \text{ funcional linear limitado}\}$  o espaço dual de  $E$ , com norma

$$\|\phi\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} |\phi(x)|.$$

**Definição 1.9** Uma função abstrata  $f : I \rightarrow E$  é dita fracamente contínua (fracamente diferenciável) em  $t_0 \in I$  se, para todo  $\phi \in E^*$ , a função escalar  $t \mapsto \phi[f(t)]$  é contínua (diferenciável) em  $t_0$ .

## 1.2 O Teorema do valor médio

Vejamos agora o Teorema do valor médio para funções abstratas.

**Teorema 1.10** Se  $f \in C([a, b], E)$  é diferenciável em  $(a, b)$ , com  $\|f'(t)\|_E \leq K$ ,  $\forall t \in (a, b)$ , então

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq K(b - a).$$

**Demonstração:** Se  $f(a) = f(b)$  então, claramente,  $\|f(b) - f(a)\|_E \leq K(b - a)$ .

Suponhamos que  $f(b) \neq f(a)$  e consideremos o subespaço  $Z \subset E$  como sendo o conjunto de todo elemento da forma  $x = \alpha(f(b) - f(a))$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Em  $Z$  definamos o funcional linear  $\psi : Z \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\psi(x) = \alpha \|f(b) - f(a)\|_E.$$

Note que

$$|\psi(x)| = |\alpha| \|f(b) - f(a)\|_E = \|\alpha(f(b) - f(a))\|_E = \|x\|_E.$$

Logo,

$$\|\psi\| = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{|\psi(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|_E}{\|x\|_E} = 1,$$

ou seja,  $\psi$  é um funcional linear limitado. Dessa forma, pelo Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice A), existe  $\phi \in E^*$  tal que,  $\phi(x) = \psi(x)$ ,  $\forall x \in Z$ , e  $\|\phi\| = \|\psi\|$ .

Definamos agora a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$g(t) = \phi[f(t)], \quad t \in [a, b].$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \phi \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right] = \phi[f'(t)],$$

implicando que  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ . Logo, pelo Teorema do valor médio no caso real, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|_E &= \phi[f(b) - f(a)] = g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \\ &= \phi[f'(c)](b - a) \leq \|\phi\| \|f'(c)\|_E (b - a) \leq K(b - a). \end{aligned}$$

■

**Corolário 1.11** *Se  $f \in C([a, b], E)$  e  $f'(t) = 0, \forall t \in (a, b)$ , então  $f$  é constante.*



### 1.3 A integral de Riemann para funções abstratas

Sejam  $f : [a, b] \longrightarrow E$  uma função abstrata,  $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n_P} = b\}$  uma partição de  $[a, b]$ , com  $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ , e  $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$  uma escolha arbitrária,  $i = 1, \dots, n_P$ . A soma

$$S(P) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(x_i - x_{i-1})$$

é denominada soma de Riemann de  $f$  para partição  $P$ .

**Definição 1.12** Dizemos que  $\mathcal{I} \in E$  é a integral de Riemann de  $f : [a, b] \longrightarrow E$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\|P\| < \delta$ ,

$$\left\| \mathcal{I} - \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) \right\|_E < \varepsilon, \quad \forall \tau_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Denotaremos a integral de Riemann de  $f$  por  $\int_a^b f(t)dt$ .

**Teorema 1.13** Se  $f \in C([a, b], E)$ , então a integral de Riemann  $\int_a^b f(t)dt$  existe.

**Demonstração:** Como  $f$  é contínua no compacto  $[a, b]$ ,  $f$  é uniformemente contínua e assim, podemos construir uma sequência  $(\delta_m)$  estritamente decrescente em  $(0, \infty)$  tal que, se  $t, s \in [a, b]$  e  $|t - s| < \delta_m$ , então  $\|f(t) - f(s)\|_E < \frac{1}{m}$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

Para  $m \geq 1$  tomemos o conjunto

$$\mathcal{P}_m = \{P ; P \text{ é partição de } [a, b] \text{ e } \|P\| \leq \delta_m\}.$$

Dessa forma, se  $n > m$  e  $P \in \mathcal{P}_n$ , então  $\|P\| \leq \delta_n < \delta_m$  e  $P \in \mathcal{P}_m$ . Consequentemente  $\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots \supset \mathcal{P}_m \supset \dots$ .

Consideremos ainda os conjuntos

$$\mathcal{F}_m = \left\{ \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}); P \in \mathcal{P}_m \text{ e } \tau_i \in [x_{i-1}, x_i] \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Note que  $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \dots \supset \mathcal{F}_m \supset \dots$ . Além disso,  $\text{diam}(\mathcal{F}_m) \leq \frac{2}{m}(b - a)$ . De fato, sejam  $P$  e  $Q$  partições de  $[a, b]$  tais que  $P \in \mathcal{P}_m$ ,  $P \subset Q$ .

Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $Q$  difere de  $P$  por apenas um ponto. Digamos que

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{r-1} < x_r < \cdots < x_{n_P} = b\}$$

e

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{r-1} < t^* < x_r < \cdots < x_{n_P} = b\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(P) &= \sum_{i=1}^{n_P} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n_P} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\tau_r)(x_r - t^*) + f(\tau_r)(t^* - x_{r-1}), \end{aligned}$$

$\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n_P$ , e

$$S(Q) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n_P} f(\sigma_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\sigma)(t^* - x_{r-1}) + f(\sigma')(x_r - t^*),$$

$\sigma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n_P$ ,  $i \neq r$ ,  $\sigma \in [x_{r-1}, t^*]$  e  $\sigma' \in [t^*, x_r]$ , implicando que

$$\|S(Q) - S(P)\|_E \leq \frac{1}{m} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n_P} (x_i - x_{i-1}) + (t^* - x_{r-1}) + (x_r - t^*) = \frac{1}{m}(b - a).$$

Assim, dados  $P, \tilde{P} \in \mathcal{F}_m$ , tomemos  $Q = P \cup \tilde{P}$ . Desse modo,  $Q$  é uma partição de  $[a, b]$ , com  $P \subset Q$  e  $\tilde{P} \subset Q$ , e

$$\|S(P) - S(\tilde{P})\|_E \leq \|S(P) - S(Q)\|_E + \|S(Q) - S(\tilde{P})\|_E \leq \frac{2}{m}(b - a).$$

Portanto,

$$\text{diam}(\mathcal{F}_m) = \sup\{\|S(P) - S(\tilde{P})\|_E, P, \tilde{P} \in \mathcal{F}_m\} \leq \frac{2}{m}(b - a).$$

Agora, usando o teorema de Cantor (ver Apêndice A), temos que existe um único elemento  $\mathcal{I} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}_m$ .

Por fim, dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m > \frac{2}{\varepsilon}(b-a)$  e seja  $\delta = \delta_m > 0$ . Então, para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  tal que  $\|P\| < \delta$ , temos que  $S(P)$  e  $\mathcal{I}$  pertencem a  $\overline{\mathcal{F}}_m$  e assim,

$$\|I - S(P)\|_E \leq \text{diam}(\overline{\mathcal{F}}_m) \leq \frac{2}{m}(b-a) < \varepsilon,$$

garantindo que a função  $f$  é integrável, com  $\int_a^b f(t)dt = \mathcal{I}$ . ■

Veremos a seguir algumas propriedades da integral de Riemann para funções abstratas:

- i)  $\int_a^b u(t)dt = - \int_b^a u(t)dt$ , desde que uma das integrais exista;
- ii)  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ,  $\forall c \in (a, b)$ ;
- iii) Se  $f(t) = f(t_0)$ ,  $\forall t \in [a, b]$  e algum  $t_0 \in [a, b]$  fixo, então  $\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(t_0)$ ;
- iv) Se  $w : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  é uma função decrescente em  $[\alpha, \beta]$ , com  $a = w(\alpha)$  e  $b = w(\beta)$ , então

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(w(\tau))w'(\tau)d\tau,$$

desde que a integral da esquerda exista;

- v) Se  $f \in C([a, b], E)$ , então  $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E dt$ .

Para finalizar este capítulo apresentaremos dois resultados semelhantes ao Teorema fundamental do cálculo.

**Teorema 1.14** *Se  $f \in C([a, b], E)$ , então*

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^t f(s)ds \right) = f(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

**Demonstração:** Seja  $F : [a, b] \longrightarrow E$  definida por

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Como  $f$  é contínua no compacto  $[a, b]$ ,  $f$  é uniformemente contínua em  $[a, b]$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $s, t \in [a, b]$  com  $0 < |s - t| < \delta$ ,  $\|f(s) - f(t)\|_E < \varepsilon$ . Logo, para  $h \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < |h| < \delta$  e  $t + h \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \right\|_E &= \left\| \frac{1}{h} \left[ \int_a^{t+h} f(s)ds - \int_a^t f(s)ds \right] - f(t) \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds - f(t) \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t)ds \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|_E ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \right\|_E = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^t f(s)ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = f(t).$$

■

**Teorema 1.15** Se  $f : [a, b] \longrightarrow E$  é continuamente diferenciável em  $(a, b)$  então, para quaisquer  $\alpha, \beta \in (a, b)$ ,

$$\int_\alpha^\beta f'(s)ds = f(\beta) - f(\alpha).$$

**Demonstração:** Como  $f : [a, b] \longrightarrow E$  é continuamente diferenciável em  $(a, b)$ ,  $f'$  é integrável em  $(a, b)$  e assim, pelo teorema anterior

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_\alpha^t f'(s)ds - f(t) \right] = 0, \quad \text{para todo } t \in [\alpha, \beta].$$

Logo,

$$\int_{\alpha}^t f'(s)ds - f(t) = c, \text{ para algum } c \in E \text{ e todo } t \in [\alpha, \beta].$$

Em particular, para  $t = \alpha$  temos

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f'(s)ds - f(\alpha) = c, \text{ ou seja, } -f(\alpha) = c.$$

Agora, para  $t = \beta$ , temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(s)ds - f(\beta) = -f(\alpha)$$

e então,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(s)ds = f(\beta) - f(\alpha).$$

■

## Capítulo 2

# Teoremas de ponto fixo

Neste capítulo estudaremos alguns resultados que garantem a existência de pontos fixos para determinadas aplicações.

Sejam  $(\mathbb{M}, d)$  um espaço métrico completo e  $T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$  uma aplicação. Dizemos que  $T$  é Lipschitziana, com constante de Lipschitz  $k \geq 0$ , se

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

Além disso, dizemos que  $T$  é uma aplicação não expansiva se  $k \leq 1$  e dizemos que  $T$  é uma contração quando  $0 \leq k < 1$ . Neste caso, a constante de Lipschitz é chamada constante de contração.

O próximo resultado é conhecido como Teorema do ponto fixo de Banach e é provado usando o método das aproximações sucessivas.

**Teorema 2.1 (Ponto fixo de Banach)** *Seja  $(\mathbb{M}, d)$  um espaço métrico completo. Se  $T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$  é uma contração, com constante de contração  $k$ , então  $T$  tem um único ponto fixo em  $\mathbb{M}$ .*

**Demonstração:** Seja  $y \in \mathbb{M}$  um ponto arbitrário. Consideremos a sequência  $(x_n)$  definida por

$$\begin{aligned} x_0 &= y, \\ x_n &= T(x_{n-1}), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Mostraremos que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{M}$ . Para isso, sejam

$m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $m < n$ . Dessa forma,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Além disso, como  $T$  é uma contração,

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(T(x_{p-1}), T(x_p)) \leq k^p d(x_0, x_1) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=0}^{n-m-1} k^{m+i} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) k^m \sum_{i=0}^{n-m-1} k^i \\ &\leq d(x_0, x_1) k^m \sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{k^m}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Note que,  $d(x_0, x_1)$  está fixa. Assim, como  $0 \leq k < 1$ ,  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , garantindo que  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{M}$ .

Agora, visto que  $\mathbb{M}$  é completo, existe  $x \in \mathbb{M}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Mais ainda, da continuidade de  $T$  concluímos que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = T(x),$$

ou seja,  $x$  é ponto fixo de  $T$ .

Para provarmos a unicidade do ponto fixo, suponhamos, por absurdo, que existam  $x, z \in \mathbb{M}$ ,  $x \neq z$ , tais que  $x$  e  $z$  são pontos fixos de  $T$ . Então,  $d(x, z) > 0$ . Mas, por outro lado

$$d(x, z) = d(T(x), T(z)) \leq kd(x, z),$$

o que é absurdo, pois  $0 \leq k < 1$ . Portanto  $x = z$ , isto é, existe um único ponto fixo para  $T$  em  $\mathbb{M}$ . ■

**Corolário 2.2** *Sejam  $(\mathbb{M}, d)$  um espaço métrico completo e  $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$  uma aplicação tal que*

$$d(T^m(x), T^m(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{M},$$

*para algum  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , e  $k \in [0, 1)$ . Então,  $T$  tem um único ponto fixo em  $\mathbb{M}$ .*

**Demonstração:** Se  $m = 1$  o corolário coincide com o Teorema do ponto fixo de

Banach. Suponhamos que  $m > 1$  e consideremos a aplicação  $S : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$  dada por  $S = T^m$ .

Logo,

$$d(S(x), S(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M},$$

com  $0 \leq k < 1$ . Consequentemente do Teorema do ponto fixo de Banach, obtemos que  $S$  possui um único ponto fixo  $z \in \mathbb{M}$ . Mais ainda,  $T^m$  possui um único ponto fixo, isto é,  $T^m(z) = z$ . Então,

$$T(z) = T(T^m(z)) = T^{m+1}(z) = T^m(T(z)),$$

ou seja,  $T(z)$  também é um ponto fixo de  $T^m(z)$ . Mas, como  $T^m$  tem um único ponto fixo, segue que  $T(z) = z$ . Portanto,  $z$  é o único ponto fixo de  $T$ . ■

No caso em que  $T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$  não é uma contração sobre todo  $\mathbb{M}$ , mas apenas uma contração em alguma vizinhança de um ponto dado, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.3** *Sejam  $(\mathbb{M}, d)$  um espaço métrico completo,  $B = \{x \in \mathbb{M}; d(z, x) < \varepsilon\}$ , onde  $z \in \mathbb{M}$ ,  $\varepsilon > 0$ , e  $T : B \longrightarrow \mathbb{M}$  uma aplicação tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in B, \quad \text{com } 0 \leq k < 1.$$

*Além disso, assuma que*

$$d(z, T(z)) < \varepsilon(1 - k).$$

*Então,  $T$  tem um único ponto fixo em  $B$ .*

**Demonstração:** Apesar de  $T$  não estar definida no fecho de  $B$ ,  $\overline{B}$ , sua continuidade uniforme nos permite estendê-la a uma aplicação  $\varphi : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{M}$  de modo que  $\varphi$  seja uma contração, com constante de contração igual a  $k$ . Além disso, para  $x \in \overline{B}$ ,

$$\begin{aligned} d(z, \varphi(x)) &\leq d(z, T(z)) + d(T(z), \varphi(x)) \\ &< \varepsilon(1 - k) + d(\varphi(z), \varphi(x)) \\ &\leq \varepsilon(1 - k) + kd(z, x) \\ &\leq \varepsilon(1 - k) + \varepsilon k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $\varphi(x) \in B$ ,  $\forall x \in \overline{B}$ . Dessa forma, temos  $\varphi : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$  e, como  $\overline{B}$  é completo, o Teorema do ponto fixo de Banach nos garante que  $\varphi$  tem um único



ponto fixo  $y \in \overline{B}$ . Porém, vimos que  $\varphi(x) \in B$  para  $\forall x \in \overline{B}$ , então  $y = \varphi(y) \in B$  e  $\varphi(y) = T(y)$ , provando que  $y$  é o único ponto fixo de  $T$ . ■

**Teorema 2.4** *Sejam  $(\mathbb{M}, d)$  um espaço métrico e  $T : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$  uma aplicação tal que*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M}, \quad x \neq y.$$

*Suponha que exista  $z \in \mathbb{M}$  tal que a sequência  $(x_n)$ , dada por*

$$x_0 = z$$

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

*possua uma subsequência  $(x_{n_i})$  convergente, com limite  $\xi \in \mathbb{M}$ . Então,  $\xi$  é o único ponto fixo de  $T$ .*

**Demonstração:** Note que podemos reescrever a sequência  $(x_n)$  na forma  $(x_n) = (T^n(z))$ , onde  $T^n$  é a composição da aplicação  $T$  com ela mesma  $n$  vezes. Suponhamos, por absurdo, que  $T(\xi) \neq \xi$  e consideremos a subsequência  $(T^{n_i+1}(z))$  de  $(T^n(z))$ . Então  $(T^{n_i+1}(z))$  converge para  $T(\xi)$  quando  $i \longrightarrow \infty$  pois, como  $T$  é contínua,

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} T^{n_i+1}(z) = \lim_{i \longrightarrow \infty} T(T^{n_i}(z)) = T\left(\lim_{i \longrightarrow \infty} T^{n_i}(z)\right) = T\left(\lim_{i \longrightarrow \infty} x_{n_i}\right) = T(\xi).$$

Consideremos agora a função contínua  $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ , onde  $Y = \mathbb{M} \times \mathbb{M} - \{(x, y); x = y\}$ , dada por

$$f(x, y) = \frac{d(T(x), T(y))}{d(x, y)}.$$

Pelo fato de  $T(\xi) \neq \xi$  temos

$$f(\xi, T(\xi)) = \frac{d(T(\xi), T(T(\xi)))}{d(\xi, T(\xi))} < 1.$$

Logo, existe uma vizinhança  $U$  de  $(\xi, T(\xi))$  em  $Y$  e existe  $R \in (0, 1)$  tal que, para todo  $(x, y) \in U$ ,  $0 \leq f(x, y) < R$ .

Sejam  $B_1 = B(\xi, \rho)$  e  $B_2 = B(T(\xi), \rho)$ , bolas abertas centradas em  $\xi$  e  $T(\xi)$ , respectivamente, e com raio  $\rho > 0$  suficientemente pequeno para que

$$\rho < \frac{1}{3}d(\xi, T(\xi)) \quad \text{e} \quad B_1 \times B_2 \subset U. \quad (2.1)$$

Além disso, da convergência das séries  $(T^{n_i}(z))$  e  $(T^{n_i+1}(z))$ , obtemos um inteiro positivo  $N$  tal que, se  $i > N$ , então  $T^{n_i}(z) \in B_1$  e  $T^{n_i+1} \in B_2$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(T^{n_i}(z), T^{n_i+1}(z)) &\geq d(\xi, T(\xi)) - d(\xi, T^{n_i}(z)) - d(T^{n_i+1}(z), T(\xi)) \\ &> 3\rho - \rho - \rho = \rho, \quad \forall i > N. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por outro lado,

$$(T^{n_i}(z), T^{n_i+1}(z)) \in B_1 \times B_2 \subset U, \quad \forall i > N,$$

e assim,

$$f(T^{n_i}(z), T^{n_i+1}(z)) = \frac{d(T^{n_i+1}(z), T^{n_i+2}(z))}{d(T^{n_i}(z), T^{n_i+1}(z))} < R,$$

ou seja,

$$d(T^{n_i+1}(z), T^{n_i+2}(z)) < Rd(T^{n_i}(z), T^{n_i+1}(z)), \quad \forall i > N. \quad (2.3)$$

Note ainda que, se  $n_{l-1}$  e  $n_l$  são consecutivos, então  $n_l = n_{l-1} + 1$ ,  $n_l + 1 = n_{l-1} + 2$  e

$$d(T^{n_l}(z), T^{n_l+1}(z)) = d(T^{n_{l-1}+1}(z), T^{n_{l-1}+2}(z)).$$

Já, se  $n_{l-1}$  e  $n_l$  não são consecutivos, podemos supor que existam  $k$  elementos entre  $n_{l-1}$  e  $n_l$ , assim  $n_l = n_{l-1} + (k + 1)$  e  $n_l + 1 = n_{l-1} + (k + 2)$  e

$$\begin{aligned} d(T^{n_l}(z), T^{n_l+1}(z)) &= d(T^{n_{l-1}+(k+1)}(z), T^{n_{l-1}+(k+2)}(z)) \\ &= d(T^k(T^{n_{l-1}+1}(z)), T^k(T^{n_{l-1}+2}(z))) \\ &< d(T^{n_{l-1}+1}(z), T^{n_{l-1}+2}(z)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(T^{n_l}(z), T^{n_l+1}(z)) \leq d(T^{n_{l-1}+1}(z), T^{n_{l-1}+2}(z)), \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Em particular, tomando  $l > j > N$ , a desigualdade acima e (2.3) implicam que

$$\begin{aligned} d(T^{n_l}(z), T^{n_l+1}(z)) &\leq d(T^{n_{l-1}+1}(z), T^{n_{l-1}+2}(z)) \\ &\leq Rd(T^{n_{l-1}}(z), T^{n_{l-1}+1}(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Rd(T^{n_{l-2}+1}(z), T^{n_{l-2}+2}(z)) \\
&\leq R^2 d(T^{n_{l-2}}(z), T^{n_{l-2}+1}(z)) \\
&\vdots \\
&\leq R^{l-j} d(T^{n_j}(z), T^{n_j+1}(z)).
\end{aligned}$$

Logo, como  $R \in (0, 1)$ ,  $R^{l-j} d(T^{n_j}(z), T^{n_j+1}(z)) \rightarrow 0$ , quando  $l \rightarrow \infty$ . Assim, tomando  $i$  suficientemente grande,

$$d(T^{n_i}(z), T^{n_i+1}(z)) \leq \rho,$$

contrariando a desigualdade (2.2). Portanto  $T(\xi) = \xi$ , isto é,  $\xi$  é ponto fixo de  $T$ .

Para provarmos a unicidade, suponhamos que exista  $\eta \in \mathbb{M}$ ,  $\eta \neq \xi$ , tal que  $T(\eta) = \eta$ . Então,

$$d(\eta, \xi) = d(T(\eta), T(\xi)) < d(\eta, \xi),$$

o que é absurdo. Portanto,  $T$  possui um único ponto fixo. ■

**Corolário 2.5** *Sejam  $(\mathbb{M}, d)$  um espaço métrico e  $T : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$  uma aplicação tal que*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M}, \quad x \neq y.$$

*Além disso, assuma que a imagem de  $T$  esteja contida em um subconjunto compacto  $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ . Então,  $T$  possui um único ponto fixo em  $\mathbb{M}$ .*

**Demonstração:** Dado  $z \in \mathbb{M}$  qualquer, a sequência  $(y_n)$ ,  $y_n = T^n(z)$ ,  $n \geq 1$ , está contida em  $\mathbb{K}$  e, como  $\mathbb{K}$  é compacto, possui uma subsequência convergente. Dessa forma, a sequência  $(x_n)$ , dada por

$$x_0 = z$$

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

também possui subsequência convergente. Logo, do teorema anterior, concluímos que  $T$  possui um único ponto fixo em  $\mathbb{M}$  ■

# Capítulo 3

## Aplicações

Neste capítulo apresentamos três aplicações do Teorema do ponto fixo de Banach e uma aplicação usando diretamente o método das aproximações sucessivas. Mais especificamente, iniciaremos com o estudo do problema de existência e unicidade de solução, no sentido clássico, para equações diferenciais em espaços de Banach que podem ser escritas na forma  $x' = f(t, x)$ . Neste caso, provaremos o Teorema de Picard-Lindelöf.

Em seguida, apresentaremos alguns conceitos da Teoria de semigrupo que serão usados como ferramentas no estudo de existência e unicidade de soluções, agora no sentido fraco, para equações diferenciais escritas na forma  $x' = Ax + f(t, x)$ , onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo. Nas duas seções finais, iremos considerar equações com retardo finito. Primeiramente, estudaremos o problema de existência e unicidade de soluções (clássico) para equações da forma  $x'(t) = f(t, x_t)$ , onde  $x_t$  representa o termo com retardo. Posteriormente, voltaremos a usar a Teoria de semigrupo para estudar equações descritas por  $x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x_t)$ , onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo.

### 3.1 Equações diferenciais

Seja  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R} \times E$ , onde  $E$  é um espaço de Banach, e seja  $f : D \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Consideremos a equação diferencial

$$x' = f(t, x). \quad (3.1)$$

Nosso objetivo é encontrar condições suficientes para garantir que a equação (3.1) possua solução. Vejamos primeiramente o que consideramos ser uma solução

para esta equação.

**Definição 3.1** Uma função  $u : I \longrightarrow E$ , onde  $I$  é um intervalo da reta, é solução clássica de (3.1) se satisfaz as seguintes condições:

- i)  $u$  é de classe  $C^1$  em  $I$ ;
- ii) O gráfico de  $u$  está contido em  $D$ ;
- iii)  $u'(t) = f(t, u(t))$ , para todo  $t \in I$ .

Além disso, se fixarmos um valor  $x_0$  para algum  $t_0$ , com  $(t_0, x_0) \in D$ , obtemos um problema de valor inicial (PVI), isto é,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dessa forma, uma solução  $u$  para (3.2) é uma solução de (3.1) que, além das condições (i) – (iii), satisfaz  $u(t_0) = x_0$ , com  $t_0 \in I$ .

Veremos agora uma outra forma de escrever as soluções de (3.2).

**Proposição 3.2** Uma função  $u : I \longrightarrow E$ , onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $t_0 \in I$ , é uma solução do problema de valor inicial (3.2) se, e somente se,  $u$  é contínua em  $I$ , o gráfico de  $u$  está contido em  $D$  para todo  $t \in I$  e  $u$  satisfaz a equação integral

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

**Demonstração:** ( $\implies$ ) Seja  $u$  solução do problema de valor inicial (3.2), então  $u$  é de classe  $C^1$  em  $I$ ,  $(t, u(t)) \in D$  para  $\forall t \in I$ , e

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I, \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Como  $u'(\cdot)$  e  $f(\cdot, u(\cdot))$  são contínuas, integrando a primeira igualdade acima de  $t_0$  a  $t$ , para  $t \in I$ , temos

$$\int_{t_0}^t u'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds.$$

Dessa forma, do Teorema fundamental do cálculo, concluímos que

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

ou ainda,

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, seja  $u$  contínua, com  $(t, u(t)) \in D$ ,  $\forall t \in I$ , e

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

Então,  $u$  é derivável, com

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt} \left[ x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right].$$

Assim, pelo Teorema fundamental do cálculo,

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad \forall t \in I.$$

Em particular, para  $t = t_0$

$$u(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, u(s)) ds = x_0.$$

Portanto,

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in I, \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,  $(t, u(t)) \in D$ ,  $\forall t \in I$ , e, visto que  $f$  e  $u$  são contínuas,  $u'$  é contínua, implicando que  $u$  é solução de (3.2). ■

Para o próximo resultado consideremos  $D = I \times E$ , onde  $I = [0, b]$ ,  $b > 0$ , e  $E$  é um espaço de Banach.

Dizemos que uma aplicação  $f : D \rightarrow E$  é lipschitziana na segunda variável, se existe uma constante  $\alpha \geq 0$  tal que

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\|_E \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_E, \quad \forall (t, u_1), (t, u_2) \in D.$$

A constante  $\alpha$  é chamada de constante de Lipschitz.

**Teorema 3.3 (Teorema de Picard - Lindelöf)** *Seja  $f : D \rightarrow E$  uma aplicação contínua em  $D$  e lipschitziana na segunda variável, com constante de Lipschitz igual a  $\alpha \geq 0$ . Então, existe uma única solução para o problema de valor inicial (3.2).*

**Demonstração:** Para facilitar as contas que aparecem nesta demonstração, vamos considerar que  $t_0 = 0$ . O caso  $t_0 \neq 0$  segue de modo análogo. Denotemos por  $C(I, E)$  o conjunto das funções contínuas de  $I$  em  $E$  e consideremos neste espaço a seguinte norma

$$\|u\|_\alpha = \max_{t \in I} e^{-\alpha t} \|u(t)\|, \quad u \in C(I, E).$$

Observe que a norma  $\|\cdot\|_\alpha$  é equivalente a norma  $\|\cdot\|_\infty$ , onde

$$\|u\|_\infty = \max_{t \in I} \|u(t)\|, \quad u \in C(I, E).$$

Isso ocorre pois,

$$e^{-\alpha b} \|u(t)\|_E \leq e^{-\alpha t} \|u(t)\|_E \leq \|u(t)\|_E, \quad \forall t \in [0, b],$$

e assim,

$$e^{-\alpha b} \max_{t \in I} \|u(t)\|_E \leq \max_{t \in I} e^{-\alpha t} \|u(t)\|_E \leq \max_{t \in I} \|u(t)\|_E, \quad \text{ou seja,}$$

$$e^{-\alpha b} \|u\|_\infty \leq \|u\|_\alpha \leq \|u\|_\infty.$$

Logo, como  $C(I, E)$  é um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $C(I, E)$  também será um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_\alpha$ .

Agora, definamos o operador  $T : C(I, E) \rightarrow C(I, E)$  por

$$Tu(t) = x_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds.$$

Mostraremos primeiramente que  $T$  está bem definida, isto é,  $T$  é uma aplicação que leva  $C(I, E)$  em  $C(I, E)$ . Para isso, basta provarmos que  $Tu$  é uma função contínua, para todo  $u \in C(I, E)$ .

Então, dado  $u \in C(I, E)$ , como  $f$  é contínua por hipótese, a função  $s \mapsto f(s, u(s))$  é contínua para todo  $s \in I$ . Desse modo, esta função é integrável em

qualquer intervalo da forma  $[0, t]$ , com  $t \in I$ , e é limitada em  $I$ . Seja  $N_u > 0$  tal que  $\|f(s, u(s))\|_E \leq N_u$ , para todo  $s \in I$ . Logo, para  $t, t' \in I$ , com  $t' \geq t$ ,

$$\begin{aligned}
 \|Tu(t') - Tu(t)\|_E &= \left\| \int_0^{t'} f(s, u(s))ds - \int_0^t f(s, u(s))ds \right\|_E \\
 &= \left\| \int_0^t f(s, u(s))ds + \int_t^{t'} f(s, u(s))ds - \int_0^t f(s, u(s))ds \right\|_E \\
 &\leq \int_t^{t'} \|f(s, u(s))\|_E ds \\
 &\leq N_u(t' - t).
 \end{aligned}$$

Como  $N_u(t' - t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow t'$ , segue que  $Tu$  é contínua em  $I$ .

A seguir mostraremos que  $T$  é uma contração em  $(C(I, E), \|\cdot\|_\alpha)$ . Dados  $u, v \in C(I, E)$  e  $t \in I$ , temos

$$\begin{aligned}
 \|Tu(t) - Tv(t)\|_E &\leq \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_E ds \\
 &\leq \int_0^t \alpha \|u(s) - v(s)\|_E ds,
 \end{aligned}$$

pois  $f$  é lipschitziana na segunda variável.

Dessa forma, para todo  $t \in I$ ,

$$\begin{aligned}
 e^{-\alpha t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E &\leq e^{-\alpha t} \int_0^t \alpha \|u(s) - v(s)\|_E ds \\
 &= e^{-\alpha t} \int_0^t \alpha e^{\alpha s} e^{-\alpha s} \|u(s) - v(s)\|_E ds \\
 &\leq e^{-\alpha t} \left( \int_0^t \alpha e^{\alpha s} ds \right) \|u - v\|_\alpha \\
 &= e^{-\alpha t} \alpha \left( \int_0^t e^{\alpha s} ds \right) \|u - v\|_\alpha \\
 &= e^{-\alpha t} \alpha \left( \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \|u - v\|_\alpha \\
 &= (1 - e^{-\alpha t}) \|u - v\|_\alpha.
 \end{aligned}$$



Logo,

$$\begin{aligned} \max_{t \in I} e^{-\alpha t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E &\leq \max_{t \in I} (1 - e^{-\alpha t}) \|u - v\|_\alpha \\ &= (1 - e^{-\alpha b}) \|u - v\|_\alpha, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|Tu - Tv\|_\alpha \leq (1 - e^{-\alpha b}) \|u - v\|_\alpha, \quad \forall u, v \in C(I, E).$$

Visto que  $0 < e^{-\alpha b} \leq 1$ ,  $T$  é uma contração e portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Banach,  $T$  tem um único ponto fixo  $u \in C(I, E)$ , ou seja, existe  $u \in C(I, E)$  tal que

$$u(t) = Tu(t) = x_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

Finalmente, pela Proposição 3.2, concluímos que  $u$  é a única solução de (3.2). ■

## 3.2 Equações de evolução abstratas

Nesta seção estudaremos o problema de existência e unicidade de soluções para equações de evolução abstratas. Para isso é necessário alguns conceitos da Teoria de semigrupos de operadores.

Dado um espaço de Banach  $E$ , denotaremos por  $\mathfrak{L}(E)$  o espaço dos operadores lineares limitados de  $E$  em  $E$ , com a seguinte norma

$$\|S\|_{\mathfrak{L}(E)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Sx\|, \quad S \in \mathfrak{L}(E).$$

**Definição 3.4** *Uma família de operadores lineares limitados  $\{S(t); t \in [0, \infty)\} \subset \mathfrak{L}(E)$  é chamada de semigrupo se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i)  $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in [0, \infty);$
- (ii)  $S(0) = I$ , onde  $I$  é o operador identidade em  $E$ .

*Além disso, se a família de operadores também satisfaz a condição*

- (iii) *Para cada  $x \in E$ ,  $t \mapsto S(t)x$  é contínuo em  $[0, \infty);$*

dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo ou, que é um  $C_0$ -semigrupo.

Se, no lugar da propriedade (iii) a família  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  satisfaz a condição

(iv) A aplicação  $t \mapsto S(t)$  é contínua em  $[0, \infty)$ ;

dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo.

**Teorema 3.5** Se  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  é um  $C_0$ -semigrupo, então existem  $M \geq 1$  e  $w \geq 0$  tais que

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq M e^{tw}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

**Demonstração:** Primeiramente, mostraremos que existe  $\eta > 0$  e  $M \geq 1$  tal que  $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq M$ , para todo  $t \in [0, \eta]$ . Faremos isso assumindo, por contradição, que esta limitação não aconteça. Então, dados  $\eta > 0$  e  $M \geq 1$ , existe um  $t_{\eta, M} \in [0, \eta]$  tal que

$$\|S(t_{\eta, M})\|_{\mathfrak{L}(E)} > M.$$

Assim, tomando  $\eta = \frac{1}{n}$  e  $M = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $t_{\eta, M} = t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$  de modo que

$$\|S(t_n)\|_{\mathfrak{L}(E)} > n. \quad (3.3)$$

Este fato garante que a família  $\{S(t_n); n \in \mathbb{N}\}$  é ilimitada.

Por outro lado,  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  é um  $C_0$ -semigrupo e então, como  $t_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x = S(0)x = x, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Isso implica que o conjunto  $\{S(t_n)x; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado para todo  $x \in E$ , ou seja,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S(t_n)x\|_E < \infty$  para todo  $x \in E$ . Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus (ver Apêndice A)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S(t_n)\|_{\mathfrak{L}(E)} < \infty,$$

isto é, a família  $\{S(t_n); n \in \mathbb{N}\}$  é limitada, o que é uma contradição.

Portanto, existem  $\eta > 0$  e  $M \geq 1$  tais que

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq M, \quad \forall t \in [0, \eta].$$

Agora, encontraremos a limitação desejada. Dado  $t \in [0, \infty)$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  e  $\delta \in [0, \eta)$  tal que  $t = n\eta + \delta$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} &= \|S(n\eta + \delta)\|_{\mathfrak{L}(E)} = \|S(n\eta)S(\delta)\|_{\mathfrak{L}(E)} \\ &= \|S^n(\eta)S(\delta)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq \|S(\eta)\|_{\mathfrak{L}(E)}^n \|S(\delta)\|_{\mathfrak{L}(E)} \\ &\leq M^n M \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{tw}, \end{aligned}$$

onde  $w = \frac{1}{\eta} \ln M$ . ■

**Proposição 3.6** *Sejam  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  um  $C_0$  – semigrupo em  $E$ ,  $u \in C([0, \infty), E)$  e  $f : [0, \infty) \times E \rightarrow E$  uma função localmente integrável. Então, a função  $t \mapsto \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds$  é contínua de  $[0, \infty)$  em  $E$ .*

**Demonstração:** Consideremos a aplicação  $z : [0, \infty) \rightarrow E$  dada por

$$z(t) = \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds.$$

Dado  $t \in [0, \infty)$ , mostraremos que  $z$  é contínua tanto à direita, quanto à esquerda de  $t$  (no caso em que  $t = 0$  a continuidade segue apenas pela direita). Vejamos, primeiramente a continuidade à direita de  $t$ . Para isso, tomando  $h > 0$ , note que

$$\begin{aligned} &\|z(t+h) - z(t)\|_E \\ &= \left\| \int_0^{t+h} S((t+h)-s)f(s, u(s))ds - \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t S(t+h-s)f(s, u(s))ds + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s, u(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_E \\ &\leq \left\| \int_0^t [S(t+h-s) - S(t-s)]f(s, u(s))ds \right\|_E + \left\| \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s, u(s))ds \right\|_E \\ &\leq \left\| \int_0^t [S(h) - I]S(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_E + \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)f(s, u(s))\|_E ds \\ &\leq \left\| [S(h) - I] \left( \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \right) \right\|_E + \int_t^{t+h} \|S(t+h-s)\|_{\mathfrak{L}(E)} \|f(s, u(s))\|_E ds \\ &\leq \|[S(h) - I]z(t)\|_E + \int_t^{t+h} Me^{w(t+h-s)} \|f(s, u(s))\|_E ds \\ &\leq \|[S(h) - I]z(t)\|_E + Me^{wh} \int_t^{t+h} \|f(s, u(s))\|_E ds \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

onde  $I_1 = \|[S(h) - I]z(t)\|_E$  e  $I_2 = Me^{wh} \int_t^{t+h} \|f(s, u(s))\|_E ds$ .

Vamos estudar  $I_1$  e  $I_2$  separadamente. Como  $S(t)$  é um  $C_0$ -semigrupo e  $z(t)$  independe de  $h$ ,  $I_1 \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ .

Além disso, como  $s \mapsto e^{ws}$  é uma função contínua e  $f$  é integrável,

$$Me^{wh} \rightarrow M \quad \text{e} \quad \int_t^{t+h} \|f(s, u(s))\|_E ds \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

garantindo que  $I_2 \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ .

Portanto,  $\|z(t+h) - z(t)\|_E \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ , isto é,  $z$  é contínua à direita de  $t$ .

Vejam agora como provar a continuidade de  $z$  à esquerda de  $t$ . Tomando  $h > 0$  tal que  $(t-h) \in [0, \infty)$ , segue que

$$\begin{aligned} & \|z(t-h) - z(t)\|_E \\ &= \left\| \int_0^{t-h} S((t-h)-s)f(s, u(s))ds - \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_E \\ &= \left\| \int_0^{t-h} S(t-h-s)f(s, u(s))ds + \int_0^{t-h} S(t-s)f(s, u(s))ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{t-h}^t S(t-s)f(s, u(s))ds \right\|_E \\ &\leq \int_0^{t-h} \| [S(t-h-s) - S(t-s)]f(s, u(s)) \|_E ds + \int_{t-h}^t \| S(t-h) \|_{\mathcal{L}(E)} \|f(s, u(s))\|_E ds \\ &\leq \int_0^{t-h} \| [S(t-h-s) - S(t-s)]f(s, u(s)) \|_E ds + \int_{t-h}^t Me^{w(t-s)} \|f(s, u(s))\|_E ds \\ &\leq \int_0^{t-h} \| [S(t-h-s) - S(t-s)]f(s, u(s)) \|_E ds + Me^{wh} \left( \int_{t-h}^t \|f(s, u(s))\|_E ds \right) \\ &= I_3 + I_4, \end{aligned}$$

onde

$$I_3 = \int_0^{t-h} \| [S(t-h-s) - S(t-s)]f(s, u(s)) \|_E ds \quad \text{e} \quad I_4 = Me^{wh} \left( \int_{t-h}^t \|f(s, u(s))\|_E ds \right).$$

Como no caso anterior, pelo fato de  $s \mapsto e^{ws}$  ser contínua e  $f$  integrável,  $I_4 \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ .

Agora, para  $I_3$ , note que

$$\| [S(t-h-s) - S(t-s)]f(s, u(s)) \|_E \rightarrow 0,$$

quando  $h \rightarrow 0$ , pois  $S(t)$  é um  $C_0$ -semigrupo e  $t$  e  $s$  estão fixos. Além disso, para  $0 \leq s \leq t - h$ ,

$$\begin{aligned} \| [S(t - h - s) - S(t - s)]f(s, u(s)) \|_E &\leq (Me^{w(t-h-s)} + Me^{w(t-s)}) \|f(s, u(s))\|_E \\ &\leq 2Me^{w(t-s)} \|f(s, u(s))\|_E, \end{aligned}$$

com  $g(s) = Me^{w(t-s)} \|f(s, u(s))\|_E$  finita e integrável. Logo, do Teorema da convergência dominada, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_3 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{t-h} \| [S(t - h - s) - S(t - s)]f(s, u(s)) \|_E ds = 0.$$

Isso implica que a função  $z$  também é contínua à esquerda de  $t$ .

Portanto,  $z(t)$  é contínua para todo  $t \in [0, \infty)$ . ■

Seja  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  um  $C_0$ -semigrupo de operadores. Para  $h > 0$ , definimos o operador  $A_h : E \rightarrow E$  por

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in E.$$

Seja  $D(A)$  o conjunto de todo  $x \in E$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x$  existe. Definimos também o operador  $A : D(A) \rightarrow E$  por

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x, \quad x \in D(A).$$

Dizemos que o operador  $A$  é o *gerador infinitesimal* do  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$ .

**Lema 3.7** *Sejam  $A \in \mathfrak{L}(E)$  e  $e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ . Então,  $\{e^{tA}; t \in [0, \infty)\}$  é um semigrupo uniformemente contínuo.*

**Demonstração:** Seja

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m < n$ , temos

$$\begin{aligned}
 \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \\
 &\leq \sum_{k=m+1}^n \left\| \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \\
 &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} \\
 &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Como a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} = e^{t\|A\|}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!} < \varepsilon$ .

Dessa forma, se  $m, n \geq n_0$ , então a sequência  $(S_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathfrak{L}(E)$ . Consequentemente, visto que  $\mathfrak{L}(E)$  é um espaço de Banach,  $(S_n)$  converge para algum elemento de  $\mathfrak{L}(E)$ , seja,  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ .

Por outro lado, usando o Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{(t+s)^n A^n}{n!} &= \frac{1}{n!} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n! t^{n-k} s^k}{k!(n-k)!} \right] A^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \frac{s^k A^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, como a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)^n A^n}{n!}$  converge absolutamente para  $t \in \mathbb{R}$ , podemos mostrar (como para o produto de Cauchy de séries escalares) que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \frac{s^k A^k}{k!} \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n A^n}{n!} \right),
 \end{aligned}$$

o que prova que  $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ ,  $\forall t, s \in [0, \infty)$ .

Além disso,  $e^{(0)A} = I$ , o que implica que  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  é um semigrupo.

Falta mostrarmos que este semigrupo é uniformemente contínuo, isto é, que a aplicação  $t \mapsto e^{tA}$ , com  $t \in [0, \infty)$ , é contínua. Para provarmos esta propriedade,

dados  $t, h \in [0, \infty)$  tais que  $(t - h) \in [0, \infty)$ , note que

$$e^{(t+h)A} - e^{tA} = e^{tA}(e^{hA} - I) \quad \text{e} \quad e^{t-h} - e^{tA} = e^{(t-h)A}(I - e^{hA}).$$

Assim, para mostrarmos a continuidade de  $t \mapsto e^{tA}$  é suficiente mostrarmos que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{hA} = I$ , pois

$$\begin{aligned} \|e^{(t-h)A}\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-h)^n \|A\|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

para qualquer  $h \in [0, \infty)$  tal que  $(t - h) \in [0, \infty)$ .

Dessa forma, para  $h \in [0, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{hA} - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n \|A\|^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \|A\|^n}{n!} - h^0 \|A\|^0 \\ &= e^{h\|A\|} - 1, \end{aligned}$$

e como  $e^{h\|A\|} \rightarrow 1$  quando  $h \rightarrow 0^+$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{hA} = I$ .

Portanto,  $\{e^{tA}; t \in [0, \infty)\}$  é um semigrupo uniformemente contínuo. ■

**Teorema 3.8** *Um operador linear  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se,  $A$  é um operador linear limitado.*

**Demonstração:** ( $\Leftarrow$ ) Suponha, primeiramente, que  $A$  seja um operador linear limitado em  $E$ . Para cada  $t \in [0, \infty)$  defina

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Então, pelo Lema 3.7,  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  é um semigrupo uniformemente contínuo.

Além disso, para  $h \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{S(h) - I}{h} - A \right\| &= \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!}}{h} - A \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} A^n}{n!} - A \right\| \\
 &= \left\| \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} A^{n-1}}{n!} - I \right] A \right\| \\
 &\leq \left\| \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} - I \right] A \right\| \\
 &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n A^n}{n!} - I \right\| \|A\| \\
 &= \|S(h) - I\| \|A\|.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, visto que  $A$  é limitado e  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  é uniformemente contínuo,  $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(h) - I\| \|A\| = 0$ , o que implica  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} = A$ .

Portanto,  $A$  é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponha agora que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo,  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$ , de operadores lineares limitados em  $E$ . Mostraremos que  $A$  é limitado.

Pelo fato de  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  ser uniformemente contínuo, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 \leq t < \delta$ , então  $\|S(t) - I\| < \varepsilon$ . Em particular, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  obtemos  $\delta > 0$  tal que, para  $0 \leq t < \delta$ ,  $\|S(t) - I\| < \frac{1}{2}$ .

Além disso, como a aplicação  $t \mapsto S(t)$  é contínua em  $[0, \infty)$ , a integral  $\int_0^t S(s) ds$  existe, e mais,

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta S(s) ds - I \right\| \leq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|S(s) - I\| ds \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, do Teorema A.7 (ver apêndice),  $\left( \int_0^\delta S(s) ds \right)^{-1}$  existe e é um operador linear



limitado. Assim, para  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(S(h) - I)}{h} \left( \int_0^\delta S(s) ds \right) &= h^{-1} \left( \int_0^\delta S(h+s) ds - \int_0^\delta S(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left( \int_h^{h+\delta} S(s) ds - \int_0^\delta S(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left( \int_\delta^{h+\delta} S(s) ds - \int_0^h S(s) ds \right) \end{aligned}$$

e

$$\frac{(S(h) - I)}{h} = \left[ h^{-1} \int_\delta^{h+\delta} S(s) ds - h^{-1} \int_0^h S(s) ds \right] \left( \int_0^\delta S(s) ds \right)^{-1}. \quad (3.4)$$

Por fim, fazendo  $h \rightarrow 0^+$  em (3.4), obtemos que

$$A = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} = (S(\delta) - I) \left( \int_0^\delta S(s) ds \right)^{-1}.$$

Portanto,  $A$  é um operador linear limitado. ■

**Definição 3.9** *Seja  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  um operador linear. O conjunto resolvente de  $A$  é o subconjunto  $\rho(A)$  de todos os  $\lambda$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\lambda I - A$  é injetor, com imagem densa em  $E$ , isto é,  $\overline{R(\lambda I - A)} = E$  e  $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \subset E \rightarrow E$  é limitado. Para  $\lambda \in \rho(A)$ , o operador  $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$  é chamado operador resolvente de  $A$ . O espectro do operador  $A$  é definido por  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \rho(A)^c$ .*

O próximo teorema é um dos resultados mais importantes da teoria de semigrupos, pois nos permite dizer quando um determinado operador linear é o gerador de um  $C_0$ -semigrupo.

Contudo, pelo fato de envolver muitos conceitos da teoria espectral, vamos omitir sua demonstração.

**Teorema 3.10 (Hille-Yosida)** *Suponha que  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  seja um operador linear. Então os fatos seguintes são equivalentes:*

- (i)  *$A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \geq 0\} \subset \mathfrak{L}(E)$  tal que*

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq e^{wt}, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii)  $A$  é um operador linear fechado e densamente definido, cujo conjunto resolvente de  $A$  contém  $(w, \infty)$  e

$$\|R(\lambda : A)x\|_E \leq \frac{1}{(\lambda - w)}\|x\|_E, \quad \forall \lambda > w, \quad \forall x \in E.$$

**Demonstração:** Ver Teorema 3.1 em [14]. ■

**Corolário 3.11** *Suponha que  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  é um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \geq 0\} \subset \mathfrak{L}(E)$  tal que

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii)  $A$  é fechado, densamente definido, o conjunto resolvente de  $A$  contém  $(w, \infty)$  e

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq M \frac{1}{(\lambda - w)^n}, \quad \forall \lambda > w, \quad n = 1, 2, \dots.$$

**Corolário 3.12** *Se  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \geq 0\}$  satisfazendo  $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0$ , então  $\rho(A) \supset \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda > w\}$  e*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathfrak{L}(E)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - w)^n}, \quad \forall \lambda \text{ com } \operatorname{Re} \lambda > w \text{ e } \forall n \geq 1.$$

Vejamos agora alguns conceitos da teoria do operador espectral de Riesz.

**Definição 3.13** *Um espaço vetorial  $H$ , com produto interno, é dito ser um espaço de Hilbert se é um espaço de Banach com a norma derivada do produto interno.*

Seja  $Z$  um espaço de Hilbert sobre  $\mathbb{K}$  onde  $\mathbb{K}$  é  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Definição 3.14** *Uma sequência de vetores  $\{\phi_n; n \geq 1\}$  em  $Z$  é uma base de Riesz para  $Z$  se as seguintes condições são válidas:*

(i)  $\overline{\langle \phi_n; n \in \mathbb{N} \rangle} = Z;$

- (ii) Existem constantes positivas  $m$  e  $M$  tais que, para todo  $N \in \mathbb{N}$  e todo  $\alpha_n \in \mathbb{K}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

$$m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.$$

Segue diretamente de Definição 3.14 que uma base ortonormal de  $Z$  é uma base de Riesz para  $Z$ . Além disso, existe um resultado garantindo que toda base de Riesz pode ser obtida de uma base ortonormal através de uma transformação linear limitada invertível (página 38, [7]).

**Definição 3.15** Dizemos que  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , seqüências em  $Z$ , são biortogonais se, para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle \phi_m, \psi_n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Se  $\{\phi_n; n \geq 1\}$  é uma base de Riesz, então mostraremos que todo  $z \in Z$  pode ser representado na forma  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ .

**Lema 3.16** Seja  $A$  um operador linear fechado em  $Z$ . Suponha que seus autovalores,  $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ , sejam simples e que os autovetores correspondentes,  $\{\phi_n; n \geq 1\}$ , formam uma base de Riesz para  $Z$ .

- (a) Se  $\{\psi_n; n \geq 1\}$  são autovetores do operador adjunto de  $A$ ,  $A^*$ , correspondentes aos autovalores  $\{\overline{\lambda_n}; n \geq 1\}$ , então  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  pode ser reordenado de modo que  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  e  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  sejam biortogonais.

- (b) Todo  $z \in Z$  pode ser representado unicamente por  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$  e existem constantes positivas  $m$  e  $M$  tais que

$$m \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2. \quad (3.5)$$

**Demonstração:** (a) Note que

$$\begin{aligned} \lambda_n \langle \phi_n, \psi_m \rangle &= \langle A\phi_n, \psi_m \rangle = \langle \phi_n, A^*\psi_m \rangle \\ &= \langle \phi_n, \overline{\lambda_m} \psi_m \rangle = \lambda_m \langle \phi_n, \psi_m \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0.$$

Se  $n \neq m$ , segue que  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0$ . Por outro lado, se  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle \neq 0$  então, definindo  $\tilde{\psi}_n := \langle \phi_n, \psi_m \rangle^{-1} \psi_m$ , temos  $\langle \phi_n, \tilde{\psi}_n \rangle = 1$  e assim, podemos reordenar  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  de modo que seja biortogonal com  $(\phi_n)_{n \geq 1}$ .

(b) Como  $\overline{\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}} = Z$ , dado  $z \in Z$ , existe uma sequência  $(z^p)_{p \in \mathbb{N}}$ , com  $z^p = \sum_{n=1}^p \alpha_n^p \phi_n$ , tal que  $z^p \rightarrow z$  quando  $p \rightarrow \infty$ . Tomando  $j < p$ , temos

$$\langle z^p, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^p \alpha_n^p \phi_n, \psi_j \right\rangle = \sum_{n=1}^p \alpha_n^p \langle \phi_n, \psi_j \rangle = \alpha_j^p.$$

Então,  $\alpha_j^p = \langle z^p, \psi_j \rangle$  e, como  $z^p \rightarrow z$  quando  $p \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_j^p \rightarrow \langle z, \psi_j \rangle$  quando  $p \rightarrow \infty$ .

Usando o item (b) da Definição 3.14, obtemos que existem constantes positivas  $m, M$  tais que

$$m \sum_{j=1}^p |\langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \leq \|z^p\|^2 \leq M \sum_{j=1}^p |\langle z^p, \psi_j \rangle|^2. \quad (3.6)$$

Mostraremos agora que  $(\langle z, \psi_j \rangle)_{j \geq 1}$  é uma sequência quadrado somável. Para isto, tomemos  $N \in \mathbb{N}$ .

Usando a desigualdade triangular no espaço  $l_2$ , temos

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{j=1}^N |\langle z, \psi_j \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[ \sum_{j=1}^N |\langle z, \psi_j \rangle - \langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \sum_{j=1}^N |\langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[ \sum_{j=1}^N |\langle z, \psi_j \rangle - \langle z^p, \psi_j \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \|z^p\|. \end{aligned}$$

Como  $z^p \rightarrow z$ ,  $\|z^p\|$  é uniformemente limitada. Além disso, como  $\alpha_j^p = \langle z^p, \psi_j \rangle$  converge para  $\langle z, \psi_j \rangle$  quando  $p \rightarrow \infty$ , existe  $P = P(N) \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\langle z, \psi_j \rangle - \langle z^p, \psi_j \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{N}, \quad \forall p > P, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{j=1}^N | \langle z, \psi_j \rangle |^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[ \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon^2}{N} \right] + \frac{1}{\sqrt{m}} \|z^p\| \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{m}} \|z^p\| < \infty, \end{aligned}$$

o que implica que  $(\langle z, \psi_j \rangle)_{j \geq 1}$  é quadrado somável.

Mostraremos também que

$$z = \lim_{p \rightarrow \infty} z^p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n.$$

A primeira igualdade segue diretamente da escolha de  $(z^p)_{p \in \mathbb{N}}$ . A segunda ocorre pois,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \sum_{m=1}^p \alpha_m^p \phi_m, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \sum_{m=1}^p \langle z^p, \psi_m \rangle \phi_m, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^p \langle z^p, \psi_m \rangle \langle \phi_m, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^p \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n = z^p. \end{aligned}$$

Para a terceira igualdade, note que

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n - \sum_{n=1}^k \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{n=1}^k \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n - \sum_{n=1}^k \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{n=1}^k \langle z, \psi_n \rangle \phi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=k}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^k \langle z^p - z, \psi_n \rangle \phi_n \right\| + \left\| \sum_{n=k}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\|. \end{aligned}$$

Então, como  $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\| < \infty$  e  $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n \right\| < \infty$ , dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| \sum_{n=k}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\| < \varepsilon \text{ e } \left\| \sum_{n=k}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n \right\| < \varepsilon.$$

Além disso, como  $\langle z^p, \psi_n \rangle \rightarrow \langle z, \psi_n \rangle$  quando  $p \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \text{ quando } p \rightarrow \infty.$$

Dessa forma,  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ .

Para concluirmos a desigualdade (3.5), e assim completarmos a demonstração do lema, basta tomarmos o limite quando  $p \rightarrow \infty$  na equação (3.6). ■

**Corolário 3.17** *Seja  $A$  um operador linear fechado em  $Z$ . Suponha que seus autovalores,  $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ , sejam simples e que os autovetores correspondentes,  $\{\phi_n; n \geq 1\}$ , formam uma base de Riesz para  $Z$ . Então, os autovetores de  $A^*$ ,  $\{\psi_n; n \geq 1\}$ , formam também uma base de Riesz para  $Z$ . Além disso, todo  $z \in Z$  pode ser representado por  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_n \rangle \psi_n$  e vale a desigualdade*

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \phi_n \rangle|^2. \quad (3.7)$$

**Demonstração:** Mostraremos primeiramente que  $\overline{\langle \{\psi_n; n \in \mathbb{N}\} \rangle} = Z$ . Para isso usaremos o Corolário A.4.

Defina  $f : Z \rightarrow \mathbb{K}$  por  $f(x) = \langle z, x \rangle$ ,  $\forall x \in Z$  e para algum  $z \in Z$  fixo. Se  $f(\psi_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então, pelo item (b) do Lema 3.16, temos  $z = 0$ . Logo  $f \equiv 0$ , o que nos permite concluir que  $\overline{\langle \{\psi_n; n \in \mathbb{N}\} \rangle} = Z$

Tomemos agora  $\sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n$ , um elemento de  $Z$ . Mostraremos que existem  $m'$  e  $M'$  tais que

$$m' \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 \leq M' \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.$$

Como  $Z$  é um espaço de Hilbert,

$$\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\| = \sup_{\substack{y \in Z \\ y \neq 0}} \frac{|\langle \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n, y \rangle|}{\|y\|} = \sup_{\substack{y \in Z \\ y \neq 0}} \frac{|\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, y \rangle|}{\|y\|}.$$

Dessa forma, usando a desigualdade de Holder e o Lema 3.16, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 &= \sup_{\substack{y \in Z \\ y \neq 0}} \left( \frac{\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, y \rangle \right|}{\|y\|} \right)^2 \\ &\leq \sup_{\substack{y \in Z \\ y \neq 0}} \left( \frac{\left( \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \right) \left( \sum_{n=1}^N |\langle \psi_n, y \rangle|^2 \right)}{\|y\|^2} \right) \\ &\leq \sup_{\substack{y \in Z \\ y \neq 0}} \left( \frac{\left( \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \right) \left( \frac{1}{m} \|y\|^2 \right)}{\|y\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, se tomarmos  $y_0 = \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2}} \phi_n$ , então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 &\geq \frac{\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, y_0 \rangle \right|^2}{\|y_0\|^2} \\ &= \frac{\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle \psi_n, \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2}} \phi_n \rangle \right|^2}{\|y_0\|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^N \frac{|\alpha_n|^2}{\sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2}} \langle \psi_n, \phi_n \rangle \right|^2 \\
&= \frac{\left| \sum_{n=1}^N \frac{|\alpha_n|^2}{\sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2}} \langle \psi_n, \phi_n \rangle \right|^2}{\|y_0\|^2} \\
&= \frac{1}{\|y_0\|^2} \frac{1}{\left( \sqrt{\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2} \right)^2} \left| \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{|\alpha_n|^2}{\|y_0\|^2} \\
&\geq \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que existem  $m' = M^{-1}$  e  $M' = m^{-1}$  tais que

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n \right\|^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

Logo,  $\{\psi_n; n \geq 1\}$  é uma base de Riesz para  $Z$  e assim, pelo Lema 3.16, para todo  $z \in Z$ ,  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \phi_n \rangle \psi_n$  e a desigualdade (3.7) é verificada. ■

**Definição 3.18** *Seja  $A$  um operador linear fechado em  $Z$ , com autovalores simples  $\{\lambda_n; n \geq 1\}$  tais que seus autovetores correspondentes formam uma base de Riesz para  $Z$ . Se o fecho de  $\{\lambda_n; n \geq 1\}$  é totalmente desconexo, então chamamos  $A$  de operador espectral de Riesz.*

Lembrando que um conjunto  $B$  é totalmente desconexo se os únicos subconjuntos conexos de  $B$  são os formados por um único ponto.

**Teorema 3.19** *Seja  $A$  um operador espectral de Riesz, com autovalores simples  $\{\lambda_n; n \geq 1\}$  e autovetores correspondentes  $\{\phi_n; n \geq 1\}$ . Sejam  $\{\psi_n; n \geq 1\}$  os autovetores de  $A^*$  tais que  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}$ . Então,  $A$  satisfaz as seguintes propriedades:*

(a)  $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$ ,  $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n; n \geq 1\}}$  e mais, para  $\lambda \in \rho(A)$ ,

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n;$$



(b)  $A$  pode ser representado por

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \quad z \in D(A),$$

$$\text{onde } D(A) = \{z \in Z; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle z, \psi_n \rangle|^2 < \infty\};$$

(c)  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo se, e somente se,  $\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$ . Além disso,  $\{S(t); t \geq 0\}$  é dado por

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \cdot, \psi_n \rangle \phi_n, \quad t \geq 0.$$

**Demonstração:** Faremos a demonstração de cada item acima separadamente.

(a) Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| \geq \alpha > 0$ . Mostraremos que  $A_\lambda z = (\lambda I - A)^{-1} z$ ,

$$\text{onde } A_\lambda z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n.$$

Note que  $A_\lambda$  é limitado pois, dado  $z \in Z$ ,

$$\begin{aligned} \|A_\lambda z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\|^2 \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle z, \psi_n \rangle|^2}{|\lambda - \lambda_n|^2} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle z, \psi_n \rangle|^2}{\alpha^2} \\ &= \frac{M}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \frac{M}{m\alpha^2} \|z\|^2. \end{aligned}$$

Seja  $y_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ . Então,  $y_N \rightarrow A_\lambda z$  quando  $N \rightarrow \infty$  e, como  $\phi_n$  é autovetor associado a  $\lambda_n$ , temos

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)y_N &= (\lambda I - A) \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\langle z, \psi_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} (\lambda I - A)\phi_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \frac{\langle z, \psi_n \rangle}{\lambda - \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^N \langle z, \psi_n \rangle \phi_n.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.16, quando  $N \rightarrow \infty$ ,  $(\lambda I - A)y_N \rightarrow z$ .

Logo, como  $(\lambda I - A)$  é um operador fechado, segue que  $A_\lambda z \in D(A)$  e  $(\lambda I - A)A_\lambda z = z$ , para todo  $z \in Z$ .

Agora, suponha que  $y \in D(A)$  e seja  $x = (\lambda I - A)y$ . Por outro lado, temos também que  $x = (\lambda I - A)A_\lambda x$  e portanto,  $x = (\lambda I - A)A_\lambda(\lambda I - A)y$ . Subtraindo  $x$  de ambos os lados desta igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda I - A)A_\lambda(\lambda I - A)y - x = (\lambda I - A)A_\lambda(\lambda I - A)y - (\lambda I - A)y \\
&= (\lambda I - A)[A_\lambda(\lambda I - A)y - y].
\end{aligned}$$

Como  $\lambda$  não é autovalor de  $A$ ,

$$\lambda(A_\lambda(\lambda I - A)y - y) \neq A(A_\lambda(\lambda I - A)y - y).$$

Logo,  $A_\lambda(\lambda I - A)y - y = 0$ , ou seja,  $A_\lambda(\lambda I - A)y = y$ , para todo  $y \in D(A)$ .

Portanto,  $\lambda \in \rho(A)$  e  $A_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ . Consequentemente,  $\{\lambda \in \mathbb{C}; \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\} \subset \rho(A)$ .

Para a outra inclusão note que, como  $\lambda_n \in \sigma(A)$  e o espectro de um operador fechado é fechado,

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}^c \subset \overline{\{\lambda_n; n \geq 1\}} \subset \overline{\sigma(A)} = \sigma(A) = \rho(A)^c.$$

Assim, completamos a demonstração do item (a).

(b) Seja  $S = \{z \in Z; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \langle z, \psi_n \rangle|^2 < \infty\}$ . Mostraremos, primeiramente, que  $S \subset D(A)$  e que  $Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ , para todo  $z \in S$ . Dado  $z \in S$ , defina  $z_N := \sum_{n=1}^N \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ . Dessa forma,  $z_N \rightarrow z$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Note

ainda que

$$Az_N = \sum_{n=1}^N \langle z, \psi_n \rangle A\phi_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n,$$

e assim,  $Az_N \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Logo, como  $A$

é fechado,  $z \in D(A)$  e  $Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ . Portanto,  $S \subset D(A)$  e

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \text{ para todo } z \in S.$$

Mostraremos agora a outra inclusão, isto é,  $D(A) \subset S$ . Seja  $x \in D(A)$ . Dado  $\lambda \in \rho(A)$ , consideremos  $y = (\lambda I - A)x$ . Pelo item (a) deste teorema e pelo Lema 3.16, respectivamente, segue que

$$x = (\lambda I - A)^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \psi_n \rangle \phi_n \text{ e } x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n \rangle \phi_n.$$

Então, pela unicidade da representação na base de Riesz, temos

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \psi_n \rangle = \langle x, \psi_n \rangle.$$

Além disso, como  $\mu = \inf_{n \geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, \psi_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^2 |\langle y, \psi_n \rangle|^2}{|\lambda - \lambda_n|^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} - 1 \right|^2 |\langle y, \psi_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{m} \left[ \frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right]^2 \|y\|^2 < \infty, \end{aligned}$$

o que implica que  $x \in S$ .

Portanto,  $D(A) = S$  e  $Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ , para todo  $z \in D(A)$ .

(c) ( $\implies$ ) Suponha que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \geq 0\}$ . Então, existem  $M \geq 1$  e  $w > 0$  tais que  $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$  para todo  $t \geq 0$ . Como consequência do Teorema de Hille-Yosida, se  $\lambda$  é tal que  $\operatorname{Re}(\lambda) > w$ ,

então  $\lambda \in \rho(A)$ . Dessa forma, visto que  $\lambda_n \in \sigma(A)$  para  $n \geq 1$ ,  $\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que  $\sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$ . Seja  $w = \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n)$  e tomemos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(\lambda) > \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n)$ . Assim,  $\lambda \notin \sigma(A)$  e portanto, pelo item (a),

$$(\lambda I - A)^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \text{ para todo } z \in Z.$$

Fazendo uma iteração, na igualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle (\lambda I - A)^{-1}z, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_m} \langle z, \psi_m \rangle \phi_m, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \langle z, \psi_n \rangle \langle \phi_n, \psi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n. \end{aligned}$$

Usando um processo indutivo obtemos que, para todo  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$(\lambda I - A)^{-r}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^r} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-r}z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle z, \psi_n \rangle \phi_n}{(\lambda - \lambda_n)^r} \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\langle z, \psi_n \rangle}{(\lambda - \lambda_n)^r} \right|^2 \\ &= M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle z, \psi_n \rangle|^2}{|(\lambda - \lambda_n)^{2r}|} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle z, \psi_n \rangle|^2}{|(Re\lambda - w)^{2r}|} \\ &\leq \frac{M\|z\|^2}{m(Re\lambda - w)^{2r}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-r}z\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{\|z\|}{(Re\lambda - w)^r}.$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida,  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \geq 0\}$ , com  $\|S(t)\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} e^{wt}$ ,  $t \geq 0$ .

Por fim, iremos determinar, explicitamente, o semigrupo gerado por  $A$ . Definamos o operador  $e^{At}$  por

$$e^{At}z := \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \text{ para todo } z \in Z.$$

Note que, como  $w = \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{At}z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle|^2 \\ &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} e^{2w t} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \frac{M}{m} e^{2w t} \|z\|^2 \end{aligned}$$

e assim,  $e^{At}$  é limitado.

Mais ainda, para  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re} \lambda > w$ , podemos aplicar a Transformada de Laplace em  $e^{At}$ , obtendo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{At} z dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \int_0^{\infty} e^{(\lambda_n - \lambda)t} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle z, \psi_n \rangle \phi_n}{\lambda - \lambda_n} \\ &= (\lambda I - A)^{-1} z \\ &= R(\lambda : A) z. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hille-Yosida,

$$R(\lambda : A) z = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) z dt,$$

onde  $\{S(t); t \geq 0\}$  é o semigrupo gerado por  $A$ .

Logo,  $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [e^{At} z - S(t) z] dt = 0$  e assim, pela unicidade da Transformada

de Laplace, segue que

$$S(t)z = e^{At}z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \quad \forall z \in Z, \quad \forall t \geq 0.$$

■

Agora que já conhecemos alguns resultados da teoria de semigrupos, estamos aptos a estudar o problema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais descritas de forma abstrata. Antes porém, vejamos uma motivação para o desenvolvimento desta teoria.

Consideremos o problema da distribuição de temperatura em uma barra de metal de comprimento  $\pi$ . Vamos assumir que as extremidades da barra permaneçam com a mesma temperatura e que a barra é aquecida por uma fonte de calor. Este problema é descrito pela equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, \xi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t, \xi)}{\partial \xi^2} + g(t, \xi), & (t, \xi) \in (0, \infty) \times (0, \pi), \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, & t \geq 0, \\ w(0, \xi) = x(\xi), & 0 \leq \xi \leq \pi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Sejam  $Z = L^2([0, \pi]) = \left\{ h : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}; \int_0^\pi |h(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$  e  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  o operador  $Az = z''$ , com  $D(A) = \{z \in Z; z'' \in Z, z(0) = z(\pi) = 0\}$ . Para cada  $t \geq 0$ , definimos a função  $v : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $v(t) = w(t, \cdot)$ , isto é,  $v(t)(\xi) = w(t, \xi)$ , para todo  $\xi \in [0, \pi]$ . Definimos também, para cada  $t \geq 0$ , a função  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(t) = g(t, \cdot)$ .

Dessa forma, podemos reescrever a equação (3.8) na forma abstrata

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), & t \geq 0, \\ v(0) = x. \end{cases} \quad (3.9)$$

Além disso, sabemos que  $A$  é fechado, auto-adjunto e um operador espectral de Riesz (ver Apêndice B). Portanto, do Teorema 3.19, segue que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo.

Este tipo de equação nos leva ao estudo de equações abstratas. O problema que

estudaremos é mais geral que a equação (3.9) e pode ser descrito na forma

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), & t > 0, \\ v(0) = x \in E, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$ ,  $E$  é um espaço de Banach e  $f : [0, \infty) \times E \rightarrow E$  é uma função contínua.

**Definição 3.20** *Uma função  $w : [0, \infty) \rightarrow E$  é dita ser solução (clássica) de (3.10) em  $[0, \infty)$  se  $w$  é contínua em  $[0, \infty)$ , continuamente diferenciável em  $(0, \infty)$ ,  $w(t) \in D(A)$  para todo  $t \in [0, \infty)$  e  $w$  satisfaz (3.10).*

Se  $w$  é uma solução de (3.10) em  $[0, \infty)$  então,  $w$  satisfaz a equação integral

$$w(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s, w(s))ds, \quad t \in [0, \infty). \quad (3.11)$$

Por outro lado, se  $w$  é uma função que satisfaz a equação (3.11) então,  $w$  é contínua. Porém, não podemos garantir que  $w$  seja continuamente diferenciável. Assim, é natural considerarmos este tipo de função como um solução generalizada de (3.10).

**Definição 3.21** *Uma função contínua  $u : [0, \infty) \rightarrow E$  é dita ser solução fraca de (3.10) se satisfaz a equação integral (3.11).*

**Observação 3.22** *Em [2], Ball demonstra que uma solução da equação integral (3.11) é, de fato, uma solução no sentido fraco (através do espaço dual).*

O próximo resultado nos fornece condições para que o problema de valor inicial (3.10) possua uma solução fraca.

**Teorema 3.23** *Suponha que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$  – semigrupo  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  e  $f : [0, \infty) \times E \rightarrow E$  é uma função contínua em  $[0, \infty) \times E$  e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe  $L > 0$  tal que*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_E \leq L\|u - v\|_E, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \forall u, v \in E.$$

*Então, o problema de valor inicial (3.10) possui uma única solução fraca em  $[0, \infty)$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.5 e pelo fato de  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  ser um  $C_0$ -semigrupo, existem  $M \geq 1$  e  $w \geq 0$  tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M e^{tw}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Provaremos o resultado para o intervalo  $[0, \tau]$ , onde  $\tau > 0$  é arbitrário. Assim, da unicidade de solução e do Lema de Zorn, obtemos uma solução (única) em  $[0, \infty)$ .

Dado  $\tau > 0$ , consideremos o espaço  $C([0, \tau], E)$  das funções contínuas de  $[0, \tau]$  em  $E$ , com a norma

$$\|u\|_{\tilde{L}} = \max_{t \in [0, \tau]} e^{-(\tilde{L}+w)t} \|u(t)\|_E, \quad u \in C([0, \tau], E),$$

onde  $\tilde{L} > ML > 0$ .

Observe que a norma  $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$  é equivalente a norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ , onde

$$\|u\|_{\infty} = \max_{t \in [0, \tau]} \|u(t)\|_E, \quad u \in C([0, \tau], E).$$

De fato, como  $t \rightarrow e^{-(\tilde{L}+w)t}$  é decrescente,

$$e^{-(\tilde{L}+w)\tau} \|u(t)\|_E \leq e^{-(\tilde{L}+w)t} \|u(t)\|_E \leq \|u(t)\|_E, \quad \forall t \in [0, \tau],$$

e então,

$$\max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+w)\tau} \|u(t)\|_E\} \leq \max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+w)t} \|u(t)\|_E\} \leq \max_{t \in [0, \tau]} \|u(t)\|_E,$$

ou seja,

$$e^{-(\tilde{L}+w)\tau} \|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{\tilde{L}} \leq \|u\|_{\infty}.$$

Dessa forma,  $C([0, \tau], E)$  é um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$ .

Agora, consideremos o operador  $T : C([0, \tau], E) \rightarrow C([0, \tau], E)$  definido por

$$Tu(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Mostraremos, primeiramente, que  $T$  está bem definido, ou seja,  $T$  leva  $C([0, \tau], E)$  em  $C([0, \tau], E)$ . Para isso, dado  $u \in C([0, \tau], E)$ , note que a função  $s \mapsto f(s, u(s))$  é contínua em  $[0, \tau]$  e assim, integrável em  $[0, t]$ , para todo  $t \in (0, \tau]$ . Logo, da Proposição 3.6, concluímos que  $t \mapsto \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds$  é contínua em  $[0, \tau]$ .



Além disso, visto que  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  é um  $C_0$ -semigrupo,  $t \mapsto S(t)x$  é contínua em  $[0, \tau]$  e assim,  $Tu$  é uma função contínua de  $[0, \tau]$  em  $E$ . Portanto,  $T$  está bem definido.

Nosso próximo passo é mostrar que  $T$  é uma contração. Dados  $u, v \in C([0, \tau], E)$  e  $t \in [0, \tau]$ , note que

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E &= \left\| \int_0^t S(t-s)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds \right\|_E \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s)\| \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_E ds \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned} e^{-(\tilde{L}+w)t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E &\leq e^{-(\tilde{L}+w)t} \int_0^t \|S(t-s)\| \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_E ds \\ &\leq e^{-(\tilde{L}+w)t} \int_0^t M e^{(t-s)w} L \|u(s) - v(s)\|_E ds \\ &= e^{-(\tilde{L}+w)t} \int_0^t M e^{tw} e^{-sw} L \|u(s) - v(s)\|_E ds \\ &= e^{-(\tilde{L}+w)t} M L e^{tw} \int_0^t e^{-sw} \|u(s) - v(s)\|_E ds \\ &= M L e^{-\tilde{L}t} \int_0^t e^{-sw} e^{(\tilde{L}+w)s} e^{-(\tilde{L}+w)s} \|u(s) - v(s)\|_E ds \\ &\leq M L e^{-\tilde{L}t} \|u - v\|_{\tilde{L}} \int_0^t e^{-sw} e^{(\tilde{L}+w)s} ds \\ &= M L e^{-\tilde{L}t} \left( \frac{e^{\tilde{L}t}}{\tilde{L}} - \frac{1}{\tilde{L}} \right) \|u - v\|_{\tilde{L}} \\ &= \frac{M L}{\tilde{L}} (1 - e^{-\tilde{L}t}) \|u - v\|_{\tilde{L}} \\ &\leq \frac{M L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\max_{t \in [0, \tau]} \{e^{-(\tilde{L}+w)t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E\} \leq \frac{M L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}},$$

isto é,

$$\|Tu - Tv\|_{\tilde{L}} \leq \frac{M L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}},$$

com  $\frac{M L}{\tilde{L}} < 1$ , pois  $\tilde{L}$  foi tomado de modo que  $\tilde{L} > M L$ .

Portanto,  $T$  é uma contração e pelo Teorema do ponto fixo de Banach,  $T$  tem um único ponto fixo  $u \in C([0, \tau], E)$ , ou seja, existe uma única função contínua  $u : [0, \tau] \longrightarrow E$  tal que

$$u(t) = Tu(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Consequentemente, o problema de valor inicial (3.10) possui uma única solução fraca. ■

### 3.3 Equações diferenciais funcionais com retardo

Nesta seção apresentaremos algumas definições básicas e alguns resultados sobre equações diferenciais funcionais com retardo (EDFR). Em particular, apresentaremos condições que garantam existência e unicidade de solução para problemas deste tipo.

Sejam  $r > 0$ ,  $E$  um espaço de Banach e  $C([a, b], E)$  o espaço das funções contínuas de  $[a, b]$  em  $E$ , com a norma da convergência uniforme. Denotaremos por  $C$  o conjunto  $C([-r, 0], E)$ , com a norma

$$\|\phi\|_\infty = \max_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|_E, \quad \phi \in C.$$

Dados  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$  e  $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], E)$ , para todo  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ , definimos  $x_t : [-r, 0] \longrightarrow E$  por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Note que  $x_t \in C$ ,  $\forall t \in [\sigma, \sigma + A]$ . A função  $x_t$  é chamado a história de  $x$  em  $t$ .

Nosso objetivo é estudar o problema de existência e unicidade de solução para equações diferenciais com retardo finito descritas na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t \geq \sigma \\ x_\sigma = \phi, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in C$  e  $f : D \subset \mathbb{R} \times C \longrightarrow E$  é contínua.

**Definição 3.24** Uma função  $u : [\sigma - r, \sigma + A] \longrightarrow E$  é dita ser solução da equação (3.12) em  $[\sigma - r, \sigma + A]$  se existe  $A > 0$  tal que  $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], E)$ ,  $(t, u_t) \in D$ ,  $\forall t \in [\sigma, \sigma + A]$ ,  $u(t)$  satisfaz a equação  $u'(t) = f(t, u_t)$  para  $t \in [\sigma, \sigma + A]$  e  $u_\sigma(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-r, 0]$ .

**Lema 3.25** Se  $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], E)$ , para algum  $\alpha \geq 0$ , então  $t \longmapsto x_t$  é contínua para todo  $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$ .

**Demonstração:** Visto que  $x$  é contínua no compacto  $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ ,  $x$  é uniformemente contínua e assim, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x(t) - x(\tau)\|_E < \varepsilon$  para todo  $t, \tau \in [\sigma - r, \sigma + \alpha]$ , com  $|t - \tau| < \delta$ .

Dessa forma, dado  $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$ , seja  $\tau \in [\sigma, \sigma + \alpha]$  tal que  $|t - \tau| < \delta$ . Então,  $(t + \theta), (\tau + \theta) \in [\sigma - r, \sigma + \alpha]$  e  $|(t + \theta) - (\tau + \theta)| < \delta$ , para todo  $\theta \in [-r, 0]$ .

Logo,

$$\|x_t(\theta) - x_\tau(\theta)\|_E = \|x(t + \theta) - x(\tau + \theta)\|_E < \varepsilon, \quad \forall \theta \in [-r, 0].$$

Consequentemente,  $\|x_t - x_\sigma\|_\infty = \max_{\theta \in [-r, 0]} \|x_t(\theta) - x_\sigma(\theta)\|_E < \varepsilon$ , implicando que  $t \longmapsto x_t$  é contínua em  $[\sigma, \sigma + \alpha]$ . ■

**Lema 3.26** Se  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in C$  e  $f : D \subset \mathbb{R} \times C \longrightarrow E$  é contínua, então  $u$  é solução de (3.12) em  $[\sigma - r, \sigma + A]$ , para algum  $A \geq 0$ , se, e somente se,  $u$  é contínua em  $[\sigma - r, \sigma + A]$ ,  $(t, u_t) \in D$ ,  $\forall t \in [\sigma, \sigma + A]$ , e satisfaz a equação integral

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, & \sigma \leq t \leq \sigma + A, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases} \quad (3.13)$$

**Demonstração:** ( $\implies$ ) Seja  $u$  solução da equação diferencial (3.12). Então, existe  $A \geq 0$  tal que  $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], E)$ . Pelo lema anterior,  $s \longmapsto u_s$  é contínua para todo  $s \in [\sigma, \sigma + A]$ . Assim, como  $f$  é contínua, a aplicação  $s \longmapsto f(s, x_s)$  é contínua em  $[\sigma, t]$ ,  $\forall t \in [\sigma, \sigma + A]$ .

Logo, integrando a primeira equação de (3.12) de  $\sigma$  até  $t$  e usando o Teorema fundamental do cálculo, temos

$$u(t) - u(\sigma) = \int_\sigma^t f(s, u_s) ds.$$

Portanto, para todo  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ ,

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\sigma(0) + \int_\sigma^t f(s, u_s) ds \\ &= \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, u_s) ds, \end{aligned}$$

satisfazendo a equação (3.13).

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, suponha que  $u \in C([\sigma - r, \sigma + A], E)$ ,  $(t, u_t) \in D$ ,  $\forall [\sigma, \sigma + A]$  e  $u$  satisfaz a equação (3.13). Então,

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, u_s) ds \right],$$

e, pelo Teorema fundamental do cálculo,

$$u'(t) = f(t, u_t), \quad \forall t \in [\sigma, \sigma + A].$$

Dessa forma,  $u$  é solução de (3.12). ■

O próximo resultado garante a existência e a unicidade de solução para (3.12). Para simplificar as contas da demonstração iremos considerar  $\sigma = 0$ . O caso  $\sigma \neq 0$  segue de modo análogo.

**Teorema 3.27** *Seja  $f : [0, R] \times C \longrightarrow E$ , com  $R > 0$ , uma função contínua em  $[0, R] \times C$  e lipschitziana na segunda variável, isto é, existe  $L > 0$  tal que*

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|_E \leq L \|\varphi - \psi\|_\infty, \quad \forall (t, \varphi), (t, \psi) \in [0, R] \times C.$$

*Se  $\phi \in C$ , então existe uma única solução em  $C([-r, R], E)$  para a equação (3.12).*

**Demonstração:** Analogamente ao que fizemos nos outros teoremas de existência, consideremos em  $C([-r, R], E)$  a norma

$$\|u\|_{\tilde{L}} = \max_{t \in [-r, R]} e^{-\tilde{L}t} \|u(t)\|_E, \quad u \in C([-r, R], E),$$

onde  $\tilde{L}$  é uma constante positiva tal que  $\tilde{L} > L$ . Note que  $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$  é equivalente à

norma  $\|\cdot\|_\infty$ , pois

$$e^{-\tilde{L}R}\|u(t)\|_E \leq e^{-\tilde{L}t}\|u(t)\|_E \leq e^{-\tilde{L}(-r)}\|u(t)\|_E, \quad \forall t \in [-r, R],$$

o que implica que,

$$e^{-\tilde{L}R}\|u\|_\infty \leq \|u\|_{\tilde{L}} \leq e^{-\tilde{L}(-r)}\|u\|_\infty.$$

Dessa forma,  $C([-r, R], E)$  é um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_{\tilde{L}}$ .

Definamos agora o operador  $T : C([-r, R], E) \longrightarrow C([-r, R], E)$  por

$$\begin{cases} Tu(t) = \phi(t), & t \in [-r, 0], \\ Tu(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, u_s)ds, & t \in [0, R]. \end{cases}$$

Mostraremos que  $T$  está bem definido, isto é, mostraremos que para todo  $u \in C([-r, R], E)$ ,  $Tu \in C([-r, R], E)$ . Dado  $u \in C([-r, R], E)$ , note que  $Tu = \phi$  em  $[-r, 0]$ , com  $\phi \in C([-r, 0], E)$ , e  $Tu(0) = \phi(0)$ . Então, basta verificarmos que  $Tu$  é contínua em  $[0, R]$ . Pelo Lema 3.25, a aplicação  $t \longmapsto (t, u_t)$  é contínua em  $[0, R]$ . Logo,  $t \longmapsto f(t, u_t)$  também é contínua em  $[0, R]$  e portanto, existe  $N_u > 0$  tal que  $\|f(t, u_t)\|_E \leq N_u$ , para todo  $t \in [0, R]$ . Desse modo, para  $t, t' \in [0, R]$ , com  $t' \geq t$ , temos

$$\begin{aligned} \|Tu(t') - Tu(t)\|_E &= \left\| \int_0^{t'} f(s, u_s)ds - \int_0^t f(s, u_s)ds \right\|_E \\ &= \left\| \int_0^t f(s, u_s)ds + \int_t^{t'} f(s, u_s)ds - \int_0^t f(s, u_s)ds \right\|_E \\ &\leq \int_t^{t'} \|f(s, u_s)\|_E ds \\ &\leq N_u(t' - t). \end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo  $t' \longrightarrow t$  obtemos que  $Tu(t') \longrightarrow Tu(t)$ , garantindo que  $Tu$  é contínua para todo  $t \in [0, R]$ . Portanto  $T$  leva  $C([-r, R], E)$  em  $C([-r, R], E)$ .

Mostraremos também que  $T$  é uma contração em  $(C([-r, R], E), \|\cdot\|_{\tilde{L}})$ . Primeiramente, observe que para  $u, v \in C([-r, R], E)$

$$\max_{t \in [-r, 0]} e^{-\tilde{L}t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E = \max_{t \in [-r, 0]} e^{-\tilde{L}t} \|\phi(t) - \phi(t)\|_E = 0$$

e assim,

$$\|Tu - Tv\|_{\tilde{L}} = \max_{t \in [-r, R]} e^{-\tilde{L}t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E = \max_{t \in [0, R]} e^{-\tilde{L}t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E.$$

Além disso, para  $t \in [0, R]$ ,

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{L}t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E &= e^{-\tilde{L}t} \left\| \int_0^t f(s, u_s) ds - \int_0^t f(s, v_s) ds \right\|_E \\ &\leq e^{-\tilde{L}t} \int_0^t \|f(s, u_s) - f(s, v_s)\| ds \\ &\leq e^{-\tilde{L}t} \int_0^t L \|u_s - v_s\|_\infty ds \\ &= e^{-\tilde{L}t} L \int_0^t \max_{\tau \in [-r, 0]} \|u_s(\tau) - v_s(\tau)\|_E ds \\ &= e^{-\tilde{L}t} L \int_0^t e^{\tilde{L}s} e^{-\tilde{L}s} \max_{\tau \in [-r, 0]} \|u(s + \tau) - v(s + \tau)\|_E ds \\ &= e^{-\tilde{L}t} L \int_0^t e^{\tilde{L}s} \max_{\tau \in [-r, 0]} e^{\tilde{L}\tau} e^{-\tilde{L}(s+\tau)} \|u(s + \tau) - v(s + \tau)\|_E ds \\ &\leq e^{-\tilde{L}t} L \int_0^t e^{\tilde{L}s} \max_{\tau \in [-r, 0]} e^{-\tilde{L}(s+\tau)} \|u(s + \tau) - v(s + \tau)\|_E ds \\ &\leq e^{-\tilde{L}t} L \int_0^t e^{\tilde{L}s} \max_{\xi \in [-r, R]} e^{-\tilde{L}\xi} \|u(\xi) - v(\xi)\|_E ds \\ &= e^{-\tilde{L}t} L \|u - v\|_{\tilde{L}} \int_0^t e^{\tilde{L}s} ds \\ &= L e^{-\tilde{L}t} \left( \frac{e^{\tilde{L}t}}{\tilde{L}} - \frac{1}{\tilde{L}} \right) \|u - v\|_{\tilde{L}} \\ &= \frac{L}{\tilde{L}} (1 - e^{-\tilde{L}t}) \|u - v\|_{\tilde{L}} \\ &\leq \frac{L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\max_{t \in [0, R]} e^{-\tilde{L}t} \|Tu(t) - Tv(t)\|_E \leq \frac{L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}}$$

e consequentemente,

$$\|Tu - Tv\|_{\tilde{L}} \leq \frac{L}{\tilde{L}} \|u - v\|_{\tilde{L}},$$

com  $\frac{L}{\tilde{L}} < 1$ .

Portanto,  $T$  é uma contração.

Finalmente, pelo Teorema do ponto fixo de Banach,  $T$  tem um único ponto fixo  $u$  em  $C([-r, R], E)$ , isto é, existe uma única função  $u \in C([-r, R], E)$  tal que

$$\begin{cases} u_0(t) = (Tu)_0(t) = Tu(t) = \phi(t), & t \in [-r, 0], \\ u(t) = Tu(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, u_s) ds, & t \in [0, R]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Então, pelo Lema 3.26,  $u$  é a única solução da equação diferencial (3.12). ■

### 3.4 Equações de evolução com retardo

Assim como no caso das equações sem retardo, discutiremos o problema de existência e unicidade de solução fraca para equações de evolução abstratas com retardo finito. Como motivação, começamos apresentando um modelo epidemiológico SIR, onde o tempo de incubação dos agentes contagiosos apresenta um retardo.

Em modelos SIR, dividimos a população em três classes disjuntas: *suscetíveis*, *infectantes* e *recuperados*. A classe dos elementos suscetíveis consiste dos indivíduos que ainda não foram infectados pela doença, a classe dos infectantes consiste dos indivíduos infectados pela doença e que podem transmiti-la para outros, e a classe dos recuperados consiste de todos os indivíduos que se recuperaram da infecção e adquiriram imunidade à doença.

Como estas classes variam com o tempo, denotaremos por  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  o número de membros da população nas classes suscetíveis, infectantes e recuperados no tempo  $t \geq 0$ , respectivamente. Em particular, no modelo que apresentaremos, consideraremos o tamanho populacional constante, ou seja,  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ , para todo  $t \geq 0$ , e denotaremos por  $s(t) = \frac{S(t)}{N}$ ,  $i(t) = \frac{I(t)}{N}$  e  $r(t) = \frac{R(t)}{N}$  a proporção de indivíduos da população em cada classe.

Seja  $\tau > 0$  o tempo durante o qual os agentes contagiosos (geralmente um vírus) desenvolvem-se no vetor (indivíduo infectado). Somente após este tempo os vetores infectados podem infectar um indivíduo suscetível, ou seja,  $\tau$  é o tempo de incubação dos agentes contagiosos. Em nosso modelo, consideraremos que o tempo de incubação não é o mesmo para toda a população de vetores, mas sim um parâmetro distribuído sobre o intervalo  $[0, h]$ , onde  $h$  é o limite superior do tempo de incubação na população de vetores. Note que a escolha do limite do tempo de incubação é biologicamente justificável.

Consideremos então o modelo SIR, com tamanho populacional constante, descrito pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\beta s(t) \int_0^h f(\tau) i(t-\tau) d\tau - \mu s(t) + \mu, \\ \frac{di(t)}{dt} = \beta s(t) \int_0^h f(\tau) i(t-\tau) d\tau - \mu i(t) - \lambda i(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} = \lambda i(t) - \mu r(t), \end{cases} \quad (3.15)$$

onde  $\mu$  é a taxa de mortalidade e natalidade das três classes,  $\lambda$  é a taxa de recuperação diária,  $\beta$  é o número médio de contatos por infectantes por dia e  $f$  é a função de distribuição dos tempos de incubação entre os vetores, isto é,  $f(\tau)$  é a fração da população de vetores para os quais o tempo necessário para se tornar contagioso é  $\tau$ . Assumiremos também que a função  $f$  é não negativa e contínua em  $[0, h]$ .

Tomemos o espaço de Banach  $C([-h, 0], \mathbb{R}^3)$ , com a norma da convergência uniforme, e fixemos uma condição inicial  $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^3)$  para o modelo (3.15).

Sejam  $w(t) = (s(t), i(t), r(t))^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall t \in [-h, \infty)$ , e  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear limitado dado por

$$Aw(t) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \\ r(t) \end{pmatrix}.$$

Note que, como  $A$  é um operador linear limitado,  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. Em particular, de um  $C_0$ -semigrupo.

Além disso, considere  $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times C([-h, 0], \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$F(t, x, \varphi) = \begin{pmatrix} -\beta x_1 \int_0^h f(\tau) \varphi_2(-\tau) d\tau + \mu \\ \beta x_1 \int_0^h f(\tau) \varphi_2(-\tau) d\tau \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta))$ ,  $\forall \theta \in [-h, 0]$ .

Dessa forma, o modelo SIR (3.15), com condição inicial  $\phi$ , pode ser descrito pela



equação diferencial abstrata

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) + F(t, w(t), w_t), & t \geq 0, \\ w_0 = \phi, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo.

Logo, é conveniente procurarmos condições que garantam existência e unicidade de soluções para equações abstratas da forma (3.16).

Consideremos então o problema abstrato,

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + F(t, x(t), x_t), & t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $E$  é um espaço de Banach,  $\phi \in C = C([-r, 0], E)$ ,  $r > 0$ ,  $A$  é o gerador infinitesimal do  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  e  $F : [\sigma, \infty) \times E \times C \rightarrow E$  é uma função contínua.

**Definição 3.28** *Uma função contínua  $u : [\sigma - r, \sigma + R] \rightarrow E$  é chamada de solução fraca do problema (3.17) se satisfaz a equação integral*

$$\begin{cases} u(t) = S(t - \sigma)\phi(0) + \int_\sigma^t S(t - s)F(s, u(s), u_s)ds, & t \in [\sigma, \sigma + R], \\ u_\sigma = \phi. \end{cases} \quad (3.18)$$

A seguir apresentaremos condições para que o problema (3.17) possua uma única solução fraca.

**Teorema 3.29** *Seja  $F : [\sigma, \sigma + R] \times E \times C \rightarrow E$  uma função contínua, com  $R > 0$ , e lipschitziana com relação a segunda e a terceira variáveis, ou seja, existem  $L, K > 0$  tais que*

$$\|F(t, x, \psi) - F(t, y, \varphi)\|_E \leq L\|x - y\|_E + K\|\psi - \varphi\|_\infty,$$

$\forall (t, x, \psi), (t, y, \varphi) \in [\sigma, \sigma + R] \times E \times C$ . *Assuma que o semigrupo gerado por  $A$  satisfaz a condição,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{wt}$ , para  $t \geq 0$ , onde  $w$  é uma constante positiva. Então, dado  $\phi \in C$ , existe uma única solução fraca para (3.17) em  $[\sigma - r, \sigma + R]$ .*

**Demonstração:** Provaremos este resultado usando diretamente o método das aproximações sucessivas. Primeiramente, fixando  $w \in C([\sigma - r, \sigma + R], E)$ , em

virtude da continuidade das funções  $F$  e  $s \mapsto w_s$ , e do fato de  $\{S(t); t \in [0, \infty)\}$  ser um  $C_0$ -semigrupo, obtemos que a função  $s \mapsto S(t-s)F(s, w(s), w_s)$  é contínua em  $[\sigma, t]$ , para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ .

Dessa forma, tomemos

$$u^0(t) = \begin{cases} \phi(t - \sigma), & \text{para } t \in [\sigma - r, \sigma], \\ S(t - \sigma)\phi(0), & \text{para } t \in [\sigma, \sigma + R], \end{cases}$$

e, para cada inteiro positivo  $n$ , definamos

$$u^n(t) = \begin{cases} \phi(t - \sigma), & \text{para } t \in [\sigma - r, \sigma], \\ S(t - \sigma)\phi(0) + \int_{\sigma}^t S(t-s)F(s, u^{n-1}(s), u_s^{n-1})ds, & \text{para } t \in [\sigma, \sigma + R]. \end{cases}$$

Como  $u^0$  é contínua em  $[\sigma - r, \sigma + R]$ , a função  $s \mapsto F(s, u^0(s), u_s^0)$  é contínua em  $[\sigma, \sigma + R]$  e assim, existe  $N > 0$  tal que  $\|F(s, u^0(s), u_s^0)\|_E \leq N$ , para todo  $s \in [\sigma, \sigma + R]$ .

Logo, para  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ ,

$$\begin{aligned} \|u^1(t) - u^0(t)\|_E &= \left\| S(t - \sigma)\phi(0) + \int_{\sigma}^t S(t-s)F(s, u^0(s), u_s^0)ds - S(t - \sigma)\phi(0) \right\|_E \\ &\leq \int_{\sigma}^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \|F(s, u^0(s), u_s^0)\|_E ds \\ &\leq \int_{\sigma}^t e^{w(t-s)} N ds \\ &\leq \int_{\sigma}^t e^{wR} N ds \\ &= Ne^{wR}(t - \sigma). \end{aligned}$$

Consequentemente, para  $\sigma \leq s \leq t$  e  $\theta \in [-r, 0]$ ,

$$\|u^1(s + \theta) - u^0(s + \theta)\|_E = \|\phi(s + \theta - \sigma) - \phi(s + \theta - \sigma)\|_E = 0, \text{ se } \sigma - r \leq s + \theta \leq \sigma,$$

e

$$\begin{aligned} \|u^1(s + \theta) - u^0(s + \theta)\|_E &\leq Ne^{wR}((s + \theta) - \sigma) \\ &\leq \max_{\theta \in [-r, 0]} \{Ne^{wR}((s + \theta) - \sigma)\} \\ &= Ne^{wR}(s - \sigma), \text{ se } \sigma \leq s + \theta \leq \sigma + R. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|u_s^1 - u_s^0\|_\infty &= \max_{\theta \in [-r, 0]} \{\|u^1(s + \theta) - u^0(s + \theta)\|_E\} \\ &\leq N e^{wR}(s - \sigma), \text{ para } \sigma \leq s \leq t.\end{aligned}$$

Agora, fazendo  $L + K = M$  e tomando  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ , temos

$$\begin{aligned}\|u^2(t) - u^1(t)\|_E &= \left\| \int_\sigma^t S(t-s) [F(s, u^1(s), u_s^1) - F(s, u^0(s), u_s^0)] \right\|_E ds \\ &\leq \int_\sigma^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \|F(s, u^1(s), u_s^1) - F(s, u^0(s), u_s^0)\|_E ds \\ &\leq \int_\sigma^t e^{w(t-s)} [L\|u^1(s) - u^0(s)\|_E + K\|u_s^1 - u_s^0\|_\infty] ds \\ &\leq \int_\sigma^t e^{wR} \left[ L \max_{\theta \in [-r, 0]} \{\|u^1(s + \theta) - u^0(s + \theta)\|_E\} + K\|u_s^1 - u_s^0\|_\infty \right] ds \\ &= e^{wR} \int_\sigma^t L\|u_s^1 - u_s^0\|_\infty + K\|u_s^1 - u_s^0\|_\infty ds \\ &= e^{wR} \int_\sigma^t M\|u_s^1 - u_s^0\|_\infty ds \\ &\leq e^{wR} \int_\sigma^t M N e^{wR}(s - \sigma) ds \\ &= N M e^{2wR} \frac{(t - \sigma)^2}{2}.\end{aligned}$$

Em geral, para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ ,

$$\|u^n(t) - u^{n-1}(t)\|_E \leq N M^{n-1} e^{nw(R)} \frac{(t - \sigma)^n}{n!}.$$

Pelo teste de D'Alembert, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} N M^{n-1} e^{nw(R)} \frac{(t - \sigma)^n}{n!}$  é convergente, para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ . Além disso, note que esta convergência é uniforme em  $[\sigma, \sigma + R]$ . Dessa forma, a sequência de funções  $(u^n)$  é uma sequência de Cauchy em  $C([\sigma - r, \sigma + R], E)$ .

Logo, existe  $u \in C([\sigma - r, \sigma + R], E)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u$ .

Mostremos agora que  $u(t)$  satisfaz a equação (3.18). Para isso, seja  $\gamma = (M R e^{wR} + 1)(N + 1)$ . Dado  $t \in [\sigma - r, \sigma]$ , por definição,  $u^n(t) = \phi(t - \sigma)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , o que implica que  $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(t) = \phi(t - \sigma)$ ,  $\forall t \in [\sigma - r, \sigma]$ .

Por outro lado, dado  $t \in [\sigma, \sigma + R]$  e  $\varepsilon > 0$ , seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u^n - u\|_\infty = \max_{t \in [\sigma-r, \sigma+R]} \{\|u^n(t) - u(t)\|_E\} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

e

$$\sum_{k=n}^{\infty} M^{k-1} e^{kwR} \frac{(t-\sigma)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{\gamma},$$

para todo  $n \geq n_0$ .

Logo, tomando  $t \in [\sigma, \sigma + R]$  e  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $n > m$  e  $m - 1 \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| u(t) - S(t-\sigma)\phi(0) - \int_{\sigma}^t S(t-s)F(s, u(s), u_s)ds \right\|_E \\ &= \left\| u(t) - u^{n+1}(t) + u^{n+1}(t) - S(t-\sigma)\phi(0) - \int_{\sigma}^t S(t-s)F(s, u(s), u_s)ds \right\|_E \\ &\leq \|u(t) - u^{n+1}(t)\|_E + \int_{\sigma}^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \|F(s, u^n(s), u_s^n) - F(s, u(s), u_s)\|_E ds \\ &\leq \|u(t) - u^{n+1}(t)\|_E + \int_{\sigma}^t e^{w(t-s)} M \|u_s^n - u_s\|_{\infty} ds \\ &= \|u(t) - u^{n+2}(t) + u^{n+2}(t) - u^{n+1}(t)\|_E + \int_{\sigma}^t e^{w(t-s)} M \|u_s^n - u_s^{n+1} + u_s^{n+1} - u_s\|_{\infty} ds \\ &\leq \|u(t) - u^{n+2}(t)\|_E + \|u^{n+2}(t) - u^{n+1}(t)\|_E \\ &\quad + e^{w(t-\sigma)} M \int_{\sigma}^t \|u_s^n - u_s^{n+1}\|_{\infty} + \|u_s^{n+1} - u_s\|_{\infty} ds \\ &\leq \|u(t) - u^m(t)\|_E + \dots + \|u^{n+2}(t) - u^{n+1}(t)\|_E \\ &\quad + e^{w(t-\sigma)} M \int_{\sigma}^t (\|u_s^n - u_s^{n+1}\|_{\infty} + \dots + \|u_s^{m-1} - u_s\|_{\infty}) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\gamma} + \dots + NM^{n+1} e^{(n+2)wR} \frac{(t-\sigma)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &\quad + e^{w(t-\sigma)} M \int_{\sigma}^t \left( NM^n e^{(n+1)wR} \frac{(s-\sigma)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq NM e^{wR}(t - \sigma) \left[ M^n e^{(n+1)wR} \frac{(t - \sigma)^{(n+1)}}{(n + 1)!} + \dots \right] \\
&\quad + \left[ NM^{(n+1)} e^{(n+2)wR} \frac{(t - \sigma)^{n+2}}{(n + 2)!} + \dots \right] + \frac{\varepsilon}{\gamma} + e^{wR} MR \frac{\varepsilon}{\gamma} \\
&= NM e^{wR}(t - \sigma) \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} M^{k-1} e^{kwR} \frac{(t - \sigma)^k}{k!} \right) \\
&\quad + N \left( \sum_{p=n+2}^{\infty} M^{p-1} e^{pwR} \frac{(t - \sigma)^p}{p!} \right) + \frac{\varepsilon}{\gamma} + e^{wR} MR \frac{\varepsilon}{\gamma} \\
&\leq NM e^{wR}(t - \sigma) \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} M^{k-1} e^{kwR} \frac{(t - \sigma)^k}{k!} \right) \\
&\quad + N \left( \sum_{p=n+1}^{\infty} M^{p-1} e^{pwR} \frac{(t - \sigma)^p}{p!} \right) + \frac{\varepsilon}{\gamma} + e^{wR} MR \frac{\varepsilon}{\gamma} \\
&= [1 + M e^{wR}(t - \sigma)] N \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} M^{k-1} e^{kwR} \frac{(t - \sigma)^k}{k!} \right) + \frac{\varepsilon}{\gamma} + M R e^{wR} \frac{\varepsilon}{\gamma} \\
&\leq (1 + M e^{wR}(t - \sigma)) N \frac{\varepsilon}{\gamma} + \frac{\varepsilon}{\gamma} + M R e^{wR} \frac{\varepsilon}{\gamma} \\
&\leq (N + N M e^{wR} R + 1 + M R e^{wR}) \frac{\varepsilon}{\gamma} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

garantindo que  $u(t) = S(t - \sigma)\phi(0) + \int_{\sigma}^t S(t - s)F(s, u(s), u_s)ds$ , para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ .

Dessa forma, garantimos que o problema (3.17) possui uma solução fraca em  $[\sigma - r, \sigma + R]$ . Mostraremos ainda que esta solução é única.

Suponhamos, por absurdo, que  $v(\cdot)$  também é uma solução fraca de (3.17) em  $[\sigma - r, \sigma + R]$ . Note que, para  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ , as funções  $u$  e  $v$  são

contínuas e assim,  $t \mapsto F(t, v(t), v_t) - F(t, u(t), u_t)$  também é contínua, com  $\max_{t \in [\sigma, \sigma+R]} \{\|F(t, v(t), v_t) - F(t, u(t), u_t)\|_E\} < \infty$ .

Seja  $\alpha = \max_{t \in [\sigma, \sigma+R]} \{\|F(t, u(t), u_t) - F(t, v(t), v_t)\|_E\}$ . Então, para  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_E &= \left\| \int_{\sigma}^t S(t-s)[F(s, u(s), u_s) - F(s, v(s), v_s)]ds \right\|_E \\ &\leq \int_{\sigma}^t e^{w(t-s)} \|F(s, u(s), u_s) - F(s, v(s), v_s)\|_E ds \\ &\leq e^{wR} \alpha (t - \sigma). \end{aligned}$$

Além disso, existe  $\beta > 0$  tal que  $\|F(s, u(s), u_s)\|_E \leq \beta$ , para todo  $s \in [\sigma, \sigma + R]$ . Usando as desigualdades anteriores, para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \|v(t) - u^0(t)\|_E &= \|v(t) - S(t-\sigma)\phi(0)\|_E \\ &= \left\| v(t) - u(t) + \int_{\sigma}^t S(t-s)F(s, u(s), u_s)ds \right\|_E \\ &\leq \|v(t) - u(t)\|_E + \int_{\sigma}^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \|F(s, u(s), u_s)\|_E ds \\ &\leq e^{wR} \alpha (t - \sigma) + \int_{\sigma}^t e^{wR} \beta ds \\ &\leq e^{wR} \alpha (t - \sigma) + e^{wR} \beta (t - \sigma) \\ &\leq \tilde{M} e^{wR} (t - \sigma), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{M} = 2 \max\{\alpha, \beta\}$ . Procedendo como anteriormente, concluímos também que

$$\|v_s - u_s^0\|_{\infty} \leq \tilde{M} e^{wR} (s - \sigma), \quad \text{para todo } s \in [\sigma, \sigma + R].$$

Da mesma forma, para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ ,

$$\begin{aligned} \|v(t) - u^1(t)\|_E &\leq \int_{\sigma}^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \|F(s, v(s), v_s) - F(s, u^0(s), u_s^0)\|_E ds \\ &\leq \int_{\sigma}^t e^{wR} M \|v_s - u_s^0\|_{\infty} ds \\ &\leq \int_{\sigma}^t e^{wR} M \tilde{M} e^{wR} (s - \sigma) ds \\ &= \tilde{M} M e^{2wR} \frac{(t - \sigma)^2}{2}, \end{aligned}$$

e então,

$$\|v_s - u_s^1\|_\infty \leq \tilde{M} M e^{2wR} \frac{(s - \sigma)^2}{2}, \quad \text{para todo } s \in [\sigma, \sigma + R].$$

Indutivamente, suponha que

$$\|v_s - u_s^{(n-1)}\|_\infty \leq \tilde{M} M^{(n-1)} e^{nwR} \frac{(s - \sigma)^n}{n!}, \quad \forall s \in [\sigma, \sigma + r].$$

Logo, para  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ ,

$$\begin{aligned} \|v(t) - u^n(t)\| &\leq \int_\sigma^t \|S(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} \|F(s, v(s), v_s) - F(s, u^{(n-1)}(s), u_s^{(n-1)})\|_E ds \\ &\leq \int_\sigma^t e^{wR} M \|v_s - u_s^{(n-1)}\|_\infty ds \\ &\leq \int_\sigma^t e^{wR} \tilde{M} M^n e^{nwR} \frac{(s - \sigma)^n}{n!} ds \\ &= \tilde{M} M^n e^{(n+1)wR} \frac{(t - \sigma)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Como a série  $\sum_{k=1}^{\infty} M^k e^{(k+1)wR} \frac{(t - \sigma)^{k+1}}{(k+1)!}$  é convergente (pelo teste de D'Alembert),

o termo  $\tilde{M} M^n e^{(n+1)wR} \frac{(t - \sigma)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , implicando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(t) = v(t)$ , para todo  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ . Portanto, pela unicidade do limite,  $v(t) = u(t)$ , para  $t \in [\sigma, \sigma + R]$ . Além disso, como  $v(t) = \phi(t - \sigma) = u(t)$ , para  $t \in [\sigma - r, \sigma]$ ,  $v = u$ , ou seja, a solução obtida é única. ■

# Apêndice A

## Resultados complementares

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados que utilizamos em nosso trabalho. Começamos com o Teorema de Hanh Banach, que nos permite estender funcionais lineares definidos em um subespaço a todo o espaço vetorial.

Para a demonstração do Teorema de Hanh Banach precisamos do Lema de Zorn.

**Lema A.1 (Lema de Zorn)** *Seja  $M \neq \emptyset$  um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que toda cadeia  $C \subset M$  tenha um limite superior. Então  $M$  tem um elemento maximal.*

**Teorema A.2 (Teorema de Hahn-Banach)** *Seja  $V$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$ . Seja  $p : V \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação tal que*

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \alpha p(x), \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y), \end{aligned} \tag{A.1}$$

*para todo  $x, y \in V$  e  $\alpha \in (0, \infty)$ . Sejam  $W$  um subespaço de  $V$  e  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear tal que*

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in W.$$

*Então, existe uma extensão linear  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  de  $g$ , (isto é,  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in W$ ) tal que*

$$f(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in V.$$

**Demonstração:** Vamos dividir esta demonstração em dois passos.

Primeiro Passo: Denotemos por  $\mathcal{P}$  a coleção de todo par  $(Y, h)$ , onde  $Y$  é um subespaço de  $V$  contendo  $W$  e  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear tal que  $h$  é uma extensão de  $g$  e

$$h(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in Y.$$



Note que,  $\mathcal{P}$  é não-vazio, pois  $(W, g) \in \mathcal{P}$ .

Considere em  $\mathcal{P}$  a ordem parcial definida por

$$(Y, h) \preceq (\tilde{Y}, \tilde{h})$$

se  $Y \subset \tilde{Y}$  e  $\tilde{h}$  é uma extensão linear de  $h$ .

Seja  $Q = \{(Y_i, h_i); i \in I\}$  uma cadeia em  $\mathcal{P}$ . Defina

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$$

e seja  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = h_i(x)$  se  $x \in Y_i$ . Como  $Q$  é uma cadeia, é imediato que  $h$  está bem definida e é uma extensão linear de cada um dos  $h_i$ 's. Também,  $h(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in Y$ . Assim  $(Y, h) \in \mathcal{P}$  e  $(Y_i, h_i) \preceq (Y, h)$  para cada  $i \in I$ . Assim, toda cadeia tem um limite superior. Portanto, pelo Lema de Zorn,  $\mathcal{P}$  tem um elemento maximal  $(Z, f)$ .

Segundo Passo: Mostraremos que  $Z = V$ , o que completa a demonstração. Assuma o contrário. Seja  $x_0 \in V$  tal que  $x_0 \notin Z$  e considere o subespaço vetorial de  $V$  dado por

$$Y = \{x + tx_0; x \in Z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Nosso objetivo é encontrar uma extensão linear  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  tal que  $(Y, h) \in \mathcal{P}$ , contrariando o fato de  $(Z, f)$  ser um elemento maximal de  $\mathcal{P}$ .

Suponha que  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  possa ser escrita na forma

$$h(x + tx_0) = f(x) + \alpha t,$$

com  $\alpha$  a ser determinada. Para que  $(Y, h) \in \mathcal{P}$ , precisamos que  $f(x) + \alpha t \leq p(x + tx_0)$  para todo  $x \in Z$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se  $t > 0$ , isso se reduz a

$$f\left(\frac{1}{t}x\right) + \alpha \leq p\left(\frac{1}{t}x + x_0\right),$$

ou equivalentemente,

$$f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \quad \forall x \in Z.$$

Similarmente, se considerarmos  $t < 0$ , deduzimos que

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_0), \quad \forall x \in Z.$$

Em outras palavras, é necessário que  $\alpha$  seja escolhida de modo que

$$\sup_{x \in Z} [f(x) - p(x - x_0)] \leq \alpha \leq \inf_{x \in Z} [p(x + x_0) - f(x)]. \quad (\text{A.2})$$

Isso é possível pois, para todo  $x, y \in Z$ ,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x + y) \leq p(x + y) \\ &= p(x + x_0 - x_0 + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0), \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x),$$

então,

$$\sup_{z \in Z} [f(z) - p(z - x_0)] \leq \inf_{z \in Z} [p(z + x_0) - f(z)].$$

Portanto, é possível escolher  $\alpha$  tal que (A.2) seja válida e assim, obtemos  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $h$  é uma extensão de  $f$ . Então, como  $(Y, h) \in \mathcal{P}$  e  $(Z, f)$  é o elemento maximal de  $\mathcal{P}$ , concluímos que  $Z = V$ , como queríamos. ■

**Corolário A.3** *Seja  $V$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$ . Sejam  $W$  um subespaço de  $V$  e  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear limitado em  $W$ . Então existe uma extensão linear limitado  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  de  $g$  tal que*

$$\|f\|_{V^*} = \|g\|_{W^*}.$$

**Demonstração:** Seja  $p(x) = \|g\|_{W^*} \|x\|$ ,  $\forall x \in V$ . Então,  $p$  satisfaz (A.1). Além disso,  $g(x) \leq |g(x)| \leq p(x)$ , para todo  $x \in W$ .

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão linear de  $g$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, para todo  $x \in V$ ,  $f(x) \leq \|g\|_{W^*} \|x\|$ . Isso implica que  $f$  é contínua e que  $\|f\|_{V^*} \leq \|g\|_{W^*}$ . Mas, como  $f = g$  em  $W$ , segue a igualdade das normas. ■

**Corolário A.4** *Seja  $A \subset E$ ,  $E$  espaço de Banach.  $\overline{A} = E$  se, e somente se, dado um funcional  $f$  em  $E$ , com  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A$  então,  $f \equiv 0$ .*

Vejam agora mais um importante resultado da análise funcional, o Teorema de Banach - Steinhaus, também conhecido como Princípio da limitação uniforme.

Para provar este teorema usaremos o seguinte resultado de topologia.

**Lema A.5 (Lema de Baire)** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $X \neq \emptyset$ , e  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sucessão de subconjuntos fechados em  $X$  tais que  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ . Então, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$ .*

**Teorema A.6 (Banach-Steinhaus)** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  uma sequência de operadores lineares limitados de  $E$  em  $F$  e  $\Lambda$  um conjunto não necessariamente enumerável. Se,*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty, \quad \forall x \in E,$$

então

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| < \infty.$$

**Demonstração:** Defina  $X_n = \{x \in E; \|T_\lambda x\| \leq n, \forall \lambda \in \Lambda\}$ . Note que  $X_n$  é fechado, pois, se  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $X_n$  tal que  $a_k \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$  então  $\|T_\lambda a_k\| \leq n$ , para qualquer  $\lambda \in \Lambda$  e qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , e da continuidade de  $T_\lambda$ ,  $T_\lambda a_k \rightarrow T_\lambda x$ , ou seja, dado  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\lambda) \in \mathbb{N}; \quad \|T_\lambda a_k - T_\lambda x\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq N(\lambda).$$

Dessa forma, para  $k \geq N(\lambda)$

$$\|T_\lambda x\| \leq \|T_\lambda x - T_\lambda a_k\| + \|T_\lambda a_k\| < \varepsilon + n.$$

Como  $\varepsilon$  pode ser escolhido arbitrariamente, concluímos que  $x \in X_n$ . Portanto,  $X_n$  é fechado.

Note também que  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ . De fato, é óbvio que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset E$ . Para provarmos a outra inclusão, seja  $y \in E$ . Como  $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda y\| < \infty$ , existe  $C_y > 0$  tal que  $\|T_\lambda y\| \leq C_y, \forall \lambda \in \Lambda$ . Tomemos  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N \geq C_y$ . Dessa forma,  $\|T_\lambda y\| < N, \forall \lambda \in \Lambda$ , e conseqüentemente  $y \in X_N$ , ou ainda  $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ . Portanto

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Logo, pelo Lema de Baire, existe  $n_0$  tal que  $\text{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$ . Seja  $x_0 \in \text{int}(X_{n_0})$  então, existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$  e assim, para todo  $y \in B(x_0, r)$ ,

$$\|T_\lambda y\| \leq n_0, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Seja  $z \in E$  tal que  $\|z\| \leq 1$ . Neste caso, note que

$$\left\| \left( x_0 + \frac{r}{2} z \right) - x_0 \right\| = \left\| \frac{r}{2} z \right\| \leq \frac{r}{2} < r,$$

ou seja,  $x_0 + \frac{r}{2} z \in B(x_0, r)$ . Dessa forma, para todo  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\left\| T_\lambda \left( \frac{r}{2} z \right) \right\| - \|T_\lambda x_0\| \leq \left\| T_\lambda \left( x_0 + \frac{r}{2} z \right) \right\| \leq n_0,$$

isto é,

$$\frac{r}{2} \|T_\lambda z\| \leq n_0 + \|T_\lambda x_0\|,$$

o que implica que  $\frac{r}{2} \|T_\lambda\| \leq 2n_0$ , ou ainda,  $\|T_\lambda z\| \leq \frac{4n_0}{r}$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Logo,

$$\|T_\lambda\| = \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \geq 1}} \|T_\lambda z\| \leq \frac{4n_0}{r}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Portanto,  $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| < \infty$ . ■

Prosseguindo com mais resultados de análise funcional.

**Teorema A.7** *Seja  $T \in \mathfrak{L}(E)$ , onde  $E$  é um espaço de Banach. Se  $\|T\| < 1$ , então  $(I - T)^{-1}$  existe e é um operador linear limitado.*

**Demonstração:** Seja  $S_n := \sum_{k=0}^n T^k$ . Para  $p \leq q$ , como  $\|T\| < 1$  e  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{k=p+1}^q T^k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|T\|^k \\ &\leq \sum_{i=1}^{q-p} \|T\|^i \|T\|^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|T\|^i \|T\|^p \\ &= \left( \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \right) \|T\|^p. \end{aligned}$$

Assim,  $\|S_q - S_p\| \rightarrow 0$  quando  $p \rightarrow \infty$ , implicando que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach  $\mathfrak{L}(E)$ .

Seja  $S \in \mathfrak{L}(E)$  o limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Note que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} T^k = I + \sum_{k=1}^{n+1} T^k \\ &= I + T \sum_{k=0}^n T^k = I + TS_n = I + S_n T. \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , na igualdade acima, concluímos que

$$S = I + ST = I + TS.$$

Assim,

$$I = S(I - T) = (I - T)S,$$

o que mostra que  $(I - T)$  é invertível e  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = S = (I - T)^{-1}$ . ■

Por fim, vejamos o Teorema de Cantor (resultado que usamos no estudo de funções abstratas).

**Teorema A.8** *Um espaço métrico  $(X, d)$  é completo se, e somente se, para qualquer sequência  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos fechados e não-vazios de  $X$ , com  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$  e  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  consiste de um único elemento.*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $(X, d)$  seja um espaço completo e seja  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de subconjuntos fechados e não vazios de  $X$ , tais que  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $x_n$  um ponto arbitrário de  $F_n$ . Se  $n, m \geq N$ , então  $x_n, x_m \in F_N$  e  $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_N)$ . Por hipótese, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher  $N$ , suficientemente grande, de modo que  $\text{diam}(F_N) < \varepsilon$ . Isso mostra que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . Como  $X$  é completo, existe  $x_0 \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Além disso, para  $n > N$ ,  $x_n \in F_N$ . E portanto, podemos concluir que  $x_0 \in F_N$ . Pelo fato da sequência  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ser encaixantes, segue que  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n =: F$ . Então,  $F$  contém pelo menos um elemento.

Suponha que exista  $y \in X$  tal que  $y \in F$ . E,  $y \in F_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $d(x_0, y) \leq \text{diam}(F_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que  $d(x_0, y) = 0$ , ou seja,  $x_0 = y$ .

( $\Leftarrow$ ) Agora mostraremos que  $X$  é completo se são satisfeitas as condições declaradas sobre qualquer sequência  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como apresentada no enunciado.

Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $X$  e defina  $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Então, cada  $F_n$  é fechado, não-vazio e  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , escolha  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , para todo  $n, m \geq N$ . Deste modo,  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , e então, pela hipótese, existe um único elemento  $x_0 \in X$  tal que  $\{x_0\} = F_1 \cap F_2 \cap \dots$ . Em particular,  $x_0 \in F_n$ , então  $d(x_0, x_n) \leq \text{diam}(F_n)$ , implicando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Portanto, toda sequência de Cauchy em  $X$  é convergente, isto é,  $X$  é um espaço completo. ■

# Apêndice B

## O operador derivada

Consideremos em  $Z = (L^2[0, \pi], \|\cdot\|_2)$  o operador  $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$  dado por  $Af = f''$ , com domínio

$$D(A) = \{f \in Z; f'' \in Z, f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

A seguir, usaremos o Teorema 3.19 para mostrarmos que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo em  $Z$ . Antes porém, enunciamos o seguinte resultado.

**Lema B.1** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $T : D(T) \subset E \longrightarrow E$  um operador linear. Se  $T$  é invertível e  $T^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$ , então  $T$  é fechado.*

Usando este resultado, mostraremos que  $(I - A)$  é fechado e, como consequência,  $A$  é fechado.

Para provarmos que  $(I - A)^{-1}$  existe, precisamos mostrar que, para todo  $g \in Z$ , existe  $f_g \in Z$  tal que  $(I - A)f_g = g$ . Isto é equivalente a resolver a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} f_g''(x) - f_g(x) = -g(x), & 0 < x < \pi, \\ f_g(0) = f_g(\pi) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Sabemos, da teoria de equações diferenciais, que o sistema (B.1) tem uma única solução dada por

$$\begin{aligned} f_g(x) &= \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi [e^{(\pi-|x-y|)} - e^{-(\pi-|x-y|)} - e^{(\pi-x-y)} - e^{-(\pi-x-y)}] g(y) dy \\ &= \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi h(x, y) g(y) dy. \end{aligned}$$

Além disso, se  $C > 0$  é tal que  $|h(x, y)| \leq C$  para todo  $x, y \in [0, \pi]$ , da desigualdade de Holder obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}
 \|(I - A)^{-1}g\|_2^2 = \|f_g\|_2^2 &= \int_0^\pi |f_g(x)|^2 dx \\
 &= \int_0^\pi \left| \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi h(x, y)g(y)dy \right|^2 dx \\
 &\leq \frac{C^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \int_0^\pi \left( \int_0^\pi |g(y)|dy \right)^2 dx \\
 &\leq \frac{C^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \int_0^\pi \left( \int_0^\pi 1^2 dy \int_0^\pi |g(y)|^2 dy \right) dx \\
 &= \frac{C^2 \pi^3}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \|g\|_2^2,
 \end{aligned}$$

o que implica que  $(I - A)^{-1} \in \mathfrak{L}(Z)$ . Agora, do Lema B.1, concluímos que  $(I - A)$  é fechado e portanto  $A$  é também fechado.

Mostraremos também que  $A$  é um operador espectral de Riesz. Consideremos para isso a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} z''(x) - \lambda z(x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ z(0) = z(\pi) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Da teoria geral de equações diferenciais ordinárias, sabemos que as soluções de (B.2) são da forma  $z(\xi) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\xi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\xi)$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes reais. Impondo as condições iniciais de (B.2) obtemos que  $c_1 = 0$ . Assim, fazendo  $c_2 \neq 0$ , obtemos que os autovalores de  $A$  são da forma  $\lambda_n = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , com autovetores unitários associados dados por  $z_n(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(n\xi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Além disso, é fácil ver que os autovetores  $z_n(\cdot)$  são ortonormais, e da teoria clássica de análise funcional, sabemos que  $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$  é uma base Hilbertiana para  $Z$ , veja [5], página 86. Esse fato garante que  $D(A)$  é denso em  $E$ . Dessa forma, como o conjunto  $\rho = \{-n^2; n \in \mathbb{N}\}$  é totalmente desconexo, podemos concluir que  $A$  é um operador espectral de Riesz.

Para completar nossa análise precisamos achar os autovetores do adjunto de  $A$ ,  $A^* : D(A^*) \subset E \longrightarrow E$ , associados aos autovalores  $\overline{\lambda_n} = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



Sejam  $f, g \in D(A)$ . Então, aplicando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle Af, g \rangle &= \langle f'', g \rangle = \int_0^\pi f''(x) \overline{g(x)} dx \\
 &= \overline{g(x)} f'(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \overline{g'(x)} dx \\
 &= - \int_0^\pi f'(x) \overline{g'(x)} dx \\
 &= -\overline{g'(x)} f(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx \\
 &= \int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx \\
 &= \langle f, Ag \rangle .
 \end{aligned}$$

Como  $f, g$  são arbitrários, concluímos que  $A^*g = Ag$  para todo  $g \in D(A)$ . Segue em particular, que cada  $z_n$  é também autovetor de  $A^*$ .

Dessa forma,  $A$  verifica as hipóteses do Teorema 3.19 e portanto,  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t); t \geq 0\}$  em  $Z$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Agarwal, R. P.; Meehan, M.; O'regan, D.: "Fixed Point Theory and Applications", Cambridge University Press, 2004.
- [2] Ball, J. M.: "Strongly continuous semigroups, Weak solutions, and the variation of constants formula" , Proc. Amer. math. Soc., n° 02, V. 63, pp 370-373, 1977.
- [3] Beretta, E; Takeuchi, Y.: "Convergence Results in SIR Epidemic Models With Varying Population Sizes", Nonlinear Analysis, 1997.
- [4] Beretta, E; Takeuchi, Y.; Wanbiao M.: "Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times", Nonlinear Analysis 931 - 947, 1988.
- [5] Brezis, H.: "Analyse Fonctionnelle Théorie et applications" Mansson, 1987.
- [6] Brooks, R. M.; Schmitt K.: "The Contraction Mapping Principle And Some Applications" Electronic Journal of Differential Equations, 2009.
- [7] Curtain, R. F.; Zwart, H. J.: "An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory", Springer-Verlag, 1995.
- [8] Engel, K.; Nagel, R.: "A Short Course on Operator Semigroups", Springer, 2006.
- [9] Hale, J. K.: "Theory of Functional Differential Equations", Springer-Verlag, 1977.
- [10] Kreyszig, E.: "Functional Analysis With Applications", John Wiley e Sons., 1978.
- [11] Kesavan, S.: "Functional Analysis", Hindustan Book Agency, 2009.

- [12] Ladas, G. E.; Lakshmikantham, V.: “Differential Equations in Abstract Space”, Academic Press, 1972.
- [13] Mariano, M. F. P. (2006). “Teoria de semigrupos e controlabilidade de sistemas neutros”. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos. Recuperado de <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-14092006-153550/>.
- [14] Pazy, A.: “Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations”, Springer-Verlag, 1983.