Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas


# COHOMOLOGIA DE GRUPOS FINITOS E G-COINCIDÊNCIAS DE APLICAÇÕES


Marjory Del Vecchio dos Santos

Orientadora: Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Maria Gorete Carreira Andrade


Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.


São José do Rio Preto
Fevereiro - 2010

Santos, Marjory Del Vecchio.
Cohomologia de grupos finitos e G-coincidências de aplicações / Marjory Del Vecchio dos Santos. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2010.
62 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Maria Gorete Carreira Andrade
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Grupos finitos. 3. Coincidência de aplicações. 4. Coincidência (Matemática). 5. Cohomologia de grupos finitos I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 515.14

MARJORY DEL VECCHIO DOS SANTOS

Cohomologia de Grupos Finitos e G-coincidências de Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
Professor Doutor
UFSCar

Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 26 de fevereiro de 2010.

*"O Universo está suspenso no infinito."*

Autor desconhecido

Aos meus pais,
Natal e Inez,
dedico.

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, que sem Ele, nada seria e nem existiria.

À Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade, sem ela não teria concluído esse trabalho, pela disponibilidade em sempre ajudar, pelos conhecimentos transmitidos, pela amizade, pela tutoria no PET e pelos conselhos tão valiosos.

À Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti pela carinho e incentivo.

A Luciene, fucionária do departamento, pela paciência, prestatividade e bom humor.

Aos demais professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pelo apoio e amizade.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram e me apoiaram nos meus estudos, e pelos sacrifícios que fizeram para que eu estudasse e tivesse uma boa formação.

A minha tia Vera pelas orações.

Ao meu irmão Tiago e minha cunhada Marcela pela amizade, apoio e carinho.

Aos meus amigos Cintya, Jucilene, Fabrício, Junior e Gustavo, pelas discussões sempre produtivas, inúmeras horas de estudos, amizade e por sempre estarem presentes tanto nos momentos alegres quanto nos momentos difíceis.

Aos meus companheiros de PET, graduação e pós-graduação: Aline, Ana Paula, Amanda, Cristiane, Eduardo, Fernanda, Ìris, Juliana, Lígia, Manuela, Marcus, Michelle, Rafael, Zé Henrique, Wallace e demais.

As minhas amigas Daniela, Fabrícia, Fernanda, Jaqueline, Karina e Paula de quem eu tenho muita saudade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade!

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar em detalhes um estudo sobre dois critérios para $G$-coincidências de aplicações de um espaço particular $X$ em um CW-complexo, onde $G$ é um grupo finito. No primeiro critério $G$ é o grupo cíclico de ordem $p$, com $p$ um primo ímpar e $X$ é uma esfera de dimensão ímpar. No segundo critério, que estende o primeiro, $G$ é um grupo finito qualquer e $X$ é um CW-complexo com o mesmo tipo de homotopia de uma esfera de dimensão ímpar. Para o estudo desses critérios foram necessários alguns resultados da teoria de cohomologia de grupos finitos com ênfase em grupos com cohomologia periódica segundo a teoria de cohomologia de Tate.

**Palavras-chave:** cohomologia de grupos finitos, cohomologia periódica, cohomologia de Tate, G-coincidências de aplicações.

# Abstract

The main objective of this work is to present in details a study about two criteria for $G$-coincidences of maps from a particular space X into a CW-complex, where $G$ is a finite group. In the first criterion $G$ is the cyclic group of order $p$, with $p$ an odd prime and $X$ is an odd dimensional sphere. In the second criterion, which extends the first, $G$ is any finite group and $X$ is a CW-complex with the same type of homotopy of an odd dimensional sphere. For the study of those criteria were needed some results from the theory of cohomology of finite groups with emphasis on groups with periodic cohomology according to the Tate cohomology theory.

**Keywords:** cohomology of finite groups, periodic cohomology, Tate cohomology, $G$-coincidence of maps.

# Sumário

# Introdução

A teoria de cohomologia de grupos surgiu dos estudos em Álgebra e Topologia. O ponto inicial do aspecto topológico da teoria foi o trabalho de Hurewicz em 1936 sobre Espaços Asféricos, ou seja, um espaço X com grupo fundamental $\pi_1(X) = G$ e grupos de homotopia superiores $\pi_n(X) = 0$. Hurewicz mostrou, entre outras coisas, que o tipo de homotopia de um espaço asférico $X$ depende apenas do seu grupo fundamental G e em particular, os grupos de homologia de X dependem apenas do grupo G. Portanto, a homologia de um grupo G, denotada por $H_*(G)$ é a homologia de qualquer espaço asférico $X$ com grupo fundamental G.

Até a década de 40, não era claro como descrever $H_*(G)$ algebricamente. Os primeiros progressos nesta direção foram feitos por Hopf em 1942, que descreveu $H_2(G)$ escolhendo uma apresentação de G por geradores e relações. Seguindo o trabalho de Hopf, houve um rápido desenvolvimento do assunto por Eckmann, Eilenberg-MacLane e Freudenthal. Em meados da década de 40, tivemos uma definição puramente algébrica da homologia de um grupo, e tornou-se claro que o assunto era de interesse, tanto de algebristas, quanto de topologistas, oferecendo assim uma ótima oportunidade de interação entre as áreas.

A teoria de (Co)homologia de grupos está intimamente relacionada à teoria de ações de grupos em espaços. Vamos apresentar aqui alguns resultados em Álgebra e Topologia, usando ações de grupos finitos e aplica-los no estudo de $G$-coincidências de aplicações. Se $X$ é um espaço topológico munido de um ação de um grupo $G$, dizemos que uma aplicação contínua $f$ de $X$ em um espaço $Y$ tem uma $G$-coincidência se existe $x \in X$ tal que $f$ aplica a órbita de $X$ em único ponto.

Nosso objetivo nesse trabalho é estudar aplicações equivariantes conectando espaços que admitem ações livres de algum grupo pré-fixado G e assim estudar a existência de pontos de G-coincidência para funções com domínio em um G-espaço e com valores em um CW-complexo.

Sobre a existência de tais pontos temos, para $m = 2$ e $Y = \mathbb{R}^k$, o Teorema Clássico de Borsuk-Ulam que afirma que toda aplicação $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-coincidência se $k \leq n$ (aqui n não precisa ser ímpar). Novamente para $m = 2$ e $Y = M^k$, onde $M^k$ é uma variedade diferenciável de dimensão k, temos o resultado de Conner e Floyd: toda aplicação $f : S^n \longrightarrow M^k$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-coincidência se $k < n$. Aumentando a complexidade do espaço Y e usando o $\mathbb{Z}_2$-índice de Yang, M. Izydorek e J. Jaworowski mostraram que se $Y^k$ é um complexo k-dimensional finito e $n > 2k$, então toda aplicação $f : S^n \longrightarrow Y^k$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-coincidência.

Um problema similar é estudar G-coincidências para um grupo finito G arbitrário que atua livremente em uma esfera de homotopia. Existem muitos exemplos de grupos finitos, além dos cíclicos, que atuam livremente em esferas de homotopia. Suponha que G é um grupo finito que atua livremente em alguma esfera de homotopia $\Sigma^m$ de dimensão m. Tais grupos possuem cohomologia periódica. Mais, foi provado que se s é o período, então G atua livremente em um complexo simplicial finito que tem o tipo de homotopia de uma esfera de dimensão $ds-1$, onde d é o máximo divisor comum entre $|G|$ e $\phi(|G|)$, onde $\phi$ é a função de Euler. Assim cada grupo que possui cohomologia periódica nos fornece um exemplo de uma ação livre em uma esfera de homotopia que é um CW-complexo finito. Se não exigirmos que o complexo seja finito, tais grupos podem atuar em um complexo com o mesmo tipo de homotopia de uma esfera de dimensão $s - 1$. Existem também várias outras ações de G em uma esfera de homotopia fixada. Tais ações podem ser classificadas pelo número de tipos de homotopia dos espaços de órbitas.

Neste trabalho apresentamos um estudo detalhado sobre dois critérios (que se encontram nos artigos [9] e [10]) para $G$-coincidências de aplicações de um espaço particular $X$ em um CW-complexo, onde $G$ é um grupo finito . No primeiro critério $G$ é o grupo cíclico de ordem $p$, com $p$ um primo ímpar e $X$ é uma esfera de dimensão ímpar. No segundo critério, que estende o primeiro, $G$ é um grupo finito qualquer e $X$ é um CW-complexo com o mesmo tipo de homotopia de uma esfera de dimensão ímpar. Para o estudo desses critérios foram necessários alguns resultados da teoria de cohomologia de grupos finitos com ênfase em grupos com cohomologia periódica segundo a teoria de cohomologia de Tate.

A seguir relatamos sucintamente o objeto de estudo de cada capítulo.

No capítulo 1, colocamos alguns pré-requisitos essenciais para a compreensão do trabalho. Apresentamos alguns resultados topológicos importantes como o conceito de espaços de recobrimento, $CW$-complexos e o complexo $K(G, 1)$ ([14], e [3]). Depois apresentamos alguns conceitos de álgebra homológica e a definição e propriedades da cohomologia de grupos, bem como sua interpretação topológica

([13] e [3]) e finalizando apresentamos algumas fórmulas de coeficientes universais e a fórmula de Küneth. ([12] e [16]).

No capítulo 2, apresentamos alguns resultados da teoria de (co)homologia de grupos finitos. Para isso faremos primeiramente um breve estudo sobre grupos atuando em esferas e resoluções periódicas via ações livres em esferas. Definimos também a (co)homologia de Tate e enunciamos algumas de suas propriedades, visando o estudo de alguns resultados sobre grupos com cohomologia periódica, que serão necessários nos capítulos 3 e 4. A referência principal para esse capítulo é [3].

O capítulo 3, baseado no artigo [9] é dedicado a teoria de $\mathbb{Z}_p$-coincidências de aplicações contínuas de esferas em CW-complexos. Neste capítulo definimos o conceito de $\mathbb{Z}_p$-coincidência e demonstramos alguns lemas necessários para o detalhamento da demonstração do seguinte resultado: *Se $Y$ é um CW-complexo, k-dimensional, finito e conexo e se $2n+1 > pk$ onde $p$ é um primo ímpar então toda aplicação $f : S^{2n+1} \longrightarrow Y$ possui uma $\mathbb{Z}_p$-coincidência.*

No último capítulo, apresentamos um breve resumo da teoria de espaços classificantes e homomorfismo transfer, visando apresentar em detalhes a demonstração, que encontra-se em [10], do seguinte critério de G-coincidência de aplicações: *Suponha que $G$ é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo $\Sigma^{2n+1}$ que tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera 2n+1-dimensional e $f : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua. Se (i) $\Sigma^{2n+1}$ é um CW-complexo finito 2n+1-dimensional e $Y$ é um CW-complexo k-dimensional, ou se (ii) $Y$ é um CW-complexo k-dimensional finito então, se $2n+1 \geq |G|k$, existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ e uma (H,G)-coincidência para f.* Esse critério generaliza o critério anterior. Observamos que vários autores continuaram o estudo de G-coincidências de aplicações, sempre se tentando obter critérios para espaços mais gerais (ver por exemplo o artigo [11]).

Capítulo

1

# Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que serão de bastante utilidade para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. O objetivo desse capítulo é facilitar a leitura e entendimento dos próximos capítulos e sendo assim, serão omitidas a maioria das demonstrações dos resultados apresentados. Suas principais referências são [3] e [14]

## 1.1 Ação de grupos e G-espaços

**Definição 1.1.1** *Sejam $G$ um grupo e $X$ um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de $G$ em $X$ é uma aplicação $\phi : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = gx$ satisfazendo, para todo $x \in X$, as condições:*
*i) $ex = x$ (e: elemento neutro de $G$).*
*ii) $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.*

**Definição 1.1.2** *Dizemos que $X$ é um **G-conjunto livre** se a ação de $G$ em $X$ é livre, isto é, $gx = x$ para algum $x \in X$ se, e somente se, $g = e$.*

*Dizemos que $X$ é um **G-conjunto trivial** se a ação de $G$ em $X$ é trivial, ou seja, $gx = x, \forall x \in X, \forall g \in G$.*

**Observação 1.1.1** *Se $X$ é um espaço topológico munido com uma ação à esquerda de um grupo $G$, diremos simplesmente que $X$ é um $G$-espaço.*

**Definição 1.1.3** *Seja $X$ um $G$-espaço e considere $x \in X$. A órbita de $x$ pela ação de $G$ é o conjunto $G(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X$. O conjunto $G(x)$ muitas vezes é denotado simplesmente por $Gx$.*

**Definição 1.1.4** *Seja $G$ um grupo e $X$ um $G$-espaço. Seja $x \in X$. Dizemos que $G$ opera transitivamente em $X$, ou que $X$ é um $G$-espaço homogêneo, se para quaisquer $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g.x = y$*

**Observação 1.1.2** *Se $G$ opera transitivamente em $X$ então $G(x) = X$, para qualquer $x \in X$.*

**Definição 1.1.5** *Sejam $X$ e $Y$ dois $G$-espaços e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$, então $f$ é chamada de* ***aplicação equivariante****.*

**Exemplo 1.1.1** *Considere $X = S^n$ (esfera de dimensão $n$ e $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ (grupo multiplicativo). Temos que $G$ atua a esquerda em $S^n$ da seguinte forma: $1.x = x$ e $-1.x = -x$. A aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$ definida, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, por $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ é $G$-equivariante.*

## 1.2 Espaços de Recobrimento e K(G,1)-complexos

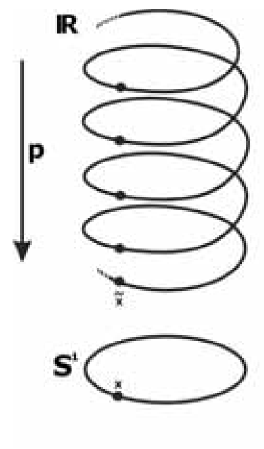
Para definirmos espaços de recobrimento assumimos que os espaços topológicos utilizados são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos (e portanto, conexos). Os resultados desta seção podem ser encontrados em [14].

### Espaços de Recobrimento

**Definição 1.2.1** *Seja $X$ um espaço topológico. Um* **espaço de recobrimento** *de $X$ é um par $(\widetilde{X}, p)$, com $\widetilde{X}$ um espaço de recobrimento e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação contínua tal que:*
*(1) $p$ é sobrejetora.*
*(2) Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $U$ aberta, conexa por caminhos de modo que a restrição de $p$ a cada componente conexa $\widetilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo.*

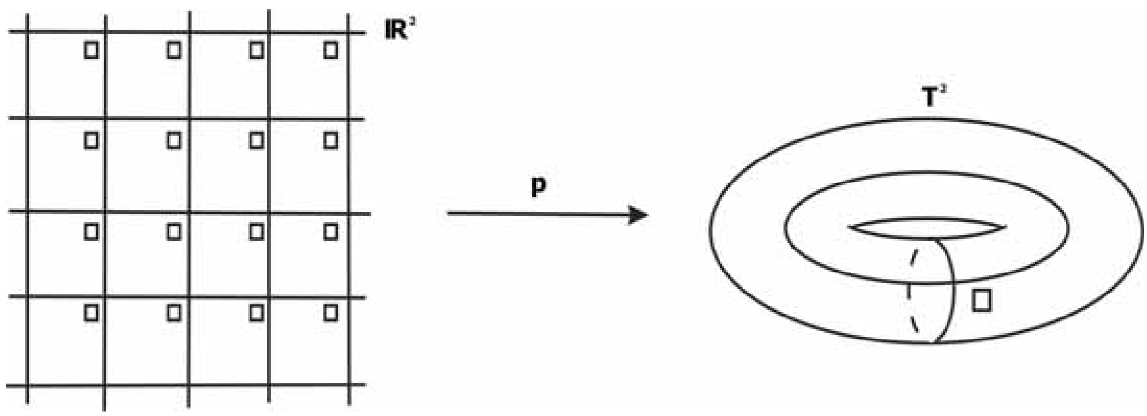
**Observação 1.2.1** *Denominamos a aplicação $p$ e a vizinhança $U$ respectivamente de* **projeção de recobrimento** *e* **vizinhança elementar**. *Ainda, o conjunto $p^{-1}(x)$ é denominado* **fibra** *no ponto $x \in X$.*

**Exemplo 1.2.1** *Seja $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = (sent, cost), t \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, p)$ é um recobrimento de $S^1$.Além disso, todo subintervalo aberto de $S^1$ pode ser visto como uma vizinhança elementar.*




**Observação 1.2.2** *Sejam $(\widetilde{X}, p)$ e $(\widetilde{Y}, q)$ recobrimentos de $X$ e $Y$ respectivamente. Então $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ é recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), p(y))$. Agora, se $U$ e $V$ são vizinhanças elementares de $x \in X$ e $y \in Y$ então $U \times V$ é uma vizinhança elementar de $(x, y) \in X \times Y$.*

**Exemplo 1.2.2** *Como o toro $T^2 = S^1 \times S^1$, temos que seu recobrimento é $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.*




**Proposição 1.2.1** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de $X$, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.* ■

**Definição 1.2.2** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de $X$. Um homeomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é dito* **transformação de recobrimento (ou Deck transformação)** *se $p \circ \varphi = p$. Ainda, o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotado por $A(\widetilde{X}, p)$) é um grupo em relação à composição.*

**Proposição 1.2.2** *O grupo $A(\widetilde{X}, p)$ atua livremente sobre $\widetilde{X}$, isto é, $g.\widetilde{x} = \widetilde{x}$ se, e somente se, $g = 1$.* ■

**Definição 1.2.3** *Um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de $X$ é dito* **recobrimento universal** *de $X$ se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, isto é, se $\widetilde{X}$ é conexo por caminhos e $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = 0$, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.*

**Definição 1.2.4** *Um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ é dito* **recobrimento regular** *se $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

**Exemplo 1.2.3** *Todo recobrimento universal é regular.*

**Proposição 1.2.3** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento regular de $X$. Então $A(\widetilde{X}, p)$ é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, para todo $x \in X$ e todo $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.* ■

**Demonstração:** [14], V.7.4.

**Proposição 1.2.4** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento regular de $X$. O grupo $A(\widetilde{X}, p)$ atua transitivamente sobre $p^{-1}(x)$ se, e somente se, $(\widetilde{X}, p)$ é um recobrimento regular de $X$.* ■

**Definição 1.2.5** *Um grupo $G$ de homeomorfismos de $X$ é dito* **propriamente descontínuo** *se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $V$ tal que, para todo $g \in G$, $g \neq 1$, tem-se $g.V \cap V = \emptyset$.*

**Proposição 1.2.5** *Sejam $X$ um espaço topológico, $G$ um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de $X$ e $q : X \to X/G$ a aplicação quociente sobre o espaço de órbitas de $G$. Então $(X, q)$ é um recobrimento regular de $X/G$, com $G = A(X, q)$.* ■

**Definição 1.2.6** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de $X$ e $\alpha : I \longrightarrow X$ uma caminho. Um caminho $\widetilde{\alpha} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ é chamado de* ***levantamento*** *de $\alpha$ se $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

**Teorema 1.2.1** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de $X$, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Então para qualquer caminho $\alpha : I \longrightarrow X$ com ponto inicial $x_0$, existe um único caminho $\widetilde{\alpha} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ com ponto inicial $\widetilde{x_0}$ tal que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.* ■

**Teorema 1.2.2** ***(Teorema da Monodromia)*** *Sejam $(\widetilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de $X$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ caminhos com ponto inicial $\widetilde{x}_0$.*

*(1) Se $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$ (homotopia não necessáriamente relativa) então $p \circ \widetilde{\alpha} \sim p \circ \widetilde{\beta}$(não necessáriamente relativa).*

*(2) Se $p \circ \widetilde{\alpha} \sim p \circ \widetilde{\beta}$ (relativa aos pontos finais e iniciais) então $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta}$(relativa). Em particular $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ tem o mesmo ponto final.* ■

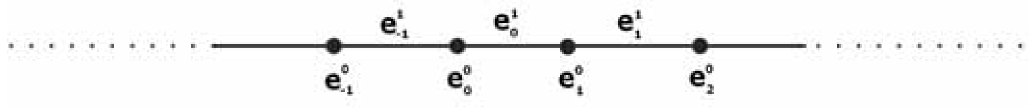
## CW-complexos

**Definição 1.2.7** *Dado um espaço $X$ de Hausdorff, dizemos que $X$ admite uma estrutura de* **CW-complexo** *se possui uma coleção de subconjuntos fechados $\sigma_j^q$ (onde $q$ representa dimensão $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ e $j$ varia sobre um conjunto de índices $J_q$), e uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^q \subset \ldots$ com $X^q = \bigcup_{\substack{p \leq q \\ j \in J_p}} \sigma_j$ (por definição $X^{-1} = \emptyset$), e fronteira dada por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*
*(i) $\sigma_i^p - f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q - f_j^q$ somente quando $p = q$ e $i = j$.*
*(ii) $X = \bigcup_q X^q$.*
*(iii) Para cada $\sigma_j^q$, existe uma aplicação característica $\phi_j^q : D^q \to \sigma_j^q$ (onde $D^q$ é o disco de dimensão $q$) que leva $S^{q-1}$ (esfera de dimensão $q-1$) sobre $f_j^q$, e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$ ($S^{-1}$ é o conjunto vazio).*
*(iv) $f_j^q$ intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.*
*(v) Um subconjunto $Y$ de $X$ é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em $\sigma_j^q$, $\forall q$ e $\forall j \in J_q$, onde $\sigma_j^q$ possui a topologia quociente de $D^q$ (via $\phi_j^q$).*

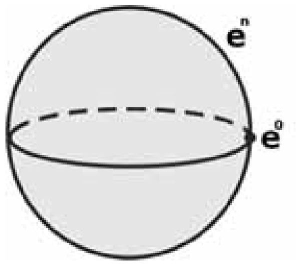
**Notação:** Em um $CW$-complexo $X$, $e^q$ denotará a célula aberta de dimensão $q$ :

$$e^q = \sigma^q - f^q.$$

**Exemplo 1.2.4** *Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW-complexo, onde as 0-células e 1-células são dadas , respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.*




**Exemplo 1.2.5** *Seja $X = S^n$ (n-esfera). Uma estrutura de $CW$-complexo sobre $S^n$ pode ser dada por uma 0-célula e uma $n$-célula, ou seja, $S^n = e^0 \cup e^n$.*




**Definição 1.2.8** *Um* **G-complexo** *é um CW-complexo X munido de uma ação de G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X, então $gS = S$, para todo g em G. Se a ação de G em X permuta livremente as células, dizemos que X é um* **G-complexo livre**.

**Observação 1.2.3** *É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow Homeo(X) \\ g &\mapsto \varphi_g : X \rightarrow X \end{aligned}$$

*tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$, temos que, se $\sigma$ é uma célula de $X$, então $g \cdot \sigma$ também é uma célula de $X$ cuja dimensão é a mesma de $\sigma$ (ou seja, $\varphi_g$ preserva dimensão).*

**Teorema 1.2.3** *Se $X$ é um G-complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de $X$:*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*
***Demonstração:*** *[3]* ■

## $K(G,1)$-complexos

Vamos definir um CW-complexo satisfazendo condições especiais. Para tanto, fazemos inicialmente algumas considerações.

Sejam $X$ um $CW$-complexo e $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$, um recobrimento de $X$. Por [18], III.6.9.2, temos que $\widetilde{X}$ também é um $CW$-complexo (as $n$-células $\widetilde{\sigma}$ de $\widetilde{X}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde $\sigma$ é uma $n$-célula de $X$, e $p|_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ é um homeomorfismo). O grupo $G$ das transformações de recobrimento atua livremente em $\widetilde{X}$ permutando suas células (Proposição 1.2.2). Assim, $\widetilde{X}$ é um $G$-complexo.

Se $\widetilde{X}$ é contrátil, o complexo celular aumentado de $\widetilde{X}$ é uma $\mathbb{Z}G$-resolução livre de $\mathbb{Z}$ com $C_n(\widetilde{X})$ um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento básico par cada órbita de célula em $\widetilde{X}$(Teorema 1.2.3).

Se o recobrimento é regular, temos que $G$ atua transitivamente em $p^{-1}(\sigma)$, ou seja, $G(\widetilde{\sigma}) = p^{-1}(\sigma)$, para todo $\widetilde{\sigma} \in p^{-1}(\sigma)$ (Proposição 1.2.4 e Observação 1.1.2). Logo cada célula em $X$ nos fornece uma órbita de células de mesma dimensão em $\widetilde{X}$. Se, além disso, o recobrimento é contrátil, temos $C_*(\widetilde{X})$ um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento básico para cada célula de $X$.

Será definido a seguir um $CW$-complexo que satisfaz todas as condições citadas anteriormente.

**Definição 1.2.9** *Seja $X$ um $CW$-complexo tal que:*
*(i) $X$ é conexo.*
*(ii) $\pi_1(X) = G$.*
*(iii) O recobrimento universal $\widetilde{X}$ de $X$ é contrátil (é fato conhecido que, para $CW$-complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular)* ([18], III.6.9.1 e [8], I.6.7).

*Nestas condições, $X$ é dito um* **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo** $(G, 1)$ *ou simplesmente,* $K(G, 1)$**-complexo**.

**Observação 1.2.4** *Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo* ([3] I.4)*:*
*(iii)$'$ $H_i(\widetilde{X}) = 0$ para $i \geq 2$.*
*(iii)$''$ $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq 2$.*

**Observação 1.2.5** *Se $\widetilde{X}$ é recobrimento universal de um CW-complexo $X$, temos que $\widetilde{X}$ é um $G$-complexo, onde $G = \pi_1(X)$.*

**Exemplo 1.2.6** *Sejam $G =< \alpha >\simeq \mathbb{Z}$ e $X = S^1$.*

*Temos que $X$ é um $K(G, 1)$-complexo, pois é um CW-complexo conexo, com $\pi_1(X) = G$ e o recobrimento universal de $X$ é $\widetilde{X} = \mathbb{R}$ (exemplo 1.2.1), que é contrátil .*

**Exemplo 1.2.7** *Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto n) e $X = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (toro n-dimensional).*

*Temos que $X$ é um CW-complexo conexo, $\pi_1(X) = G$ e o recobrimento universal de $X$ é $\widetilde{X} = \mathbb{R}^n$ (observação 1.2.2), que é contrátil. Logo, $X$ é um $K(G, 1)$-complexo.*

## 1.3 Resoluções Projetivas

**Definição 1.3.1** *Considere $R$ um anel com unidade e $M$ um $R$-módulo à esquerda. Uma resolução de $M$ sobre $R$, ou uma $R$-resolução de $M$, é uma sequência exata de $R$-módulos*

$$C : \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots,$$

*a qual satisfaz as seguintes condições:*
*(R1)* $C_{-1} = M$
*(R2)* $C_n = 0, \forall n < -1$

*Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: uma resolução de $M$ sobre $R$, ou uma $R$-resolução de $M$, é uma sequência exata de $R$-módulos*

$$C : \ldots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

**Definição 1.3.2** *A aplicação $\epsilon : C_0 \to M$ é chamada* **aplicação aumentação.** *Se cada $C_i$ é um $R$-módulo livre, dizemos que a* **resolução** *é* **livre.** *Se cada $C_i$ é um $R$-módulo projetivo, dizemos que a* **resolução** *é* **projetiva.**

**Notação:** $\epsilon : C \twoheadrightarrow M$ denotará uma resolução de $M$.

**Proposição 1.3.1** *São equivalentes as seguintes condições para um $R$-módulo $P$:*
*(i) $P$ é projetivo.*
*(ii) Toda seqüência exata $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ cinde.*
*(iii) $P$ é somando direto de um módulo livre.*

**Demonstração:** [3], I.8.2 ■

**Proposição 1.3.2** *Dado um $R$-módulo $M$ sempre existe uma $R$-resolução livre de $M$.*

**Demonstração:** [13], III.1.1. ■

## 1.4 Anel Grupo e $RG$-módulos

**Definição 1.4.1** *Sejam $R$ um anel comutativo com unidade 1 e $G$ um grupo denotado multiplicativamente. Seja $RG$ o $R$-módulo livre gerado pelos elementos de $G$. Daí, um elemento de $G$ é expresso unicamente na forma $\sum_{g\in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g \in R$ e $\alpha_g = 0$ para quase todo $g$. Em $RG$ definimos a multiplicação*

$$(\sum_{g\in G} \alpha_g g).(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h gh$$

*e a soma*

$$(\sum_{g\in G}\alpha_g g)+(\sum_{g\in G}\beta_g g)=\sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)g$$

*que fazem de $RG$ um anel com unidade $1e$, onde $e$ é o elemento neutro de $G$, chamado de* **anel grupo** de $G$ sobre $R$.

**Lema 1.4.1** *Se $F$ é uma resolução projetiva de $R$ sobre $RG$, e $H$ é um subgrupo de $G$, então $F$ também é uma resolução projetiva de $R$ sobre $RH$.*

**Demonstração:** Consideremos a seguinte resolução projetiva de $R$ sobre $RG$:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Como cada $F_n$ é um $RG$-módulo projetivo, pela proposição 1.3.1(iii), temos que $F_n$ é um somando direto de um $RG$-módulo livre. Deste modo,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i\in I}(RG)_i.$$

Agora, como $RG$ é $RH$-módulo livre, assim,

$$RG \simeq \bigoplus_{j\in J}(RH)_j.$$

Portanto,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i,j}(RH)_{i,j}$$

e, novamente pelo proposição 1.3.1 (i), temos que $F_n$ é um $RH$-módulo projetivo.

Logo, $F$ é uma resolução projetiva de $R$ sobre $RH$. ■

## 1.5 Coinvariantes e Invariantes

Sejam $G$ um grupo e $M$ um $RG$-módulo (à esquerda).

**Definição 1.5.1** *O* **grupo dos coinvariantes** *de $M$, o qual denotamos por $M_G$, é dado por $M_G = M/A$, onde $A$ é o subgrupo aditivo tal que $A =< g\cdot m - m;\ g\in G$ e $m \in M >$.*

**Observação 1.5.1** *O nome coinvariantes vem do fato de $M_G$ ser o maior quociente de $M$ no qual $G$ atua trivialmente.*

**Proposição 1.5.1** *$M_G \simeq R\otimes_{RG} M$, onde $R$ é visto como um $RG$-módulo (à direita) com $G$-ação trivial.*

**Demonstração:** [3], II.2.1. ■

**Definição 1.5.2** *Seja $M$ um $RG$-módulo (à esquerda). O* **grupo dos invariantes** *de $M$, denotado por $M^G$, é dado por:*

$$M^G = \{m \in M;\ g \cdot m = m,\ \forall g \in G\}.$$

**Proposição 1.5.2** *$Hom_{RG}(R, M) \simeq M^G$, onde $R$ é um $RG$-módulo com $G$-ação trivial.*

**Demonstração:** Definindo $\psi : Hom_{RG}(R, M) \to M^G$ por $\psi(f) := f(1)$, temos que $\psi$ é um isomorfismo. ■

**Observação 1.5.2** *Todo $RG$-módulo (à esquerda) $M$ pode ser considerado como um $RG$-módulo (à direita), definindo a seguinte $G$-ação em $M$:*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & M \times G & \to & M \\ & (m, g) & \mapsto & m * g = g^{-1} \cdot m, \quad \forall g \in G,\ \forall m \in M. \end{array}$$

## 1.6 A (Co)homologia de um Grupo $G$

Seja $R$ um anel comutativo com unidade e considere o anel grupo $RG$.

Antes de definirmos (co)homologia, vamos considerar alguns resultados importantes sobre $\otimes_{RG}$ e $Hom_{RG}$.

**Definição 1.6.1** *Sejam $M$ e $N$ $RG$-módulos. Então, $M$ e $N$ são naturalmente $R$-módulos. A* **G-ação diagonal** *, definida em $M \otimes_R N$, é dada por:*

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n$$

**Proposição 1.6.1** *Sejam $M$ e $N$ $RG$-módulos (à esquerda). Temos*

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

*onde $A =< g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n;\ \forall m \otimes n \in M \otimes_R N,\ \forall g \in G >$.*

**Demonstração:** Vamos ver como obtemos $M \otimes_{RG} N$ de $M \otimes_R N$.

Consideremos a seguinte relação em $M \otimes_R N$:

$$(m * g) \otimes n \sim m \otimes g \cdot n,\ \ \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Mas, vendo $M$ como um $RG$-módulo (à direita), temos pela observação 1.5.2, que

$$m * g = g^{-1} \cdot m, \ \ \forall m \in M, \, \forall g \in G.$$

Assim,

$$(m * g) \otimes n = (g^{-1} \cdot m) \otimes n.$$

Logo,

$$\overline{(g^{-1} \cdot m) \otimes n} = \overline{m \otimes g \cdot n}. \tag{1.1}$$

Portanto,

$$M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}.$$

Trocando $m$ por $g \cdot m$ em (1.1), temos

$$\overline{m \otimes n} = \overline{g \cdot m \otimes g \cdot n}. \tag{1.2}$$

Definimos, então a $G$-ação diagonal de $G$ em $M \otimes_R N$:

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Consideremos em $M \otimes_R N$ tal ação e $A$ o subgrupo aditivo gerado pelos elementos $g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n$.

Assim, em $(M \otimes_R N)_G := \dfrac{M \otimes_R N}{A}$, estamos identificando elementos da forma $g \cdot m \otimes g \cdot n$ com $m \otimes n$, para todo $m \in M, n \in N, g \in G$.

Isto é o mesmo que identificar $(g^{-1} \cdot m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por (1.1) e (1.2)).

Deste modo,

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N.$$

■

**Corolário 1.6.1** $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

**Demonstração:** $M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G = N \otimes_{RG} M$. ■

Sejam $M$ e $N$ $RG$-módulos (à esquerda), e consideremos $Hom_R(M, N)$.

A ação de $G$ em $M$ e $N$ induz uma ação de $G$ em $Hom_R(M, N)$, dada por

$$\begin{array}{ccc} G \times Hom_R(M, N) & \to & Hom_R(M, N) \\ (g, f) & \mapsto & g \cdot f \end{array}$$

tal que $g \cdot f(x) = g f(g^{-1} \cdot x)$; $\ g \in G, f \in Hom_R(M, N)$ e $x \in M$.

**Observação 1.6.1** *O uso de $g^{-1}$ para definir a ação é necessário devido à contravariância de $Hom$ na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo $M$ a um RG-módulo à direita, considerando $m * g = g^{-1} \cdot m$.*

*Deste modo, a ação fica:*

$$g \cdot f(m) = gf(g^{-1} \cdot m) = gf(m * g).$$

*Assim, $Hom_R(M, N)$ será um RG-módulo (à esquerda).*

**Proposição 1.6.2** $Hom_{RG}(M, N) = Hom_R(M, N)^G$.

**Demonstração:** Seja

$$Hom_{RG}(M, N) = \{f \in Hom_R(M, N);\ g \cdot f(x) = f(g \cdot x)\}$$

ou seja, $f$ é equivariante.

Assim,

$$\begin{aligned}
f \in Hom_{RG}(M, N) &\Leftrightarrow g \cdot f(x) = f(g \cdot x),\ \forall g \in G, x \in M \\
&\Leftrightarrow f(x) = g^{-1} f(g \cdot x),\ \forall g \in G, x \in M \\
&\Leftrightarrow f(x) = g^{-1} \cdot f(x),\ \forall g^{-1} \in G, x \in M \\
&\Leftrightarrow gf = f,\ \forall g \in G \\
&\Leftrightarrow f \in Hom_R(M, N)^G.
\end{aligned}$$

Logo,

$$Hom_{RG}(M, N) = Hom_R(M, N)^G.$$

■

Veremos, agora, a definição de (co)homologia de um grupo $G$, considerando o caso $R = \mathbb{Z}$.

**Definição 1.6.2** *Sejam*

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda).*

*Podemos formar os* **complexos de cadeia** *e* **cocadeia**, *respectivamente:*

$$F \otimes_{ZG} M : \cdots \longrightarrow F_n \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{ZG} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} F_0 \otimes_{ZG} M \longrightarrow 0$$

$$Hom_{ZG}(F, M) : 0 \longrightarrow Hom_{ZG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{ZG}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow Hom_{ZG}(F_n, M) \longrightarrow \cdots$$

*O* **operador bordo** *é dado por* $\overline{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ *e, o* **operador cobordo**, *por*

$$\begin{array}{rlcl} \delta^n : & Hom_{ZG}(F_n, M) & \rightarrow & Hom_{ZG}(F_{n+1}, M) \\ & f & \mapsto & \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1} \end{array}$$

*(a) O n-ésimo* **grupo de homologia** *de $G$ com coeficientes em $M$ é definido por*

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{ZG} M).$$

*(b) O n-ésimo* **grupo de cohomologia** *de $G$ com coeficientes em $M$ é definido por*

$$H^n(G, M) := H^n(Hom_{ZG}(F, M)).$$

**Observação 1.6.2** *Tomando $M = \mathbb{Z}$, com $G$-ação trivial, temos*

$$H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{ZG} \mathbb{Z}) \overset{\text{prop.}1.6.1}{=} H_*((F \otimes_Z \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

**Proposição 1.6.3** *Dado um $\mathbb{Z}G$-módulo $M$, temos os isomorfismos:*

$$H_0(G, M) \simeq M_G.$$
$$H^0(G, M) \simeq M^G.$$

***Demonstração:*** *ver [3]* ■

**Exemplo 1.6.1** *Seja $G$ o grupo cíclico infinito com gerador $s$. Logo, $G =< s >\simeq \mathbb{Z}$. A sequência*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}G \overset{\partial}{\rightarrow} \mathbb{Z}G \overset{\varepsilon}{\rightarrow} \mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (*)$$

*é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $\partial(\alpha) = (s-1).\alpha$, para $\alpha \in \mathbb{Z}G$ e $\varepsilon$ a aplicação aumentação.*

*De fato, para mostrarmos que $(*)$ é uma resolução temos que mostrar que $\partial$ é injetora, $Im\partial = Ker(\varepsilon)$, e que $Im\varepsilon = \mathbb{Z}$, o que dividiremos em partes.*

**(a)** *$\partial$ é injetora.*
*Seja $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i \in \mathbb{Z}G$, com $n_i = 0$, para quase todo $i \in \mathbb{Z}$ (*).*
$\alpha \in ker\partial \Longrightarrow \partial(\alpha) = 0 \Longrightarrow (s-1)\alpha = 0 \Longrightarrow \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^{i+1} - \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i = 0 \Longrightarrow \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i \overset{reordenando}{\Longrightarrow} \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_{i-1} s^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i \overset{\mathbb{Z}G livre}{\Longrightarrow} n_{i-1} = n_i, \forall i \in \mathbb{Z} \overset{(*)}{\Longrightarrow} n_i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. *Logo,*

*$\alpha = 0$. Assim, $Ker\partial = \{0\}$.*

**(b)** *$Im\varepsilon = \mathbb{Z}$*

*Mostremos primeiramente que $Ker(\varepsilon) =< s-1 >$ como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda, isto é, $\forall \alpha \in Ker\varepsilon, \alpha = \beta.(s-1)$, para algum $\beta \in \mathbb{Z}G$.*

*De fato, seja $\alpha \in Ker(\varepsilon), \alpha = \sum_{i=1}^{k} n_i s^{r_i}$. Então, $\varepsilon(\alpha) = 0$. Assim, $\sum_{i=1}^{k} n_i = 0$. Daí,*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} n_i s^{r_i} - \sum_{i=1}^{k} n_i.1 = \sum_{i=1}^{k} n_i(s^{r_i} - 1).$$

*Mas, $s^{r_i} - 1 = (1 + s + ... + s^{r_i - 1})(s-1)$. Logo,*

$$\alpha = (\sum_{i=1}^{k} n_i(1 + s + ... + s^{r_i-1}))(s-1).$$

*Assim, existe $\beta = \sum_{1=1}^{k} n_i(1 + s + ... + s^{r_i-1}) \in \mathbb{Z}G$ tal que $\alpha = \beta(s-1)$.*

*Agora, $Im\partial = \{\partial(\alpha)|\alpha \in \mathbb{Z}G\} = \{(s-1)\alpha|\alpha \in \mathbb{Z}G\} \overset{Gcclico}{=} \{\alpha(s-1)|\alpha \in \mathbb{Z}G\} = Ker(\varepsilon)$.*

**(c)** *$Im\varepsilon = \mathbb{Z}$ segue do fato da aplicação aumentação ser sobrejetora.*

*Usando a resolução $(*)$ vamos calcular $H_*(G; M)$.*

*Tensorizando a resolução $(*)$ por $M$ sobre $\mathbb{Z}G$ temos:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\partial_1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0.$$

*Temos o seguinte isomorfismo*

$$\varphi : M \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M$$

$$m \to 1 \otimes m.$$

*com inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M$ dada por $\varphi^{-1}(\alpha \otimes m) = \alpha m$.*

*Como $\overline{\partial_1} = \partial_1 \otimes id$ então, através do isomorfismo $\varphi$, obtemos o seguinte complexo*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\overline{\partial_1}}} M \xrightarrow{\overline{\overline{\partial_0}}} 0 \quad (1),$$

*onde $\overline{\overline{\partial_1}} = \varphi^{-1} \circ \overline{\partial_1} \circ \varphi$.*

*Assim,* $\overline{\overline{\partial_1}}(m) = (t-1)m$. *Daí,* $H_*(G, M)$ *é a homologia do complexo* (1).

*Logo,*

$$H_0(G; M) = \begin{cases} M_G & (\textit{prop. 1.6.3}); \\ H_1(G; M) = \frac{Ker(t-1)}{\{0\}} = \{m \in M | (t-1)m = 0\} = \{m \in M | tm = m\} = M^G; \\ H_i(G; M) = 0, & \textit{para } i \geq 2. \end{cases}$$

*Note que:* $H_1(G; M) = M^G \overset{prop.\ 1.6.3}{=} H^0(G; M)$.

*Vamos calcular agora a cohomologia* $H^*(G; M)$.

*Aplicando* $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ *na resolução* $(*)$, *obtemos o complexo:*

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta_1} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \longrightarrow 0,$$

*onde* $\delta_1(f)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1)x) = (t-1)f(x)$.

*Logo,* $\delta_1 = t - 1$ *(multiplicação por* $t - 1$*).*

*Temos o seguinte isomorfismo*

$$\psi : Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \to M$$

$$f \mapsto f(1).$$

*com inversa*

$$\psi^{-1} : M \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)$$

$$m \mapsto \psi^{-1}(m) : \mathbb{Z}G \to M$$

*definida por* $\psi^{-1}(m)(g) = gm$.

*Daí, usando esses isomorfismos, temos o complexo*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\delta_1}} M \longrightarrow 0 \quad (2)$$

*onde* $\overline{\delta_1}(m) = (\psi \circ \delta_1 \circ \psi^{-1})(m) = (t-1)m$.

*Assim,* $H^*(G, M)$ *é a cohomologia do complexo* (2) *e, temos então:*

$$H^0(G; M) = \begin{cases} M^G & (\textit{prop. 1.6.3}); \\ H^1(G; M) = \frac{Ker 0}{Im(t-1)} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G; \\ H^i(G; M) = 0, & \textit{para } i \geq 2. \end{cases}$$

*Note que:* $H^1(G; M) = M_G \overset{prop.\ 1.6.3}{=} H_0(G; M)$.

*Em particular, se* $M = \mathbb{Z}$, *com* $G$*-ação trivial, temos*

$$H_0(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} = H^1(G;\mathbb{Z}); \\ H_1(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = H^0(G;\mathbb{Z}); \\ H_i(G;\mathbb{Z}) = H^i(G;\mathbb{Z}) = 0, \quad para\ i \geq 2. \end{cases}$$

**Proposição 1.6.4** ***(Interpretação topológica da (co)homologia de um grupo)*** *Sejam $G$ um grupo, $Y$ um $K(G,1)$-complexo e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então*

$$H_*(G, M) \simeq H_*(Y, \mathcal{M})$$

$$H^*(G, M) \simeq H^*(Y, \mathcal{M}),$$

*onde $\mathcal{M}$ é um sistema de coeficientes locais em $Y$ associado ao $\mathbb{Z}G$-módulo $M$. Em particular se a $G$-ação em $M$ é trivial então $\mathcal{M} = M$.*

**Demonstração:** ver [7] ■

**Exemplo 1.6.2** *Pelo exemplo 1.2.6 temos que $S^1$ é um $K(\mathbb{Z},1)$-complexo. Logo*

$$H_i(\mathbb{Z}) \simeq H_i(S^1) \simeq H^i(S^1) \simeq H^i(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}\ se\ i = 0, 1; \\ 0,\ se\ i \neq 0, 1. \end{cases}$$

**Exemplo 1.6.3** *Pelo exemplo 1.2.7 temos que $T^2$ é um $K(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},1)$-complexo. Logo*

$$H_i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq H_i(T^2) \simeq H^i(T^2) \simeq H^i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}\ se\ i = 0, 2; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ se\ i = 1\ ; \\ 0,\ se\ i \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

## 1.7 Grau de uma aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que $f : S^n \longrightarrow S^n$ é uma aplicação contínua. Temos que

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ se } i = 0, n; \\ 0, \text{ se } i \neq 0, n. \end{cases}$$

Escolha um gerador $\alpha$ de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$ e note que o homomorfismo induzido pela $f$ em $H_n(S^n)$ tem $f_*(\alpha) = m.\alpha$ para algum inteiro $m$. Este inteiro é independente da escolha do gerador já que

$$f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m.\alpha = m.(-\alpha).$$

O inteiro $m$ é o **grau de** $f$, denotado por $deg(f)$. Este inteiro também é muitas vezes referido como o **grau de Brouwer** como um resultado de seus esforços em desenvolver tal idéia.

As seguintes propriedades básicas do grau de uma aplicação podem ser encontradas em [20].

**(a)** Se $id$ denota a aplicação identidade de $S^n$ então $deg(\mathrm{id}) = 1$;
**(b)** Se $f,\, g : S^n \longrightarrow S^n$ são aplicações contínuas então $deg(f \circ g) = deg(f).deg(g)$;
**(c)** $deg(k_c) = 0$ onde $k_c : S^n \to S^n$ dada por $k_c(x) = c$ é a aplicação constante;
**(d)** Se $f,\, g : S^n \longrightarrow S^n$ são homotópicas então $deg(f) = deg(g)$;
**(e)** Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ é uma equivalência homotópica então $deg(f) = \pm 1$.

Uma propriedade menos óbvia é a de que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe uma aplicação de grau $m$ em $S^n$ quando $n > 0$.

Todas estas propriedades são resultados da Teoria de Homologia, e são facilmente obtidas.

Uma propriedade bem mais sofisticada é um resultado da teoria de homotopia de Hopf, a qual consiste no inverso da propriedade **(d)**: se $deg(f) = deg(g)$ então $f$ e $g$ são homotópicas.

Dessa forma, o grau é um invariante algébrico completo para o estudo de classes de homotopia de aplicações de $S^n$ em $S^n$.

## 1.8 Número de Lefschetz

Sejam M uma variedade fechada de dimensão m e $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação contínua. Então para cada k existe o homomorfismo induzido na homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

$$f_k : H_k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(M, \mathbb{Z})$$

Temos que $H_k(M, \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano finitamente gerado, logo

$$H_k(M, \mathbb{Z}) = \text{Parte livre} \bigoplus \text{Parte Torção}$$

Assim

$$H_k(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus T$$

onde a soma das p cópias de $\mathbb{Z}$ é a parte livre e T é a parte de torção.

Considere agora a seguinte aplicação:

$$H_k(M, \mathbb{Z})/T \xrightarrow{\overline{f_k}} H_k(M, \mathbb{Z})/T$$

Logo

$$\overline{f_k} : \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$$

Portanto temos uma matriz associada a $\overline{f_k}$. Seja $tr(f_k)$ o traço desta matriz.

**Definição 1.8.1** *Definimos o **número de Lefschetz** de f por*

$$\Lambda_f = \Lambda(f) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k tr(f_k)$$

**Observação 1.8.1** *$\Lambda_f$ independe das escolhas envolvidas e logo está bem definido. O número de Lefschetz depende apenas da classe de homotopia de f.*

**Teorema 1.8.1** ***(Teorema do ponto fixo de Lefschetz)*** *Se $\Lambda_f \neq 0$ então f possui um ponto fixo.*

**Demonstração:** [20], VI. ■

## 1.9 Produto Cross e Cup

Sejam M e N dois $\mathbb{Z}G$-módulos. Se $F \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Então $F \otimes F \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(G \times G)$(ver [3]).

Sejam $f \in Hom_G(F, M)$ e $g \in Hom_G(F, N)$. Definimos $f \times g \in Hom_{G \times G}(F \otimes F, M \otimes N)$ por $(f \times g)(x \otimes y) = (-1)^{pq} f(x) \otimes g(y)$ com $x \in F_p$ e $y \in F_q$.

**Definição 1.9.1** *Em cohomologia temos um produto induzido, chamado **produto cross***

$$H^p(G, M) \otimes H^q(G, N) \longrightarrow H^{p+q}(G \times G, M \otimes N)$$

$$u \otimes v \longrightarrow u \times v$$

*com $u = [f]$, $v = [g]$ e $u \times v = [f \times g]$.*

Sejam G um grupo e $d : G \longrightarrow G \times G$ definida por $d(g) = (g, g)$ (aplicação diagonal)

**Definição 1.9.2** *A composta*

$$H^p(G, M) \otimes H^q(G, N) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(G \times G, M \otimes N) \xrightarrow{d^*} H^{p+q}(G, M \otimes N)$$

*é chamado de **produto cup** e é denotado por $\cup$.*
*Assim dados $u \in H^p(G, M)$ e $v \in H^q(G, N)$ temos $u \cup v := d^*(u \times v)$*

## 1.10 Deslocamento de dimensões (dimension-shifting)

Dado um módulo M, considere $\overline{M} = \mathbb{Z}G \otimes M$ e a aplicação sobrejetora $\varphi : \overline{M} \longrightarrow M$ dada por $\varphi(\alpha \otimes m) = \alpha m$.

Seja $K = ker\varphi$. Pode-se mostrar(usando sequência exata longa de homologia, ver [3]) que

$$H_n(G, M) \approx \begin{cases} H_{n-1}(G, K), \text{ se } n > 1; \\ ker\{H_0(G, K) \to H_0(G, \overline{M})\}, \text{ se } n = 1 \end{cases}$$

Assim para calcularmos $H_n$, podemos, a princípio, nos reduzir a calcular $H_{n-1}$, desde que estejamos dispostos a mudar o módulo dos coeficientes. Se continuarmos este processo, ao final reduziremos o problema ao calculo de $H_0$.

Analogamente, considerando $\overline{\overline{M}} = Hom(\mathbb{Z}G, M)$ e a aplicação injetora $\psi : M \longrightarrow \overline{\overline{M}}$ dada por $\psi(m) = (\alpha) = \alpha m$.

Seja $C = coker\psi$. Obtemos

$$H^n(G, M) \approx \begin{cases} H^{n-1}(G, C), \text{ se } n > 1; \\ coker\{H^0(G, \overline{\overline{M}}) \to H^0(G, C)\}, \text{ se } n = 1 \end{cases}$$

## 1.11 Teorema dos Coeficientes Universais

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [12].

**Teorema 1.11.1** *Sejam C um complexo de cadeia de grupos abelianos com grupos de homologia $H_n(C)$ e $Hom(C_n, M)$ o complexo de co-cadeias com grupos de cohomologia $H^n(C, M)$. Então, para cada nivel, a sequência*

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(C), M) \longrightarrow H^n(C, M) \longrightarrow Hom(H_n(C), M) \longrightarrow 0$$

*é exata e cinde.* ■

**Observação 1.11.1** *Este teorema é conhecido por Teorema dos coeficientes universais para cohomologia porque é formalmente análogo ao Teorema dos coeficientes universais para homologia ([12] 3A.3.) que expressa a homologia com coeficientes arbitrários em termos da homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.*

**Corolário 1.11.1** *Se $H_{n-i}(C)$ é finitamente gerado e livre, então $H^n(C, M) \simeq Hom(H_n(C), M)$* ■

**Corolário 1.11.2** *Seja $G$ um grupo finito, então*

$$H^m(G,\mathbb{Z}_p) \cong Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{m-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p)$$

■

**Corolário 1.11.3** *Se os grupos de homologia $H_n$ e $H_{n-1}$ do complexo de cadeia de grupos abelianos $C$ são finitamente gerados, com grupos de torsão $T_n \subset H_n$ e $T_{n-1} \subset H_{n-1}$, então*

$$H^n(C,\mathbb{Z}) \simeq (H_n/T_n) \oplus T_{n-1}$$

■

**Corolário 1.11.4** *Seja $G$ um grupo finito, então*

$$H^{m+1}(G,\mathbb{Z}) = \textit{parte livre de } (H_{m+1}(G,\mathbb{Z})) \oplus \textit{ parte torção } (H_m(G,\mathbb{Z}))$$

■

## 1.12 Fórmula de Künneth

**Teorema 1.12.1** *Sejam $F$ um corpo e $X$ um espaço topológico, tal que $H_q(X,F)$ tem rank finito para todo $q$. Então, para qualquer espaço $Y$ existe um isomorfismo natural*

$$\alpha : \sum_{p+q=n} H^p(X,F) \otimes_F H^q(Y,F) \longrightarrow H^n(X \times Y, F)$$

*dado pelo produto cross $\times$.*

**Demonstração:** Ver [16] Teorema VIII.11.4. ■

**Observação 1.12.1** *Se $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ são as projeções, $u \in H^p(X,F)$ e $v \in H^q(Y,F)$, pode-se mostrar que*

$$u \times v = p_1^*(u) \cup p_2^*(v)$$

*Assim, em vista do teorema anterior, um elemento de $H^n(X \times Y, F)$ é soma de produtos cup de classes de homologia menores que $n$ (Ver [16] pag 175).*

Capítulo

2

# Cohomologia de Grupos Finitos: Grupos com Cohomologia Periódica

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre a cohomologia de grupos finitos que será de fundamental importância para os próximos capítulos, no estudo de G-coincidências de aplicações. Particularmente, a teoria de ação de grupos finitos em esferas está intimamente relacionada com a cohomologia desses grupos. Os resultados desse capítulo são baseados na referência [3].

## 2.1 Grupos atuando em esferas

Nesta seção apresentamos algumas propriedades interessantes da ação de um grupo finito em uma esfera.

**Proposição 2.1.1** *Sejam $G$ um grupo e $X$ um CW-complexo compacto. Se a ação de $G$ em $X$ é livre, então $G$ é finito.*

**Demonstração:**

Seja $X/G$ o espaço das órbitas de $X$.

Temos que

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/G \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

é recobrimento regular, e $G$ atua livremente em $X$ como o grupo das transformações de recobrimento (proposição 1.2.5)

Agora, dado $\overline{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\overline{x}_0) &= \{x \in X;\ p(x) = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ \overline{x} = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ x \in G(x_0)\}. \end{aligned}$$

Como a ação de $G$ em $X$ é livre, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com $G$. Além disso, a fibra $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta e fechada ([15], pág.136). Suponhamos que $p^{-1}(\overline{x}_0)$ seja infinita. Como esta é compacta, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação que está em $p^{-1}(\overline{x}_0)$, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta.

Deste modo, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é finita e, portanto, $G$ é finito. ■

**Proposição 2.1.2** *O grupo com dois elementos $\mathbb{Z}_2$ é o único grupo não trivial que atua livremente em uma esfera de dimensão par $S^{2k}$.*

**Demonstração:**

Sejam G um grupo atuando livremente em $S^{2k}$ e $f, g \neq id$

Como a ação é livre, temos que f não tem pontos fixos e ainda, como f é um homeomorfismo, temos $f \circ f^{-1} = id$. Portanto deg(f).deg($f^{-1}$)=1 e assim deg(f)=± 1.([20] pág 28) Mais ainda, deg(f)=-1, visto que se deg(f)=1, então o número de Lefschetz

$$\Lambda(f) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k tr(f_k) = \sum_{k=0}^{2k}(-1)^k tr(f_k) = (-1)^0 tr(f_0) + (-1)^{2k} tr(f_{2k}) =$$

$$1deg(f) + (-1)^{2k} deg(f) = 1 + (-1)^{2k} \neq 0$$

pois ($S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$).

Isto que implica que f tem pontos fixos (Teorema 1.8.1).

Agora, deg($f\circ$ f)=deg(f).deg(f)=deg($f^2$)=1 ou seja, $\Lambda(f^2) \neq 0$ e portanto $f^2$ tem ponto fixo.

Como a ação é livre segue que $f^2 = id$.

Analogamente $g^2 = id$.

Assim, se deg($f\circ$ g)=1 então $\Lambda(f \circ g) \neq 0$ e assim $f \circ g$=id, contudo $f^2 = id = g^2$, concluímos então que $f = g^{-1} = f^{-1} = g$

Logo $f = g$ e assim $G \approx \mathbb{Z}_2$. ■

**Observação 2.1.1** *Segue da proposição anterior que se $G$ é um grupo não trivial, $G \neq \mathbb{Z}_2$, atuando livremente em uma esfera $S^m$ então $m$ é ímpar.*

**Proposição 2.1.3** *Seja $X$ um $G$-complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $S^{2k-1}$. Então a ação de $G$ sobre $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$ é trivial.*

**Demonstração:**

A aplicação $\varphi_g : X \to X$, dada por $\varphi_g(x) = g \cdot x$, é um homeomorfismo sem pontos fixos se $g \neq 1$ (pois a $G$-ação sobre $X$ é livre).

Seja $\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i tr(\varphi_g)_{*,i}$ o número de Lefschetz de $\varphi_g$, onde a aplicação

$$(\varphi_g)_{*,i} : H_i(X) \to H_i(X)$$

é induzida de $\varphi_g$ no nível $i$ de homologia. Pelo Teorema 1.8.1, temos que $\Lambda_{\varphi_g} = 0$, já que $\varphi_g$ não tem pontos fixos se $g \neq 1$.

Por outro lado, como $S^{2k-1}$ é composta por uma 0-célula e uma $(2k-1)$-célula ($S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$), temos

$$\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i tr(\varphi_g)_{*,i} = tr(\varphi_g)_{*,0} - tr(\varphi_g)_{*,2k-1}$$

ou seja, $tr(\varphi_g)_{*,0} - tr(\varphi_g)_{*,2k-1} = 0$.

Além disso, como X é conexo por caminhos segue que $\varphi_{*,0} \equiv id$. Daí, $tr(\varphi_g)_{*,0} = 1$, pois $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Deste modo, $tr(\varphi_g)_{*,2k-1} = 1$ e, então, $(\varphi_g)_{*,2k-1} = id$, já que $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto, G atua trivialmente em $H_{2k-1}(X)$. ■

## 2.2 Resoluções Periódicas via ações livres em esferas

Veremos agora que, se um grupo finito $G$ atua em uma esfera de dimenão ímpar podemos construir, através dessa ação, uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e assim obtermos uma ferramenta para calcularmos a (co)homologia desse grupo.

**Teorema 2.2.1** *Seja $X$ um $G$-complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $S^{2k-1}$. Considere o complexo de cadeia celular aumentado de $X$, $C_*(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$. Então, a sequência*

$$\cdots \to C_{2k-1}(X) \to \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{n\circ\varepsilon} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

*onde $n : \mathbb{Z} = H_{2k-1}(X) \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ que é periódica de período $2k$.*

**Demonstração:**

A seqüência

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $n : \mathbb{Z} \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, e $C_i(X)$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma em cada órbita de células), é exata.

De fato, consideremos a seqüência abaixo

$$0 \longrightarrow Ker\ \partial_{2k-1} \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Temos que $\partial_{2k} : C_{2k}(X) = \{0\} \to C_{2k-1}(X)$ é aplicação nula (pois a dimensão é $2k-1$), e $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Agora,

$$H_{2k-1}(X) = \frac{Ker\ \partial_{2k-1}}{Im\ \partial_{2k}}$$

Assim, $Ker\ \partial_{2k-1} \simeq \mathbb{Z}$.

Como $H_i(X) = 0$, para $0 < i < 2k-1$, temos $Ker\ \partial_i = Im\ \partial_{i+1}$, para $0 < i < 2k-1$.

Mais ainda, $\dfrac{C_0(X)}{Ker\ \varepsilon} \simeq Im\ \varepsilon = \mathbb{Z}$ ($\varepsilon$ : sobrejetora).

Consideremos agora o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow\partial_0 & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Temos

$$\mathbb{Z} \simeq H_0(X) = \frac{Ker\ \partial_0}{Im\ \partial_1} = \frac{C_0(X)}{Im\ \partial_1}.$$

Logo,

$$\mathbb{Z} \simeq \frac{C_0(X)}{Ker\ \varepsilon} \simeq \frac{C_0(X)}{Im\ \partial_1}.$$

Como $Im\ \partial_1 \subset Ker\ \varepsilon$, pois

$$\epsilon(\partial_1(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i^1)) = \epsilon(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\partial_1(\sigma_i^1))) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\epsilon(\partial_1(\sigma_i^1))) = 0$$

temos $Im\ \partial_1 = Ker\ \varepsilon$.

A partir da seqüência dada anteriormente, obtemos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, de período $2k$, do modo a seguir.

Vamos denotar $C_*(X)$ por $C_*$ e considerar o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z} \arrow[dr, "n"] & & & & & & \\ \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_0 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "n \circ \varepsilon"] & C_{2k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde $n : \mathbb{Z} \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, e $C_i(X)$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma para cada órbita de células). Observe que a inclusão n é possível pois $H_{2k-1}(X) = \mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$G-módulo com a G-ação trivial.

Assim, construímos a seguinte seqüência:

$$\cdots \longrightarrow C_{2k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{n\circ\varepsilon} C_{2k-1} \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Já vimos que $Im\,\partial_1 = Ker\,\varepsilon$, além disso, $Ker\,\varepsilon = Ker\,(n\circ\varepsilon)$ ($n$ : injetora) e $Im\,(n\circ\varepsilon) = Im\,n = Ker\,\partial_{2k-1}$ ($\varepsilon$ : sobrejetora).

Deste modo, $(*)$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. ■

**Exemplo 2.2.1** *Se $G =< t >\simeq \mathbb{Z}_n$ é um grupo cíclico finito de ordem n, então:*

$$H_i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ se\ i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, \ se\ \ i\ é\ ímpar; \\ 0, \ se\ i\ é\ par. \end{cases} \qquad e \quad H^i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ se\ i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, \ se\ \ i\ é\ par; \\ 0, \ se\ \ i\ é\ ímpar. \end{cases}$$

*Consideremos $S^1$ vista como um CW-complexo com n vértices (que podem ser identificados com as raízes n-ésimas da unidade) e n 1-células. Vamos denotar por $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ os vértices e por $e_i = (v_i, v_{i+1})$ as 1-células de $S^1$, e definir a ação de G em $S^1$ por $t^k \cdot v_i = v_{k+i}$ e $t^k \cdot e_i = e_{k+i},\ k, i = 0, \ldots, n-1$.*

*Temos que G atua em $S^1$ como o grupo de rotações e, tal ação permuta livremente as células. Além disso, $v_i = t^i \cdot v_0$ e $e_i = t^i \cdot e_0$, $i = 0, \ldots, n$, assim, existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células. Portanto, $C_0(S^1) \simeq \mathbb{Z}G \simeq C_1(S^1)$.*

*Deste modo, temos a seqüência exata*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*Mas*

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = \frac{Ker\,\partial_1}{Im\,\partial_2} = Ker\,\partial_1.$$

*Então, obtemos a seqüência exata*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*e, daí*

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{n\circ\varepsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{n\circ\varepsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*

*Agora, vamos determinar* $\partial_1$ *e* $n \circ \varepsilon$*.*

• $\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t \cdot v_0 - v_0 = (t-1) \cdot v_0$.

*Logo,* $\partial_1$ *é a multiplicação por* $t-1$*.*

*Se* $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$*, então* $Ne_0$ *gera* $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$*.*

*Temos*

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = Ker\, \partial_1.$$

*Além disso,*

$$\begin{aligned}\partial_1(e_0 + t \cdot e_0 + \ldots + t^{n-1} \cdot e_0) &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})\partial_1(e_0) \\ &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})(t-1) \cdot v_0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

*Portanto,* $e_0 + t \cdot e_0 + t^2 \cdot e_0 + \ldots + t^{n-1} \cdot e_0 \in Ker\, \partial_1$*.*

*Agora, se* $x = a_0 e_0 + a_1 t \cdot e_0 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} \cdot e_0 \in Ker\, \partial_1$*, temos*

$$\begin{aligned}\partial_1(a_0 e_0 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} \cdot e_0) = 0 &\Rightarrow (a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1})\partial_1(e_0) = 0 \\ &\Rightarrow (a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1})(t-1) \cdot v_0 = 0\end{aligned}$$

*o que nos dá:*

$$(a_{n-1} - a_0)v_0 + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1} \cdot v_0 = 0.$$

*Mas, como* $C_0(X)$ *é um* $\mathbb{Z}$*-módulo livre que tem como base as 0-células* $\{v_0, t \cdot v_0, \ldots, t^{n-1} \cdot v_0\}$*, então,* $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$*. Assim,*

$$x = a_0(e_0 + t \cdot e_0 + \ldots + t^{n-1} \cdot e_0) = a_0 N e_0.$$

*Portanto,* $\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = Ker\, \partial_1 =< Ne_0 >$*.*

*Como* $Im(n \circ \varepsilon) = Ker\, \partial_1$*, temos que* $(n \circ \varepsilon)(v_0) = Ne_0$ *e, deste modo,* $(n \circ \varepsilon)(1_{\mathbb{Z}G}) = N$*. Logo,* $n \circ \varepsilon$ *é a multiplicação por* $N$*.*

*Assim, temos*

***a)*** $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $\varepsilon(\sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i) := \sum_{i=0}^{n-1} r_i$

***b)*** $N : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ *dada por* $N(\alpha) := (1 + t + \ldots + t^{n-1}).\alpha$

***c)*** $(t-1) : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ *tal que* $\alpha \to (t-1)\alpha$ *(multip. por* $(t-1)$*).*

*são homomorfismos de* $\mathbb{Z}G$*-módulos e,*

$(i)$ $\varepsilon$ *é epimorfismo*

*(ii)* $ker\varepsilon = Im(t-1) = kerN$
*(iii)* $Ker(t-1) = ImN$.

*Conseqüentemente, obtemos a seguinte resolução periódica, de período 2, de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$*:*

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

*Vamos calcular* $H_*(G;M)$ .
*Tensorizando a resolução por* $M$*, obtemos o complexo:*

$$\ldots \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{N}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0.$$

*Através dos isomorfismos* $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$ *e* $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G$*, este complexo toma a seguinte forma:*

$$\ldots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M_G \longrightarrow 0$$

*Daí,*

$$H_i(G;M) = \begin{cases} M_{G,} \ \textit{se } i = 0; \\ \frac{Kert-1}{ImN}, \ \textit{se } i \textit{ for ímpar;} \\ \frac{KerN}{Im(t-1)}, \ \textit{se } i \textit{ for par.} \end{cases}$$

*Em particular, no caso* $M = \mathbb{Z}$ *(com* $G$*-ação trivial), temos que* $(t-1) = 0$ *e* $N = n, \forall r \in \mathbb{Z}$*. Daí,* $Ker(t-1) = \mathbb{Z}$*,* $Im(t-1) = \{0\} = KerN$ *e* $ImN = n\mathbb{Z}$ *e, assim obtemos:*

$$H_i(G;\mathbb{Z}) = H_i(\mathbb{Z}_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ \textit{se } i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, \ \textit{se } i \textit{ for ímpar;} \\ 0, \ \textit{se } i \textit{ for par.} \end{cases}$$

*Analogamente calculamos a cohomologia de* $G$*.*

Temos a seguinte aplicação do exemplo anterior.

**Proposição 2.2.1** *Seja* $G$ *um grupo finito. Se* $Y$ *é um* $K(G,1)$*-complexo então* $Y$ *não tem dimensão finita. Em particular,* $Y$ *não pode ser variedade.*

**Demonstração:**
Como G é finito, existe um subgrupo cíclico finito $H \simeq \mathbb{Z}_n$ de $G$.

Suponhamos que Y é um $K(G,1)$-complexo de dimensão finita $m$. O complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de $Y$:

$$C_*(\widetilde{Y}): \quad 0 \longrightarrow C_m(\widetilde{Y}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Como C é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, e H é um subgrupo de G, então C é também uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$ (ver Lema 1.4.1).

Logo $H_k(H) = H_k(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}H} C_*(\widetilde{Y})) = 0$ se $k > m$, o que é um absurdo pelo exemplo 2.2.1.

Portanto Y não pode ter dimensão finita e assim, Y não pode ser variedade. ■

## 2.3 Cohomologia de Tate

A homologia e a cohomologia de um grupo são usualmente pensadas com tendo propriedades duais uma da outra. No caso do grupo ser finito, mais que propriedades duais, a homologia e a cohomologia tem propriedades bastante similares. Tate descobriu uma maneira ingênua de explorar essas similaridades entre $H_*(G)$ e $H^*(G)$ para $G$ finito. A saber, ele mostrou que existe um quociente $\tilde{H}^0$ de $H^0$ e um subgrupo $\tilde{H}_0$ de $H_0$ tal que a sequência $\ldots H_2,\ H_1,\ \tilde{H}_0,\ \tilde{H}^0,\ H^1, H^2, \ldots$ forme uma teoria (unificada) de cohomologia, denotada por $\widehat{H}^*$, denominada Cohomologia de Tate. Nesta secção apresentamos um pequeno resumo dessa teoria e algumas de suas propriedades.

Sejam $G = \{1 = t_0, t_1, .., t_{n-1}\}$ um grupo finito de ordem n e M um $\mathbb{Z}G$-módulo.

Considere a aplicação $N : M \longrightarrow M$ dada por $N(m) = (\sum_{i=0}^{n-1} t_i)m$ para todo $m \in M$.

Considere também os conjuntos

$$M_G = M/ < gm - m | g \in G, m \in M > \ \ e \ M^G = \{m \in M | gm = m, \forall g \in G\}.$$

**Proposição 2.3.1** *Com as notações anteriores, para todo $g \in G$ e $m \in M$ temos $N(gm) = N(m)$. Assim temos induzido um homomorfismo de grupos abelianos $\overline{N} : M_G \longrightarrow M^G$ definido por $\overline{N}(\overline{u}) = N(u)$, $\overline{m} \in M_G$.*

**Demonstração:**

Seja $g \in G$, aplicação $\varphi_g : G \longrightarrow G$ definida por $\varphi_g(t_i) = t_i g$ para $i = 0, .., n-1$ é bijetora. Logo para cada $i = 0, .., n-1$ existe um único k tal que $t_i g = t_k$, e para cada $k = 0, .., n-1$, existe um único i tal que $t_i g = t_k$.

Assim para cada $g \in G$ e $m \in M$

$$N(gm) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i(gm) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_i g)m = (\sum_{i=0}^{n-1} t_k)m = N(m)$$

Agora considere $\overline{N} : M_G \longrightarrow M^G$ definido por $\overline{N}(\overline{u}) = N(u)$. $\overline{N}$ está bem definida, pois

$$\overline{x_1} = \overline{x_2} \Longrightarrow x_1 - x_2 \in < gm - m | g \in G, m \in M > \Longrightarrow x_1 - x_2 = \sum_{j=0}^{s} n_j(gm_j - m_j) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N(x_1 - x_2) = \sum_{j=0}^{s} n_j(N(gm_j) - N(m_j)) = 0 \Longrightarrow N(x_1) = N(x_2)$$

■

**Definição 2.3.1** *A aplicação* $\overline{N} : M_G \longrightarrow M^G$ *dada por* $\overline{N}(\overline{u}) = N(u)$ *é chamada de* ***aplicação norma****.*

**Definição 2.3.2** *Sejam G um gupo finito e M um* $\mathbb{Z}G$*-módulo. A Cohomologia de Tate de G com coeficientes em M é dada por*

$$\widehat{H}^i(G, M) = H^i(G, M) \ para \ \ i > 0;$$

$$\widehat{H}^0(G, M) = coker\overline{N};$$

$$\widehat{H}^{-1}(G, M) = ker\overline{N} \ \ e$$

$$\widehat{H}^i(G, M) = H_{-i-1}(G, M) \ \ para \ \ i < -1,$$

*onde* $\overline{N} : M_G \longrightarrow M^G$ *é a aplicação norma.*

**Exemplo 2.3.1** *Se G é um grupo finito então* $\widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$ *onde* $n = |G|$*.*

*De fato, como a ação de G é livre, temos* $\overline{N} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *com* $\overline{N}(r) = (\sum_{i=0}^{n-1} t_i)r = nr$*. Assim*

$$\widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = coker\overline{N} = \mathbb{Z}/Im\overline{N} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n.$$

A cohomologia de Tate pode ser definida também como a seguir:

Seja G um grupo finito. Uma resolução completa de G é um complexo acíclico $\widehat{F} = (F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}G$- módulos projetivos, junto com uma aplicação $\varepsilon : F_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon : F_+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução no sentido usual, com $F_+ = (F_i)_{i\geq 0}$.

Uma maneira de obter uma resolução completa de G é: considere uma resolução $\varepsilon : F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Tomemos o dual de $\varepsilon : F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ adotando $F_{-i} = Hom(F_{i-1}, \mathbb{Z})$ para $i > 0$, isto nos fornece a seguinte resolução projetiva contrária $\eta : \mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{F}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow F_{-1} \longrightarrow F{-2} \longrightarrow ...$$

Ao unirmos $\varepsilon : F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ com sua dual $\eta : \mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{F}$ obtemos uma resolução completa de G.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \mathbb{Z} \arrow[dr, "\eta"] & & & & \\
\widehat{F}: \cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[rr] & & F_{-1} \arrow[r] & F_{-2} \arrow[r] & F_{-3} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Daí a cohomologia de Tate de um grupo finito G com coeficientes em um G-módulo M é definida como

$$\widehat{H}^*(G, M) = H^*(Hom_G(\widehat{F}, M))$$

onde $\widehat{F}$ é uma resolução completa de G.

**Observação 2.3.1** *Se G é finito então existe uma resolução completa de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de tipo finito, isto é, na qual os módulos projetivos $\widehat{F_i}$ são todos finitamente generados (ver [3], Proposição VI.3.5). Segue então que os grupos $\widehat{H}^i(G, \mathbb{Z})$ são finitamente gerados. Por outro lado, eles são anulados por $|G|$ ([3]) e daí eles são finitos.*

## Propriedades da Cohomologia de Tate

**1)** (*Dimensão Shifting*) Observamos que existe um processo de deslocamento de dimensões para a Cohomologia de Tate, ou seja: Dado um G-módulo M é possível encontrar G-módulos K e C (como em 1.10) tais que

$$\widehat{H}^i(G, M) \approx \widehat{H}^{i+1}(G, K) \text{ e } \widehat{H}^i(G, M) \approx \widehat{H}^{i-1}(G, C)$$

para todo i em $\mathbb{Z}$.([3] VI.5.)

**2)** (*Produto Cup*)

Existe um produto cup na cohomologia de Tate,

$$\widehat{H}^p(G, M) \otimes \widehat{H}^q(G, N) \longrightarrow \widehat{H}^{p+q}(G, M \otimes N)$$
$$u \otimes v \longmapsto u \cup v$$

com propriedades similares às propriedades do produto cup para cohomologia ordinária $H^*(G, \mathbb{Z})$ (ver 1.9). Por exemplo, o produto cup tem elemento identidade $1 \in \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} = \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z})$ e é associativo ($(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w)$). Assim $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ é um **anel graduado com identidade**. Além disso $\widehat{H}^*(G, M)$ é um módulo sobre $\widehat{H}^*(G, \mathbb{Z})$ para todo M.

**3)** Para $i \in \mathbb{Z}$, considere o produto cup

$$\widehat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z}$$
$$u \otimes v \longmapsto u \cup v$$

Então existe um isomorfismo

$$\rho : \widehat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow Hom(\widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})$$

definido por $\rho(u)(v) = u \cup v$ para $v \in \widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z})$(ver [3] Teorema VI.7.4).

**Observação 2.3.2** *Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, o elemento $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gera um subgrupo que é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. Assim $\mathbb{Z}_n \simeq n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

*Além disso, se $A$ é um grupo abeliano tal que $nA = 0$ para algum $n > 0$ então*

$$Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq Hom(A, n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \simeq Hom(A, \mathbb{Z}_n)$$

*Se $A$ é finito, $Hom(A, \mathbb{Z}_n) \simeq A$. Segue então da propriedade (3) que existe um isomorfismo*

$$\overline{\rho} : \widehat{H}^i(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow \widehat{H}^{-i}(G, \mathbb{Z})$$

*para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

**Proposição 2.3.2** *Seja $G$ um grupo finito tal que $H^{m+1}(G, \mathbb{Z}) \neq 0$ para algum $m \geq 1$, e seja $p$ um primo que divide a ordem de $H^{m+1}(G, \mathbb{Z})$. Então a cohomologia $H^m(G, \mathbb{Z}_p)$ é não trivial.*

**Demonstração:**

Pelo corolário 1.11.4, temos

$$H^{m+1}(G, \mathbb{Z}) = \text{parte livre de } (H_{m+1}(G, \mathbb{Z})) \oplus \text{ parte de torção } (H_m(G, \mathbb{Z}))\ (*)$$

Como G é um grupo finito, pela observação 2.3.1, a $\mathbb{Z}$-homologia de G é um grupo de torção em dimensões maiores que zero, ie, $H_m(G, \mathbb{Z})$= parte de torção $(H_m(G, \mathbb{Z}))$ e a parte livre de $(H_m(G, \mathbb{Z}))$ é igual a $\{0\}$. Assim, por (*) temos que $H_m(G, \mathbb{Z}) \cong H^{m+1}(G, \mathbb{Z})$. Pelo Teorema 1.11.1 temos que a sequência

$$0 \longrightarrow Ext(H_{m-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^m(G, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(H_m(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

é exata e cinde. Logo

$$H^m(G, \mathbb{Z}_p) \cong Hom(H_m(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{m-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$$

Como p divide a ordem de $H^{m+1}(G, \mathbb{Z})$, existe um subgrupo F de $H^{m+1}(G, \mathbb{Z})$ tal que $F \approx \mathbb{Z}_p$.

Entretanto, $H_m(G, \mathbb{Z}) \cong H^{m+1}(G, \mathbb{Z})$ e assim existe um subgrupo H de $H_m(G, \mathbb{Z})$ tal que $H \approx F$, i.e., $H \approx \mathbb{Z}_p$

Agora seja $i : \mathbb{Z}_p \to H_m(G,\mathbb{Z})$ a inclusão. Então i induz uma aplicação $i_\# : Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \to Hom(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$, que é sobrejetora.

Porém $Hom(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p$. De fato, a aplicação $\psi : Hom(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_p$ tal que $\psi(f) = f(\bar{1})$ é um isomorfismo.

Portanto $Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p)$ possui um somando isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Assim $H^m(G,\mathbb{Z}_p)$ é não trivial. ∎

**Exemplo 2.3.2** *Se $G = \mathbb{Z}_r$ e $p$ é um primo que divide $r$ então, para todo $m$ ímpar, $H^m(G,\mathbb{Z}_p) \neq 0$.*
*De fato, pelo exemplo 2.2.1, $H^{m+1}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r$. Como $p$ divide $r$, pela proposição anterior, $H^m(G,\mathbb{Z}_p) \neq 0$. Observe que $H^m(G,\mathbb{Z})$ é trivial, pelo exemplo 2.2.1.*

## 2.4 Grupos com Cohomologia Periódica

**Definição 2.4.1** *Um grupo finito $G$ tem* ***cohomologia periódica*** *se para algum $d \neq 0$ existe um elemento $u \in \widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$ que é invertível no anel $\widehat{H}^*(G,\mathbb{Z})$.*

Assim o produto cup com u nos dá o isomorfismo de periodicidade

$$u \cup - : \widehat{H}^n(G,M) \xrightarrow{\approx} \widehat{H}^{n+d}(G,M) \qquad (*)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo G-módulo M.

De fato

i) Se $u \cup v_1 = u \cup v_2 \overset{u^{-1}}{\Rightarrow} v_1 = v_2$, portanto $u \cup -$ é injetora.

ii) Seja $z \in \widehat{H}^{n+d}(G,M)$, existe $v = u^{-1} \cup z \in \widehat{H}^n(G,M)$ tal que $u \cup v = z$, pois $u^{-1} \in \widehat{H}^{-d}(G,M)$. Assim $u \cup -$ é sobrejetora.

Em particular, tomando $n = 0$ e $M = \mathbb{Z}$, temos que $\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/|G|.\mathbb{Z}$ e que u gera $\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$.

Se sabemos que um grupo G tem cohomologia periódica, então a tarefa de computar $\widehat{H}^*(G)$ se torna bem mais simples. Assim é interessante termos um critério para decidir quando G tem cohomologia periódica.

**Teorema 2.4.1** *As seguintes condições são equivalentes:*

*(i) G tem cohomologia periódica.*

*(ii) Existem inteiros n e d, com $d \neq 0$, tais que $\widehat{H}^n(G,M) \approx \widehat{H}^{n+d}(G,M)$ para todo G-módulo M.*

*(iii) Para algum $d \neq 0$, $\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/|G|.\mathbb{Z}$.*

*(iv) Para algum $d \neq 0$, $\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$ contêm um elemento u de ordem $|G|$.*

**Demonstração:**

$(i) \Rightarrow (ii)$ segue direto de (*).

Se (ii) é verdadeiro então,pela técnica de deslocamento de dimensões (dimension-shifting), temos que $\widehat{H}^k(G,N) \approx \widehat{H}^{k+d}(G,N)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo G-módulo N . De fato

Se existem inteiros n e d, com $d \neq 0$, tais que $\widehat{H}^n(G,M) \approx \widehat{H}^{n+d}(G,M)$ para todo G-módulo, então pelo deslocamento de dimensão temos

$$\widehat{H}^k(G,N) \approx .... \approx \widehat{H}^n(G,M) \approx \widehat{H}^{n+d}(G,M) \approx .... \approx \widehat{H}^{k+d}(G,N)$$

então vale pra todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo N G-módulo.

Tomando $k = 0$ e $N = \mathbb{Z}$, nós obtemos (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Segue direto de $d \neq 0, \widehat{H}^d(G,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_{|G|}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Seja $u \in \widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$ tal que ordem de u é $|G|$. Então o subgrupo $\mathbb{Z}u$ de $\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{|G|} \simeq |G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Considere $f : \mathbb{Z}u \longrightarrow |G|^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(u) = \frac{1}{|G|} + \mathbb{Z} \equiv 1 \in \mathbb{Z}_{|G|}$.

Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo (ver [3] pag 65), existe uma extensão de f:

$$\overline{f} : \widehat{H}^d(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

tal que $\overline{f}(u) = 1 \in \mathbb{Z}_{|G|}$.

Mas pela observação 2.3.2 $\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z}) \overset{\overline{\rho}}{\simeq} \widehat{H}^{-d}(G,\mathbb{Z})$. Assim existe $v \in \widehat{H}^{-d}(G,\mathbb{Z})$, $v = \overline{\rho}(u)$ com ordem $|G|$. Considerando a aplicação dada pelo produto cup

$$\widehat{H}^d(G,\mathbb{Z}) \overset{-\cup v}{\longrightarrow} \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_{|G|} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

segue que $\overline{f}(u) \equiv u \cup v = u.v$. Daí temos $u.v \equiv 1 \in \mathbb{Z}_{|G|}$ e assim u é invertível.

Da definição 2.4.1, segue que G tem cohomologia periódica. ∎

**Exemplo 2.4.1** *Se G é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo X homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $S^{2k-1}$então G tem cohomologia periódica.*

*De fato, pelo Teorema 2.2.1, G admite uma resolução periódica de período d $= 2k$ e assim, a condição (ii) do teorema anterior é verdadeira logo G tem cohomologia periódica.*

**Lema 2.4.1** *Sejam G um grupo finito atuando livremente em $S^{2n+1}$ e p um primo que divide a ordem de G. Então a cohomologia $H^i(G,\mathbb{Z}_p)$ contêm $\mathbb{Z}_p$ como um somando para $i = 2n+1$ e $i = 2n+2$.*

**Demonstração:**

Pelo Teorema 2.4.1 temos que $H^{2n+2}(G,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_{|G|}$, o grupo cíclico de ordem $|G|$. Como G é um grupo finito, pela observação 2.3.1 a $\mathbb{Z}$-homologia de G é um grupo de torção em dimensões maiores que zero, isto é, $H_i(G,\mathbb{Z})$= parte de torção $(H_i(G,\mathbb{Z}))$ e a parte livre de $(H_i(G,\mathbb{Z}))$ é igual a $\{0\}$.

Pelo corolário 1.11.4, temos

$$\mathbb{Z}_{|G|} \simeq H^{2n+2}(G,\mathbb{Z}) = \text{parte livre de } (H_{2n+2}(G,\mathbb{Z})) \oplus \text{ parte de torção}$$
$$(H_{2n+1}(G,\mathbb{Z})) = H_{2n+1}(G,\mathbb{Z})$$

Pelo corolário 1.11.2, temos

$$H^{2n+1}(G,\mathbb{Z}_p) \cong Hom(H_{2n+1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{2n}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p)$$

$$H^{2n+2}(G,\mathbb{Z}_p) \cong Hom(H_{2n+2}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{2n+1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p)$$

Como p divide $|G|$, então $H^{2n+2}(G,\mathbb{Z}_p)$ possui um somando direto que é $Ext(\mathbb{Z}_{|G|},\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$ (ver [12] 3.1) e $H^{2n+1}(G,\mathbb{Z}_p)$ tem um somando direto que é $Hom(\mathbb{Z}_{|G|},\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$. Logo o resultado segue. ∎

Capítulo

3

# $\mathbb{Z}_p$-coincidências para aplicações de esferas em CW-complexos

Este capítulo tem como referência o artigo [9], que estudamos em detalhes. O resultado principal estudado aqui é que toda aplicação de uma esfera (2n+1)-dimensional em um CW-complexo finito, k-dimensional e conexo, possui uma $\mathbb{Z}_p$-coincidência se p é um primo ($p > 2$) e $2n + 1 > pk$.

## 3.1 $\mathbb{Z}_p$-coincidências e algumas propriedades

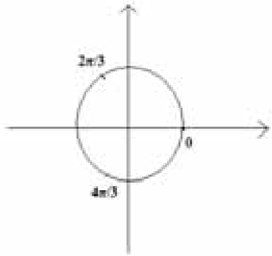
Considere $S^{2n+1}$ a esfera de dimensão 2n+1 no (n+1)-espaço complexo $\mathbb{C}^{n+1}$. Sejam $m > 1$ um inteiro e $T : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ uma transformação definida por

$$T(z_0, z_1, ..., z_n) = (e^{2\pi i/m} z_0, e^{2\pi i/m} z_1, ..., e^{2\pi i/m} z_n)$$

onde $z_0, z_1, ..., z_n$ são números complexos com $\sum_{i=0}^{n} |z_i|^2 = 1$.

Temos que $G = \{T^0 = id, T, T^2, ..., T^{m-1}\} \simeq \mathbb{Z}_m$ (operação composição) e G atua livremente em $S^{2n+1}$.

**Exemplo 3.1.1** *Vejamos um caso particular da ação anterior. Considere* $m = 3$ *e* $n = 0$. *Temos então* $T : S^1 \longrightarrow S^1$ *definida por* $T(z_0) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z_0$ *com* $|z_0| = 1$.




*A transformação rotaciona o ponto* $z_0$ *em um ângulo de* $\frac{2\pi}{3}$.

*Assim,* $G = \{T^0 = id, T, T^2\}$ *com a operação composição é um grupo isomorfo a* $\mathbb{Z}_3$ *e define uma ação em* $S^1$ *dada por*

$$G \times S^1 \longrightarrow S^1$$

$$(T^k, z) \longrightarrow T^k(z)$$

*Temos também que a ação de* $G$ *em* $S^1$ *é livre, pois* $T^k(z) = z$ *se, e somente se,* $k = 0$.

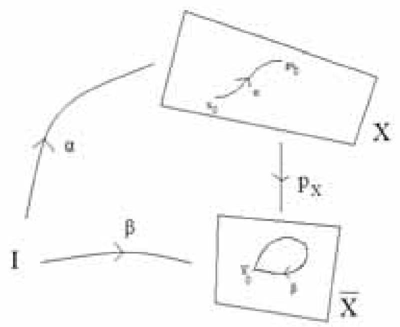
**Definição 3.1.1** *O espaço de órbitas* $\overline{S}^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ *é chamado de* ***espaço de lens*** *e é denotado por* $L_m^{2n+1}$.

**Definição 3.1.2** *Seja* $Y$ *um espaço topológico. Dizemos que uma aplicação* $f : S^{2n+1} \longrightarrow Y$ *possui uma* $\mathbb{Z}_m$***-coincidência*** *se exite um ponto* $x \in S^{2n+1}$ *tal que* $f(x) = f(T(x)) = f(T^2(x)) = ... = f(T^{m-1}(x))$. *Isto é, f aplica uma órbita da ação de G em* $S^{2n+1}$ *em um único ponto.*

**Exemplo 3.1.2** *Seja* $G = \mathbb{Z}_2$, *o Teorema de Borsuk-Ulam afirma que toda aplicação* $f : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$, *com* $2n + 1 \geq k$, *possui uma* $\mathbb{Z}_2$*-coincidência.*

Considere G um grupo finito atuando livremente em um espaço X, e um ponto fixo $x_0 \in X$. Seja $\overline{X}$ o espaço quociente de X por G, e $\overline{x_0} = p_X(x_0)$, onde $p_X : X \longrightarrow \overline{X}$ é a aplicação quociente. Da teoria de espaços de recobrimento, temos que $(X, p_X)$ é um recobrimento regular de $\overline{X}$. Assim dado $[\beta] \in \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0})$, seja $\alpha : I = [0, 1] \longrightarrow X$ o único levantamento de $\beta$ começando em $x_0$ ($\alpha(0) = x_0$).

Como a fibra $p_X^{-1}(\overline{x_0}) = Gx_0 = \{gx_0 \mid g \in G\}$ é a órbita do elemento $x_0$ pela ação de G, então $\alpha(1) \in p_X^{-1}(\overline{x_0})$ e assim $\alpha(1) = gx_0$ para um único $g \in G$ (pois a ação é livre).




**Lema 3.1.1** *Com as notações anteriores, seja* $\Psi_X : \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0}) \longrightarrow G$ *dado por* $\Psi_X([\beta]) = g$. *Então* $\Psi_X$ *está bem definido e é um homomorfismo.*

**Demonstração:**

Sejam $[\beta_1], [\beta_2] \in \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0})$ e considere $\alpha_1$ e $\alpha_2$ os levantamentos de $\beta_1$ e $\beta_2$, respectivamente, ambos começando em $x_0$.

Mostremos que $\Psi_X$ está bem definida.

De fato, $[\beta_1] = [\beta_2] \Longrightarrow [p_X \circ \alpha_1] = [p_X \circ \alpha_2] \Longrightarrow p_X \circ \alpha_1 \sim p_X \circ \alpha_2$.

Pelo Teorema 1.2.2 $\alpha_1 \sim \alpha_2$ e $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ e deste modo $\Psi_X([\beta_1]) = \Psi_X([\beta_2])$.

Seja agora $\Psi_X([\beta_1]) = g_1$ e $\Psi_X([\beta_2]) = g_2$ onde $\alpha_1(1) = g_1 x_0$ e $\alpha_2(1) = g_2 x_0$.

Seja $\alpha_2'$ um caminho em X dado por $\alpha_2'(t) = g_1 \alpha_2(t)$.

Assim $\alpha_2'(0) = g_1\alpha_2(0) = g_1 x_0 = \alpha_1(1)$ e $\alpha_2'(1) = g_1\alpha_2(1) = g_1 g_2 x_0$. Podemos definir o produto $\alpha_1 * \alpha_2'$.

Temos que $p_X \circ \alpha_2' = \beta_2$. De fato:

$$p_X \circ \alpha_2'(t) = p_X(g_1\alpha_2(t)) = p_X(\alpha_2(t)) = \beta_2(t)$$

Deste modo $p_X \circ (\alpha_1 * \alpha_2') = p_X \circ \alpha_1 * p_X \circ \alpha_2' = \beta_1 * \beta_2$. Logo $\alpha_1 * \alpha_2'$ é o levantamento de $\beta_1 * \beta_2$ começando em $x_0$. Assim $\alpha_1 * \alpha_2'(1) = \alpha_2'(1) = g_1 g_2 x_0$, o que implica que

$$\Psi_X([\beta_1][\beta_2]) = \Psi_X([\beta_1 * \beta_2]) = g_1 g_2 = \Psi_X([\beta_1])\Psi_X([\beta_2])$$

Portanto $\Psi_X$ é homomorfismo. ■

**Lema 3.1.2** *Sejam $X$ e $Y$ espaços conexos por caminhos e suponhamos $G$ um grupo finito atuando livremente em $X$ e $Y$. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação equivariante e denotamos por $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ a aplicação induzida dada por $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)} = p_Y(f(x))$. Então no diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(p_X)_*} & \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0}) & \xrightarrow{\Psi_X} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow \overline{f}_* & & \downarrow Id & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{(p_Y)_*} & \pi_1(\overline{Y}, \overline{y_0}) & \xrightarrow{\Psi_Y} & G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

*os quadrados são comutativos e as sequências horizontais são exatas.*

**Demonstração:**

Vamos dividir a demonstração em partes:

**(1)** $\Psi_X : \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0}) \longrightarrow G$ é um epimorfismo. De fato, seja $h \in G$.

Assim $hx_0 \in p_X^{-1}(\overline{x_0}) \subset X$. Como X é conexo por caminhos, existe um caminho f entre $x_0$ e $hx_0$

Temos que $[p_X \circ f] \in \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0})$ e $\Psi_X([p_X \circ f]) = h$.

Portanto $\Psi_X$ é sobrejetora.

**(2)** $(p_X)_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0})$ é injetora.

De fato, sejam $[\beta_1], [\beta_2] \in \pi_1(X, x_0)$ com $(p_X)_*([\beta_1]) = (p_X)_*([\beta_2])$.

Assim $[p_X \circ \beta_1] = [p_X \circ \beta_2] \Longrightarrow p_X \circ \beta_1 \sim p_X \circ \beta_2$ (laços homotópicos em $\overline{X}$). Pelo Teorema 1.2.2 temos que $\beta_1 \sim \beta_2$ (laços homotópicos em X), logo $[\beta_1] = [\beta_2]$.

Portanto $(p_X)_*$ é injetora.

**(3)** $Im(p_X)_* = ker\Psi_X$.

De fato, seja $[\beta] \in ker\Psi_X$, assim $\Psi_X([\beta]) = 1$.

Considere $\alpha$ o levantamento de $\beta$ começando em $x_0$. Como $\Psi_X([\beta]) = 1$ então $\alpha(1) = 1x_0 = x_0$. Logo $\alpha$ é um laço em X, e deste modo $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ e $p_X \circ \alpha = \beta$.

Temos então que $(p_X)_*([\alpha]) = [p_X \circ \alpha] = [\beta] \in Im(p_X)_*$.

Portanto $ker\Psi_X \subset Im(p_X)_*$ (i).

Considere agora $\gamma \in Im(p_X)_*$, assim existe $[\theta] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $(p_X)_*([\theta]) = [\gamma]$. Portanto $[p_X \circ \theta] = [\gamma] \Longrightarrow p_X \circ \theta \sim \gamma$.

Seja $\theta_1$ o levantamento de $\gamma$ começando em $x_0$. Temos então $p_X \circ \theta_1 = \gamma \sim p_X \circ \theta$. Como $\theta(0) = x_0 = \theta_1(0)$, pelo Teorema 1.2.2, temos que $\theta \sim \theta_1$ e $\theta(1) = \theta_1(1)$.

Do fato que $\theta$ é um laço , temos que $\theta(1) = \theta_1(1) = x_0$, e assim $\Psi_X([\gamma]) = 1$.

Portanto $[\gamma] \in ker\Psi_X$ e assim $Im(p_X)_* \subset ker\Psi_X$ (ii).

De (i) e (ii) temos que $Im(p_X)_* = ker\Psi_X$

Por (1), (2) e (3), temos que as sequências horizontais do diagrama são exatas.

**(4)** $(p_Y)_* \circ f_* = \overline{f}_* \circ (p_X)_*$.
De fato, seja $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, assim

$$((p_Y)_* \circ f_*)([\alpha]) = (p_Y)_*(f_*([\alpha])) = (p_Y)_*([f \circ \alpha]) = [p_Y \circ f \circ \alpha]$$

e

$$(\overline{f}_* \circ (p_X)_*)([\alpha]) = \overline{f}_*((p_X)_*([\alpha])) = \overline{f}_*([p_X \circ \alpha]) = [\overline{f} \circ p_X \circ \alpha]$$

Considere agora $x \in X$, temos que $(\overline{f} \circ p_X)(x) = \overline{f}(p_X(x)) = \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)} = p_Y(f(x)) = (p_Y \circ f)(x)$.
Logo $[p_Y \circ f \circ \alpha] = [\overline{f} \circ p_X \circ \alpha]$ e assim $(p_Y)_* \circ f_* = \overline{f}_* \circ (p_X)_*$.

**(5)** $Id \circ \Psi_X = \Psi_Y \circ \overline{f}_*$.
De fato, seja $[\beta] \in \pi_1(\overline{X}, \overline{x_0})$. Considere $\alpha$ o levantamento de $\beta$ começando em $x_0$, assim $\Psi_X([\beta]) = g$ onde $\alpha(1) = gx_0$.
Temos que $f \circ \alpha$ é o levantamento de $p_Y \circ f \circ \alpha$ começando em $y_0 = f(x_0)$.
Assim $(f \circ \alpha)(1) = f(\alpha(1)) = f(gx_0) = gf(x_0) = gy_0$ (f é equivariante).
Logo $\Psi_Y([p_Y \circ f \circ \alpha]) = g$.
Deste modo

$$(Id \circ \Psi_X)([\beta]) = Id(\Psi_X([\beta])) = Id(g) = g \qquad e$$

$$(\Psi_Y \circ \overline{f}_*)([\beta]) = \Psi_Y(\overline{f}_*([\beta])) = \Psi_Y([\overline{f} \circ \beta]) = \Psi_Y([\overline{f} \circ p_X \circ \alpha]) = \Psi_Y([p_Y \circ f \circ \alpha]) = g$$

Portanto $Id \circ \Psi_X = \Psi_Y \circ \overline{f}_*$.

De (4) e (5) temos que os retângulos do diagrama são comutativos. ∎

**Lema 3.1.3** *Se X é um espaço conexo por caminhos, então* $Hom(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_p)$.

**Demonstração:**
Se X é um espaço conexo por caminhos, pelo Teorema de Hurewicz (ver [12]), existe um epimorfismo $p : \pi_1(X) \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$ ($H_1(X; \mathbb{Z})$ é $\pi_1(X)$ abelianizado), com $kerp = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Assim temos uma aplicação

$$\theta : Hom(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_p)$$

definido por $\theta(\psi) = \psi \circ p$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\psi \circ p"] & \\
H_1(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Z}_p
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $\theta$ é um isomorfismo.

(i) $\theta$ é injetora.

Considere $\varphi, \psi \in Hom(H_1(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$, com $\theta(\varphi) = \theta(\psi)$.

Assim $\varphi \circ p = \psi \circ p$.

Seja $\overline{\alpha} \in H_1(X,\mathbb{Z})$. Como p é um epimorfismo, então existe $[\alpha] \in \pi_1(X)$ tal que $p([\alpha]) = \overline{\alpha}$. Assim $\varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(p([\alpha])) = (\varphi \circ p)([\alpha]) = (\psi \circ p)([\alpha]) = \psi(p([\alpha])) = \psi(\overline{\alpha})$, logo $\varphi = \psi$.

(ii) $\theta$ é sobrejetora.

Seja $\varphi \in Hom(\pi_1(X), \mathbb{Z}_p)$. Definimos $\psi : H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ por $\psi(\overline{\alpha}) = \varphi([\alpha])$, onde $\overline{\alpha} = p([\alpha])$. Assim $\theta(\psi) = \psi \circ p = \varphi$.

Vamos mostrar que $\psi \in Hom(H_1(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$.

(ii)(a) $\psi$ está bem definida.

Sejam $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in H_1(X)$, tais que $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. Portanto

$$\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Longrightarrow p([\alpha]) = p([\beta]) \Longrightarrow [\alpha].[\beta]^{-1} \in kerp = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

Deste modo $[\alpha].[\beta]^{-1} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})^{\eta_i} \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$, e

$$\varphi([\alpha].[\beta]^{-1}) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})^{\eta_i}.$$

Como $\mathbb{Z}_p$ é abeliano temos que $\varphi([\alpha].[\beta]^{-1}) = 1$ o que implica que $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$. Portanto $\psi(\overline{\alpha}) = \varphi([\alpha]) = \varphi([\beta]) = \psi(\overline{\beta})$.

Logo $\psi$ está bem definida.

(ii)(b) $\psi$ é um homomorfismo.

Sejam $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in H_1(X)$, então

$$\psi(\overline{\alpha}.\overline{\beta}) = \psi(p([\alpha]).p([\beta])) = \psi(p([\alpha].[\beta])) = \psi(p([\alpha * \beta])) =$$

$$= \varphi([\alpha * \beta]) = \varphi([\alpha].[\beta]) = \varphi([\alpha]).\varphi([\beta]) = (\psi \circ p([\alpha])).(\psi \circ p([\beta])) = \psi(\overline{\alpha}).\psi(\overline{\beta})$$

Assim $\psi(\overline{\alpha}.\overline{\beta}) = \psi(\overline{\alpha}).\psi(\overline{\beta})$.

Portanto $\theta$ é sobrejetora.

(iii) $\theta$ é homomorfismo.
Considere $\varphi, \psi \in Hom(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$,

$$\theta(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ p = \varphi \circ p + \psi \circ p = \theta(\varphi) + \theta(\psi)$$

Portanto $\theta$ é homomorfismo. ■

Finalizando essa seção vamos recordar a definição do homomorfismo de Bockstein e alguns resultados relacionados.

Considere

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow \Pi \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

uma sequência exata de grupos abelianos.

Se X é um CW-complexo, seu complexo de co-cadeias, com respeito aos grupos acima, forma uma sequência exata em cada nível, e temos assim a sequência exata de homologia

$$... \longrightarrow H^n(X, G) \longrightarrow H^n(X, E) \longrightarrow H^n(X, \Pi) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(X, G) \longrightarrow ...$$

**Definição 3.1.3** *O homomorfismo conexão $\beta$ é chamado de* ***homomorfismo de Bockstein*** *ou* ***operador de Bockstein*** *associado a sequência exata curta (*).([21] V.8.1 ou [12] 3.E)*

**Observação 3.1.1** *Estamos interessados principalmente no homomorfismo de Bockstein $\beta : H^m(X, \mathbb{Z}_m) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathbb{Z}_m)$ associado à sequência de coeficientes $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{m} \mathbb{Z}_{m^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$, especialmente quando $m$ é ímpar.*

O resultado a seguir pode ser encontrado em [21] II.7.(7.8 e 7.9).

**Teorema 3.1.1** *Sejam $p$ um número primo, $u$ um gerador de $H_1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ e $v = \beta(u)$, onde $\beta$ é o homomorfismo de Bockstein. Então:*

*(a) A $\mathbb{Z}_p$-homologia e a $\mathbb{Z}_p$-cohomologia de $L_p^{2n+1}$ são dadas por*

$$H_q(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \approx H^q(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p \qquad (0 \leq q < 2n + 2).$$

*(b) O homomorfismo de Bockstein $\beta : H^{2q-1}(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2q}(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ é um isomorfismo para $0 < q < n$.*

*(c) A aplicação $u \cup - : H^{2n}(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ é não trivial.*

*(d) $(\beta(u))^n \neq 0$ e $(\beta(u))^{n+1} = 0$ (multiplicação dada pelo produto cup).*

**Demonstração:** [21] II.7.8. ■

## 3.2 Um Critério de $\mathbb{Z}_p$-coincidência para Aplicações de Esferas em CW-complexos

O objetivo desta seção é apresentar em detalhes a demonstração do resultado principal do artigo [9].

Seja $Y$ um CW-complexo k-dimensional. Considere o produto cartesiano de p-cópias de $Y$: $\prod_1^p Y = Y \times ... \times Y$ e $\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_p) \in \prod_1^p Y |\ x_1 = x_2 = ... = x_p\}$ a diagonal.

Definimos $H : \prod_1^p Y \longrightarrow \prod_1^p Y$ por $H(x_1, x_2, ..., x_p) = (x_2, x_3, ..., x_p, x_1)$. Então $G = \{id = H^0, H, H^2, ..., H^{p-1}\} \simeq \mathbb{Z}_p$ e temos definida uma $\mathbb{Z}_p$-ação em $\prod_1^p Y$ por $H^j y = H^j(y)$, $j = 0, 1, .., p-1$.

Podemos obter um subcomplexo $Y^*$ de Y de forma que a ação de G em $Y^*$ seja livre. Considere $Y^* = \prod_1^p Y^k - \Delta$. Se p é primo a ação de G em $Y^*$ é livre. Essa ação pode não ser livre se p não for primo (ver exemplo abaixo).

**Exemplo 3.2.1** *Considere $F = \{H^0 = id, H, H^2, .., H^8\}$, temos que $F$ é um grupo com a operação composição e $F \simeq \mathbb{Z}_9$.*

*A ação de $F$ em $\prod_1^p Y$ é dada por*

$$F \times \prod_1^p Y \longrightarrow \prod_1^p Y$$

$$(H^j, (x_1, ..., x_9)) \longrightarrow H^j(x_1, ..., x_9)$$

*Assim $H^3(x_1, ..., x_9) = (x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_1, x_2, x_3)$.*

*Observe que se $x_1 = x_4 = x_7$, $x_2 = x_5 = x_8$ e $x_3 = x_6 = x_9$ com $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ então $(x_1, ..., x_9) \in Y^* = \prod_1^p Y - \Delta$ e $H^3(x_1, ..., x_9) = (x_1, ..., x_9)$.*

*Portanto para $p = 9$ a ação de $F$ em $Y^*$ não é livre.*

**Observação 3.2.1** *Observamos que a ação do exemplo acima deixa de ser livre pois conseguimos formar blocos de elementos iguais. Esses blocos são dados segundo a fatoração de p, logo se p for primo estes blocos não existem e a ação é livre.*

**Teorema 3.2.1** *Seja Y um CW-complexo, k-dimensional, finito e conexo. Se* $2n+1 > pk$ *onde p é um primo ímpar então toda aplicação* $f : S^{2n+1} \longrightarrow Y$ *possui uma* $\mathbb{Z}_p$*-coincidência.*

**Demonstração:**

Vamos provar por contradição. Suponha que $f : S^{2n+1} \longrightarrow Y$ seja uma aplicação sem $\mathbb{Z}_p$-coincidências, com p primo ímpar e $2n+1 > pk$.

Vamos construir algumas aplicações.

Primeiramente podemos definir uma aplicação $F : S^{2n+1} \longrightarrow Y^*$ dada por $F(x) = (f(x), f(T(x)), f(T^2(x)), ..., f(T^{p-1}(x)))$.

Afirmamos que F é $\mathbb{Z}_p$-equivariante.

De fato, considere a ação de $\mathbb{Z}_p$ em $S^{2n+1}$ dada pela aplicação T e a ação de $\mathbb{Z}_p$ em $Y^*$ dada pela aplicação H definidas anteriormente.

Sejam $k \in \mathbb{Z}_p$ e $x \in S^{2n+1}$, assim

$$F(kx) = F(T^k(x)) = (f(T^k(x)), f(T^{k+1}(x)), .., f(T^{k+p-1}(x))) =$$

$$= H^k(f(x), f(T(x)), .., f(T^{p-1}(x))) = H^k(F(x)) = kF(x)$$

Portanto $F(kx) = kF(x)$.

A aplicação F induz a aplicação $\overline{F} : L_p^{2n+1} \longrightarrow \overline{Y^*}$ nos espaços de órbitas dados pela ação de $\mathbb{Z}_p$.

Temos então o homomorfismo induzido $(\overline{F})_* : \pi_1(L_p^{2n+1}) \longrightarrow \pi_1(\overline{Y^*})$ que induz o homomorfismo $\Gamma : Hom(\pi_1(\overline{Y^*}), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(\pi_1(L_p^{2n+1}), \mathbb{Z}_p)$ transposto de $(\overline{F})_* : \pi_1(L_p^{2n+1}) \longrightarrow \pi_1(\overline{Y^*})$, isto é $\Gamma(\psi) = \psi \circ (\overline{F})_*$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(L_p^{2n+1}) \arrow[d, "(\overline{F})_*"'] \arrow[dr, "\Gamma(\psi)"] & \\
\pi_1(\overline{Y^*}) \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Z}_p
\end{tikzcd}$$

Temos também os epimorfismos naturais $g_1 : H^1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(H_1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$ e $g_2 : H^1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(H_1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$ dados pelo corolário 1.11.1 e mais ainda $g_2$ é um isomorfismo.

Além disso, $S^{2n+1}$ é conexo por caminhos e uma vez que $p \geq 3$, $Y^*$ também é conexos por caminhos. Logo seus espaços de órbitas $L_p^{2n+1}$ e $\overline{Y^*}$ também são conexos por caminhos.

Portanto, pelo lema 3.1.3 temos os isomorfismos naturais

$$\theta_1 : Hom(H_1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(\pi_1(\overline{Y^*}), \mathbb{Z}_p)$$

e

$$\theta_2 : Hom(H_1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom(\pi_1(L_p^{2n+1}), \mathbb{Z}_p)$$

Identificando cada laço com um 1-simplexo singular e usando a definição dos homomorfismos $\Gamma, g_1, g_2, \theta_1$ e $\theta_2$ e dos homomorfismos induzidos em cohomologia, temos que $\overline{F^*} : H^1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ pode ser fatorado como $\overline{F^*} = g_2^{-1}\theta_2^{-1}\Gamma\theta_1 g_1$.

Pelo lema 3.1.2, temos o diagrama comutativo abaixo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_1(L_p^{2n+1}) & \xrightarrow{\Psi_1} & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\overline{F})_*} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\
\pi_1(Y^*) & \xrightarrow{(p_{Y^*})_*} & \pi_1(\overline{Y^*}) & \xrightarrow{\Psi_2} & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

que implica que $\Psi_2 \circ (\overline{F})_*$ é um isomorfismo.

Deste modo temos que $\Gamma$ é sobrejetora. De fato:

Seja $\varphi \in Hom(\pi_1(L_p^{2n+1}), \mathbb{Z}_p)$, temos que $\varphi \circ (\Psi_2 \circ (\overline{F})_*)^{-1} \circ \Psi_2 \in Hom(\pi_1(\overline{Y^*}), \mathbb{Z}_p)$ e $\Gamma(\varphi \circ (\Psi_2 \circ (\overline{F})_*)^{-1} \circ \Psi_2) = \varphi \circ (\Psi_2 \circ (\overline{F})_*)^{-1} \circ \Psi_2 \circ (\overline{F})_* = \varphi$.

Como $\overline{F^*} = g_2^{-1}\theta_2^{-1}\Gamma\theta_1 g_1$ então $\overline{F^*}$ também é sobrejetora.

Considere agora $d_1$ um elemento não nulo de $H^1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ (Teorema 3.1.1) e seja $\beta : H^1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^2(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ o homomorfismo de Bockstein .

Pelo Teorema 3.1.1 (c) e (d), o elemento $d_1(\beta(d_1))^n = d_1 \cup \beta(d_1) \cup ... \cup \beta(d_1)$ é um elemento não nulo de $H^{2n+1}(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ (Teorema 3.1.1 (a)).

Como $\overline{F^*}$ é sobrejetora, existe $c_1 \in H^1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p)$ tal que $\overline{F^*}(c_1) = d_1$.

Considere o homomorfismo de Bockstein $\beta' : H^1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^2(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p)$. Desde que $\beta'$ é um homomorfismo conexão, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\overline{F^*}} & H^1(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \\
\downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\
H^2(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\overline{F^*}} & H^2(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

Assim $\beta \circ \overline{F^*} = \overline{F^*} \circ \beta'$. Temos então $\overline{F^*}(\beta'(c_1)) = \beta(\overline{F^*}(c_1)) = \beta(d_1)$.

Considere $\overline{F^*} : H^{2n+1}(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$. Usando a propriedade do produto cup dada em [16] pag 174, temos

$$\overline{F^*}(c_1(\beta'(c_1))^n) = \overline{F^*}(c_1 \cup \beta'(c_1) \cup ... \cup \beta'(c_1)) =$$

$$= \overline{F^*}(c_1) \cup \overline{F^*}(\beta'(c_1)) \cup ... \cup \overline{F^*}(\beta'(c_1)) =$$

$$= d_1 \cup \beta(d_1) \cup ... \cup \beta(d_1) = d_1(\beta(d_1))^n \neq 0$$

Daí $c_1(\beta'(c_1))^n$ é um elemento não nulo de $H^{2n+1}(\overline{Y^*}, \mathbb{Z}_p)$.

A contradição segue do fato que esta última cohomologia é nula pois $\dim \overline{Y^*} \leq \dim Y^* \leq pk < 2n + 1$. ■

Capítulo 4

# G-coincidências para aplicações de esferas de homotopia em CW-complexos

Neste capítulo apresentamos uma generalização do resultado apresentado no capítulo anterior. A principal referência para esse capítulo é o artigo [10]. Para o detalhamento da demonstração do resultado principal necessitaremos de alguns resultados preliminares sobre espaços classificantes e homomorfismo transfer.

## 4.1 Fibrados e Espaços Classificantes

Os resultados e as definições desta seção podem ser encontrados em [5] e [1].

**Definição 4.1.1** *Seja $G$ um grupo topológico atuando efetivamente em um espaço $X$, ou seja o homomorfismo $G \longrightarrow Homeo(X)$ é injetor. Um **fibrado** $E$ sobre $B$ com fibra $X$ e estrutura de grupo $G$ é uma aplicação $p : E \longrightarrow B$ junto com uma coleção de homeomorfismos $\{\varphi : U \times X \longrightarrow p^{-1}(U)\}$, onde $U$ são abertos em $B$ ($\varphi$ é chamada de **carta** sobre $U$), tais que:*

*(1)O diagrama*

$$\begin{tikzcd} U \times X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & U \\ p^{-1}(U) \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

*comuta para cada carta $\varphi$ sobre $U$.*

*(2)Cada ponto de $B$ possui um vizinhança sobre a qual existe um carta.*

*(3)Se $\varphi$ é uma carta sobre $U$ e $V \subset U$ é aberto, então a restrição de $\varphi$ a $V$ é uma carta sobre $V$.*

*(4)Para quaisquer duas cartas $\varphi, \varphi'$ sobre $U$, existe uma aplicação contínua $\theta_{\varphi,\varphi'} : U \longrightarrow G$ tal que*

$$\varphi'(u,x) = (u, \theta_{\varphi,\varphi'}(u).x)$$

*para todo $u \in U$ e todo $x \in X$. A aplicação $\theta_{\varphi,\varphi'}$ é chamada de função transição para $\varphi, \varphi'$.*

*(5)A coleção de cartas é maximal entre as coleções satisfazendo as condições anteriores.*

*A terminologia usual é chamar $B$ de **base**, $X$ é chamado de **fibra**, e $E$ é chamado de **espaço total**.*

**Definição 4.1.2** *Uma aplicação contínua $p : E \longrightarrow B$ é uma **fibração** se dadas aplicações contínuas $f$, $\tilde{f}$ e a inclusão $i$ como abaixo, existe uma aplicação contínua $g$ tal que o diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[ur, "g"] & B \end{tikzcd}$$

**Observação 4.1.1** *Uma aplicação de recobrimento é uma fibração. Para uma aplicação de recobrimento os levantamentos são únicos, o que não acontece para uma fibração arbitrária.*

O teorema a seguir é chamado de Teorema de Hurewicz para fibração e afirma que se uma aplicação é localmente uma fibração então ela também é uma fibração global.

**Teorema 4.1.1** *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Suponha que $B$ é paracompacto e que existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de $B$ tal que $p : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha$ é uma fibração para cada $U_\alpha$. Então $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração.* ■

**Corolário 4.1.1** *Se $p : E \longrightarrow B$ é um fibrado sobre um espaço paracompacto $B$, então $p$ é uma fibração.* ■

Seja G um grupo topológico, então G atua sobre ele mesmo pela translação a esquerda.

$$G \longrightarrow Homeo(G)$$

$$g \longmapsto (x \mapsto gx)$$

**Definição 4.1.3** *Um **G-fibrado principal** sobre B é o fibrado* $p : E \longrightarrow B$ *com fibra F=G e estrutura de grupo G atuando pela translação a esquerda.*

**Definição 4.1.4** *Sejam* $p : E \longrightarrow B$ *um fibrado com fibra X e estrutura de grupo G e* $f : B' \longrightarrow B$ *uma função contínua. Definimos o **pullback** de* $p : E \longrightarrow B$ *pela f como sendo o espaço*

$$f^*(E) = \{(b', e) \in B' \times E \mid p(e) = f(b')\}$$

**Teorema 4.1.2** ***Teorema de Milnor*** *Dado um grupo topológico G, existe um espaço B(G) e um G-fibrado com espaço total E(G)*

$$G \longrightarrow E(G) \longrightarrow B(G)$$

*tal que se* $G \longrightarrow E \longrightarrow X$ *é um G-fibrado principal sobre X qualquer então existe uma única classe de homotopia de aplicações* $f : X \longrightarrow B(G)$ *tal que* $f^*(E(G)) = E$.

**Definição 4.1.5** *O espaço B(G) é chamado de **espaço classificante** e a aplicação f é chamada de **aplicação classificante**.*

**Observação 4.1.2** *Se G é discreto, então a sequência exata de homotopia da fibração mostra que*

$$\pi_1(B(G)) = \begin{cases} 0, \ se\ n > 1; \\ G, \ se\ n = 1 \end{cases}$$

*Portanto B(G) é um K(G,1)-complexo (ver [1] II.1).*

**Teorema 4.1.3** *Seja* $\rho : E \longrightarrow B$ *uma fibração com espaço base conexo por caminhos e fibra F uma k-esfera de cohomologia com* $k \geq 1$ *e A um grupo abeliano. Então existe uma sequência exata longa*

$$... \xrightarrow{\rho^*} H^s(E, A) \longrightarrow H^{s-k}(B, A) \xrightarrow{\Psi} H^{s+1}(B, A) \xrightarrow{\rho^*} H^{s+1}(E, A) \longrightarrow H^{s+1-k}(B, A) \longrightarrow ...$$

**Demonstração:** Ver [19] 9.5.2. ■

**Definição 4.1.6** *Sejam $X$ e $Y$ dois $G$-espaços. Definimos $X \times_G Y$ como sendo o espaço quociente de $X \times Y$ sobre a relação de equivalência que relaciona $(gx, y)$ com $(x, gy)$ para todo $x \in X$, $y \in Y$ e $g \in G$.*

**Teorema 4.1.4** *Sejam $p : E \longrightarrow B$ um G-fibrado principal e $F$ um G-espaço. Então*

$$\pi : F \times_G E \longrightarrow B$$

*definida por $\pi[f, e] = p(e)$ é um fibrado com fibra $F$ e estrutura de grupo $G$ e é chamado de **F-fibrado associado ao G-fibrado principal**.*

**Demonstração:** Ver [2] pag 74. ■

## 4.2 Homomorfismos Transfer

Seja $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ um espaço de recobrimento de n-folhas, para algum n finito. Em adição a aplicação induzida em cadeias singulares $\pi_\sharp : C_k(\widetilde{X}) \longrightarrow C_k(X)$, existe também um homomorfismo na direção contrária $\tau : C_k(X) \longrightarrow C_k(\widetilde{X})$ que leva todo simplexo singular $\sigma : \Delta_k \longrightarrow X$ na soma dos n levantamentos distintos $\widetilde{\sigma} : \Delta_k \longrightarrow \widetilde{X}$. Isto é uma aplicação de cadeia que comuta com os homomorfismos bordo, logo induz os homomorfismos $\tau_* : H_k(X, A) \longrightarrow H_k(\widetilde{X}, A)$ e $\tau^* : H^k(\widetilde{X}, A) \longrightarrow H^k(X, A)$ para qualquer grupo de coeficientes A.

**Definição 4.2.1** *Os homomorfismos $\tau_*$ e $\tau^*$ são chamados de **homomorfismos transfer**.*

**Observação 4.2.1** *Considere $X$ e $Y$ G-complexos livres e as projeções de recobrimento $p_X : X \longrightarrow X/G$ e $p_Y : Y \longrightarrow Y/G$. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação equivariante com $\overline{f} : X/G \longrightarrow Y/G$ induzida nos espaços de órbitas, então temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
H^*(Y/G, \mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\overline{f^*}"] \arrow[d, "\tau^*"'] & H^*(X/G, \mathbb{Z}_p) \arrow[d, "\tau^*"] \\
H^*(Y, \mathbb{Z}_p) \arrow[r, "f^*"] & H^*(X, \mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

*onde $\tau^*$ é o respectivo homomorfismo transfer (Ver [2] pag 121).*

**Proposição 4.2.1** *Se $X$ é um CW-complexo k-dimensional, $G$ um grupo finito atuando livremente em $X$ e $R$ um anel com unidade. Então o homomorfismo transfer $\tau^* : H^k(X, R) \longrightarrow H^k(X/G, R)$ é sobrejetor.*

**Demonstração:**

A idéia da demonstração é considerar o complexo de cocadeias $S^j( \ ,R) = Hom(S_j( \ ,R),R)$, onde $S_j( \ ,R)$ é o módulo livre gerado pelas j-células abertas. Como X é um G-CW-complexo, então $X/G$ tem a CW-estrutura induzida; em particular se $\{e_\alpha\}$ são as k-células de $X/G$, então para cada $\alpha$ existem exatamente r k-células $e_\alpha^1,..,e_\alpha^r$ de X levadas pela projeção $\pi$ em $e_\alpha$, onde $r = |G|$ e $\pi : X \longrightarrow X/G$ é a aplicação quociente.

Neste caso o homomorfismo transfer $\tau^* : H^k(X,R) \longrightarrow H^k(X/G,R)$ é o homomorfismo induzido pela aplicação de cadeia $\tau : S^k(X,R) \longrightarrow S^k(X/G,R)$ dada por $\tau(\mu)(e_\alpha) = \mu(e_\alpha^1) + .. + \mu(e_\alpha^r)$.

Considere um k-cociclo $\eta \in S^k(X/G,R)$. Definimos uma k-cocadeia $\eta' \in S^k(X,R)$ por $\eta'(e_\alpha^j) = \eta(e_\alpha)$ se $j = 1$ e $\eta'(e_\alpha^j) = 0$ se $j \neq 1$ para todo $\alpha$. Assim $\tau(\eta') = \eta$; mais ainda, como X tem dimensão k, $S^{k+1}(X,R) = 0$ e então toda k-cocadeia de X é um k-cociclo. Assim $\eta'$ representa uma classes de cohomologia de $H^k(X,R)$ que é levada em $[\eta]$ pela $\tau^*$. ∎

## 4.3 G-coincidências de Aplicações e algumas propriedades

**Definição 4.3.1** *Seja X um CW-complexo. Se X tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera, então ele é chamado de* ***esfera de homotopia****.*

**Definição 4.3.2** *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f possui uma* ***G-coincidência*** *se aplica uma órbita de algum elemento $x \in X$ em um único ponto, ou seja, existe $x \in X$ tal que $f(gx) = f(x)$ $\forall g \in G$.*

Seja X um G-espaço. Para cada $x \in X$, considere $Gx$ a órbita do elemento x. Seja H um subgrupo de G, então H atua à direita em cada órbita $Gx$ de G como a seguir:

$$\begin{aligned} Gx \times H &\longrightarrow Gx \\ (gx,h) &\longmapsto ghx \end{aligned}$$

De fato,

(i) $gxe = gex = gx$ (e: elemento neutro de H e G)

(ii) $gx(h_1h_2) = g(h_1h_2)x = gh_1h_2x$ e $(gxh_1)h_2 = (gh_1x)h_2 = (gh_1)h_2x = gh_1h_2x$

Portanto $gx(h_1h_2) = (gxh_1)h_2$ para todo $h_1,h_2 \in H$.

Para cada $y \in Gx$ temos que $yH = \{yh|h \in H\}$ é a órbita da ação de H em $Gx$.

Assim o conceito de G-coincidência pode ser generalizado da seguinte forma:

**Definição 4.3.3** *Suponha que X é um G-espaço e H é um subgrupo de G. Dizemos que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ possui uma* ***(H,G)-coincidência*** *se existe um ponto $x \in X$ tal que f manda cada órbita da ação de H na G-órbita de x em um único ponto, isto é, $f(ghx) = f(gx), \forall h \in H$.*

**Proposição 4.3.1** *(a) Se H é o subgrupo trivial, então todo ponto de X é uma (H,G)-coincidência.*
*(b) Se H=G então um ponto de (H,G)-coincidência é um ponto de G-coincidência.*

**Demonstração:**

(a) De fato, seja $x \in X$ e considere sua G-órbita $Gx$. Agora, seja $y \in Gx$, logo existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Como H é trivial, então $yH = \{yh|h \in H\} = \{ye\} = \{y\}$. Deste modo $f(yH) = f(y)$. Como y foi pego arbitráriamente na órbita $Gx$, temos que x é um ponto de (H,G)-coincidência para f.

(b) Seja $x \in X$ um ponto de (H,G)-coincidência. Considere $x = ex \in Gx$, onde e é o elemento neutro de G.

Assim $f(xh) = f(x)$ para todo $h \in H$, ou seja $f(exh) = f(x)$ o que implica que $f(hx) = f(ehx) = f(x)$. Entretanto H=G, logo $f(Gx) = f(x)$.

Portanto x é um ponto de G-coincidência. ■

Seja $\Sigma^m$ uma esfera de homotopia na qual G atua livremente. Em vista dos resultados apresentados nas proposições 2.1.1 e 2.1.2, a partir de agora, vamos assumir que G é finito e m é ímpar, $m = 2n + 1$.

Seja $\pi : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow \Sigma^{2n+1}/G$ a aplicação quociente e seja $c : \Sigma^{2n+1}/G \longrightarrow B(G)$ a aplicação classificante para o G-fibrado principal $\pi : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow \Sigma^{2n+1}/G$.

**Lema 4.3.1** *Seja p um primo que divide $|G|$. Então o homomorfismo $c^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é não trivial.*

**Demonstração:**

Considere o G-fibrado $E(G) \longrightarrow B(G)$, dado pelo Teorema 4.1.2. Temos o fibrado $\Sigma^{2n+1} \longrightarrow E(G) \times_G \Sigma^{2n+1} \xrightarrow{\rho} B(G)$ com espaço base $B(G)$ e fibra $\Sigma^{2n+1}$ (ver [6] III.4 ou [2] II.2.4).

Como G é um grupo finito e atua livremente em $\Sigma^{2n+1}$, então $E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}$, é homotopicamente equivalente a $\Sigma^{2n+1}/G$ (ver [2] pag 208).

Considere a sequência exata de Gysin (Teorema 4.1.3) para $E = E(G) \times_G \Sigma^{2n+1} \sim \Sigma^{2n+1}/G$, $B = B(G)$, $F = \Sigma^{2n+1}$, $A = \mathbb{Z}_p$, $s = 2n$ e $k = 2n + 1$.

$$0 = H^{-1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\Psi} H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$$

Assim $\rho^*$ é injetora e pelo lema 2.4.1 $H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \supset \mathbb{Z}_p$, logo $H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p) \neq 0$.

Assim é suficiente mostrar que $c^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetora.

Agora, seja $t : \Sigma^{2n+1}/G \longrightarrow E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}$ uma equivalência de homotopia.

Logo $\rho t : \Sigma^{2n+1}/G \longrightarrow B(G)$ também classifica o G-fibrado principal $\pi : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow \Sigma^{2n+1}/G$, e assim, pelo Teorema 4.1.2, ela é homotópica a c.

Logo, $c^* \sim \rho^*$ e assim basta mostrar que

$$\rho^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$$

é sobrejetora.

Para isto considere novamente a sequência de cohomologia de Gysin generalizada associada ao fibrado $\rho : E(G) \times_G \Sigma^{2n+1} \longrightarrow B(G)$ ( Teorema 4.1.3 ou ver [19] 9.5.2).

$$H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^{2n+1}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^0(B(G), \mathbb{Z}_p)$$
$$\xrightarrow{\Psi} H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^{2n+2}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p).$$

Como $E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}$, é homotopicamente equivalente a $\Sigma^{2n+1}/G$ temos que $H^{2n+2}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) = 0$. Assim $\Psi$ é sobrejetora. Porém $H^0(B(G), \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ e como B(G) é um K(G,1)-complexo então pelo lema 2.4.1 $H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) \neq 0$. Logo a única possibilidade é que $H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, o que implica que $\Psi$ é um isomorfismo. Daí $\rho^*$ é sobrejetora e o fato está provado. ■

## 4.4 Um Critério para G-coincidência

Considere G um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo $\Sigma^m$ que tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera m-dimensional, Y um CW-complexo k-dimensional e uma aplicação $f : \Sigma^m \longrightarrow Y$.

Seja $G = \{g_1, g_2, ..., g_r\}$ uma enumeração fixa dos elementos de G, onde r é a ordem de G. Construímos a aplicação $G \times Y^r \longrightarrow Y^r$, onde $Y^r = Y \times Y \times ... \times Y$ (r vezes), como a seguir: para cada $g \in G$ e $(y_1, y_2, ..., y_r) \in Y^r$, seja $g(y_1, y_2, ..., y_r) = (y_{\sigma_g(1)}, y_{\sigma_g(2)}, ..., y_{\sigma_g(r)})$ onde a permutação $\sigma_g$ é definida por $g_i g = g_{\sigma_g(i)}$.

A aplicação acima é uma ação à esquerda em $Y^r$.

De fato,

(i) Seja e o elemento neutro de G, então $g_i e = g_i$ e $\sigma_e(i) = i$.

Portanto $e(y_1, y_2, ..., y_r) = (y_{\sigma_e(1)}, y_{\sigma_e(2)}, ..., y_{\sigma_e(r)}) = (y_1, y_2, ..., y_r)$.

(ii) $(gh)(y_1, y_2, ..., y_r) = (y_{\sigma_{gh}(1)}, y_{\sigma_{gh}(2)}, ..., y_{\sigma_{gh}(r)})$ onde $g_i gh = g_{\sigma_{gh}(i)}$.

Por outro lado $g(h(y_1, y_2, ..., y_r)) = g(y_{\sigma_h(1)}, y_{\sigma_h(2)}, ..., y_{\sigma_h(r)}) = g(x_1, x_2, .., x_r)$ onde $x_i = y_{\sigma_h(i)}$.

Logo $g(x_1, x_2, .., x_r) = (x_{\sigma_g(1)}, x_{\sigma_g(2)}, ..., x_{\sigma_g(r)}) = (y_{\sigma_h(\sigma_g(1))}, y_{\sigma_h(\sigma_g(2))}, ..., y_{\sigma_h(\sigma_g(r))})$

Observe que $g_{\sigma_h(\sigma_g(i))} = g_{\sigma_g(i)} h = g_i gh = g_{\sigma_{gh}(i)}$ e assim $\sigma_h(\sigma_g(i)) = \sigma_{gh}(i)$ o que implica que $(gh)(y_1, y_2, ..., y_r) = g(h(y_1, y_2, ..., y_r))$.

Para facilitar o entendimento vamos ver um exemplo da ação anterior.

**Exemplo 4.4.1** *Seja* $G = \{1 = g_1, t = g_2, t^2 = g_3\}$. *Assim temos as permutações* $g_1 t^2 = g_3$, $g_2 t^2 = g_1$, $g_3 t^2 = g_2$, $g_1 t = g_2$, $g_2 t = g_3$, $g_3 t = g_1$, $g_1 1 = g_1$, $g_2 1 = g_2$ *e* $g_3 1 = g_3$.

*Temos então* $1(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3)$, $t(y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, y_1)$ *e* $t^2(y_1, y_2, y_3) = (y_3, y_1, y_2)$

**Lema 4.4.1** *Seja* $H \subset G$ *e* $(Y^r)^H = \{x \in Y^r | hx = x, \forall h \in H\}$ *o conjunto dos pontos fixos pela ação de* $H$ *e seja* $F = \bigcup\limits_{H} (Y^r)^H$ *com* $H$ *percorrendo todos os subgrupos não triviais de* $G$. *A ação de* $G$ *em* $Y_0^{(r)} = Y^r - F$ *é livre.*

**Demonstração:**

Seja $x_0 \in F = \bigcup\limits_{H} (Y^r)^H$. Então existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ tal que $x_0 \in (Y^r)^H$. Assim $hx_0 = x_0$ para todo $h \in H$, o que implica que existe $h_0 \neq e = id$, $h_0 \in H \subset G$ tal que $h_0 x_0 = x_0$, ou seja a ação de G em F não é livre.

Reciprocamente, seja $x \in Y^r$ com $gx = x$ onde $g \neq id$. Considere $H =< g >$. Então H é um subgrupo não trivial de G e $g^j x = x$ para todo $g^j \in H$.

Logo, $x \in (Y^r)^H \subset F$. ■

**Lema 4.4.2** *Seja* $X$ *um G-espaço e* $f : X \longrightarrow Y$ *uma aplicação contínua. A aplicação* $\phi : X \longrightarrow Y^r$ *definida por* $\phi(x) = (f(g_1 x), f(g_2 x), ..., f(g_r x))$ *é equivariante.*

**Demonstração:**

De fato,

$\phi(gx) = (f(g_1 gx), f(g_2 gx), ..., f(g_r gx)) = (f(g_{\sigma_g(1)} x), f(g_{\sigma_g(2)} x), ..., f(g_{\sigma_g(r)} x))$.

Por outro lado $g\phi(x) = g(f(g_1 x), f(g_2 x), ..., f(g_r x)) = g(y_1, y_2, ..., y_r)$, onde $y_i = f(g_i x)$. Assim $g\phi(x) = (y_{\sigma_g(1)}, y_{\sigma_g(2)}, ..., y_{\sigma_g(r)}) = (f(g_{\sigma_g(1)} x), f(g_{\sigma_g(2)} x), ..., f(g_{\sigma_g(r)} x))$.

Logo $g\phi(x) = \phi(gx)$, ou seja $\phi$ é equivariante. ■

**Lema 4.4.3** *Seja* $f : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow Y$ *uma aplicação contínua. Se* $f$ *não possui (H,G)-coincidências para todo subgrupo não trivial* $H \subset G$, *então a ação de* $G$ *em* $\phi(\Sigma^{2n+1})$ *é livre, ou seja* $\phi(\Sigma^{2n+1}) \subset Y_0^{(r)}$.

**Demonstração:**

De fato, vamos supor que a ação de G em $\phi(\Sigma^{2n+1})$ não seja livre. Então existe $t \in G$, $t \neq id$ tal que $t\phi(x) = \phi(x)$, para algum $x \in \Sigma^{2n+1}$.

Portanto $\phi(x) \in F$, logo $\phi(x) \in (Y^r)^H$ para algum $H \subseteq G$.

Assim $h\phi(x) = \phi(x)$ para todo $h \in H$. Como $\phi$ é uma aplicação equivariante então $h\phi(x) = \phi(hx) = \phi(x)$, $\forall h \in H$. Logo,

$$(f(g_1 hx), .., f(g_r hx)) = (f(g_1 x), .., f(g_r x))$$

para todo $h \in H$.

Deste modo $f(ghx) = f(gx), \forall h \in H, \forall g \in G$. Portanto f tem uma (H,G)-coincidência. (absurdo). Assim a ação de G em $\phi(\Sigma^{2n+1})$ é livre. ■

Vamos aplicar todos os lemas anteriores na demonstração do seguinte resultado:

**Teorema 4.4.1** *Suponha que G é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo* $\Sigma^{2n+1}$ *que tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera 2n+1-dimensional e* $f : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow Y$ *é uma aplicação. Suponha ainda que uma das condições abaixo é verdadeira,*
*a)* $\Sigma^{2n+1}$ *é um CW-complexo finito 2n+1-dimensional e Y é um CW-complexo k-dimensional.*
*b) Y é um CW-complexo k-dimensional finito.*
*então, se* $2n+1 \geq |G|k$, *existe um subgrupo não trivial* $H \subset G$ *e uma (H,G)-coincidência para f.*

**Demonstração:**

Seja p um número primo tal que p divide a ordem de G. Vamos supor que f não tenha uma (H,G)-coincidência.

Considere a aplicação $\phi : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow Y^r$ do lema 4.4.2. Pelo lema 4.4.3 temos que $\phi(\Sigma^{2n+1}) \subset Y_0^{(r)}$. Assim $\phi$ se fatora em $Y_0^{(r)}$. Seja $\phi_0 : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow Y_0^{(r)}$ esta fatoração.

$$\Sigma^{2n+1} \xrightarrow{\phi_0} Y_0^{(r)} \xrightarrow{i} Y^r$$

Como $\phi$ é equivariante é claro que $\phi_0$ é uma aplicação equivariante. Seja $\gamma : Y_0^{(r)} \longrightarrow Y_0^{(r)}/G$ a aplicação quociente e $\overline{\phi}_0 : \Sigma^{2n+1}/G \longrightarrow Y_0^{(r)}/G$ a aplicação induzida por $\phi_0$. Seja $c_Y : Y_0^{(r)}/G \longrightarrow B(G)$ uma aplicação classificante para o G-fibrado principal $\gamma : Y_0^{(r)} \longrightarrow Y_0^{(r)}/G$. Então $c = c_Y\overline{\phi}_0 : \Sigma^{2n+1}/G \longrightarrow B(G)$ é uma aplicação classificante para o G-fibrado principal $\pi : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow \Sigma^{2n+1}/G$ da seção anterior.

Temos por hipótese que $2n+1 \geq |G|k = rk$. Primeiro, se $2n+1 > rk$ e (a) ou (b) são verdadeiros, então a dimensão topológica de $Y_0^{(r)}/G$ é menor que $2n+1$. Assim $c_Y^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p)$ é nula e $c^* = \overline{\phi}_0^* c_Y^* = 0$, o que contradiz o lema 4.3.1.

Vamos supor então que $2n+1 = rk$.

Se a hipótese (a) for verdadeira então $f(\Sigma^{2n+1})$ é compacto e daí está contido em um subcomplexo finito de Y.

Se a hipótese (b) for verdadeira então já temos que Y é um CW-complexo finito.

Assim, sem perda de generalidade, em ambos os casos podemos assumir que Y é um CW-complexo finito (caso contrário substituiríamos Y por $Y' = f(\Sigma^{2n+1})$).

A aplicação $i^* : H^{2n+1}(Y^r, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p)$ é uma parte da sequência de cohomologia do par $(Y^r, Y_0^{(r)})$

$$... \longrightarrow H^{2n+1}(Y^r, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{i^*} H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+2}(Y^r, Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow ....$$

Como $H^{2n+2}(Y^r, Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) = 0$, logo $i^*$ é sobrejetora.

Observe agora que $\phi$ pode ser escrita como:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{2n+1} & \xrightarrow{\psi} & \Sigma^{2n+1} \times ... \times \Sigma^{2n+1} & \xrightarrow{f^r} & Y \times ... \times Y \\ x & \longmapsto & (g_1x, ..., g_rx) & \longmapsto & (f(g_1x), ..., f(g_rx)) \end{array}$$

Aplicando o Teorema 1.12.1 iterativamente e usando a observação 1.12.1, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+1}(Y^r, \mathbb{Z}_p) & \overset{\cup}{\simeq} & \displaystyle\sum_{p_1+...+p_r=2n+1} H^{p_1}(Y, \mathbb{Z}_p) \otimes ... \otimes H^{p_r}(Y, \mathbb{Z}_p) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (f^r)^*} & & \Big\downarrow {\scriptstyle f^* \otimes ... \otimes f^*} \\ H^{2n+1}((\Sigma^{2n+1})^{(r)}, \mathbb{Z}_p)) & \overset{\cup}{\simeq} & \displaystyle\sum_{p_1+...+p_r=2n+1} H^{p_1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \otimes ... \otimes H^{p_r}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \psi^*} & & \\ H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) & & \end{array}$$

Usando os fatos que $dimY < 2n + 1$, $H^s(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) = 0$ para $0 < s < 2n + 1$ e o diagrama é comutativo, segue que $(f^r)^* = 0$ e daí $\phi^* = \psi^* \circ (f^r)^* = 0$.

Do fato que $i\phi_0 = \phi$ segue que $\phi_0^* : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ é nula.

Agora, como $\pi : \Sigma^{2n+1} \longrightarrow \Sigma^{2n+1}/G$ e $\sigma : Y_0^{(r)} \longrightarrow Y_0^{(r)}/G$ são projeções de recobrimento, existem homomorfismos transfer $\tau : H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ e $\tau_0 : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p)$.

Além disso, pela observação 4.2.1, temos que o seguinte retângulo comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\tau} & H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p) \\ {\scriptstyle \phi_0^*} \Big\uparrow & & {\scriptstyle \overline{\phi}_0^*} \Big\uparrow \\ H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p)) & \xrightarrow{\tau_0} & H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

Assim $\tau\phi_0^* = \overline{\phi}_0^*\tau_0$ e $\phi_0^* = 0$ o que implica que $\overline{\phi}_0^*\tau_0 : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é nula.

Como $Y_0^{(r)}$ é um CW-complexo (2n+1)-dimensional, pela proposição 4.2.1 o homomorfismo transfer $\tau_0 : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetor. Isto implica que $(\overline{\phi}_0)^* : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é o homomorfismo nulo.

Logo $c^* = \overline{\phi}_0^* c_Y^* = 0$, o que contradiz o lema 4.3.1. A contradição foi possível porque supomos que f não tem (H,G)-coincidência.

Assim existem um subgrupo não trivial $H \subset G$ e uma (H,G)-coincidência para f. ∎

Agora, o resultado apresentado no capítulo 3 sai como consequência do Teorema anterior.

**Corolário 4.4.1** *Sejam $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é um primo ímpar e Y um CW-complexo k-dimensional finito. Se G atua livremente em $S^{2n+1}$ e $2n+1 > pk$, então toda aplicação $f : S^{2n+1} \longrightarrow Y$ possui uma $\mathbb{Z}_p$-coincidência.*

**Demonstração:**

Pelo Teorema anterior, temos que existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ e uma (H,G)-coincidência para f. Entretanto como p é primo, o uníco subgrupo não trivial é ele mesmo. Logo $H = G$, ou seja f tem uma (G,G)-coincidência, o que corresponde a definição de G-coincidência. ∎

Finalizando esse trabalho, observamos que diversos autores continuaram o estudo de $G$-coincidências de aplicações $f : X \to Y$, procurando generalizar o espaço $X$, domínio da aplicação $f$. Por exemplo em [11] temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.4.2** *Sejam X um espaço topológico Hausdorff, paracompacto, conexo e localmente conexo por caminhos e G um grupo finito atuando livremente em X.*

*Suponha que $H^{m+1}(G, \mathbb{Z}) \neq 0$ para algum número natural $m \geq 1$ e $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ para $0 < i < m$. Se Y é um CW-complexo finito k-dimensional com $m \geq |G|k$ e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação, então existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ e f possui um ponto (H,G)-coincidência.*

**<u>Comentários Finais</u>:** É interessante observar que para o desenvolvimento deste trabalho foram necessários estudos em Álgebra, particularmente a teoria de cohomologia de grupos finitos, e diversos pré-requisitos em Topologia Álgébrica. Esses estudos enriqueceram bastante o trabalho e propiciaram uma melhor visão de resultados que utilizam a álgebra para aplicações à topologia.

# Referências Bibliográficas


[1] ADEM, A.; MILGRAM, R.J.; **Cohomology of finite groups**, Springer-Verlag, 1994.

[2] BREDON, G. E. **Introdution to Compact Transformation Groups**, Pure and Applied Mathematics-Academic Press, New York and London, 1972

[3] BROWN, K. S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag, 1982.

[4] CROOM, F.H.; **Basic Concepts of Algebraic Topology**, Springer Verlag, New York, 1978.

[5] DAVIS, J. F.; KIRK, P. **Lecture Notes in Algebraic Topology**, Graduate studies in mathematics, vol. 35, 2001.

[6] DIECK, T.; **Transformation Groups**, Berlin-New York, 1987.

[7] FEMINA, L. L.; **Cohomologia Relativa de Grupos e Dualidade de Poincaré**, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2008.

[8] GREENBERG, M.J. **Lectures on Algebraic Topology**. Benjamin, 1966.

[9] GONÇALVES, D.L.; PERGHER, P. L. Q.; **$\mathbb{Z}_p$-coincidence for maps of spheres into CW-complexes**, Kobe Journal of Math 15, pp. 191-195, 1998.

[10] GONÇALVES, D.L.; JAWOROWSKI, J.: PERGHER, P. L. Q.; **G-coincidences for maps of homotopy spheres into CW-complexes**, Proc. Amer. Math. Soc. 130, pp. 3111-3115, 2002.

[11] GONÇALVES, D.L.; JAWOROWSKI, J.: PERGHER, P. L. Q.; VOLOVIKOV, A.Y.; **Coincidences for maps of spaces with finite group actions** , Topology and its Applications 145, pp. 61-68, 2004.

[12] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2001.

[13] HU, S.T. **Introduction to Homological Algebra**. São Francisco: Holden-Day Series in Mathematics, 1968.

[14] MASSEY, W.S. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 1967.

[15] MASSEY, W.S.; **A Basic Course in Algebraic Topology**, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.

[16] MASSEY, W.S.; **Singular Homology Theory**, Springer-Verlag, New York, Inc., 1980.

[17] MUNKRES, J. R. **Elements of Algebraic Topology**. New York: The Benjamin - Cummings Publishing Company, 1984.

[18] SCHUBERT, H. **Topology**. MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.

[19] SPANIER, E.H. **Algebraic Topology**. New York: McGraw-Hill, 1966.

[20] VICK, J.W. **Homology Theory**. New York: Academic Press, Inc., 1973.

[21] WHITEHEAD, G.W.; **Elements of Homotopy Theory**, G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.

# Índice Remissivo