





25
Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/96

Teoria de Perturbação Causal para a Eletrodinâmica
Quântica em (2+1) Dimensões

Jeferson de Lima Tomazelli

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar



Agosto 1996

AGRACIAMENTO

Com a publicação desta obra, sinto-me obrigado a agradecer a todos os que me ajudaram e apoiaram durante a sua elaboração.

Em primeiro lugar, agradeço ao meu pai, Sr. João, e à minha mãe, Sr.ª Maria, por me terem dado a vida e por me terem educado.

Agradeço também ao meu professor, Sr. João, por me ter ensinado a escrever e a ler, e por me ter dado a oportunidade de estudar na escola.

Por fim, agradeço ao Sr. João, Sr.ª Maria e ao Sr. João, Sr.ª Maria, por me terem dado a oportunidade de estudar na escola.

A minha esposa Fátima
e a meu filho Victor

Agradecimentos

Reservo este espaço para manifestar minha gratidão àqueles que contribuíram para a concretização deste trabalho, em particular

– ao Bruto, que me colocou nesta estrada, indicando os caminhos;

– à Fátima, pela paciência e incentivo. Estas linhas que ora adormecem silenciosamente entre essas páginas um dia ganharão vida sob o olhar curioso de nossos filhos;

Por fim, resta agradecer à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Utiliza-se o método indutivo de Epstein e Glaser para a construção da matriz S da eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões (QED_3), ordem a ordem em teoria de perturbação, respeitando causalidade e invariância translacional. No espaço dos momentos, causalidade implica em relações de dispersão para gráficos de “loop” e, se levada corretamente em conta, a teoria torna-se livre de divergências no ultra-violeta. Nesse contexto, demonstra-se que a QED_3 é uma teoria bem definida perturbativamente e livre de ambigüidades no que se refere à geração dinâmica de massa para o fóton. Discute-se também a estrutura da teoria na região do infravermelho.

Palavras-chave: QED_3 , causalidade, distribuições, relações de dispersão, correções radiativas, polarização do vácuo, geração de massa.

Área do conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

We employ the inductive method of Epstein and Glaser for the construction of the S-matrix for quantum electrodynamics in (2+1) dimensions (QED_3), order by order in perturbation theory, by means of causality and translation invariance. In moment space, causality implies dispersion relations for loop graphs, and if taken appropriately into account no ultraviolet divergences occur. In this context, we show that perturbative QED_3 is well defined and free of ambiguities with respect to dynamical mass generation for the photon. We also discuss the behavior of the theory in the infrared region.

Keywords: QED_3 , causality, distributions, dispersion relations, radiative corrections, vacuum polarization, mass generation.

Índice

Introdução	1
1 O Grupo de Lorentz e a Equação de Dirac em (2+1) Dimensões	5
1.1 A Representação Espinorial do Grupo de Lorentz	5
1.2 As Equações de Campo Invariantes	10
1.3 Propriedades Algébricas da Equação de Dirac	15
2 A Matriz de Espalhamento no Espaço de Fock	18
2.1 Segunda Quantização no Espaço de Fock	18
2.2 Quantização do Campo de Dirac	26
2.3 O Operador de Espalhamento no Espaço de Fock	33
2.4 Quantização do Campo Eletromagnético	36
3 A Teoria de Perturbação Causal	42
3.1 A Bipartição Causal de Distribuições	42
3.2 Aplicação na QED em Três Dimensões	48
4 Correções Radiativas e Geração Dinâmica de Massa	54
4.1 A Polarização do Vácuo	54

4.2	O Propagador Corrigido do Fóton	60
4.3	A Auto-energia do Elétron	62
5	A Função de Vértice	67
6	A Fase Causal em (2+1) Dimensões	82
6.1	A Condição de Causalidade	82
6.2	Cálculo da Fase Causal	84
	Considerações Finais	91
A	Propriedades de Traço das Matrizes Gama	94
B	A Irredutibilidade da Representação de Fock	96
C	Funções Singulares em (2+1) Dimensões	100
D	Relações de Dispersão Úteis	105
E	O Teorema de Coleman-Hill	111
	Referências	114

Introdução

No início dos anos 60 Julian Schwinger^[1] levantou a possibilidade de que a invariância de gauge de um campo vetorial não necessariamente implica que a partícula associada possua massa nula, no regime de acoplamento forte com os campos de matéria. Esta possibilidade foi ilustrada com um modelo exatamente solúvel em $(1+1)$ dimensões, onde um férmion sem massa interage com um méson vetorial de massa “nua” nula, dando origem a uma excitação que corresponde a um campo escalar massivo. Este modelo, conhecido como modelo de Schwinger, é pois uma versão da eletrodinâmica quântica em $(1+1)$ dimensões.

Vinte anos mais tarde, R. Jackiw^[2], enfatizando aspectos topológicos do modelo de Schwinger (QED_2) e da eletrodinâmica quântica massiva em três dimensões (QED_3)^[3], identificou as estruturas responsáveis pela geração de massa, sem violação da invariância de gauge nessas teorias.

Teorias de gauge em duas e três dimensões (espaço-temporais) constituem um laboratório teórico no qual efeitos novos e inesperados são encontrados. Sua relevância para o mundo físico quadridimensional manifesta-se em diferentes aspectos. Por exemplo, teorias no espaço (Euclidiano) tridimensional descrevem o comportamento a altas temperaturas de teorias em quatro dimensões; neste sentido, modelos não massivos em três dimensões são extremamente atraentes. Entretanto, ainda não é claro se uma massa topológica

emerge a partir de uma redução dimensional à temperatura finita, pois isto implicaria em violação de P e T em teorias em quatro dimensões.

Em três dimensões, as partículas não se restringem apenas às estatísticas de Bose e de Fermi mas podem adquirir uma fase de troca arbitrária; tais partículas com estatística *fracionária* são conhecidas como *ânions* e estão associadas a representações irredutíveis do grupo de Poincaré em (2+1) dimensões para valores arbitrários de spin na reta real^[4]. No final da década passada demonstrou-se que um gás perfeito de ânions carregados, para certos valores do parâmetro estatístico, comporta-se como um supercondutor à temperatura zero^[5]. Acredita-se que ânions na forma de quasi-partículas estão relacionados com fenômenos físicos planares tais como o efeito Hall quântico fracionário e a supercondutividade a alta temperatura crítica^{[6],[7]}.

Uma teoria quântica de campos para a matéria aniônica consiste de férmions interagindo com um campo Abelian "estatístico" cuja dinâmica é governada por um termo topológico de Chern-Simons. Entretanto, como já discutimos, este termo deve levar a uma violação observável da paridade num supercondutor, fato que ainda não foi verificado experimentalmente.

Variantes da QED_3 foram propostas para descrever a supercondutividade aniônica levando em conta a conservação da paridade, onde é necessário se introduzir duas espécies de férmions^[8]; isto equivale à escolha de uma representação *redutível* da álgebra das matrizes de Dirac. Mais recentemente, Acharya e Narayana^[9] propuseram um tratamento unificado para descrever o efeito Hall quântico inteiro (IQHE) e efeito Hall quântico fracionário (FQHE), apenas no contexto da QED_3 .

Em processos de espalhamento, os conjuntos de estados assintóticos iniciais e finais definem espaços de Fock isomorfos. Deve então existir, sob determinadas condições, um operador unitário que associa os elementos do primeiro espaço com os elementos do último, a matriz S em segunda quantização, que contém a informação sobre todos os possíveis estados finais.

Na representação de interação para os operadores de campo, os elementos

da série perturbativa de Dyson para a matriz S , entre dois estados quaisquer, podem ser representados diagramaticamente de acordo com regras de Feynman bem estabelecidas. Entretanto, essa expansão, se escrita na forma usual, leva a integrais divergentes na região do ultravioleta do espaço dos momentos.

Para lidar com expressões matematicamente mal definidas devemos modificar a teoria de modo consistente, através de um processo de regularização, de modo a preservar as simetrias da teoria original. Um determinado processo de regularização nada mais é do que uma prescrição para que se possa extrair o verdadeiro conteúdo físico de uma teoria. Esta deve fornecer valores mensuráveis para as grandezas físicas de interesse, muitas vezes ocultos sob expressões divergentes.

A QED_3 será nosso objeto de estudo. Esta é uma teoria super-renormalizável o que significa que existe somente um número finito de diagramas divergentes até uma dada ordem em teoria de perturbação usual. Os únicos diagramas primitivos divergentes são aqueles que correspondem à auto-energia do fóton, em segunda e quarta ordem, e à auto-energia do elétron. Aqui vamos nos ocupar com o cálculo das inserções básicas de auto-energia em segunda ordem e da correção de vértice, centrando nosso estudo no problema da geração de massa invariante de gauge em $(2+1)$ dimensões.

Para tanto, ao invés de expandirmos a matriz S da QED_3 em produtos de operadores de campo ordenados temporalmente, podemos construí-la ordem a ordem em teoria de perturbação, através de requisitos físicos, investigando-se o suporte das distribuições de n pontos na série perturbativa. Estas levam a expressões matematicamente bem definidas, livres de divergências no ultravioleta. Neste caso, não é necessário se introduzir qualquer método de regularização, que possa levar a ambigüidades quanto aos resultados físicos.

O material aqui apresentado está disposto na seguinte forma. No capítulo 1 introduziremos o grupo de Lorentz em $(2+1)$ dimensões e discutiremos suas representações espinoriais, em particular aquela que leva à equação de Dirac. No capítulo 2 estudaremos a segunda quantização do campo de Dirac e do

campo eletromagnético, definindo o operador de espalhamento no espaço de Fock para um campo eletromagnético externo. No capítulo 3 apresentaremos o método indutivo de Epstein e Glaser para a construção da matriz S da eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões (QED_3), respeitando causalidade e invariância translacional e em seguida, no capítulo 4 estudaremos o problema de geração “dinâmica” de massa, através de correções radiativas para o propagador do fóton, e calcularemos a correção de auto-energia para o propagador do elétron, abordando o problema das divergências na região do infravermelho. No capítulo 5 calcularemos a função de vértice para a QED_3 e o fator de forma elétrico para o operador corrente. No capítulo 6 introduziremos a fase causal, exibindo sua relação com as flutuações do vácuo da teoria. Finalmente, nas considerações finais, comentaremos em linhas gerais as questões abordadas neste trabalho, chamando a atenção para novos problemas, objetos de investigações futuras.

Para não comprometer a continuidade do material apresentado, alguns pontos de caráter mais técnico foram detalhados nos apêndices.

1. O Grupo de Lorentz e a Equação de Dirac em (2+1) Dimensões

1.1 A Representação Espinorial do Grupo de Lorentz

O palco para os fenômenos físicos que mencionamos na introdução é o espaço pseudo-Euclidiano tridimensional real M dos pontos no espaço-tempo $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2)$, $x^0 = ct$. Um vetor x do espaço pode ser representado numa dada base e_μ ($\mu = 0, 1, 2$), como

$$x = x^\mu e_\mu . \quad (1.1)$$

O produto escalar de dois vetores x e y do espaço

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x^\mu e_\mu \cdot y^\nu e_\nu = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} \\ &\equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

induz uma métrica nesse espaço, onde

$$g_{\mu\nu} \equiv (e_\mu \cdot e_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

é o tensor métrico fundamental.

Nesse espaço, o grupo de Poincaré π é definido como o grupo de transformações reais

$$(a, \Lambda) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (1.4)$$

que deixa o intervalo

$$|x - y|^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 \quad (1.5)$$

invariante. O subgrupo de Lorentz L de π é o grupo de transformações $x \rightarrow \Lambda x$ que deixa $(x)^2$ inalterado. Vamos de agora em diante nos restringir ao subgrupo

$$L_+^\uparrow = \{ \Lambda \in L \mid \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 > 0 \}, \quad (1.6)$$

lembrando que este é o maior subgrupo conexo de L (os demais não são conectados à identidade).

O grupo L_+^\uparrow pode ser identificado com o grupo $SL(2, \mathbb{R})$ das matrizes reais unimodulares 2×2 , associadas às transformações lineares de determinante 1 num espaço vetorial bidimensional real^[10]. Com efeito, consideremos o espaço \mathcal{M} das matrizes reais Hermitianas com base $\{\tau_a\}$:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

À cada vetor x em nosso espaço $(2+1)$ dimensional M podemos associar uma matriz $\hat{x} \in \mathcal{M}$ pelo homeomorfismo

$$T : M \rightarrow \mathcal{M} : x \rightarrow \hat{x} = x^\mu \tau_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^1 & x^2 \\ x^2 & x^0 - x^1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

ou vice-versa,

$$T^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow M : \hat{x} \rightarrow x, \quad x_\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{x} \tau_\mu). \quad (1.9)$$

Notando que

$$\det \hat{x} = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = (x)^2, \quad (1.10)$$

inferimos que deve existir um homomorfismo entre L_+^\uparrow e qualquer grupo de automorfismos de \mathcal{M} que deixa $\det \hat{x}$ invariante. Assim, definindo a operação do operador

$$SL(2, \mathbb{R}) \ni \Omega : \hat{x} \rightarrow \hat{x}' = \Omega \hat{x} \Omega^T, \quad (1.11)$$

e verificando que

$$\det \hat{x}' = \det \Omega (\det \hat{x}) \det \Omega^T = \det \hat{x}, \quad (1.12)$$

pois $\det \Omega = \det \Omega^T = 1$, podemos concluir que

$$L_+^\uparrow \sim SL(2, \mathbb{R}).$$

Na realidade, denotando o centro $\{I, -I\}$ do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ por Z , temos o isomorfismo

$$L_+^\uparrow \approx SL(2, \mathbb{R})/Z$$

e, portanto, $SL(2, \mathbb{R})$ é um grupo de duplo recobrimento de L_+^\uparrow . Em outras palavras, os elementos $\Omega(\Lambda)$ e $-\Omega(\Lambda)$ de $SL(2, \mathbb{R})$ são mapeados na mesma transformação de Lorentz Λ , o que vale dizer que $SL(2, \mathbb{R})$ é uma representação bivalente de L_+^\uparrow , a chamada de representação espinorial, neste caso real, do grupo de Lorentz.

Um vetor

$$\mathbb{R}^2 \ni u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u)_a \quad (1.13)$$

se transforma sob uma transformação linear em $SL(2, \mathbb{R})$ de acordo com

$$u' = \Omega u = (\Omega)_a^b u_b, \quad \Omega \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (1.14)$$

A forma bilinear simplética

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det(u v) \quad (1.15)$$

é invariante sob $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\langle u', v' \rangle = \det(\Omega u \Omega v) = \det[\Omega(u v) \Omega^T] = \det^2 \Omega \det(u v) = \langle u, v \rangle. \quad (1.16)$$

Introduzindo a notação

$$\langle u, v \rangle = u_a \varepsilon^{ab} v_b, \quad (1.17)$$

com

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

junto com a notação contravariante

$$v^a = \varepsilon^{ab} v_b, \quad (1.19)$$

podemos expressar o invariante (1.15) de $SL(2, \mathbb{R})$ como uma soma sobre índices covariantes e contravariantes

$$\langle u, v \rangle = u_a v^a. \quad (1.20)$$

Para qualquer operador $S \in SL(2, \mathbb{R})$

$$S^T \varepsilon S = \varepsilon, \quad (1.21)$$

onde T denota a operação de transposição dos elementos de matriz.

Um operador de $SL(2, \mathbb{R})$ pode ser representado por uma matriz na base Hermitiana $\{\tau_a\}$ ou simplesmente por uma matriz formada pelo produto de dois elementos quaisquer dessa base, por exemplo, a matriz anti-Hermitiana

$$\tau_3 = \tau_1 \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

da álgebra de $SL(2, \mathbb{R})$. A nova base (não Hermitiana) $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ é também o conjunto de geradores da álgebra de Clifford real^[11]

$$[\tau_i, \tau_j]_+ = 2\bar{g}_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.23)$$

onde \bar{g} é o tensor métrico de um espaço pseudo-Euclidiano com assinatura $(+, +, -)$.

A complexificação

$$\gamma_0 = \tau_1 = \sigma_3, \quad \gamma_1 = i\tau_2 = i\sigma_1, \quad \gamma_2 = \tau_3 = i\sigma_2 \quad (1.24)$$

da álgebra de Clifford (1.23) é a álgebra das “matrizes de Dirac”

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu} ; \mu, \nu = 0, 1, 2 , \quad (1.25)$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- = -2i\epsilon_{\mu\nu\lambda} g^{\lambda\rho} \gamma_\rho , \quad (1.26)$$

onde g é o tensor métrico (1.3). Se definirmos

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{4}i[\gamma_\nu, \gamma_\mu]_- , \quad (1.27)$$

então

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = i(g_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - g_{\mu\lambda}M_{\rho\nu} + g_{\nu\lambda}M_{\rho\mu}) , \quad (1.28)$$

que é a álgebra de Lie de $SO(2,1) \sim L_+^\uparrow$. Exponenciando esta álgebra obtemos uma representação não unitária de L_+^\uparrow :

$$S(w) \equiv e^{iw_{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = e^{\frac{1}{2}iw \cdot \gamma} . \quad (1.29)$$

A representação fundamental $D^{\frac{1}{2}}$ de $SO(2,1)$ é dada pela ação do operador $S(w)$ sobre um espinor complexo

$$D_F(w) : \xi_a \rightarrow \xi'_a = (S(w))_a{}^b \xi_b . \quad (1.30)$$

Todas as demais representações de dimensão finita $(D^{\frac{1}{2}})^{\otimes n}$ de L podem ser construídas formando-se produtos tensoriais e somas diretas desta representação fundamental.

Por exemplo, seja \hat{x} um tensor espinorial simétrico de ordem 2 com traço nulo, que se transforma de acordo com

$$\hat{x}_{ab} \rightarrow \hat{x}'_{ab} = S_a{}^c S_b{}^d \hat{x}_{cd} \quad (1.31)$$

Podemos relacionar esses objetos a 3-vetores através de

$$\hat{x}_{ab} = x^\mu (\gamma_\mu)_{ab} . \quad (1.32)$$

Sob uma transformação de Lorentz

$$\begin{aligned}\hat{x}'_{ab} &= S_a^c S_b^d \hat{x}_{cd} = x_\mu S_a^c S_b^d (\gamma^\mu)_{cd} = \\ &= x_\mu (S \gamma^\mu S^T)_{ab} = x'_\nu (\gamma^\nu)_{ab} \\ &= x_\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu (\gamma^\nu)_{ab},\end{aligned}\tag{1.33}$$

onde Λ é a matriz da representação adjunta

$$\Lambda_\nu{}^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(S \gamma^\mu S^T \gamma_\nu) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu.\tag{1.34}$$

Assim, equivalentemente

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu\tag{1.35}$$

sob $S(w)$.

1.2 As Equações de Campo Invariantes

Os campos espinoriais são espinores que dependem de $x = (x^0, \mathbf{x})$ e se transformam sob transformações de Lorentz (1.35) de acordo com uma representação $(D^{\frac{1}{2}})^{\otimes n}$, como discutido anteriormente. As representações mais importantes são aquelas de dimensão mais baixa, ou seja,

1) $n = 0$: o campo correspondente é um campo escalar $\phi(x)$ que se transforma trivialmente sob (1.35),

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x');\tag{1.36}$$

2) $n = 1$: esta é a representação fundamental de $\text{SO}(2,1) \sim \text{SL}(2, \mathbb{R})$ realizada pelo espinor $\psi_a(x)$, que se transforma de acordo com (1.30),

$$\psi'_a(x') = S_a^b(\Lambda) \psi_b(x) = S_a^b(\Lambda) \psi_b(\Lambda^{-1}x');\tag{1.37}$$

3) $n = 2$: o campo correspondente $\hat{A}_{ab}(x)$ possui três componentes,

$$\hat{A}_{ab}(x) = A^\mu(x) (\gamma_\mu)_{ab}\tag{1.38}$$

e se transforma de acordo com (1.31),

$$\hat{A}'_{ab}(x') = S_a^c(\Lambda)S_b^d(\Lambda)\hat{A}_{cd}(x) . \quad (1.39)$$

Trata-se, pois, de um campo vetorial no espaço pseudo-Euclidiano definido na seção anterior, que se transforma como x em (1.35),

$$A'_\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) . \quad (1.40)$$

A correspondência (1.38) pode ser estendida aos operadores diferenciais

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \quad (1.41)$$

da seguinte forma

$$\hat{\partial} = (\hat{\partial})_{ab} = \gamma_\mu \partial^\mu = \gamma_0 \partial_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} . \quad (1.42)$$

Levantando os índices com o auxílio do tensor ε (1.18) resulta

$$\hat{\partial}^{ab} = \varepsilon^{ac} \varepsilon_{bd} \hat{\partial}_{cd} = (\varepsilon \hat{\partial} \varepsilon^T)^{ab} = (-\gamma_0^T \partial_0 + \vec{\gamma}^T \cdot \vec{\partial})^{ab} . \quad (1.43)$$

A partir de (1.42) e (1.43) podemos escrever as equações diferenciais invariantes para os diversos campos. Para um campo escalar necessitamos de um operador diferencial escalar, que existe somente em segunda ordem:

$$\hat{\partial}^{ab} \hat{\partial}_{ab} \phi(x) - 2a \phi(x) = 0 , \quad (1.44)$$

onde a é uma constante de dimensão $[L]^{-2}$. O operador diferencial invariante de segunda ordem

$$\begin{aligned} -\hat{\partial}_{cb} \hat{\partial}^{ab} &= (\gamma_0 \partial_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial})_{cb} (\gamma_0^T \partial_0 - \vec{\gamma}^T \cdot \vec{\partial})^{ab} \\ &= (\gamma_0 \partial_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial})(\gamma_0 \partial_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial})^a_c = (\partial_0^2 - \partial^2) \delta_c^a = \square \delta_c^a , \end{aligned} \quad (1.45)$$

é o operador D'Alambertiano em (2+1) dimensões. Identificando a constante a que aparece em (1.44) com o inverso do quadrado do comprimento de onda Compton de uma partícula de massa m

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} ,$$

obtemos a equação de Klein-Gordon

$$\square\phi(x) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x) = 0 . \quad (1.46)$$

Para um campo espinorial $\psi_a(x)$ podemos escrever uma equação de primeira ordem

$$\hat{\partial}^{ab}\psi_a(x) + a\psi_a(x) = 0 . \quad (1.47)$$

onde contraímos o índice do campo com o primeiro índice do operador diferencial devido à transposição das matrizes gama em (1.43). A última equação pode ser escrita na forma matricial como

$$(\gamma_0\partial_0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{\partial})\psi(x) = a\psi(x) . \quad (1.48)$$

Escolhendo

$$a = -\frac{i}{\hbar}mc$$

obtemos a equação de Dirac para uma partícula de massa m

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = mc\psi(x) , \text{ onde } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

é um espinor de duas componentes.

Uma vez que o espinor transformado $\psi'(x')$ em (1.37) deve satisfazer a mesma equação,

$$i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = mc\psi'(x') ,$$

concluimos que

$$i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu S(\Lambda)\psi(x) = mcS(\Lambda)\psi(x) .$$

Utilizando

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu ,$$

encontramos

$$i\hbar\Lambda_\mu{}^\nu S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\partial_\nu\psi(x) = mc\psi(x)$$

para todo $\psi(x)$. Conseqüentemente

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} S(\Lambda)^{-1} \gamma^{\mu} S(\Lambda) = \gamma^{\nu} ,$$

ou, aplicando-se a transformação de Lorentz inversa Λ^{μ}_{ν} ,

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^{\mu} S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} . \quad (1.50)$$

A matriz do lado esquerdo de (1.50) transforma-se como um 3-vetor.

A transformação de paridade \mathcal{P} em (2+1) dimensões consiste em se inverter um dos eixos do sistema de coordenadas espaciais, digamos o eixo y , pois a inversão de ambos os eixos corresponderia a uma rotação de um ângulo $\theta = \pi$ do sistema no plano xy . Assim, sob a transformação

$$\mathcal{P} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = (x, -y) , \quad \psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x') = P\psi(x) \quad (1.51)$$

a equação de Dirac (1.49) torna-se

$$\begin{aligned} & i\hbar(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 - \gamma^2 \partial_2) \tilde{\psi}(x') \\ &= i\hbar(\gamma^{0T} \partial_0 + \gamma^{1T} \partial_1 + \gamma^{2T} \partial_2) \tilde{\psi}(x') \\ & i\hbar(\gamma^T)^{\mu} \partial_{\mu} \tilde{\psi}(x') = mc \tilde{\psi}(x') . \end{aligned} \quad (1.52)$$

O espinor $\tilde{\psi}$ deve satisfazer esta mesma equação em qualquer referencial de Lorentz. Assim, procedendo de maneira análoga à que levou a (1.50), resulta

$$S(\Lambda)^{-1} (\gamma^T)^{\mu} S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu} (\gamma^T)^{\nu} . \quad (1.53)$$

Multiplicando a última equação à direita por $(\gamma^T)_{\rho}$ e tomando o traço obtemos

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} = \frac{1}{2} \text{Tr}(S(\Lambda)^{-1} (\gamma^T)^{\mu} S(\Lambda) (\gamma^T)_{\rho}) . \quad (1.54)$$

De (1.21) temos

$$S^{-1} = \varepsilon^{-1} S^T \varepsilon = \varepsilon^T S^T \varepsilon .$$

Como

$$\varepsilon(\gamma^T)^\mu = \gamma^\mu \text{ e } (\gamma^T)_\rho \varepsilon^T = \gamma_\rho ,$$

reproduzimos a equação (1.34) a partir de (1.54).

Se escrevermos as equações para as componentes de $\tilde{\psi}(x')$,

$$i\hbar(\partial_0\tilde{\psi}_1(x') - i\partial_1\tilde{\psi}_2(x') + \partial_2\tilde{\psi}_2(x')) = mc\tilde{\psi}_1(x') \quad (1.55)$$

$$i\hbar(-\partial_0\tilde{\psi}_2(x') - i\partial_1\tilde{\psi}_1(x') - \partial_2\tilde{\psi}_1(x')) = mc\tilde{\psi}_2(x') ,$$

podemos verificar que para

$$\tilde{\psi}_1(x') = \psi_2(x) \text{ e } \tilde{\psi}_2(x') = -\psi_1(x) ,$$

isto é,

$$\tilde{\psi}(x') = \gamma_2\psi(x) , \quad (1.56)$$

obtemos a equação de Dirac (1.49) para uma partícula de massa $-m$. Isto nos permite inferir que o termo de massa na densidade Lagrangeana do campo de Dirac deve trocar de sinal sob \mathcal{P} , como veremos na seção seguinte. Assim, ao operador P que atua sobre $\psi(x)$ em (1.51) associamos a matriz γ_2 . De modo análogo, quando invertemos o eixo x do sistema de coordenadas devemos associar a P a matriz σ_1 .

Para finalizar esta seção, retomemos a discussão das equações invariantes para a representação $D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}}$, relacionada com o campo vetorial $A^\mu(x)$ através de (1.38). A equação diferencial invariante mais simples para esse campo é

$$\hat{\partial}^{ab}\hat{A}_a b = 0 , \quad (1.57)$$

ou, levando em conta (1.43),

$$\text{Tr}(-\gamma_0\partial^0 + \vec{\gamma}\cdot\vec{\partial})(\gamma_0 A^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{A}) = -\partial_0 A^0 + \vec{\partial}\cdot\vec{A} = 0 , \quad (1.58)$$

pois as matrizes de Dirac definidas em (1.24) possuem traço nulo. Esta é a condição de gauge de Lorentz e não a equação de movimento do campo vetorial. A equação seguinte é a equação de segunda ordem

$$\hat{\partial}_{ab}\hat{\partial}^{cb}A_{cd} + m^2A_{cd} = 0 . \quad (1.59)$$

Utilizando (1.45), verificamos que esta é a equação de Klein-Gordon para cada componente de A^μ

$$\square A^\mu + m^2 A^\mu = 0 . \quad (1.60)$$

Como

$$D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}} = D^1 \oplus D^0 , \quad (1.61)$$

A^μ descreve tanto campos de spin 0 quanto de spin 1. O primeiro pode ser eliminado pela condição de Lorentz (1.58). As equações (1.58) e (1.60) juntas definem a chamada teoria de Proca. Para $m = 0$ obtemos o campo de Maxwell no gauge de Lorentz.

1.3 Propriedades Algébricas da Equação de Dirac

As matrizes de Dirac na representação (1.24) satisfazem

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 , \quad , \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j , \quad j = 1, 2 , \quad (1.62)$$

pois as matrizes de Pauli σ_a ($a = 0, \dots, 2$) são auto-adjuntas. As matrizes gama adjuntas são dadas por

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (1.63)$$

Vamos agora construir formas bilineares do campo espinorial ψ que possuem propriedades de transformação simples sob (1.35). De acordo com (1.37) temos

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) , \quad (1.64)$$

$$\psi'(x')^\dagger = \psi(x)^\dagger S(\Lambda)^\dagger \quad (1.65)$$

e, de (1.29),

$$S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0 . \quad (1.66)$$

Conseqüentemente,

$$\psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi(x)^\dagger \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} = \bar{\psi}(x) S(\Lambda)^{-1} , \quad (1.67)$$

onde introduzimos o espinor adjunto

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x)^\dagger \gamma^0 . \quad (1.68)$$

Este se transforma, portanto, de acordo com

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S(\Lambda)^{-1} . \quad (1.69)$$

Se o espinor $\psi(x)$ se transforma sob a reflexão espacial

$$\mathcal{P} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = (-x, y)$$

como

$$\psi'(x') = \sigma_1 \psi(x) , \quad (1.70)$$

o espinor adjunto (1.69) torna-se, por sua vez,

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^\dagger \gamma^0 = \psi(x)^\dagger \sigma_1 \gamma^0 = -\bar{\psi}(x) \sigma_1 . \quad (1.71)$$

Assim, o produto

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \psi(x) \quad (1.72)$$

é invariante sob transformações próprias de Lorentz. Porém, sob reflexões espaciais,

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = -\bar{\psi}(x) \sigma_1^2 \psi(x) \quad (1.73)$$

e, portanto, é um pseudo-escalar. Como mencionado anteriormente, o termo de massa na densidade Lagrangeana do campo de Dirac troca de sinal.

Um vetor é obtido por

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) , \quad (1.74)$$

onde utilizamos (1.50). Sob reflexões espaciais

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = -\bar{\psi}(x)\sigma_1\gamma^\mu\sigma_1\psi(x) . \quad (1.75)$$

Podemos então concluir que somente a primeira componente espacial de (1.75) troca de sinal.

Para obtermos um tensor utilizamos a combinação antissimétrica

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_- . \quad (1.76)$$

Como em (1.74), encontramos

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu'\nu'}\psi(x) . \quad (1.77)$$

É importante lembrar que em (2+1) dimensões não podemos construir uma quarta matriz que anticomute com todas as matrizes γ^μ , uma vez que não existe tal matriz que anticomute com as matrizes de Pauli. As propriedades de traço das matrizes γ e do tensor completamente antissimétrico ϵ em (2+1) dimensões estão exibidas no apêndice A.

2. A Matriz de Espalhamento no Espaço de Fock

Neste capítulo descreveremos o método que transforma uma teoria de uma partícula numa teoria de muitas partículas, denominado segunda quantização no espaço de Fock^[12]. Em seguida construiremos o operador de espalhamento S num campo eletromagnético externo dependente do tempo e mostraremos que esse operador é unitário e determinado a menos de uma fase. Ao final do capítulo discutiremos a quantização covariante do campo eletromagnético, introduzindo o funcional gerador para os propagadores.

2.1 Segunda Quantização no Espaço de Fock

Seja \mathcal{H} o espaço de Hilbert de uma partícula, por exemplo $L^2(\mathbf{R}^2)$ no caso de uma partícula sem spin, e $\varphi_1(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$. Um estado de duas partículas é então um elemento do espaço

$$\varphi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \quad (2.1)$$

e de maneira similar para um estado de n partículas

$$\varphi_n \in \mathcal{H}^{\otimes n} . \quad (2.2)$$

Entretanto, partículas idênticas obedecem ou à estatística de Bose ou à de Fermi, o que significa que o estado deve ser simétrico

$$S_n^+ \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \varphi_n(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \mathbf{x}_{\pi n}) \quad (2.3)$$

ou antissimétrico

$$S_n^- \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-)^{\pi} \varphi_n(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \mathbf{x}_{\pi n}) . \quad (2.4)$$

A soma percorre todas as $n!$ permutações π das n partículas, $(-)^{\pi}$ sendo igual a $+1$ se π for uma permutação par de $1, 2, \dots, n$ e -1 se π for ímpar. Os operadores S_n^{\pm} são operadores de projeção no espaço de n partículas (2.2):

$$\begin{aligned} (S_n^{\pm})^2 &= S_n^{\pm} , \\ (\psi_n, S_n^{\pm} \varphi_n) &= (S_n^{\pm} \psi_n, \varphi_n) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os verdadeiros espaços físicos de n partículas são

$$\mathcal{H}_n^{\pm} = S_n^{\pm} \mathcal{H}^{\otimes n} , \quad (2.6)$$

onde o produto tensorial simétrico (+) corresponde a bósons e o produto tensorial antissimétrico (-) a férmions.

Para descrevermos todos os estados de multipartícula simultaneamente, introduzimos o espaço de Fock

$$\mathcal{F}^{\pm} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\pm} , \quad (2.7)$$

onde

$$\mathcal{H}_0 = \alpha \Omega , \quad \alpha \in \mathbf{C} \quad (2.8)$$

é o espaço unidimensional que consiste do *vácuo* Ω . Um elemento de \mathcal{F} é uma seqüência infinita de estados

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) \in \mathcal{F} \quad (2.9)$$

com

$$\varphi_0 = \alpha\Omega, \varphi_1 \in \mathcal{H}_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}_n^\pm, \dots$$

Como o espaço de Fock (2.7) é uma soma direta, o produto escalar é dado por

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n)_n, \quad (2.10)$$

onde $(,)_n$ denota o produto escalar em \mathcal{H}_n . \mathcal{F} é o espaço de todos os estados de multipartícula (2.9) com norma finita

$$\sum_n \|\varphi_n\|_n^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\Phi\|^2 < \infty, \quad (2.11)$$

o qual também é um espaço de Hilbert.

Consideremos agora operadores no espaço de Fock. O Operador número \mathbf{N} pode ser definido do seguinte modo: Seja $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots) \in \mathcal{F}$, então

$$(\mathbf{N}\Phi)_n = n\varphi_n. \quad (2.12)$$

Este operador é não limitado com domínio

$$D(\mathbf{N}) = \{\Phi \in \mathcal{F} \mid \sum_n n^2 \|\varphi_n\|_n^2 = \|\mathbf{N}\Phi\|^2 < \infty\}. \quad (2.13)$$

Com este domínio temos um operador autoadjunto positivo em \mathcal{F} . Todos os operadores que comutam com \mathbf{N} não mudam o número de partículas dos estados.

Vamos agora introduzir operadores que mudam o número de partículas. Os chamados operadores de emissão (ou criação) $a^*(f)$ criam uma partícula com “função de onda” $f \in \mathcal{H}_1$

$$a^*(f)\Omega = f,$$

$$(a^*(f)\Phi)_n = \sqrt{n} S_n^\pm(f \otimes \varphi_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Os operadores de emissão são não limitados para bósons, mas para férmions estes são limitados

$$\|a^*(f)\Phi\|^2 \leq \|f\|_1^2 \|\Phi\|^2 \quad (2.15)$$

e definidos sobre todo o \mathcal{F}^- .

Junto com os operadores de emissão, consideremos os chamados “operadores” de campo $a^*(\mathbf{x})$ e $\hat{a}^*(\mathbf{k})$ no espaço dos momentos. Estes não são operadores em \mathcal{F} mas funcionais de operadores que expressam o mapeamento linear $f \rightarrow a^*(f)$ da seguinte forma

$$a^*(f) = \int d^2x a^*(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \int d^2k \hat{a}^*(\mathbf{k})\hat{f}(\mathbf{k}) . \quad (2.16)$$

Seja f_j uma base ortonormal completa em \mathcal{H}_1 assim como f_j^* , assumindo por enquanto $\mathcal{H}_1 = L^2$. Então (2.16) pode ser escrita formalmente como um produto escalar complexo

$$a^*(f_j) = (f_j^*, a^*(\mathbf{x})) .$$

Como esta expressão tem a forma de um coeficiente de Fourier, podemos formalmente escrever os operadores de campo como

$$a^*(\mathbf{x}) = \sum_j a^*(f_j)f_j(\mathbf{x})^* = \sum_j a^*(f_j^*)f_j(\mathbf{x}) , \quad (2.17)$$

$$\hat{a}^*(\mathbf{k}) = \sum_j a^*(\hat{f}_j)\hat{f}_j(\mathbf{k})^* = \sum_j a^*(\hat{f}_j^*)\hat{f}_j(\mathbf{k}) . \quad (2.18)$$

Estas expressões são independentes da base f_j . Servem para definir uma expressão formal para os operadores de campo como operadores no espaço de Fock.

Consideremos a seguir operadores de absorção (aniquilação). Inicialmente vamos assumir que $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbf{R}^2)$. Então o operador

$$(a(f)\Phi)_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sqrt{n+1} \int d^2x f(\mathbf{x})^* \varphi_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\ n = 0, 1, 2, \dots , \quad (2.19)$$

absorve uma partícula com função de onda f . Sobre o vácuo $\Phi_0 = (\Omega, 0, 0, \dots)$ definimos

$$a(f)\Phi_0 = 0, \forall f \in \mathcal{H}_1 . \quad (2.20)$$

Segue das definições (2.14) e (2.19) que

$$(\Psi, a(f)\Phi) = (a^*(f)\Psi, \Phi) , \quad (2.21)$$

o que implica em

$$a(f) = a^*(f)^+ . \quad (2.22)$$

Esta relação pode ser tomada como a definição abstrata dos operadores de absorção e permite-nos escrever

$$a^+(f) = a(f)^+ \quad (2.23)$$

ao invés de $a^*(f)$. Podemos notar ainda que $a(f)$ é antilinear em f . Os operadores de campo correspondentes são definidos como em (2.16)-(2.18)

$$a(f) = \int d^2x f(\mathbf{x})^* a(\mathbf{x}) , \quad (2.24)$$

$$a(\mathbf{x}) = \sum_j a(f_j) f_j(\mathbf{x}) . \quad (2.25)$$

O operador número de partículas pode agora ser escrito como

$$\mathbf{N} = \int d^2x a^+(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) . \quad (2.26)$$

De fato, utilizando (2.17) e (2.25), temos

$$\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j k} a^+(f_j) a(f_k) (f_j, f_k) = \sum_j a^+(f_j) a(f_j)$$

e, como

$$(a^+(f_j) a(f_j) \Phi)_n = \sqrt{n} S_n^\pm f_j(\mathbf{x}_1) \int d^2x \sqrt{n} f_j^*(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) , \quad (2.27)$$

resulta

$$(\mathbf{N}\Phi)_n = nS_n^\pm \varphi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) .$$

Analogamente, qualquer operador de uma partícula $A(\mathbf{x})$ pode ser promovido ao espaço de Fock como segue

$$\mathbf{A} = \int d^2x a^+(\mathbf{x})A(\mathbf{x})a(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j,k} (f_j, A(\mathbf{x})f_k)_1 a^+(f_j)a(f_k) . \quad (2.28)$$

Se o operador $A(\mathbf{x})$ for limitado em \mathcal{H}_1 então o domínio de \mathbf{A} contém o domínio do operador número \mathbf{N} . A expressão (2.28) assemelha-se formalmente com elementos de matriz da mecânica quântica ordinária. O operador \mathbf{A} já se encontra na chamada forma ordenada normal, o que significa que os operadores de absorção aparecem à direita dos operadores emissão.

A propriedade mais importante dos operadores de emissão e absorção são suas relações de comutação no caso de bósons ou relações de anticomutação no caso de férmions. Utilizando as definições (2.14) e (2.19) obtemos

$$[a(f), a^+(g)]_{\mp} \Phi = (f, g)_1 \Phi , \quad (2.29)$$

$$[a(f), a(g)]_{\mp} = 0 = [a(f)^+, a(g)^+]_{\mp} , \quad (2.30)$$

onde Φ deve estar no domínio do lado esquerdo da equação (2.29). A equação (2.29) é equivalente à seguinte relação de comutação para os operadores de campo

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (2.31)$$

É importante mencionar que toda representação irredutível de (2.29) e (2.30) com vácuo Ω definido em (2.20) é equivalente unitária à representação de Fock construída acima. Isto é discutido em detalhe no apêndice B.

A evolução temporal dos operadores de campo é dada pelas equações de movimento de Heisenberg

$$i \frac{d}{dt} a^+(Uf) = [\mathbf{H}, a^+(Uf)] , \quad (2.32)$$

onde $U = e^{-iHt}$ é o operador de evolução temporal no espaço \mathcal{H}_1 das funções teste dos operadores de campo $a^+(f)$ e

$$\mathbf{H} = \sum_{j,k} (f_j, H f_k) a^+(f_j) a(f_k) . \quad (2.33)$$

é a Hamiltoniana do campo no espaço de Fock, a qual possui a estrutura do operador A em (2.28). A solução de (2.32) é dada por

$$a_t^+(f) \stackrel{\text{def}}{=} a^+(Uf) = \mathbf{U}_t a^+(f) \mathbf{U}_t^{-1} , \quad (2.34)$$

onde introduzimos o operador unitário

$$\mathbf{U}_t = e^{-i\mathbf{H}t} , \quad (2.35)$$

às vezes chamado de segunda quantização do operador U . Tomando a adjunta de (2.34), temos também

$$a_t(f) \stackrel{\text{def}}{=} a(Uf) = \mathbf{U}_t a(f) \mathbf{U}_t^{-1} . \quad (2.36)$$

O valor esperado no vácuo da Hamiltoniana (2.33) bem como o do operador A em (2.28) é zero, uma vez que esses operadores estão escritos na forma ordenada normal. No caso do campo eletromagnético livre, esta construção elimina a energia de ponto zero dos modos normais de oscilação do campo, que é infinita. Entretanto, segue da irredutibilidade do espaço de Fock que o operador unitário \mathbf{U}_t é univocamente determinado pelas equações (2.34) e (2.36) a menos de uma fase. Se tomarmos (2.35) como *definição* do operador \mathbf{U}_t devemos adicionar uma constante a Hamiltoniana (2.33). Esta constante, que representa a energia do vácuo Ω , não altera as equações de movimento dos campos. Embora esta energia não seja diretamente observável suas flutuações podem desempenhar um papel importante^[13].

Para obtermos uma quantização invariante de Poincaré, devemos modificar a dependencia linear nas funções teste. A partir do operador de emissão

$$\tilde{a}^+(f(-t)) = \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} a^+(\mathbf{k}) \hat{f}(-t, \mathbf{k}) = \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} a^+(\mathbf{k}) e^{iEt} \hat{f}(\mathbf{k})$$

$$= (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} \int d^2x a^+(\mathbf{k}) e^{iEt - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad (2.37)$$

chegamos ao seguinte operador de emissão no espaço x

$$\varphi^{(+)}(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} a^+(\mathbf{k}) e^{iEt - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}). \quad (2.38)$$

Seu conjugado fornece a parte absorptiva correspondente

$$\begin{aligned} \varphi^{(-)}(x) &= (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} a(\mathbf{k}) e^{-iEx_0 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \varphi^{(+)}(x)^+ . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Segue de (2.31) que o comutador

$$\begin{aligned} [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} e^{-iE(x_0 - y_0) + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) e^{-ik(x-y)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

é um invariante de Poincaré, se escolhermos a relação de energia-momento relativística

$$E = k^0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.41)$$

$\varphi^{(+)}$ e $\varphi^{(-)}$ e o campo escalar total

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \quad (2.42)$$

são as soluções da equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0. \quad (2.43)$$

Como $\varphi^+ = \varphi$, construímos o campo escalar quantizado Hermitiano, que descreve partículas neutras de spin 0.

O campo escalar carregado é obtido utilizando-se um segundo conjunto de operadores de emissão e absorção $b^+(\mathbf{k})$ e $b(\mathbf{k})$, respectivamente, para

descrever as antipartículas. Ao invés de (2.42), obtemos o seguinte operador de campo

$$\tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2E}} \left[a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b^+(\mathbf{k})e^{ikx} \right]. \quad (2.44)$$

Os operadores b e b^+ satisfazem às mesmas equações de comutação (2.31) e todos os b 's comutam com todos os a 's. A regra de comutação para $\tilde{\varphi}$ é dada por

$$[\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)^+] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \delta(k^2 - m^2) \text{sgn}(k^0) e^{-ik(x-y)}. \quad (2.45)$$

As distribuições invariantes (2.40) e (2.45) são estudadas em detalhe no apêndice C.

2.2 Quantização do Campo de Dirac

O método geral de segunda quantização descrito na seção anterior pode ser aplicado ao campo de Dirac. Neste caso, o espaço de Hilbert de uma partícula é

$$\mathcal{H}_1 = (L^2(\mathbf{R}^2))^2 \ni f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

com o produto escalar

$$(f, g) = \int d^2x f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}). \quad (2.47)$$

Utilizando os espinores adjuntos, podemos também escrever

$$(f^+, g^+) = (g, f). \quad (2.48)$$

Os operadores de absorção são dados por

$$a(f) = \int d^2x f(\mathbf{x})^+ a(\mathbf{x}), \quad (2.49)$$

onde o campo espinorial $a(\mathbf{x})$ em (2.49) é uma matriz coluna 2×1 , como discutido no capítulo 1. Analogamente, os operadores de emissão são dados por

$$a(f)^+ = \int d^2x a(\mathbf{x})^+ f(\mathbf{x}) . \quad (2.50)$$

Estes dependem linearmente de f , enquanto $a(f)$ em (2.49) é antilinear em f .

Consideremos a dinâmica de uma partícula em \mathcal{H}_1 , dada pela Hamiltoniana

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m + e(V(\mathbf{x})) - \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(\mathbf{x}) , \quad (2.51)$$

$$\hbar = c = 1 .$$

O espectro da Hamiltoniana (2.51) consiste de uma parte positiva e outra negativa. Sejam P_{\pm} os operadores de projeção nos respectivos subespaços espectrais $\mathcal{H}_{\pm} = P_{\pm} \mathcal{H}_1$,

$$\begin{aligned} P_+ + P_- &= \mathbf{1} , \quad P_+ P_- = 0 , \\ \mathcal{H}_1 &= P_+ \mathcal{H}_1 \oplus P_- \mathcal{H}_1 . \end{aligned} \quad (2.52)$$

O campo espinorial é decomposto de acordo com

$$a(f) = b(P_+ f) + d(P_- f) , \quad a(f)^+ = b(P_+ f)^+ + d(P_- f)^+ , \quad (2.53)$$

com

$$b(P_- f) = 0 = d(P_+ f) . \quad (2.54)$$

Conforme (2.31), os operadores fermiônicos satisfazem às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} b(f), b(g)^+ &= (P_+ f, P_+ g) , \\ d(f), d(g)^+ &= (P_- f, P_- g) , \end{aligned} \quad (2.55)$$

enquanto que os demais anticomutadores se anulam.

Seja f_j uma base em \mathcal{H}_+ e g_j uma base em \mathcal{H}_- , ambos conjuntos de vetores de base pertencendo ao domínio de H em (2.51). Como os subespaços \mathcal{H}_\pm são subespaços invariantes com respeito a H , a Hamiltoniana em segunda quantização correspondente é

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sum_{jk} [(f_j, H f_k) b(f_j)^+ b(f_k) + (g_j, H g_k) d(g_j)^+ d(g_k)] , \quad (2.56)$$

de acordo com (2.33). Este espaço de Fock coincide com H em \mathcal{H}_1 e, portanto, também é não limitado inferiormente. O segundo termo em (2.55) é responsável por isto. Assim, para sanar esta deficiência trocamos o papel de d^+ e d , o que produz um sinal negativo, pois $dd^+ = -d^+d$. Embora isto não tenha nenhuma influência na estrutura algébrica, o vácuo definido por

$$b(f)\Omega = 0 , \quad d(f)\Omega = 0 , \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 \quad (2.57)$$

é completamente modificado. Nesse novo contexto, ao invés de (2.53), devemos considerar

$$\psi(f) = b(f_+) + d(f_-^+)^+ , \quad \text{com } f_\pm = P_\pm f . \quad (2.58)$$

O adjunto na função teste de d é necessário para que tenhamos uma dependência antilinear em f . Para simplificar a notação, vamos omitir esse adjunto, assumindo que na nova convenção que $d(f_-)^+$ é antilinear em f e $d(f_-)$ é linear. Os campos de Dirac quantizados são então

$$\begin{aligned} \psi(f) &= b(f_+) + d(f_-)^+ \\ \psi(f)^+ &= b(f_+)^+ + d(f_-) . \end{aligned} \quad (2.59)$$

As relações de anticomutação seguem de (2.54):

$$\begin{aligned} \psi(f), \psi(g)^+ &= b(f_+), b(g_+)^+ + d(f_-)^+, d(g_-) \\ &= (f_+, g_+) + (g_-^+, f_-^+) = (f, g) . \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde (2.48) foi usada. Como antes, introduzimos os operadores de campo correspondentes (distribuições)

$$\begin{aligned}\psi(f) &= \int d^2x f(\mathbf{x})^+ \psi(\mathbf{x}) , \\ \psi(f)^+ &= \int d^2x \psi^+(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) .\end{aligned}\quad (2.61)$$

Para obtermos uma Hamiltoniana positiva para o campo de Dirac de spin $\frac{1}{2}$ é essencial quantizá-lo com anticomutadores.

Consideremos agora a evolução temporal do campo de Dirac. Em vista de (2.35) e (2.36), definimos

$$\psi_t^+(f) \stackrel{def}{=} \psi(e^{iHt}f)^+ = e^{i\mathbf{H}t}\psi(f)^+e^{-i\mathbf{H}t} . \quad (2.62)$$

A Hamiltoniana \mathbf{H} possui a mesma forma que em (2.55), mas com d e d^+ trocados,

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \sum_{jk} [(f_j, H f_k) b(f_j)^+ b(f_k) + (g_j, H g_k) d(g_j) d(g_k)^+] \\ &= \sum_{jk} [(f_j, H f_k) b(f_j)^+ b(f_k) - (g_j, H g_k) d(g_k)^+ d(g_j) + \text{C-número}] .\end{aligned}\quad (2.63)$$

O C-número, que corresponde à energia infinita de ponto zero do campo fermiônico, pode ser desconsiderada, pois esta não contribui em (2.62). Escrita na forma normal, a Hamiltoniana

$$\mathbf{H} = \int d^2x : \psi(\mathbf{x})^+ H \psi(\mathbf{x}) : \quad (2.64)$$

é um operador limitado inferiormente, uma vez que

$$\mathbf{H}|_{P_+\mathcal{H}_1} = H|_{P_+\mathcal{H}_1} , \quad \mathbf{H}|_{P_-\mathcal{H}_1} = -H|_{P_-\mathcal{H}_1} \geq 0 . \quad (2.65)$$

As equações de movimento seguem de (2.62),

$$i \frac{d}{dt} \psi_t^+(f) = [\psi_t^+(f), \mathbf{H}] . \quad (2.66)$$

A combinação dos operadores de emissão com os operadores de absorção do campo de Dirac tem conseqüências importantes, como veremos mais adiante no estudo da polarização do vácuo.

O operador de carga no espaço de Fock é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= e \sum_j [b(f_j)^+ b(f_j) - d(g_j)^+ d(g_j)] \\ &= e \int d^2x : \psi(x)^+ \psi(x) : . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Os operadores d aparecem com sinal negativo e, portanto, descrevem antipartículas. Referimo-nos aos b 's e d 's como operadores de emissão e absorção de elétrons e pósitrons, respectivamente.

Consideremos agora o caso particular do campo de Dirac livre. A função de onda de uma partícula é dada por

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \int d^2p [f_+(\mathbf{p})u(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + f_-(\mathbf{p})v(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] , \quad (2.68)$$

onde

$$\begin{aligned} f_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}u^+(\mathbf{p})\hat{f}(\mathbf{p}) , \\ f_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2}v^+(\mathbf{p})\hat{f}(-\mathbf{p}) , \end{aligned} \quad (2.69)$$

o circunflexo significando a transformada de Fourier ordinária. Os espinores $u(\mathbf{p})$ e $v(-\mathbf{p})$ satisfazem às relações de ortonormalidade

$$u^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = v^+(-\mathbf{p})v(-\mathbf{p}) = 1 , \quad (2.70)$$

$$u^+(\mathbf{p})v(-\mathbf{p}) = 0 . \quad (2.71)$$

Sejam f_j e g_j elementos de um conjunto ortonormal completo em $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Então o campo de Dirac é dado por

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \sum_j [\psi(f_j)f_j(\mathbf{x}) + \psi(g_j)g_j(\mathbf{x})] \\ &= \sum_j [b(f_j)f_j(\mathbf{x}) + d(g_j)^+g_j(\mathbf{x})] . \end{aligned} \quad (2.72)$$

Utilizando (2.69), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_j d(g_j)^+ g_j(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} v^+(\mathbf{p}) \sum_j d(g_j)^+ \hat{g}_j(-\mathbf{p}) \\ &\stackrel{def}{=} v^+(\mathbf{p}) \hat{d}(-\mathbf{p})^+ \stackrel{def}{=} d(\mathbf{p})^+ \end{aligned} \quad (2.73)$$

e, analogamente,

$$b(\mathbf{p}) = \sum_j b(f_j) f_j(\mathbf{p}) . \quad (2.74)$$

Aqui introduzimos as distribuições de operadores de campo no espaço dos momentos, as quais satisfazem às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{b(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}')^+\} &= \sum_{jk} (f_j, f_k) f_j(\mathbf{p}) f_k(\mathbf{p}')^* \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\{d(\mathbf{p})^+, d(\mathbf{p}')\} = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \quad (2.76)$$

com os demais anticomutadores se anulando.

A evolução temporal do campo de Dirac livre segue de (2.62),

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}) &\stackrel{def}{=} \sum_j \left[\psi(e^{iH_0 t} f_j) f_j(\mathbf{x}) + \psi(e^{iH_0 t} g_j) g_j(\mathbf{x}) \right] \\ &= \sum_j \left[b(P_+ e^{iH_0 t} f_j) f_j(\mathbf{x}) + d(P_- e^{iH_0 t} g_j)^+ g_j(\mathbf{x}) \right] . \end{aligned} \quad (2.77)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \psi_t^{(-)}(f_j) &\stackrel{def}{=} b(P_+ e^{iH_0 t} f_j) = \int d^2 p (P_+ e^{iH_0 t} f_j)^*(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}) \\ &= \int d^2 p (e^{iEt} u^+(\mathbf{p}) \hat{f}_j(\mathbf{p}))^* b(\mathbf{p}) = \int d^2 p e^{-iEt} \hat{f}_j(\mathbf{p})^+ u(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}) . \end{aligned}$$

Utilizando

$$f_j(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \int d^2 p' \hat{f}_j(\mathbf{p}') e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} ,$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \psi^{(-)}(x) &= (2\pi)^{-1} \int d^2 p e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} u(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}) \\ &= (2\pi)^{-1} \int d^2 p e^{-ipx} u(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Se tratarmos o segundo termo em (2.77) do mesmo modo, obteremos

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(x) &= (2\pi)^{-1} \int d^2p e^{i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} v(\mathbf{p}) d(\mathbf{p})^+ \\ &= (2\pi)^{-1} \int d^2p e^{ipx} v(\mathbf{p}) d(\mathbf{p})^+ .\end{aligned}\quad (2.79)$$

O campo de Dirac dependente do tempo é portanto

$$\psi(x) = (2\pi)^{-1} \int d^2p [b(\mathbf{p})u(\mathbf{p})e^{-ipx} + d(\mathbf{p})^+v(\mathbf{p})e^{ipx}] . \quad (2.80)$$

Este resultado é formalmente idêntico à solução clássica da equação de Dirac. O primeiro termo $\psi^{(-)}$ contém o operador de absorção do elétron, enquanto que o segundo termo $\psi^{(+)}$ descreve a criação de um pósitron. O campo de Dirac adjunto é obtido a partir de (2.80),

$$\psi^+(x) = (2\pi)^{-1} \int d^2p [b^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p})^+e^{ipx} + d(\mathbf{p})v(\mathbf{p})^+e^{-ipx}] .$$

Multiplicando por γ^0 , obtemos

$$\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0 = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) ,$$

onde

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = (2\pi)^{-1} \int d^2p b^+(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p})e^{ipx} , \quad (2.81)$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) = (2\pi)^{-1} \int d^2p d(\mathbf{p})\bar{v}(\mathbf{p})e^{-ipx} . \quad (2.82)$$

A partir de (2.75) e (2.76) e das equações (2.78) e (2.81), obtemos a relação de anticomutação para o campo de Dirac livre a tempos arbitrários

$$\{\psi_a^{(-)}(x), \bar{\psi}_b^{(+)}(y)\} = (2\pi)^{-2} \int d^2p u_a(\mathbf{p})\bar{u}_b(\mathbf{p})e^{-ip(x-y)} . \quad (2.83)$$

Subentende-se a que a integral acima é uma transformada de Fourier distribucional. No resultado (2.83) aparece o operador covariante de projeção espectral positiva,

$$\{\psi^{(-)}(x), \bar{\psi}^{(+)}(y)\} = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^2p}{2E} (\not{p} + m)e^{-ip(x-y)} \stackrel{def}{=} \frac{1}{i} S^{(+)}(x-y) . \quad (2.84)$$

Do mesmo modo, obtemos o outro anticomutador não nulo

$$\{\psi^{(+)}(x), \bar{\psi}^{(-)}(y)\} \stackrel{def}{=} \frac{1}{i} S^{(-)}(x-y) = (2\pi)^{-2} \int \frac{d^2p}{2E} (\not{p} - m) e^{ip(x-y)}. \quad (2.85)$$

Isto fornece a relação de anticomutação para o campo de Dirac total

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \stackrel{def}{=} \frac{1}{i} S(x-y), \quad (2.86)$$

com

$$S(x) = S^{(-)}(x) + S^{(+)}(x). \quad (2.87)$$

As distribuições invariantes de Lorentz $S^{(+)}$, $S^{(-)}$ e S também serão estudadas em maior detalhe no apêndice C.

2.3 O Operador de Espalhamento no Espaço de Fock

A Hamiltoniana de uma partícula pode ser escrita como

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad (2.88)$$

onde

$$V(t) = e(V(t, \vec{x}) - \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})). \quad (2.89)$$

Assumimos que os potenciais se anulam para $t \rightarrow \pm\infty$ de forma que os operadores de onda

$$W_{out}^{in} = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^\dagger e^{-iH_0 t} \quad (2.90)$$

existem, junto com a matriz S unitária

$$S = W_{out}^\dagger W_{in}. \quad (2.91)$$

Como por hipótese temos a dinâmica livre para $t \rightarrow \pm\infty$, a segunda quantização está fundamentada sobre a representação de Fock do campo de Dirac livre.

A matriz S em segunda quantização no espaço de Fock é agora definida por

$$\psi(S^\dagger f) = \mathbf{S}^{-1} \psi(f) \mathbf{S} , \quad (2.92)$$

$$\psi(S^\dagger f)^\dagger = \mathbf{S}^{-1} \psi(f)^\dagger \mathbf{S} , \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 , \quad (2.93)$$

caso exista. Tomamos a adjunta S^\dagger nas funções teste pois $\psi(f)$ é antilinear em f . Segue das definições acima que \mathbf{S} é unitária e determinada univocamente a menos de uma fase.

Proposição: \mathbf{S} é determinada univocamente por (2.92) e (2.93) a menos de um fator.

Demonstração. Se $\tilde{\mathbf{S}}$ é um outro operator em \mathcal{F} , satisfazendo (2.92), então

$$\mathbf{S}^{-1} \psi(f) \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \psi(f) \tilde{\mathbf{S}} ,$$

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} \psi(f) = \psi(f) \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} , \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 ,$$

e o mesmo se aplica a todos $\psi^\dagger(f)$. Da irredutibilidade da representação de Fock, temos

$$\tilde{\mathbf{S}} \mathbf{S}^{-1} = \alpha \mathbf{1} \quad \text{i.e.} \quad \tilde{\mathbf{S}} = \alpha \mathbf{S} . \quad (2.94)$$

□

Tomando agora a adjunta de (2.92)

$$\psi(S^\dagger f)^\dagger = \mathbf{S}^\dagger \psi(f)^\dagger \mathbf{S}^{-1\dagger} ,$$

e comparando com (2.93), segue novamente da irredutibilidade da representação de Fock que

$$\mathbf{S}^\dagger = \rho \mathbf{S}^{-1} . \quad (2.95)$$

Se tomarmos a adjunta e a inversa desta equação, ou seja

$$\mathbf{S} = \rho^* \mathbf{S}^{-1\dagger} ,$$

$$\mathbf{S}^{\dagger^{-1}} = \rho^{-1} \mathbf{S} ,$$

obteremos

$$\rho^* = \rho .$$

De (2.94) e (2.95) resulta

$$\tilde{\mathbf{S}}^{\dagger} = |\alpha|^2 \rho \tilde{\mathbf{S}}^{-1} . \quad (2.96)$$

Portanto, podemos escolher

$$|\alpha|^2 = \rho^{-1} \quad (2.97)$$

de forma que o operador $\tilde{\mathbf{S}}$ torna-se unitário. Como o valor absoluto de α em (2.94) é fixado por (2.97), $\tilde{\mathbf{S}}$ é unicamente determinado a menos da fase $e^{i\lambda}$. Entretanto, esta fase $\lambda[A]$ possui significado físico pois depende do potencial externo $A_{\mu}(x)$. Como veremos no capítulo 7 esta fase será fixada pela exigência de que \mathbf{S} satisfaça a condição de causalidade local.

A matriz \mathbf{S} no espaço de Fock existe se e somente se $P_+ \mathbf{S} P_-$ é um operador de Hilbert-Schmidt. Neste caso é dada por

$$\mathbf{S} = C e^{S_{+-} S_{--}^{-1} b^{\dagger} d^{\dagger}} : e^{(S_{++}^{\dagger^{-1}} - 1) b^{\dagger} b} :: e^{(1 - S_{--}^{-1}) d d^{\dagger}} : e^{S_{--}^{-1} S_{-+} d b} , \quad (2.98)$$

where

$$S_{ij} = P_i \mathbf{S} P_j , \quad i, j = +, - \quad (2.99)$$

and

$$|C|^2 = \det(1 - S_{+-} S_{-+}^{\dagger}) . \quad (2.100)$$

O primeiro fator em (2.98) descreve a criação de pares elétron-pósitron, o segundo o espalhamento de elétrons, o terceiro o espalhamento de pósitrons e o último a aniquilação de pares.

Os esforços para se testar a QED em quatro dimensões em campos eletromagnéticos intensos no final dos anos 70 colocou em evidência o problema de partículas num campo externo no contexto do decaimento espontâneo do vácuo neutro a um vácuo “carregado” através da criação de pares, em experimentos de colisões de íons pesados. Embora a física do campo quantizado

do elétron-pósitron em interação com um campo eletromagnético clássico seja bem conhecida, alguns aspectos matemáticos da teoria são complexos, particularmente a definição do operador de espalhamento no espaço de Fock para potenciais externos dependentes do tempo^[14].

2.4 Quantização do Campo Eletromagnético

Uma vez introduzido o operador fermiônico \mathbf{S} completo podemos considerar a integração funcional sobre o potencial C-número A , a fim de obtermos a matriz S da QED em (2+1) dimensões.

O funcional gerador

$$Z[J; \Phi, \Psi] = Z_0^{-1} \int e^{iW[J; A]}(\Phi, \mathbf{S}\Psi)[dA] , \quad (2.101)$$

onde

$$W[J; A] = -\frac{1}{2} \int d^3x A_\mu(x) [g^{\mu\nu}(\square - i\epsilon) - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu(x) + \int d^3x J^\mu(x) A_\mu(x) , \quad (2.102)$$

descreve processos de espalhamento com estados fermiônicos assintóticos final e inicial Φ e Ψ , respectivamente. Fótons externos podem ser tratados diferenciando-se com respeito à fonte externa $J^\mu(x)$. A normalização Z_0 deve ser escolhida de forma que

$$Z[0; \Omega, \Omega] = 1 , \quad (2.103)$$

onde Ω é o estado de vácuo fermiônico. Suponhamos agora que Φ e Ψ sejam o estado de vácuo. A expressão (2.101) pode então ser reescrita como

$$Z[J] = Z_0^{-1} \int \exp \left[\frac{i}{2} \int d^3k A_\mu(k)^* [-k^\mu k^\nu + (k^2 + i\epsilon)g^{\mu\nu}] A_\nu + i \int d^3k J^\mu(k)^* A_\mu(k) \right] (\Omega, \mathbf{S}\Omega)[dA] . \quad (2.104)$$

Em ordem mais baixa podemos tomar $(\Omega, \mathbf{S}\Omega) = 1$. A integral de Fresnel (2.104) deve ser interpretada como o limite de integrais de dimensão finita. Escrevendo

$$\int f(k) d^3 k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n w_{nj} f(k_{nj}) , \quad (2.105)$$

o integrando torna-se

$$\prod_{j=1}^n \exp \left\{ w_{nj} \left[\frac{i}{2} A^{\mu*} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) (k^2 + i\epsilon) A_\nu + i J^{\mu*} A_\mu \right]_{k=k_{nj}} \right\} . \quad (2.106)$$

Levando em conta a condição de gauge de Lorentz (1.58) no espaço dos momentos,

$$k^\mu A_\mu(k) = 0 , \quad (2.107)$$

podemos escrever

$$A^\mu(k) = \sum_{l=1}^2 a_l(k) \varepsilon_l^\mu(k) , \quad (2.108)$$

onde ε_l^μ são dois vetores de polarização transversais ortogonais entre si

$$\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + \sum_{l=1}^2 \varepsilon_l^\mu(k) \varepsilon_l^\nu(k)^* = g^{\mu\nu} . \quad (2.109)$$

O termo de fonte torna-se

$$J^\mu(k)^* A_\mu(k) = \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{l\mu}(k) a_l(k) = \sum_{l=1}^2 \alpha_l(k)^* a_l(k) , \quad (2.110)$$

onde

$$\alpha_l(k) \equiv J^\mu(k) \varepsilon_{l\mu}(k) . \quad (2.111)$$

Decompondo-se a_l e α_l nas suas respectivas partes real e imaginária,

$$a_l = a_l^{(1)} + i a_l^{(2)} , \quad \alpha_l = \alpha_l^{(1)} + i \alpha_l^{(2)} , \quad (2.112)$$

chegamos a uma definição precisa da integral funcional (2.104):

$$Z[J] \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{0n}^{-1} \int \prod_{j=1}^n \exp \left[\frac{i}{2} w_{nj} \left\{ (k_{nj}^2 + i\epsilon) \sum_l [a_l^{(1)}(k_{nj})^2 + a_l^{(2)}(k_{nj})^2] + \right. \right.$$

$$2 \sum_l [\alpha_l^{(1)}(k_{nj}) a_l^{(1)}(k_{nj}) + \alpha_l^{(2)}(k_{nj}) a_l^{(2)}(k_{nj})] \prod_{j=1}^n \prod_{l=1}^2 da_l^{(1)}(k_{nj}) da_l^{(2)}(k_{nj}) . \quad (2.113)$$

Esta é o limite para $n \rightarrow \infty$ de uma integral de Lebesgue $4n$ -dimensional.

Podemos calcular a integral de Fresnel (2.113) completando o quadrado no argumento da exponencial, se levarmos em conta a invariância translacional da medida de Lebesgue. A integral de Fresnel resultante fornece apenas um fator numérico, o qual deve ser cancelado pela normalização Z_{0n} para que a condição (2.103) seja satisfeita. Obtemos então

$$\begin{aligned} Z[J] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \exp \left[-\frac{i}{2} w_{nj} \frac{1}{k_{nj}^2 + i\epsilon} \sum_{l=1}^2 |\alpha_l(k_{nj})|^2 \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^3k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_{l=1}^2 |\alpha_l(k)|^2 \right] , \end{aligned} \quad (2.114)$$

assumindo que as funções de fonte $\alpha_l(k)$ sejam bem comportadas de modo que (2.105) seja válida.

O propagador fotônico transversal é dado por

$$iD_{\mu\nu}^F(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)} Z[J] \Big|_{J=0} . \quad (2.115)$$

Substituindo

$$\sum_{l=1}^2 |\alpha_l(k)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{l\mu}(\vec{k}) \varepsilon_{l\nu}(\vec{k})^* \int d^3x d^3y J^\mu(x) J^\nu(y) \exp[-ik(x-y)] \quad (2.116)$$

em (2.114) e efetuando as derivadas funcionais, obtemos o propagador do fóton no gauge de Landau

$$iD_{\mu\nu}^F(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \exp[-ik(x-y)] , \quad (2.117)$$

onde utilizamos (2.109).

A contração

$$D^F(x-y) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}D_{\mu\nu}^F(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (2.118)$$

satisfaz uma equação de onda não homogênea

$$\square D^F(x) = \delta^{(3)}(x) , \quad (2.119)$$

e, portanto, corresponde ao propagador do campo de Klein-Gordon real não massivo,

$$D^F(x-y) = i \langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0 \rangle , \quad (2.120)$$

onde $T\{\dots\}$ denota ordenamento temporal dos operadores de campo. Estes últimos são dados pelas equações (2.38), (2.39) e (2.42), com

$$E = k^0 = |\mathbf{k}| .$$

Podemos também escrever $D_{\mu\nu}^F(x-y)$ como

$$iD_{\mu\nu}^F(x-y) = i \langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0 \rangle \quad (2.121)$$

se quantizarmos $A^\mu(x)$ como três campos escalares reais independentes.

Seja

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} \left[a^\mu(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a^\mu(\mathbf{k})^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right] \quad (2.122)$$

a solução da equação de onda

$$\square A^\mu(x) = 0 .$$

Com

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \stackrel{def}{=} k^0 \quad (c = 1) ,$$

os argumentos dos expoentes podem ser escritos na forma covariante $\mp ik \cdot x$. Após a quantização, $A^\mu(x)$ torna-se uma distribuição. Assim, submetemos (2.122) a uma função teste $f(\mathbf{x})$ e escrevemos

$$A^\mu(t, f) = \int d^2x A^\mu(t, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) . \quad (2.123)$$

No espaço k ,

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-1} \int d^2x f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \hat{f}(-\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k})^*, \quad (2.124)$$

$$A^\mu(t, f) = \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} \left[a^\mu(\mathbf{k}) \hat{f}(\mathbf{k})^* e^{-i\omega t} + a^\mu(\mathbf{k})^* \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\omega t} \right]. \quad (2.125)$$

Consideremos agora

$$\tilde{a}^\mu(\hat{f}) = \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} \hat{f}(\mathbf{k})^* a^\mu(\mathbf{k}) \quad (2.126)$$

como operadores no espaço de Fock dos fótons, obedecendo às relações de comutação

$$[\tilde{a}^\mu(\hat{f}), \tilde{a}^\nu(\hat{g})^+] = \delta_\nu^\mu \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} \hat{f}(\mathbf{k})^* \hat{g}(\mathbf{k}), \quad (2.127)$$

as demais iguais a zero. Esta relação na forma distribucional torna-se

$$[a^\mu(\mathbf{k}), a^\nu(\mathbf{k}')^+] = \begin{cases} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') & \text{para } \mu = \nu, \\ 0 & \text{para } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (2.128)$$

Portanto, $a^{\mu+}$ são operadores de emissão e a^μ operadores de absorção para fótons.

Para garantir a covariância de Lorentz das relações de comutação do campo de radiação, devemos modificar a expressão clássica (2.122) para a componente A^0 ,

$$A^0(x) = (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} \left[a^0(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a^0(\mathbf{k})^+ e^{ikx} \right]. \quad (2.129)$$

Com isso, A^0 passa a não ser um operador auto-adjunto. O espaço de Hilbert da QED deve então ser definido de tal forma que os valores esperados de A^0 (e de qualquer quantidade derivada a partir deste) se anulem.

Com a nova definição (2.129), as relações de comutação para os campos tornam-se

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = ig^{\mu\nu} D_0(x - y), \quad (2.130)$$

onde $D_0(x)$ é a função invariante de Pauli-Jordan para massa zero. Necessitamos também dos comutadores das partes de absorção e emissão do campo. Sejam

$$A_-^\mu(x) = (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} a^\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \quad (2.131)$$

$$A_+^\mu(x) = (2\pi)^{-1} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega}} \zeta a^\mu(\mathbf{k})^+ e^{ikx}, \quad (2.132)$$

onde $\zeta = -1$ para $\mu = 0$ e $\zeta = 1$ para $\mu = 1, 2$. Então os únicos comutadores não nulos são

$$[A_-^\mu(x), A_+^\nu(y)] = ig^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y), \quad (2.133)$$

$$[A_+^\mu(x), A_-^\nu(y)] = ig^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y). \quad (2.134)$$

3. A Teoria de Perturbação Causal

O programa de construção da matriz S através de causalidade em teoria quântica de campos foi realizado há quase quatro décadas por Stueckelberg^[15] e Bogoliubov. No início dos anos 70, Epstein e Glaser^[16] propuseram uma construção axiomática onde as divergências ultravioletas não aparecem, levando diretamente à série perturbativa renormalizada. Mostrou-se que na teoria causal o problema UV é uma consequência da bipartição incorreta de distribuições.

Neste capítulo apresentamos o método de Epstein and Glaser para a construção indutiva da matriz S da QED₃.

3.1 A Bipartição Causal de Distribuições

A matriz S é completamente determinada pela causalidade e invariância translacional, uma vez conhecido o acoplamento T_1 :

$$S(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3x_1 \dots d^3x_n T\{T_1(x_1) \dots T_1(x_n)\} g(x_1) \dots g(x_n), \quad (3.1)$$

onde $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ é uma função teste C-número, definida no espaço de Schwartz. Consideramos que o limite $g \rightarrow 1$ existe para as quantidades

fisicamente mensuráveis. Entretanto, a equação (3.1) contém divergências ultravioletas para $n > 1$ e, conseqüentemente, deve ser renormalizada.

Na teoria causal a matriz S é vista como uma distribuição de operadores e possui a seguinte forma

$$S(g) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3 x_1 \dots d^3 x_n T_n(x_1 \dots x_n) g(x_1) \dots g(x_n) . \quad (3.2)$$

As distribuições de n pontos T_n são os objetos básicos da teoria. Estas podem ser construídas indutivamente a partir de T_1 através de requisitos físicos, sendo causalidade o mais essencial.

Sejam as distribuições de operadores \tilde{T}_n definidas por

$$S(g)^{-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3 x_1 \dots d^3 x_n \tilde{T}_n(x_1 \dots x_n) g(x_1) \dots g(x_n) \\ \stackrel{def}{=} (1 + T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r . \quad (3.3)$$

As distribuições de n pontos \tilde{T}_n seguem de (3.3) como na inversão formal de uma série de potências

$$\tilde{T}_n(X) = \sum_{r=1}^n (-)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1) \dots T_{n_r}(X_r) , \quad (3.4)$$

onde a soma percorre todas as partições P_r do conjunto X de n pontos no espaço pseudo-euclidiano em $(2+1)$ dimensões

$$X = \{x_j \in \mathbf{M} \mid j = 1, \dots, n\}$$

em r subconjuntos disjuntos

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r , \quad X_j \neq \emptyset , \quad |X_j| = n_j .$$

Definimos então, para conjuntos arbitrários de pontos X, Y , as seguintes distribuições

$$R'_n(x_1 \dots x_n) = \sum_{P_2} T_{n-n_1}(Y, x_n) \tilde{T}_{n_1}(X) , \quad (3.5)$$

$$A'_n(x_1 \dots x_n) = \sum_{P_2} \tilde{T}_{n_1}(X) T_{n-n_1}(Y, x_n) , \quad (3.6)$$

onde as somas percorrem todas as partições

$$P_2 : \{x_1, \dots, x_{n-1}\} = X \cup Y, \quad X \neq \emptyset$$

em subconjuntos disjuntos com $|X| = n_1, |Y| \leq n - 2$. Introduzimos também

$$D_n(x_1 \dots x_n) = R'_n - A'_n. \quad (3.7)$$

Se as somas se estendem sobre todas as partições P_2^0 , incluindo o conjunto vazio $X = \emptyset$, obtemos as distribuições

$$A_n(x_1 \dots x_n) = A'_n + T_n(x_1 \dots x_n), \quad (3.8)$$

$$R_n(x_1 \dots x_n) = R'_n + T_n(x_1 \dots x_n) \quad (3.9)$$

Essas distribuições não são conhecidas pela hipótese de indução pois contêm a distribuição desconhecida T_n . Somente a diferença

$$D_n = R'_n - A'_n = R_n - A_n \quad (3.10)$$

é conhecida. Podemos determinar R_n ou A_n separadamente investigando-se as propriedades de suporte das várias distribuições. Resulta que R_n é uma distribuição retardada e A_n uma distribuição avançada,

$$\text{supp } R_n \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n), \quad \text{supp } A_n \subseteq \Gamma_{n-1}^-(x_n), \quad (3.11)$$

com

$$\Gamma_{n-1}^\pm(x) \equiv \{(x_1, \dots, x_{n-1}) | x_j \in \bar{V}^\pm(x), \forall j = 1, \dots, n-1\}, \quad (3.12)$$

$$\bar{V}^\pm(x) = \{y | (y-x)^2 \geq 0, \pm(y^0 - x^0) \geq 0\}. \quad (3.13)$$

Assim, pela bipartição (“splitting”) causal da distribuição (3.10) obtemos R_n (e A_n), e então T_n segue de (3.9) (ou (3.8)).

Em QED₃, D_n é da forma

$$D_n(x_1 \dots x_n) = \sum_k : \prod_j \bar{\psi}(x_j) d_n^k(x_1 \dots x_n) \prod_l \psi(x_l) :: \prod_m A(x_m) : , \quad (3.14)$$

onde $\psi(\bar{\psi})$ são operadores do campo fermiônico *livre* e A os operadores do campo de radiação *livre*, escritos na forma normal usual como indicado. Na expressão acima d_n^k são distribuições numéricas temperadas, ou seja, $d_n^k \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{3n})$, as quais possuem suporte causal devido a (3.11),

$$\text{supp } d_n^k(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) \cup \Gamma_{n-1}^-(x_n) . \quad (3.15)$$

Estas devem ser decompostas em

$$d_n^k = r_n(x) - a_n(x) , \quad (3.16)$$

$$\text{supp } r_n \subseteq \Gamma_{n-1}^+(x_n) , \quad \text{supp } a_n \subseteq \Gamma_{n-1}^-(x_n) \quad (3.17)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. A bipartição mais simples seria

$$r_n(x) = \chi_n(x) d_n^k , \quad (3.18)$$

com

$$\chi_n(x) = \prod_{j=1}^{n-1} \Theta(x_j^0 - x_n^0) . \quad (3.19)$$

Isto levaria à expressão divergente UV usual (3.1). A dificuldade é que (3.19) é descontínua e, portanto, se d_n^k for singular em $x_j = x_n$, r_n em (3.18) não será, em geral, uma distribuição bem definida.

Devido à invariância translacional de $d(x)$, é suficiente tomar $x_n = 0$ e considerar

$$d(x) \equiv d_n^k(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m) , \quad m = 3n - 3 . \quad (3.20)$$

O comportamento de $d(x)$ na vizinhança de $x = 0$ é essencial para o procedimento de bipartição. Por esta razão introduzimos a seguinte definição

Definição 1. A distribuição $d(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ possui uma quasi-assintótica $d_0(x)$ em $x = 0$ com respeito a uma função contínua positiva $\rho(\delta)$ se o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \delta^m d(\delta x) = d_0(x) \neq 0 \quad (3.21)$$

existe em $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$.

Podemos escrever (3.21) como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \langle d(x), \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \rangle = \langle d_0, \varphi \rangle \quad (3.22)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}$. Devido à propriedade de dualidade de \mathcal{S} sob a transformação de Fourier, temos uma definição equivalente no espaço dos momentos.

Definição 2. A distribuição $\hat{d}(p) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ possui uma quasi-assintótica $\hat{d}(p)$ em $p = \infty$ se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) \langle \hat{d}\left(\frac{p}{\delta}\right), \check{\varphi} \rangle = \langle \hat{d}_0, \check{\varphi} \rangle . \quad (3.23)$$

Acima, \hat{d} é a transformada de Fourier distribucional de d e $\check{\varphi}$ a transformada de Fourier inversa de φ . Pode-se demonstrar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\rho(a\delta)}{\rho(\delta)} = a^\omega \quad (3.24)$$

para algum ω real^[1]. A função ρ é então denominada uma função de contagem de potências.

Definição 3. A distribuição $d \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ é dita singular de ordem ω se possui uma quasi-assintótica $d_0(x)$ em $x = 0$ (ou $\hat{d}(p)$ em $p = \infty$), com função de contagem de potências $\rho(\delta)$ satisfazendo (3.24).

Se $\varepsilon > 0$ é um número arbitrariamente pequeno, então existem constantes C e C' tais que

$$C\delta^{\omega-\varepsilon} \geq \rho(\delta) \geq C'\delta^{\omega+\varepsilon} . \quad (3.25)$$

De (3.25) vemos que, se $\omega < 0$, $\rho(\delta) \rightarrow \infty$ para $\delta \rightarrow 0$ e, portanto,

$$\langle d(x), \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \rangle \rightarrow \frac{\langle d_0, \varphi \rangle}{\rho(\delta)} \rightarrow 0 . \quad (3.26)$$

Neste caso segue que (3.18) é a única solução do problema de bipartição. Se $\omega \geq 0$, uma bipartição análoga só é possível se a função teste satisfaz

$$(D^a \varphi)(0) = 0 \quad \forall |a| \leq \omega . \quad (3.27)$$

onde

$$D^a \stackrel{def}{=} \frac{\partial^{a_1+\dots+a_m}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_m^{a_m}}, \quad |a| = a_1 + \dots + a_m. \quad (3.28)$$

Introduzimos então

$$(W\varphi)(x) \equiv \varphi(x) - w(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{x^a}{a!} (D^a \varphi)(0), \quad (3.29)$$

onde $w(x)$ é qualquer função auxiliar $w(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ com

$$w(0) = 1, \quad D^a w(0) = 0 \quad \text{para } 1 \leq |a| \leq \omega. \quad (3.30)$$

Então a solução para a parte retardada é dada por

$$\langle r(x), \varphi \rangle \equiv \langle d, \Theta(v.x) W\varphi \rangle, \quad (3.31)$$

onde Θ é a função degrau de Heaviside e v é um vetor do tipo tempo $v = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in \Gamma_{n-1}^+$. Entretanto, em contraste com o caso $\omega < 0$, a bipartição no caso $\omega \geq 0$ não é única. Duas soluções de bipartição distintas diferem por uma distribuição com suporte no ponto:

$$\tilde{r} - r = \sum_{|a|=0}^{\omega} \tilde{C}_a D^a \delta(x). \quad (3.32)$$

A bipartição causal pode ser feita diretamente no espaço dos momentos através da fórmula de dispersão

$$\hat{r}(p) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\hat{d}(tp)}{(t-i0)^{\omega+1} (1-t+i0)}. \quad (3.33)$$

O método de bipartição é conveniente pois este é obviamente covariante de Lorentz e não destrói nenhuma simetria da teoria, em particular a invariância de gauge. Vamos então nos referir a (3.33) como a solução simétrica do problema de bipartição. De (3.32), a solução geral da bipartição é dada por

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + \sum_{|a|=0}^{\omega} C_a p^a. \quad (3.34)$$

Se uma distribuição possui ordem singular ω , esta também possui ordem singular $\omega' > \omega$, o que corresponde a uma quasi-assintótica evanescente no limite $\delta \rightarrow 0$ em (3.21). Isto nos permitiria adicionar potências de p em (3.33). Entretanto, devemos impor que a ordem singular ω não aumente no processo de bipartição da distribuição, com base nos valores experimentais das grandezas físicas envolvidas no problema, como, por exemplo, o valor do momento magnético anômalo do elétron em QED₄. Neste caso, a ordem singular da distribuição que corresponde à função de vértice é $\omega = 0$. Uma renormalização finita dessa grandeza corresponderia à adição de um polinômio de grau $\omega' = 1$. Neste ponto, é importante mencionar que na implementação correta do método de regularização de Pauli-Villars-Rayski^[17] o setor da amplitude de Feynman do qual provém a contribuição para o momento magnético anômalo também não deve ser modificado no processo de regularização.

3.2 Aplicação na QED em Três Dimensões

O método indutivo é iniciado especificando-se a primeira ordem da série perturbativa, que, no caso da QED, é dada por

$$T_1(x) = ie : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : A_\mu(x) = -\tilde{T}_1(x) . \quad (3.35)$$

A constante de acoplamento $e > 0$ é a unidade de carga e, em três dimensões, possui dimensão $[M]^{1/2}$. Os operadores de campo em (3.35) são os campos livres e o ordenamento normal é necessário para que se tenha uma expressão bem definida para o produto de operadores de campo num mesmo ponto, por exemplo

$$j^\mu(x) = e : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : , \quad (3.36)$$

cujo valor esperado no vácuo é zero.

Para passarmos de $n = 1$ a $n = 2$, primeiramente formamos

$$A'_2(x_1, x_2) = \tilde{T}_1(x_1)T_1(x_2) = -T_1(x_1)T_1(x_2) \quad (3.37)$$

e

$$R'_2(x_1, x_2) = T_1(x_2)\tilde{T}_1(x_1) = -T_1(x_2)T_1(x_1), \quad (3.38)$$

de acordo com (3.5) e (3.6), e então

$$D_2(x_1, x_2) = R'_2 - A'_2 = T_1(x_1)T_1(x_2) - T_1(x_2)T_1(x_1). \quad (3.39)$$

A distribuição avançada é (3.37) dada por

$$A'_2(x_1, x_2) = e^2 \gamma_{ab} \gamma_{cd} : \bar{\psi}_a(x_1) \psi_b(x_1) :: \bar{\psi}_c(x_2) \psi_d(x_2) : \\ \times A_\mu(x_1) A_\nu(x_2). \quad (3.40)$$

A distribuição retardada (3.38) é obtida a partir de (3.40), intercambiando-se $x_1 \leftrightarrow x_2$ e os índices de soma $\mu \leftrightarrow \nu$, $a \leftrightarrow c$ e $b \leftrightarrow d$, para se construir a diferença em (3.39), onde os produtos devem ser reordenados na forma normal conforme o enunciado do

Teorema de Wick. Um produto de n operadores de campo é ordenado normalmente do seguinte modo:

$$A_1 A_2 \dots A_n = : A_1 A_2 \dots A_n : + \overline{A_1 A_2} \dots A_n : + \text{permutações} \\ + : \overline{A_1 A_2 \dots A_j} \dots A_n : + \dots + \overline{A_1 A_2 A_3 A_4} \dots \\ + \text{permutações}, \quad (3.41)$$

onde a soma contém todos produtos normais com todas contrações possíveis.

As contrações são comutadores (no caso de campos bosônicos) ou anticomutadores (no caso de férmions) entre as partes de absorção e emissão,

$$\overline{A_j A_k} \stackrel{def}{=} [A_j^{(-)}, A_k^{(+)}]_{\mp}. \quad (3.42)$$

As contrações são C-números. Desta forma, podem ser fatorizadas nos produtos normais, porém, no caso de operadores fermiônicos, o sinal da permutação necessária deve ser levado em conta:

$$: A_1 \dots \overline{A_j \dots A_k} \dots A_n : = (-)^P \overline{A_j A_k} : A_1 \dots A_j \dots A_k \dots A_n :, \quad (3.43)$$

onde P é a permutação

$$P : 1, \dots, n \rightarrow j, k, 1, \dots, j \dots k \dots n . \quad (3.44)$$

De acordo com (2.84), (2.85) e (2.133), as seguintes contrações aparecem:

$$\overline{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)} \stackrel{def}{=} \{\psi_a^{(-)}(x)\bar{\psi}_b^{(+)}(y)\} = \frac{1}{i}S_{ab}^{(+)}(x-y) , \quad (3.45)$$

$$\overline{\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)} \stackrel{def}{=} \{\bar{\psi}_a^{(-)}(x)\psi_b^{(+)}(y)\} = \frac{1}{i}S_{ba}^{(-)}(y-x) , \quad (3.46)$$

$$\overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} \stackrel{def}{=} [A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(y)] = g_{\mu\nu}iD_0^{(+)}(x-y) . \quad (3.47)$$

De acordo com o que discutimos ao final da seção anterior, gostaríamos de encontrar uma expressão geral para ω de qualquer termo na série perturbativa em QED₃.

Proposição. Para a QED₃ temos

$$\omega = 3 - f - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}n , \quad (3.48)$$

onde f (b) é o número de férmions (bósons) externos e n a ordem da teoria de perturbação.

Antes de demonstrarmos a proposição acima, podemos tirar algumas conclusões a partir de (3.48). O último termo implica que existem somente alguns gráficos com $\omega \geq 0$ até uma certa ordem, ou seja, a QED₃ é uma teoria super-renormalizável. As únicas distribuições singulares correspondem à polarização do vácuo ($n = 2, f = 0, b = 2$), com $\omega = 1$, à auto-energia do elétron ($n = 2, f = 2, b = 0$), com $\omega = 0$, e à polarização do vácuo em quarta ordem ($n = 4, f = 0, b = 2$), com $\omega = 0$. Já a função de vértice $n = 3, f = 2$ e $b = 1$ possui $\omega = -1$.

Demonstração. A prova é indutiva. Para iniciarmos a indução verificamos (3.48) para os diagramas de ordem mais baixa, em particular o termo de primeira ordem (3.35) possui $\omega = 0$ por definição. No passo indutivo devemos

considerar produtos tensoriais de dois subgráficos com ordem singular ω_1 e ω_2 , respectivamente, os quais obedecem (3.48) como hipótese de indução. Esse produto está ordenado normalmente e assumimos que l contrações fotônicas aparecem no processo. Assim, levando em conta a invariância translacional, a parte numérica da expressão contraída é da forma

$$t_1(x_1 - x_r, \dots, x_{r-1} - x_r) \prod_{j=1}^l D_0^+(x_{r_j} - y_{v_j}) t_2(y_1 - y_v, \dots, y_{v-1} - y_v) \\ \stackrel{def}{=} t(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{v-1}, \eta) .$$

Aqui $\{x_{r_j}\}$ é um subconjunto de $\{x_1, \dots, x_r\}$ e $\{y_{v_j}\}$ um subconjunto de $\{y_1, \dots, y_v\}$, onde introduzimos as coordenadas relativas

$$\xi_j = x_j - x_r , \quad \eta_j = y_j - y_v , \quad \eta = x_r - y_v .$$

A função de contração, de acordo com a equação (C.3) do apêndice C, é dada por

$$D_0^+(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(p^2) \theta(p^0) e^{-ipx} .$$

A transformada de Fourier de t (omitindo potências de 2π) é dada por

$$\hat{t}(p_1, \dots, p_{r-1}, q_1, \dots, q_{v-1}, q) = \int t(\xi, \eta) e^{ip\xi + iq\eta} d^{3r-3}\xi d^{3v}\eta .$$

Como produtos tornam-se convoluções, obtemos

$$\hat{t}(\dots) = \int \prod_j d\kappa_j \delta(q - \sum_{j=1}^l \kappa_j) \\ \times \hat{t}_1(\dots, p_i - \kappa_{r(i)}, \dots) \prod_j \hat{D}_0^+(\kappa_j) \hat{t}_2(\dots, q_k + \kappa_{v(k)}, \dots) .$$

Aqui $r(i) = v(k)$ se e somente se x_i e y_k são ligados por uma contração. Atuando \hat{t} sobre uma função teste $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{3(r+v-1)})$, temos

$$\langle \hat{t}, \varphi \rangle = \int d^{3r-3}p' d^{3v-3}q' \hat{t}_1(p') \hat{t}_2(q') \psi(p', q') ,$$

com

$$\psi = \int d^3 q \prod_j d\kappa_j \delta(q - \sum_j \kappa_j) \varphi(\dots, p'_i + \kappa_{r(i)}, \dots, q'_k - \kappa_{v(k)}, \dots, q) \times \prod_{j=1}^l \hat{D}_0^+(\kappa_j) . \quad (3.49)$$

Para se determinar a ordem singular de \hat{t} no espaço p , é necessário considerar a distribuição

$$\begin{aligned} \langle \hat{t}(\frac{p}{\delta}), \varphi \rangle &= \delta^m \langle \hat{t}(p), \varphi(\delta p) \rangle \\ &= \delta^m \int d^{3r-3} p' d^{3v-3} q' \hat{t}_1(p') \hat{t}_2(q') \psi_\delta(p', q') , \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_\delta(p', q') &= \int d^3 q \prod_j d\kappa_j \delta(q - \sum_j \kappa_j) \\ &\times \varphi(\dots, \delta(p'_i + \kappa_{r(i)}), \dots, \delta(q'_k - \kappa_{v(k)}), \dots, \delta q) \prod_j \hat{D}_0^+(\kappa_j) \end{aligned} \quad (3.51)$$

e $m = 3(r + v - 1)$. Introduzimos novas variáveis $\tilde{\kappa}_j = \delta \kappa_j$, $\tilde{q} = \delta q$ e notamos que

$$\hat{D}_0^+(\frac{\tilde{\kappa}}{\delta}) = \delta(\frac{\tilde{\kappa}^2}{\delta^2}) \theta(\frac{\tilde{\kappa}^0}{\delta}) = \delta^2 \hat{D}_0^+(\tilde{\kappa}) .$$

Isto implica

$$\begin{aligned} \psi_\delta(p', q') &= \frac{\delta^{2l}}{\delta^{3l}} \int d^3 \tilde{q} \prod_j d\tilde{\kappa}_j \delta(\tilde{q} - \sum_j \tilde{\kappa}_j) \\ &\times \varphi(\dots, \delta(p'_i + \tilde{\kappa}_{r(i)}), \dots, \delta(q'_k - \tilde{\kappa}_{v(k)}), \dots, \delta \tilde{q}) \prod_j \hat{D}_0^+(\tilde{\kappa}_j) \\ &= \frac{1}{\delta^l} \psi(\delta p', \delta q') . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Utilizando novamente variáveis rescaladas $\delta p' = \tilde{p}$, $\delta q' = \tilde{q}$, encontramos

$$\langle \hat{t}(\frac{p}{\delta}), \varphi \rangle = \frac{\delta^3}{\delta^l} \int d^{3r-3} \tilde{p} d^{3v-3} \tilde{q} \hat{t}_1(\frac{\tilde{p}}{\delta}) \hat{t}_2(\frac{\tilde{q}}{\delta}) \psi(\tilde{p}, \tilde{q}) . \quad (3.53)$$

Pela hipótese de indução, \hat{t}_1 e \hat{t}_2 possuem ordem singular ω_1 e ω_2 com funções de contagem de potências $\rho_1(\delta)$ e $\rho_2(\delta)$, respectivamente. Então o seguinte limite existe:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{l-3} \rho_1(\delta) \rho_2(\delta) \langle \hat{t}(\frac{p}{\delta}), \varphi \rangle = \langle \hat{t}_0(p), \varphi \rangle .$$

Portanto, a ordem singular de $\hat{t}(p)$ é

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + l - 3 .$$

Resta verificar se o resultado satisfaz (3.34). Substituindo

$$\omega_j = 3 - f_j - \frac{1}{2} b_j - \frac{1}{2} n_j , \quad j = 1, 2 ,$$

encontramos

$$\omega = 3 - (f_1 + f_2) - \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - 2l) - \frac{1}{2}(n_1 + n_2) .$$

Como o segundo termo entre parênteses é justamente o número de operadores fotônicos após as l contrações, (3.48) é válida neste caso.

O caso de l contrações fermiônicas é essencialmente idêntico, onde devemos utilizar

$$\hat{S}_m^+(p) = (\not{p} + m) \hat{D}_m^+ ,$$

que resulta de uma contração de campos fermiônicos massivos e possui ordem singular $\omega = -1$. Obtemos portanto, ao invés de (3.52),

$$\psi_\delta(p', q') \rightarrow \frac{\delta^l}{\delta^{3l}} \psi(\delta p', \delta q') \quad \text{para } \delta \rightarrow 0 .$$

Isto finalmente implica

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + 2l - 3 ,$$

de onde se verifica que (3.48) é satisfeita.

4. Correções Radiativas e Geração Dinâmica de Massa

No capítulo anterior classificamos as distribuições singulares que ocorrem na QED₃, entre elas aquelas que correspondem à polarização do vácuo e à auto-energia do elétron. Nas seções seguintes vamos calcular o tensor de polarização do vácuo através das relações de dispersão previamente introduzidas e tratar do problema da geração dinâmica de massa para o fóton. Na última seção efetuamos os cálculos da auto-energia do elétron, complementando a discussão sobre as correções radiativas de segunda ordem dos propagadores da teoria.

4.1 A Polarização do Vácuo

Utilizando o teorema de Wick, o termo de polarização do vácuo em (3.39) é obtido através de duas contrações fermiônicas

$$D_2^{vp}(x_1, x_2) = -e^2 \text{Tr}[\gamma^\mu S^{(-)}(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) - \gamma^\mu S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y)] : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : , \quad (4.1)$$

onde $y = x_1 - x_2$. Devido à invariância do traço sob permutações cíclicas, podemos reescrever a equação acima na forma

$$D_2(x_1, x_2) = [P^{\mu\nu}(y) - P^{\nu\mu}(-y)] : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : , \quad (4.2)$$

onde

$$P^{\mu\nu}(y) \equiv e^2 \text{Tr}[\gamma^\mu S^+(y) \gamma^\nu S^-(-y)] . \quad (4.3)$$

A distribuição numérica que aparece na função de dois pontos é portanto

$$d^{\mu\nu}(x_1, x_2) \equiv P^{\mu\nu}(y) - P^{\nu\mu}(-y) . \quad (4.4)$$

Esta possui suporte causal, como pode ser verificado escrevendo-se

$$\begin{aligned} & \gamma^\mu [S^{(-)}(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) - S^{(+)}(y) \gamma^\nu S^{(-)}(-y)] \\ & = \gamma^\mu [S(y) \gamma^\nu S^{(+)}(-y) - S^{(+)}(y) \gamma^\nu S(-y)] \end{aligned}$$

onde

$$S(x) = S^{(+)}(x) + S^{(-)}(x) = (i\rlap{-}\not{\partial} + m)D(x)$$

e

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \text{sgn} p_0 e^{-ipx}$$

é a distribuição de Pauli-Jordan 3-dimensional, com suporte em $\overline{V}^+(0) \cup \overline{V}^-(0)$.

A transformada de Fourier de $P^{\mu\nu}(y)$ é dada por

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\mu\nu}(k) &= e^2 (2\pi)^{-1} \text{Tr} \int dq_1 dq_2 \gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \gamma^\nu (\not{q}_2 + m) \\ &\times \frac{i}{2\pi} \theta(q_1^0) \delta(q_1^2 - m^2) \left(-\frac{i}{2\pi} \right) \theta(-q_2^0) \delta(q_2^2 - m^2) \delta(q_1 - q_2 - k) . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizando $p \equiv q_1$ e $q \equiv -q_2$ como novas variáveis de integração, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\mu\nu}(k) &= -e^2 (2\pi)^{-3} \int dp dq \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{q} - m)] \\ &\times \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) \delta(p + q - k) \\ &= -e^2 (2\pi)^{-3} J^{\mu\nu}(k) , \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu}(k) &\equiv \int d^p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \delta[(k - p)^2 - m^2] \\ &\times \theta(k^0 - p^0) j^{\mu\nu}(k, p) , \end{aligned} \quad (4.7)$$

com

$$j^{\mu\nu}(k, p) = \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} - \not{p} - m)] . \quad (4.8)$$

Das identidades (A.9)-(A.11) do apêndice A resulta

$$j^{\mu\nu}(k, p) = -2[(m^2 - p^2)g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu - (p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu) + g^{\mu\nu}p \cdot k - im\epsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha] . \quad (4.9)$$

De (4.6) e (4.9) segue que $\hat{P}^{\mu\nu}$ é um invariante de gauge

$$k_\mu \hat{P}^{\mu\nu}(k) = 0 . \quad (4.10)$$

Isto determina a estrutura tensorial de $\hat{P}^{\mu\nu}$:

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = \hat{P}_S^{\mu\nu}(k) + \hat{P}_A^{\mu\nu}(k) , \quad (4.11)$$

com

$$\hat{P}_S^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{B}_1(k^2) \quad (4.12)$$

e

$$\hat{P}_A^{\mu\nu}(k) = im\epsilon^{\mu\nu\alpha}k_\alpha \tilde{B}_2(k^2) . \quad (4.13)$$

Segue de (4.11)-(4.13) que

$$-2k^2 \tilde{B}_1(k^2) = \hat{P}^\mu{}_\mu(k) = g_{\mu\nu} \hat{P}^{\mu\nu}(k) \quad (4.14)$$

$$\tilde{B}_2(k^2) = -\frac{i}{2m} \frac{k^\alpha}{k^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \hat{P}^{\mu\nu}(k) . \quad (4.15)$$

Em três dimensões espaço-temporais $\hat{P}^{\mu\nu}$ possui, portanto, uma parte antissimétrica; em quatro dimensões um termo desse tipo envolve o tensor $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ e a contração $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_\alpha k_\beta$ é identicamente nula. Utilizando (4.6)-(4.9), (4.14) e (4.15), podemos calcular B_1 e B_2 . Encontramos^[18]

$$\tilde{B}_1(k^2) = -\frac{e^2}{2(4\pi)^2} \frac{k^2 + 4m^2}{k^2} \theta(k^2 - 4m^2) \frac{1}{\sqrt{k^2}} \theta(k_0) , \quad (4.16)$$

$$\tilde{B}_2(k^2) = -\frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{k^2}} \theta(k^2 - 4m^2) \theta(k_0) . \quad (4.17)$$

De acordo com (4.4), temos

$$d^{\mu\nu}(k) = d_S^{\mu\nu}(k) + d_A^{\mu\nu}(k) , \quad (4.18)$$

onde

$$d_S^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_1(k^2) , \quad (4.19)$$

$$d_A^{\mu\nu}(k) = im \epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha B_2(k^2) . \quad (4.20)$$

B_1 e B_2 seguem de (4.4), (4.10)-(4.13), (4.16) e (4.17):

$$B_1(k^2) = -\frac{e^2}{2(4\pi)^2} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2}\right) \theta(k^2 - 4m^2) \frac{\text{sgn}k_0}{\sqrt{k^2}} \quad (4.21)$$

$$B_2(k^2) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \theta(k^2 - 4m^2) \frac{\text{sgn}k_0}{\sqrt{k^2}} . \quad (4.22)$$

As distribuições $d_S^{\mu\nu}$ e $d_A^{\mu\nu}$ em (4.21) e (4.22) são de ordem $\omega = 1$ and $\omega = 0$, respectivamente.

A bipartição da distribuição $d^{\mu\nu}(k)$ segue de (3.33) e (3.34). Tratemos primeiro da parte simétrica. A solução retardada simétrica do problema de bipartição que corresponde a $\omega = 1$ é, de acordo com (3.33),

$$r_S^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{t^2 (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B_1(t^2 k^2)}{(t - i0)^2 (1 - t + i0)} . \quad (4.23)$$

Esta é válida para $k \in \bar{V}^+$. Substituindo (4.21) em (4.23) obtemos

$$\begin{aligned} r_S^{\mu\nu}(k) &= \frac{i\alpha}{2\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 - t + i0} \left(1 + \frac{4m^2}{t^2 k^2}\right) \theta(t^2 k^2 - 4m^2) \frac{\text{sgn}(tk_0)}{|t|\sqrt{k^2}} \\ &= \frac{i\alpha}{2\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{\text{sgn}k_0}{\sqrt{k^2}} \left(J_1 + \frac{4m^2}{k^2} J_2\right) , \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$J_1 = -2 \int_{\sqrt{4m^2/k^2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - 1 - i0} , \quad (4.25)$$

$$J_2 = \int_{\sqrt{4m^2/k^2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2(t^2 - 1 - i0)} , \quad (4.26)$$

com

$$\alpha \equiv -\frac{e^2}{2(4\pi)^2} . \quad (4.27)$$

Como podemos notar, a solução simétrica da bipartição preserva a invariância de gauge.

O resultado do cálculo da integral (4.25) é

$$J_1 = \log \left(\frac{1 - \sqrt{k^2/4m^2}}{1 + \sqrt{k^2/4m^2}} \right) - i\pi\theta(k^2 - 4m^2) . \quad (4.28)$$

A integral J_2 pode ser calculada a partir de (4.25):

$$\begin{aligned} J_2 &= J_1 + 2\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}} \\ &= \log \left(\frac{1 - \sqrt{k^2/4m^2}}{1 + \sqrt{k^2/4m^2}} \right) - i\pi\theta(k^2 - 4m^2) + 2\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Assim, de (4.24), (4.28) e (4.29), obtemos

$$\begin{aligned} r_S^{\mu\nu}(k) &= \frac{i\alpha}{2\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \operatorname{sgn} k_0 \left[\frac{1}{\sqrt{k^2}} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \right. \\ &\times \log \left(\frac{1 - \sqrt{k^2/4m^2}}{1 + \sqrt{k^2/4m^2}} \right) + \frac{4m}{k^2} - i\pi \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \frac{\theta(k^2 - 4m^2)}{\sqrt{k^2}} \left. \right] . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Expandindo o logarítmo para $k^2 \rightarrow 0$, encontramos

$$r_S^{\mu\nu}(k) \rightarrow \frac{i\alpha}{2\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \left(-\frac{4}{3m} \right) . \quad (4.31)$$

De (3.34) temos agora a solução geral do problema de bipartição,

$$\tilde{r}_S^{\mu\nu}(k) = r_S^{\mu\nu}(k) + C_0 g^{\mu\nu} + C_1^\mu k^\nu + C_2^\nu k^\mu , \quad (4.32)$$

onde escrevemos o polinômio contravariante mais geral de grau $\omega = 1$. Da estrutura tensorial de $r_S^{\mu\nu}$ segue imediatamente que $C_1^\mu = C_2^\nu = 0$. Finalmente, devido à invariância de gauge

$$k_\mu \tilde{r}_S^{\mu\nu} = 0 ,$$

C_0 também deve se anular. Assim, (4.30) é a única solução para a parte simétrica de $d^{\mu\nu}(k)$.

Consideremos agora a parte antissimétrica de $d^{\mu\nu}(k)$. De (3.33), (4.20) e (4.22) obtemos a solução simétrica do problema de bipartição para $\omega = 0$

$$\begin{aligned} r_A^{\mu\nu}(k) &= \frac{i}{2\pi} im \epsilon^{\mu\nu\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{tk_\alpha B_2(t^2 k^2)}{(t-i0)(1-t+i0)} \\ &= \frac{e^2 m}{2(2\pi)^3} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \frac{k_\alpha}{\sqrt{k^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\text{sgn} t k_0 \theta(t^2 k^2 - 4m^2)}{|t|(1-t+i0)} \\ &= -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \frac{k_\alpha}{\sqrt{k^2}} \text{sgn} k_0 \left[\log \left(\frac{1 - \sqrt{k^2/4m^2}}{1 + \sqrt{k^2/4m^2}} \right) - i\pi \theta(k^2 - 4m^2) \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde definimos

$$\beta \equiv -\frac{e^2}{2(2\pi)^2} \quad (4.34)$$

e utilizamos o resultado (4.28). Comparando esta última equação com (4.20), podemos escrever

$$r_A^{\mu\nu}(k) = im \epsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha B_2^r(k^2), \quad (4.35)$$

onde .

$$B_2^r(k^2) = i \frac{\beta}{2\pi} \frac{\text{sgn} k_0}{\sqrt{k^2}} \left[\log \left(\frac{1 - \sqrt{k^2/4m^2}}{1 + \sqrt{k^2/4m^2}} \right) - i\pi \theta(k^2 - 4m^2) \right]. \quad (4.36)$$

Expandindo novamente para $k^2 \rightarrow 0$, encontramos

$$B_2^r(0) = -i \frac{\beta}{2\pi m}. \quad (4.37)$$

A solução geral do problema de bipartição para $\omega = 0$ é dada por

$$\tilde{r}_A^{\mu\nu}(k) = r_A^{\mu\nu}(k) + C_0 g^{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

Não existe nenhum outro tensor de Lorentz constante de segunda ordem. Entretanto, o termo constante não preserva a estrutura antissimétrica de

$r_A^{\mu\nu}(k)$. Portanto, $C_0 = 0$ e (4.35) é, novamente, a única solução do problema de bipartição.

O tensor de polarização do vácuo é definido como

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -i(2\pi)^2[r^{\mu\nu}(k) - r'^{\mu\nu}(k)] . \quad (4.39)$$

A distribuição retardada $r'^{\mu\nu}(k)$ corresponde à transformada de Fourier do segundo termo em (4.4),

$$r'^{\mu\nu}(k) = -\hat{P}^{\mu\nu}(-k) , \quad (4.40)$$

e pode ser obtida a partir de (4.11)-(4.13), (4.16) e (4.17). Entretanto, esta se anula na região $k^2 < 4m^2$, abaixo do limiar de produção de pares, na qual somente as distribuições (4.30) e (4.35) contribuem. Escrevendo o tensor de polarização do vácuo na forma

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2})\Pi^{(1)}(k^2) + im\epsilon_{\mu\nu\alpha}k^\alpha\Pi^{(2)}(k^2) , \quad (4.41)$$

temos, de (4.31), (4.37), (4.39) e (4.41),

$$\Pi^{(1)}(0) = 0 , \quad (4.42)$$

$$\Pi^{(2)}(0) = \frac{e^2}{4\pi m} . \quad (4.43)$$

4.2 O Propagador Corrigido do Fóton

O propagador do fóton modificado pelas inserções próprias da polarização do vácuo é dado por

$$\mathcal{D} = D + iD\Pi D + i^2D\Pi D\Pi D + \dots = D + iD\Pi\mathcal{D} , \quad (4.44)$$

onde

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - i\alpha \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2 + i0k^2} \quad (4.45)$$

é o propagador livre e α é o parâmetro de gauge, que, por simplicidade, escolhemos igual à unidade nos cálculos acima (gauge de Feynman). Desta equação segue que

$$(\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} = (D^{-1})_{\mu\nu} - i\Pi_{\mu\nu} . \quad (4.46)$$

Para calcularmos \mathcal{D} a partir de (4.46) utilizamos os seguintes operadores de projeção ortogonal

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + i\epsilon_{\mu\nu\beta} \frac{k^\beta}{\sqrt{k^2}} \right) , \\ P_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - i\epsilon_{\mu\nu\beta} \frac{k^\beta}{\sqrt{k^2}} \right) , \\ P_{\mu\nu}^{(3)} &= \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} , \end{aligned} \quad (4.47)$$

satisfazendo

$$P^{(j)2} = P^{(j)} , \quad P^{(j)} P^{(k)} = 0 , \quad j \neq k$$

e

$$\sum_{j=1}^3 P_{\mu\nu}^{(j)} = g_{\mu\nu} .$$

Assim, (4.41) e (4.45) assumem a forma

$$D = \frac{-i}{k^2 + i0} \left(P^{(1)} + P^{(2)} + \alpha P^{(3)} \right) , \quad (4.48)$$

$$\Pi = \Pi^{(1)}(P^{(1)} + P^{(2)}) + m(P^{(1)} - P^{(2)})\sqrt{k^2}\Pi^{(2)} . \quad (4.49)$$

Como

$$D^{-1} = ik^2 \left(P^{(1)} + P^{(2)} + \frac{1}{\alpha} P^{(3)} \right) , \quad (4.50)$$

encontramos para (4.46)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-1} &= (ik^2 - i\Pi^{(1)} - im\sqrt{k^2}\Pi^{(2)})P^{(1)} \\ &+ (ik^2 - i\Pi^{(1)} + im\sqrt{k^2}\Pi^{(2)})P^{(2)} + \frac{i}{\alpha}k^2 P^{(3)} . \end{aligned} \quad (4.51)$$

A inversa é dada por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{ik^2 - i\Pi^{(1)} - im\sqrt{k^2}\Pi^{(2)}} P^{(1)} + \frac{1}{ik^2 - i\Pi^{(1)} + im\sqrt{k^2}\Pi^{(2)}} P^{(2)} - \frac{i\alpha}{k^2 + i0} P^{(3)}. \quad (4.52)$$

Substituindo (4.47) na equação acima obtemos, no gauge de Feynman,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - \Pi(k^2)} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + im\epsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{k^\alpha}{k^2} \frac{\Pi^{(2)}}{1 - \Pi^{(1)}/k^2} \right], \quad (4.53)$$

com

$$\Pi(k^2) = \Pi^{(1)}(k^2) + \frac{m^2(\Pi^{(2)}(k^2))^2}{1 - \Pi^{(1)}(k^2)/k^2}. \quad (4.54)$$

De (4.42) e (4.43) verificamos que

$$\Pi(0) = \frac{[e^2/(4\pi)]^2}{1 - e^2/(12\pi m)} \neq 0 \quad (4.55)$$

e, portanto, o propagador modificado possui um polo deslocado da origem. Podemos então concluir que o fóton adquire uma massa μ de ordem e^2 gerada “dinamicamente”, em concordância com o procedimento usual a partir de (3.1), utilizando regularizações que preservam a invariância de gauge da teoria original^{[19],[20]}, bem como com o procedimento de Källén^[21], utilizando-se as equações de Heisenberg e transformadas de Hilbert generalizadas. Podemos então concluir que no formalismo causal a QED₃ é uma teoria bem definida perturbativamente e sem ambiguidades no que se refere à geração dinâmica de massa para o fóton.

4.3 A Auto-energia do Elétron

Vamos agora discutir o outro diagrama de segunda ordem da QED₃ com ω não negativo, a auto-energia do elétron. A distribuição C-número correspondente é dada por

$$\begin{aligned} d(y) &= -e^2 \gamma^\mu [S^{(-)}(y) D_0^{(+)}(-y) + S^{(+)}(y) D_0^{(+)}(y)] \gamma_\mu \\ &= -e^2 \gamma^\mu [d_-(y) + d_+(y)] \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde

$$\begin{aligned} d_-(y) &= S^{(-)}(y)D_0^{(+)}(-y) \\ d_+(y) &= S^{(+)}(y)D_0^{(+)}(y) . \end{aligned} \quad (4.57)$$

A transformada de Fourier de d_- é

$$\begin{aligned} \hat{d}_-(p) &= -(2\pi)^{3/2} \int d^3q \hat{D}_0^{(-)}(p-q)(\not{p} + m) \hat{D}_m^{(-)}(q) \\ &= (2\pi)^3 (I_1 + I_2) , \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde

$$I_1 \equiv \int d^3q \theta(q^0 - p^0) \delta[(p-q)^2] m \theta(-q^0) \delta(q^2 - m^2) \quad (4.59)$$

e

$$I_2 \equiv \int d^3q \theta(q^0 - p^0) \delta[(p-q)^2] \not{p} \theta(-q^0) \delta(q^2 - m^2) . \quad (4.60)$$

Tomando p do tipo tempo na forma $p = (p_0, \mathbf{0})$ resulta

$$\begin{aligned} I_1 &= m \int d^3q \theta(q^0 - p^0) \theta(-q^0) \delta(p_0^2 - 2p_0q_0 + m^2) \delta(q^2 - m^2) \\ &= m \int \frac{d^2q}{2E_q} \delta(p_0^2 + 2p_0E_q + m^2) \theta(-E_q - p_0) . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Segue de (4.61) que $p_0 < 0$ e

$$E_q = \frac{m^2 + p_0^2}{-2p_0} = \sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2} , \quad (4.62)$$

de modo que

$$|\mathbf{q}| = \frac{m^2 - p_0^2}{2p_0} \text{ e } m^2 - p_0^2 < 0 . \quad (4.63)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\pi}{2} m \theta(p_0^2 - m^2) \theta(-p_0) \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|}{E_q} \frac{1}{2|p_0|} \delta\left(E_q - \frac{p_0^2 + m^2}{2|p_0|}\right) \\ &= \pi m \theta(p_0^2 - m^2) \theta(-p_0) \int_m^\infty dE \frac{E}{E} \frac{1}{2|p_0|} \delta\left(E - \frac{p_0^2 + m^2}{2|p_0|}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \theta(p_0^2 - m^2) \theta(-p_0) \frac{m}{\sqrt{p_0^2}} . \quad (4.64)$$

Podemos escrever a integral (4.60) na forma $I_2 = I_2^\nu \gamma_\nu$. Para $\nu \neq 0$, I_2^ν se anula por simetria. Para I_2^0 temos

$$\begin{aligned} I_2^0 &= \int d^3 q q^0 \theta(q^0 - p^0) \delta(p_0^2 - 2p_0 q_0 + m^2) \frac{\delta(q^0 + E_q)}{2E_q} \\ &= \frac{\pi}{2} \theta(p_0^2 - m^2) \theta(-p_0) \frac{p_0^2 + m^2}{2p_0^2} \frac{p^0}{\sqrt{p_0^2}} , \end{aligned} \quad (4.65)$$

da mesma forma que acima para I_1 . Para p genérico, devemos substituir p_0^2 por p^2 em I_1 e I_2 e o termo linear $p^0 \gamma_0$ em $I_2^0 \gamma_0$, com I_2^0 dada por (4.65), por \not{p} . Obtemos então

$$\hat{d}_-(p) = (2\pi)^{-3} \frac{\pi}{2} \theta(p^2 - m^2) \theta(-p_0) \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left[m + \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] , \quad (4.66)$$

que coincide com a distribuição $\hat{r}'(p)$. A distribuição $\hat{d}_+(p)$, com suporte no cone de luz avançado, é obtida de maneira análoga a partir de (4.57), ou simplesmente substituindo $-\theta(-p_0)$ por $\theta(p_0)$ em (4.66).

Segue de (4.55), (4.66) e (A.7) que

$$\begin{aligned} \hat{d}(p) &= e^2 \gamma^\mu [\hat{d}_-(p) + \hat{d}_+(p)] \gamma_\mu \\ &= e^2 (2\pi)^{-3} \frac{\pi}{2} \theta(p^2 - m^2) \frac{\text{sgn} p_0}{\sqrt{p^2}} \left[3m - \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.67)$$

De (4.67) concluímos que a ordem singular de \hat{d} é $\omega = 0$. Portanto, a solução simétrica (3.33) do problema de bipartição é dada por

$$\begin{aligned} \hat{r}(p) &= e^2 (2\pi)^{-3} \frac{i}{2} \frac{\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t - i0)(1 - t + i0)} \theta(t^2 p^2 - m^2) \\ &\quad \times \frac{\text{sgn} t p_0}{|t| \sqrt{p^2}} \left[3m - \frac{t \not{p}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{t^2 p^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Indicando por J_3 , J_4 e J_5 os termos multiplicados respectivamente por $3m$, $p/2$ e $pm^2/(2p^2)$ em (4.68), temos

$$\begin{aligned} J_3 &\equiv \int_{\sqrt{m^2/p^2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \left(\frac{1}{1-t+i0} + \frac{1}{1+t+i0} \right) \\ &= J_2 = \log \left(\frac{1 - \sqrt{p^2/m^2}}{1 + \sqrt{p^2/m^2}} \right) - i\pi\theta(p^2 - m^2) + 2\sqrt{\frac{p^2}{m^2}}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} J_4 &\equiv \int_{\sqrt{m^2/p^2}}^{\infty} \frac{dt}{|t|} \left(\frac{1}{1-t+i0} - \frac{1}{1+t+i0} \right) \\ &= J_1 = \log \left(\frac{1 - \sqrt{p^2/m^2}}{1 + \sqrt{p^2/m^2}} \right) - i\pi\theta(p^2 - m^2), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$J_5 \equiv \int_{\sqrt{m^2/p^2}}^{\infty} \frac{dt}{|t|t^2} \frac{2t}{(1+i0)^2 - t^2} = -2 \int_{\sqrt{m^2/p^2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2(t^2 - 1 - i0)} = J_3. \quad (4.71)$$

De (4.68)-(4.71) resulta

$$\begin{aligned} \hat{r}(p) &= e^2(2\pi)^{-4} \frac{i\pi \operatorname{sgn} p_0}{2 \sqrt{p^2}} \left\{ \left[3m - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] \log \left(\frac{1 - \sqrt{p^2/m^2}}{1 + \sqrt{p^2/m^2}} \right) \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{p^2}{m^2}} \left(6m - p \frac{m^2}{p^2} \right) \right\} + e^2(2\pi)^{-3} \frac{\pi}{4} \theta(p^2 - m^2) \frac{\operatorname{sgn} p_0}{\sqrt{p^2}} \left[3m - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

A solução geral do problema de bipartição é dada por

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + C_0. \quad (4.73)$$

Por outro lado, a estrutura tensorial de \hat{r} é

$$\hat{r}(p) = r_0(p^2) + pr_1(p^2), \quad (4.74)$$

conforme (4.67), de onde se conclui que r_0 possui ordem $\omega = -1$ e pr_1 ordem $\omega = 0$. Mas C_0 em (4.73) corresponderia a r_0 , o que é impossível pois neste

caso $\omega = -1$. Portanto, $C_0 = 0$, uma vez que a bipartição da distribuição \hat{d} deve respeitar sua estrutura tensorial.

A auto-energia do elétron é definida como

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -i(2\pi)^2[\hat{r}(p) - \hat{r}'(p)] \\ &= \frac{e^2}{8\pi\sqrt{p^2}} \left\{ \left[3m - \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right] \log \left(\frac{1 - \sqrt{p^2/m^2}}{1 + \sqrt{p^2/m^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{p^2}{m^2}} \left(6m - \not{p} \frac{m^2}{p^2} \right) \right\} - \frac{ie^2}{16\pi} \theta(p^2 - m^2) \frac{1}{\sqrt{p^2}} \left[3m - \frac{\not{p}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \right], \quad (4.75) \end{aligned}$$

quando p está situado no cone de luz avançado. A singularidade logarítmica na camada de massa $p^2 = m^2$ é mais severa do que em quatro dimensões^[22]. De qualquer modo, $S(g)$ dada por (3.1) permanece bem definida em teoria de perturbação mesmo em três dimensões, embora neste caso o limite adiabático $g \rightarrow 1$ seja muito mais delicado.

5. A Função de Vértice

No capítulo anterior discutimos as inserções próprias de dois pontos que levam aos propagadores corrigidos em segunda ordem. Resta ainda uma outra inserção básica da teoria, a chamada função de vértice, que, assim como a auto-energia do elétron, também exibe um comportamento singular na região do infravermelho. Construímos a função de três pontos que corresponde à função de vértice a partir das distribuições retardada e avançada

$$\begin{aligned}
 R'_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{P_2} T(Y, x_3) \tilde{T}(X) \\
 &= \underbrace{T_2(x_1, x_3) \tilde{T}_1(x_2)}_{R'_{31}} + \underbrace{T_2(x_2, x_3) \tilde{T}_1(x_1)}_{R'_{32}} + \underbrace{T_1(x_3) \tilde{T}_2(x_1, x_2)}_{R'_{33}}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 A'_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{P_2} \tilde{T}(X) T(Y, x_3) \\
 &= \underbrace{\tilde{T}_1(x_2) T_2(x_1, x_3)}_{A'_{31}} + \underbrace{\tilde{T}_1(x_1) T_2(x_2, x_3)}_{A'_{32}} + \underbrace{\tilde{T}_2(x_1, x_2) T_1(x_3)}_{A'_{33}},
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

que resultam de (3.5) e (3.6), respectivamente. Cada termo em (5.1) e (5.2) corresponde a uma certa decomposição do diagrama de vértice num vértice simples ($T_1 = -\tilde{T}_1$) e um diagrama de segunda ordem (T_2, \tilde{T}_2), conforme a

Fig. 5.1. Este último pode ser a função de dois pontos para o espalhamento Möller,

$$T_2^{(1)}(x_1, x_2) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2) : D_0^F(x_1 - x_2) , \quad (5.3)$$

ou aquela para o espalhamento Compton,

$$T_2^{(2)}(x_1, x_3) = -ie^2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu S_F(x_1 - x_3)\gamma^\nu\psi(x_3) : A_\mu(x_1)A_\nu(x_3) : \\ -ie^2 : \bar{\psi}(x_3)\gamma^\nu S_F(x_3 - x_1)\gamma^\mu\psi(x_1) : A_\mu(x_1)A_\nu(x_3) : . \quad (5.4)$$

As funções inversas de dois pontos são dadas por (3.4):

$$\tilde{T}_2(x_1, x_2) = -T_2(x_1, x_2) + T_1(x_1)T_1(x_2) + T_1(x_2)T_1(x_1) . \quad (5.5)$$

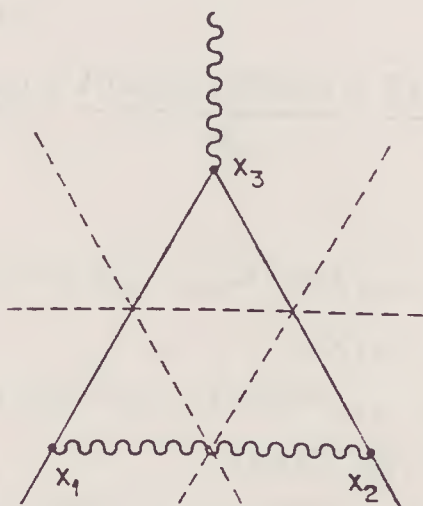


Figura 5.1: Decomposição do Diagrama de Vértice

Para o primeiro termo em (5.1) obtemos

$$\begin{aligned}
R'_{31} &\equiv -T_2^{(2)}(x_1, x_3)T_1(x_2) \\
&= ie^2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu S_F(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2)ie\gamma^\lambda\psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\mu\lambda}D_0^{(+)}(x_1 - x_2)A_\nu(x_3) , \tag{5.6}
\end{aligned}$$

de modo que a x_1 está associado um elétron emergente, a x_2 um elétron incidente e a x_3 um fóton externo. Analogamente,

$$\begin{aligned}
R'_{32} &\equiv -T_2^{(2)}(x_2, x_3)T_1(x_1) \\
&= -ie^2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu S^{(-)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S_F(x_3 - x_2)ie\gamma^\mu\psi(x_2) : \\
&\quad \times D_0^{(+)}(x_2 - x_1)A_\nu(x_3) . \tag{5.7}
\end{aligned}$$

O último termo em (5.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
R'_{33} &\equiv T_1(x_3)\tilde{T}_2^{(1)}(x_1, x_2) \\
&= \underbrace{-T_1(x_3)T_2^{(1)}(x_1, x_2)}_{R'_1} + \underbrace{T_1(x_3)T_1(x_1)T_1(x_2)}_{R'_{21}} + \underbrace{T_1(x_3)T_1(x_2)T_1(x_1)}_{R'_{22}} , \tag{5.8}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
R'_1 &= e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu \frac{1}{i}S^{(-)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu \frac{1}{i}S^{(+)}(x_3 - x_2)\gamma_\mu\psi(x_2) : \\
&\quad \times D_0^F(x_1 - x_2)A_\nu(x_3) , \tag{5.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_{21} &= e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu S^{(-)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2)\gamma^\lambda\psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\mu\lambda}D_0^{(+)}(x_1 - x_2)A_\nu(x_3) , \tag{5.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_{22} &= e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\lambda S^{(-)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(+)}(x_3 - x_2)\gamma^\mu\psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\mu\lambda}D_0^{(+)}(x_2 - x_1)A_\nu(x_3) . \tag{5.11}
\end{aligned}$$

A distribuição avançada é obtida de modo análogo,

$$\begin{aligned}
A'_{31} &= -T_1(x_2)T_2^{(2)}(x_1, x_3) \\
&= e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu S_F(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2) : \gamma^\lambda \psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\lambda\mu} D_0^{(+)}(x_2 - x_1)A_\nu(x_3) , \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'_{32} &= -T_1(x_1)T_2^{(2)}(x_2, x_3) \\
&= -e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\lambda S^{(+)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S_F(x_3 - x_2)\gamma^\mu \psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\lambda\mu} D_0^{(+)}(x_1 - x_2)A_\nu(x_3) . \tag{5.13}
\end{aligned}$$

O último termo em (5.2) divide-se em três partes

$$\begin{aligned}
A'_{33} &= \tilde{T}_2(x_1, x_2)T_1(x_3) \\
&= \underbrace{-T_2^{(1)}(x_1, x_2)T_1(x_3)}_{A'_1} + \underbrace{T_1(x_1)T_1(x_2)T_1(x_3)}_{A'_{21}} + \underbrace{T_1(x_2)T_1(x_1)T_1(x_3)}_{A'_{22}} , \tag{5.14}
\end{aligned}$$

com os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
A'_1 &= -e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2)\gamma_\mu \psi(x_2) : \\
&\quad \times D_0^F(x_1 - x_2)A_\nu(x_3) , \tag{5.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'_{21} &= e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu S^{(+)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2)\gamma^\lambda \psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\mu\lambda} D_0^{(+)}(x_1 - x_2)A_\nu(x_3) , \tag{5.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'_{22} &= e^3 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\lambda S^{(+)}(x_1 - x_3)\gamma^\nu S^{(-)}(x_3 - x_2)\gamma^\mu \psi(x_2) : \\
&\quad \times g_{\mu\lambda} D_0^{(+)}(x_2 - x_1)A_\nu(x_3) . \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Podemos agora escrever a diferença

$$D = R' - A' \stackrel{def}{=} -e^3 : \bar{\psi}(x_1)D^\nu(x_1, x_2, x_3)\psi(x_2) : A_\nu(x_3) , \tag{5.18}$$

onde todos os 10 termos que contribuem para D^ν possuem a mesma estrutura matricial. Os seguintes pares de termos combinam-se: R'_{31} com R'_{21} ,

R'_{32} com R'_{22} , $-A'_{31}$ com $-A'_{22}$ e $-A'_{32}$ com $-A'_{21}$. Com isso todos os propagadores de Feynman fermiônicos são convertidos em propagadores retardados e avançados.

No espaço dos momentos temos

$$\hat{D}^\nu(p, q) = (2\pi)^{-3} \int dy_1 dy_2 D^\nu(x_1, x_2, x_3) e^{ipy_1 + iqy_2} = \hat{R}' - \hat{A}' , \quad (5.19)$$

onde

$$y_1 = x_1 - x_3 , \quad y_2 = x_3 - x_2 .$$

As distribuições retardada e avançada resultantes são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \hat{R}'(p, q) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \left[\gamma^\mu \hat{S}^{(-)}(p-k) \gamma^\nu \hat{S}^{(+)}(q-k) \gamma_\mu \hat{D}_0^F(k) \right. \\ \left. + \gamma^\mu \hat{S}^{(-)}(p+k) \gamma^\nu \hat{S}^{av}(q+k) \gamma_\mu \hat{D}_0^{(+)}(k) \right. \\ \left. - \gamma^\mu \hat{S}^{ret}(p-k) \gamma^\nu \hat{S}^{(+)}(q-k) \gamma_\mu \hat{D}_0^{(+)}(k) \right] , \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}'(p, q) = -(2\pi)^{-3/2} \int d^3k \left[-\gamma^\mu \hat{S}^{(+)}(p-k) \gamma^\nu \hat{S}^{(-)}(q-k) \gamma_\mu \hat{D}_0^F(k) \right. \\ \left. + \gamma^\mu \hat{S}^{(+)}(p-k) \gamma^\nu \hat{S}^{ret}(q-k) \gamma_\mu \hat{D}_0^{(+)}(k) \right. \\ \left. - \gamma^\mu \hat{S}^{av}(p+k) \gamma^\nu \hat{S}^{(-)}(q+k) \gamma_\mu \hat{D}_0^{(+)}(k) \right] . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Após simplificação da parte matricial, D^ν pode ser escrito como

$$\begin{aligned} D^\nu(p, q) = -3\not{q}\gamma^\nu\not{p}\mathcal{I} + 3\not{q}\gamma^\nu\gamma^\mu\mathcal{I}_\mu + 3\mathcal{I}_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p} + 3\mathcal{I}^\mu{}_\mu\gamma^\nu \\ - 6\mathcal{I}^\nu{}_\mu\gamma^\mu + 4m(p^\nu + q^\nu)\mathcal{I} - 6m\mathcal{I}^\nu - m(\not{p}\gamma^\nu + \gamma^\nu\not{q})\mathcal{I} - m^2\gamma^\nu\mathcal{I} , \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde \mathcal{I} , \mathcal{I}^μ e $\mathcal{I}^{\mu\nu}$ são as seguintes integrais escalar, vetorial e tensorial, respectivamente,

$$\mathcal{I}^{\dots}(p, q) \stackrel{def}{=} (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{1, k^\mu, k^{\mu\nu}\}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[-D^{(+)}(k-p)D^{(-)}(k-q)D_0^F(k) + D^{(-)}(k-p)D^{(+)}(k-q)D_0^F(k) \right. \\ & \quad - D^{(+)}(k-p)D^{ret}(k-q)D_0^{(-)}(k) + D^{(-)}(k-p)D^{av}(k-q)D_0^{(+)}(k) \\ & \quad \left. - D^{av}(k-p)D^{(-)}(k-q)D_0^{(+)}(k) + D^{ret}(k-p)D^{(+)}(k-q)D_0^{(-)}(k) \right] . \end{aligned} \quad (5.23)$$

e

$$D^{(\pm)}(k) = \theta(\pm k_0)\delta(k^2 - m^2), \quad D^F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i0}, \quad (5.24)$$

$$D^{av}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 - ik_0 0}, \quad D^{ret} = \frac{1}{k^2 - m^2 + ik_0 0}. \quad (5.25)$$

As quantidades com sub-índice 0 correspondem a $m = 0$.

Calculemos a integral escalar

$$\mathcal{I}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \sum_{j=1}^6 \mathcal{I}_j, \quad (5.26)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 \equiv & \int d^3k \theta(p^0 - k^0)\delta[(k-p)^2 - m^2] \frac{1}{(k-q)^2 - m^2 - i0(k^0 - q^0)} \\ & \times \theta(k^0)\delta(k^2), \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 \equiv & \int d^3k \frac{1}{(k-p)^2 - m^2 + i0(k^0 - p^0)} \theta(k^0 - q^0)\delta[(k-q)^2 - m^2] \\ & \times \theta(-k^0)\delta(k^2), \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 \equiv & \int d^3k \theta(p^0 - k^0)\delta[(k-p)^2 - m^2] \theta(k^0 - q^0)\delta[(k-q)^2 - m^2] \\ & \times \frac{1}{k^2 + i0} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 \equiv & - \int d^3k \frac{1}{(k-p)^2 - m^2 - i0(k^0 - p^0)} \theta(q^0 - k^0)\delta[(k-q)^2 - m^2] \\ & \times \theta(k^0)\delta(k^2), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\mathcal{I}_5 \equiv - \int d^3k \theta(k^0 - p^0) \delta[(k-p)^2 - m^2] \frac{1}{(k-q)^2 - m^2 + i0(k^0 - q^0)} \times \theta(-k^0) \delta(k^2), \quad (5.31)$$

$$\mathcal{I}_6 \equiv - \int d^3k \theta(k^0 - p^0) \delta[(k-p)^2 - m^2] \theta(q^0 - k^0) \delta[(k-q)^2 - m^2] \times \frac{1}{k^2 + i0}. \quad (5.32)$$

Definindo

$$I(p, q) \equiv -(\mathcal{I}_5 + \mathcal{I}_6) \quad (5.33)$$

e efetuando a translação $k \rightarrow k + p$ nas variáveis de integração, obtemos

$$I = I_a + I_b, \quad (5.34)$$

onde

$$I_a = \int \frac{d^3k}{(k+p)^2 + i0} \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \theta(-P_0 - k_0) \delta[(P+k)^2 - m^2], \quad (5.35)$$

$$I_b = - \int \frac{d^3k}{(k+p)^2 + i0} \theta(-k_0) \delta(k^2 - m^2) \theta(P_0 + k_0) \delta[(P+k)^2 - m^2], \quad (5.36)$$

com

$$P \equiv p - q. \quad (5.37)$$

O produto das primeiras funções θ e δ no integrando de (5.35) fornece $\delta(k_0 - E_k)/(2E_k)$, o que implica

$$k_0 = E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad P_0 < -k_0 < -m. \quad (5.38)$$

Para P do tipo espaço existe um referencial de Lorentz com $P_0 = 0$, tal que I_a se anule. Conseqüentemente, P deve ser do tipo tempo. Existe então um referencial com $\mathbf{P} = 0 = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ (sistema do centro de massa). A última função δ em (5.35) implica

$$P_0^2 = -2E_k P_0, \quad E_k = -\frac{P_0}{2} = -\frac{1}{2}(p_0 - q_0), \quad k_0 = -\frac{1}{2}P_0. \quad (5.39)$$

Analogamente, em (5.36) temos

$$k_0 = -E_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad P_0 > -k_0 > m. \quad (5.40)$$

e

$$P_0^2 = -2E_{\mathbf{k}}P_0, \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{P_0}{2} = \frac{1}{2}(p_0 - q_0), \quad k_0 = -\frac{1}{2}P_0. \quad (5.41)$$

Assim,

$$I_a = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{(E_{\mathbf{k}} + p_0)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + i0} \frac{\delta(E_{\mathbf{k}} + P_0/2)}{2|P_0|}$$

para $-P_0 - E_{\mathbf{k}} > 0$, (5.42)

$$I_b = - \int \frac{d^2\mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{(E_{\mathbf{k}} - p_0)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + i0} \frac{\delta(E_{\mathbf{k}} - P_0/2)}{2|P_0|}$$

para $P_0 - E_{\mathbf{k}} > 0$. (5.43)

Se utilizarmos $E = E_{\mathbf{k}}$ como variável de integração

$$\int d^2\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| = \int_0^{2\pi} \int_m^\infty E dE,$$

a integração em E pode ser facilmente efetuada devido à função δ em (5.42) e (5.43). Com isso, obtemos

$$I = -\text{sgn}P_0 \frac{\theta(P_0^2 - 4m^2)}{4|P_0|} \times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{p_0q_0 - \mathbf{p}^2 + m^2 - \sqrt{P_0^2 - 4m^2}|\mathbf{p}| \cos \varphi + i0}. \quad (5.44)$$

Podemos reescrever a integral acima na forma covariante, se notarmos que

$$p_0q_0 - \mathbf{p}^2 = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p \cdot q$$

e

$$\begin{aligned} |P_0||\mathbf{p}| &= \sqrt{(p_0 - q_0)^2 \mathbf{p}^2} = \sqrt{p_0^2 \mathbf{q}^2 + q_0^2 \mathbf{p}^2 - 2p_0 q_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}} \\ &= \sqrt{(p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - (p_0^2 - \mathbf{p}^2)(q_0^2 - \mathbf{q}^2)} = \sqrt{(p \cdot q)^2 - p^2 q^2} . \end{aligned}$$

Deste modo, num referencial arbitrário

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\text{sgn} P_0}{4\sqrt{P^2}} \theta(P^2 - 4m^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{a_3 + b_3 \cos \varphi + i0} \\ &= \frac{\pi \text{sgn} P_0}{2 \sqrt{P^2}} \theta(P^2 - 4m^2) \frac{1}{\sqrt{a_3^2 - b_3^2 + ia_3 0}} , \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde

$$a_3 \equiv pq + m^2 , \quad b_3 \equiv -\sqrt{N} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{P^2}} \quad (5.46)$$

e

$$N \equiv (p \cdot q)^2 - p^2 q^2 . \quad (5.47)$$

Seguindo o mesmo procedimento que levou à expressão (5.45) para I , podemos efetuar o cálculo das integrais

$$J(p, q) \equiv \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_5 \quad (5.48)$$

e

$$K(p, q) \equiv \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_4 = -J(q, p) . \quad (5.49)$$

O cálculo de J pode ser feito num referencial em que $\mathbf{p} = 0$, pois neste caso p deve ser do tipo tempo para que a integral não se anule. Notando que

$$|p_0||\mathbf{q}| = \sqrt{p_0^2 \mathbf{q}^2} = \sqrt{p_0^2 (q_0^2 - q^2)} = \sqrt{(p_0 q_0)^2 - p_0^2 q^2} = \sqrt{N} ,$$

num referencial arbitrário, resulta

$$\begin{aligned} J(p, q) &= \frac{\text{sgn} p_0}{4\sqrt{p^2}} \theta(p^2 - m^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{a_1 + b_1 \cos \varphi - i(p^2 - m^2 - 2pq)0} \\ &= \frac{\pi \text{sgn} p_0}{2 \sqrt{p^2}} \theta(p^2 - m^2) \left[\frac{\theta(p^2 - m^2 - 2pq)}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 - ia_1 0}} - \frac{\theta(-p^2 + m^2 + 2pq)}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 + ia_1 0}} \right] , \end{aligned} \quad (5.50)$$

com

$$a_1 \equiv q^2 - m^2 - pq \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right), \quad b_1 \equiv -\sqrt{N} \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right). \quad (5.51)$$

Utilizando (5.49) e definindo agora

$$a_2 \equiv p^2 - m^2 - pq \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right), \quad b_2 \equiv -\sqrt{N} \left(1 - \frac{m^2}{q^2}\right), \quad (5.52)$$

encontramos uma expressão para K e, conseqüentemente, a integral escalar pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(p, q) = & \frac{\pi}{2(2\pi)^{9/2}} \left\{ -\frac{\text{sgn}P_0}{\sqrt{P^2}} \theta(P^2 - 4m^2) \frac{1}{\sqrt{a_3^2 - b_3^2 + ia_3 0}} \right. \\ & \frac{\text{sgn}p_0}{\sqrt{p^2}} \theta(p^2 - m^2) \left[\frac{\theta(p^2 - m^2 - 2pq)}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 - ia_1 0}} - \frac{\theta(-p^2 + m^2 + 2pq)}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 + ia_1 0}} \right] \\ & \left. - \frac{\text{sgn}q_0}{\sqrt{q^2}} \theta(q^2 - m^2) \left[\frac{\theta(q^2 - m^2 - 2pq)}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2 - ia_2 0}} - \frac{\theta(-q^2 + m^2 + 2pq)}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2 + ia_2 0}} \right] \right\}. \quad (5.53) \end{aligned}$$

O cálculo algébrico das integrais vetorial e tensorial é extremamente extenso. Cada uma delas pode ser decomposta em termos proporcionais respectivamente a $\text{sgn}P_0$, $\text{sgn}p_0$ e $\text{sgn}q_0$, os quais, por sua vez, são construídos a partir de produtos tensoriais dos momentos externos p e q .

A integral vetorial é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\mu(p, q) = & \frac{\mathcal{I}(p, q)}{2N} \left\{ p^\mu [pq(q^2 - m^2) - q^2(p^2 - m^2)] \right. \\ & \left. + q^\mu [pq(p^2 - m^2) - p^2(q^2 - m^2)] \right\} \\ & + \frac{\pi}{4(2\pi)^{9/2} N} \left\{ \frac{\text{sgn}P_0}{\sqrt{P^2}} \theta(P^2 - 4m^2) [p^\mu(pq - q^2) + q^\mu(pq - p^2)] \right. \\ & \left. + \frac{\text{sgn}p_0}{\sqrt{p^2}} \theta(p^2 - m^2) [q^\mu p^2 - p^\mu(pq)] - \frac{\text{sgn}q_0}{\sqrt{q^2}} \theta(q^2 - m^2) [p^\mu q^2 - q^\mu(pq)] \right\}. \quad (5.54) \end{aligned}$$

Finalmente, a integral tensorial é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\mu\nu}(p, q) = & \frac{\mathcal{I}(p, q)}{N} \left\{ -q^\mu q^\nu \left\{ -\frac{1}{N} \left[(q^2 - m^2)p^2 - (pq)(p^2 - m^2) \right]^2 \right. \right. \\
& + \frac{1}{4}(p^2 - m^2)^2 \left. \right\} - (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \frac{1}{8} \left\{ 2(p^2 - m^2)(q^2 - m^2) \right. \\
& + \frac{4pq}{N} \left[(q^2 - m^2)^2 p^2 - 2(q^2 - m^2)(p^2 - m^2)pq + (p^2 - m^2)^2 q^2 \right] \left. \right\} \\
& - p^\mu p^\nu \left\{ -\frac{1}{2N} \left[(p^2 - m^2)q^2 - (pq)(q^2 - m^2) \right]^2 + \frac{1}{4}(q^2 - m^2)^2 \right\} \\
& + g^{\mu\nu} \frac{1}{4} \left[p^2(q^2 - m^2)^2 - 2pq(q^2 - m^2)(p^2 - m^2) + q^2(p^2 - m^2)^2 \right] \left. \right\} \\
& + \frac{\pi}{4(2\pi)^{9/2} N} \left\{ \frac{\text{sgn} P_0}{2\sqrt{P^2}} \theta(P^2 - 4m^2) \left\{ p^\mu p^\nu \left[3pq - 2q^2 + m^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{2(pq + m^2)(pq - q^2)^2}{N} \right] + q^\mu q^\nu \left[3pq - 2p^2 + m^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 2\frac{(pq + m^2)(pq - p^2)^2}{N} \right] + (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \left[pq - p^2 - q^2 - m^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 2\frac{(pq + m^2)(pq - q^2)(pq - p^2)}{N} \right] - g^{\mu\nu} P^2(pq + m^2) \right\} \right. \\
& + \frac{\text{sgn} p_0}{\sqrt{p^2}} \theta(p^2 - m^2) \left\{ q^\mu q^\nu \frac{p^2}{N} \left[pq(p^2 - m^2) - p^2(q^2 - m^2) \right] \right. \\
& + p^\mu p^\nu \frac{1}{2N} \left\{ pq \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \left[3p^2 q^2 - (pq)^2 \right] \right. \\
& \left. - (q^2 - m^2) \left[(pq)^2 + p^2 q^2 \right] \right\} + (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) \frac{p^2}{2N} \left\{ 2pq(q^2 - m^2) \right. \\
& \left. - \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \left[(pq)^2 + p^2 q^2 \right] \right\} + g^{\mu\nu} \frac{p^2}{2} \left[pq \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) - (q^2 - m^2) \right] \left. \right\} \\
& - \frac{\text{sgn} q_0}{\sqrt{q^2}} \theta(q^2 - m^2) \times \{ p \leftrightarrow q \} \left. \right\} .
\end{aligned} \tag{5.55}$$

As distribuições R' (A') para as integrais escalar, vetorial e tensorial são obtidas substituindo-se $\text{sgn} p_0$ por $-\theta(-p_0)$ ($-\theta(p_0)$), $\text{sgn} q_0$ por $\theta(q_0)$ ($\theta(-q_0)$)

e $\text{sgn}P_0$ por $-\theta(-P_0)$ ($-\theta(P_0)$) em (5.53), (5.54) e (5.55). As partes imaginárias das funções

$$\Sigma^{(1)}(p, q) \equiv \frac{\theta(p^2 - m^2 - 2pq)}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 - ia_1 0}} - \frac{\theta(-p^2 + m^2 + 2pq)}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2 + ia_1 0}}, \quad (5.56)$$

$$\Sigma^{(2)}(p, q) \equiv \frac{\theta(q^2 - m^2 - 2pq)}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2 - ia_2 0}} - \frac{\theta(-q^2 + m^2 + 2pq)}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2 + ia_2 0}}, \quad (5.57)$$

$$\Sigma^{(3)}(p, q) \equiv \frac{1}{\sqrt{a_3^2 - b_3^2 + ia_3 0}} \quad (5.58)$$

são dadas por

$$\Im m \Sigma^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \theta(q^2 - m^2) \theta(2pq - \frac{p^2 - m^2}{q^2 - m^2} q^2 - \frac{q^2 - m^2}{p^2 - m^2} p^2), \quad (5.59)$$

$$\Im m \Sigma^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}} \theta(p^2 - m^2) \theta(2pq - \frac{p^2 - m^2}{q^2 - m^2} q^2 - \frac{q^2 - m^2}{p^2 - m^2} p^2), \quad (5.60)$$

$$\Im m \Sigma^{(3)} = 0. \quad (5.61)$$

e, portanto, as distribuições para as integrais escalar, vetorial e tensorial são reais. Para a integral escalar temos que

$$\begin{aligned} \Im m \mathcal{I}_{R'}(p, q) &= \Im m \mathcal{I}_{A'}(p, q) \\ &= \frac{\pi}{2(2\pi)^{9/2}} \frac{1}{\sqrt{2pq(p^2 - m^2)(q^2 - m^2) - p^2(q^2 - m^2)^2 - q^2(p^2 - m^2)^2}} \\ &\quad \times \theta(p^2 - m^2) \theta(q^2 - m^2) \theta(2pq - p^2 \frac{q^2 - m^2}{p^2 - m^2} - q^2 \frac{p^2 - m^2}{q^2 - m^2}) \\ &= \frac{\pi}{2(2\pi)^{9/2}} \frac{\theta(p^2 - m^2) \theta(q^2 - m^2)}{\sqrt{p^2 - m^2} \sqrt{q^2 - m^2}} \\ &\quad \times \frac{\theta(2pq - p^2(q^2 - m^2)/(p^2 - m^2) - q^2(p^2 - m^2)/(q^2 - m^2))}{\sqrt{2pq - p^2(q^2 - m^2)/(p^2 - m^2) - q^2(p^2 - m^2)/(q^2 - m^2)}}. \quad (5.62) \end{aligned}$$

As seguintes relações de simetria são consequência direta da definição (5.23):

$$\mathcal{I}(q, p) = -\mathcal{I}(p, q) , \quad (5.63)$$

$$\mathcal{I}(-p, -q) = -\mathcal{I}(p, q) , \quad (5.64)$$

$$\mathcal{I}(-p, q) = -\mathcal{I}(q, -p) = \mathcal{I}(-q, p) , \quad (5.65)$$

$$\mathcal{I}^{\mu}(-p, -q) = \mathcal{I}^{\mu}(p, q) , \quad (5.66)$$

$$\mathcal{I}^{\mu}(-p, q) = -\mathcal{I}^{\mu}(q, -p) = -\mathcal{I}^{\mu}(-q, p) , \quad (5.67)$$

$$\mathcal{I}^{\mu\nu}(-p, -q) = -\mathcal{I}^{\mu\nu}(p, q) , \quad (5.68)$$

$$\mathcal{I}^{\mu\nu}(-p, q) = -\mathcal{I}^{\mu\nu}(q, -p) = \mathcal{I}^{\mu\nu}(-q, p) . \quad (5.69)$$

Se p e q forem 3-momentos de elétrons externos, a distribuição $D^{\nu}(p, q)$ em (5.22) pode ser simplificada anticomutando-se \not{p} para a esquerda e \not{q} para a direita, tendo-se em conta que esta aparece entre os espinores de Dirac $\bar{u}(\mathbf{p})$ e $u(\mathbf{q})$. Estes últimos obedecem, respectivamente, às equações de Dirac

$$\bar{u}(\mathbf{p})\not{p} = \bar{u}(\mathbf{p})m , \quad \not{q}u(\mathbf{q}) = mu(\mathbf{q}) . \quad (5.70)$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^{\nu}(p, q) = & -2m(p^{\nu} + q^{\nu})\mathcal{I} + 6pq\gamma^{\nu}\mathcal{I} + 6(p^{\nu} + q^{\nu})\gamma^{\mu}\mathcal{I}_{\mu} \\ & -6\dot{\gamma}^{\nu}(p^{\mu} + q^{\mu})\mathcal{I}_{\mu} + 3\gamma^{\nu}\mathcal{I}^{\mu}_{\mu} - 6\mathcal{I}^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu} . \end{aligned} \quad (5.71)$$

A integral escalar \mathcal{I} diverge na camada de massa, onde apenas o primeiro termo divergente sobrevive para $\text{sgn}p_0 = \text{sgn}q_0$, enquanto que as integrais vetorial e tensorial permanecem finitas nesse limite. O primeiro e o terceiro termos em (5.71) são de ordem $\omega = -2$ e os demais possuem $\omega = -1$, entre os espinores $\bar{u}(\mathbf{p})$ e $u(\mathbf{q})$. Entretanto, os dois últimos termos nessa expressão cancelam-se entre si.

As distribuições retardadas que correspondem a cada um dos termos restantes são obtidas através de uma relação de dispersão não subtraída,

fazendo $\omega = -1$ em (3.33). A bipartição da distribuição D^ν deve ser efetuada antes de se tomar o limite $p^2 \rightarrow m^2$, $q^2 \rightarrow m^2$, para contornarmos as divergências infravermelhas que acabamos de mencionar. Com tais hipóteses, apenas quatro termos contribuem para a distribuição retardada \hat{R}^ν associada à função de vértice:

$$\hat{R}^\nu(p, q) = \frac{i}{2(2\pi)^{9/2}} \frac{\text{sgn} P_0}{\sqrt{P^2}} \sum_{i=1}^4 \hat{R}^{\nu(i)}(p, q), \quad (5.72)$$

onde

$$\hat{R}^{\nu(1)}(p, q) = \frac{p^\nu + q^\nu}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\theta(t^2 P^2 - 4m^2)}{(1-t+i0)|t^2-1|}, \quad (5.73)$$

$$\hat{R}^{\nu(2)}(p, q) = -\frac{3pq}{m^2} \gamma^\nu \int_{-\infty}^{\infty} dt t \frac{\theta(t^2 P^2 - 4m^2)}{(1-t+i0)|t^2-1|}, \quad (5.74)$$

$$\hat{R}^{\nu(3)}(p, q) = \frac{3m(p^\nu + q^\nu)}{pq + m^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt [1 - \text{sgn}(t^2 - 1)] \frac{\theta(t^2 P^2 - 4m^2)}{t^2(1-t+i0)}, \quad (5.75)$$

$$\hat{R}^{\nu(4)}(p, q) = -3\gamma^\nu \int_{-\infty}^{\infty} dt [1 - \text{sgn}(t^2 - 1)] \frac{\theta(t^2 P^2 - 4m^2)}{t(1-t+i0)}. \quad (5.76)$$

As integrais (5.75) e (5.76) se anulam para $P^2 < 4m^2$. O mesmo ocorre com a distribuição \hat{R}^{ν} , proporcional a $\theta(P^2 - 4m^2)$. Deste modo a transformada de Fourier da função de três pontos que corresponde à função de vértice, ou ao operador corrente corrigido em segunda ordem, propriamente dito, é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda^\nu(p, q) &= -i(2\pi)^{7/2} [\hat{R}^\nu(p, q) - \hat{R}'^\nu(p, q)] \\ &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\text{sgn} P_0}{\sqrt{P^2}} \frac{(p^\nu + q^\nu)}{m} \left[\log \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{P^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{P^2}{4m^2}}} \right) - \frac{8m^2}{P^2 - 4m^2} \sqrt{\frac{P^2}{4m^2}} \right] \\ &\quad - \frac{3}{8\pi} \frac{\text{sgn} P_0}{\sqrt{P^2}} \frac{pq}{m^2} \gamma^\nu \left[\log \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{P^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{P^2}{4m^2}}} \right) + \frac{8m^2}{P^2 - 4m^2} \sqrt{\frac{P^2}{4m^2}} \right]. \quad (5.77) \end{aligned}$$

Para $q \rightarrow p$ resulta

$$\Lambda^\nu(p, p) = -\frac{3}{4\pi m} \gamma^\nu . \quad (5.78)$$

Portanto, no espaço bidimensional a correção de vértice introduz somente um fator de forma elétrico igual a $-3/(4\pi m)$, uma vez que o elétron não possui momento magnético.

6. A Fase Causal em (2+1) Dimensões

No capítulo 2 demonstrou-se que o operador S no espaço de Fock, que descreve processos de espalhamento e produção de partículas em um potencial eletromagnético externo A dependente do tempo é unitário e pode ser construído a partir da matriz S de uma partícula a menos de uma fase física $\lambda[A]$. Neste capítulo determinaremos essa fase em QED_3 através de causalidade e veremos que a mesma está relacionada com flutuações do vácuo na presença do potencial externo $A_\mu(x)$ e, portanto, deve depender deste.

6.1 A Condição de Causalidade

Na teoria de uma partícula a condição de que a mudança na lei de interação em qualquer região do espaço-tempo pode influenciar a evolução do sistema somente em tempos subsequentes pode ser traduzida na fatorização da matriz S

$$S[A] = S_2 S_1, \quad S_j \stackrel{\text{def}}{=} S[A_j], \quad (6.1)$$

onde escrevemos o potencial eletromagnético como

$$A^\mu(x) = A_1^\mu(x) + A_2^\mu(x), \quad (6.2)$$

o qual é a soma de duas partes com suportes disjuntos no tempo

$$\text{supp } A_1 \subset (-\infty, r] , \quad \text{supp } A_2 \subset [r, +\infty) . \quad (6.3)$$

Uma fatorização análoga deve ocorrer devido à equação (2.92) do capítulo 2 para o operador \mathbf{S} no espaço de Fock,

$$(\Omega, \mathbf{S}\Omega) = (\Omega, \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1\Omega) . \quad (6.4)$$

Chamamos (6.1) de condição de causalidade global para o operador \mathbf{S} no espaço de Fock, em contraste com a condição diferencial^[23]

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \left(\Omega, \mathbf{S}^\dagger \frac{\delta \mathbf{S}}{\delta A_\nu(x)} \Omega \right) = 0, \quad \text{for } x^0 < y^0 . \quad (6.5)$$

Como vimos no capítulo 2, a matriz \mathbf{S} no espaço de Fock pode ser univocamente determinada a menos de uma fase,

$$\mathbf{S} = e^{i\varphi} \tilde{\mathbf{S}} , \quad (6.6)$$

onde $\tilde{\mathbf{S}}$ é unitária e dada pela expressão (2.98). Inserindo (6.6) em (6.5) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \left(\mathbf{S}\Omega, \frac{\delta \mathbf{S}}{\delta A_\nu(x)} \Omega \right) = & \\ i \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} + \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \left(\tilde{\mathbf{S}}\Omega, \frac{\delta \tilde{\mathbf{S}}}{\delta A_\nu(x)} \Omega \right) . & \quad (6.7) \end{aligned}$$

Pode-se mostrar tendo em conta a unitariedade de $\tilde{\mathbf{S}}$ que o último termo em (6.7) é um imaginário puro. Conseqüentemente a parte real da condição de causalidade (6.5) é automaticamente satisfeita enquanto que para a parte imaginária podemos escolher φ convenientemente tal que (6.5) é alcançada.

6.2 Cálculo da Fase Causal

Vamos agora determinar a fase causal em ordem mais baixa da teoria de perturbação. De (2.98) temos

$$\tilde{S}\Omega = C\left(\Omega + \sum_{mn} (S_{+-})_{mn} b_m^\dagger d_n^\dagger \Omega + \dots\right), \quad (6.8)$$

onde tomamos S_{+-}^{-1} igual à unidade, nesta aproximação. Efetuando a derivada funcional de (6.8) com respeito a $A_\nu(x)$ e retendo somente termos da ordem $O(A)$ na expressão resultante, obtemos

$$\left(\tilde{S}\Omega, \frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\nu(x)} \Omega\right) = iC^2 \Im m \text{Tr} \left(S_{+-}^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\nu(x)} \right). \quad (6.9)$$

Em mais baixa ordem podemos ainda considerar $C^2 = 1$.

A condição local de causalidade (6.5) junto com as expressões (6.7) e (6.9) fornecem

$$F(x, y) \stackrel{def}{=} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} + \Im m \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \text{Tr} \left((S_{+-})^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\nu(x)} \right) = 0 \quad (6.10)$$

for $x^0 < y^0$.

Calculemos em seguida o segundo termo em (6.10). Em ordem mais baixa da teoria de perturbação temos

$$S_{+-}^{(1)} = -i(2\pi)^{-1} P_+(\mathbf{p}) \gamma^0 e A(p+q) P_-(-\mathbf{q}). \quad (6.11)$$

De (6.11) obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} (S_{+-})^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\nu(x)} &= \\ e^2 (2\pi)^{-5} \int d^2 p \int d^2 q e^{i(p+q)(x-y)} \text{tr} [P_-(-\mathbf{q}) \gamma^0 \gamma^\mu P_+(\mathbf{p}) \gamma^0 \gamma^\nu P_-(-\mathbf{q})] \\ &= e^2 (2\pi)^{-5} \int d^3 k e^{ik(x-y)} T^{\nu\mu}(k), \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $T^{\nu\mu}(k)$ é o tensor de produção de pares mencionado no capítulo 5,

$$\begin{aligned}
T^{\nu\mu}(k) &= -\frac{(2\pi)^3}{e^2} \hat{P}^{\mu\nu}(k) \\
&= \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) \delta[(k-p)^2 - m^2] \Theta(k^0 - p^0) t^{\nu\mu}(k, p) , \quad (6.13)
\end{aligned}$$

com

$$t^{\nu\mu}(k, p) = \text{tr}[\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k} - \not{p} - m)] . \quad (6.14)$$

A equação (6.12) pode então ser escrita como

$$\text{Tr} \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} (S_{+-})^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\nu(x)} = -(2\pi)^{-2} \int d^3k e^{ik(x-y)} \hat{P}^{\mu\nu}(k) . \quad (6.15)$$

Segue da invariância de gauge de (6.13) que

$$\hat{P}^{\mu\nu}(k) = \hat{P}_S^{\mu\nu}(k) + \hat{P}_A^{\mu\nu}(k) \quad (6.16)$$

com

$$\hat{P}_S^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{B}(k^2) , \quad (6.17)$$

$$\hat{P}_A^{\mu\nu}(k) = im \varepsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \tilde{\Pi}^{(2)}(k^2) . \quad (6.18)$$

Efetuando o traço em (6.14) e a integral resultante no espaço dos momentos em (6.13) encontramos

$$\tilde{B}(k^2) = \frac{-e^2}{2(4\pi)^2} \frac{k^2 + 4m^2}{k^2} \Theta(k^2 - 4m^2) \frac{\Theta(k_0)}{\sqrt{k^2}} , \quad (6.19)$$

$$\tilde{\Pi}^{(2)}(k^2) = \frac{-e^2}{2(2\pi)^2} \Theta(k^2 - 4m^2) \frac{\Theta(k_0)}{\sqrt{k^2}} . \quad (6.20)$$

Substituindo (6.15) em (6.10), reescrevemos a função causal $F(x, y)$ na forma

$$F(x, y) = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} - \frac{1}{(2\pi)^2} \Im m \int d^3k e^{ik(x-y)} \hat{P}^{\mu\nu}(k) . \quad (6.21)$$

Podemos calcular a parte imaginária do último termo na equação (6.21) levando em conta (6.16)-(6.20). Como $\hat{P}_S^{\nu\mu}(k)$ é real e par em k enquanto que $\hat{P}_A^{\nu\mu}(k)$ é imaginário e ímpar, podemos escrever

$$F(x, y) = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} +$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\int_{k_0 > 0} d^3 k \sin k(x-y) \hat{P}_S^{\mu\nu}(k) - i \int_{k_0 > 0} d^3 k \cos k(x-y) \hat{P}_A^{\mu\nu}(k) \right]. \quad (6.22)$$

Para escrevermos o último termo em (6.22) como uma transformada de Fourier complexa devemos continuar $\hat{P}_S^{\mu\nu}$ e $\hat{P}_A^{\mu\nu}$ antissimetricamente até $k_0 < 0$,

$$F(x, y) = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{2} \int d^3 k e^{-ik(x-y)} [d_S^{\mu\nu}(k) - d_A^{\mu\nu}(k)], \quad (6.23)$$

onde

$$d_S^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) B(k^2), \quad (6.24)$$

$$d_A^{\mu\nu}(k) = im \varepsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \Pi^{(2)}(k^2). \quad (6.25)$$

e

$$B(k^2) = \frac{-e^2}{2(4\pi)^2} \frac{k^2 + 4m^2}{k^2} \Theta(k^2 - 4m^2) \frac{\text{sgn}(k_0)}{\sqrt{k^2}}, \quad (6.26)$$

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \frac{-e^2}{2(2\pi)^2} \Theta(k^2 - 4m^2) \frac{\text{sgn}(k_0)}{\sqrt{k^2}}. \quad (6.27)$$

De acordo com o teorema de Titchmarsh, a transformada de Fourier de uma função causal que se anula para $x^0 - y^0 = t < 0$ satisfaz a uma relação de dispersão (para maiores detalhes, vide apêndice D). Como $d_S^{\mu\nu}(k)$ e $d_A^{\mu\nu}(k)$ são real e imaginário puro, respectivamente, não podem ser a transformada de Fourier de uma função causal. A parte imaginária que falta em $d_S^{\mu\nu}(k)$ e a parte real que falta em $d_A^{\mu\nu}(k)$ deve ser suprida pelo primeiro termo contendo a fase $\varphi[A]$,

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} = - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{2} \int d^3 k e^{-ik(x-y)} [i q_S^{\mu\nu}(k) - q_A^{\mu\nu}(k)], \quad (6.28)$$

onde

$$\begin{aligned}
q_S^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d_S^{\mu\nu}(kt)}{t^2(1-t)} \\
&= \frac{\alpha}{\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \left[\frac{1}{\sqrt{k^2}} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \log \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right) + \frac{4m}{k^2} \right] \text{sgn}(k_0) ,
\end{aligned} \tag{6.29}$$

e

$$\begin{aligned}
q_A^{\mu\nu}(k) &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{-i d_A^{\mu\nu}(kt)}{t(1-t)} \\
&= -\frac{\beta}{\pi} m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \frac{k_\alpha}{\sqrt{k^2}} \log \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right) \text{sgn}(k_0) ,
\end{aligned} \tag{6.30}$$

com $\alpha \equiv -e^2/[2(4\pi)^2]$ e $\beta \equiv -e^2/[2(2\pi)^2]$. Nas relações de dispersão acima P denota o valor principal das respectivas integrais.

A fase causal é obtida através de duas integrações

$$\begin{aligned}
\varphi[A] &= \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y) \delta A_\nu(x)} A_\mu(y) A_\nu(x) + O(A^4) \\
&= \frac{\pi}{2} \int d^3k \left[\left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \Pi_1^{(1)}(k) + i m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \Pi_1^{(2)}(k) \right] A_\mu(k) A_\nu^*(k) ,
\end{aligned} \tag{6.31}$$

onde

$$\Pi_1^{(1)}(k) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\sqrt{k^2} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \log \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right) + 4m \right] \text{sgn}(k_0) , \tag{6.32}$$

$$\Pi_1^{(2)}(k) = -\frac{\beta}{\pi \sqrt{k^2}} \log \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}}{1 + \sqrt{\frac{k^2}{4m^2}}} \right) \text{sgn}(k_0) . \tag{6.33}$$

Se decomposermos os campos eletromagnéticos que aparecem no integrando de (6.31) nas suas respectivas partes real e imaginária verificaremos que $\varphi[A]$ é de fato real. O operador $\mathbf{S}[A]$ no espaço de Fock fica então completamente determinado.

Através de (2.98) e (6.6) obtemos a amplitude vácuo-vácuo

$$(\Omega, \mathbf{S}\Omega) = C e^{i\varphi} (\Omega, e^{S_+ - S_-^{-1} b^\dagger d^\dagger} \Omega) = C e^{i\varphi} . \quad (6.34)$$

O quadrado do valor absoluto

$$|(\Omega, \mathbf{S}\Omega)|^2 = C^2 = 1 - P \quad (6.35)$$

deve ser igual a um menos a probabilidade total P de criação de pares,

$$\begin{aligned} P &= e^2 (2\pi)^{-2} \int d^3 k T^{\mu\nu}(k) A_\mu(k) A_\nu^*(k) \\ &= -2\pi \int d^3 k \hat{P}^{\mu\nu}(k) A_\mu(k) A_\nu^*(k) , \end{aligned} \quad (6.36)$$

pois o campo externo pode converter o estado de vácuo apenas em estados de pares. Para combinarmos a constante de normalização C com $e^{i\varphi}$ escrevemos a primeira na forma exponencial

$$C = \exp \left[\pi \int d^3 k \dots + O[A^4] \right] .$$

Deste modo, de (6.16)-(6.20) obtemos

$$\begin{aligned} C &= \exp \left\{ \frac{\pi}{2} \int d^3 k \left[\left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \Pi_2^{(1)}(k^2) + im \varepsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \Pi_2^{(2)}(k^2) \right] \right. \\ &\quad \left. \times A_\mu(k) A_\nu^*(k) \right\} , \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde

$$\Pi_2^{(1)}(k^2) = \alpha \sqrt{k^2} \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) \Theta(k^2 - 4m^2) , \quad (6.38)$$

$$\Pi_2^{(2)}(k^2) = \beta \frac{\Theta(k^2 - 4m^2)}{\sqrt{k^2}} . \quad (6.39)$$

Finalmente, levando em conta (6.31)-(6.33), (6.34) e (6.37)-(6.39), obtemos a amplitude vácuo-vácuo

$$\begin{aligned}
(\Omega, \mathbf{S}\Omega) = \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \int d^3k \left[\left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) \Pi^{(1)}(k^2) + im\varepsilon^{\mu\nu\alpha} k_\alpha \Pi^{(2)}(k^2) \right] \right. \\
\left. \times A_\mu(k) A_\nu^*(k) \right\} , \tag{6.40}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)}(k^2) &= \Pi_1^{(1)}(k^2) - i\Pi_2^{(1)}(k^2) , \\
\Pi^{(2)}(k^2) &= \Pi_1^{(2)}(k^2) - i\Pi_2^{(2)}(k^2) . \tag{6.41}
\end{aligned}$$

Para $k^2 < 4m^2$, a expressão entre colchetes em (6.40) coincide a menos de um fator multiplicativo $-2i$ com o conjugado complexo da função de dois pontos que corresponde ao tensor de polarização do vácuo, calculada no capítulo 4. Ao contrário do caso quadridimensional, a amplitude vácuo-vácuo exibe uma contribuição adicional da parte antissimétrica do tensor de polarização do vácuo, a qual emerge da estrutura topológica da teoria.

O propagador fotônico corrigido em segunda ordem pela inserção do tensor de polarização do vácuo derivado no capítulo 4 pode ser obtido substituindo-se a amplitude (6.40) na expressão (2.104) para o funcional gerador $Z[J]$.

No espaço bidimensional o potencial Coulombiano instantâneo devido a uma distribuição estática de cargas possui a forma peculiar

$$A_\mu(x) = (q \log |\mathbf{x}| \delta(x^0), 0, 0) , \tag{6.42}$$

onde q é a carga elétrica total dessa distribuição. Sua transformada de Fourier, entretanto, coincide formalmente com a do potencial em três dimensões,

$$A_\mu(k) = (q/|\mathbf{k}|^2, 0, 0) . \tag{6.43}$$

Assim, para k^2 pequeno e $A_\mu(k)$ dado por (6.43) somente o coeficiente $\Pi_1^{(1)}$ da parte simétrica do tensor de polarização do vácuo contribui para a amplitude vácuo-vácuo (6.40):

$$(\Omega, \mathbf{S}\Omega) = \exp \left\{ -i\pi^2 \beta \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k^2} \Pi_1^{(1)}(k^2) A_0(k)^2 \right\}$$

$$\sim \exp \left\{ i q^2 \frac{8\pi^3}{3} \beta \int dk^0 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \right\}. \quad (6.44)$$

Considerando-se o espalhamento de um elétron no campo externo (6.42), podemos notar que (6.44) exibe uma divergência colinear logarítmica no caso de um espalhamento para frente.

Considerações Finais

Neste trabalho investigou-se a estrutura da eletrodinâmica quântica em $(2+1)$ dimensões (QED_3), até segunda ordem em teoria de perturbação. A partir da equação de campo invariante para um espinor de Dirac em $(2+1)$ dimensões, construiu-se o espaço de Fock para n férmions e o operador de espalhamento S em segunda quantização para um campo eletromagnético externo. Demonstrou-se que este último é definido a menos de uma fase física, relacionada com a amplitude vácuo-vácuo na presença da fonte externa.

Utilizando o método indutivo de Epstein e Glaser para a construção das funções generalizadas de n pontos na série perturbativa para a matriz S da QED_3 , calculou-se as auto-energias do fóton e do elétron e a função de vértice, através de relações de dispersão. Estas últimas surgem como consequência natural do princípio de causalidade. Analisando a ordem singular das distribuições associadas às funções de n pontos, demonstrou-se que a QED_3 é, de fato, uma teoria super-renormalizável.

Vimos que o propagador fotônico corrigido através de inserções próprias do tensor de polarização do vácuo exibe uma parte transversal antissimétrica e um polo deslocado da origem, indicando que o fóton adquire massa. Isto equivale à adição de um contratermo topológico de Chern-Simons na densidade Lagrangeana original. No entanto, as equações de movimento da teoria renormalizada permanecem invariantes sob transformações de gauge, uma

vez que a nova densidade Lagrangeana não se altera a menos de uma divergência total.

Dando seqüência a este trabalho, podemos realizar um estudo do comportamento assintótico da QED₃, através das equações de Callan-Symanzik para alguns parâmetros da teoria, tais como a constante de acoplamento, a massa do elétron e a massa topológica do fóton.

As expressões (4.30) e (4.35) para os setores simétrico e antissimétrico do tensor de polarização do vácuo coincidem com aquelas obtidas na representação de Heisenberg^[21], se calcularmos a parte imaginária finita de $\Pi^{(1)}(k^2)$ e a parte real de $\Pi^{(2)}(k^2)$ e, a partir destas, calcularmos as respectivas partes real e imaginária, através das relações de dispersão discutidas no apêndice D. Como o setor antissimétrico é não singular ($\omega = -1$), utiliza-se neste caso uma transformada de Hilbert ordinária; já para o setor simétrico deve-se utilizar uma relação de dispersão com uma subtração ($\omega = 0$), que corresponde à condição de normalização $\Pi^{(1)}(0) = 0$. Em quatro dimensões esta condição está relacionada com a renormalização da carga elétrica^[25].

Para chegarmos à expressão (4.53) para o propagador fotônico corrigido, selecionamos apenas os diagramas que contém inserções próprias do tensor de polarização do vácuo em segunda ordem. De acordo com o argumento conhecido como teorema de Coleman e Hill^[26], os diagramas de ordem superior não contribuem para a parte antissimétrica do tensor de polarização do vácuo, responsável pela correção de massa para o fóton (vide apêndice E). Assim, o resultado (4.55) é exato em e^2 .

Vimos também que a auto-energia do elétron em segunda ordem é divergente na camada de massa, assim como suas derivadas. Por esta razão, não é imediato que se possa extrair o operador de corrente corrigido em segunda ordem a partir da auto-energia do elétron, empregando-se diretamente a identidade de Ward. Isto envolve um cuidadoso processo de limite, sendo assunto para uma investigação posterior. Neste trabalho calculou-se explicitamente o operador de corrente em segunda ordem a partir da distribuição

de três pontos que corresponde à função de vértice. De acordo com Jackiw e Templeton^[27], as correções de ordem superior, nas quais as linhas fotônicas internas “vestidas” correspondem a uma partícula virtual massiva, devem sanar o problema de divergências no infravermelho.

No último capítulo obtivemos uma expressão finita, em segunda ordem, para o fator de fase da matriz S no espaço de Fock para férmions na presença de um campo eletromagnético externo, encerrando com um exemplo simples a discussão sobre o papel importante que a condição de causalidade desempenha no controle das divergências no ultravioleta.

Em certos problemas em que o resultado físico correto depende do tratamento adequado de divergências no ultravioleta, como no caso da anomalia da corrente axial em quatro dimensões^[28], o método de Epstein e Glaser mostrou-se particularmente apropriado. Como discutido anteriormente, o mesmo foi aplicado com igual sucesso no estudo da geração de massa na QED_3 . Um outro desafio que aqui se propõe é o de se estudar teorias de campo à temperatura finita no contexto da teoria de perturbação causal, utilizando-se o formalismo de tempo real de Umezawa^[29], nas quais problemas ligados a processos de regularização ainda persistem.

Apêndice A

Propriedades de Traço das Matrizes Gama

No capítulo 1 introduzimos a representação (1.24) para as matrizes de Dirac em (2+1) dimensões,

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

são as matrizes de Pauli. Neste caso, de adicionando-se (1.25) e (1.26), resulta

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha, \quad (\text{A.3})$$

com

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definindo $\epsilon^{012} = 1$, temos que o pseudo-tensor totalmente anti-simétrico satisfaz

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\gamma\delta\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_\mu^\gamma & \delta_\nu^\gamma & \delta_\alpha^\gamma \\ \delta_\mu^\delta & \delta_\nu^\delta & \delta_\alpha^\delta \\ \delta_\mu^\lambda & \delta_\nu^\lambda & \delta_\alpha^\lambda \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

de modo que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon^{\gamma\delta\alpha} = \delta_{\mu}^{\gamma}\delta_{\nu}^{\delta} - \delta_{\mu}^{\delta}\delta_{\nu}^{\gamma} , \quad (\text{A.5})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! . \quad (\text{A.6})$$

Das Eqs.(A.2) e (A.3) segue-se imediatamente que

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = 3 , \quad \gamma_{\mu}\not{p}\gamma^{\mu} = -\not{p} , \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu}) = 0 , \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}) = 2g_{\mu\nu} . \quad (\text{A.9})$$

Aplicando a Eq.(A.3) de maneira sucessiva e utilizando as duas últimas equações, obtemos

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}) = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha}\text{Tr}(\gamma^{\alpha}\gamma_{\rho}) = -2i\epsilon_{\mu\nu\rho} , \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}) &= 2g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - \epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\rho\sigma\beta}\text{Tr}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}) \\ &= 2(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Em contraste com o caso quadridimensional, verificamos que o traço do produto de um número ímpar de matrizes gama não se anula.

Apêndice B

A Irredutibilidade da Representação de Fock

No capítulo 2 destacamos a importância das relações de comutação (2.29) e (2.30), contida no seguinte

Teorema 1. Toda representação irredutível de (2.29) e (2.30) com vácuo Ω definido em (2.20) é equivalente unitária à representação de Fock.

Note-se que não assumimos que o vácuo seja único. Irredutível significa que não existe nenhum subespaço em \mathcal{F} que seja invariante sob todos $a(f)$ e $a^+(f)$, isto é, não existe nenhum operador de projeção P com

$$[P, a(f)]_- = 0 = [P, a^+(f)]_- . \quad (\text{B.1})$$

para todo $f \in \mathcal{H}_1$. Para demonstrarmos este teorema, é conveniente mostrar primeiro a irredutibilidade da representação de Fock:

Teorema 2. Seja A um operador fechado em \mathcal{F}^\pm , o qual é definido sobre Ω e satisfaz

$$[A, a(f)]_- = 0 = [A, a^+(f)]_- . \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 . \quad (\text{B.2})$$

Então, segue que

$$A = \alpha \mathbf{1} . \quad \alpha \in \mathbb{C} . \quad (\text{B.3})$$

Um operador que é múltiplo da identidade $\mathbf{1}$ é chamado de C-número. Este resultado foi utilizado quando demonstramos que o operador de espalhamento S é definido a menos de uma fase.

Demonstração. Primeiro construímos uma base em \mathcal{F} . Se Ω é o vácuo, o setor de uma partícula é gerado por

$$\frac{1}{\sqrt{1!}} a(f)^+ \Omega, \quad f \in \mathcal{H}_1. \quad (\text{B.4})$$

Os estados de duas partículas são dados por

$$\frac{1}{\sqrt{2!}} a(f_1)^+ a(f_2)^+ \Omega = (\alpha \Omega, 0, S_2 f_1(\mathbf{x}_1) f_2(\mathbf{x}_2), 0, \dots), \quad (\text{B.5})$$

e assim por diante. Deste modo, os vetores

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^n a(f_j)^+ \Omega \mid \forall n, f_j \right\} \quad (\text{B.6})$$

formam uma base em \mathcal{F} , se os f_j são uma base em \mathcal{H}_1 . Em seguida, notamos que um vetor $\Phi \in \mathcal{F}$ satisfazendo

$$a(f)\Phi = 0, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H}_1, \quad (\text{B.7})$$

deve ser o vácuo, pois

$$\int d^2x f(\mathbf{x})^* \varphi_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

implica

$$\varphi_n = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

o que significa que $\Phi = \alpha \Omega$.

Consideremos agora

$$Aa(f)\Omega = 0 = a(f)A\Omega, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1.$$

o que implica $A\Omega = \alpha\Omega$, de acordo com (B.7). Analogamente, encontramos sobre o setor de uma partícula

$$Aa(f)^+\Omega = 0 = a(f)^+A\Omega = \alpha a(f)^+\Omega$$

e, do mesmo modo, $A = \alpha\mathbf{1}$ sobre o conjunto denso \mathcal{F}_0 (B.6). Como A é fechado, o mesmo é verdadeiro sobre todo \mathcal{F} . Isto completa a prova do Teorema 2.

□

Seja \mathcal{A} a álgebra (fracamente fechada) gerada por $a(f)$ e $a(f)^+$ (álgebra de von Neumann). O comutante \mathcal{A}' de \mathcal{A} é a álgebra de todos os operadores limitados que comutam com todos os elementos de \mathcal{A} . De acordo com o Teorema 2, este comutante é trivial

$$\mathcal{A}' = \alpha\mathbf{1} . \tag{B.8}$$

Então, o duplo comutante \mathcal{A}'' é a álgebra de todos os operadores limitados sobre \mathcal{F} . Como $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, acabamos de provar que

Corolário. Qualquer operador (limitado) sobre o espaço de Fock pode ser expresso em termos de operadores de emissão e absorção a , a^+ .

Demonstração do Teorema 1. A prova é de interesse geral pois construímos o espaço de Fock \mathcal{F} a partir das relações de comutação (2.29), (2.30) e o vácuo Ω , definido por

$$a(f)\Omega = 0 . \quad \forall f \in \mathcal{H}_1 . \tag{B.9}$$

Assim como na demonstração do Teorema 2, consideremos

$$\frac{1}{\sqrt{1!}}a(f)^+\Omega \text{ para todo } f \in \mathcal{H}_1 . \tag{B.10}$$

Como

$$\begin{aligned} (a^+(f)\Omega, a^+(g)\Omega) &= (\Omega, a(f)a^+(g)\Omega) \\ (f, g) \pm (\Omega, a^+(g)a(f)\Omega) &= (f, g) . \end{aligned}$$

o espaço de vetores (B.10) é unitariamente equivalente ao setor de uma partícula $(\alpha\Omega, f, 0, \dots)$. Procedendo da mesma maneira com

$$\frac{1}{\sqrt{2!}} a^+(f_1) a^+(f_2) \Omega, \quad (\text{B.11})$$

obtemos através da aplicação repetida das relações de comutação

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} (a^+(f_1) a^+(f_2) \Omega, a^+(g_1) a^+(g_2) \Omega) &= \frac{1}{2!} (\Omega, a(f_2) a(f_1) a^+(g_1) a^+(g_2) \Omega) \\ \frac{1}{2!} [(f_1, g_1)(f_2, g_2) \pm (f_1, g_2)(f_2, g_1)] &= (S_2^\pm(f_1 \otimes f_2), S_2^\pm(g_1 \otimes g_2)). \end{aligned}$$

Isto mostra a equivalência unitária com o setor de duas partículas. É fácil ver por indução que os vetores

$$(a^+(f)\Phi)_n \text{ correspondem a } \sqrt{n} S_n^\pm(f \otimes \varphi_{n-1}). \quad (\text{B.12})$$

Esta equivalência com a representação de Fock prova o teorema.

□

Apêndice C

Funções Singulares em (2+1) Dimensões

No capítulo 2 introduzimos as relações de comutação e anticomutação em instantes diferentes, para o campo de Klein-Gordon e para o campo de Dirac, respectivamente. Neste apêndice vamos examiná-las com maior detalhe, em particular suas propriedades de suporte no espaço x .

A função $S^{(+)}(x)$ foi definida em (2.84) como a seguinte transformada de Fourier distribucional

$$\begin{aligned} S^{(+)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2p}{2E} (\not{p} + m) e^{-ipx} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2} (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^2p}{2E} e^{-ipx} \stackrel{\text{def}}{=} (i\not{\partial}_x + m) D^{(+)}(x). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Na equação acima expressamos $S^{(+)}(x)$ através de uma distribuição escalar mais simples $D^{(+)}(x)$. Para mostrarmos que $D^{(+)}(x)$ é de fato um escalar de Lorentz, escrevemos a integral de Fourier bidimensional em (C.1) na forma 3-dimensional. Com tal finalidade, a integração em p_0 deve ser introduzida através da distribuição

$$\delta(p_0^2 - E^2) = \delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p_0 - E)}{2E} + \frac{\delta(p_0 + E)}{2E}. \quad (\text{C.2})$$

Como $p_0 = E$ em (C.1), o segundo termo em (C.2) deve ser cortado por uma função θ :

$$D^{(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ipx} . \quad (\text{C.3})$$

Esta última é, portanto, um invariante de Lorentz. O resultado mostra que a integral bidimensional $\int d^2p/2E$ em (C.1) é equivalente à integração invariante de Lorentz sobre uma concha do hiperbolóide de massa $p^2 = m^2$.

A função $S^{(-)}(x)$ definida em (2.85) é tratada da mesma maneira,

$$\begin{aligned} S^{(-)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2p}{2E} (\not{p} - m) e^{ipx} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} (i\not{\partial}_x + m) \int \frac{d^2p}{2E} e^{ipx} \stackrel{\text{def}}{=} (i\not{\partial}_x + m) D^{(-)}(x) . \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A nova distribuição invariante pode ser escrita como

$$\begin{aligned} D^{(-)}(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{ipx} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \theta(-p^0) e^{-ipx} . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

O anticomutador total (2.86) do campo de Dirac é então

$$S(x) = S^{(-)}(x) + S^{(+)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (i\not{\partial} + m) D(x) . \quad (\text{C.6})$$

onde a função

$$D(x) = D^{(-)}(x) + D^{(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p \delta(p^2 - m^2) \text{sgn} p^0 e^{-ipx} \quad (\text{C.7})$$

é a função de Pauli-Jordan em (2+1) dimensões.

A função $D(x)$ se anula para x do tipo espaço:

$$\text{supp } D = \{x \in \mathbf{M} | x^2 \geq 0\} . \quad (\text{C.8})$$

Como vetores do tipo tempo (C.8) são conectados causalmente com $x = 0$, dizemos que $D(x)$ possui suporte causal. O mesmo vale para $S(x)$. A função

de Pauli-Jordan possui então a decomposição *causal*

$$D(x) = D^{ret}(x) + D^{av}(x) , \quad (C.9)$$

nas funções retardada e avançada

$$D^{ret}(x) = \theta(x^0)D(x) , \quad (C.10)$$

$$D^{av}(x) = \theta(-x^0)D(x) , \quad (C.11)$$

respectivamente. Estas são distribuições temperadas bem definidas, pois podem ser expressas como transformadas de Fourier distribucionais tridimensionais:

$$\begin{aligned} D^{ret}(x) &= \frac{\theta(x^0)}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{2E} 2 \sin(E x^0) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 - ip^0 0} , \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$D^{av}(x) = (2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 + ip^0 0} . \quad (C.13)$$

Analogamente, introduzimos as distribuições retardada e avançada para o campo espinorial

$$S^{ret}(x) \stackrel{def}{=} (i\rlap{/}\partial + m)D^{ret}(x) = -(2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + ip^0 0} e^{-ipx} , \quad (C.14)$$

$$S^{av}(x) \stackrel{def}{=} (i\rlap{/}\partial + m)D^{av}(x) = -(2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - ip^0 0} e^{-ipx} . \quad (C.15)$$

Podemos também definir os propagadores de Feynman através das expressões

$$D^F(x) \stackrel{def}{=} D^{ret}(x) - D^{(-)}(x) = D^{av}(x) + D^{(+)}(x) , \quad (C.16)$$

$$\begin{aligned} S^F(x) \stackrel{def}{=} S^{(-)}(x) - S^{ret}(x) &= -S^{(+)}(x) - S^{av}(x) \\ &= -(i\rlap{/}\partial + m)D^F(x) . \end{aligned} \quad (C.17)$$

Os diferentes sinais nessas definições concordam com a convenção frequentemente adotada na maioria das aplicações. A forma explícita desses propagadores é dada por

$$D^F(x) = (2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{1}{m^2 - p^2 - i0} e^{-ipx} , \quad (\text{C.18})$$

$$S^F(x) = (2\pi)^{-3} \int d^3p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ipx} . \quad (\text{C.19})$$

A integral nos momentos em (C.18) é efetuada a seguir. Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv -(2\pi)^3 D^F(x) = \int d^3p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i0} \\ &= \int_0^\infty dq q \int_0^{2\pi} d\varphi e^{iq|\mathbf{x}|\cos\varphi} F(q) , \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

onde

$$F(q) \equiv \int dp_0 \frac{e^{-ip_0 x_0}}{p_0^2 - q^2 - m^2 + i0} , \quad (\text{C.21})$$

com $q \equiv |\mathbf{p}|$. O integrando em (C.21) possui polos em

$$p_0 = \pm(\sqrt{q^2 + m^2} - i0) .$$

Para $x_0 < 0$ devemos fechar o contorno de integração no semi-plano p_0 complexo superior, enquanto que para $x_0 > 0$ o contorno é fechado no semi-plano inferior. Desta forma, obtemos

$$F(q) = -i\pi \frac{e^{-i|x_0|\sqrt{q^2+m^2}}}{\sqrt{q^2+m^2}} . \quad (\text{C.22})$$

Além disso,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{iq|\mathbf{x}|\cos\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(q|\mathbf{x}|) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi e^{il\varphi} = 2\pi J_0(q|\mathbf{x}|) , \quad (\text{C.23})$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem 0.

De (C.22) e (C.23) resulta

$$\mathcal{I} = -i2\pi^2 \int dq \frac{q}{\sqrt{q^2+m^2}} e^{-i|x_0|\sqrt{q^2+m^2}} J_0(q|\mathbf{x}|) . \quad (\text{C.24})$$

Para $m = 0$, obtemos

$$D_0^F(x) = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty dq e^{-iq|x_0|} J_0(q|\mathbf{x}|) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2}}. \quad (\text{C.25})$$

Para m não nula temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -i2\pi^2 \left[\int_0^\infty dq q \frac{\cos(|x_0|\sqrt{q^2 + m^2})}{\sqrt{q^2 + m^2}} J_0(q|\mathbf{x}|) \right. \\ &\quad \left. - i \int_0^\infty dq q \frac{\sin(|x_0|\sqrt{q^2 + m^2})}{\sqrt{q^2 + m^2}} J_0(q|\mathbf{x}|) \right] \\ &= -2\pi^2 \sqrt{\frac{\pi m}{2}} (x^2)^{-1/4} H_{-1/2}^{(2)}(m\sqrt{x^2}) \quad |x_0| > |\mathbf{x}| \\ \text{ou} & \\ &= -2\pi^2 \sqrt{\frac{2im}{\pi}} (x^2)^{-1/4} K_{1/2}(im\sqrt{x^2}) \quad |x_0| < |\mathbf{x}|, \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

onde $H^{(2)}$ é a função de Hankel de segunda espécie e K a função de Bessel modificada. De (C.26) resulta

$$D^F(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-im\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2}}. \quad (\text{C.27})$$

Os propagadores de Feynman são freqüentemente chamados de “propagadores causais”. Entretanto, de (C.27) segue que D^F não se anula para x do tipo espaço. Portanto, essa terminologia é imprópria, pois D^F e S^F não possuem suporte causal.

Apêndice D

Relações de Dispersão Úteis

No capítulo 6 mencionamos o teorema de Titchmarsh, que ocupa uma posição de destaque na maioria das discussões sobre as conseqüências da condição de causalidade. Seu enunciado é dado a seguir^[24].

Teorema. Seja $f(x)$ uma função de quadro integrável (no sentido de Lebesgue) no eixo real x . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A transformada de Fourier $F(t)$ de $f(x)$ se anula para $t < 0$.
2. A função $f(x)$ é o limite para $y \rightarrow 0^+$, para quase todo x , de uma função analítica $f(z) = f(x + iy)$, a qual é uma função regular para $y > 0$ e tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx < K, \quad \text{para } y > 0. \quad (\text{D.1})$$

3. As partes real e imaginária de $f(x)$ são transformadas de Hilbert uma da outra, isto é,

$$\text{Re } f(x) = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } f(x')}{x' - x} dx', \quad (\text{D.2})$$

$$\text{Im } f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } f(x')}{x' - x} dx'. \quad (\text{D.3})$$

O símbolo P denota o valor principal da integral (no ponto $x' = x$). Cada uma das duas últimas relações implica a outra. Relações deste tipo são

conhecidas como *relações de dispersão*.

Para compreendermos melhor a natureza deste teorema, tornemos plausíveis as afirmações 2 e 3, a partir de 1. Se $F(t) = 0$ para $t < 0$, então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F(t)e^{itx} dt. \quad (\text{D.4})$$

O lado direito pode ser continuado ao plano complexo

$$f(x + iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F(t)e^{it(x+iy)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t)e^{itx} e^{-ty} dt.$$

Para $y > 0$, esta integral e todas as suas derivadas existem, pois o integrando sempre se anula exponencialmente no limite superior do domínio de integração. Isto define uma função analítica, regular para $y > 0$. Além disso, pela fórmula de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-2ty} |F(t)|^2 dt \leq \int_0^{\infty} |F(t)|^2 dt = K.$$

A função analítica $f(z)$ se aproxima de $f(x)$, quando $y \rightarrow 0^+$, para quase todo x (a restrição para quase todo x corresponde ao fato de que a representação de Fourier (E.4) de $f(x)$ é alcançada somente “em média”). Isto constitui a afirmação 2. Para demonstrarmos a afirmação 3 aplicamos o teorema integral de Cauchy à função analítica $f(z)$ para um ponto z no semi-plano superior e um caminho retangular de integração em torno de z , com um de seus lados ao longo do eixo real,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z')}{z' - z} dz.$$

As integrais ao longo dos lados $|x| = \text{const.}$ tendem a zero quando $\text{const.} \rightarrow \infty$, pois, da propriedade (E.1), segue que $f(x + iy) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, para $y > 0$. Além disso, da desigualdade

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z')}{z' - z} dx' \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z')|^2 dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < \frac{K\pi}{y' - y}$$

segue que a integral ao longo do lado superior também se anula quando $y' \rightarrow \infty$. Assim,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - z} dx' . \quad (\text{D.5})$$

Na seqüência, aproximemos z do eixo real. O modo mais fácil é assumirmos que a função é regular numa vizinhança do ponto sobre o eixo real ao qual z tende; neste caso o caminho de integração é ligeiramente deformado abaixo do ponto em questão. A contribuição do pequeno semi-círculo em torno de x , quando seu raio tende a zero, é metade do resíduo, $\frac{1}{2}f(x)$. A integral remanescente é o valor principal de (E.5):

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' .$$

Portanto, para z real, a equação (E.5) torna-se

$$f(x) = \frac{1}{i\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' . \quad (\text{D.6})$$

Tomando as partes real e imaginária desta igualdade obtemos as relações de Hilbert (E.2) e (E.3).

Para ilustrarmos a aplicação deste teorema, consideremos um sistema linear, isto é, um sistema para o qual a saída é um funcional da entrada. Exemplos de tais sistemas são a polarização em função do campo externo aplicado e o espalhamento da luz em eletromagnetismo e o espalhamento de partículas em mecânica quântica. Por simplicidade, suponhamos que a entrada e a saída sejam funções, respectivamente $F(t)$ e $G(t)$, apenas do tempo. Se além disso o sistema é invariante sob translações temporais, a conexão linear mais geral entre a entrada e a saída pode ser escrita na forma

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t - t') F(t') dt' . \quad (\text{D.7})$$

O kernel H depende somente da diferença temporal, o que expressa a invariância temporal do sistema. Assumimos que a relação (E.6) vale para entradas arbitrárias $F(t)$; o kernel caracteriza, portanto, o sistema em questão.

Quando escrita para as transformadas de Fourier, esta assume a forma simples

$$g(\omega) = h(\omega)f(\omega) , \quad (\text{D.8})$$

onde

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt , \text{ etc.}$$

Podemos agora impor a condição de que não exista saída antes que haja uma entrada. Em termos do kernel isto é simplesmente expresso por

$$H(t - t') = 0 , \text{ para } t < t' . \quad (\text{D.9})$$

A condição acima é usualmente chamada de *condição de causalidade*. Muitas vezes é necessário que os sinais de entrada e saída sejam funções de quadro integrável no eixo real. Neste caso, a condição adicional que deve ser imposta sobre o kernel é que uma entrada de quadro integrável seja transformada numa saída de quadro integrável.

Supondo que (E.8) seja satisfeita, segue de argumento inteiramente análogo ao utilizado na demonstração do teorema de Titchmarsh que a transformada de Fourier $h(\omega)$ do kernel é uma função regular na metade superior do plano ω complexo. Entretanto, não sabemos se h possui a propriedade (E.1), de forma que a validade das relações (E.2) e (E.3) não pode ser inferida. Em geral, é possível obtermos relações de dispersão para uma função $h(\omega)$ regular no semi-plano superior e limitada por um polinômio no eixo real. Se o grau do polinômio for n , a relação de dispersão conterà $n + 1$ constantes indeterminadas, como veremos a seguir extendendo o teorema de Titchmarsh à funções generalizadas.

Seja

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} R(\omega) = 0 , \text{ para } t < 0 . \quad (\text{D.10})$$

Em geral, esta é uma transformada de Fourier distribucional. A transformada de Fourier inversa

$$R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{D.11})$$

é uma função analítica de ω , regular no semi-plano superior $\Im m \omega \geq 0$, pois a integral (E.11) percorre valores de t positivos. Pelo teorema de Cauchy, temos

$$\frac{R(z)}{(z - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta, \quad \Im m z > 0, \quad (\text{D.12})$$

onde Γ é um contorno fechado, consistindo de uma parte do eixo real e um grande semi-círculo com z em seu interior, com $\varepsilon > 0$ e ω_0 real. Assumindo

$$|R(\zeta)| \leq \text{const.} |\zeta|^n \text{ para } |\zeta| \rightarrow \infty, \quad (\text{D.13})$$

a integral sobre o grande semi-círculo se anula nesse limite e a integral sobre o eixo real converge,

$$\frac{R(z)}{(z - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta. \quad (\text{D.14})$$

Escrevendo $z = \omega + i\eta$ e tomando o limite $\eta \rightarrow 0$ (no sentido de distribuições), obtemos

$$\frac{R(\omega)}{(z - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}(\zeta - \omega - i0)} d\zeta. \quad (\text{D.15})$$

Nesse contexto, recordemos a identidade distribucional

$$\frac{1}{x \pm i0} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad (\text{D.16})$$

onde P significa que o valor principal da integral deve ser tomado, se (E.16) for aplicado a uma função teste. Isto nos permite escrever (E.15) como

$$\frac{R(\omega)}{(z - \omega_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0)^{n+1}(\zeta - \omega)} d\zeta. \quad (\text{D.17})$$

Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ no sentido de distribuições e utilizando a equação (E.16) diferenciada n vezes.

$$\frac{1}{(x + i0)^{n+1}} = P \frac{1}{x^{n+1}} - (-1)^n \frac{i\pi}{n!} \delta^{(n)}(x). \quad (\text{D.18})$$

o termo que contém a distribuição $\delta^{(n)}$ torna-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\zeta - \omega_0) \frac{R(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = (-1)^n \frac{d^n}{d\zeta^n} \frac{R(\zeta)}{\zeta - \omega} \Big|_{\zeta=\omega_0} . \quad (\text{D.19})$$

Através da regra do produto de Leibnitz encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\zeta - \omega_0) \frac{R(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = n! \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{R^{(\nu)}(\omega_0)}{\nu!} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^{n-\nu+1}} . \quad (\text{D.20})$$

Multiplicando (E.17) por $(\omega - \omega_0)^{n+1}$, chegamos à relação de dispersão subtraída

$$R(\omega) = \frac{(\omega - \omega_0)^{n+1}}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0)^{n+1} \zeta - \omega} d\zeta + \sum_{\nu=0}^n \frac{R^{(\nu)}(\omega_0)}{\nu!} (\omega - \omega_0)^\nu , \quad (\text{D.21})$$

ou, tomando a parte imaginária,

$$\Im R(\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0)^{n+1}}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0)^{n+1} \zeta - \omega} d\zeta + \sum_{\nu=0}^n \frac{\Im R^{(\nu)}(\omega_0)}{\nu!} (\omega - \omega_0)^\nu . \quad (\text{D.22})$$

A soma em (E.22) consiste dos $n + 1$ primeiros termos da série de Taylor da função no lado esquerdo dessa equação.

Apêndice E

O Teorema de Coleman-Hill

Nas considerações finais mencionamos o teorema de Coleman-Hill, no qual se afirma que, para uma classe geral de teorias de gauge abelianas em (2+1) dimensões, as correções de ordem superior para a massa topológica do fóton se anulam identicamente. Neste apêndice vamos fornecer os argumentos que permitem sua verificação para a QED₃.

Denotemos o vértice efetivo de n fótons no espaço Euclidiano dos momentos, com a função delta devido à conservação de energia-momento fatorizada, por

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) .$$

Graficamente, este é a soma de todos os gráficos que consistem de um único “loop” fermiônico fechado, com n fótons externos associados. $\Gamma^{(n)}$ é então uma função analítica de $n - 1$ momentos independentes; por convenção, tomaremos estes como sendo os primeiros $n - 1$, fixando k_n por conservação.

Em qualquer dimensão, como consequência da invariância de gauge, temos que^[30]

$$k_1^{\mu_1} \Gamma_{\mu_1 \dots}^{(n)} = 0 . \tag{E.1}$$

Diferenciando com respeito a k_1^λ , encontramos

$$\Gamma_{\lambda\dots}^{(n)} + k_1^{\mu_1} \frac{\partial \Gamma_{\mu_1\dots}^{(n)}}{\partial k_1^\lambda} = 0 . \quad (\text{E.2})$$

Se fizermos $k_1 = 0$, o segundo termo em (E.2) se anula. Assim,

$$\Gamma_{\mu_1\dots}^{(n)}(0, k_2, \dots) = 0 . \quad (\text{E.3})$$

Para nossos propósitos, é conveniente expressarmos este último em termos de expansões de Taylor,

$$\Gamma_{\dots}^{(n)}(k_1, \dots) = \mathcal{O}(k_1) . \quad (\text{E.4})$$

Naturalmente, seguindo o mesmo raciocínio, $\Gamma^{(n)}$ é também de $\mathcal{O}(k_2)$. Como k_1 e k_2 são variáveis independentes para $n > 2$,

$$\Gamma_{\dots}^{(n)}(k_1, k_2, \dots) = \mathcal{O}(k_1 k_2) , \quad n > 2 . \quad (\text{E.5})$$

Isto mostra que $\Gamma^{(n)}$ deve se anular quando cada um dos seus argumentos independentes se anula e, portanto, deve ser, no mínimo, de $\mathcal{O}(k_1 \dots k_{n-1})$. Utilizando a estrutura de Lorentz do vértice efetivo, pode-se mostrar que, na verdade, $\Gamma^{(n)}$ é de $\mathcal{O}(k_1 \dots k_n)$, para $n > 2$.

Podemos construir um gráfico de auto-energia do fóton ligando linhas fotônicas provenientes dos vértices dos “loops” fermiônicos. Duas dessas linhas devem permanecer livres, para serem as linhas externas do gráfico, carregando momentos k e $-k$, respectivamente. Se estas últimas terminam em “loops” distintos, o gráfico total possui $\mathcal{O}(k^2)$, de acordo com (E.4), e não contribui para a parte antissimétrica do tensor de polarização do vácuo (4.41),

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \Pi^{(1)}(k^2) + im \epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) ,$$

linear em k para $k^2 \rightarrow 0$. Da mesma forma, se duas linhas externas terminam num mesmo “loop”, mas este possui mais do que duas linhas fotônicas,

o gráfico total é de $\mathcal{O}(k^2)$, conforme (E.5). As únicas contribuições não nulas são provenientes de gráficos nos quais as duas linhas externas terminam num “loop” que não possui nenhuma outra linha fotônica associada. Isto corresponde à contribuição em segunda ordem considerada na seção 4.1 do capítulo 4.

É importante salientar que não existem problemas no infravermelho associados a fótons internos, pois sempre que uma linha fotônica interna ocorre, esta traz consigo um fator quadrático do seu momento, da medida de integração sobre esse momento interno não fixado, cancelando a singularidade $1/k^2$ no propagador fotônico livre.

Referências

- [1] J. Schwinger, Phys. Rev **125** (1962) 397, Phys. Rev. **128** (1962) 2425;
- [2] R. Jackiw, "Asymptotic Realms of Physics", Ed. A. H. Guth, K. Huang and R. L. Jaffe, MIT (1983) 147;
- [3] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140** (1982) 372;
- [4] J. M. Leinaas and J. Myrheim, Nuovo Cimento **B 37** (1977) 1;
- [5] Y. H. Chen, B. I. Halperin, F. Wilczek and E. Witten, Int. J. Mod. Phys. **B 3** (1989) 1001;
- [6] T. Chakraborty and P. Pietilainen, "The Fractional Quantum Hall Effect", Springer-Verlag, Berlin (1988);
- [7] F. Wilczek, "Fractional Statistics and Anyon Superconductivity", World Scientific, Singapore (1990);
- [8] N. Dorey and N. E. Mavromatos, Phys. Lett. **B 250** (1990) 107;
- [9] R. Acharya and P. Narayana Swamy, Int. J. Mod. Phys. **A 9** (1994) 861;
- [10] B. Binengar, J. Math. Phys. **23** (1982) 1511;

- [11] R. Coquereaux, Phys. Lett. **115 B** (1982) 389;
- [12] G. Scharf, "Finite Quantum Electrodynamics" (Second Edition), Springer-Verlag, Berlin (1995);
- [13] H. B. G. Casimir, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap, **B 51** (1948) 793;
- [14] H. P. Seipp, Helv. Phys. Acta **55** (1982) 1;
- [15] G. Wanders, Fortschritte der Physik **4** (1956) 611;
- [16] H. Epstein and V. Glaser, Ann. Inst. Poincaré **A 19** (1973) 211;
- [17] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys **21** (1949) 434; J. Rayski, Phys.Rev. **75** (1949) 1961;
- [18] G. Scharf, W. F. Wreszinski, B. M. Pimentel and J. L. Tomazelli, Ann. of Phys. **231** (1994) 185;
- [19] B. M. Pimentel, A. T. Suzuki and J. L. Tomazelli, Int. J. Mod. Phys. **A 7** (1992) 5307;
- [20] B. M. Pimentel and J. L. Tomazelli, Prog. Theor. Phys. **95** (1996);
- [21] B. M. Pimentel, A. T. Suzuki and J. L. Tomazelli. Int. J. Theor. Phys. **33** (1994) 2199;
- [22] B. M. Pimentel and J. L. Tomazelli, J. Phys. G **20** (1994) 845;
- [23] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, John Wiley, New York (1980);
- [24] J. Hilgevoord, "Dispersion Relations and Causal Description", North-Holland Publishing, Amsterdam (1960);

- [25] G. Källén, "Quantum Electrodynamics", Springer-Verlag, Berlin (1972);
- [26] S. Coleman and B. Hill, Phys. Lett. **159 B** (1985) 184;
- [27] R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D 23** (1981) 2291;
- [28] M. Dütsch, F. Krahe and G. Scharf, Phys. Lett. **B 258** (1991) 457;
- [29] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, "Thermo Field Dynamics", North-Holland Publishing, Amsterdam (1982);
- [30] J. C. Ward, Phys. Rev. **77** (1950) 293.

