

O USO DO SOFTWARE *MATHEMATICA*[®] NO ENSINO DE FUNÇÕES

Vanessa Avansini Botta Pirani (FCT/UNESP/Campus de Presidente Prudente)

EIXO 10: Tecnologias de informação e comunicação - TIC no processo de ensinar e aprender e na formação docente

Resumo: Atualmente, com o advento da informática, torna-se cada vez mais importante a prática docente aliada ao uso de modernos softwares computacionais. No caso da Matemática, em especial ao tópico relacionado à gráfico de funções, o uso de softwares é imprescindível para uma aprendizagem satisfatória. Assim, o presente trabalho tem como objetivo analisar a importância do uso do software *Mathematica*[®] no ensino de funções, que é um assunto de fundamental importância nos cursos de Licenciatura em Matemática. Além de existir outros softwares que possuem a mesma função do *Mathematica*[®], este se destaca pela sua interatividade. Através deste software serão exploradas as principais características (como amplitude, frequência, variação de parâmetros, raízes, etc) de importantes funções (trigonométricas, exponenciais e quadráticas), que servem de base para o desenvolvimento de diversos assuntos em Matemática e importante para a prática docente dos futuros professores de Matemática.

1. Introdução

O conteúdo de funções, que faz parte do grande eixo estruturador “Álgebra: números e funções” (maiores detalhes em [1]), é uma teoria de extrema importância para os alunos que pretendem ingressar num curso de graduação na área de Ciências Exatas. Particularmente no curso de Licenciatura em Matemática, tal assunto é inserido no primeiro ano e utilizado em muitas disciplinas nos anos subsequentes. Muitos alunos que começam a cursar Licenciatura em Matemática são oriundos de escolas públicas e a maioria tem dificuldades em conceitos relacionados a funções. Portanto, é importante que tal assunto seja abordado já no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática de forma adequada, pois tais alunos serão futuros professores de Matemática.

Além de ser importante toda parte teórica relacionada ao conteúdo de funções, esta serve de base para a construção de gráficos, que é um item imprescindível no processo de ensino-aprendizagem desse assunto. Existem no mercado modernos softwares matemáticos que auxiliam o aluno na

construção de gráficos, como, por exemplo, *MatLab*, *MathCad*, *Maple* e *Mathematica*[®], entre outros. Abordaremos aqui o uso do software *Mathematica*[®] no ensino das funções trigonométricas, exponenciais e quadráticas, com o objetivo de divulgar a importância do uso de softwares computacionais no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

2. O Software *Mathematica*[®]

O software *Mathematica*[®], que atualmente está em sua oitava versão, teve sua primeira versão lançada em 1988 e desde então profissionais da área de Ciências Exatas passaram a usá-lo. É um software que possui, além das ferramentas matemáticas, pacotes para profissionais de várias áreas, como economistas, estatísticos, químicos, físicos e engenheiros, entre outros. Em comparação com outros softwares, o diferencial do *Mathematica*[®] é que sua versão mais recente tem amplos recursos de geração de gráficos com ferramentas de interatividade e animação e também permite a publicação de programas por usuários no site da Wolfram Demonstrations Project (<http://demonstrations.wolfram.com/>) (por exemplo, veja [2] e [3]). Atualmente, tal site possui mais de seis mil publicações, cujos códigos fonte estão disponíveis para o público em geral, o que facilita a elaboração de novos programas por usuários que nunca utilizaram tal software.

3. Abordagem em sala de aula

Em relação às funções trigonométricas, os itens abordados nos gráficos que serão apresentados neste trabalho foram os seguintes: domínio, imagem, amplitude, frequência e deslocamentos horizontal e vertical. Muitos alunos têm dificuldades em prever a expressão da função quando alguns desses itens são alterados. Através do programa desenvolvido (cujo código fonte pode ser visto na Figura 1, baseado em [4]), podemos visualizar várias alterações dos itens descritos acima somente com o auxílio do mouse, como podemos observar nas Figuras 2, 3 e 4 em relação à função seno (em relação às outras funções, podemos proceder da mesma forma).

```
Manipulate[
Plot[amp fun[freq (x - h)] + k, {x, -d, d},
PlotRange -> {-r, r},
PlotStyle -> {color, Thickness[t]},
PlotLabel -> amp ToLowerCase[ToString[fun]][freq (x - h)] + k, ImageSize -> {350, 350}],
{{amp, 1, "amplitude"}, 0, 5, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
{{freq, 1, "frequência"}, 0, 5, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
Delimiter,
{{h, 0, "deslocamento horizontal"}, -5, 5, 0.5, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
{{k, 0, "deslocamento vertical"}, -5, 5, 0.5, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
Delimiter,
{{fun, Sin, "função"}, {Sin -> "seno", Cos -> "cosseno", Tan -> "tangente", Sec -> "secante", Csc -> "cosecante", Cot -> "cotangente"}, ControlType -> PopUpMenu},
Delimiter,
{{d, 2 π, "intervalo horizontal"}, 1 π, 5 π, 1 π, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
{{r, 2, "intervalo vertical"}, 1, 5, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
Delimiter,
{{color, Black, "cor"}, {Black -> "preto", Red -> "vermelho", Orange -> "laranja", Yellow -> "amarelo", Green -> "verde", Blue -> "azul", Purple -> "violeta"}, ControlType -> PopUpMenu},
Delimiter,
{{t, 0.001, "espessura"}, 0.001, 0.01, 0.001, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}, TrackedSymbols -> True]

```

Figura 1: Código das funções trigonométricas

Primeiramente, temos o gráfico da função seno, como podemos observar abaixo. O menu no lado esquerdo da figura exhibe as características da função que podem ser alteradas somente com o auxílio do mouse. No ícone função, temos as seguintes opções: seno, cosseno, tangente, secante, cosecante e cotangente. Podemos também alterar a cor da curva no ícone cor, que possui as opções: preto, vermelho, laranja, amarelo, verde, azul e violeta. O item espessura diz respeito à espessura da curva (“mais grossa” ou “mais fina”). Observe que alguns itens no menu possuem um sinal de + (por exemplo, a frequência). Quando clicamos sobre tal sinal, aparece uma barra com algumas opções (por exemplo, na amplitude) o que permite exibir uma animação do gráfico.

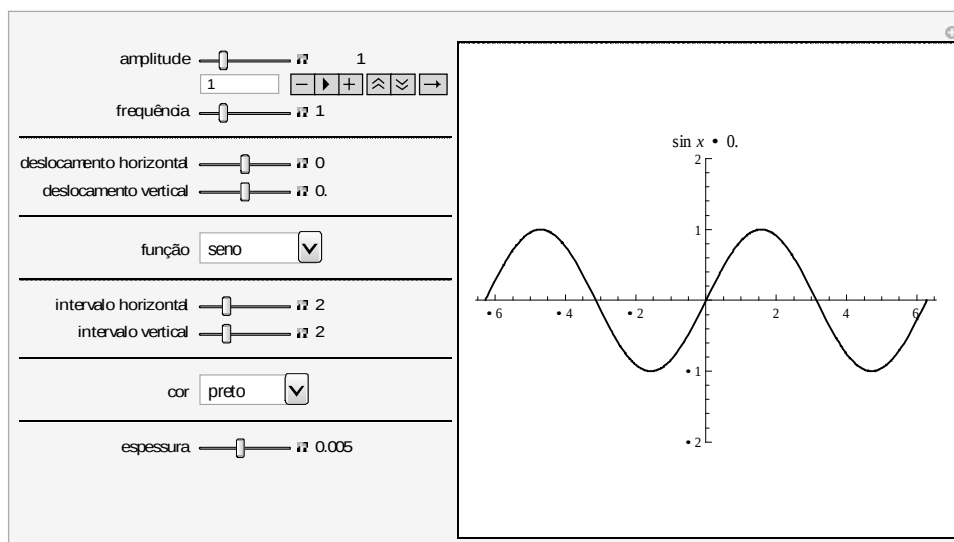


Figura 2: Gráfico da função seno

No próximo gráfico podemos observar que a função seno tem sua amplitude alterada para 2 e deslocou-se 0.5 unidades para a direita, dando origem ao gráfico de $f(x) = 2 \sin(x - 0.5)$.

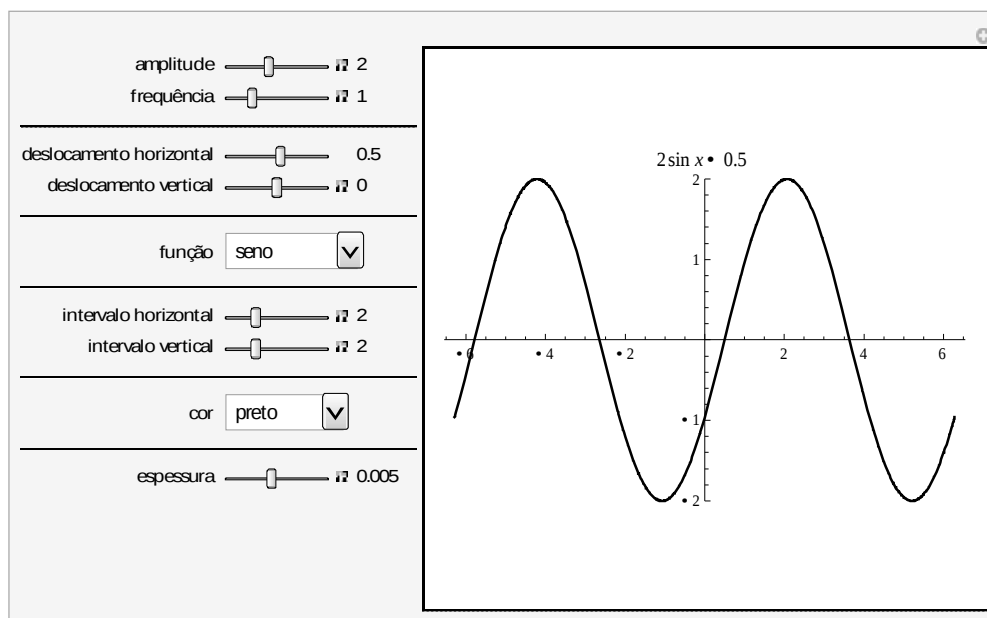


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = 2 \sin(x - 0.5)$

Já a Figura 4 mostra a função seno com frequência 2 e deslocada 0.5 unidades para baixo, cuja representação algébrica é $f(x) = \sin(2x) - 0.5$.

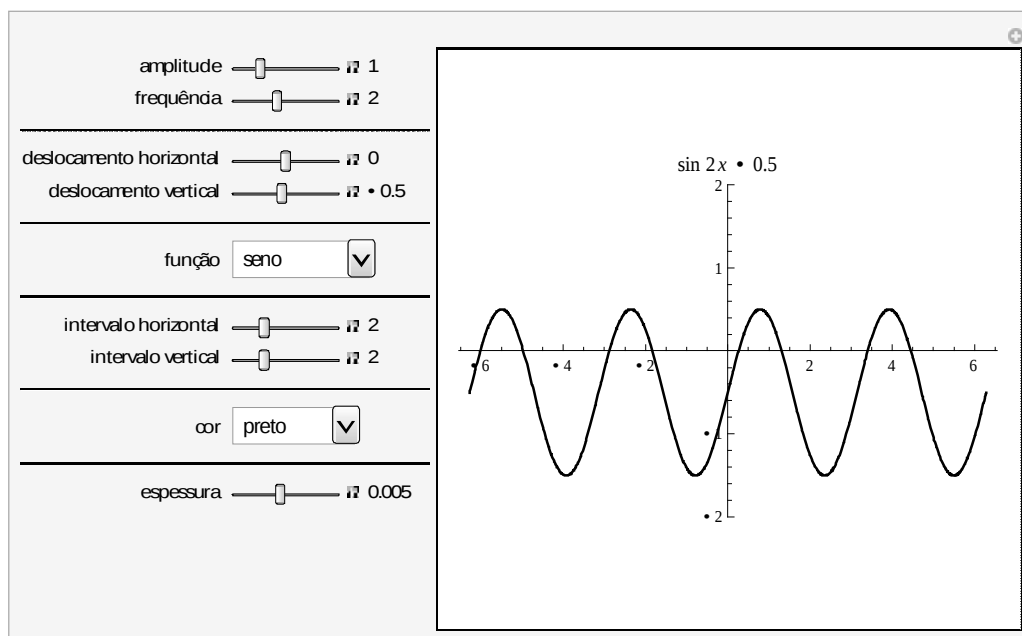


Figura 4: Gráfico da função $f(x) = \sin(2x) - 0.5$

No caso das funções exponenciais, através do código representado pela Figura 5, geramos o gráfico da função $f(x) = ae^{bx} + c$, com a , b e c constantes reais, $a, b, c \in [-10, 10]$, onde é possível explorar as seguintes características de $f(x)$:

- A raiz real de $ae^{bx} + c = 0$ ocorre quando $x = \ln\left(-\frac{c}{a}\right)$, onde $a \neq 0$ e $-\frac{c}{a} > 0$ (veja, por exemplo, a Figura 7). Para o caso em que $-\frac{c}{a} < 0$, o gráfico não possui raiz real e, conseqüentemente, o gráfico de $f(x)$ não cruza o eixo x (Figura 6, por exemplo).
- Se $a = 0$, o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo x , dada por $y = c$.
- Se $b = 0$, o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo x , dada por $y = a + c$.
- Se $c = 0$, a função é representada por $f(x) = ae^{bx}$ e, dependendo do sinal das constantes a e b , o gráfico de f pode ter os comportamentos representados nas Figuras 8, 9, 10 e 11.
- Os casos em que as constantes a , b e c são não nulas podem ser explorados diretamente no software, pois são oito casos distintos para serem representados.

```
Manipulate[Plot[a*Exp[b*x] + c, {x, -5, 5}, PlotLabel -> ToLowerCase[ToString[Função]][a*Exp[b*x] + c], PlotRange -> {-20, 20}, BaseStyle -> {Medium, FontFamily -> "Helvetica"},
  AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle -> {Thickness[0.005], Hue[.6]}, ImageSize -> {500, 300}, Background -> RGBColor[1., 1., 0.8]],
  {{a, 0, "a"}, -10, 10, 0.1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}, {{b, 0, "b"}, -10, 10, 0.1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
  {{c, 0, "c"}, -10, 10, 0.1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}, SaveDefinitions -> True, TrackedSymbols -> Manipulate]
```

Figura 5: Código da função exponencial

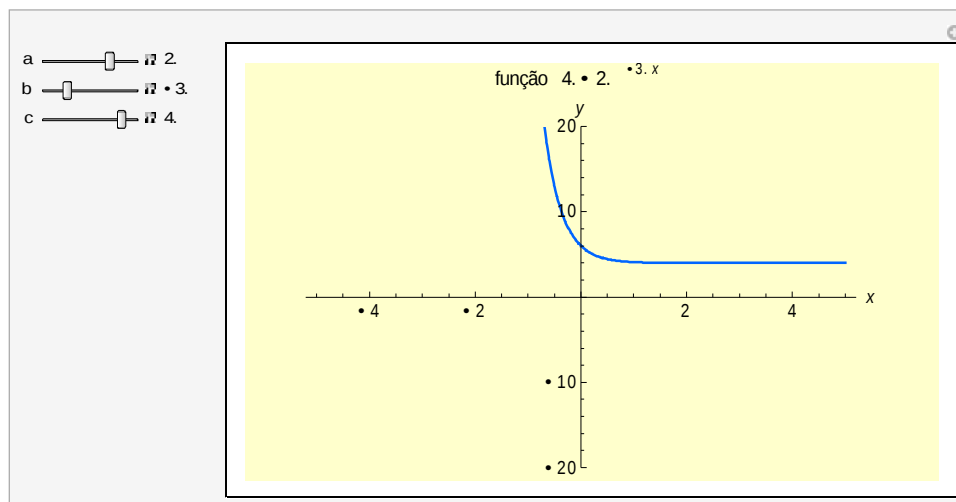


Figura 6: Gráfico da função $f(x) = 2e^{-3x} + 4$

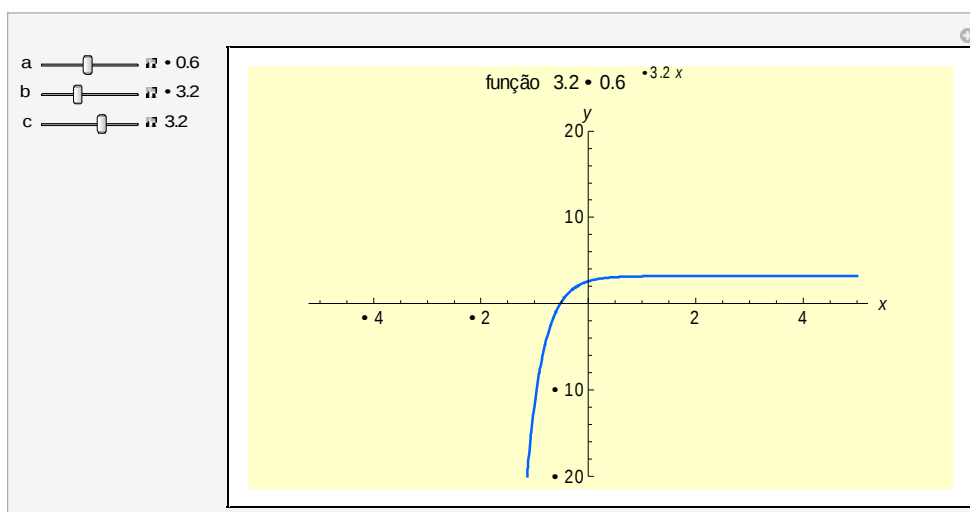


Figura 7: Gráfico da função $f(x) = -0.6e^{-3.2x} + 3.2$

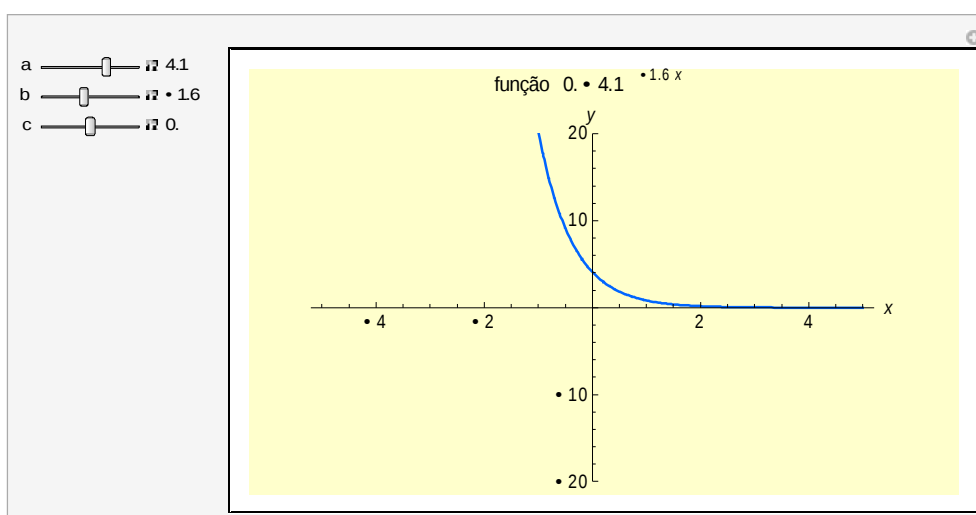


Figura 8: Gráfico da função $f(x) = 4.1e^{-1.6x}$

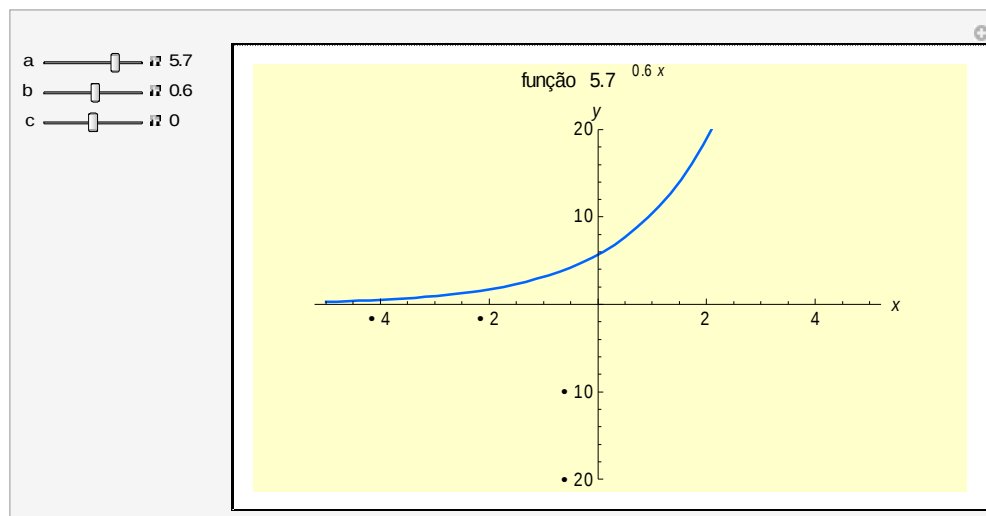


Figura 9: Gráfico da função $f(x) = 5.7e^{0.6x}$

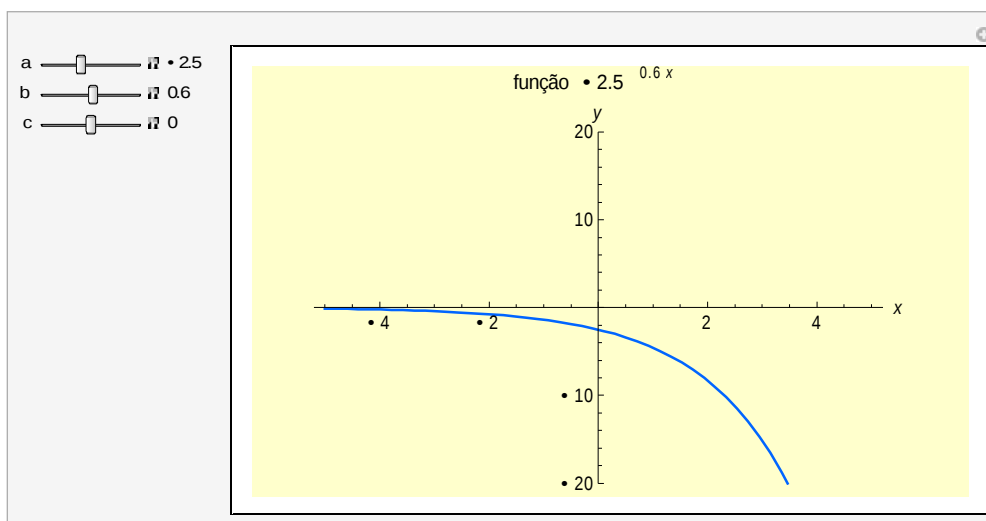


Figura 10: Gráfico da função $f(x) = -2.5e^{0.6x}$

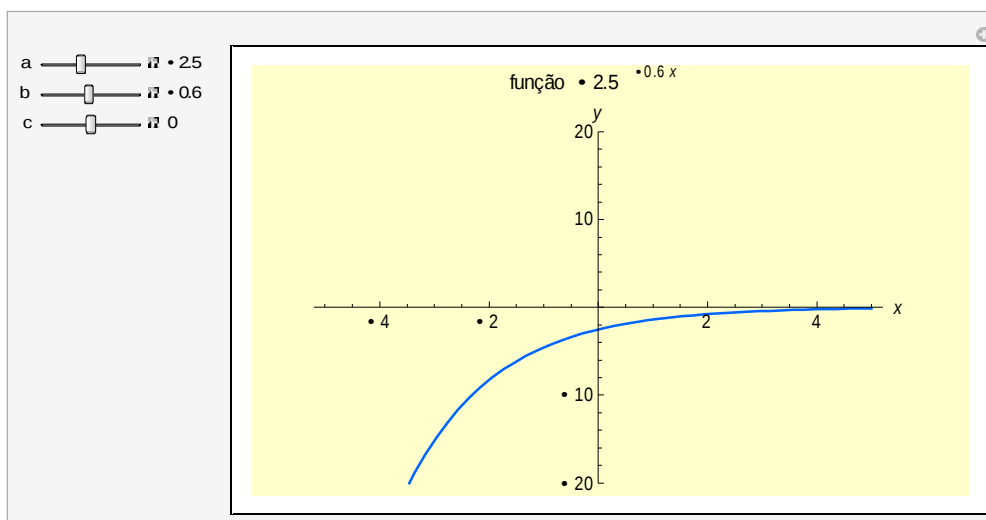


Figura 11: Gráfico da função $f(x) = -2.5e^{-0.6x}$

No caso da função quadrática, a Figura 12 apresenta o código que dá origem ao gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são constantes reais, $a, b, c \in [-10, 10]$. Observe que se $a = 0$ temos uma função do primeiro grau, cujo gráfico é uma reta. Considerando $a \neq 0$, o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima quando $a > 0$ (Figuras 13 e 14) e a concavidade voltada para baixo se $a < 0$ (Figura 15). Os zeros de $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocorrem quando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. As Figuras 13, 14 e 15 mostram os casos em que f tem duas raízes complexas, duas raízes reais e distintas e uma raiz de multiplicidade 2, respectivamente.

```
Manipulate[Plot[a*x^2 + b*x + c, {x, -5, 5}, PlotLabel -> ToLowerCase[ToString[Função]] [a*x^2 + b*x + c], PlotRange -> {-20, 20}, BaseStyle -> {Medium, FontFamily -> "Helvetica"},
  AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle -> {Thickness[0.005], Hue[.6]}, ImageSize -> {500, 300}, Background -> RGBColor[1, 1, 0.8],
  {{a, 0, "a"}, -4, 4, 0.1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}, {{b, 0, "b"}, -5, 5, 0.1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny},
  {{c, 0, "c"}, -5, 5, 0.1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}, SaveDefinitions -> True, TrackedSymbols -> Manipulate]
```

Figura 12: Código da função quadrática

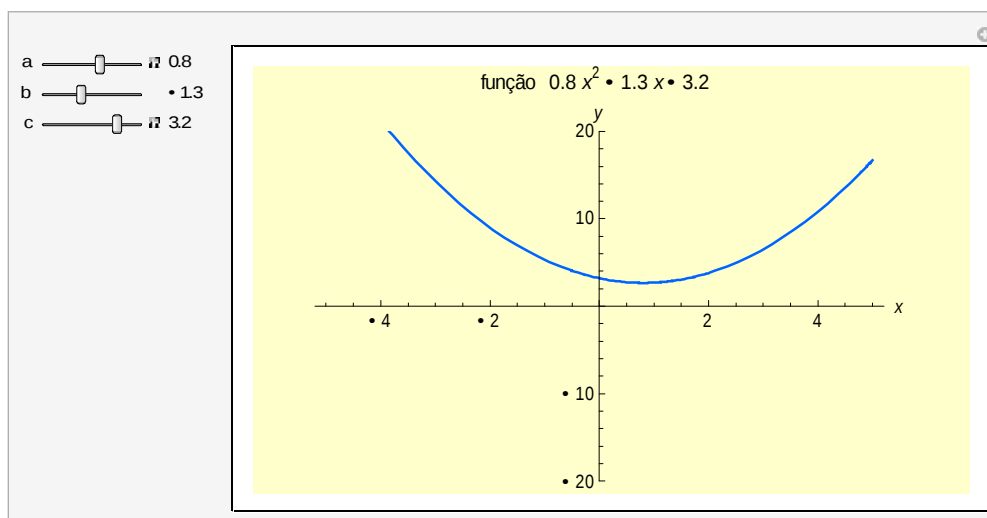


Figura 13: Gráfico da função $f(x) = 0.8x^2 - 1.3x + 3.2$

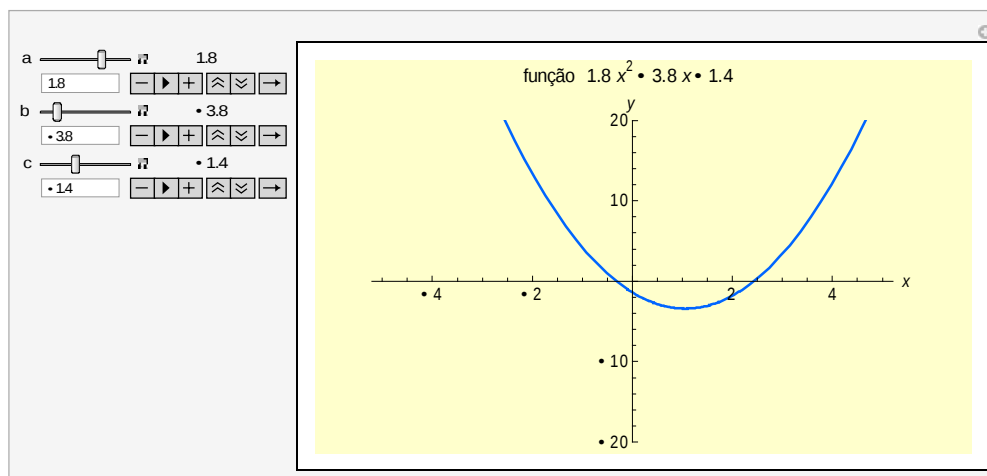


Figura 14: Gráfico da função $f(x) = 1.8x^2 - 3.8x - 1.4$

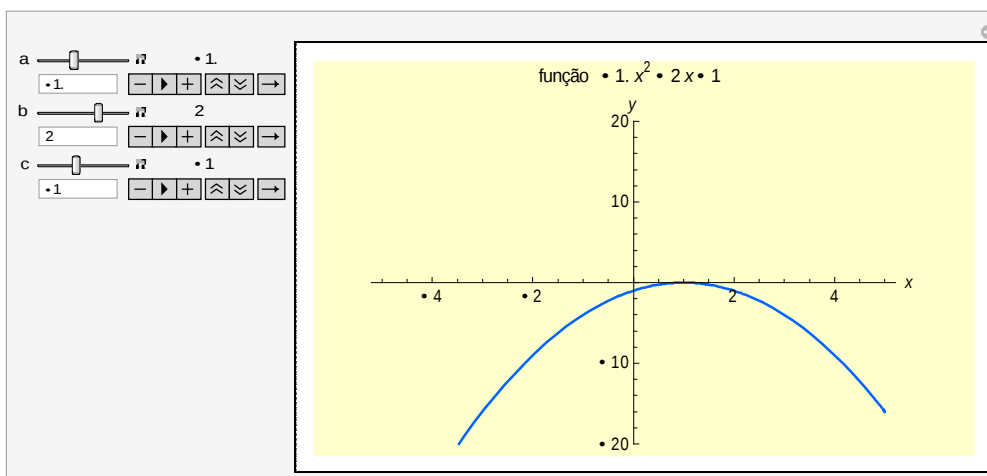


Figura 15: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

4. Conclusão

Através dos itens abordados na seção anterior foi possível observar que o uso do software *Mathematica*[®] facilita a visualização das características das funções apresentadas, o que permite uma aprendizagem satisfatória por parte dos alunos. Além disso, os códigos apresentados podem servir de base para a elaboração de novos programas, os quais podem ser submetidos para publicação no site da Wolfram Demonstrations Project.

5. Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino médio.

Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, DF, 1988. 146 p.

[2] BOTTA, V. A.; MENEGUETTE, M.. Zeros of a perturbed polynomial.

Disponível em:

<<http://demonstrations.wolfram.com/search.html?query=vanessa+botta>>.

Acesso em: 30 abr. 2011.

[3] BOTTA, V. A.; NÉSPOLI, C.; MESSIAS, M.. Zeros Bifurcation analysis of a cubic memristor model. Disponível em:

<<http://demonstrations.wolfram.com/search.html?query=vanessa+botta>>.

Acesso em: 30 abr. 2011.

[4] JESTER, M. Graphs of the Six Trigonometric Functions. Disponível em:

<<http://demonstrations.wolfram.com/GraphsOfTheSixTrigonometricFunctions/>>.

Acesso em: 30 abr. 2011.